第二篇 动态电路的时域分析

第5章 电容元件与电感元件

第五章 作业题

第4版P179、第5版P217：题目相同

5-1，5-5，5-7，5-10，5-12

本章内容概述

1. **动态元件：** 电容、电感元件。
   含有一个独立的动态元件的电路称为一阶电路；
   含有两个独立的动态元件的电路称为二阶电路。
2. **动态电路**是“有记忆”的电路：响应不仅与现在的激励有关，还与过去的响应有关。
3. **KCL、KVL**仍是分析电路的基本依据。
   KCL、KVL施加于电路的约束关系与电路的联接方式有关、与构成电路的元件性质无关。
4. 以下第5、6、7三章讨论**动态电路的时域响应**，本章介绍动态元件的VCR、等效电路、状态等概念。
5. **状态量：** 电容电压 u_C、电感电流 i_L。

理想电路元件（集总元件）

电阻元件： 只表示消耗电能的物理性质的元件.

电阻电路在任一时刻t的响应只与同一时刻的激励有关，与过去的激励无关。

电阻电路无记忆(memoryless)、即时(instantaneous)。实际电路中还有电容元件和电感元件。

电容元件： 只表示储存电场能量的物理性质的元件。

电感元件： 只表示储存磁场能量的物理性质的元件。

电容、电感元件VCR涉及对电压、电流的微积分，是动态元件(dynamic element)。

实际电路中，除以上三种(电阻、电容、电感）集总元件（理想电路元件）外，还有电源元件和耦合元件。

电路元件分类

元件的划分：

按元件的端钮个数可分为：

(1) 二端元件：电阻元件、电感元件、电容元件、电压源、电流源。

(2) 四端元件 ：受控源、耦合电感、理想变压器。

电路元件分类

按能否提供能量可分为无源元件和有源元件：

(1) 无源元件：电阻元件，电容元件，电感元件，耦合电感，理想变压器。

（无源器件从不向外电路提供能量。正电阻元件属无源元件；负电阻元件属有源元件）

(2) 有源元件：独立源：电压源，电流源。

受控源：电压控制电压源，电流控制电压源，电压控制电流源，电流控制电流源

理想电路元件（集总元件）

动态元件出现的原因：

(1)电阻电路不能完成滤波功能，实际电路完成滤波、选频必须使用动态元件电感元件、电容元件

(2)高频信号和信号变化很快时，对实际电路及晶体管建模需要考虑磁场变化和电场变化，因此，对元件建模需要增添电感元件、电容元件

理想电路元件（集总元件）

动态电路是至少含有一个动态元件的电路

至少含有一个动态元件：电感元件、电容元件

任何一个集总电路：

(1)不是电阻电路就是动态电路

(2)动态电路在任一时刻的响应与激励的全部过去历史有关，动态电路有记忆(memory)性

本书讨论一、二阶动态电路

§5-1 电容元件

1.电容器： 能聚集电荷，存储电场能的器件。

平行板电容器（理想介质不导电，电荷不能中和）

2. 电容元件(capacitor)：

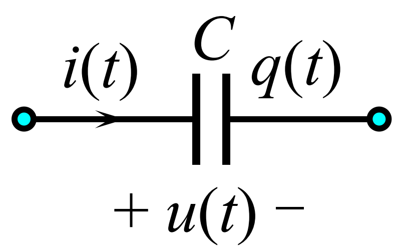
理想电容，是实际电容器的理想化模型。

理想电容只存储电场能量，本身无能量损耗。

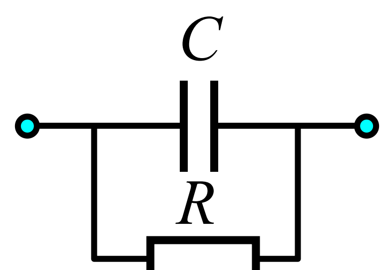
3. 电容器的参数：

(1)电容量C

(2)额定工作电压$u(t)$



电容符号

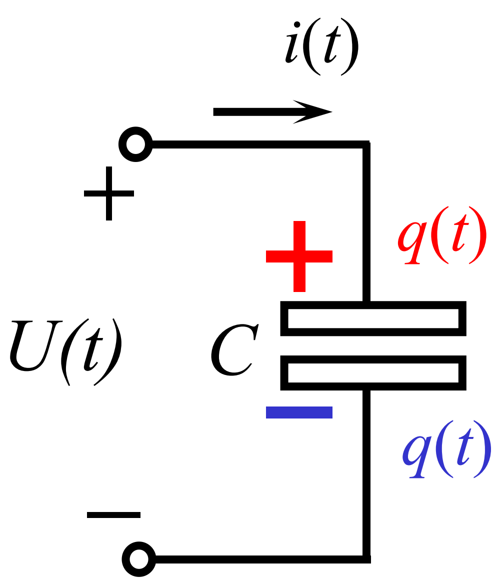


实际电容器
漏电现象

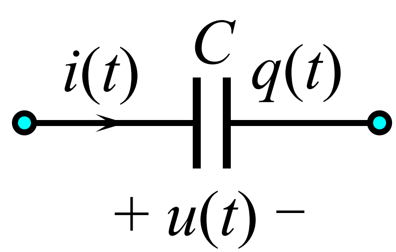
4.实际电容器：其电介质不能做到完全绝缘，故有一定程度的漏电等效电路为：C 与 R 并联。

§ 5-1 电容元件

5.电容的特性曲线： 在任一时刻t，电容贮存的电荷$q(t)$ 与其端电压 $u(t)$的关系，由$q-u$平面上的一条曲线所决定。电容元件是电荷与电压相约束的元件。



电容元件的电荷瞬时值$q(t)$和电压瞬时值$u(t)$之间存在着一种代数关系。采用关联参考方向，即假定为正电位的极板上电荷为正。



电容符号

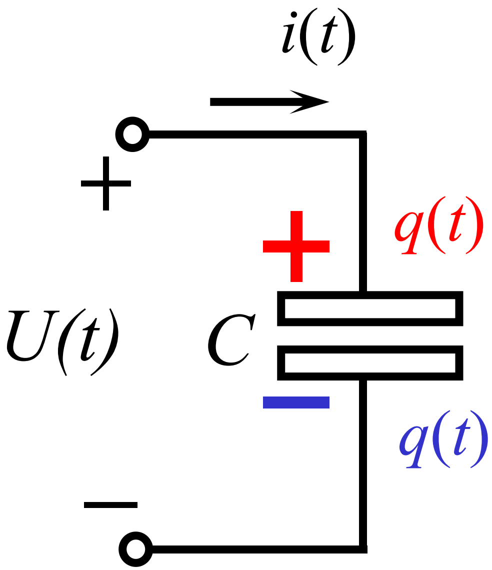
$$C=\frac{q(t)}{u(t)}$$

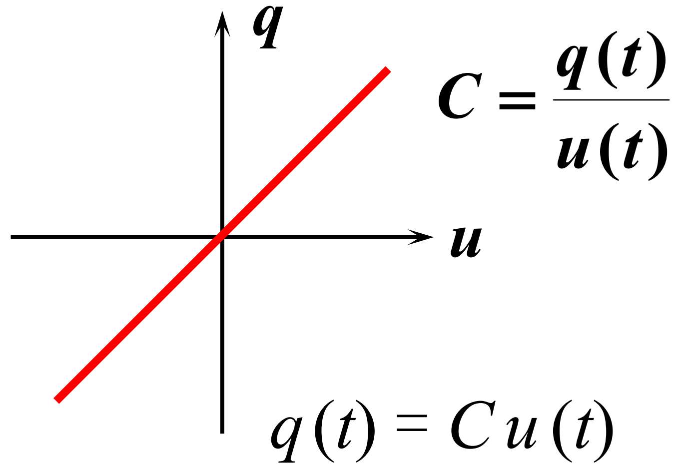
$$q(t)=Cu(t)$$

§ 5-1 电容元件

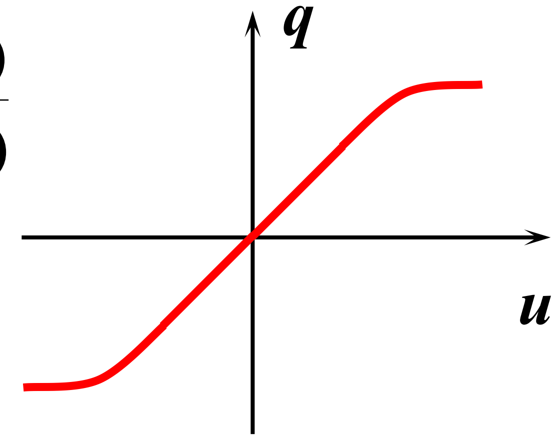
5.特性曲线：电容的容量C可由$q-u$平面上的一条曲线的斜率确定。电容元件是电荷与电压相约束的元件。

电容器的电容与极板的尺寸及其介质的介电常数有关。





线性时不变电容



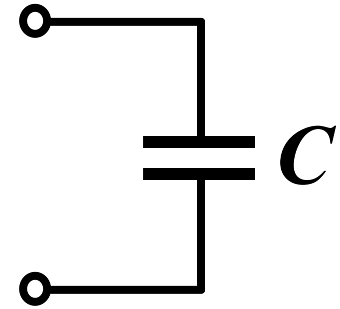
非线性电容

6. 线性时不变电容: 其特性曲线是一条过原点的直线，且不随时间而改变。

§ 5-1 电容元件

7. 电容决定了电荷与电压的约束关系

符号



$$q(t) = C\,u(t)$$

电容(capacitance)：

$$C = \frac{q(t)}{u(t)}$$

单位：法拉(F)

微法(μF)

$$q = C\,u$$

$$C = \frac{q}{u}$$

库仑(C)

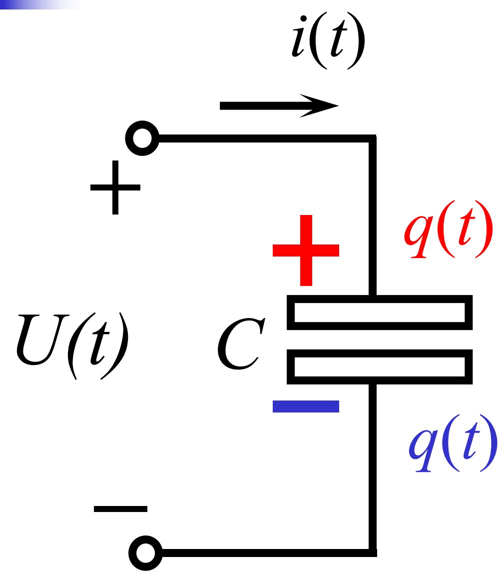
伏(V)

法拉(F)

若C为大于零的常数，
则称为线性电容。

C为曲线斜率

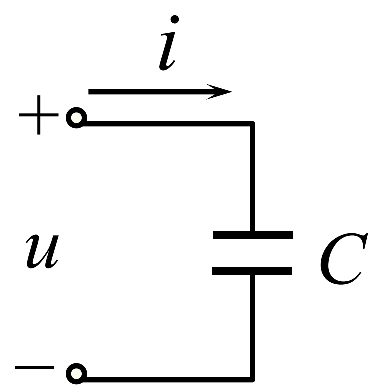
§ 5-1 电容元件



$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

S —极板面积(m^2)
d —板间距离 (m)
ε —介电常数(F/m)

电容元件的参数 $C = \dfrac{q}{u}$



若电路的某一部分只具有储存电场能量的性质时，称它为理想电容元件。

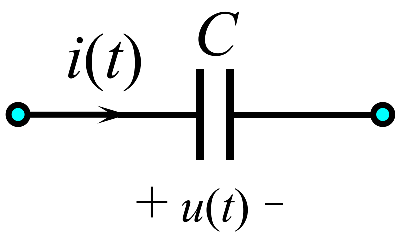
1法拉(F)= 1000毫法(mF)＝1000000微法(μF)
1微法(μF)= 1000纳法(nF)= 1000000皮法(pF)
1000pF=1nF=0.001uF

§5-2 电容的VCR

当通过电容的电荷量或电压发生变化时，则在电容中引起电流 $i(t)=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$　　$q(t)=Cu(t)$

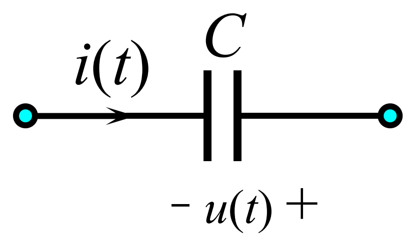
在直流稳态时，I=0，电容隔直流。

1. 微分关系 $i(t)=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}Cu}{\mathrm{d}t}=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$　　$dq(t)=\mathrm{d}Cu(t)$



$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

关联参考方向



$$i(t)=-C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

非关联参考方向

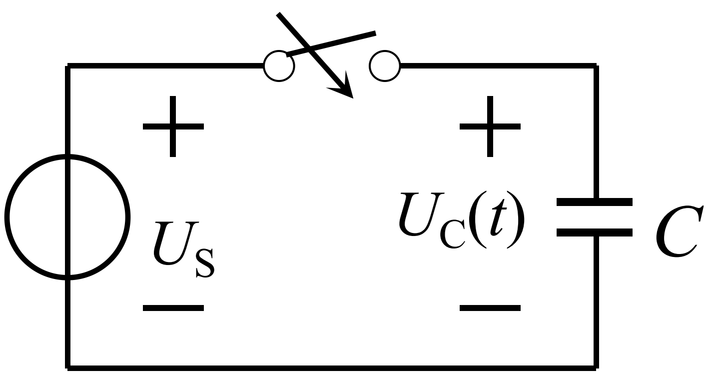
在某一时刻，电容的电流取决于该时刻电容的电压变化率。

§ 5-2 电容的VCR

注意： $i(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

(1)$i(t)$与电容电压的变化率du/dt成正比，而与电容两端电压值无关。电压不变（直流）时，电流为零，即电容隔直流。

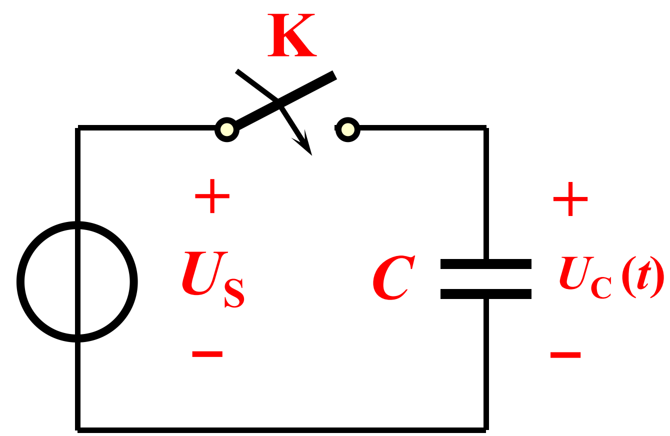
(2)若$i(t)$为有限值，则 du/dt为有限值，就是说电容电压$u(t)$不能跃变，即 $u(t)$是连续的。



特殊情况下电容电压$u(t)$可以跃变，此时理想电压源需要提供无限大的电流

§5-2 电容的VCR

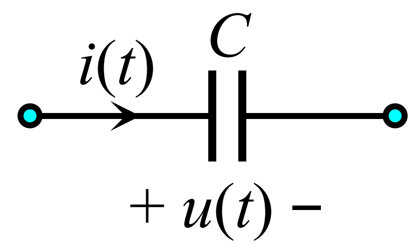
在特殊情况下，$u(t)$ 可以跃变，此时理想电压源需要提供无限大的电流。



在开关K闭合的瞬间，由KVL，$u_C(t)$ 跃变为U_S。条件是：理想电压源应提供无穷大的电流，即具有无穷大的功率，这是实际电源达不到的。因此，电容的电压不能发生跃变。

§ 5-2 电容的VCR

2.积分关系　　由 $i(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$



关联参考方向

得 $u(t)=\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

若$u(t_0)$ — 电容电压初始值，t_0为任意选定的初始时刻

$$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad t\geq t_0$$

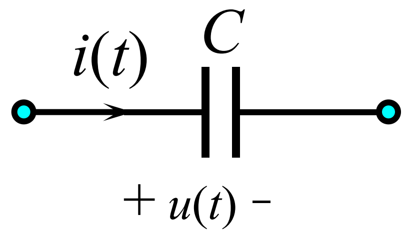
若 $t_0=0$，则有 $u(t)=u(0)+\dfrac{1}{C}\int_{0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$

电容电压 $u(t)$ 取决于从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电流值。电容电压$u(t)$具有“记忆”电流的作用，电容C为“记忆”元件，又称惯性元件。

§ 5-2 电容的VCR

电容存储电场能：积累电荷

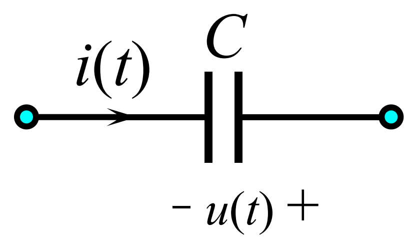
电容的电流取决于电容的电压变化率



关联参考方向

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}Cu}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad dq(t)=\mathrm{d}Cu(t)$$

$$p(t)=u(t)\bullet i(t)$$



$$p=\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{d}t} \qquad dw=p(t)dt$$

非关联参考方向

$$w_c(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}p(\xi)d\xi=\int_{t_1}^{t_2}u(\xi)i(\xi)d\xi$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}Cu(\xi)\frac{\mathrm{d}u(\xi)}{d\xi}d\xi=C\int_{u(t_1)}^{u(t_2)}udu$$

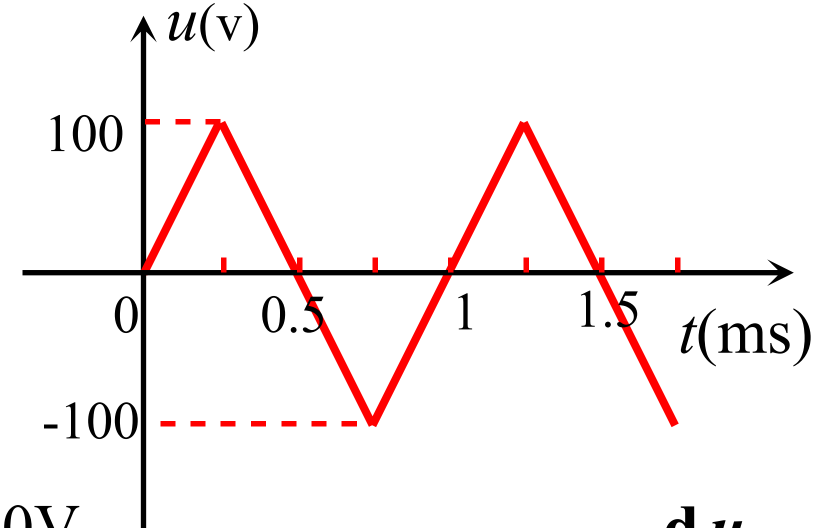
$$W_C=\frac{1}{2}Cu_C^2$$

C是储能元件

$$=\frac{1}{2}Cu^2\Big|_{u(t_1)}^{u(t_2)}=\frac{1}{2}C\left[u^2(t_2)-u^2(t_1)\right]$$

§ 5-2 电容的VCR

例5-1 下图为电容与电压源相联电路，求电容电流i_c。



解：分段求解

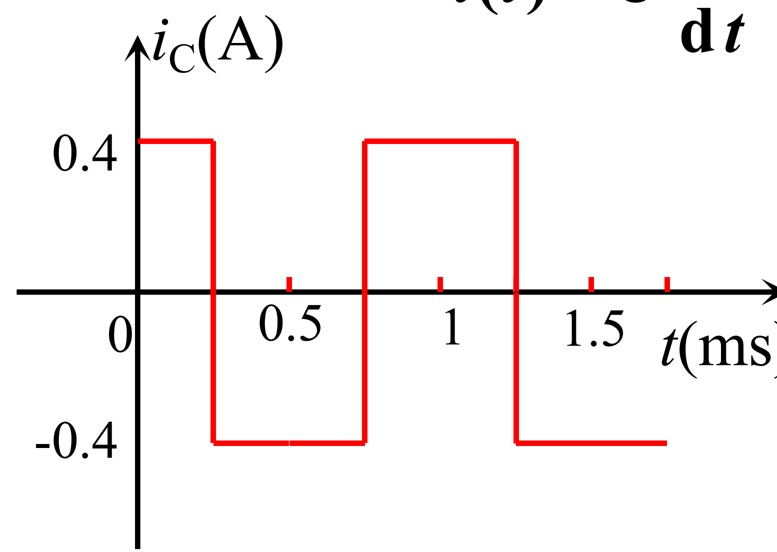
$0 \leq t \leq 0.25ms \quad u(t)=4\times10^5 t$ V

$$i_C(t) = C\frac{du}{dt} = 10^{-6}\times4\times10^5 = 0.4\text{A}$$

$0.25 \leq t \leq 0.75ms \quad u(t)= -4\times10^5 t+200$V

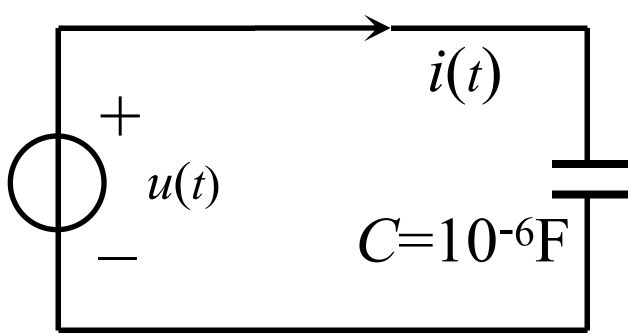
$$i(t) = C\frac{\mathbf{d}u}{\mathbf{d}t}$$

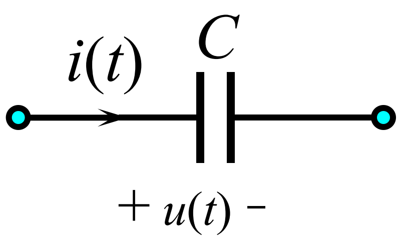
$i_C(t)=10^{-6}\times(-4\times10^5)= -0.4$ A



$0.75 \leq t \leq 1.25ms$

$u(t)=4\times10^5 t - 4\times10^2$ V $\quad i_C(t)= 0.4$ A

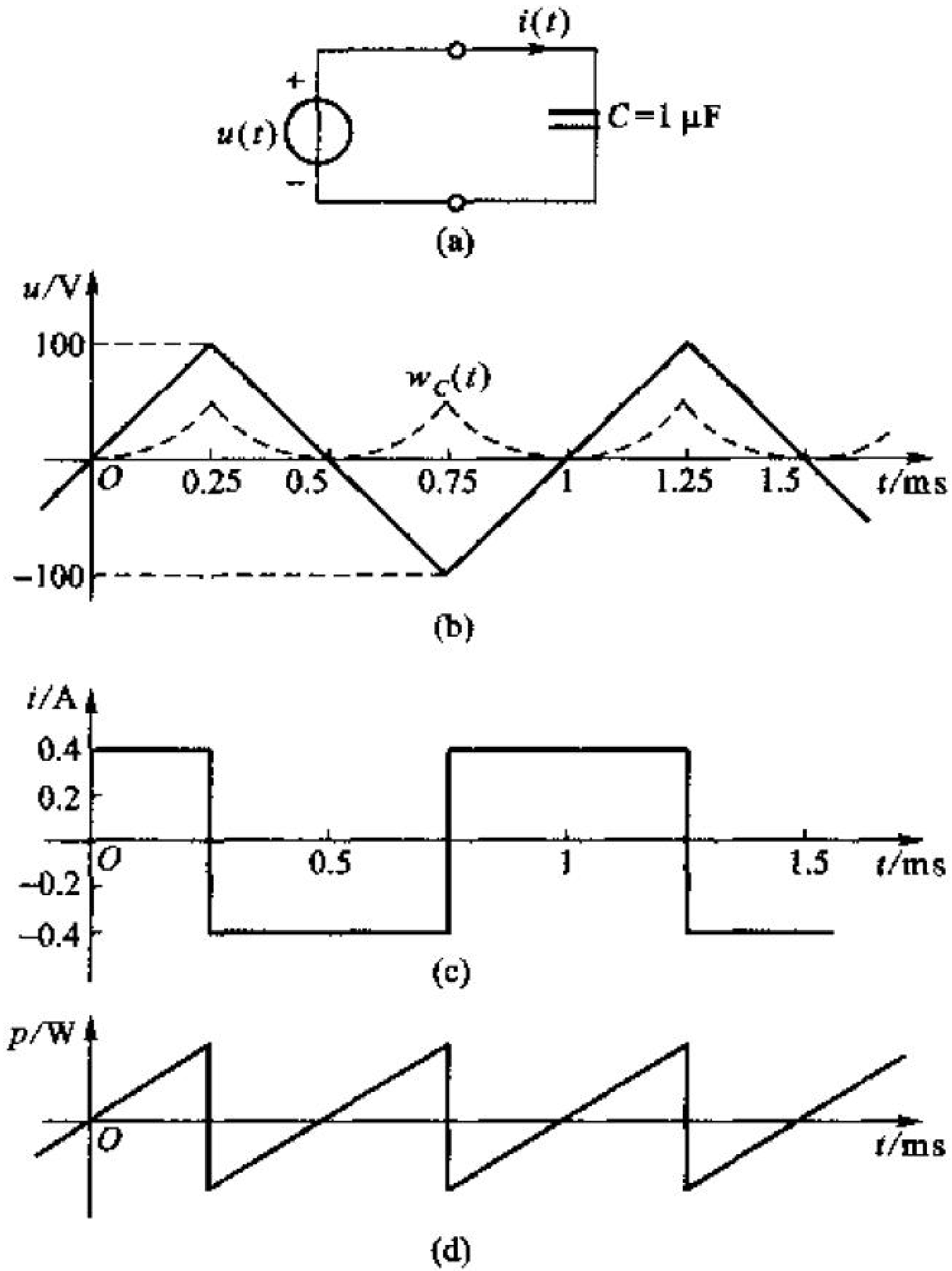




关联参考方向

$p(t)=u(t)i\,(t)$

$dw=p(t)dt$



(a)

(b)

(c)

(d)

例 设电容与一电流源相接,电流波形如图所示,试求电容电压。设 $u(0)=0$。

解 已知电容电流求电容电压时,

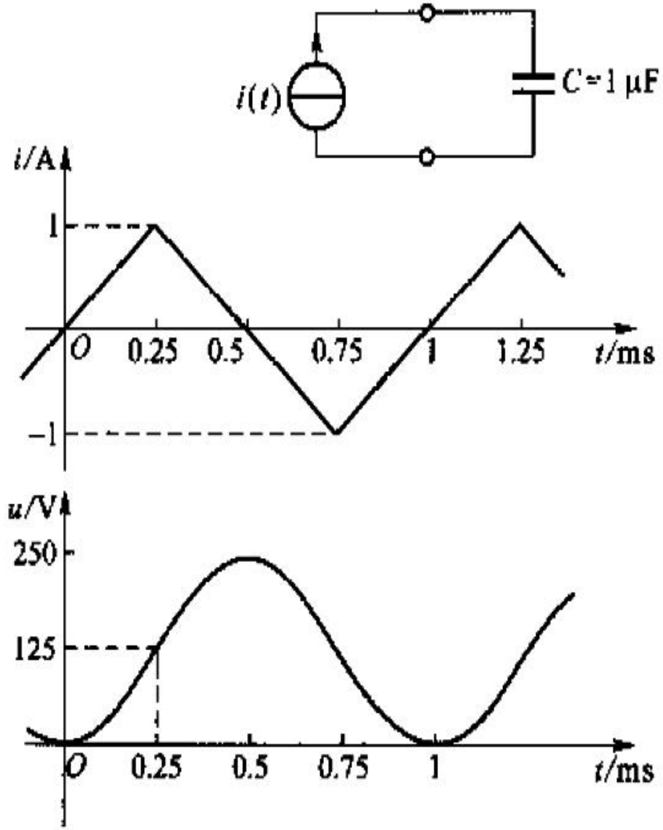
$$i=\frac{1}{0.25\times10^{-3}}t\ \text{A}=4\,000t\ \text{A}\qquad 0\leqslant t\leqslant 0.25\times10^{-3}\,\text{s}$$

$$i=-4\,000(t-0.5\times10^{-3})\ \text{A}$$

$$=(-4\,000t+2)\ \text{A}\qquad 0.25\times10^{-3}\,\text{s}\leqslant t\leqslant 0.75\times10^{-3}\,\text{s}$$

$$i=4\,000(t-10^{-3})\ \text{A}$$

$$=(4\,000t-4)\ \text{A}\qquad 0.75\times10^{-3}\,\text{s}\leqslant t\leqslant 1.25\times10^{-3}\,\text{s}$$



$0\leqslant t\leqslant 0.25\times10^{-3}$ s 期间

$$u(t)=u(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\,\mathrm{d}\xi=10^6\int_0^t 4\,000\xi\,\mathrm{d}\xi=2\times10^9t^2\ \text{V}$$

电压随时间按抛物线规律上升,当 $t=0.25$ ms 时,电压为 125 V。

0.25×10^{-3} s $\leqslant t\leqslant 0.75\times10^{-3}$ s 期间

$$u(t)=u(0.25\times10^{-3})+\frac{1}{C}\int_{0.25\times10^{-3}}^t i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$=(125\ \text{V})+10^6\int_{0.25\times10^{-3}}^t(-4\,000\xi+2)\,\mathrm{d}\xi=(-250+2\times10^6t-2\times10^9t^2)\ \text{V}$$

此为一开口向下的抛物线方程,其顶点在 $t=0.5$ ms、$u=250$ V 处。当 $t=0.75$ ms 时,电压下降到 125 V

0.75×10^{-3} s $\leqslant t\leqslant 1.25\times10^{-3}$ s 期间

$$u(t)=u(0.75\times10^{-3})+\frac{1}{C}\int_{0.75\times10^{-3}}^t i(\xi)\,\mathrm{d}\xi=(125\,\text{V})+10^6\int_{0.75\times10^{-3}}^t(4000\xi-4)\,\mathrm{d}\xi=(2000-4\times10^6t+2\times10^9t^2)\text{V}$$

此为一开口向上的抛物线方程,其顶点在 $t=1$ ms, $u=0$ 处。

§5-2 电容的VCR

5-2 电容与电流源相联电路如图，已知$u_C(0)=0$，求电容电压$u_C(t)$, 并绘波形图。

解：分段求解 $0\leq t\leq 1s$ $i_s(t)=2A$

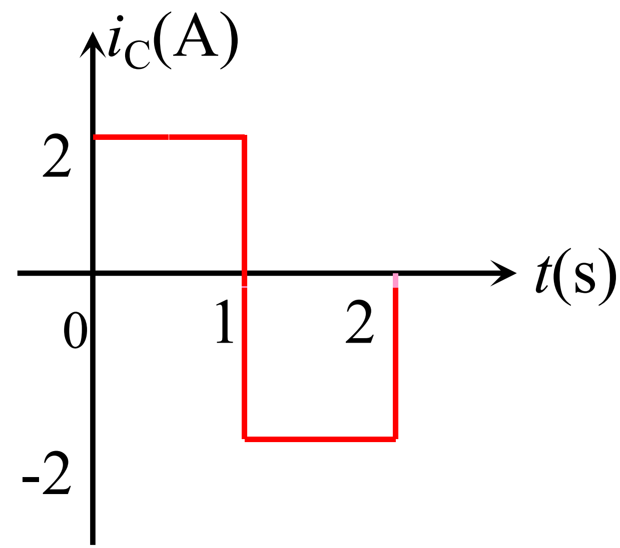
$$u_c(t)=u_c(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx$$

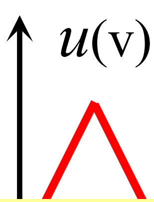
$$=\frac{1}{2}\int_0^t 2dx=\frac{1}{2}\times 2t=t\ \text{V}$$

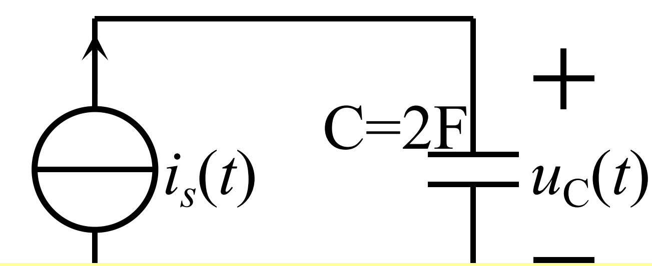
$1\leq t\leq 2s$ $i_s(t)=-2A$ $u_C(1)=1\ \text{V}$

$$u_c(t)=u_c(1)+\frac{1}{2}\int_1^t(-2)dx$$

$$=1+\frac{1}{2}(-2x)\Big|_1^t=-t+2\text{V}$$







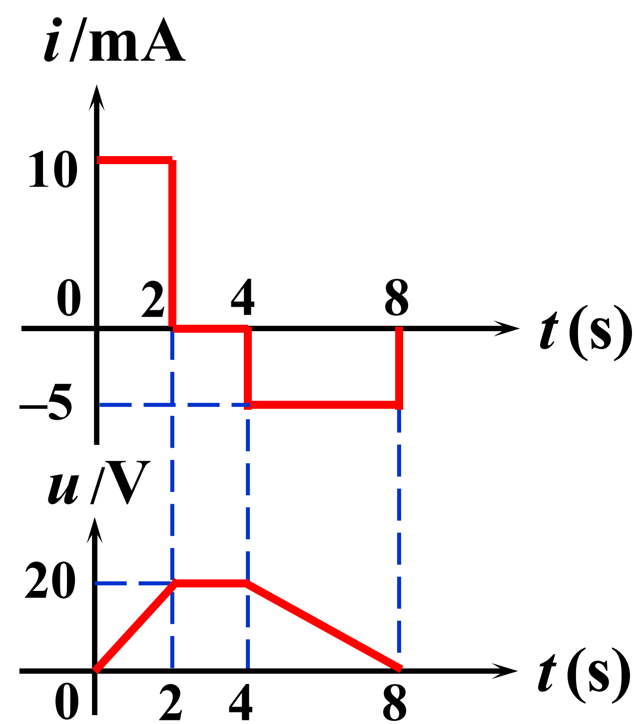
$t\geq 2s$ $i_s(t)=0$

可见，电容电流波形是不连续的，而电容电压波形是连续的。

§ 5-3 电容电压的连续性质和记忆性质

1. 电容电压的连续性质

$$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi \quad t\geq t_0 \quad (5\text{-}7)$$



当电容电流 $i(t)$ 不连续时，

电容电压 $u(t)$ 是连续的 “平滑”

电容电压$u(t)$的连续性质表述如下：

当电容电流 i (t) 在闭区间 $[t_a, t_b]$ 内为有界的，则电容电压 u(t) 在开区间 (t_a, t_b) 内为连续的。特别是，对任意时刻 t，且 $t_a< t <t_b$，有 $u_C(t_-)=u_C(t_+)$

文字表述为：电容电压 u_C 不能跃变。

若$u(t_0)$ — 电容电压初始值，t_0为任意选定的初始时刻

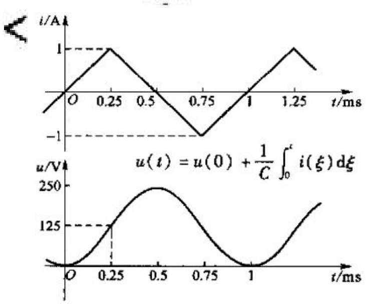
$$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad t\geq t_0 \quad (5\text{-}7)$$

电容电压的连续性质可陈述如下：

若电容电流 $i(t)$ 在闭区间 $[t_a、t_b]$ 内为有界的，则电容电压 $u_C(t)$ 在开区间 $(t_a、t_b)$ 内为连续的。特别是，对任何时刻 t，且 $t_a<t<t_b$，

电容电压不能跃变 $u_C(t_-)=u_C(t_+)$

证明 在区间上每一点都连续的函数，称为在该区间的连续函数。任取一点 t，以 t 和 $t+\mathrm{d}t$ 分别作为(5-7)式中积分的上、下限，且 $t_a<$ t $\leqslant t_b$，则



$$u_C(t+\mathrm{d}t)=u_C(t)+\frac{1}{C}\int_t^{t+\mathrm{d}t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

即

$$u_C(t+\mathrm{d}t)-u_C(t)=\frac{1}{C}\int_t^{t+\mathrm{d}t} i(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (5-9)$$

由于 $i(t)$ 在 $[t_a、t_b]$ 内为有界的，对所有在 $[t_a、t_b]$ 内的 t，必存在一个有限常数 M，使 $|i(t)|<M$。因而在曲线 $i(t)$ 下由 t 轴和上、下限所界定的图形的面积充其量为 $M\mathrm{d}t$，且当 $\mathrm{d}t\to 0$ 时该面积也将趋于零，根据(5-9)式，这就意味着当 $\mathrm{d}t\to 0$ 时，$u_C(t+\mathrm{d}t)\to u_C(t)$，亦即在 t 处，u_C 是连续的 $u_C(t_-)=u_C(t_+)$

§ 5-3 电容电压的连续性质和记忆性质

2. 电容电压的记忆性质

由 $u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad t\geq t_0$

可知：电容电压的大小取决于电容电流的全部历史，所以说电容电压具有“记忆”电流的性质。

关系式 $$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (5\text{-}7)$$

是更具有实际意义的、反映电容电压“记忆”性质关系式。

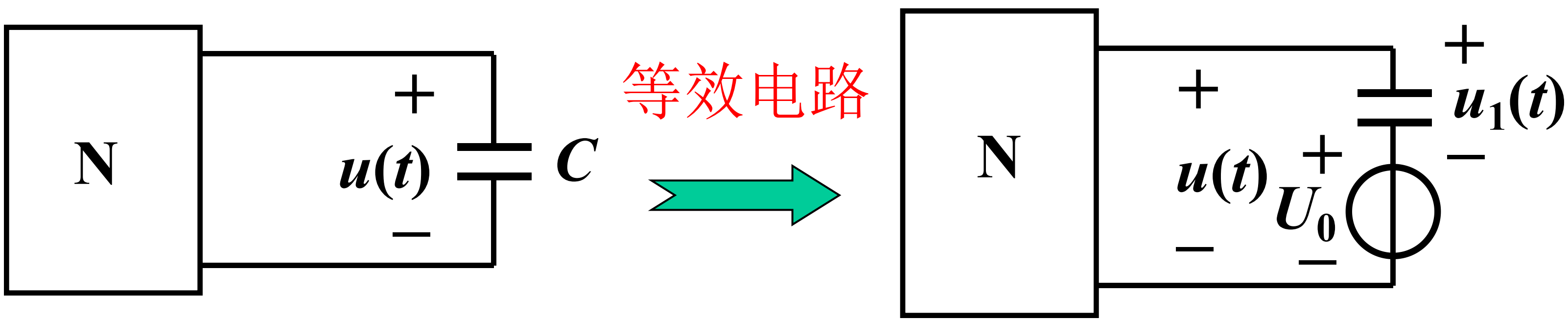
在分析 $t\geq t_0$，含电容元件的动态电路时，电容电压初始值是一个必备的条件，即必须考虑 $u(t_0)$ 对电路响应的影响，因此，这是一个非常重要的概念。

§ 5-3 电容电压的连续性质和记忆性质

3. 电容初始电压 $u_C(t_0)$ 的等效电路

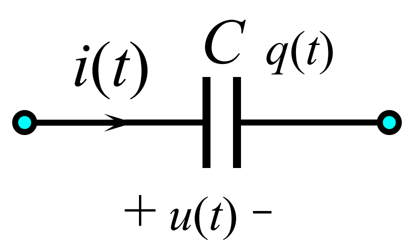
$$\boldsymbol{u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi} \qquad (5\text{-}7)$$

$$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)d\xi=U_0+u_1(t) \qquad t\geq t_0 \qquad (5\text{-}10)$$



$t\geq -\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $t\geq t_0$

$u(t_0)=U_0$

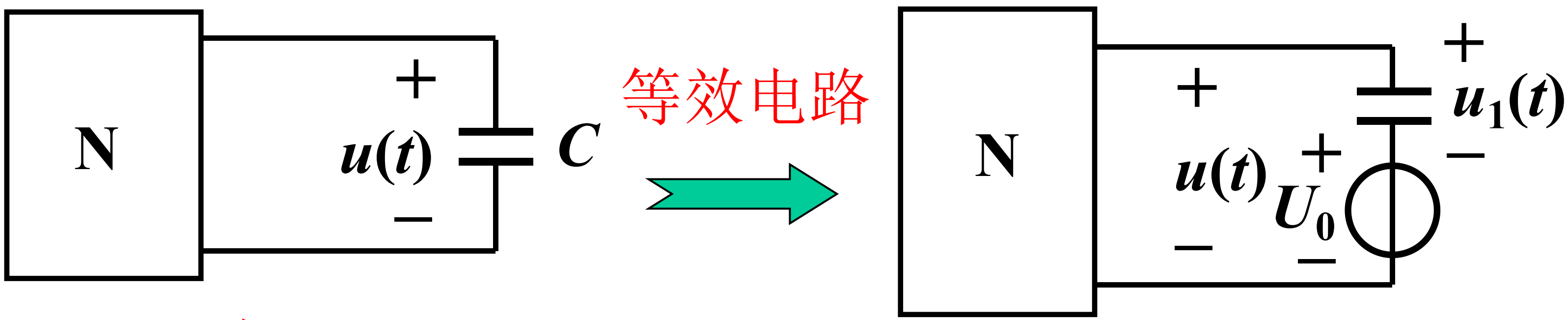


关联参考方向

$u_1(t_0)=0$

注意U_0的方向

§ 5-3 电容电压的连续性质和记忆性质



$t \geq -\infty$

$u(t_0) = U_0$

$t \geq t_0$

$u_1(t_0) = 0$

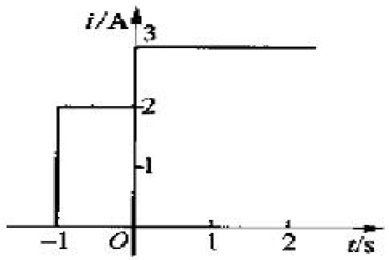
结论：可将具有初始电压 $u(t_0) = U_0$ 的电容等效为一个未充电的电容与电压源 U_0 的串联。

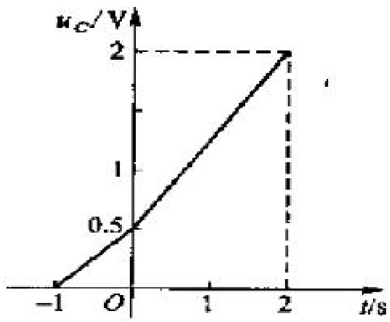
一个已被充电的电容，若已知 $u(t_0) = U_0$，则在 $t \geq t_0$ 时可等效为一个未被充电的电容与电压源相串联的电路，电压源的电压值即为 U_0。

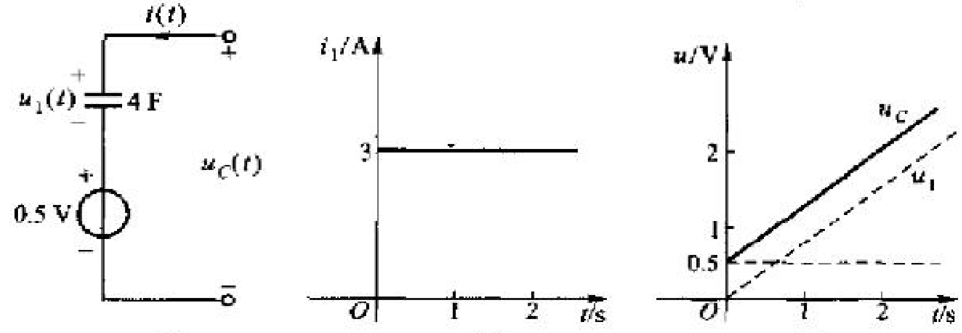
U_0 叫做电容 C 的初始状态。电容 C 的电压叫做状态量。

P170/209例5-3

例 已知 $C=4\text{F}$，对所有 t，$i(t)$ 波形如图（1）试求电容电压 $u_C(t)$、$t\geq 0$；（2）求 $u_C(0)$、$u_C(1)$、$u_C(-0.5)$；（3）试作出 $t\geq 0$ 时该电容的等效电路。







(a) (b) (c)

解 （1）$u_C(t)=\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\mathrm{d}\xi=\dfrac{1}{4}\left[\int_{-\infty}^{0} i\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{t} i\mathrm{d}\xi\right]=\dfrac{1}{4}\left[\int_{-1}^{0} 2\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{t} 3\mathrm{d}\xi\right]$ 对所有 t

得 $u_C(t)=(0.5\ \text{V})+\dfrac{3}{4}\int_{0}^{t}\mathrm{d}\xi=(0.5+0.75t)\ \text{V}\quad t\geq 0$ 对所有 t，波形如图（b）所示。

（2）$u_C(0)=0.5\ \text{V}\qquad u_C(1)=(0.5\ \text{V})+\dfrac{3}{4}\int_{0}^{1}\mathrm{d}\xi=(0.5+0.75)\ \text{V}=1.25\ \text{V}$

$$u_C(-0.5)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{-0.5} i\mathrm{d}\xi=\frac{1}{4}\int_{-1}^{-0.5}2\mathrm{d}\xi=0.25\ \text{V}$$

（3）$t\geq 0$ 时 4F 电容的等效电路如图（a）所示，其中 $i_1(t)$ 波形如图（b）所示，亦即仅在 $t\geq 0$ 时波形与 $i(t)$ 一致，在 $t<0$ 时，$i_1(t)=0$，或表示为 $i_1(t)=i(t)\quad t\geq 0$

因此 $u_1(t)=\dfrac{1}{4}\int_{0}^{t}3\mathrm{d}t=0.75t\ \text{V}$，$u_C(t)=(0.5\ \text{V})+u_1(t)=(0.5+0.75t)\ \text{V}\quad t\geq 0$

其中 $u(t)$ 波形如图（c）所示。

§ 5-4 电容的储能

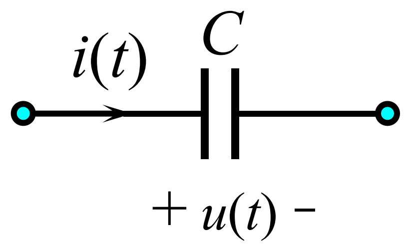
1. 电容的功率

采用关联参考方向时：瞬时功率 $p(t)=u(t)\cdot i(t)$ (5-11)

即：在关联参考方向下，

$p>0$ 电容存储或吸收功率；

$p<0$ 电容提供或释放功率。



关联参考方向

2. 电容的储能

由 $p(t)=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ $dw=p(t)dt$ (5-12)

可得电容在 (t_1, t_2) 区间内的储能为

$$w_C(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}p(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{t_1}^{t_2}u(\xi)\cdot i(\xi)\mathrm{d}\xi \quad (5\text{-}13)$$

§ 5-4 电容的储能

2. 电容的储能

$$w_C(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{t_1}^{t_2} u(\xi)\cdot i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

代入 $i(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

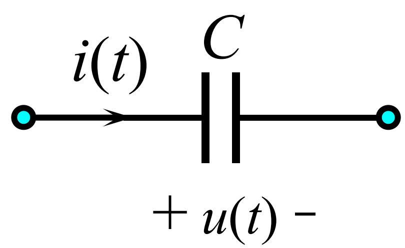
$$=\int_{t_1}^{t_2} u(\xi)\cdot C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi=C\int_{u(t_1)}^{u(t_2)} u\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}Cu^2=\frac{1}{2}C\left[u^2(t_2)-u^2(t_1)\right]$$

在 $t_1\sim t_2$ 期间电容的净储能

$t_2=t$　　$t_1=-\infty$

则$=\dfrac{1}{2}Cu^2(\mathrm{t})-\dfrac{1}{2}Cu^2(-\infty)$ (5-13)



关联参考方向

由于 $w_C(-\infty)=\dfrac{1}{2}Cu^2(-\infty)=0$

$$w_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)$$

电容储能公式

§ 5-4 电容的储能

2. 电容的储能

$$w(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)\propto u^2(t)$$ — 故将u_C称为电路的状态变量 (5-14)

(1)电容储能与当时的电压值有关，而与电流无关。

从 $t_0 \rightarrow t$ 期间电容的净储能

$$w_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(\mathrm{t})-\frac{1}{2}Cu^2(t_0)$$

(2)电容电压不能跃变，实质上是储能不能跃变的反映。

结　论

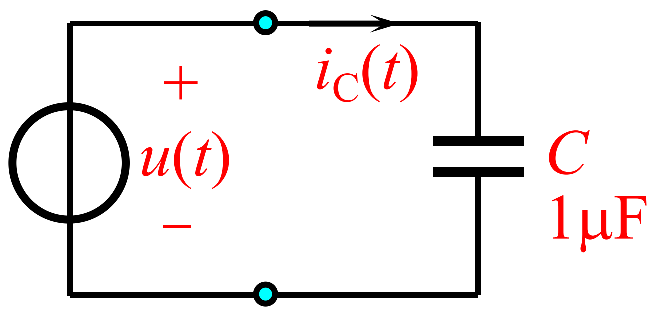
(1)电容储能与该时刻的电压值有关，而与电流无关；$w(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)$

(2)电容的储能本质，使电容电压具有记忆性质：记忆电流充电放电的过程

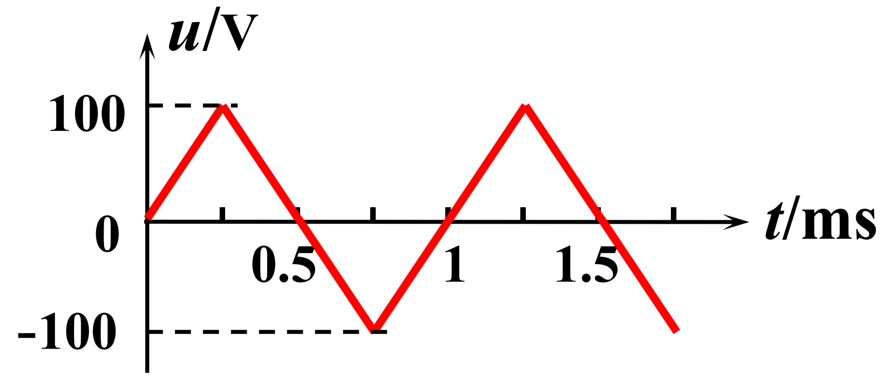
(3)电容电压不能跃变，反映了储能不能跃变的实质，即电容电流在有界条件下电容电压具有连续性质。

$$u_C(t_-) = u_C(t_+)$$

例　电容与电压源 u(t) 相连接的电路如图(a)，u(t)的波形为三角波如图 (b) 所示。求电容的电流、功率和储能随时间变化的波形。



图(a)



图(b)

解　在0.25 ~ 0.75ms期间，$u(t)$ 的变化率为常数，故$i(t)$为方波

(1)由　$i(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 可求得 $i(t)$ 波形的幅值

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=10^{-6}\left(-\frac{200}{0.5}\times10^{3}\right)=-0.4\mathrm{A}$$

同理，在0.75 ~ 1.25ms 期间，$i(t)$ = 0.4A

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$p(t)=u(t)i(t)$$

$$w_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)$$

解 (1) $i(t)$ 的波形为方波，幅值为

$$i(t) = -0.4\text{A} \quad (0.25\text{ms}, 0.75\text{ms})$$

$$i(t) = 0.4\text{A} \quad (0.75\text{ms}, 1.25\text{ms})$$

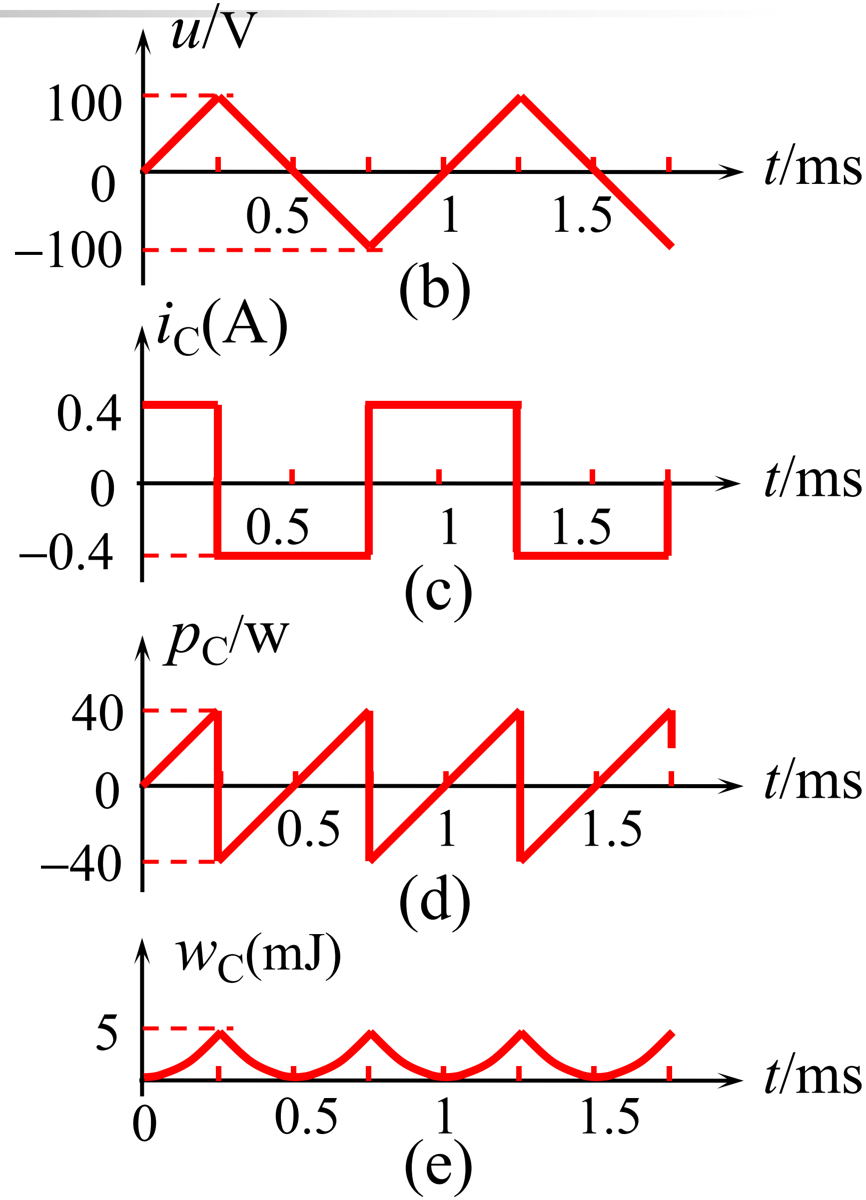
(2) 由 $p(t) = u(t) \cdot i(t)$

可知 $p_C(t)$ 的波形为锯齿波，其幅值为±40W。

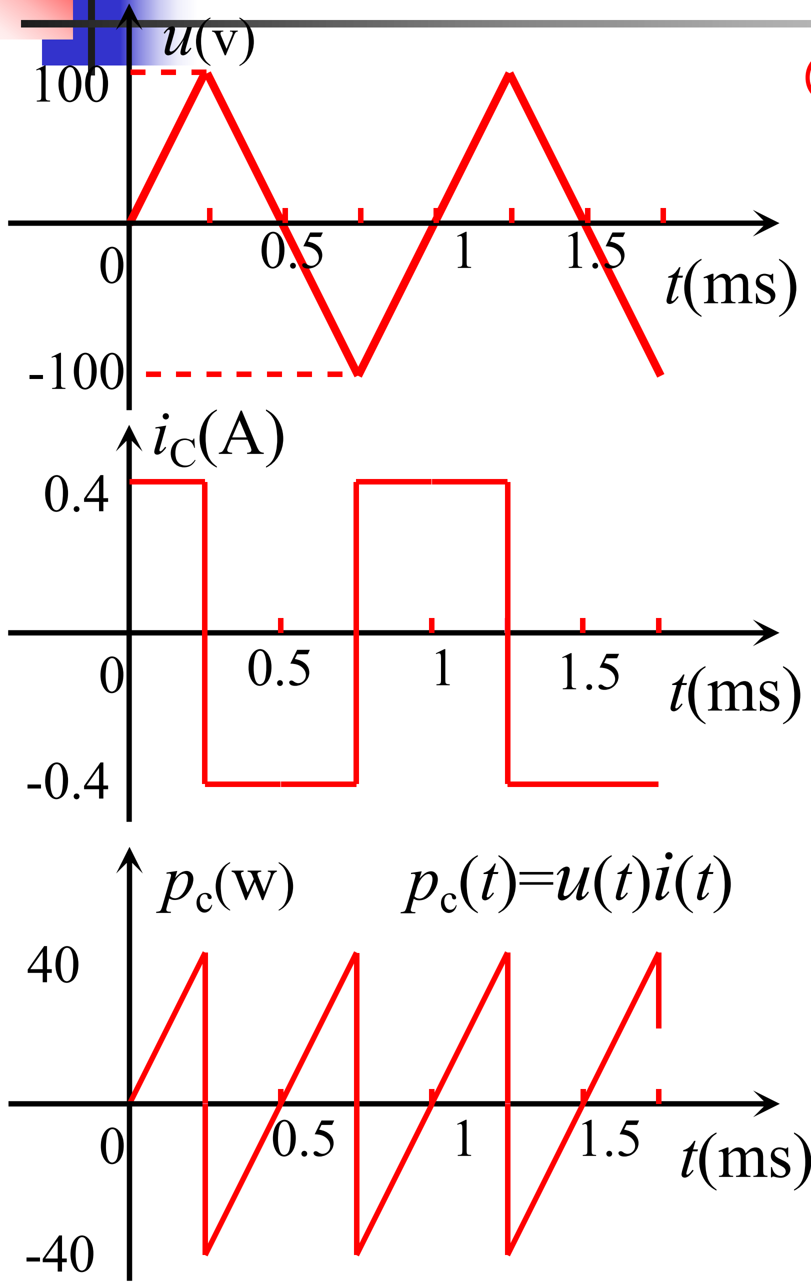
(3) 由 $\boldsymbol{w_C(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)}$

可知 $w_C(t)$ 的波形为抛物线，其幅值为 5mJ。

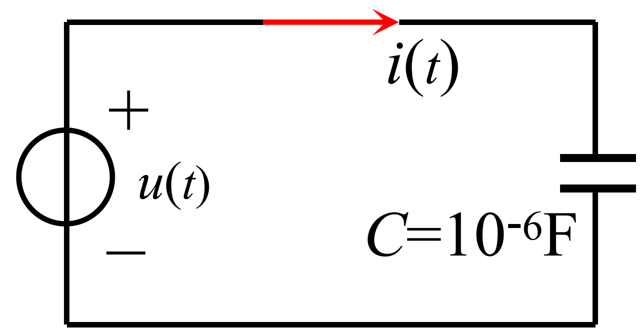
画出电容的电流、功率和储能的波形如图(c)、(d)、(e)所示。

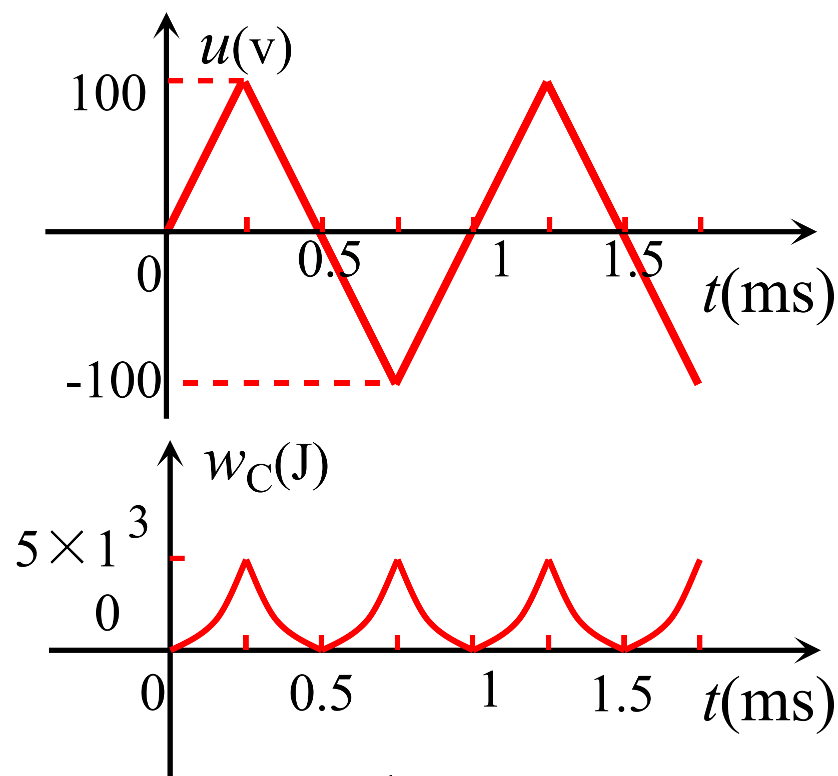


例(续)下图为电容与电压源相联电路，求电容功率p_c和贮能w_c



(对比图)





$$w_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)$$

§ 5-5 电感元件

1.电感元件inductor：用导线绕制的线圈，存储磁场能的器件。

2. 电感元件：电感(inductance)即自感(self inductance)元件

理想电感，是实际电感线圈的理想化模型。

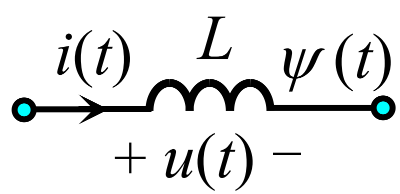
理想电感只存储磁场能量，无能量损耗。

3.实际电感线圈：其导线具有电阻，故有一定程度的能量消耗，其等效电路为：L与R 串联。

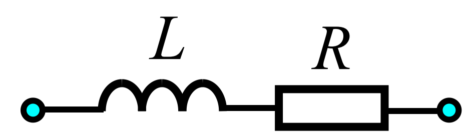
4.电感线圈的参数：

(1)电感量L

(2)额定电流



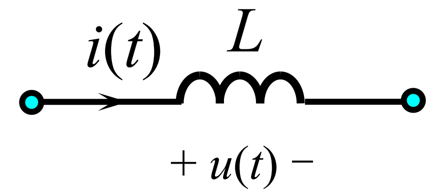
电感符号



实际电感线圈

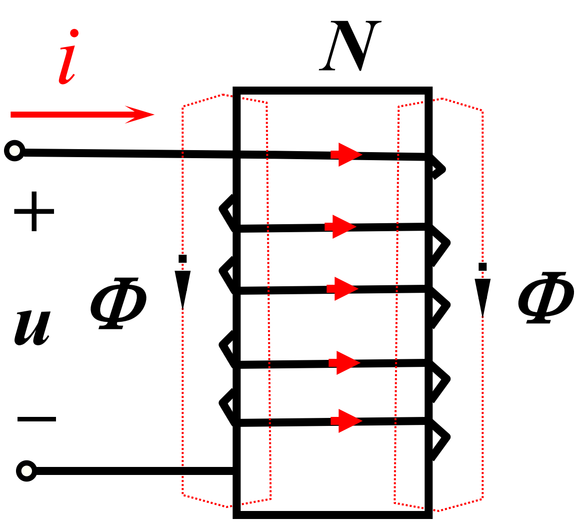
§ 5-5 电感元件

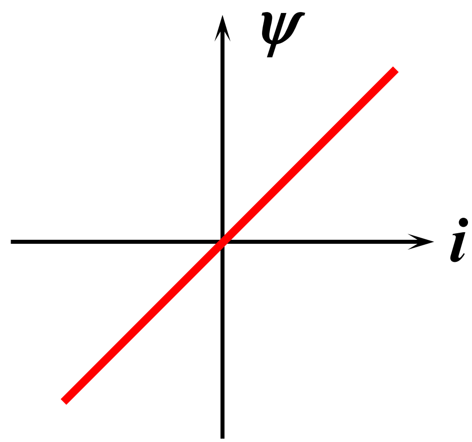
5. 特性曲线： 在任一时刻t，磁链$\psi(t)$ 与流过电感的电流 $I(t)$之间的关系，由$\psi - i$平面上的一条曲线所决定。



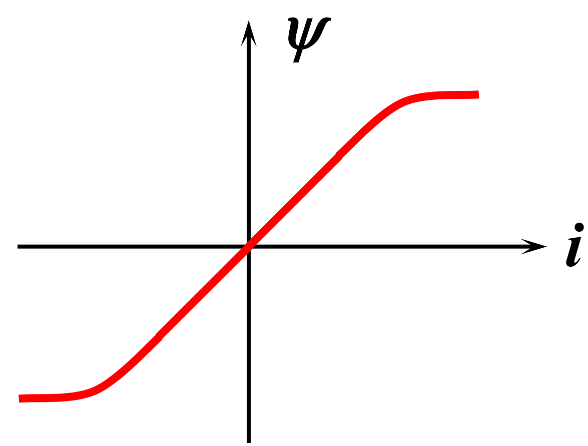
电感符号

理想电感只产生磁通，是电流与磁链(flux linkage) 相约束的元件。





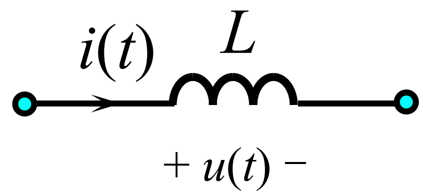
线性时不变电感



非线性电感

$$\psi(t) = L\,i(t)$$

6.线性时不变电感：其特性曲线是过原点的直线，且不随时间而改变。



电感符号

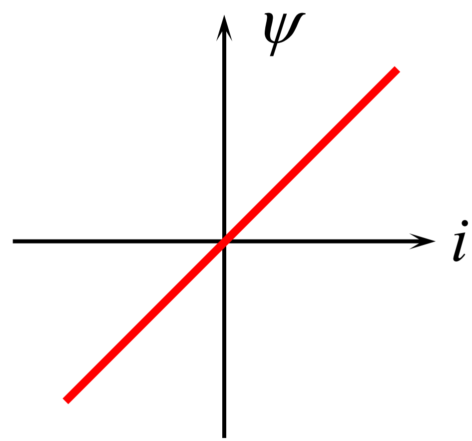
7. 磁链与电流的约束关系

$$\psi(t) = L\,i(t) \qquad (5\text{-}15)$$

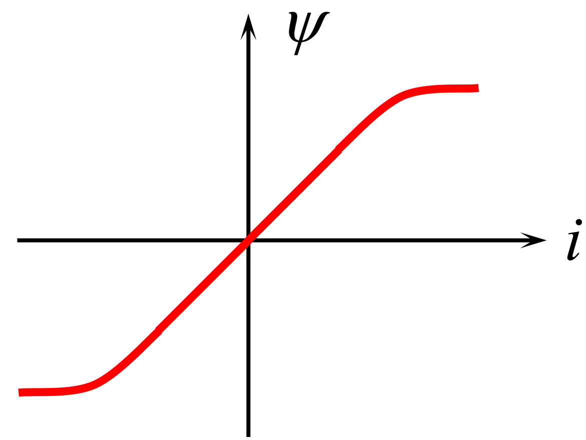
电感 $$L = \frac{\Psi(t)}{i(t)}$$

单位：亨利 (H)

毫亨(mH)



线性时不变电感

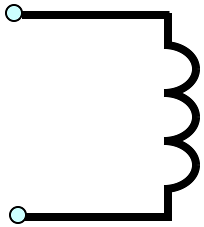


非线性电感

§ 5-5 电感元件

Φ为磁通量

符号



L

磁链 $\psi = N\Phi = L\,i$

韦伯(Wb)

电感 $L = \dfrac{\psi}{i}$

亨利(H)

(安)A

线圈的电感与线圈的尺寸匝数及介质的导磁性能等有关。

一密绕的长线圈

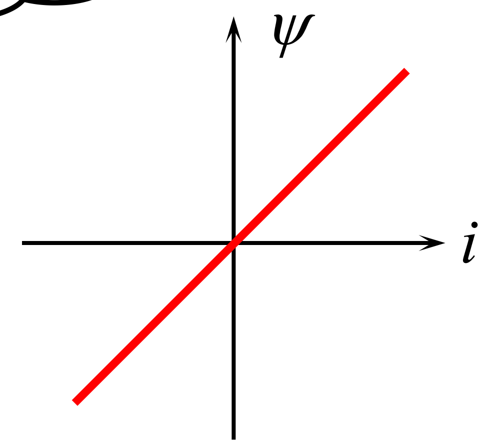
$$L = \frac{\mu S N^2}{l}$$

S —横截面积(m²)

l —长度 (m)

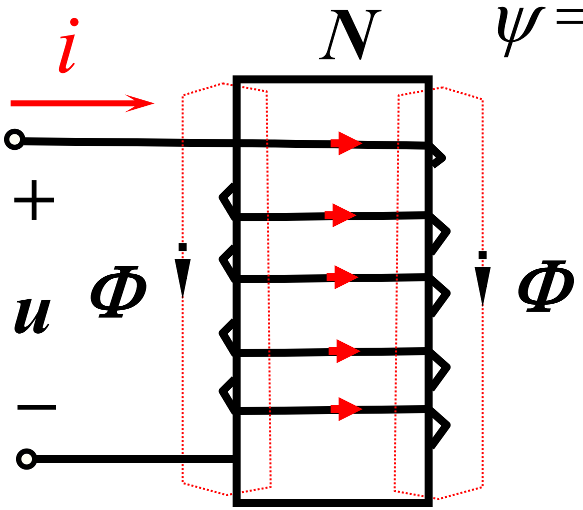
N —匝数(Wb)

μ —磁导率(H/m)

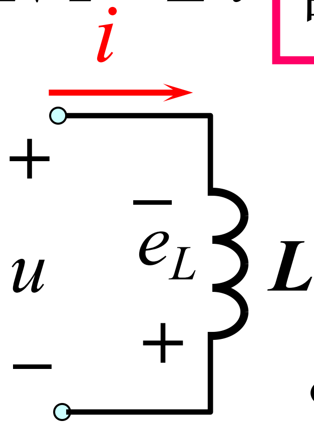


线性时不变电感

§ 5-5 电感元件



$\psi = N\Phi = L\,i$ 电感



$$L = \frac{N\,\Phi}{i}$$

韦伯(Wb)

(安)A

亨利(H)

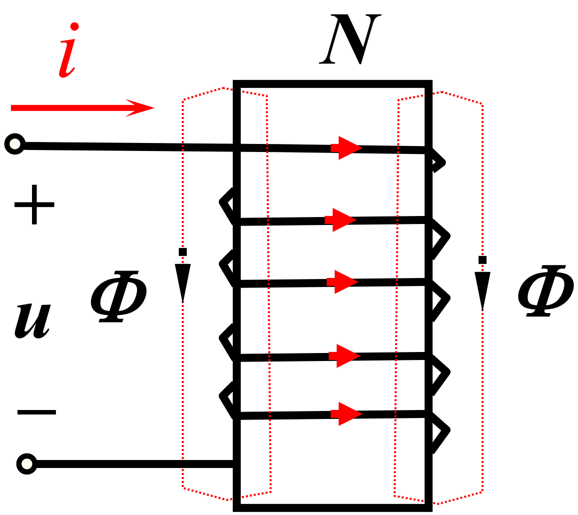
$$L = \frac{\mu S N^2}{l}$$

*L*称为电感或自感。线圈的匝数越多，其电感越大；线圈单位电流中产生的磁通越大，电感也越大。

在线圈中插入铁磁物质，改变介质的导磁性能，可增大电感。

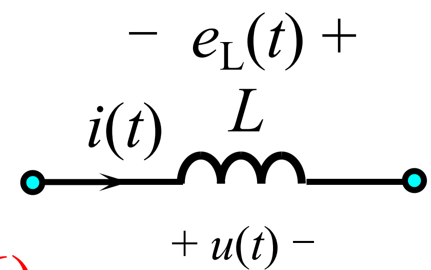
电磁感应定律

若L为大于零的常数则称为线性电感



若电路的某一部分只具有储存磁场能量的性质称它为理想电感元件。

根据电磁感应定律，



$$u(t)=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}Li}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad (5\text{-}16)$$

电感符号

在图示u、i、e假定参考方向的前提下，当通过线圈的磁通或i发生变化时，线圈中产生感应电动势为

$$e_L=-N\frac{d\Phi}{dt}=-L\frac{di}{dt} \quad (5\text{-}20)$$

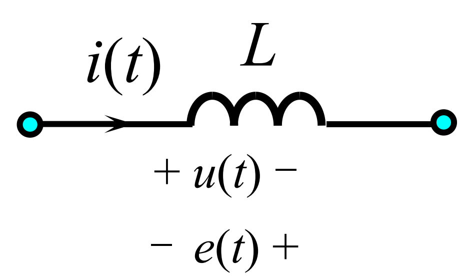
§ 5-6 电感的VCR

3. u、i 与 e 关联参考方向的含义

表达式 $u(t)=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

的使用条件：必须采用关联参考方向。

而楞次定律 $e(t)=-\dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$



关联参考方向

有 $u(t)$ 与 $i(t)$ 的方向一致，

$e(t)$ 与 $i(t)$ 的方向也一致，

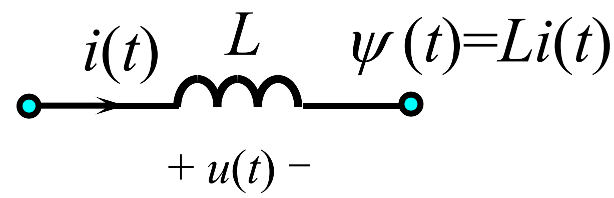
且 $u(t)$ 与 $e(t)$ 在数值上相等，

故有 $u(t)=-e(t)$

§ 5-6 电感的VCR

1. 微分关系

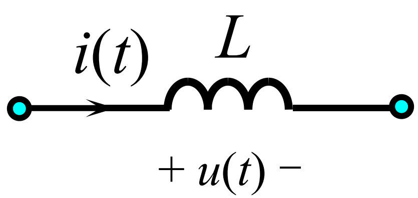
$$u(t)=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}Li}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



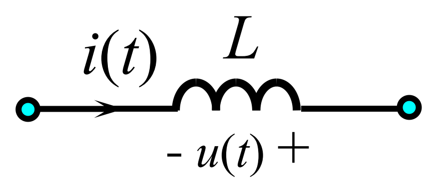
关联参考方向

(1) 电感电压u(t)与电感电流i(t)的变化率成正比，与电流值无关。

(2) 若电感电压u(t)为有限值，则di/dt为有限值，也就是说电感电流不能跃变。



关联参考方向



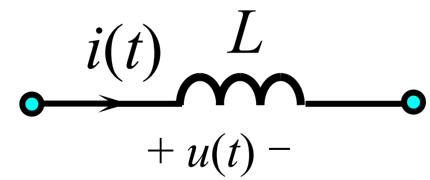
非关联参考方向

$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad (5\text{-}17)$$

$$u(t)=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

§5-6 电感的VCR

2. 积分关系



关联参考方向

由 $$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad (5\text{-}17)$$

有 $$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{\Psi(t)}{L} \quad (5\text{-}18)$$

电感电流 $i(t)$ 取决于从 -∞ 到 t 所有时刻的电压值。

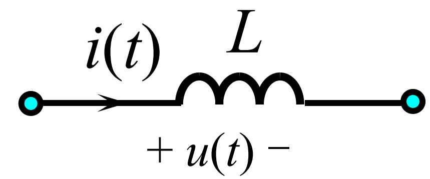
电感电流$i(t)$具有“记忆”电压的作用，电感L为“记忆”元件，也称惯性元件。

§ 5-6 电感的VCR

2. 积分关系

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}u(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$i(t)=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad t\geq t_0 \quad (5\text{-}18)$$



关联参考方向

$i(t_0)$ — 电感电流初始值

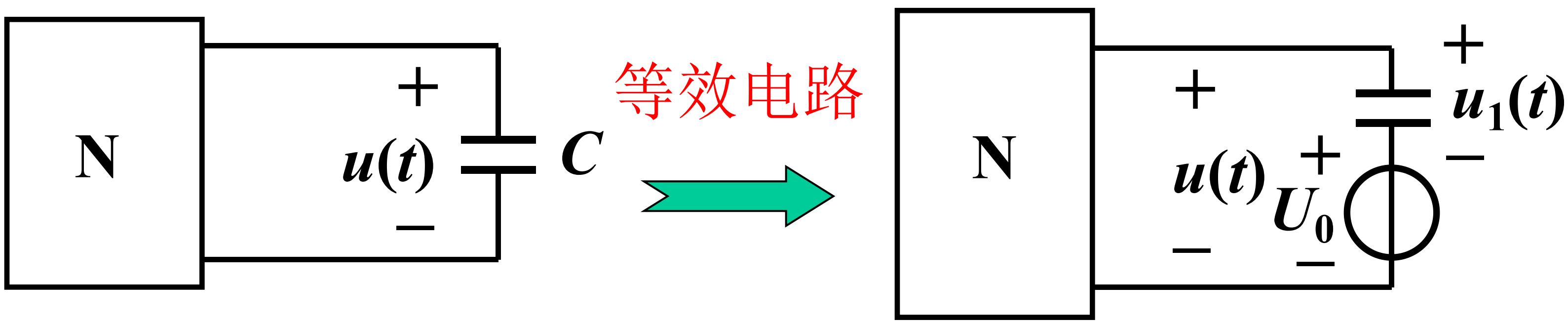
若 $t_0=0$，则有 $$i(t)=i(0)+\frac{1}{L}\int_{0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

§ 5-3 电容电压的连续性质和记忆性质

3.电容初始电压 $u_C(t_0)$ 的等效电路

$$\boldsymbol{u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi} \quad (5\text{-}7)$$

$$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)d\xi=U_0+u_1(t) \qquad t\geq t_0 \qquad (5\text{-}10)$$



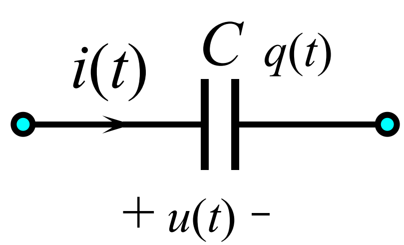
$t\geq -\infty$

$u(t_0)=U_0$

$t\geq t_0$

$u_1(t_0)=0$

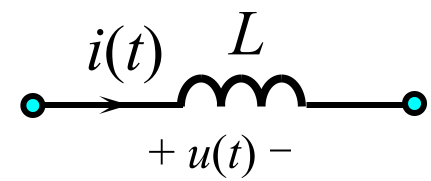
注意U_0的方向



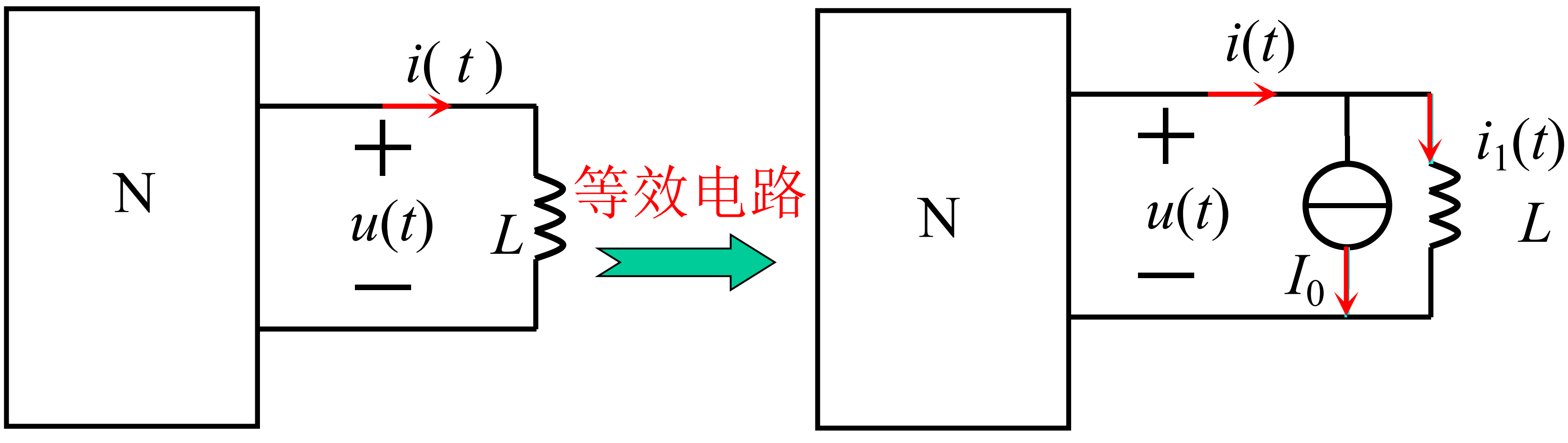
关联参考方向

§ 5-6 电感的VCR

3.具有初始电流I_0的电感的等效电路



关联参考方向



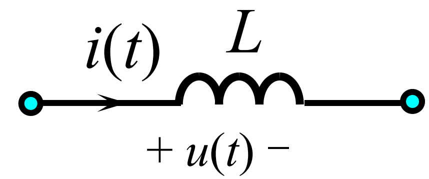
$i(t_0)= I_0$

$i_1(t_0)= 0$ $\quad t \geq t_0$

§ 5-6 电感的VCR

1.电感的功率　$P(t)=u(t)i(t)$

关联参考方向　<u>$P>0$ 吸收功率</u>；<u>$P<0$ 放出功率</u>



关联参考方向

2.电感的贮能　$p(t)=\dfrac{dw}{dt}$

$dw=p(t)dt$

$$w(t)=\int_{-\infty}^{t} p\,dx=\int_{-\infty}^{t} ui\,dx=\int_{-\infty}^{t} iL\frac{di}{dx}\,dx \qquad w(t)=\frac{1}{2}L\,i^2(t) \qquad (5\text{-}23)$$

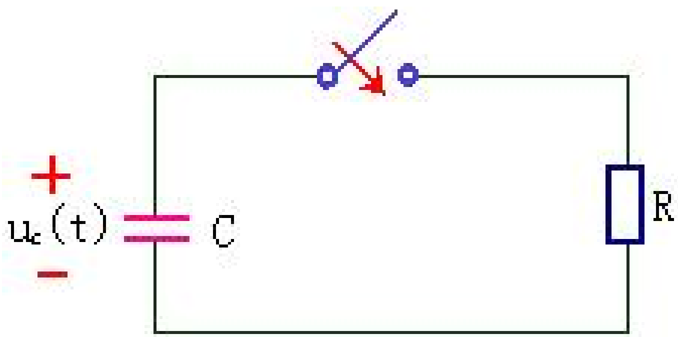
电感贮能与电流平方成正比，而与电压无关，电感电流不能跃变实质上是能量不能跃变的反映。

$$i_L(t_-)=i_L(t_+)$$

§ 5-6 电感的VCR

四. 电路的状态

电容元件和电感元件都是贮能元件，在分析动态电路时除了给出电路的结构、参数和激励还要给出初始时刻的贮能状况，否则就求不出解答。



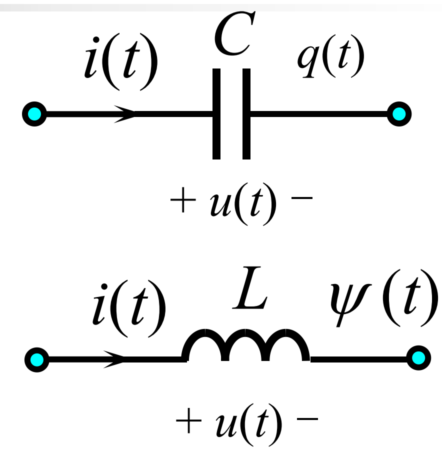
开关闭合后，电路中是否有电流取决于电容的贮能。

电路状态：电路中贮能元件的贮能状况叫电路的状态。我们把某时刻的电感电流和电容电压称为该时刻电路的状态。

初始状态：初始时刻t_0的$i_L(t_0)$、$u_c(t_0)$称为电路的初始状态。

§ 5-7 电容与电感的对偶性　状态变量

1. 电容与电感的对偶性



关联参考方向

电容的VCR　　$i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

电感的VCR　　$u(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

对比以上两式可发现：将 u、i 互换；C、L互换，即可由电容的VCR得电感的VCR，反之亦然。

因此称电容与电感为一对对偶量；

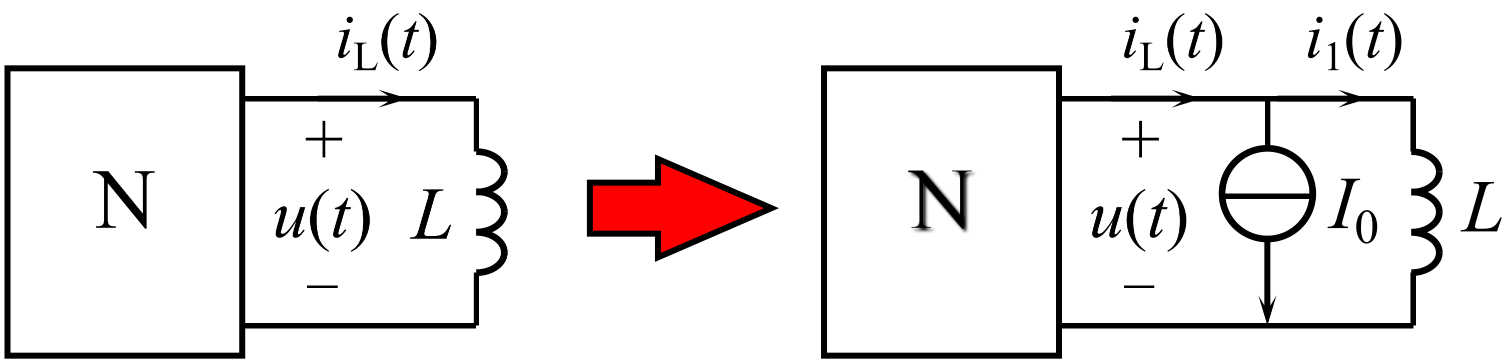
同理，电荷q与磁链ψ也是一对对偶量。

1. 电容与电感的对偶性

由L与C的对偶性，可得电感电流的连续性和记忆性：

$i_L(t_-) = i_L(t_+)$　　电感电流不能跃变。

$$\boldsymbol{i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\xi)\,d\xi = I_0 + i_1(t)}\quad t \geqslant t_0$$



注意 I_0 的方向

$i_L(t_0) = I_0$　　$i_1(t_0) = 0$

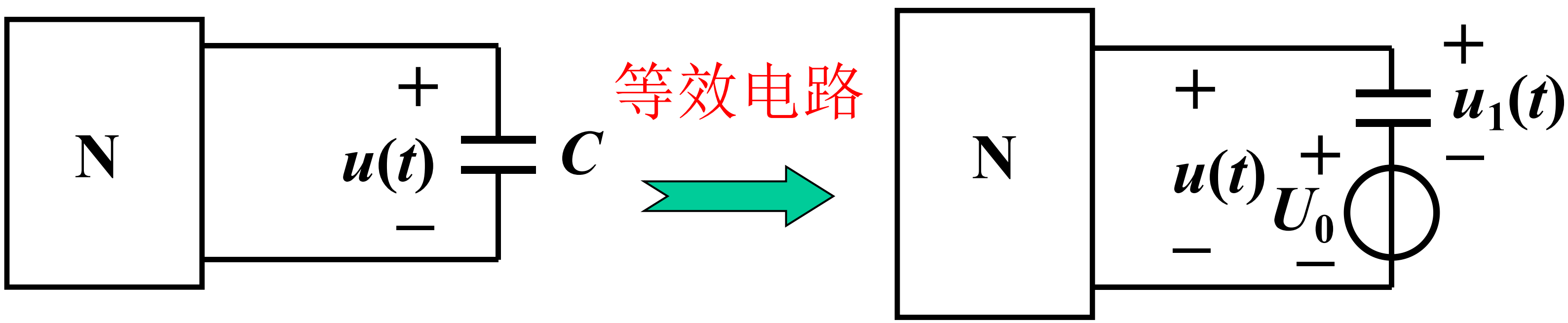
结论： 可将具有初始电流 $i_L(t_0)=I_0$ 的电感等效为一个初始电流为零的电感与电流源 I_0 的并联。

§ 5-7 电容电压的连续性质和记忆性质

3. 电容初始电压 $u_C(t_0)$ 的等效电路

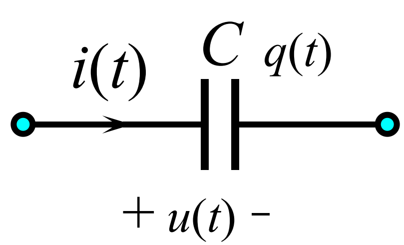
$u_C(t_-) = u_C(t_+)$ 电容电压不能跃变。

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)d\xi = U_0 + u_1(t) \quad t \geq t_0 \qquad （5-10）$$



$t \geq -\infty$　　　　　　$t \geq t_0$

$u(t_0) = U_0$



$u_1(t_0) = 0$

注意U_0的方向

关联参考方向

§ 5-7 电容与电感的对偶性 状态变量

1. 电容与电感的对偶性

由L与C的对偶性，可得电感的储能：

$$w_L(t)=\frac{1}{2}Li_L^2(t)\propto i^2(t)$$ —— 将i_L称为电路的状态变量

电感储能与当时的电流值有关，而与电压无关。

电感电流的连续性和记忆性质是电感储能的体现。

2. 电容的储能

$$\boldsymbol{w(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t)}\propto u^2(t)$$ —— 故将u_C称为电路的状态变量

电容储能与当时的电压值有关，而与电流无关。

电容电压的连续性和记忆性质是电容储能的体现。

3. 状态变量的概念

电路的状态变量有 $u_C(t)$、$i_L(t)$。

在电路及系统理论中，状态变量是指一组最少的变量，若已知它们在 t_0 时刻的数值（即初始状态），连同电路在 $t \geq t_0$ 时的输入，即可确定 $t \geq t_0$ 时电路的任意变量的数值（即电路响应）。

零状态响应：电路的状态量为0，即 $u_C(t)=0$、$i_L(t)=0$。

电路的工作对信号的传送和处理，电路工作时，激励提供能量，并由于能量的流动和变化产生响应。

电路的能量可以由电源提供，也可以由储能元件提供。当储能元件没有能量时，即状态量为零，此时由激励电源提供能量，电路所产生的响应，即为零状态响应，所以零状态响应时，电路必须有电源输入。

3. 状态变量的概念

零输入响应：电路输入激励为0，即 $u_s(t)=0$ 、 $i_s(t)=0$ 。

当电路的激励电源为零时，动态元件的状态量不为0，即由状态不为0的动态元件储能为电路提供能量，电路此时产生的响应，即为零输入响应。因此，在没有输入的情况下，所出现的零输入响应是由状态量引起的响应。

全响应：电路的输入激励和状态量均不为0时产生

当电路的激励电源不为0、动态元件的状态量也不为0时，电路的响应由动态元件的储能状态量和电路的输入激励电源共同提供能量，电路此时产生的响应，即为全响应。因此，全响应是在电源输入和状态量共同作用下引起的响应。

§ 5-8 电容、电感的串、并联

将 n 个电容串联或并联，可等效成一个电容：

C—串联 $$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$$ 类似于电阻并联

C—并联 $$C=C_1+C_2+\cdots+C_n$$ 类似于电阻串联

将 n 个电感串联或并联，可等效成一个电感：

L—串联 $$L=L_1+L_2+\cdots+L_n$$ 类似于电阻串联

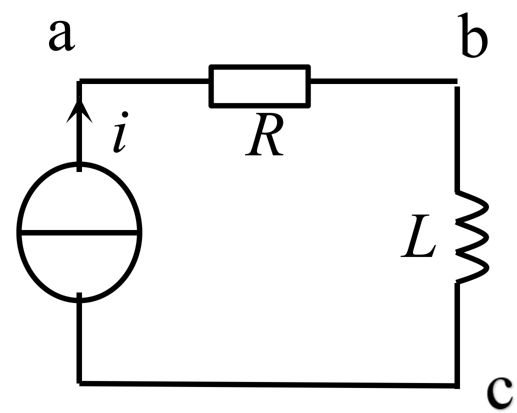
L—并联 $$\frac{1}{L}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_n}$$ 类似于电阻并联

例 已知：R=5Ω　L=2H；

(1) 写出u_{ab}与u_{bc}的表示式，并绘波形图；

(2) 求t=2.5秒时，各元件功率；

(3) 求t=2.5秒时，电感贮能。



解：(1)　$0 \leq t \leq 1s$　　$i(t)=5t$A

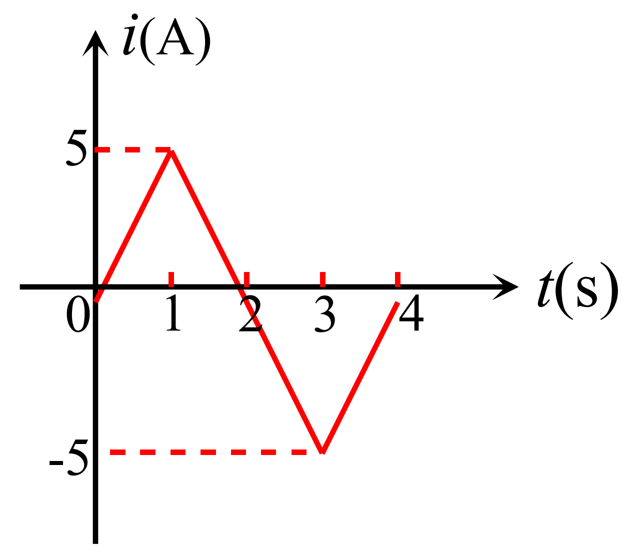
$$u_{ab}(t)=Ri=5\times 5t=25t \text{ V}$$

$$u_{bc}(t)=L\frac{di}{dt}=2\times 5=10\text{V}$$

$1 \leq t \leq 3s$　　$i(t)= -5t+10$A

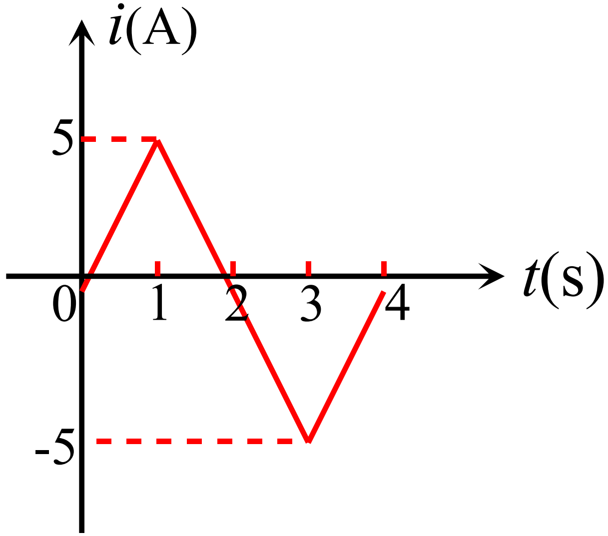
$$uab(t)=5\times(-5t+10)=-25t+50\text{V}$$

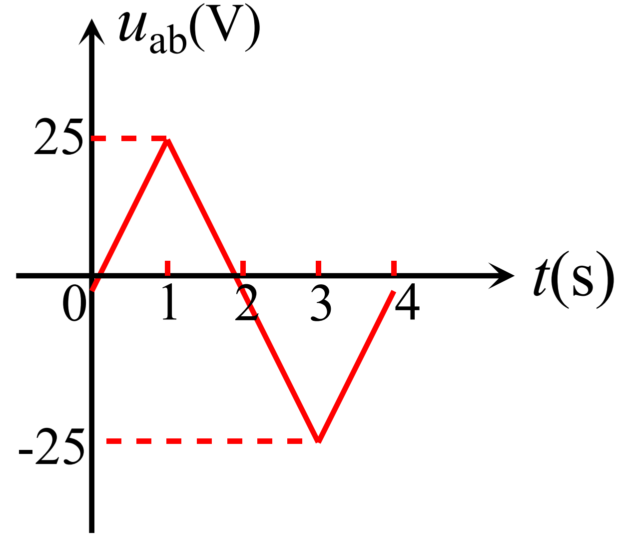
$$ubc=2\frac{d}{dt}(-5t+10)=-10\text{V}$$

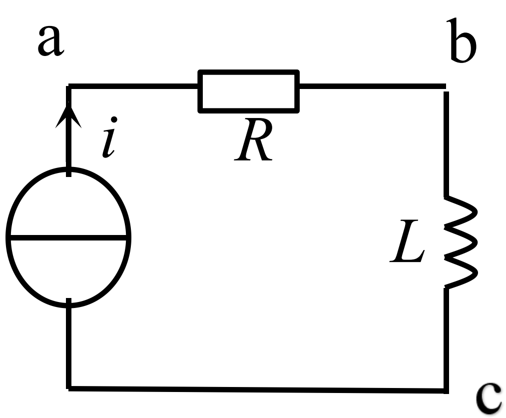


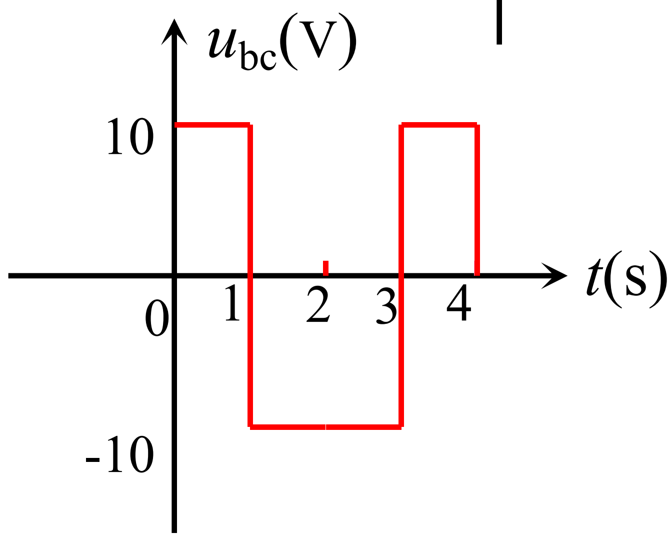
$3 \le t \le 4s \qquad i(t) = 5t - 20A$

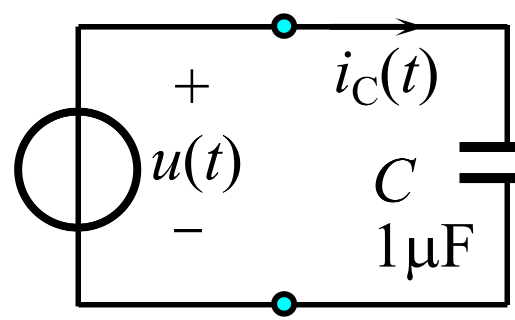
$u_{ab}(2.5) = 5 \times (5t-20) = 25t - 100\ \text{V} \qquad u_{bc} = 2\dfrac{d}{dt}(5t-20) = 10\ \text{V}$

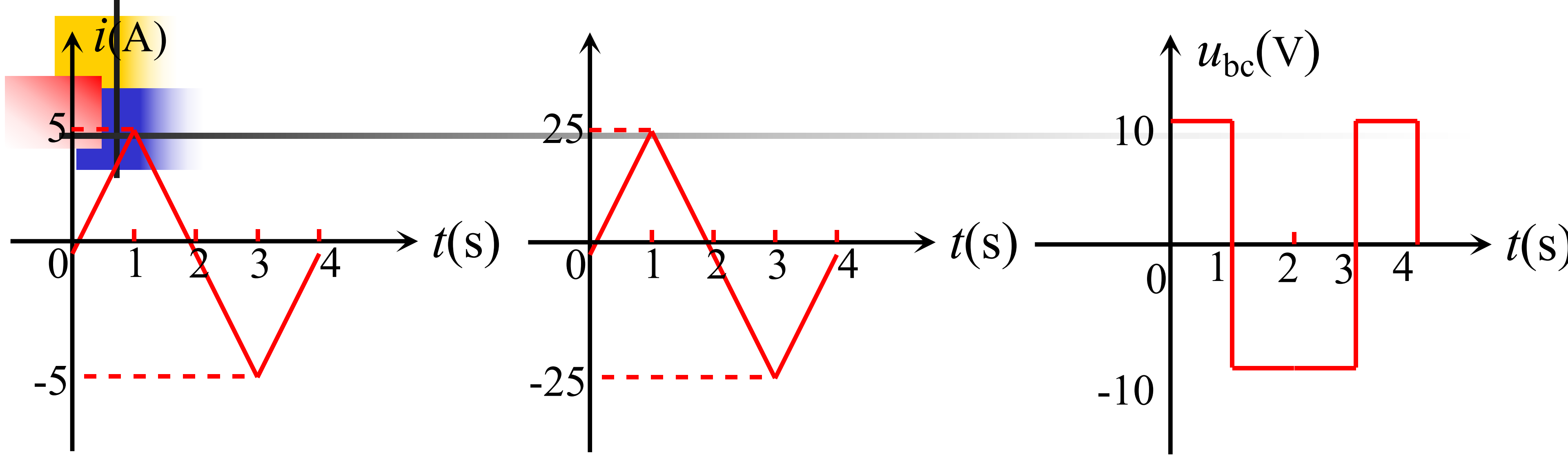




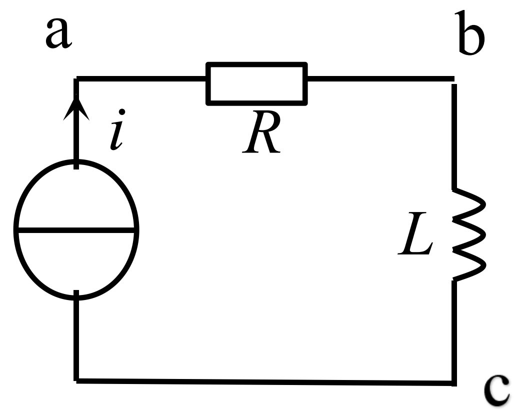








$t = 2.5$秒时 $\quad i\,(2.5) = -5 \times (2.5) + 10 = -2.5$ A



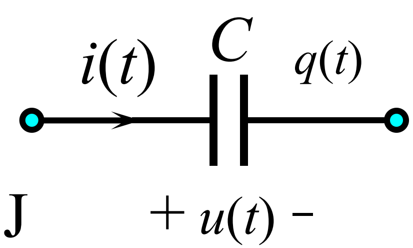
$u_{ab}(2.5) = -25 \times (2.5) + 50 = -12.5\text{V}$

$u_{bc}(2.5) = -10V$

$p_R(2.5) = -12.5 \times (2.5) = 31.25$ W

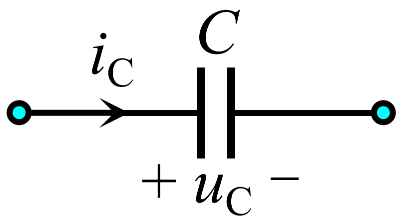
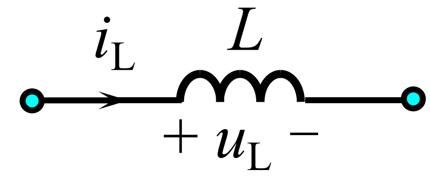
$p_L(2.5) = -10 \times (-2.5) = 25$ W

$p_i(2.5) = -(-12.5-10) \times (-2.5) = -56.25$ W

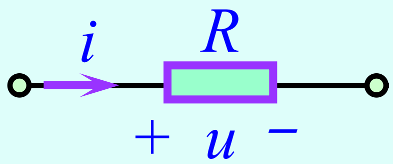
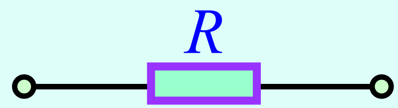
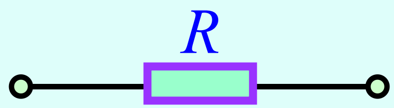
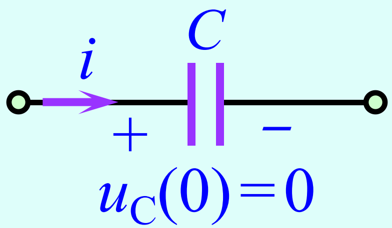
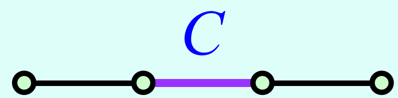
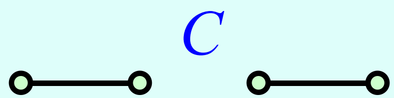
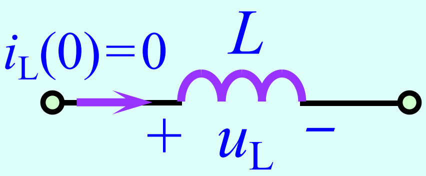
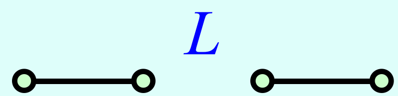
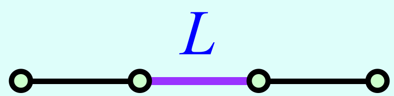
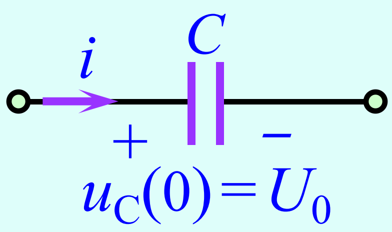
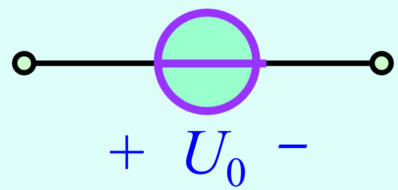
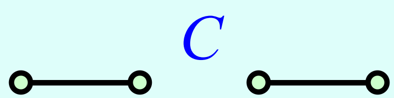
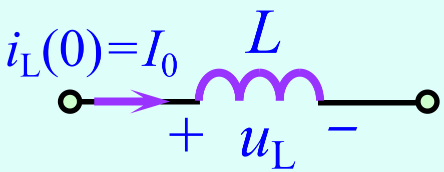
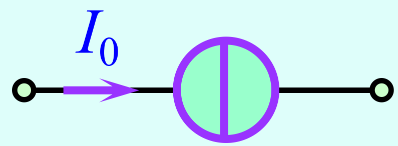
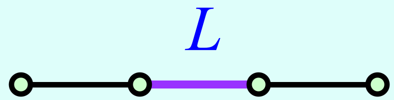


(3) $w_L(2.5) = \frac{1}{2} Li\,(2.5)^2 \; \frac{1}{2} \times 2 \times (2.5)^2 = 6.25$ J

第五章 小结

电 容 元 件	电 感 元 件
	
$q(t)=Cu_C(t)$	$\psi(t)=L\,i_L(t)$
$i_C=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$	$u_L=L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$
$u_C(t)=u_C(t_0)+\dfrac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)\mathrm{d}\xi$	$i_L(t)=i_L(t_0)+\dfrac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\xi)\mathrm{d}\xi$
$p_C(t)=u_C(t)\cdot i_C(t)$	$p_L(t)=u_L(t)\cdot i_L(t)$
$w_C(t)=\dfrac{1}{2}Cu_C^2(t)$	$w_L(t)=\dfrac{1}{2}Li_L^2(t)$
电流为有限值时，电压不能跃变	电压为有限值时，电流不能跃变

元件的等效电路汇总

电路元件	$t=0_+$	$t\to\infty$
 i, R, $+\ u\ -$	 R	 R
 i, C, $+\ -$, $u_C(0)=0$	 C	 C
 $i_L(0)=0$, L, $+\ u_L\ -$	 L	 L
 i, C, $+\ -$, $u_C(0)=U_0$	 $+\ U_0\ -$	 C
 $i_L(0)=I_0$, L, $+\ u_L\ -$	 I_0	 L