第七章　二阶电路

§ 7-1　LC电路中的正弦振荡

§ 7-2　RLC串联电路的零输入响应

§ 7-3　RLC串联电路的零输入响应和全响应

§ 7-4　GCL并联电路的分析

第七章　二阶电路

作业：

7-2，　7-3，　7-4，　7-5，　7-7，　7-8

§7-1 LC电路中的正弦振荡

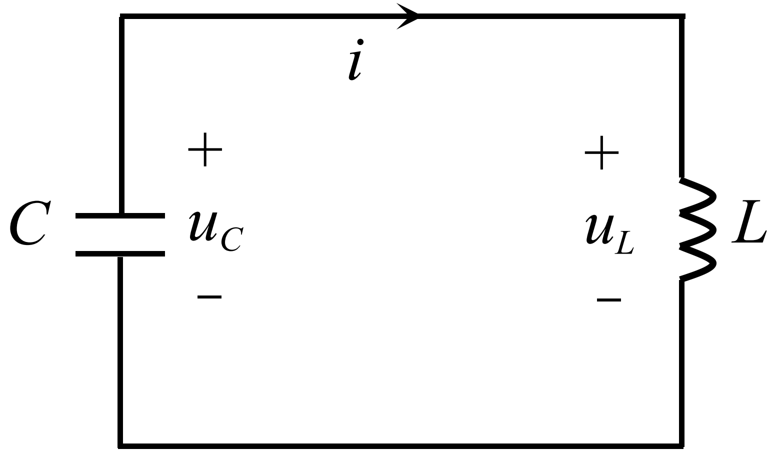
二阶电路：

- 包含1个电容和1个电感、或2个不可合并电容和2个不可合并电感的动态电路。
- 可包含任意数目的电阻、独立源和受控源。
- 可以用一个二阶微分方程或两个联立的一阶微分方程来描述。
- 分析方法：求解二阶微分方程或联立一阶微分方程的问题，确定固有频率（特征根）与固有响应的关系（或振荡形式）。

§7-1　LC电路中的正弦振荡

研究电容和电感组成的零输入响应：

只含有一个C和一个L的电路，涉及电场能量和磁场能量



§7-1 LC电路中的正弦振荡

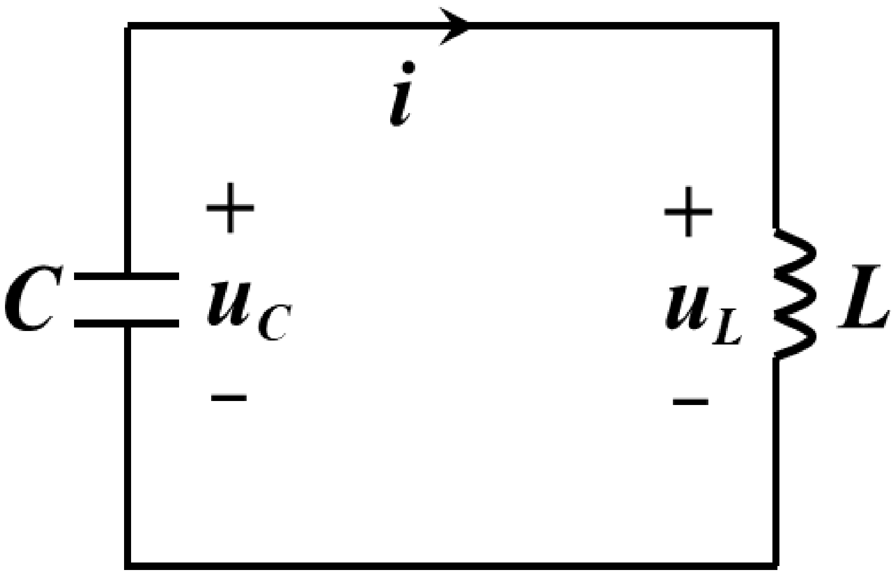
例：研究只含有一个C和一个L的电路的零输入响应，设电容的初始电压为U_0，电感的初始电流为0，即：

设 $u_C(0)=U_0$

$i_L(0)=0$

$i=i_L=i_C=-C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

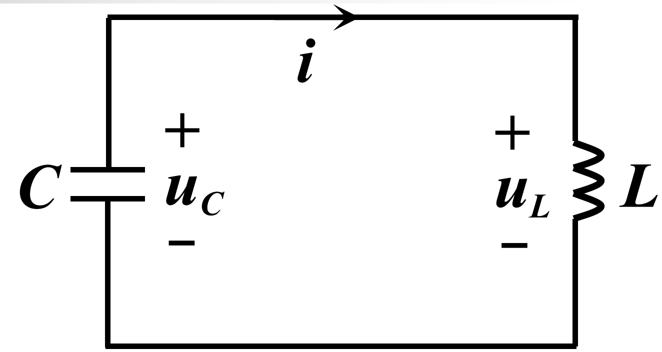
$u_L=u_C=L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$



§ 7-1 LC电路中的正弦振荡

只含有一个C和一个L的电路

$i = i_L = i_C = -C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ $\quad u_L = u_C = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$



I.初始时刻(电容放电）

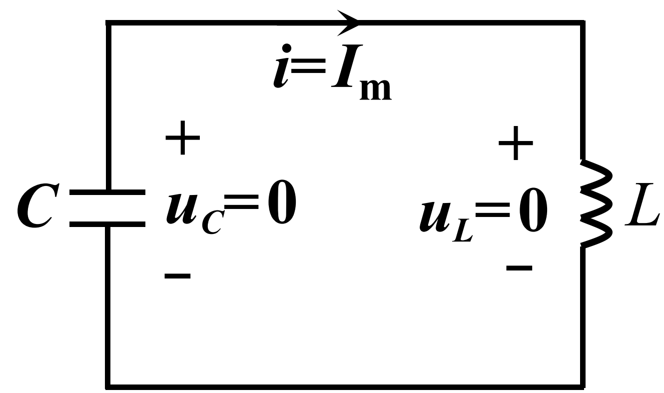
$$\begin{cases} u_C(0) = U_0 \qquad i_L(0) = 0 \\ \because \quad u_L = u_C = U_0 \neq 0 \qquad u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ \therefore \quad \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \neq 0 \end{cases}$$

当电流开始上升$i\uparrow$,电容开始放电$u_C\downarrow$

§ 7-1 LC电路中的正弦振荡

II. 当$u_C=0$，$u_L=0$时，电容反向充电

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=0$$



当电流 $i=I_m$最大值时

$$i=-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\neq 0 \quad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\neq 0$$

电容储存的电场能量全部转化为电感储存的磁场能量，因为电感电流为状态量，不能跃变，所以此后电感开始输出能量$i\downarrow$，电容开始反向充电$|u_C|\uparrow$

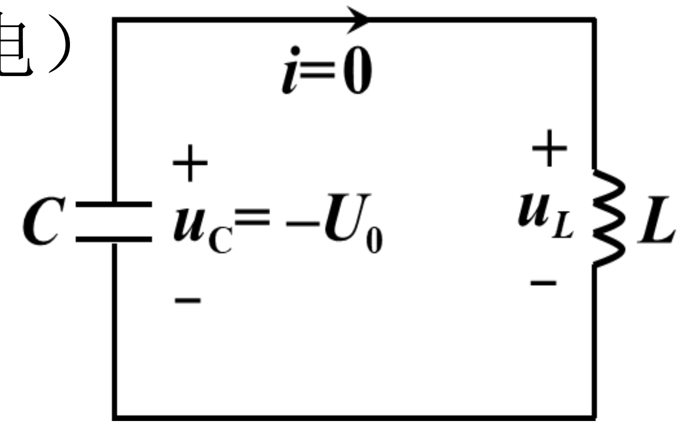
§7-1 LC电路中的正弦振荡

III.当i=0时，$u_C = -U_0$(电容反向放电）

磁场能量全部转成电场能量

因为u_C是状态量，不能跃变，

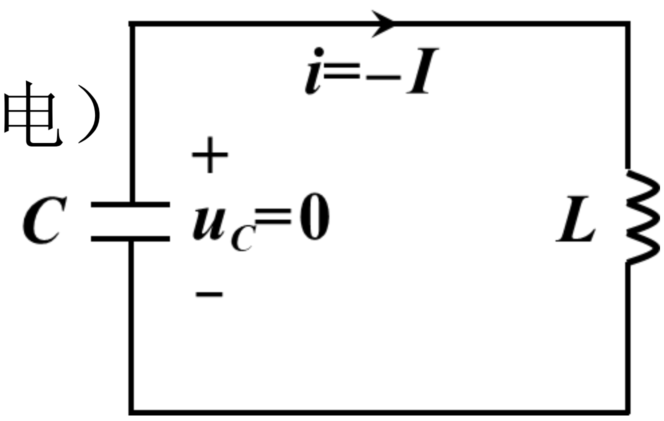
电容放电$|u_C|\downarrow$，$|i|\uparrow$



IV.当u_C=0时，$i = -I$ (电容正向充电）

电场能量全部转成磁场能量

$|u_C|\uparrow$，$|i|\downarrow$

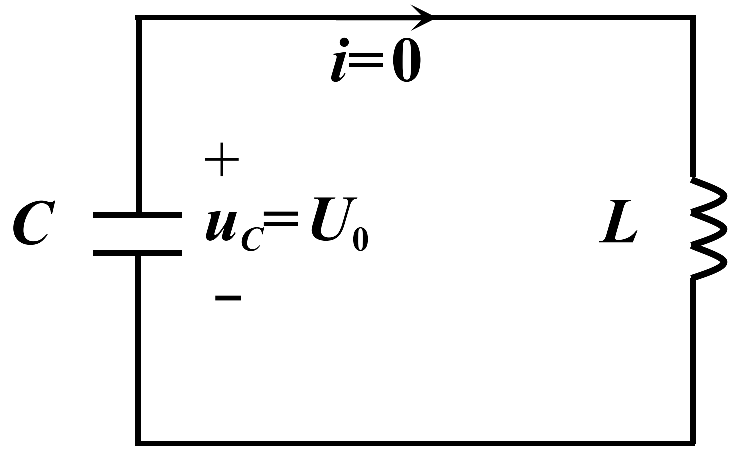


§7-1 LC电路中的正弦振荡

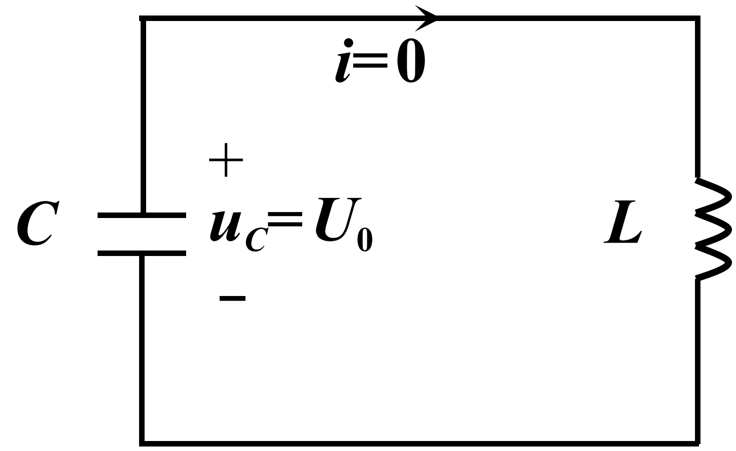
V. 当$u_C = U_0$时，$i = 0$

(电容回到初始状态，再进入正向放电）

磁场能量全部转为电场能量，电路回到初始时刻的状态



§7-1 LC电路中的正弦振荡



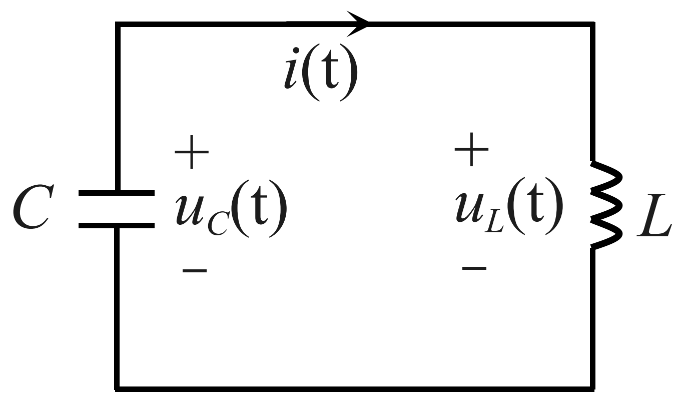
由一个C和一个L构成的电路中，磁场能量和电场能量往返转移，电路中的电压和电流不断改变大小和极性方向，形成周而复始的等幅振荡；如果电路中有电阻，储能将被消耗殆尽，振幅不断减小，即产生阻尼振荡（damped oscillation)或衰减振荡。

§ 7-1 LC电路中的正弦振荡

没有电阻，磁场能量和电场能量往返转移永不消失

$$i(t)=i_C(t)=i_L(t)=-C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$u(t)=u_C(t)=u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

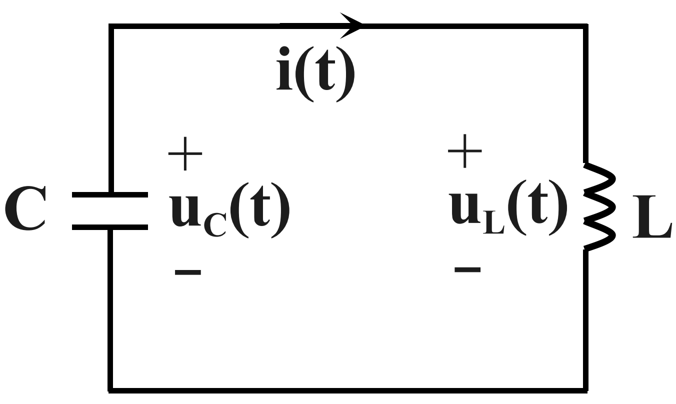


$u(t)=\cos\omega t$　　$i(t)=\sin\omega t$　　等幅振荡、不消耗储能

§ 7-1 LC电路中的正弦振荡

$w_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)$ 电容储能公式

$w_L(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)$ 电感储能公式



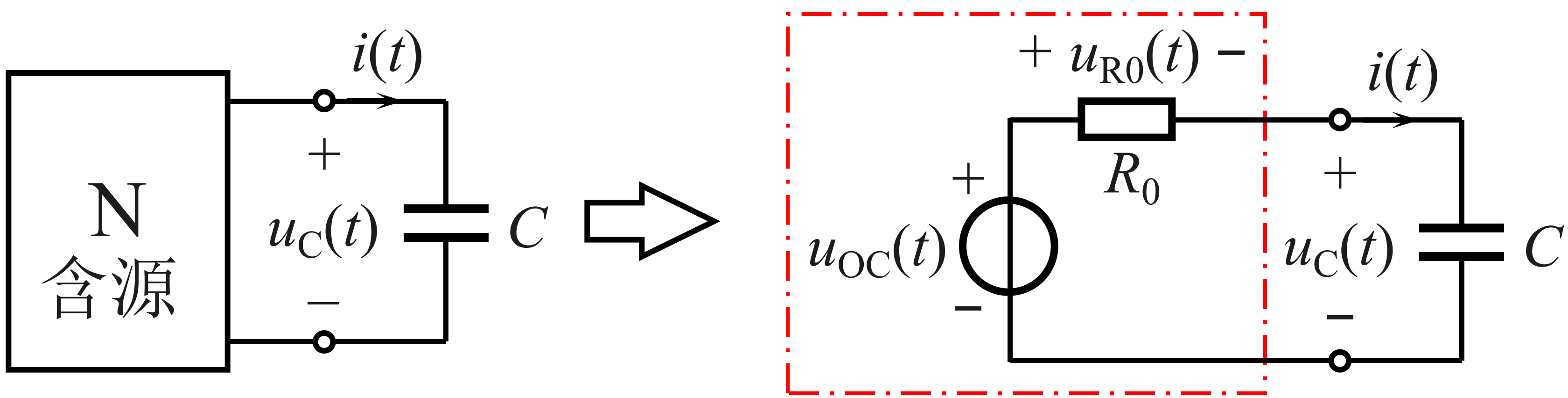
$w(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)+\frac{1}{2}Li^2(t)$ $w(t)=w(0)$

$w(0)=\frac{1}{2}Cu^2(0)+\frac{1}{2}Li^2(0)$ 电容电感不消耗储能

§7-1 LC电路中的正弦振荡

一阶动态电路的等效:

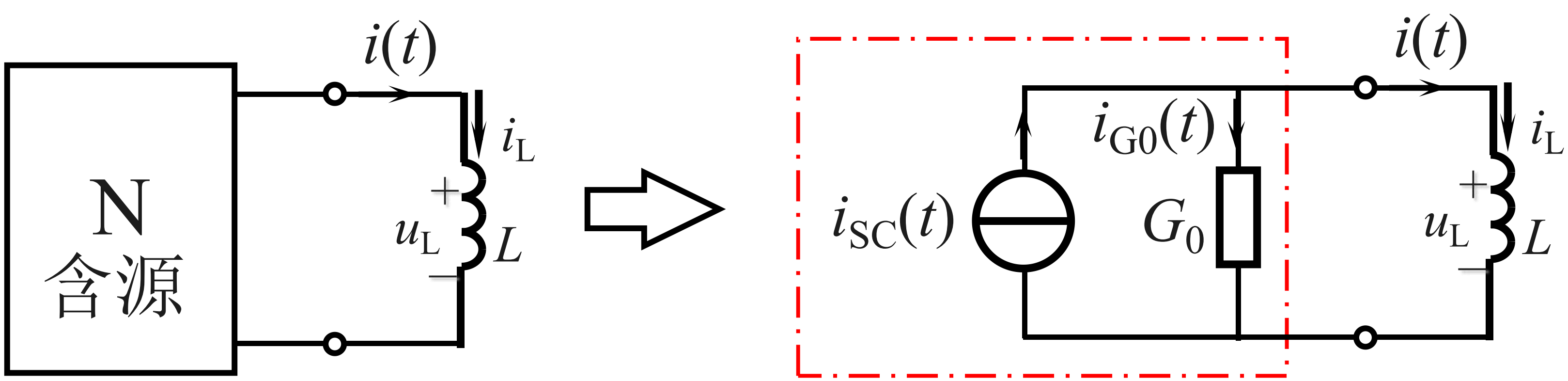
利用戴维南定理或诺顿定理，可将二端含源电阻网络N化简为戴维南等效电路或诺顿等效电路。



§7-1　LC电路中的正弦振荡

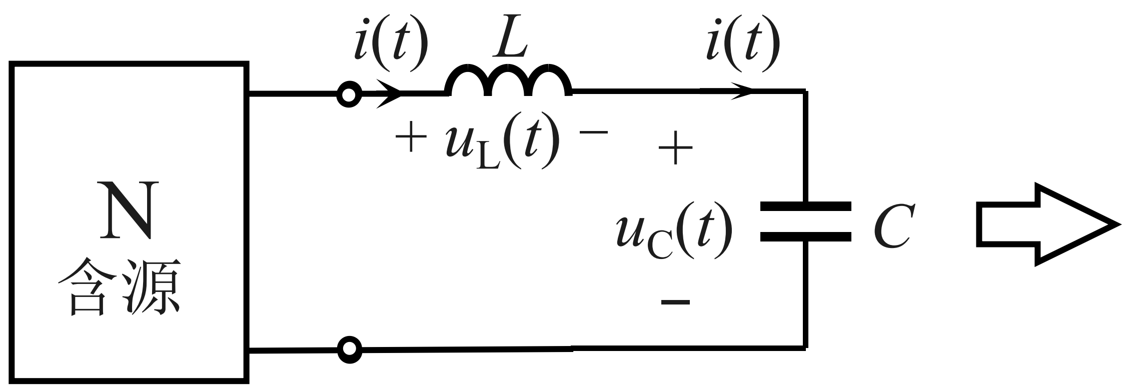
一阶动态电路的等效:

利用戴维南定理或诺顿定理，可将二端含源电阻网络N化简为戴维南等效电路或诺顿等效电路。

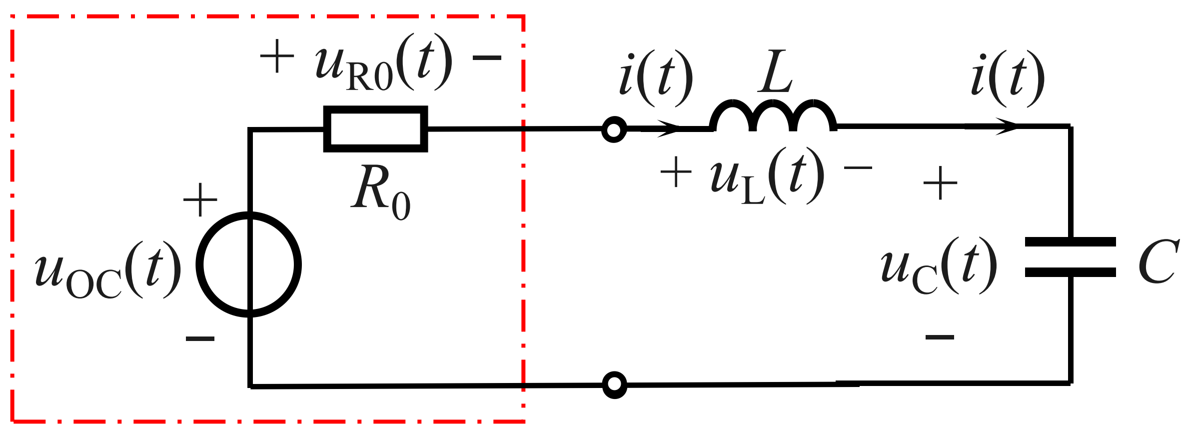


二阶动态电路的等效

利用戴维南定理或诺顿定理，可将二端含源电阻网络N化简为戴维南等效电路或诺顿等效电路。

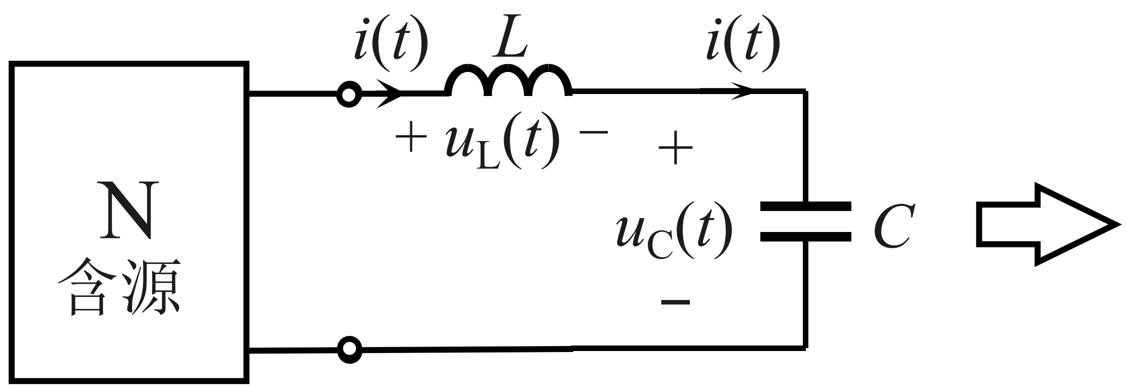


戴维南等效电路

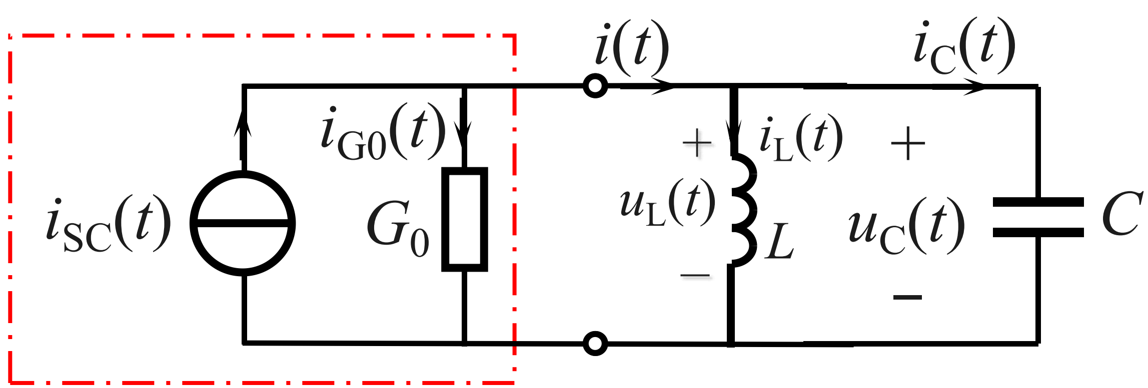


二阶动态电路的等效

利用戴维南定理或诺顿定理，可将二端含源电阻网络N化简为戴维南等效电路或诺顿等效电路。



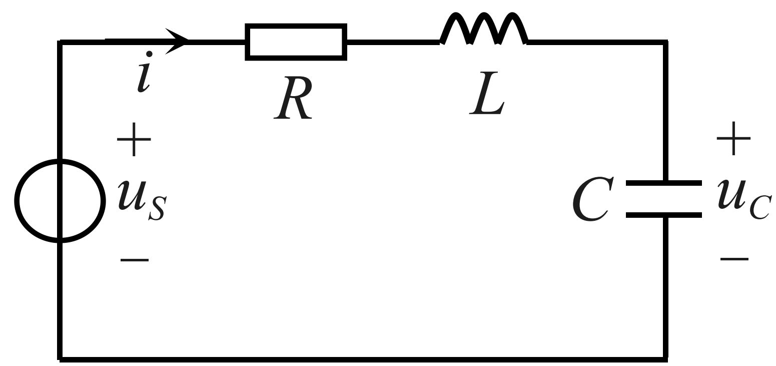
诺顿等效电路



§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应

由KVL $u_L + u_R + u_C = u_S$

求零输入响应 $u_S = 0$

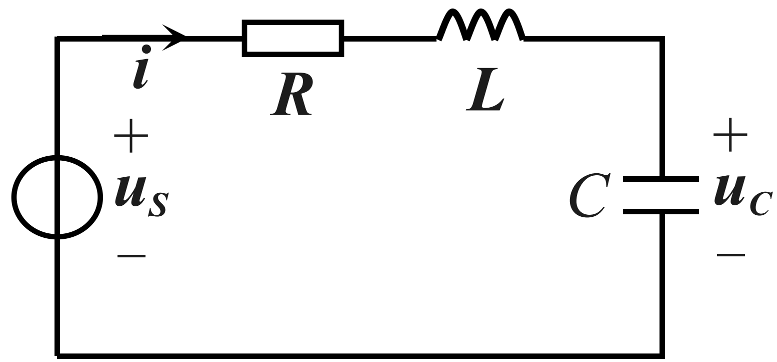


$u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $u_R = Ri$

$L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = u_S$ $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

$u_L = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$ $LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_S$

§7-2 RLC串联电路的零输入响应



零输入 $u_S = 0$

两个初始条件 $u_C(0) = ?$

$i(0)=i_L(0) = ?$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

齐次方程 $\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{i(\mathrm{t})}{\mathrm{C}}\right|_{t=0} = \frac{i(0)}{\mathrm{C}} = ?$

§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应

设试猜解为 $u_C(t) = K\mathrm{e}^{st}$ 代入齐次微分方程

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

$$LCs^2K\mathrm{e}^{st} + RCsK\mathrm{e}^{st} + K\mathrm{e}^{st} = 0$$

$$(\,LCs^2 + RCs + 1\,)\,K\mathrm{e}^{st} = 0$$

特征方程 $LCs^2 + RCs + 1 = 0$

§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应

$$S_{1,2}=\frac{-RC\pm\sqrt{(RC)^2-4LC}}{2LC}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}}$$

根据特征根求解判别式，根号里的值对应四种不同情况，涉及R 与 $R_d=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 的关系，R_d为阻尼电阻。

R，L，C 取值不同，根号里的值有四种不同情况:

§7-2 RLC串联电路的零输入响应

$$s_{1、2}=\frac{-RC\pm\sqrt{(RC)^2-4LC}}{2LC}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

1. $\left(\frac{R}{2L}\right)^2>\frac{1}{LC}$ s_1，s_2为两个不相等的负实数为过阻尼情况。 $R>R_d$ 即 $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$

2. $\left(\frac{R}{2L}\right)^2=\frac{1}{LC}$ s_1，s_2为两个相等的负实数为临界阻尼情况。$R=R_d$ 即 $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$

3. $\left(\frac{R}{2L}\right)^2<\frac{1}{LC}$ s_1，s_2为共轭复数。为欠阻尼情况。 $R<R_d$ 即 $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$

4. $R=0$ s_1，s_2为共轭虚数。 为无阻尼情况。$R=0$

§7-2 RLC串联电路的零输入响应

1. $(\frac{R}{2L})^2 > \frac{1}{LC}$ 即 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

为过阻尼情况 $R > R_d$

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha_1$$

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha_2$$

a_2 , a_1 >0

§7-2 RLC串联电路的零输入响应

通解的形式： $u_C(t)=K_1\mathrm{e}^{s_1t}+K_2\mathrm{e}^{s_2t}=K_1\mathrm{e}^{-\alpha_1t}+K_2\mathrm{e}^{-\alpha_2t}$

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\alpha_1K_1\mathrm{e}^{-\alpha_1t}-\alpha_2K_2\mathrm{e}^{-\alpha_2t}$$

由初始条件确定系数

$$t=0 \Longrightarrow \begin{cases} K_1+K_2=u_C(0)\mathrm{v} \\ -\alpha_1K_1-\alpha_2K_2=\dfrac{i_C(0)}{C} \end{cases}$$

解出 K_1, K_2 $\quad u_C(t)=K_1\mathrm{e}^{-\alpha_1t}+K_2\mathrm{e}^{-\alpha_2t}$

响应是非振荡性的衰减，为过阻尼情况。

例 图示电路中 $C=1\ \mathrm{F}$, $L=1\ \mathrm{H}$, $R=3\ \Omega$;
$u_C(0)=0$, $i_L(0)=1\ \mathrm{A}$; $t\geqslant0$ 时
$u_{OC}(t)=0$, 试求 $u_C(t)$ 及 $i_L(t)$, $t\geqslant0$。

解 串联电路的电阻 R 为 3 Ω

$R_d=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}=2\ \Omega$, 因此 $R>R_d$

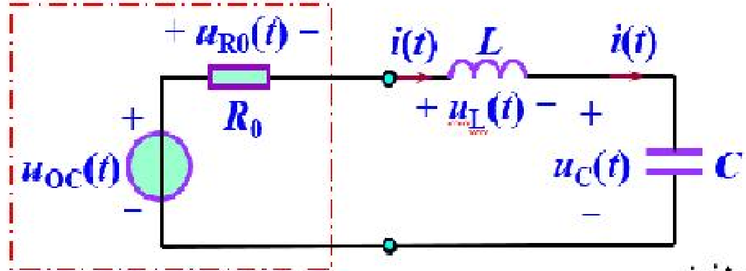
属过阻尼(over damped)情况 其解答形式为

$u_C(t)=K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}$　　s_1、s_2 为特征根, K_1、K_2 由初始条件确定。

电路的微分方程为 $\dfrac{d^2}{dt^2}u_C+\dfrac{R}{L}\dfrac{d}{dt}u_C+\dfrac{1}{LC}u_C=0$

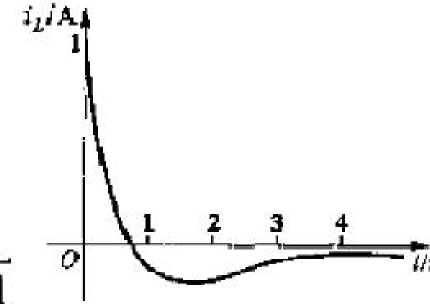
其特征方程为 $s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}\times1=0$ 特征根为 $s_{1,2}=-\dfrac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2-\dfrac{1}{LC}}$

例 图示电路中 $C=1\ \mathrm{F}$，$L=1\ \mathrm{H}$，$R=3\ \Omega$；$u_C(0)=0$，$i_L(0)=1\ \mathrm{A}$；$t\geqslant 0$ 时 $u_{OC}(t)=0$，试求 $u_C(t)$ 及 $i_L(t)$，$t\geqslant 0$。



解 串联电路的电阻 R 为 $3\ \Omega$

$R_d=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}=2\ \Omega$，因此 $R>R_d$



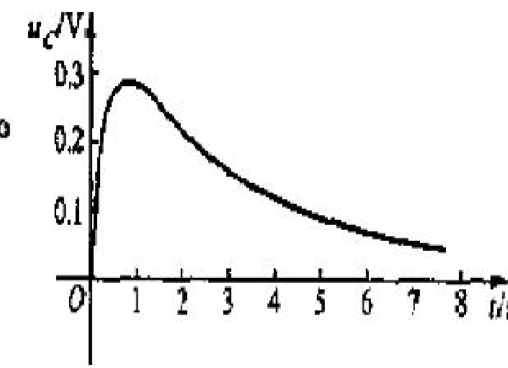
属过阻尼(over damped)情况 其解答形式为

$u_C(t)=K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}$　　s_1、s_2 为特征根，K_1、K_2 由初始条件确定。

电路的微分方程为 $\dfrac{d^2}{dt^2}u_C+\dfrac{R}{L}\dfrac{d}{dt}u_C+\dfrac{1}{LC}u_C=0$

其特征方程为 $s^2+\dfrac{R}{L}s+\dfrac{1}{LC}\times 1=0$ 特征根为 $s_{1,2}=-\dfrac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2-\dfrac{1}{LC}}$

故 $s_1=-0.382$　$s_2=-2.618$



为确定 K_1、K_2 需要知道初始条件 $u_C(0)$ 及 $u_C'(0)$，$u_C'(0)$ 即 $\left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_0$

已知 $u_C(0)=0$ 而 $u_C'(0)$ 可根据 $i_L(0)$ 求得，$\left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_0=\dfrac{i_L(0)}{C}=1$

因此，可得 $u_C(0)=K_1+K_2=0$ 以及 $\left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_0=s_1K_1+s_2K_2=1$

联立以上两式解得

$K_1=0.447$　$K_2=-0.447$ 故得 $u_C(t)=(0.447e^{-0.382t}-0.447e^{-2.618t})\mathrm{V}$　$t\geqslant 0$

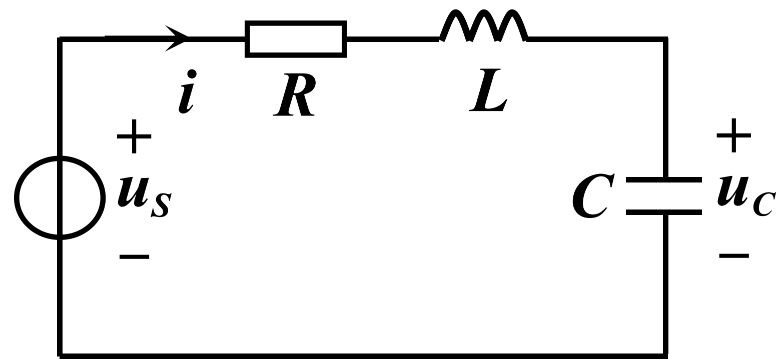
又因 i_L 即流过电容的电流，故得 $i_L(t)=C\dfrac{du_C}{dt}=(-0.171e^{-0.382t}+1.17e^{-2.618t})\mathrm{A}$　$t\geqslant 0$

响应是非振荡性的波形图

由解答中的两项指数函数波形相加获得

§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应

2. $(\frac{R}{2L})^2=\frac{1}{LC}$



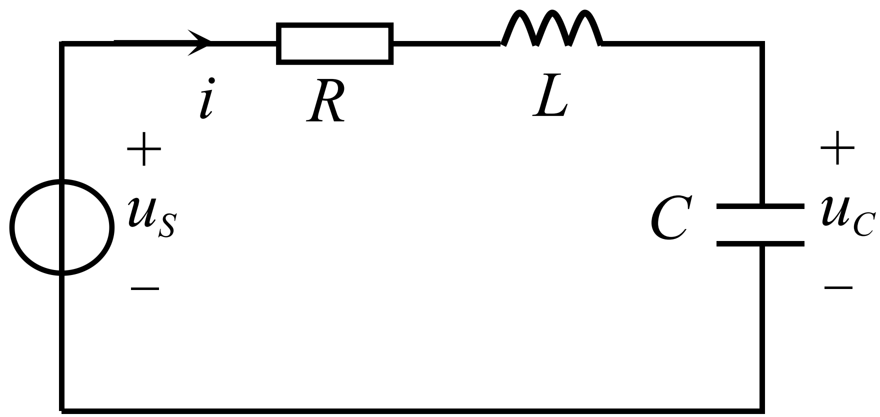
s_1,s_2为两个相等的负实数。

$$s_1=s_2=-\frac{R}{2L}=-\alpha$$

即 $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 为临界阻尼情况。$R=R_d$

§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应

解的形式



$$u_C(t) = K_1 e^{-\alpha t} + K_2 t e^{-\alpha t}$$

$$= (K_1 + K_2 t) e^{-\alpha t}$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = \left[K_2 e^{-\alpha t} - \alpha(K_1 + K_2 t)e^{-\alpha t}\right]\Big|_{t=0} = K_2 - \alpha K_1 = \frac{i_C(0)}{C}$$

$$i_C(0) = i_L(0) \qquad K_2 - \alpha K_1 = \frac{i_L(0)}{C}$$

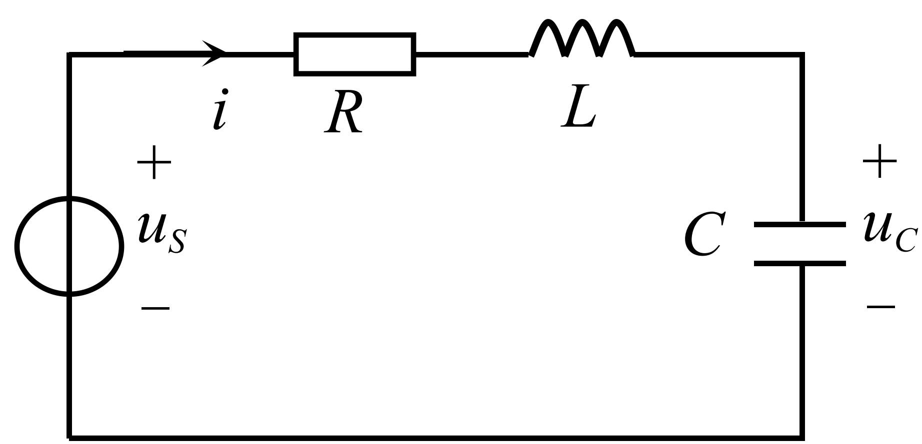
$$K_1 = u_C(0) \qquad K_2 = \frac{i_L(0)}{C} + \alpha u_C(0)$$

§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应

解： $u_C(t)=u_C(0)e^{-\alpha t}+[\dfrac{i_L(0)}{C}+\alpha u_C(0)]te^{-\alpha t}$

$$=\{u_C(0)+[\dfrac{i_L(0)}{C}+\alpha u_C(0)]t\}e^{-\alpha t}$$

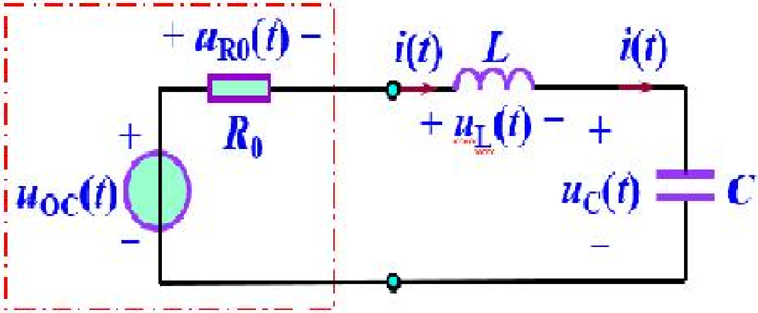
无振荡衰减，临界阻尼 $R=R_d$



例 7－2 图示电路中 $R=1\ \Omega, L=\frac{1}{4}\text{H}, C=1\ \text{F}$；

$u_C(0)=-1\ \text{V}$，$i_L(0)=0; t\geqslant 0, u_{OC}(t)=0$

试求 $i_L(t), t\geqslant 0$。



解 $R_d=2\sqrt{\frac{L}{C}}=1\ \Omega$ 串联电路的电阻 R 为 $1\ \Omega$，

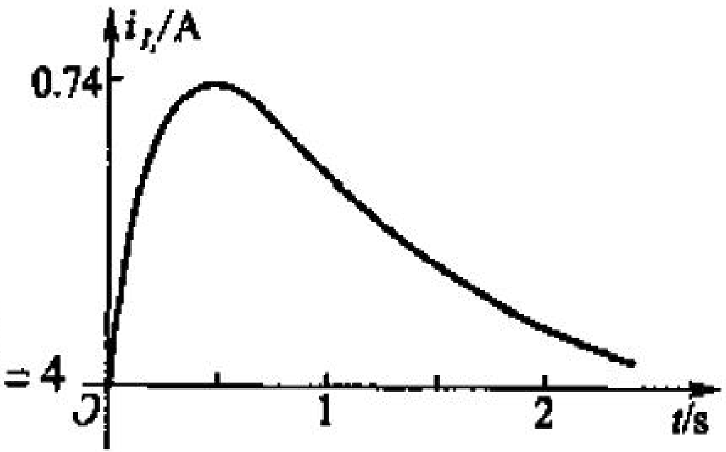
因此 $R=R_d$ 属临界阻尼(critically damped)情况

其解答形式为 $i_L(t)=K_1e^{s_1t}+K_2te^{s_2t}$

特征根为 $s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-2$

初始条件为 $i_L(0)=0$ 根据 KVL，可得 $t=0$ 时应有

$L\left.\frac{di}{dt}\right|_0+u_C(0)+Ri(0)=0$ i 即 i_L，故得 $\left.\frac{di_L}{dt}\right|_0=-\frac{u_C(0)}{L}=4$



临界阻尼时的零输入响应 $i_L(t)$

响应波形图 为非振荡性

由解答形式可知 $i_L(0)=K_1$ $\left.\frac{di_L}{dt}\right|_0=s_1K_1+K_2$

以初始条件代入以上两式可解得 $K_1=0, K_2=4$

本题求解 $i_L(t)$，所需初始条件为 $i_L(0)$ 和 $i_L'(0)$ $i_L(t)=4te^{-2t}\text{A}$ $t\geqslant 0$

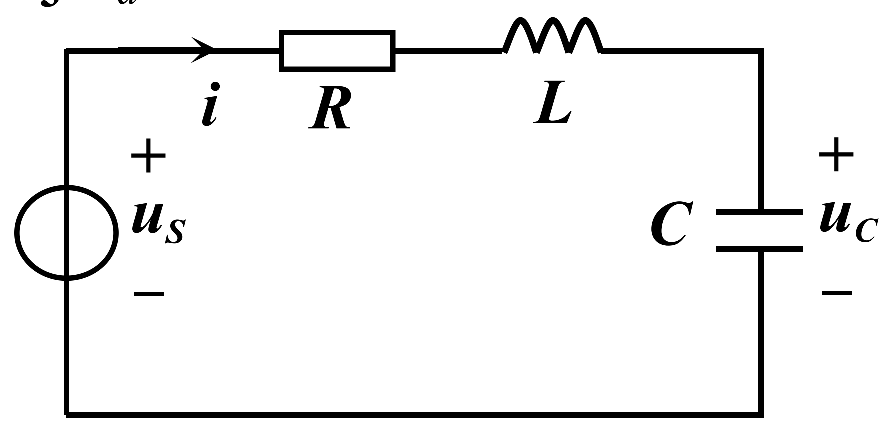
§7-2 RLC串联电路的零输入响应

3. $(\frac{R}{2L})^2 < \frac{1}{LC}$ s_1,s_2为共轭复数 即 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

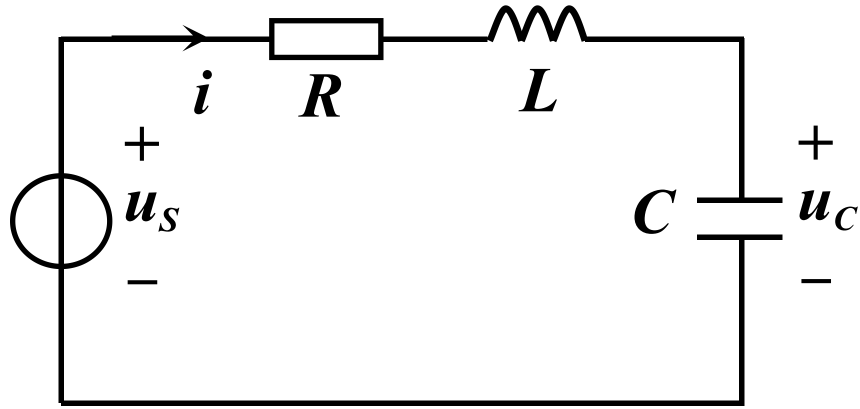
$$s_1 = -\frac{R}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2} = -a + jw_d$$

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2} = -a - jw_d$$

为欠阻尼情况。$R < R_d$



§7-2 RLC串联电路的零输入响应



解： 欠阻尼情况解的形式

$$u_C(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}[K_1\cos\omega_d t+K_2\sin\omega_d t]$$

$$u_C(0)=K_1$$

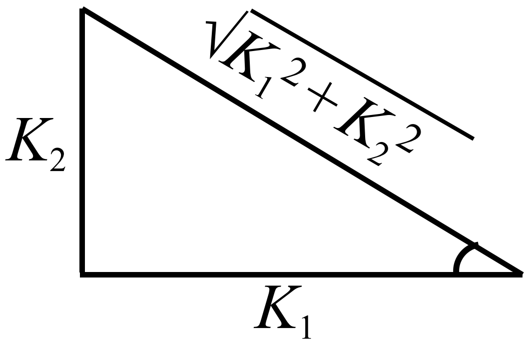
$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=[-\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}(K_1\cos\omega_d t+K_2\sin\omega_d t)$$

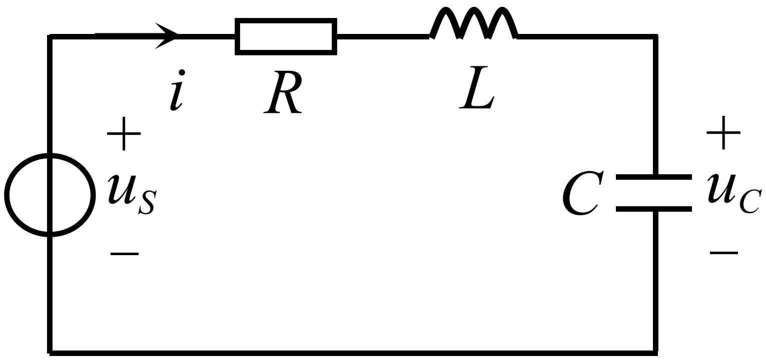
$$\left.+\mathrm{e}^{-\alpha t}(-\omega_d K_1\sin\omega_d t+\omega_d K_2\cos\omega_d t)]\right|_{t=0}$$

$$=-\alpha K_1+\omega_d K_2=\frac{i_L(0)}{C}$$

$$K_2=\frac{i_L(0)}{\omega_d C}+\frac{\alpha u_C(0)}{\omega_d}$$

§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应





$$u_C(t)=e^{-\alpha t}[K_1\cos\omega_d t+K_2\sin\omega_d t]$$

$$=\sqrt{K_1^2+K_2^2}\,e^{-\alpha t}\left[\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\cos\omega_d t+\frac{K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\sin\omega_d t\right]$$

$$\cos\theta=\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\qquad \sin\theta=\frac{K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\qquad \theta=\operatorname{arctg}\frac{K_2}{K_1}$$

§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应

解：利用公式

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

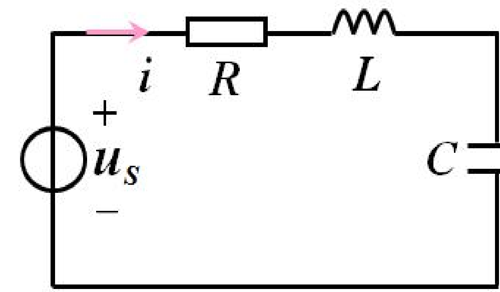
$$u_C(t) = \sqrt{K_1{}^2 + K_2{}^2}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}[\cos\theta\cos\omega_d t + \sin\theta\sin\omega_d t]$$

$$= \sqrt{K_1{}^2 + K_2{}^2}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega_d t - \theta)$$

$$= K\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi)$$

$$K = \sqrt{K_1{}^2 + K_2{}^2} \qquad \phi = -\mathrm{arctg}\frac{K_2}{K_1}$$

例 7－3电路中 $R=1\ \Omega$、$L=1\ \text{H}$、$C=1\ \text{F}$，$u_C(0)=1\ \text{V}$、$i_L(0)=1\ \text{A}$。求零输入响应 $u_C(t)$ 及 $i_L(t)$。



解

$R_d=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}=2\ \Omega$ 串联电路的电阻 R 为 $1\ \Omega$，因此 $R<R_d$

属欠阻尼(under damped)情况

其解答形式为

$$u_C(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}[K_1\cos(\omega_d t)+K_2\sin(\omega_d t)]$$

α、ω_d 为特征根 s_1 和 s_2 的实部和虚部。s_1、s_2 为共轭复数，

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\frac{R}{2L}\pm \mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}=-\frac{1}{2}\pm \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}=-\alpha\pm \mathrm{j}\omega_d$$

特征根为共轭复数，响应是振荡性的，特征根的实部α又称衰减系数 虚部 ω_d 又称衰减振荡角频率

初始条件 $u_C(0)=1\text{V}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_0=\dfrac{i_L(0)}{C}=1$ 由解答形式可知

$$u_C(0)=K_1,\quad \left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_0=-\alpha K_1+\omega_d K_2$$

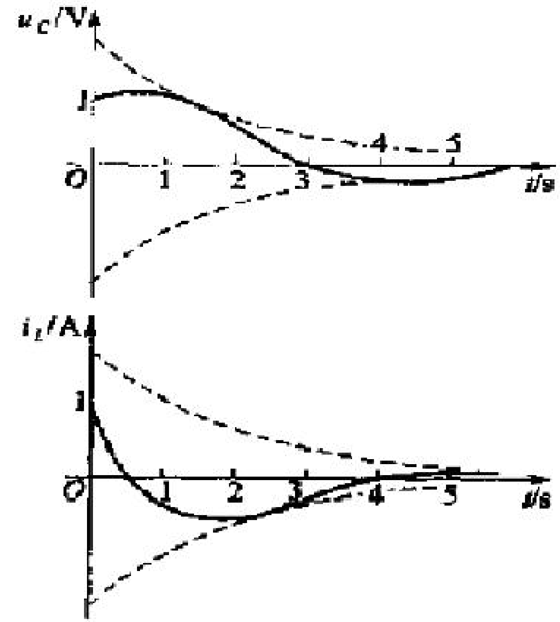
以初始条件代入以上两式可解得 $K_1=1$，$K_2=\sqrt{3}$

$$u_C(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]\text{V}\quad t\geqslant 0$$

$$u_C(t)=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{3}\right)\text{V}\quad t\geqslant 0$$

由 $i_L=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ 得

$$i_L(t)=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)\text{A}\quad t\geqslant 0$$



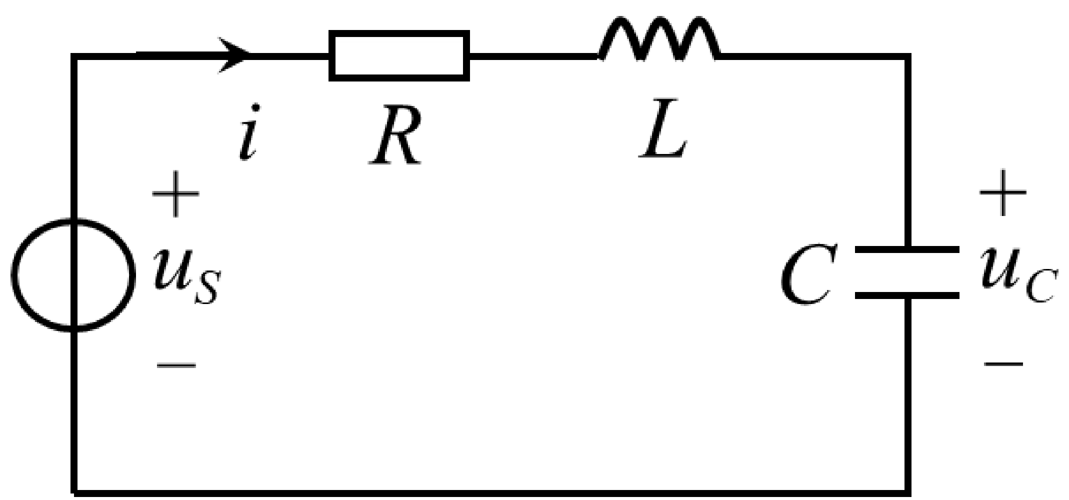
响应为振幅按指数规律衰减的振荡

§7-2 RLC串联电路的零输入响应

例：RLC串联电路的零输入响应为

$u_C(t) = 5e^{-2t}\cos\sqrt{3}t$ V，

已知R=4Ω，求L和C。



§7-2 RLC串联电路的零输入响应

解：由零输入响应的形式可知，此题应为欠阻尼情况。

零输入响应的一般形式为

$$u_C(t) = e^{-\alpha t}[K_1\cos\omega_d t + K_2\sin\omega_d t] \quad R < R_d$$

固有频率

$$s_{1、2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 2 \quad \omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2} = \sqrt{3}$$

解得：L=1H， $C = \frac{1}{7}F$

§7-2 RLC串联电路的零输入响应

4. $R=0$ 无阻尼

$$s_{1、2}=-\frac{R}{2L}\pm \mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}=0\pm \mathrm{j}\omega_0$$

$$s_1=\mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{LC}}=\mathrm{j}\omega_0 \qquad s_2=-\mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{LC}}=-\mathrm{j}\omega_0$$

特征根 s_1，s_2 为共轭虚数

§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应

解形式 $u_C(t)=K_1\cos\omega_0 t+K_2\sin\omega_0 t$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\omega_0 K_2=\frac{i_L(0)}{C}$$

$$\boxed{\begin{aligned} K_1&=u_C(0)\\ K_2&=\frac{i_L(0)}{C\omega_0}\end{aligned}}$$

$$u_C(t)=K\cos(\omega_0 t+\phi)$$

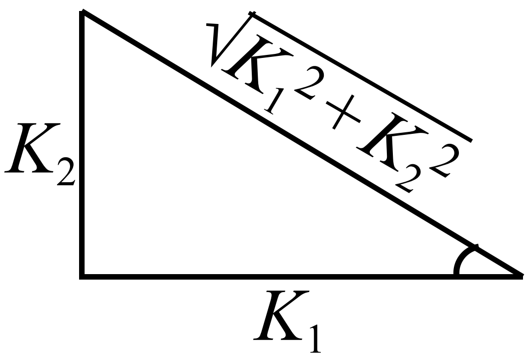
$$K=\sqrt{K_1{}^2+K_2{}^2} \qquad \phi=-\operatorname{arctg}\frac{K_2}{K_1}$$

无衰减等幅振荡

§7-2 RLC串联电路的零输入响应

$$u_C(t)=K_1\cos\omega_0 t+K_2\sin\omega_0 t$$

$$=\sqrt{K_1^2+K_2^2}\left[\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\cos\omega_0 t+\frac{K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\sin\omega_0 t\right]$$



$$\cos\theta=\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\qquad \sin\theta=\frac{K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}$$

$$\theta=\text{arctg}\,\frac{K_2}{K_1}$$

§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应

利用公式

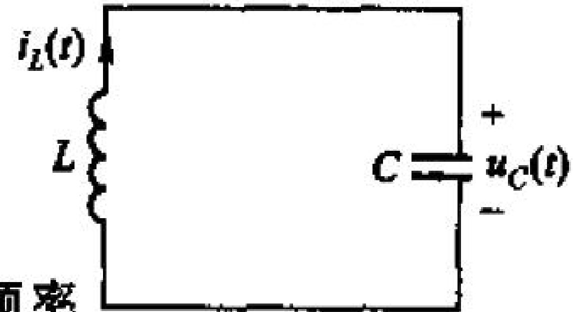
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \sqrt{K_1^2 + K_2^2}\cos(\omega_0 t - \theta)$$

$$= K\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \qquad \phi = -\mathrm{arctg}\frac{K_2}{K_1}$$

例 LC 振荡回路，$L=\frac{1}{16}$H、$C=4$ F，$u_C(0)=1$V、$i_L(0)=1$A。求零输入响应 $u_C(t)$ 及 $i_L(t)$



解 电路电阻 $R=0$，属无限尼情况。由欠阻尼的特征根

当 $R\neq 0$ 时，特征根的虚部 ω_d 可表示为 $\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$

以 $R=0$ 代入可得 $s_{1,2}=\pm\mathrm{j}\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=\pm\mathrm{j}\omega_0=\pm\mathrm{j}2$

无限尼情况解答形式为　　ω_0 称为谐振（resonant）角频率

$u_C(t)=K_1\cos(\omega_0 t)+K_2\sin(\omega_0 t)$　初始条件为　$u_C(0)=1$V　$\left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_0=\dfrac{i_L(0)}{C}=\dfrac{1}{4}$

由解答形式可知　$u_C(0)=K_1$　$\left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_0=\omega_0K_2$　　$K_1=1, K_2=\dfrac{1}{8}$

故得

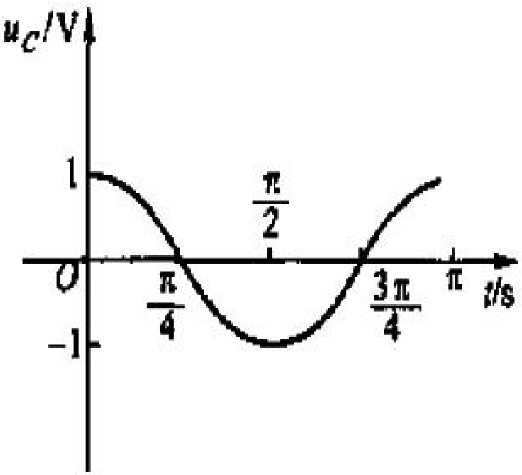
$$u_C(t)=\left[\cos(2t)+\frac{1}{8}\sin(2t)\right]$$

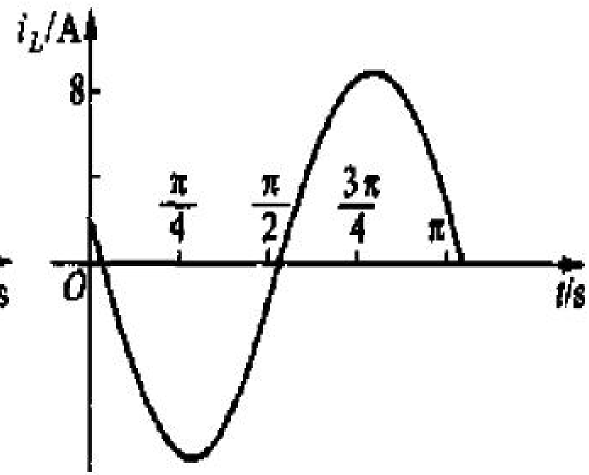
$$=1.01\cos(2t-7^\circ)\text{V}\quad t\geqslant 0$$

$$i_L(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}[-8\sin(2t)+\cos(2t)]$$

$$=8.06\cos(2t+83^\circ)\text{A}\quad t\geqslant 0$$

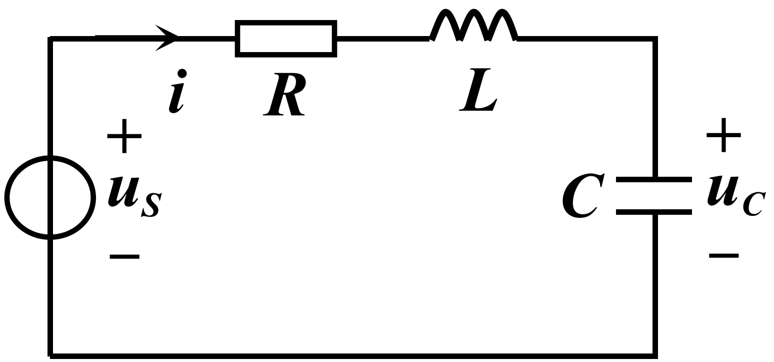
响应为等幅振荡





§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应

例：已知图示电路中$t \geq 0$时



$u_S = 0 \quad R = 3\Omega \quad L = \frac{1}{2}\text{H}$

$C = \frac{1}{4}\text{F} \quad u_C(0) = 2\text{V} \quad i_L(0) = 1\text{A}$

求$u_C(t)$及$i_L(t) \quad t \geq 0$

§7-2 RLC串联电路的零输入响应

解：(1) 若以$u_C(t)$为求解变量

阻尼电阻 $R_d=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}=2.828\ \Omega$

$R > R_d$ 过阻尼情况

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

$$\frac{1}{8}\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{3}{4}\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

§7-2 RLC串联电路的零输入响应

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+6\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+8u_C=0$$

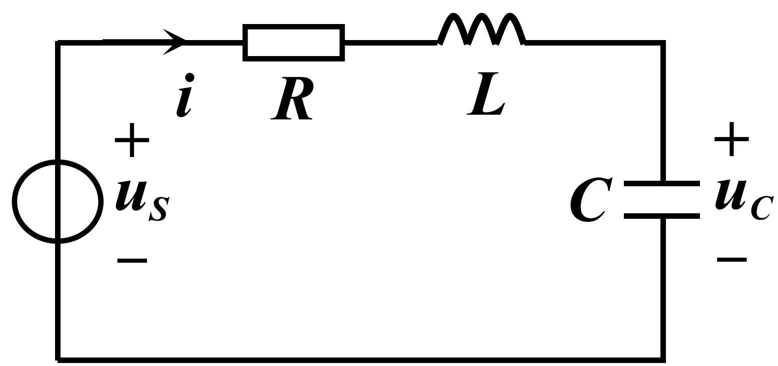
也可利用微分算子 $s^2+6s+8=0$

$$s_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{-6\pm 2}{2}$$

$s_1=-2 \qquad s_2=-4$

§7-2 RLC串联电路的零输入响应

(2) 若以iL(t)为求解变量



$$u_R + u_L + u_C = 0$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$i = C\frac{du_C}{dt}$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

§7-2 RLC串联电路的零输入响应

$$LC\frac{d^3u_C}{dt^3}+RC\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{du_C}{dt}=0$$

$$C(LC\frac{d^3u_C}{dt^3}+RC\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{du_C}{dt})=0$$

$$LC\frac{d^2i}{dt^2}+RC\frac{di}{dt}+i=0$$

$$\frac{1}{8}\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{3}{4}\frac{di}{dt}+i=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2i}{dt^2}+6\frac{di}{dt}+8i=0$$

§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+6\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+8i=0$$

所得到的特征方程一样 $s^2+6s+8=0$

$$s_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{-6\pm 2}{2}$$

$s_1=-2$ $s_2=-4$

$$i_L(t)=K_1\mathrm{e}^{-2t}+K_2\mathrm{e}^{-4t}$$

§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应

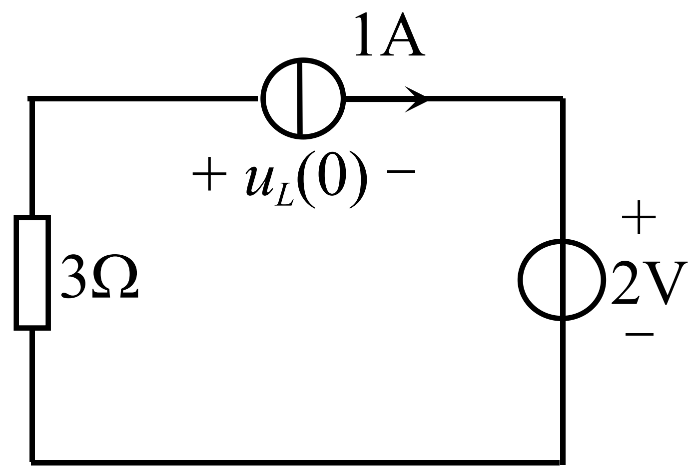
$$i_L(0) = K_1 + K_2 = 1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -2K_1 - 4K_2 = \frac{u_L(0)}{L}$$

$$u_L(0) = -3\times1 - 2 = -5\mathrm{V}$$

$$-2K_1 - 4K_2 = -10$$

得$K_1 = -3$，　$K_2 = 4$



$t = 0$时电路

§7-2 RLC串联电路的零输入响应

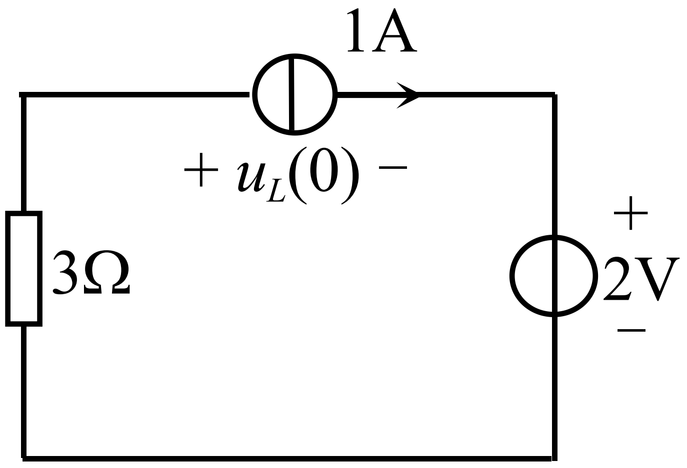
$$i_L(t)=-3e^{-2t}-4e^{-4t}\ \mathrm{A}\quad t\geq 0$$

$$u_C(t)=u_C(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\mathrm{d}t$$

$$=2+4\left(\frac{3}{2}e^{-2t}-e^{-4t}\right)\Big|_0^t$$

$$=2+4\left(\frac{3}{2}e^{-2t}-e^{-4t}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=6e^{-2t}-4e^{-4t}\ \mathrm{V}\quad t\geq 0$$



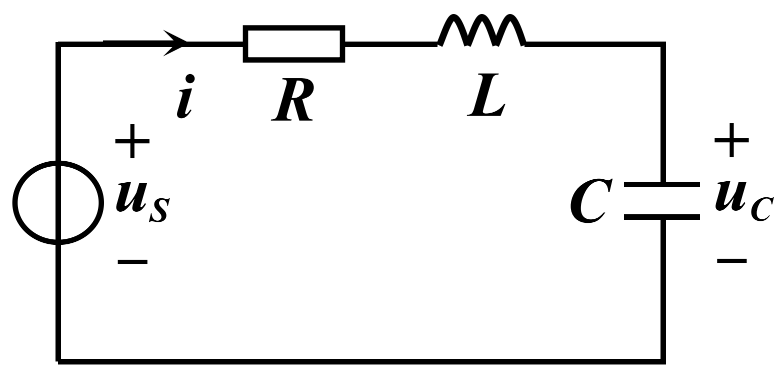
$t=0$时电路

§ 7-2 RLC串联电路的零输入响应

（3） 不列微分方程

阻尼电阻 $R_d = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 2.828\ \Omega$

$R > R_d$ 过阻尼情况



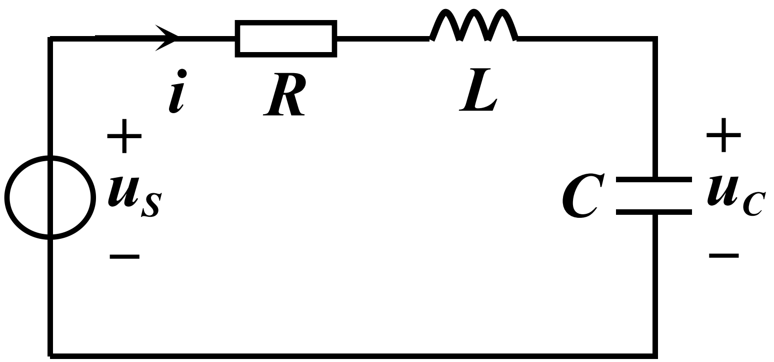
$u_C(t) = K_1 e^{s1t} + K_2 e^{-s2t}$

§7-2 RLC串联电路的零输入响应

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

$$=-3\pm\sqrt{9-8}$$

$$=-3\pm1$$



$$u_C(t)=K_1\mathrm{e}^{-2t}+K_2\mathrm{e}^{-4t}$$

$$=6\mathrm{e}^{-2t}-4\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{V}\quad t\geq0$$

$$s_1=-2$$

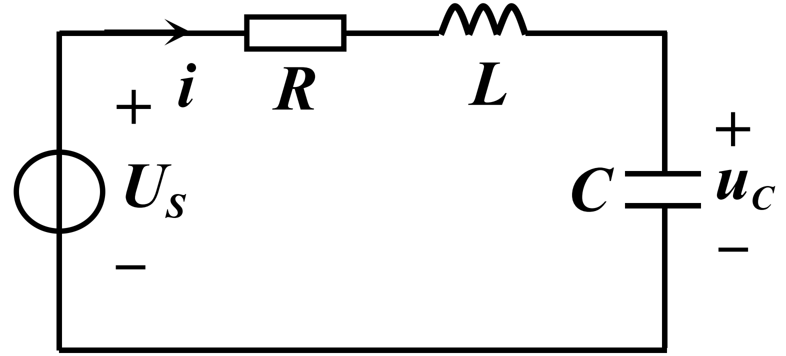
$$s_2=-4$$

$$i_L(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$=-3\mathrm{e}^{-2t}+4\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{A}\quad t\geq0$$

§7-3 RLC串联电路的全响应

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$



$$u_C(0)=?\qquad \left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=?$$

$$u_C(t)=u_{ch}+u_{cp}\qquad LC\frac{\mathrm{d}^2u_{ch}}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_{ch}}{\mathrm{d}t}+u_{ch}=0$$

§7-3　RLC串联电路的全响应

根据特征根的四种不同情况，写出齐次方程解的形式

如果电路为过阻尼 $\begin{array}{l} s_1 = -\alpha_1 \\ s_2 = -\alpha_2 \end{array}$ $u_{ch}(t) = K_1 e^{-\alpha_1 t} + K_2 e^{-\alpha_2 t}$

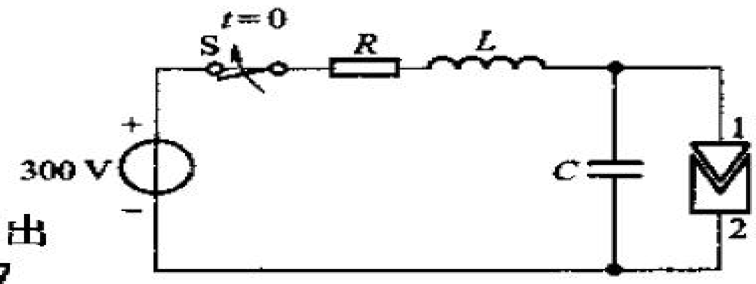
设$u_{cp}(t) = Q$ 与激励形式一样，若为直流激励，

则 $Q = U_S$ $u_C(t) = K_1 e^{-\alpha_1 t} + K_2 e^{-\alpha_2 t} + U_S$

K_1，K_2由初始条件确定

例 电火花加工器的原理电路 $u_C(0_-)=0$ $i(0_-)=0$，开关 S在 $t=0$ 时闭合，电容被充电。电压到达击穿电压时，间隙处即产生电火花放电。

若 $R=50\ \Omega$、$L=0.06$ H、$C=1$ μF，试计算加工频率及电容的最高充电电压。



解 $R_d=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}=489$ $R<R_d$ 电路属欠阻尼状况。

特征方程 $LCs^2+RCs+1=0$ 根据对应的齐次方程得出

特征根 $s_{1,2}=-\dfrac{R}{2L}\pm \mathrm{j}\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R}{2L}}=-\alpha\pm \mathrm{j}\omega_d$ $\alpha=417$ $\omega_d=4060$

设特解为 U_{Cp}，以 $u_C=U_{Cp}$ 得 $U_{Cp}=300\text{V}$ 全响应 $u_C(t)=e^{-\alpha t}[K_1\cos(\omega_d t)+K_2\sin(\omega_d t)]+300$

利用初始条件 $u_C(0)=K_1+300=0$ $\left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_0=-\alpha K_1+\omega_d K_2=\dfrac{i_L(0)}{C}=0$ 确定 K_1、K_2

$K_1=-300$，$K_2=-300\left(\dfrac{\alpha}{\omega_d}\right)$ 解答为 $u_C(t)=\left\{-300e^{-\alpha t}\left[\cos(\omega_d t)+\dfrac{\alpha}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]+300\right\}$ V

为求 $u_C(t)$ 的最大值，u_C 对 t 的导数

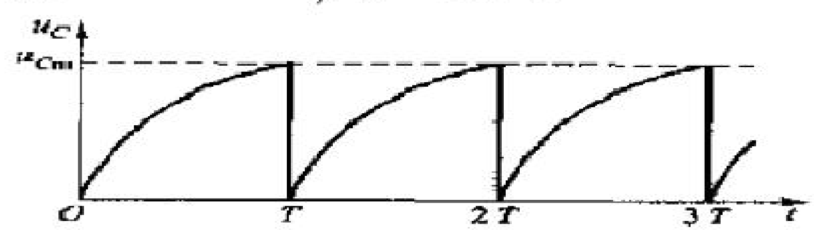
$$\frac{du_C}{dt}=300e^{-\alpha t}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_d^2}}{\omega_d}\right)\sin(\omega_d t)=300\frac{\omega_0}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)$$ 令 $\dfrac{du_C}{dt}=0$，由于 $e^{-\alpha t}\neq 0$，故得

u_C 最大值发生时 $\sin(\omega_d t)=0$ 由此可知，最大值发生在 $t_m=\dfrac{\pi}{\omega_d},\dfrac{3\pi}{\omega_d},\dfrac{5\pi}{\omega_d},\cdots$ 时刻

第一个最大值发生时刻为 $\dfrac{\pi}{\omega_d}=77.4$ ms，以之代入 $u_C(t)$ 得

假设选定的电容电压最大值 $u_C(t_{m1})=300(1+e^{-417\times 77.4\times 10^{-3}})$ V $=516$ V

即为间隙击穿电压，并假设放电在瞬间完成，在再经历 77.4 ms 后，电容将又被充电到达 u_{Cm}，再度放电，因此，电容电压的波形周期为 $T=t_m=77.4$ ms 即加工频率 $f=\dfrac{1}{T}=12.92$ Hz



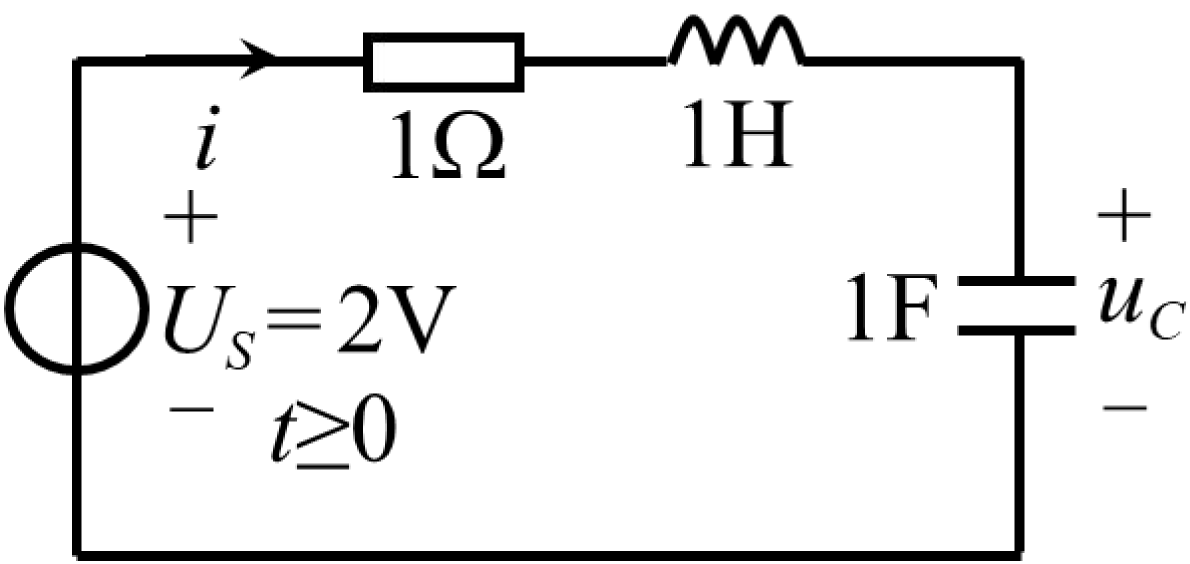
调节 R、L、C 的参数值即能根据加工需要调节加工频率及电容的最高充电电压。

若此例中无工件与电容并联，$u_C(t)$ 是一个最终趋于 300 V 的衰减振荡，最大值高于稳态值的数值常又称为“上冲”(overshoot)。

无放电旁路时 u_c 波形图

§7-3 RLC串联电路的全响应

例． 已知$u_C(0)=0$，$i_L(0)=0$，求图示电路中$u_C(t)$ $(t\geq 0)$



§ 7-3 RLC串联电路的全响应

解：$LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=2 \qquad s^2+s+1=0$$

$$s_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$$ 为欠阻尼情况

$$u_{ch}(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}[K_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+K_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t]$$

设$u_{cp}(t)=Q$ 代入原方程 $Q=2$

§ 7-3 RLC串联电路的全响应

$$u_C(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}[K_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+K_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t]+2$$

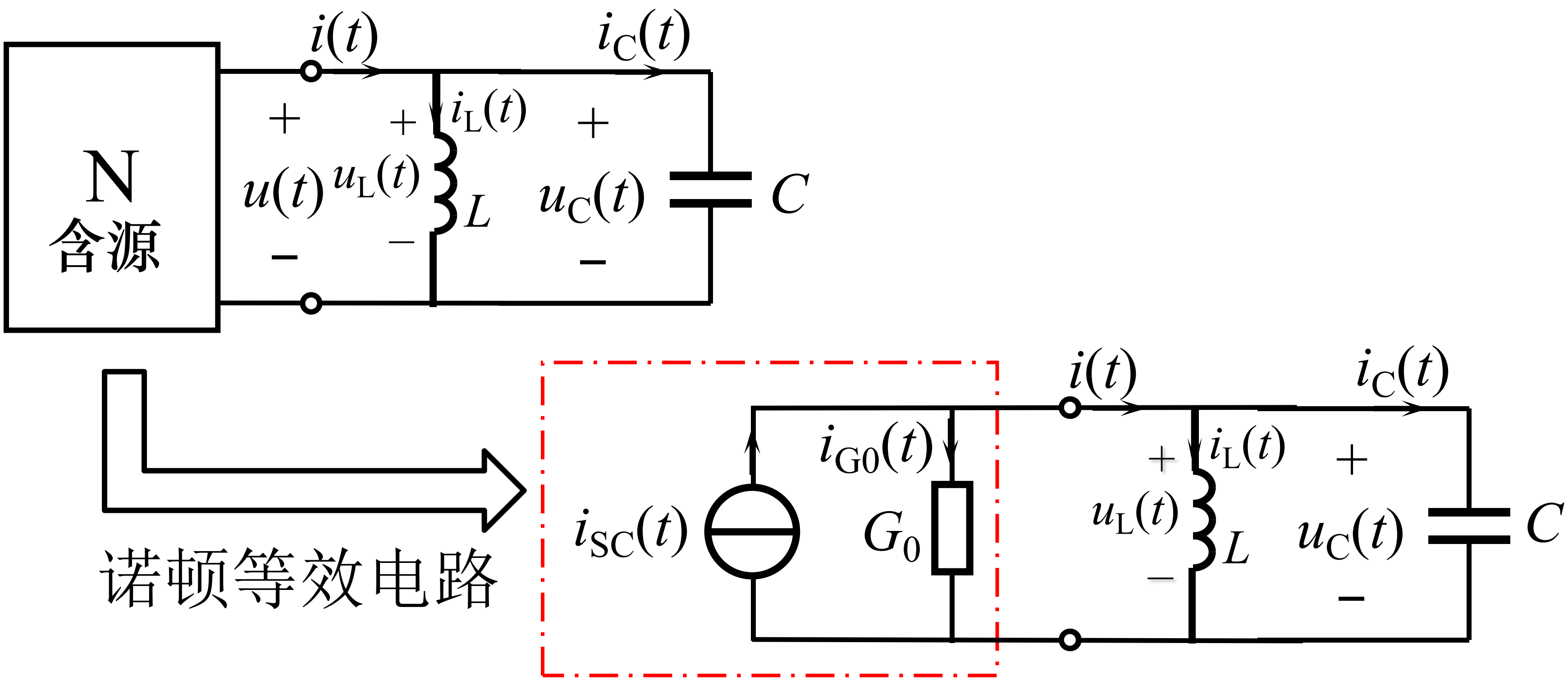
$$\left.\begin{aligned}u_C(0)=K_1+2=0\\ \left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-\frac{1}{2}K_1+\frac{\sqrt{3}}{2}K_2=\frac{i_L(0)}{C}\end{aligned}\right\}\quad K_1=-2\quad K_2=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$u_C(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}[-2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t]+2$$

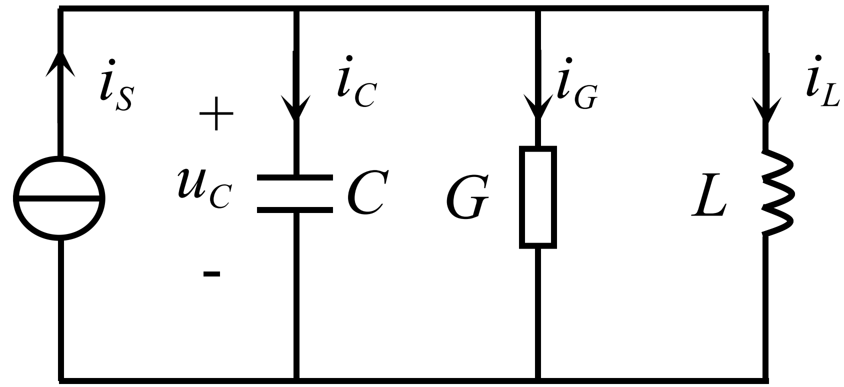
$$=-2.3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t-30^\circ)+2\ \mathrm{V}\qquad t\geq 0$$

§ 7-4 GCL并联电路的分析

利用戴维南定理或诺顿定理，可将二端含源电阻网络 N 化简为戴维南等效电路或诺顿等效电路。



§ 7-4　GCL并联电路的分析



$$i_C+i_G+i_L=i_S$$

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+Gu_C+i_L=i_S$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+GL\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=i_S$$

如果是零输入响应　$i_S=0$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+GL\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+i_L=0 \Longrightarrow LCs^2+GLs+1=0$$

$$s_{1,2}=\frac{-GL\pm\sqrt{(GL)^2-4LC}}{2LC}=-\frac{G}{2C}\pm\sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

§7-4 GCL并联电路的分析

根据固有频率四种情况写出解的形式

$$G_d = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$G > G_d$ 过阻尼衰减非振荡

$G = G_d$ 临界阻尼衰减非振荡

$G < G_d$ 欠阻尼衰减振荡

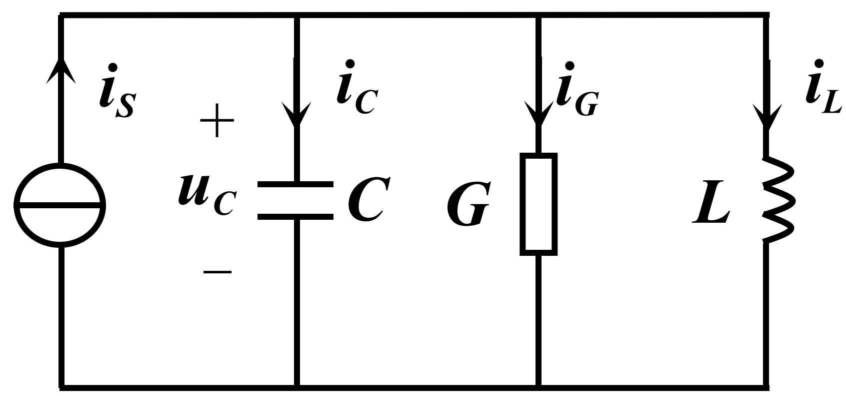
$G = 0$ 无阻尼等幅振荡

四种解的形式类似

§ 7-4　GCL并联电路的分析

定义：阻尼电导　$G_d = 2\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

GCL并联



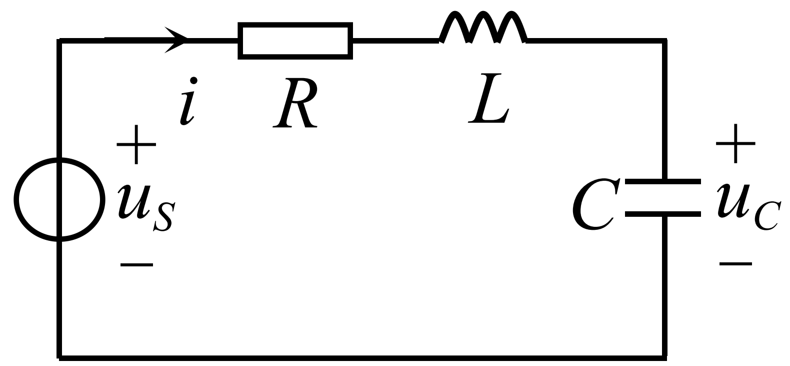
$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL\frac{di_L}{dt} + i_L = i_S$$

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

§7-4 GCL并联电路的分析

定义：阻尼电阻 $R_{\mathrm{d}}=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

*RLC*串联

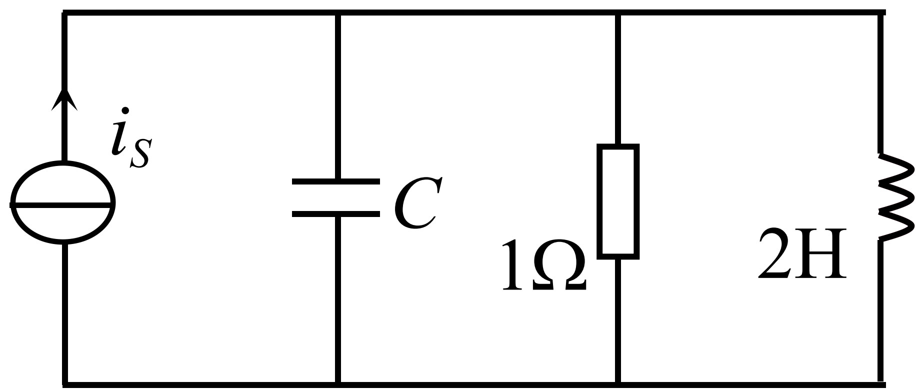


$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

§ 7-4　GCL并联电路的分析

例：图示电路中，欲使电路产生临界阻尼响应，则C应为何值？



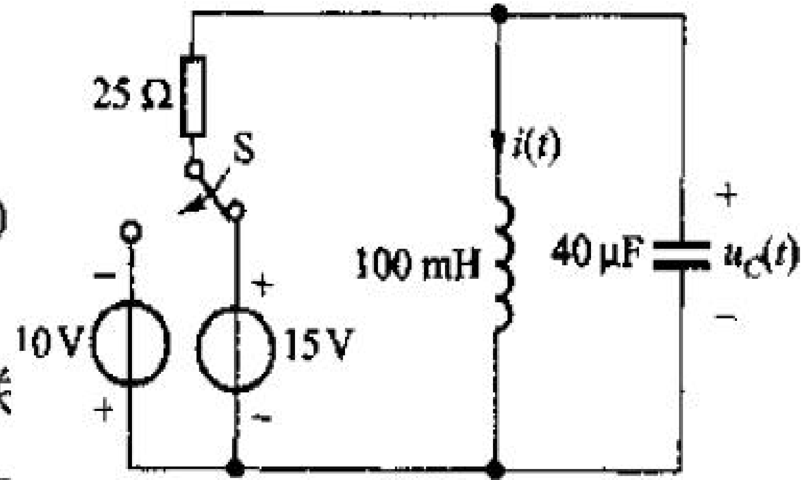
解：阻尼电导

$$G_d = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

欲使电路产生临界阻尼响应，应满足$G = G_d$

因：$G = 1\text{S}$　　故：$2\sqrt{\frac{C}{L}} = 1$　　得：$C = 0.5\ \text{F}$

例 假定开关 S 连接 15 V 电压源已久，在 $t=0$ 时改与 10 V 电压源接通，求 $i(t)$，$t\geqslant 0$。



解　先定初始条件 $i(0_-)=\dfrac{15}{25}\ \mathrm{A}=0.6\ \mathrm{A}=i(0_+)$

$$u_C(0_-)=0=u_C(0_+)$$

换路后10V电压源与25Ω等效为电流源与25Ω并联

$$s_{1,2}=-\frac{G}{2C}\pm\sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-500$$ 属临界阻尼

故得固有响应（瞬态响应）为 $i_h(t)=(K_1+K_2t)\mathrm{e}^{-500t}$

由换路后的直流稳态可得强迫响应（稳态响应）为 $i_p=-\dfrac{10}{25}\mathrm{A}=-0.4\ \mathrm{A}$

$i(t)=i_h(t)+i_p=(K_1+K_2t)\mathrm{e}^{-500t}-0.4$　　由初始条件 $i(0)=0.6$，$u_C(0)=0$

可得 $i(0)=K_1-0.4=0.6$，$K_1=1$ 又 $\left.\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_0=\dfrac{u_C(0)}{L}=\left.(-500K_1\mathrm{e}^{-500t}+K_2\mathrm{e}^{-500t}-500K_2t\mathrm{e}^{-500t})\right|_0$

即 $0=-500K_1+K_2$　　$t=0$ 时电感的 VCR，此处电感电压即电容电压。

以 $K_1=1$ 代入后，$K_2=500$ 故得 $i(t)=[(1+500t)\mathrm{e}^{-500t}-0.4]\mathrm{A}\quad t\geqslant 0$

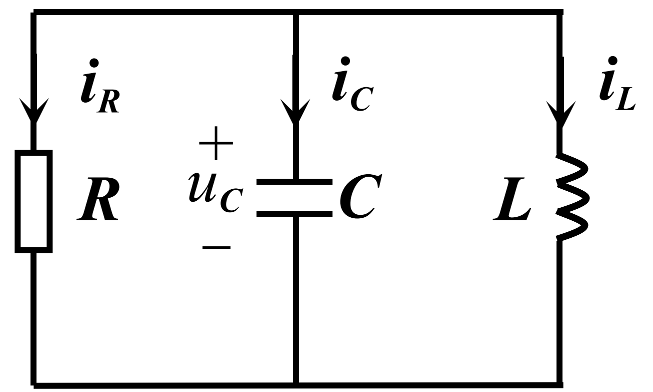
非齐次线性微分方程的解答（通解）= 对应的齐次方程通解 + 特解

§ 7-4 GCL并联电路的分析

例：*GCL*并联电路的零输入响应为

$u_c(t) = 100e^{-600t}\cos 400t$，

若电容初始贮能是$\dfrac{1}{30}$ J，



求*R*，*L*，*C*以及电感的初始电流。

§7-4 GCL并联电路的分析

解： $w_C(0)=\dfrac{1}{30}$ $\quad u_C(0)=100\text{V}$

$$\frac{1}{2}Cu_C^2(0_+)=\frac{1}{30} \qquad C=\frac{2}{30u_C^2(0_+)}=\frac{2}{30\times100^2}=6.67\mu\text{F}$$

由零输入响应的形式可知，此题应为欠阻尼情况。

零输入响应的一般形式为

$$u_C(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}[K_1\cos\omega_d t+K_2\sin\omega_d t]$$

$$K_1=100, \quad K_2=0, \quad \alpha=600, \quad \omega_d=400$$

§ 7-4 GCL并联电路的分析

$$s_{1,2}=-\frac{G}{2C}\pm\sqrt{(\frac{G}{2C})^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm \mathrm{j}\omega_d$$

$$\alpha=\frac{G}{2C}=600 \qquad G=600\times2\times6.67\times10^{-6}=80.04\times10^{-4}$$

$$R=\frac{1}{G}=124.9\Omega \qquad \omega_d=400=\sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2}$$

$$\frac{1}{LC}=400^2+600^2 \qquad L=0.288\mathrm{H}$$

§ 7-4 GCL并联电路的分析

$$i_L(0_+) = -i_R(0_+) - i_C(0_+)$$

$$= -\frac{u_C(0_+)}{R} - C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}$$

$$= -\frac{100}{124.9} - 6.67\times 10^{-6}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(100\mathrm{e}^{-600t}\cos 400t)\bigg|_{t=0}$$

$$= -0.8 + 0.4 = -0.4\mathrm{A}$$

二阶电路分析方法总结

- 针对状态量X列出非齐次二阶微分方程

$$a_0\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}+a_2=\mathrm{A}$$

- 给定初始条件 $X(0)=?$ $\quad \left.\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=?$

- 解的形式 $X(t)=X_h(t)+X_p(t)$

$X_h(t)=K\mathrm{e}^{st}$ 代入齐次方程

$a_0s^2+a_1s+a_2=0$ 特征方程

$$s_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1{}^2-4a_0a_1}}{2a_0}$$ 固有频率

二阶电路分析方法总结

RLC串联　　$s_{1,2}=-\dfrac{R}{2L}\pm\sqrt{(\dfrac{R}{2L})^2-\dfrac{1}{LC}}$

GCL并联　　$s_{1,2}=-\dfrac{G}{2C}\pm\sqrt{(\dfrac{G}{2C})^2-\dfrac{1}{LC}}$

(1) s_1,s_2为两个不相等的负实数

$s_1=-\alpha_1 \quad s_2=-\alpha_2$

$X_h(t)=K_1e^{-\alpha_1 t}+K_2e^{-\alpha_2 t}$　　过阻尼无衰减振荡

(2) s_1,s_2为两个相等的负实数

$s_1=s_2=-\alpha$

$X_h(t)=(K_1+K_2t)e^{-\alpha t}$　　临界阻尼无衰减振荡

二阶电路分析方法总结

*RLC*串联 $$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}}$$

*GCL*并联 $$s_{1,2}=-\frac{G}{2C}\pm\sqrt{(\frac{G}{2C})^2-\frac{1}{LC}}$$

(3) s_1,s_2为共轭复数

$$s_1=-\alpha+\mathrm{j}\omega_d \qquad s_2=-\alpha-\mathrm{j}\omega_d$$

$$X_h(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}[K_1\cos\omega_d t+K_2\sin\omega_d t]$$ 欠阻尼衰减振荡

(4) s_1,s_2为共轭虚数 (R=0)

α – 衰减因子

ω_d – 衰减振荡角频率

$$s_1=\mathrm{j}\omega_0 \qquad s_2=-\mathrm{j}\omega_0$$

$$X_h(t)=K_1\cos\omega_0 t+K_2\sin\omega_0 t$$ 欠阻尼等幅振荡

二阶电路分析方法总结

RLC串联 $$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}}$$

GCL并联 $$s_{1,2}=-\frac{G}{2C}\pm\sqrt{(\frac{G}{2C})^2-\frac{1}{LC}}$$

求$X_p(t)$ 设$X_p(t)=Q$ 代入原方程 $Q=A$

如果是直流激励的渐近稳定电路，稳态解即是特解

$X(t)=X_h(t)+X_p(t)$ 用初始条件确定K_1和K_2

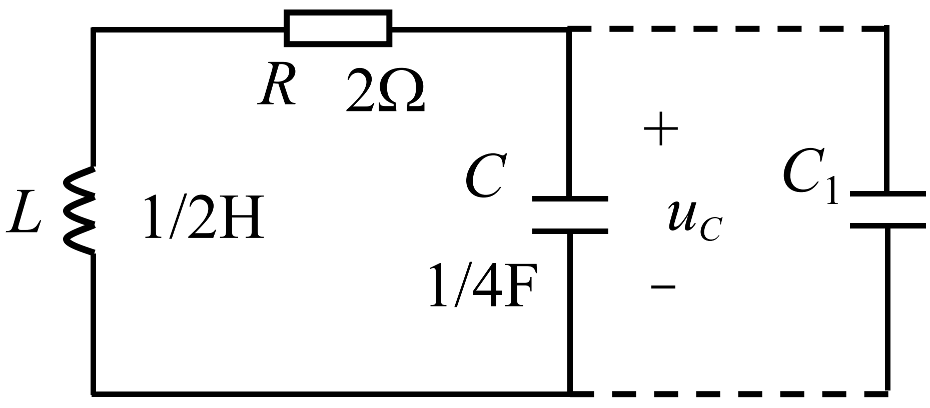
二阶电路分析方法总结

电路参数改变，可以改变响应特性

例：电路如图

(1) 求固有频率 s 及$u_C(t)$ 的响应形式；

(2) 若并联C_1=3/4 F，求$u_C(t)$ 的响应形式。



二阶电路分析方法总结

解：(1) 固有频率 s

$$s_{1、2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-2\pm j2$$

为欠阻尼情况；

则零输入响应的形式为

$$u_C(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[K_1\cos\omega_d t+K_2\sin\omega_d t\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-2t}\left[K_1\cos 2t+K_2\sin 2t\right]$$

响应为振幅按指数规律衰减的振荡

二阶电路分析方法总结

解：(2) 等效电容$C_0 = C + C_1 = 1\text{F}$

固有频率 s

$$s_{1、2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC_0}} = -2 \pm \sqrt{2}$$

为过阻尼情况

$s_1 = -0.568 \quad s_2 = -3.414$ 则响应形式为

$$u_C(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} = K_1 e^{-0.568t} + K_2 e^{-3.414t}$$

响应是非振荡性的