第二章 网孔分析和节点分析

§2.1 网孔分析法

§2.2 互易定理（不作要求）

§2.3 节点分析法

§2.4 含运算放大器的电阻电路

§2.5 电路的对偶性

运用独立电流、电压变量的分析方法

便于应用计算机程序进行电路分析

作业：

第5版教材P101-104：

2–3, 2–7, 2-8, 2–12, 2–14, 2-18，2-19, 2-20

第4版教材P85-89：

2-2, 2-5, 2-6, 2-12, 2-13, 2–17, 2-18, 2–19

§2.1 网孔分析法

网孔电流（mesh current)是一组完备的独立变量,是沿着网孔边界（支路）流动的电流

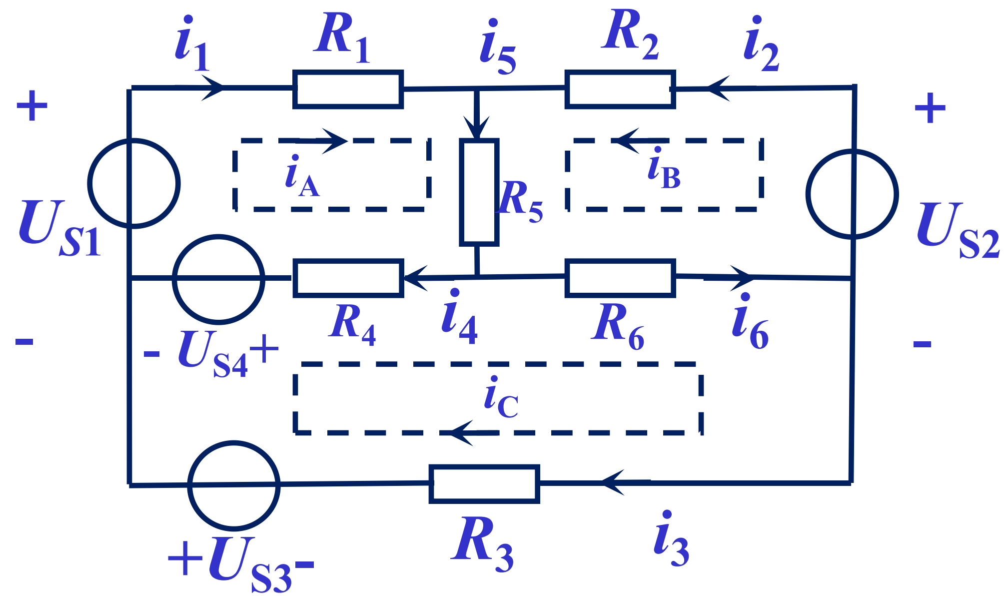
完备性

$$i_1 = i_A \qquad i_4 = i_A - i_C$$

$$i_2 = i_B \qquad i_5 = i_A + i_B$$

$$i_3 = i_C \qquad i_6 = i_B + i_C$$

网孔电流一旦求出，各支路电流就可求得。



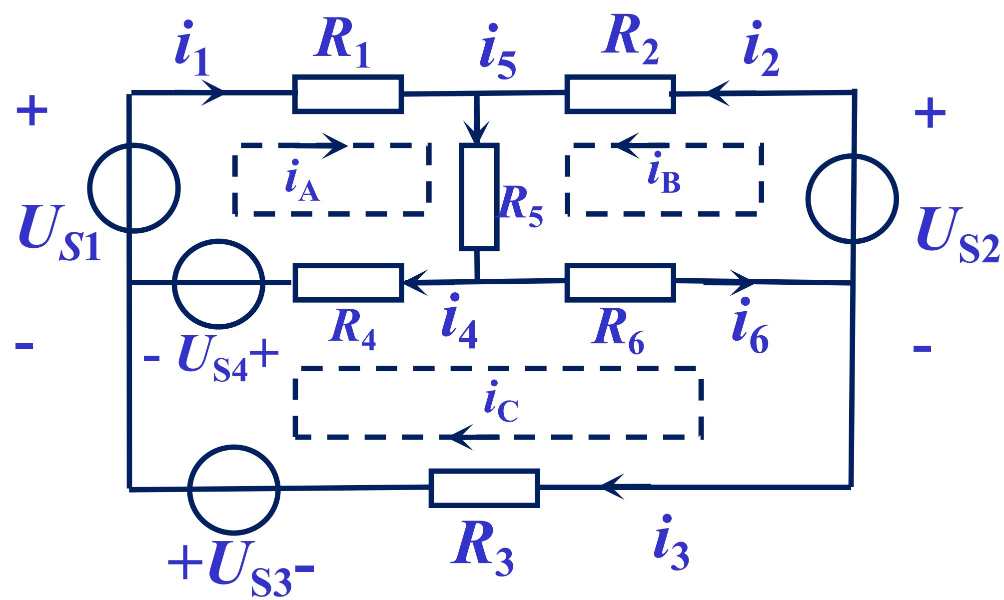
§ 2.1 网孔分析法

独立性：

网孔电流从一个节点流入又从这个节点流出，所以它不受KCL的约束。

$$-i_1 - i_2 + i_5 = 0$$

$$-i_A - i_B + (i_A + i_B) = 0$$



网孔电流彼此独立无关，所以网孔电流是一组完备的独立变量。

§2.1 网孔分析法

网孔方程的建立：

方法：选择电路的网孔电流作为独立变量，对各个网孔列写电压（KVL）方程，由于平面电路的全部网孔为一组独立回路，因此可以得到一组完备的独立电流方程，从而求解电路中的待求量。

§ 2.1 网孔分析法

网孔方程的建立：

变量：网孔电流（参考方向与回路绕行方向一致）

方程结构：网孔数个KVL电压方程（欧姆定律）

矩阵形式： $U_m = R_m \cdot I_m$

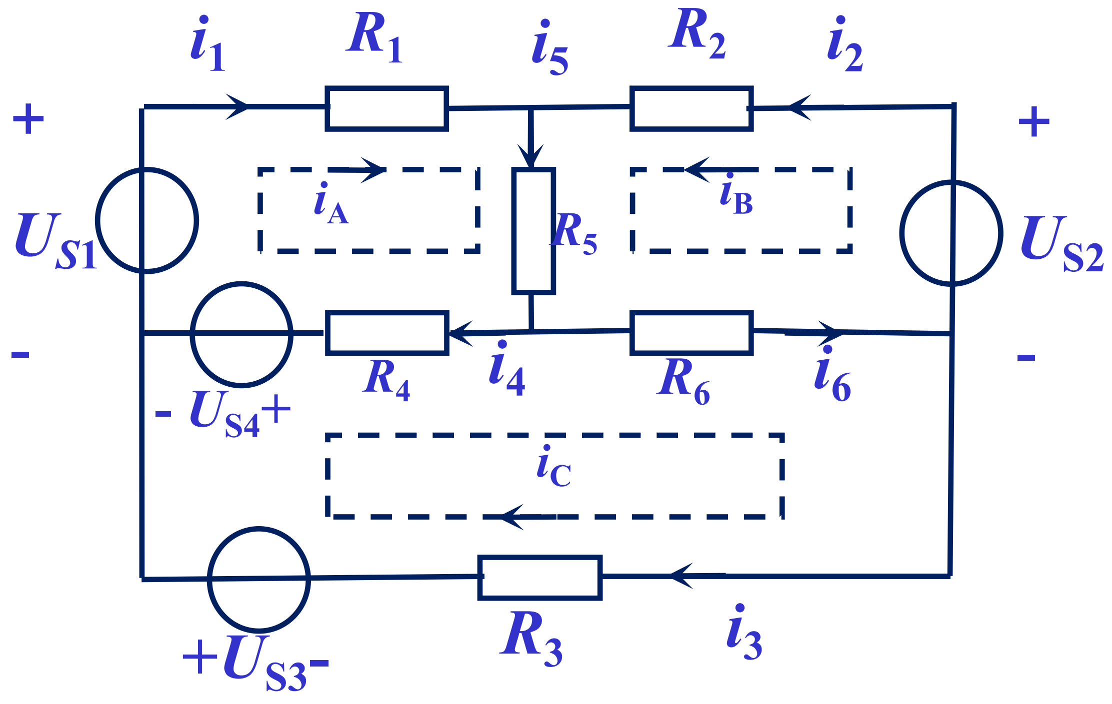
其中：R_m为网孔电阻矩阵，

I_m为网孔电流向量，

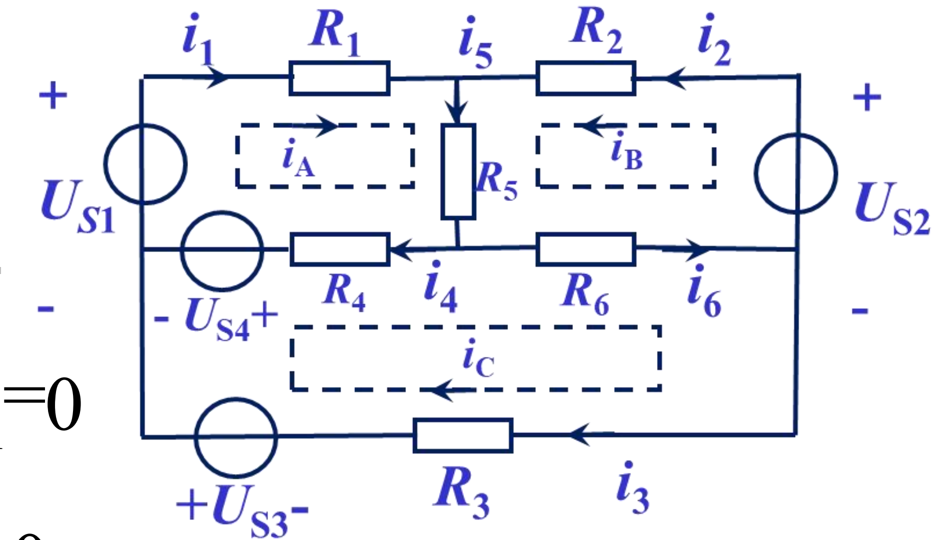
U_m为节点电压源向量

§ 2.1 网孔分析法

网孔方程的建立：应用KVL列回路电压方程



§2.1 网孔分析法



$$R_1 i_A + R_5(i_A + i_B) + R_4(i_A - i_C) + u_{S4} - u_{S1} = 0$$

$$R_2 i_B + R_5(i_A + i_B) + R_6(i_B + i_C) - u_{S2} = 0$$

$$R_3 i_C - u_{S3} - u_{S4} + R_4(i_C - i_A) + R_6(i_B + i_C) = 0$$

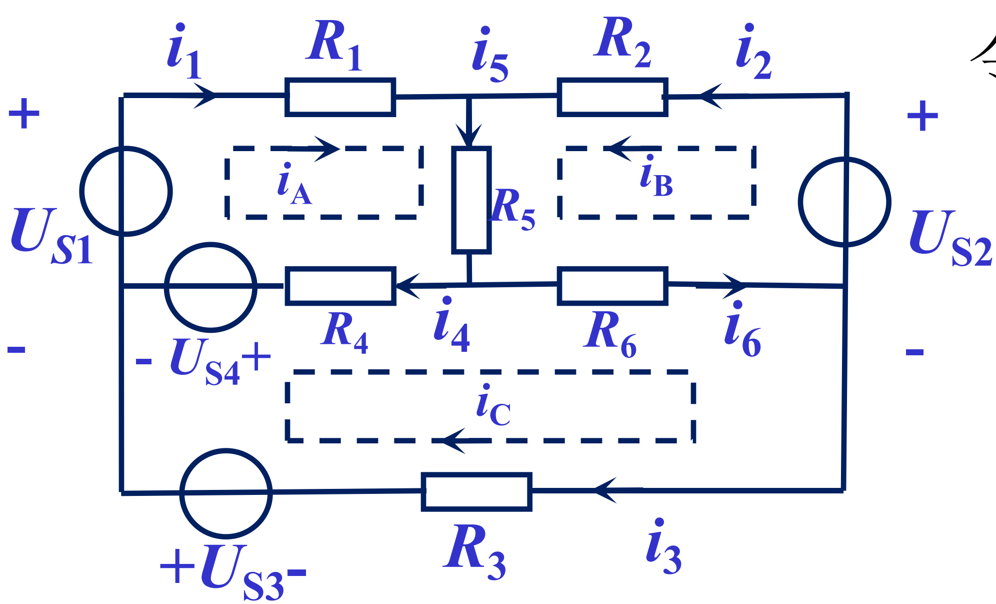
等号左端是网孔中全部电阻上电压降之和，等号右端为该网孔中全部电压源电压升之和。

$$(R_1 + R_4 + R_5) i_A + R_5 i_B - R_4 i_c = u_{S1} - u_{S4}$$

$$R_5 i_A + (R_2 + R_5 + R_6) i_B + R_6 i_C = u_{S2}$$

$$-R_4 i_A + R_6 i_B + (R_3 + R_4 + R_6) i_C = u_{S3} + u_{S4}$$

§ 2.1 网孔分析法



令$R_{11}=R_1+R_4+R_5$

为第一网孔的自电阻

令$R_{12}=R_{21}=R_5$

为一、二两网孔中互电阻

$R_{13}=R_{31}=R_4$

为一、三两网孔中互电阻

$R_{23}=R_{32}=R_6$

为二、三两网孔中互电阻

令$u_{S11}=u_{S1}-u_{S4}$

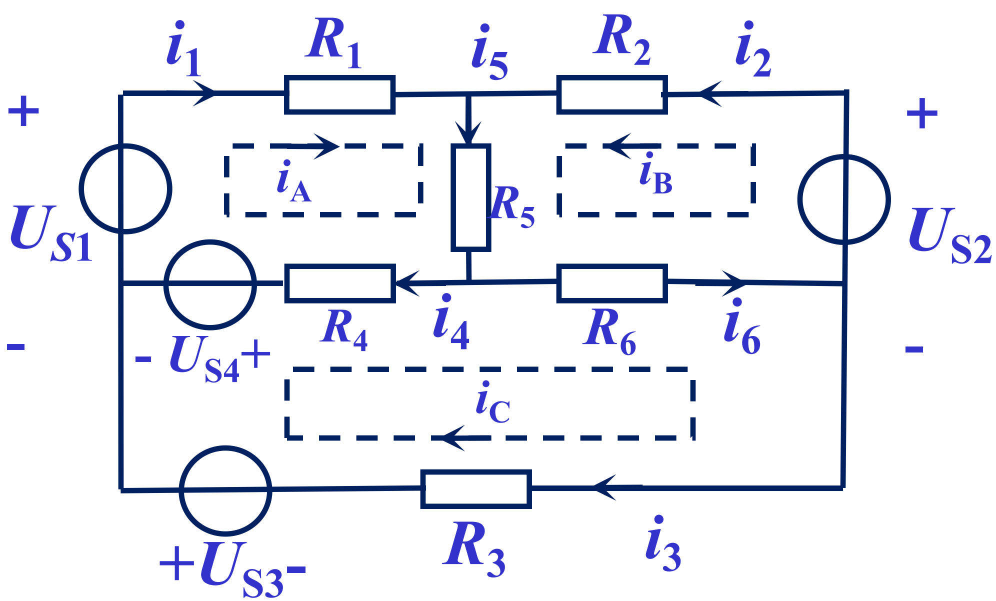
为第一网孔中电压升之和

§ 2.1 网孔分析法

$$(R_1+R_4+R_5)i_A+R_5 i_B-R_4 i_c=u_{S1}-u_{S4}$$

$$R_5 i_A+(R_2+R_5+R_6)i_B+R_6 i_C=u_{S2}$$

$$-R_4 i_A+R_6 i_B+(R_3+R_4+R_6)i_C=u_{S3}+u_{S4}$$

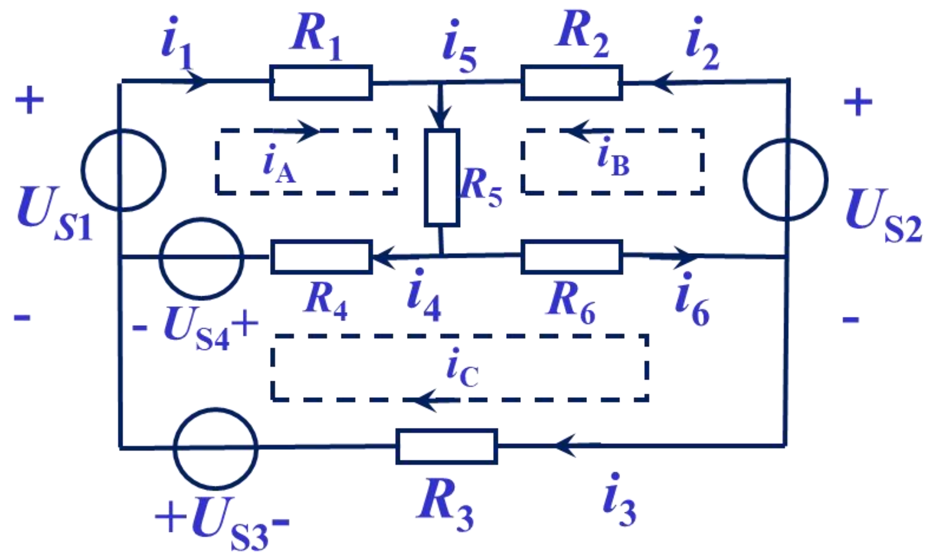


§ 2.1 网孔分析法

（1）自电阻*网孔电流 + 互电阻*相邻网孔电流 = 网孔中电压源电压升之和；

（2）自电阻总为正值；互电阻（公用电阻）则有正有负，两网孔电流流过互电阻时，方向相同则取正，方向相反时取负 。

$$R_{11}i_A+R_{12}i_B+R_{13}i_C=u_{S11}$$
$$R_{21}i_A+R_{22}i_B+R_{23}i_C=u_{S22}$$
$$R_{31}i_A+R_{32}i_B+R_{33}i_C=u_{S33}$$



例 2-1 用网孔分析求解图 2-2 所示电路的各支路电流。已知 $R_1=5\ \Omega$，$R_2=10\ \Omega$、$R_3=20\ \Omega$。

解 该电路有两个网孔，首先在每一个网孔内假设一个网孔电流，如图 2-2(a)所示的 i_{M1} 和 i_{M2}。它们的参考方向是任意假定的，现假定它们都是顺时针方向。

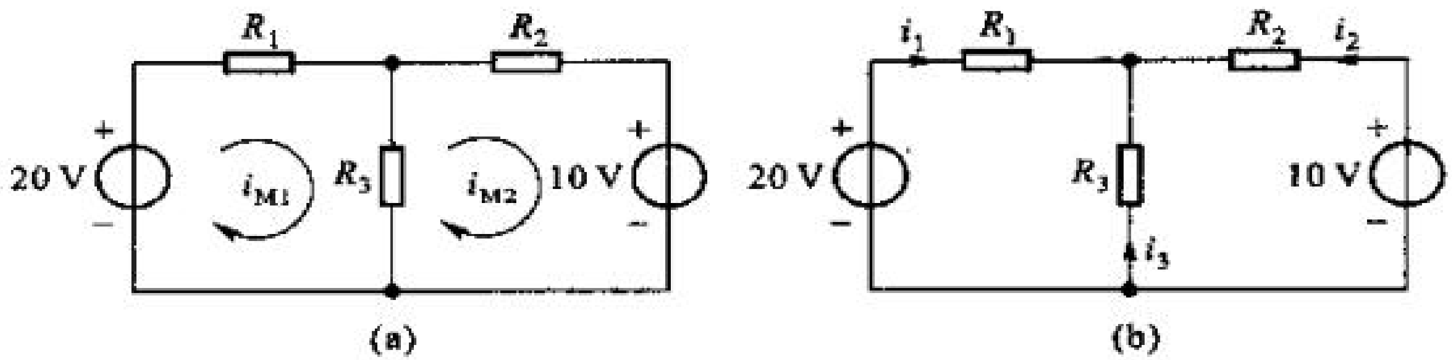


图 2-2 例 2-1

第一网孔的自电阻：$R_{11}=R_1+R_3=25\ \Omega$

第一和第二网孔的互电阻：$R_{12}=R_{21}=-R_3=-20\ \Omega$

第二网孔的自电阻：$R_{22}=R_3+R_2=30\ \Omega$

注意：$R_{12}=R_{21}$且为负值，这是因为两网孔电流以不同的方向流过公共电阻 $R_3=20\ \Omega$ 的缘故。

又

$$u_{S11}=20\ \text{V}$$

$$u_{S22}=-10\ \text{V}$$

注意：u_{S11}、u_{S22}分别表示在第一及第二网孔内沿绕行方向（即网孔电流方向）电压源电压升的代数和。今沿 i_{M1} 的方向，电压源电压 20 V 系由负极到正极，确为电压升，故 u_{S11} 为 +20 V。沿 i_{M2} 的方向，电压源电压 10 V 系由正极到负极，为电压降，故 u_{S22} 为 −10 V。得网孔方程

$$25i_{M1} - 20i_{M2} = 20$$

$$-20i_{M1} + 30i_{M2} = -10$$

用克莱姆法则①解 i_{M1} 及 i_{M2}，得

$$i_{M1} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -20 \\ -10 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25 & -20 \\ -20 & 30 \end{vmatrix}}\mathrm{A} = \frac{20\times30-(-10)\times(-20)}{25\times30-(-20)\times(-20)}\mathrm{A}$$

$$= \frac{20\times30-10\times20}{25\times30-20\times20}\mathrm{A} = \frac{40}{35}\mathrm{A} \approx 1.143\,\mathrm{A}$$

$$i_{M2} = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 20 \\ -20 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25 & -20 \\ -20 & 30 \end{vmatrix}}\mathrm{A} = \frac{-25\times10-(-20)\times(20)}{25\times30-(-20)\times(-20)}\mathrm{A}$$

$$=\frac{-25\times 10+20\times 20}{25\times 30-20\times 20}\text{A}=\frac{15}{35}\text{A}=\frac{3}{7}\text{A}=0.429\text{A}$$

设各支路电流 i_1、i_2、i_3 如图 2-2(b)所示，显然可得

$$i_1=i_{M1}$$
$$i_2=-i_{M2}$$
$$i_3=i_{M2}-i_{M1}$$

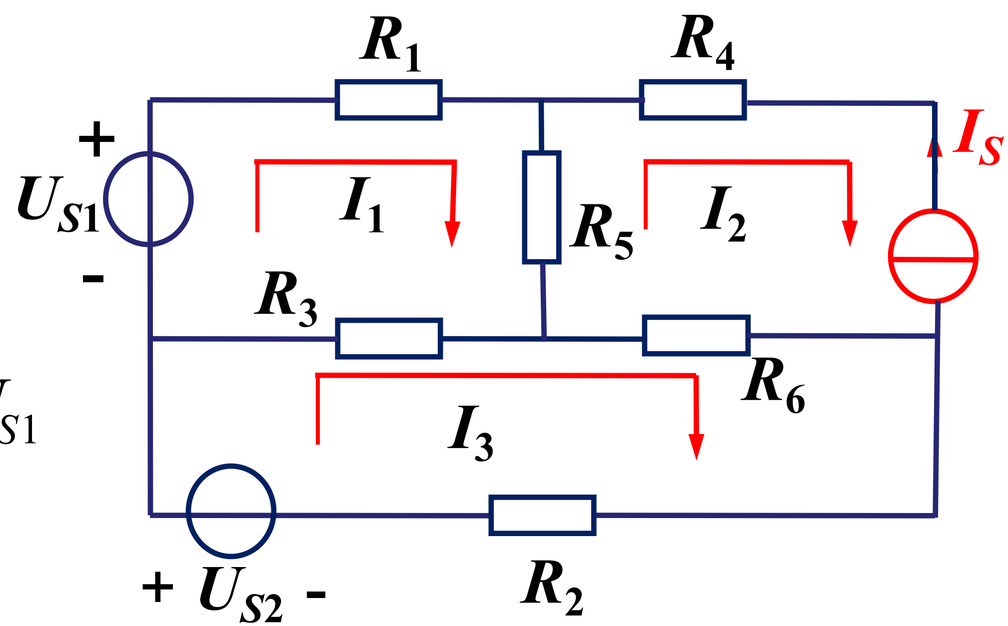
各支路电流均可以用网孔电流来表示。以求得的网孔电流值代入，得

$$i_1=1.143\ \text{A},\ i_2=-0.429\ \text{A},\ i_3=-0.714\ \text{A}$$

用网孔分析法时，不能用 KCL 来校核，因为各支路电流就是从各网孔电流相加减后求得的，它们自动满足 KCL。应该用 KVL 来校核。

§ 2.1 网孔分析法

例6：试列写下图所示电路的网孔方程组



解：

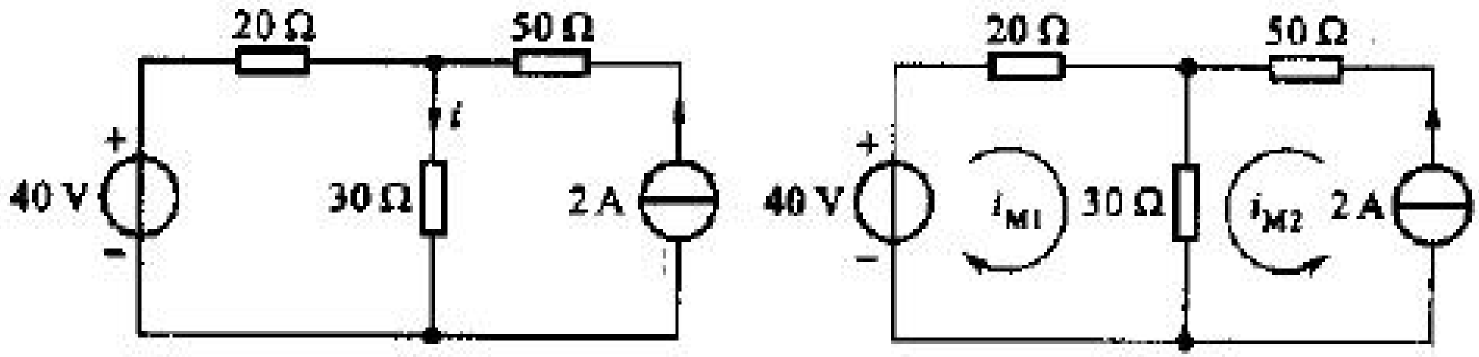
$$(R_1+R_3+R_5)I_1 - R_5 I_2 - R_3 I_3 = U_{S1}$$

$$I_2 = -I_S$$

$$-R_3 I_1 - R_6 \mathrm{I}_2 + (R_2+R_3+R_6)I_3 = U_{S2}$$

可见，电流源I_S在边沿支路时，可以减少方程数。

例 2－2 电路如图 2－3(a)所示，试求流经 30 Ω 电阻的电流 i。



(a) (b)

解 本题电路含有电流源。在含电流源的支路中，其支路电流即为电流源的电流值，因此，流经 50 Ω 电阻的电流等于 2 A，是已知的。

如用网孔分析法解本题，仍然可以先在每一网孔中设一网孔电流，如图 2－3(b)所示。由于 i_{M2} 是电流源支路，不必列写网孔 2 的方程 $i_{M2}=2$ A。

网孔电流 $i_{M2}=2$ A 所选方向与电流源电流方向一致，故

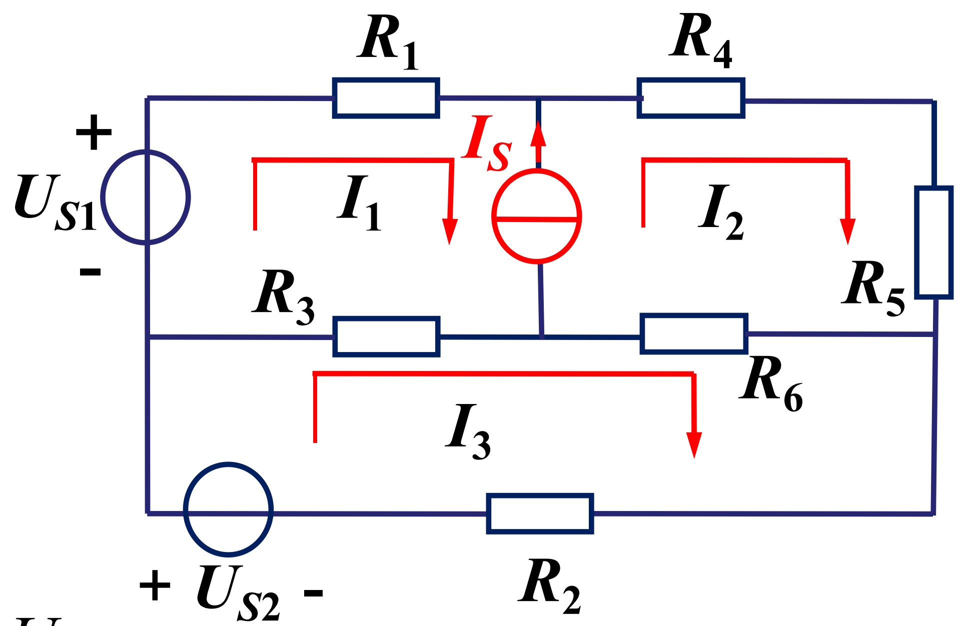
网孔 1 的方程为 $50i_{M1}+30i_{M2}=40$ $i_{M2}=2$ A 代入上式，得 $50i_{M1}+60=40$

$$i_{M1}=\frac{40-60}{50}\text{A}=\frac{-20}{50}\text{A}=-0.4\ \text{A} \qquad i=i_{M1}+i_{M2}=(-0.4+2)\ \text{A}=1.6\ \text{A}$$

§ 2.1 网孔分析法

例7：试列写下图所示电路的网孔方程组

中间支路有电流源I_S



解：

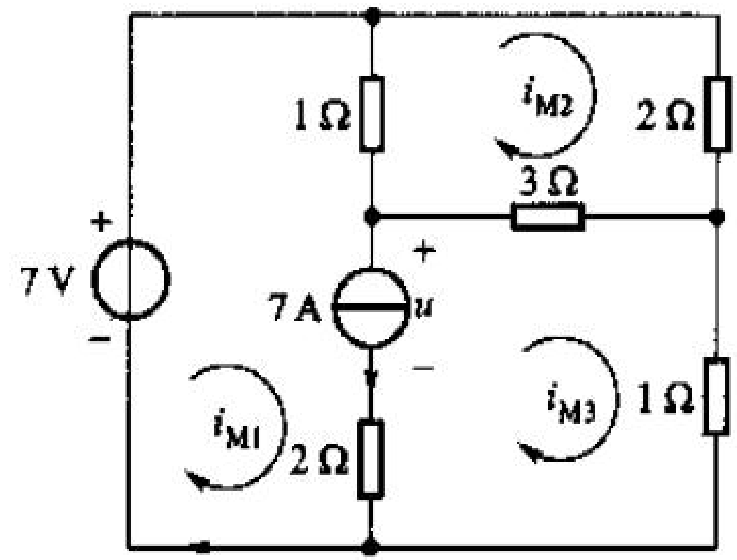
$$(R_1+R_3)I_1-R_3I_3=U_{S1}-U_0$$

$$(R_4+R_5+R_6)I_2-R_6I_3=U_0$$

$$-R_3I_1-R_6I_2+(R_2+R_3+R_6)I_3=U_{S2}$$

$$I_S=I_2-I_1$$ 辅助方程

例 2－3　电路如图 2－4 所示，试列网孔方程。



解　注意：电流源两端有电压，假设为 u，

网孔方程实质上是KVL方程，在列网孔方程时应把电流源电压 u 考虑在内

$$3i_{M1} - i_{M2} - 2i_{M3} + u = 7$$

$$-i_{M1} + 6i_{M2} - 3i_{M3} = 0$$

$$-i_{M1} - 3i_{M2} + 6i_{M3} - u = 0$$

u 也是未知量 增列方程 $i_{M1} - i_{M3} = 7$

故能解出 4 个未知量：i_{M1}、i_{M2}、i_{M3}和 u。

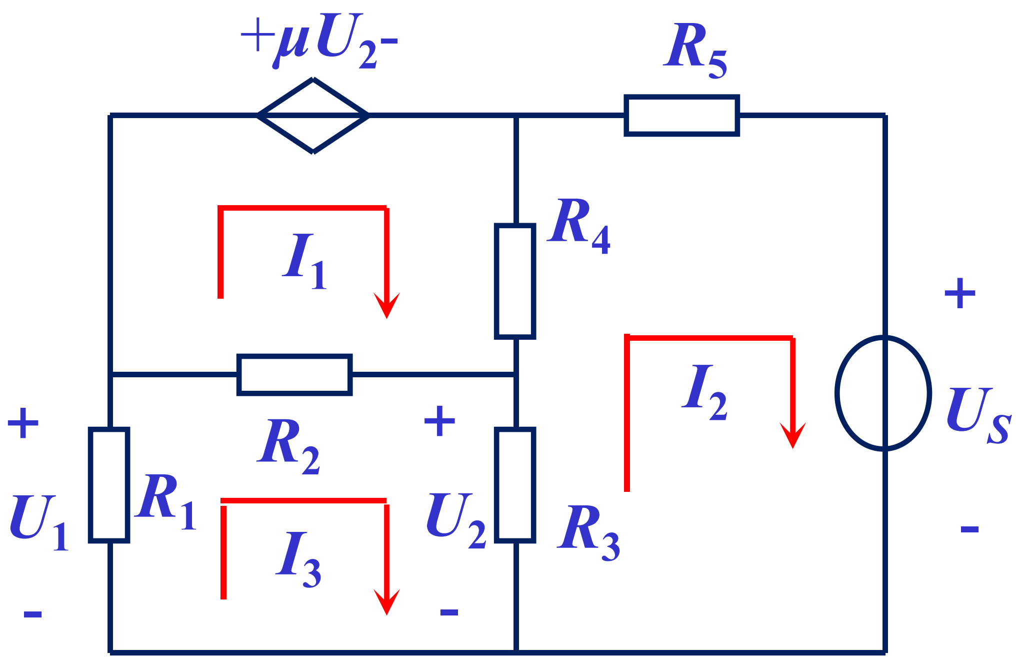
§2.1 网孔分析法

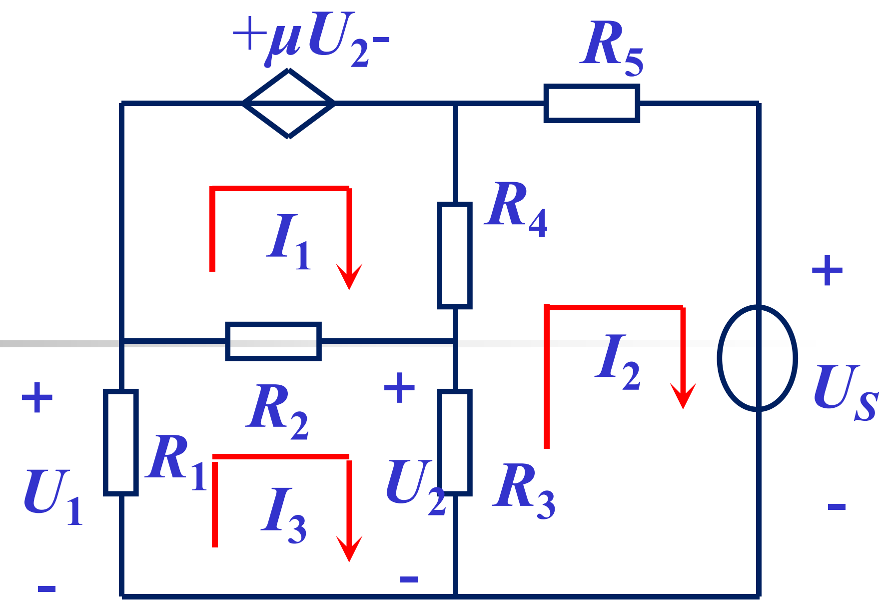
（1）电流源I_S在中间支路时，假设“一个电压源值”列入方程，再列一辅助方程。

（2）自电阻*网孔电流+互电阻*相邻网孔电流=网孔中电压源电压升之和

§ 2.1 网孔分析法

例8：电路如图示，已知U_s=5V，$R_1=R_2=R_4=R_5=1\Omega$，$R_3=2\Omega$，$\mu=2$。求U_1＝？





解：

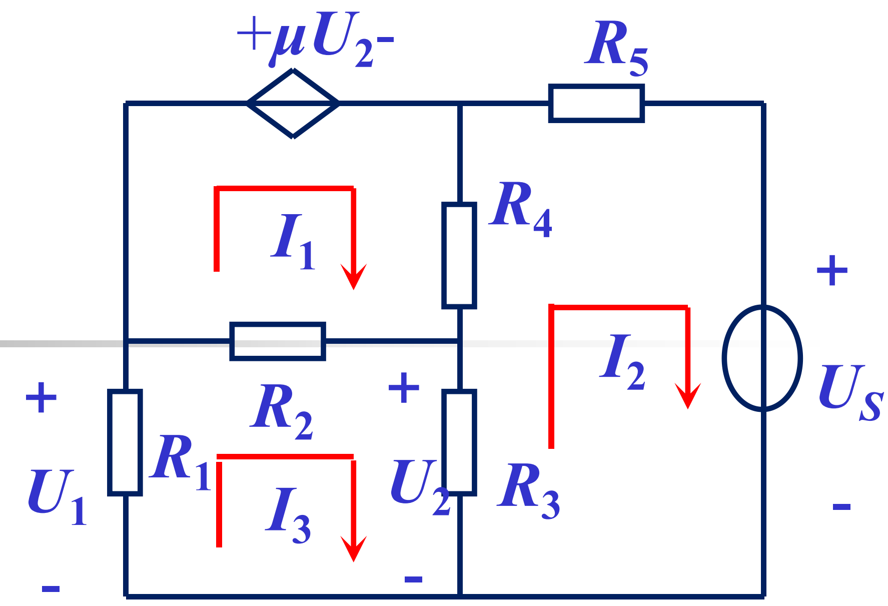
$$(R_2+R_4)I_1-R_4I_2-R_2I_3= -\mu U_2$$

$$-R_4I_1+(R_3+R_4+R_5)I_2-R_3I_3= -U_S$$

$$-R_2I_1-R_3I_2+(R_1+R_2+R_3)I_3=0$$

$$U_2=R_3(I_3-I_2)$$

可见，列网孔方程时，受控源可与独立源一样对待，但要找出控制量（U_2）与未知量（I_3、I_2）的关系。



依据克莱姆法则

$$
\begin{aligned}
2I_1 - 5I_2 + 3I_3 &= 0 \\
-I_1 + 4I_2 - I_3 &= -5 \\
-I_1 - 2I_2 + 4I_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-45}{21} = -2.14\text{A}
$$

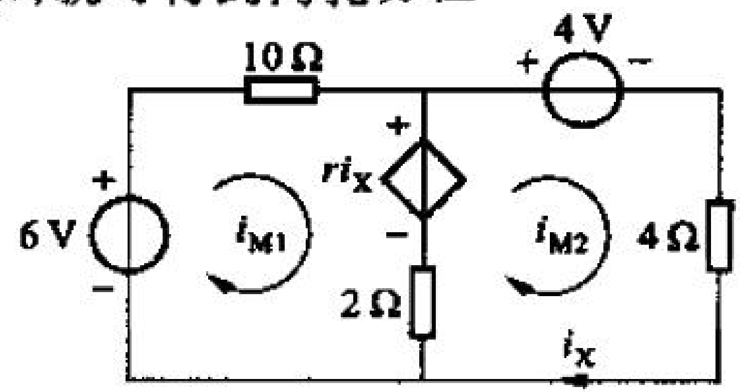
$$
U_1 = -R_1 I_3 = 2.14 \ \text{V}
$$

例 2-4 用网孔分析求图 2-5 所示含受控源电路中的 i_X(图中 $r=8\ \Omega$)。

解 暂先把受控源当作独立源,按照正文中所概括的规则写出"初步的"网孔方程,再把受控源的控制量用网孔电流表示,就可得到网孔方程

$$12i_{M1}-2i_{M2}=6-8i_X$$

$$-2i_{M1}+6i_{M2}=-4+8i_X$$



由于 $i_X=i_{M2}$

故得

$$12i_{M1}+6i_{M2}=6$$

$$-2i_{M1}-2i_{M2}=-4$$

即

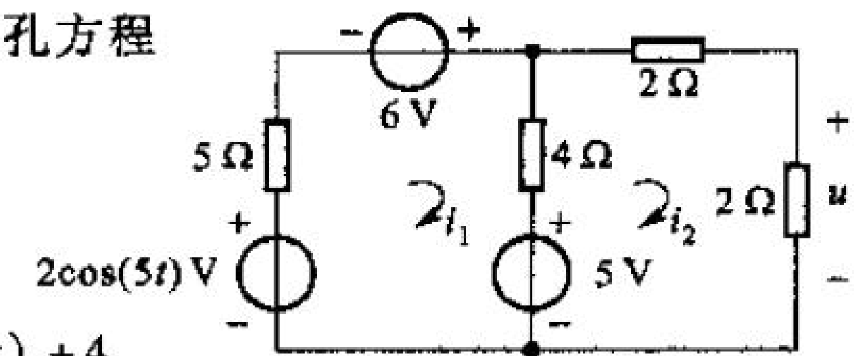
$$i_{M2}=3\ \text{A}$$

$$i_X=3\ \text{A}$$

如电路中含受控电流源,再设法把控制量用网孔电流表示。

列网孔方程时，受控源可与独立源一样对待，但要找出控制量（U_2）与未知量（I_3、I_2）的关系。

例 2－5 含正弦电源的电阻电路如图 2－6 所示，试用网孔分析求解电压 u



解 设网孔电流如图 2－6 所示①，可得网孔方程

$$9i_1 - 4i_2 = 6 + 2\cos(5t) - 5$$

$$-4i_1 + 8i_2 = 5$$

故得

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2\cos(5t)+1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{5 + 8\cos(5t) + 4}{72 - 16}$$

$$= [0.14\cos(5t) + 0.875]\ \mathrm{A}$$

$$u = (2\Omega)i_2 = [0.28\cos(5t) + 1.75]\ \mathrm{V}$$

§ 2.1 网孔分析法

网孔方程的建立（KVL+VCR）

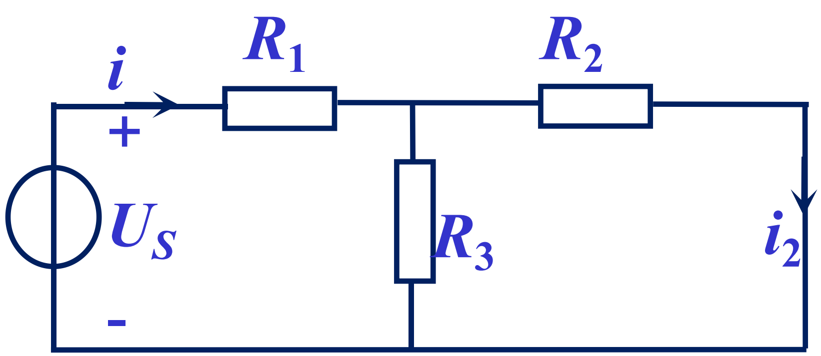
说明：

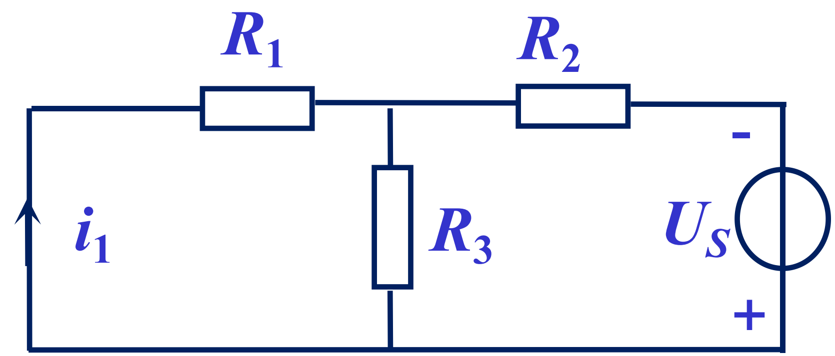
- 当电路中间支路存在纯电流源支路时，可设电流源的端电压为变量，同时补充相应方程
- 当电路中存在受控源时，可将受控源按独立源一样处理，其后将受控源的控制量用网孔电流表示出来，然后移项
- 适用于支路多、网孔少的电路分析
- 只适用于平面电路。

§ 2.2 互易定理

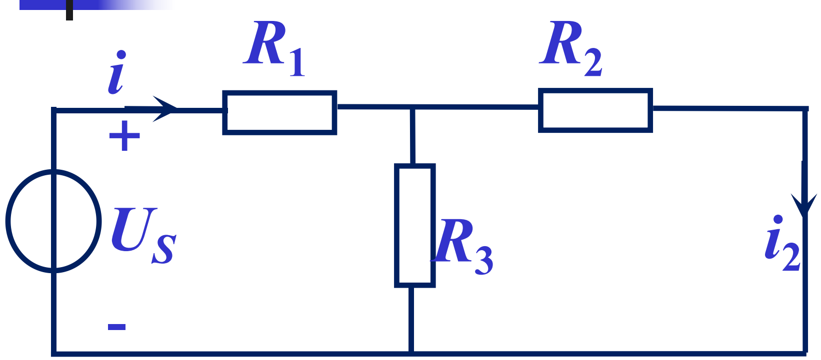
互易(reciprocity)定理表明线性电路“因果互易”的性质

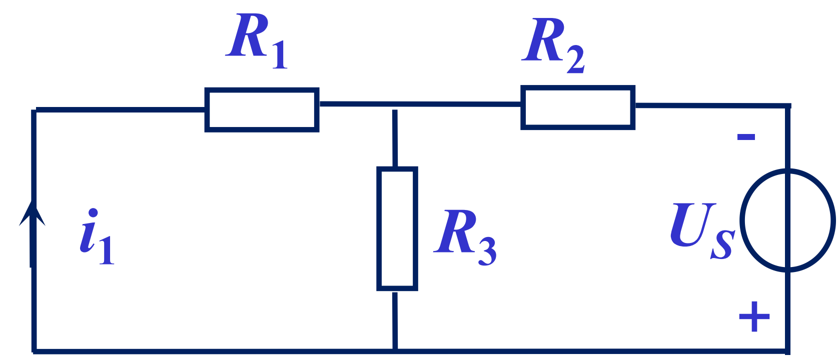
例1：如图所示，$U_s=24V$，$R_1=4\Omega$，$R_2=3\Omega$,，$R_3=6\Omega$，求电流i_1、i_2.





§ 2.2 互易定理





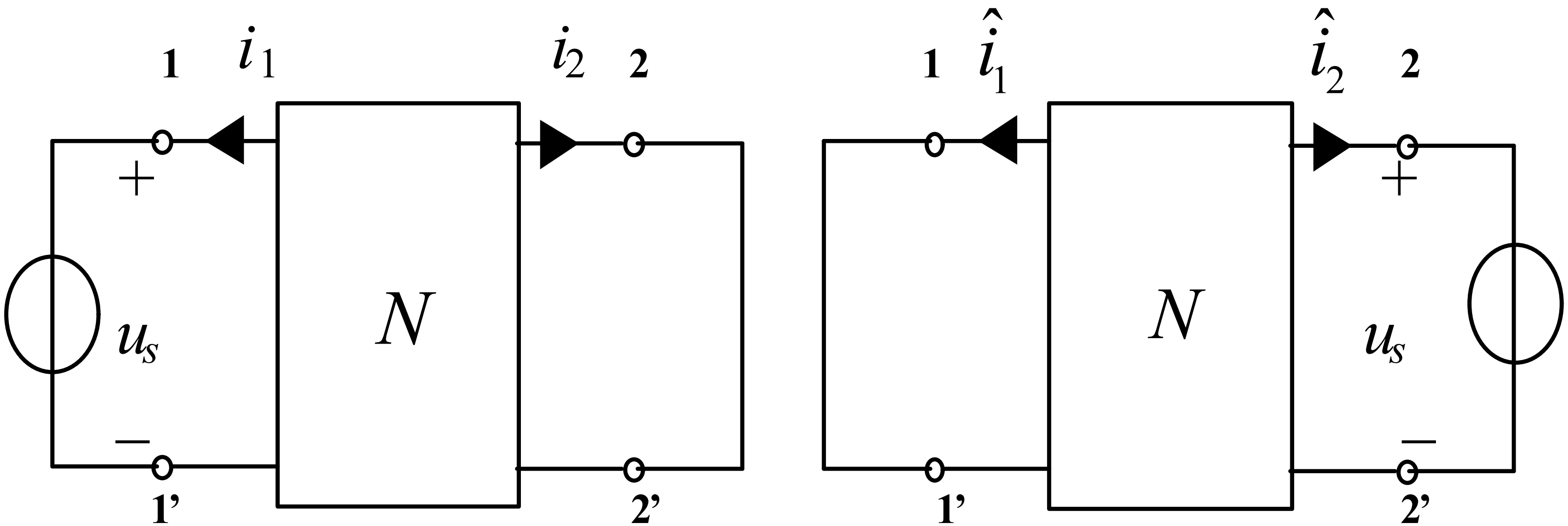
$$i = \frac{U_S}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 4\text{A} \qquad i_1 = \frac{U_S}{R_2 + \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{8}{3}\ \text{A}$$

$$i_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} i = \frac{8}{3}\ \text{A}$$

电路中电压源与电流表交换位置，电流表的读数不变，即因果互易：$i_1 = i_2$

§ 2.2 互易定理

互易(reciprocity)定理（一）

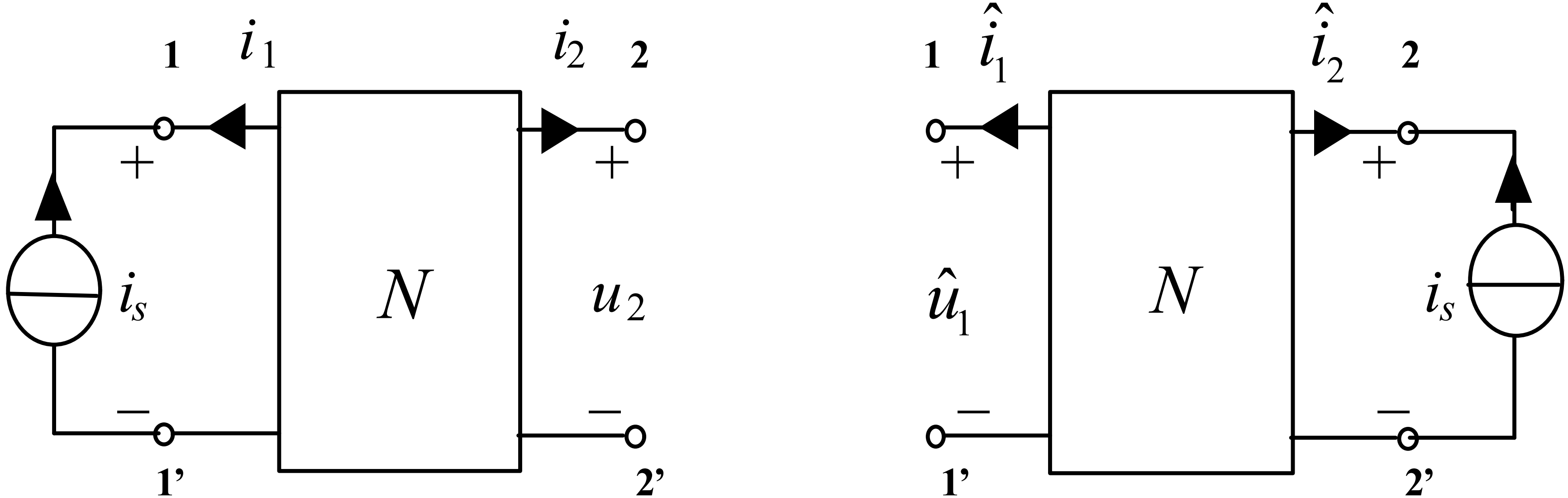


$$\hat{i}_1 = i_2$$

电压源与电流表交换位置

§ 2.2 互易定理

互易(reciprocity)定理（二）

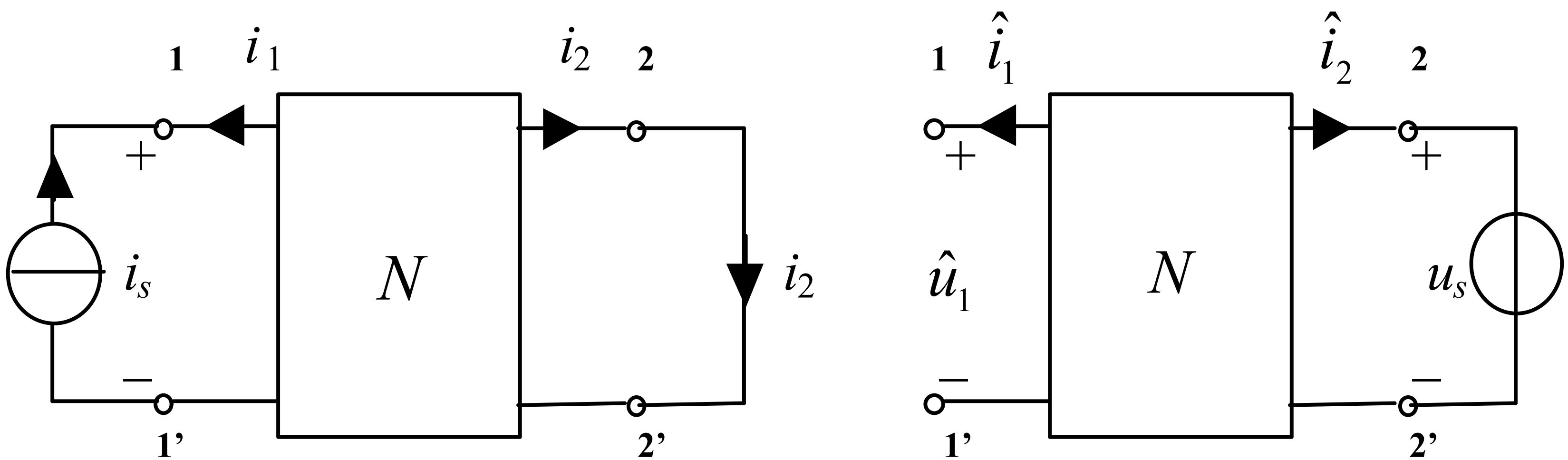


$$u_2 = \hat{u}_1$$

电流源与电压表交换位置

§ 2.2 互易定理

互易(reciprocity)定理（三）



$$i_2 = \hat{u}_1$$

电流源与电压源交换位置，则电流表与电压表交换位置

§2.2 互易定理

互易定理：

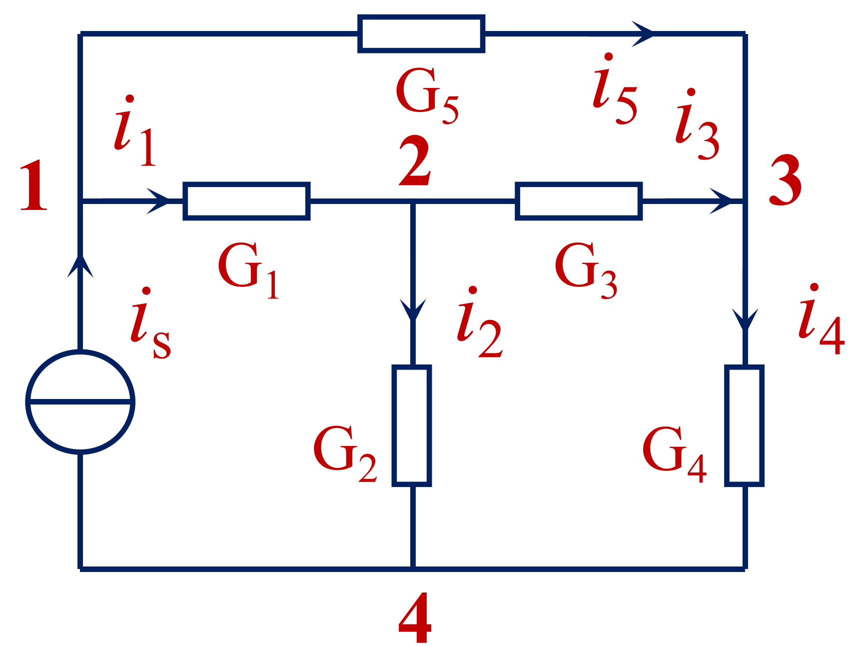
在只含一个电压源、不含受控源的线性电阻电路中，若在支路x中的电压源U_x，在支路y中产生的电流为i_y，则当电压源由支路x移至支路y时将在支路x中产生电流i_y。即：电路中电压源与电流表交换位置，电流表的读数不变，即因果互易：$i_1=i_2$，互易定理表明线性电路"因果互易"的性质。

§ 2.3 节点分析法

节点电位是一组完备的独立变量

1.完备性：如果各节点电位一旦求出，各个支路电压就可求得，进而可求得各支路电流。

2.独立性：节点电位不受KVL的约束，节点电位彼此独立无关。



选4为参考点

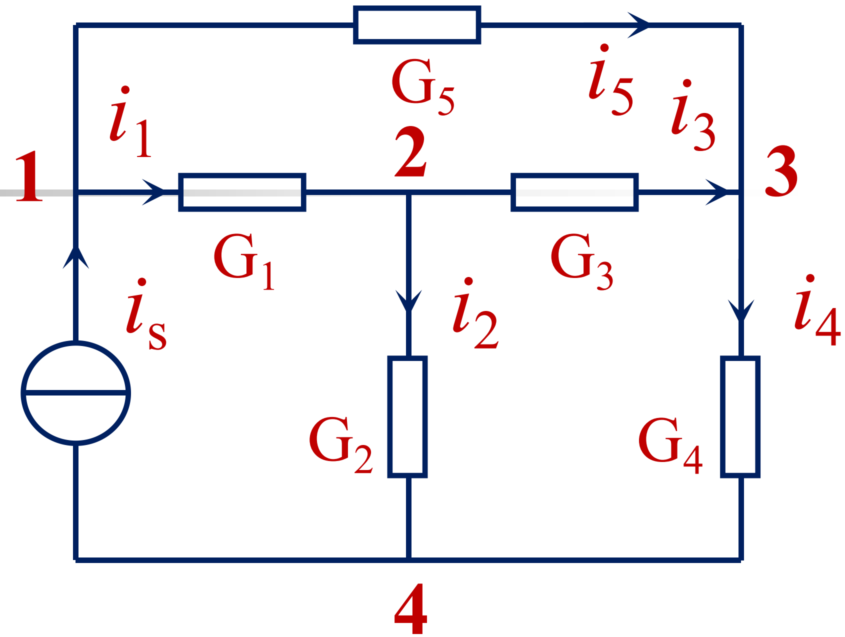
§2.3 节点分析法

节点方程的建立方法：

任选电路中某一节点为参考节点，其他节点与此参考节点间的电压称为“节点电压”。节点法是以节点电压作为独立变量，对各个独立节点列写KCL电流方程，得到含(n-1)个变量的(n-1)个独立电流方程，从而求解电路中待求量。

在模电分析中得到大量应用！

§ 2.3 节点分析法



选4为参考点

节点方程的建立

1.变量：(n-1)个节点电压

2.方程结构： (n-1)个KCL电流方程

3.矩阵形式：

$$G_n \cdot U_n = I_n$$

其中， G_n为节点电导矩阵，
U_n为节点电压向量，
I_n为节点电流源向量

N-1个独立节点

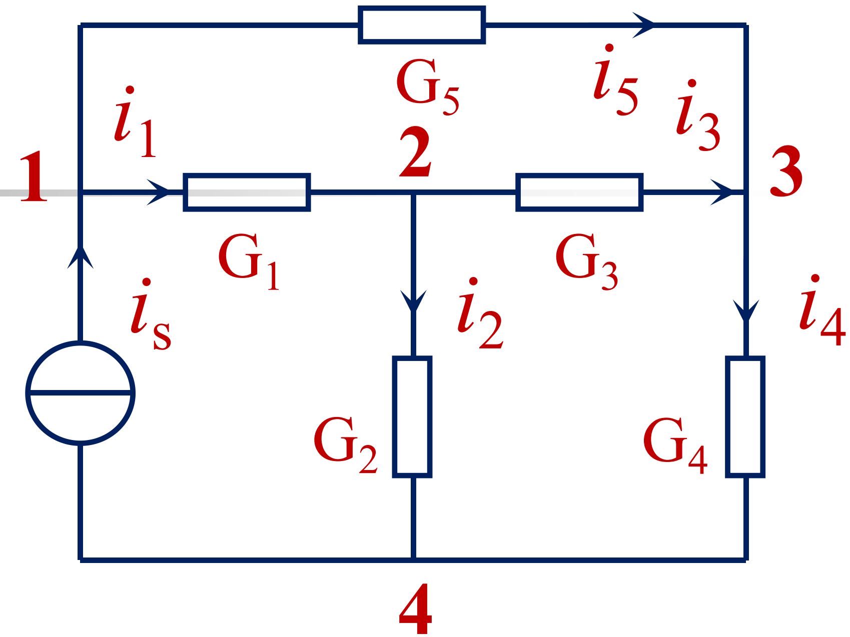
独立节点电压U_{n1}、 U_{n2}、U_{n3}作为求解对象

§2.3 节点分析法

4.解题步骤（KCL+VCR）

- 选定参考节点；
- 直接写出节点电压方程（实质上是电流方程），注意自导总为正值，互导总为负值；
- 联立上述方程式，求解。

§ 2.3 节点分析法



选4为参考点

节点1 $i_1 + i_5 - i_s = 0$

节点2 $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$

节点3 $-i_3 + i_4 - i_5 = 0$

$i_1 = G_1(u_1 - u_2)$ $\quad$ $i_2 = G_2 u_2$

$i_3 = G_3(u_2 - u_3)$ $\quad$ $i_4 = G_4 u_3$

$i_5 = G_5(u_1 - u_3)$

$$(G_1 + G_5)u_1 - G_1 u_2 - G_5 u_3 = i_s$$

$$-G_1 u_1 + (G_1 + G_2 + G_3)u_2 - G_3 u_3 = 0$$

$$-G_5 u_1 - G_3 u_2 + (G_3 + G_4 + G_5)u_3 = 0$$

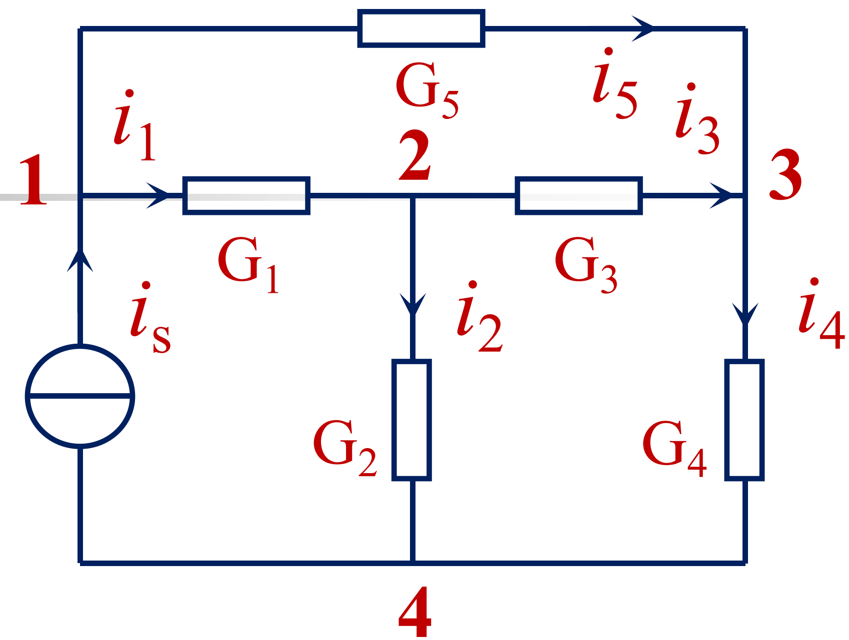
等号左端为通过各电导流出的全部电流之和，右端为流进该节点电流源之和。

§ 2.3 节点分析法

$$G_{11}u_1 + G_{12}u_2 + G_{13}u_3 = i_{s11}$$

$$G_{21}u_1 + G_{22}u_2 + G_{23}u_3 = i_{s22}$$

$$G_{31}u_1 + G_{32}u_2 + G_{33}u_3 = i_{s33}$$



选4为参考点

节点1的自电导(Self conductance)： $G_{11} = G_1+G_5$

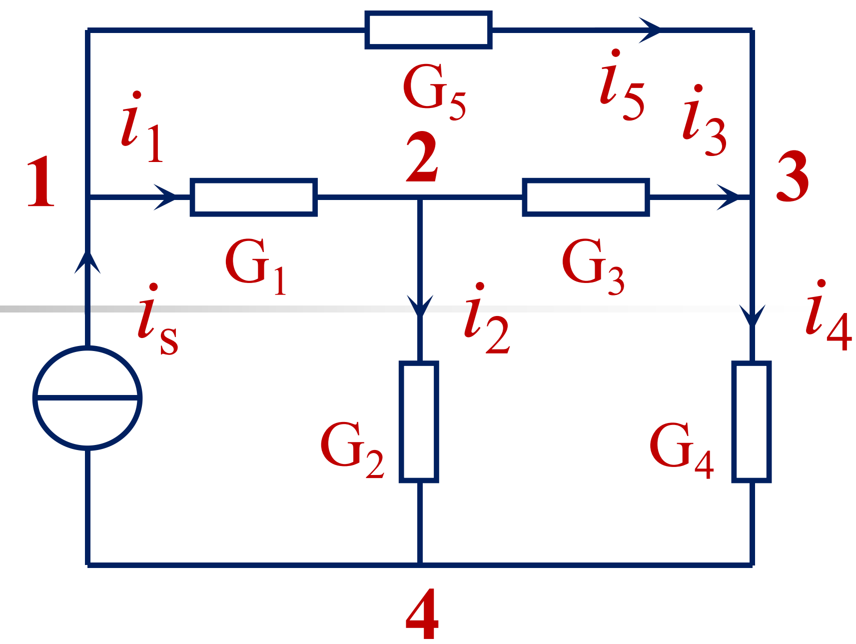
节点2的自电导： $G_{22} = G_1+G_2+G_3$

节点1和2的互电导(Mutual conductance): $G_{12}=G_{21}=-G_1$

节点1和3的互电导： $G_{13}=G_{31}=-G_5$

流进节点1的电流源： $i_{s11} = i_s$

§ 2.3 节点分析法



$$G_{11}u_1 + G_{12}u_2 + \ldots + G_{1n}u_n = i_{s11}$$
$$G_{21}u_1 + G_{22}u_2 + \ldots + G_{2n}u_n = i_{s22}$$
$$\cdots\cdots\cdots\ \cdots\cdots\cdots\ \cdots\cdots\cdots$$
$$G_{n1}u_1 + G_{n2}u_2 + \ldots + G_{nn}u_n = i_{snn}$$

选4为参考点

自电导×节点电位+互电导×相邻节点电位=流进该节点电流源电流（自电导均为正值，互电导均为负值）

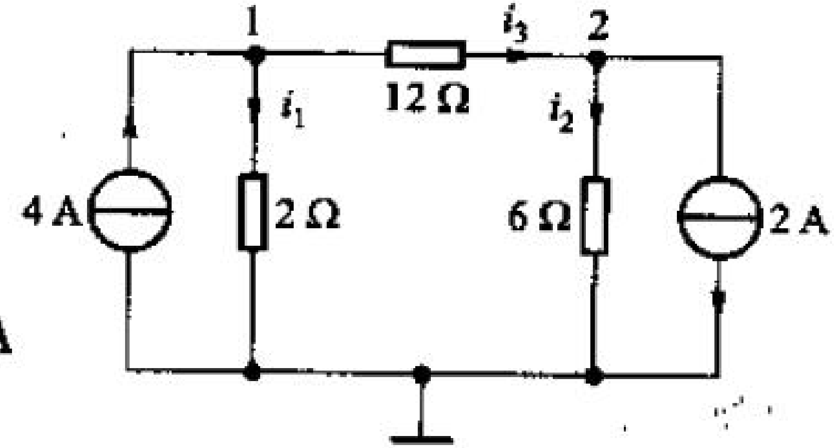
等号左端为通过各电导流出的全部电流之和，右端为流进该节点电流源之和。

$$(G_1 + G_5)u_1 - G_1u_2 - G_5u_3 = i_s$$

$$-G_1u_1 + (G_1 + G_2 + G_3)u_2 - G_3u_3 = 0$$

$$-G_5u_1 - G_3u_2 + (G_3 + G_4 + G_5)u_3 = 0$$

例 2－7 电路如图所示，试用节点分析求解节点电压 u_{N1} 和 u_{N2}，并求支路电流 i_1、i_2 和 i_3。



解 节点方程为

$$\left(\frac{1}{2\ \Omega}+\frac{1}{12\ \Omega}\right)u_{N1}-\left(\frac{1}{12\ \Omega}\right)u_{N2}=4\ \text{A}$$

$$-\left(\frac{1}{12\ \Omega}\right)u_{N1}+\left(\frac{1}{12\ \Omega}+\frac{1}{6\ \Omega}\right)u_{N2}=-2\ \text{A}$$

由此可得
$$\frac{7}{12}u_{N1}-\frac{1}{12}u_{N2}=4$$
$$-\frac{1}{12}u_{N1}+\frac{3}{12}u_{N2}=-2$$

即
$$7u_{N1}-u_{N2}=48$$
$$-u_{N1}+3u_{N2}=-24$$

解得

$$u_{N1}=\frac{\begin{vmatrix}48 & -1\\ -24 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}}\ \text{V}=\frac{120}{20}\ \text{V}=6\ \text{V}$$

$$u_{N2}=\frac{\begin{vmatrix}7 & 48\\ -1 & -24\end{vmatrix}}{20}\ \text{V}=\frac{-120}{20}\ \text{V}=-6\ \text{V}$$

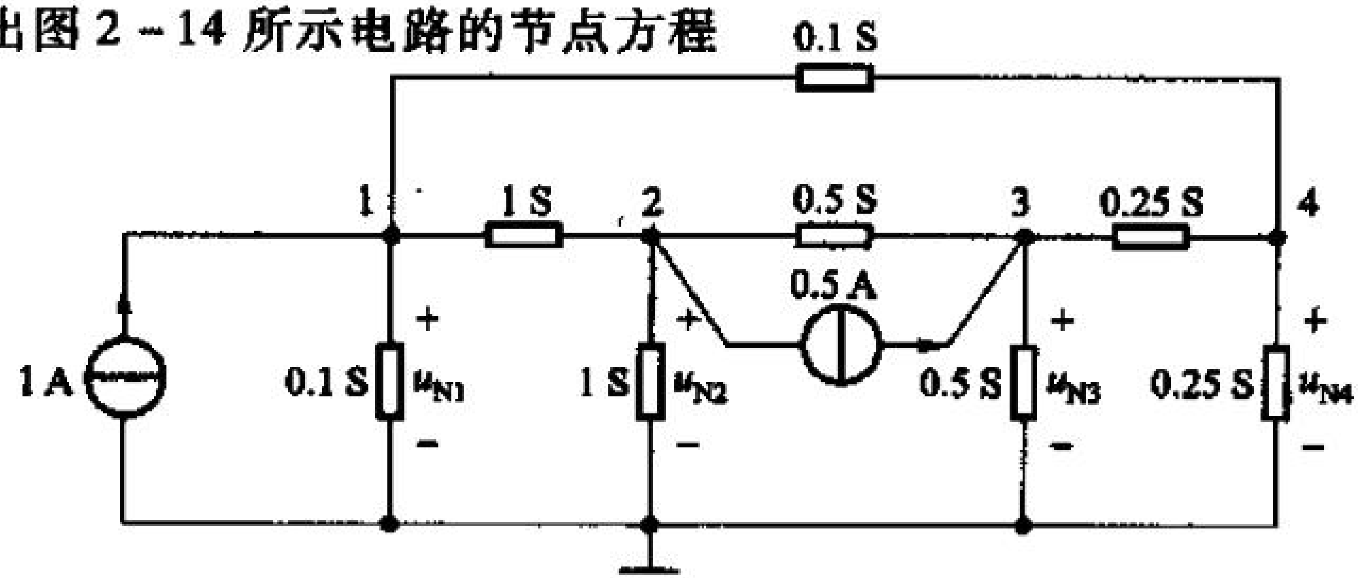
支路电流为

$$i_1=\frac{u_{N1}}{2\ \Omega}=\frac{6\ \text{V}}{2\ \Omega}=3\ \text{A}$$

$$i_2=\frac{u_{N2}}{6\ \Omega}=\frac{-6\ \text{V}}{6\ \Omega}=-1\ \text{A}$$

$$i_3=\frac{u_{N1}-u_{N2}}{12\ \Omega}=\frac{6\ \text{V}-(-6\ \text{V})}{12\ \Omega}=1\ \text{A}$$

例 2-8 试列出图 2-14 所示电路的节点方程



解 该电路共有 5 个节点，选其中的一个作为参考节点，标以接地的符号。设其余 4 个节点的电压分别为 u_{N1}、u_{N2}、u_{N3}、u_{N4}，如图所示。

直接汇集于节点 1 的电导总和为 $G_{11}=(0.1+1+0.1)\mathrm{S}=1.2\ \mathrm{S}$；$G_{12}=-1\ \mathrm{S}$；$G_{13}=0$；$G_{14}=-0.1\ \mathrm{S}$。注意，因为节点 1、3 间无直接的公有电导，故 $G_{13}=0$。又电流源电流是流入节点 1 的，故 $i_{S11}=+1\ \mathrm{A}$。

对节点 1 可得 $1.2u_{N1}-u_{N2}-0.1u_{N4}=1$

对节点 2、3、4 可得 $-u_{N1}+2.5u_{N2}-0.5u_{N3}=-0.5$

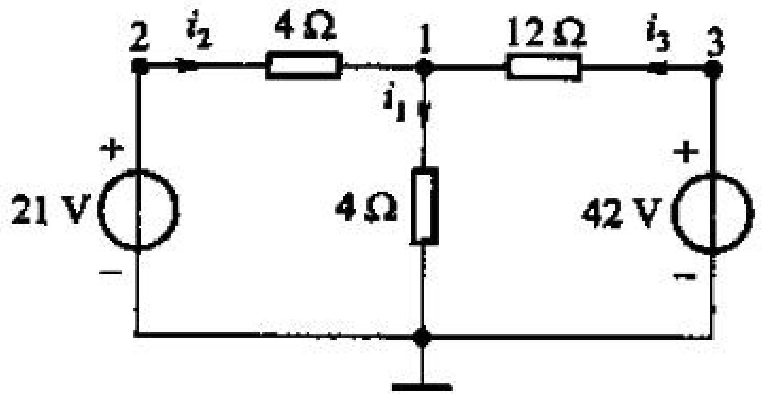
$$-0.5u_{N2}+1.25u_{N3}-0.25u_{N4}=0.5$$

$$-0.1u_{N1}-0.25u_{N3}+0.6u_{N4}=0$$

例 2-9 试用节点分析法求图 2-15 电路的各电流。

解 本题电路共有三个独立节点，且节点 2、3 分别与参考节点间接的都是已知的电压源，故节点电压 u_{N2} 和 u_{N3} 是已知的，其值分别为 21 V 和 42 V。

对节点 1 列写节点方程



$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)u_{N1}-\frac{1}{4}u_{N2}-\frac{1}{12}u_{N3}=0$$

以 u_{N2} 和 u_{N3} 值代入，得 $\frac{7}{12}u_{N1}-\frac{21}{4}-\frac{42}{12}=0$

解得 $u_{N1}=15\ \text{V}$

3 个电阻支路的电流 i_1、i_2、i_3 分别如图中所示，求得

$$i_1=\frac{u_{N1}}{4\ \Omega}=\frac{15}{4}\ \text{A}=3.75\ \text{A} \qquad i_2=\frac{21\ \text{V}-u_{N1}}{4\ \Omega}=1.5\ \text{A}$$

$$i_3=\frac{42\ \text{V}-u_{N1}}{12\ \Omega}=\frac{27}{12}\ \text{A}=2.25\ \text{A}$$

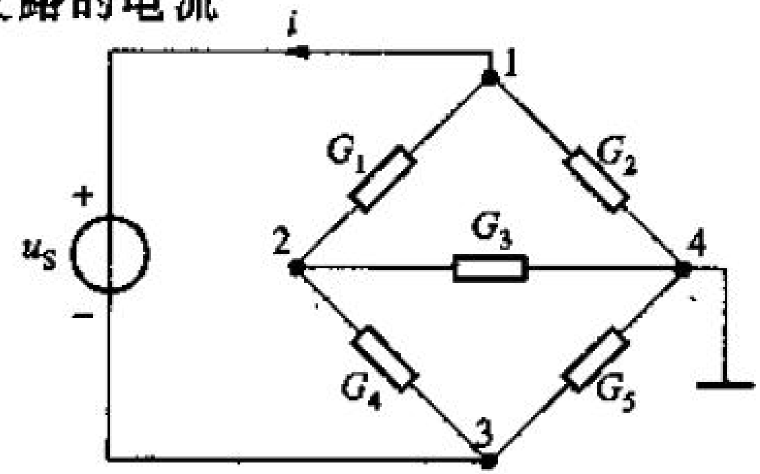
其中 i_2、i_3 分别为流过 21 V 电压源和 42 V 电压源的电流。

边沿支路有电压源一端接地可减少节点方程数

例 2－10 电路如图 2－16 所示，试列出节点方程。

解 在应用节点分析法时，有时遇到电路中有两个电压源而且它们的一端并不接到一个共同节点的情况，因此，不可能使两个电源都同时接地，必然会有一个电源要跨接在两个节点间。 i 为电压源支路的电流

此处有意选节点 4 为参考点，使之出现电压源跨接于节点间的情况。三个节点电压均属未知，故必须对这三个节点都列方程，得



$$(G_1+G_2)u_{N1}-G_1u_{N2}=-i$$

$$-G_1u_{N1}+(G_1+G_3+G_4)u_{N2}-G_4u_{N3}=0$$

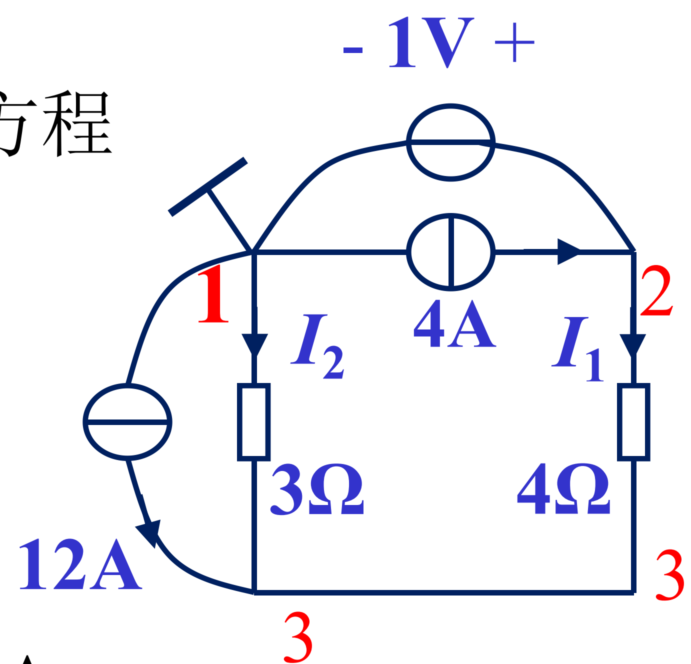
$$-G_4u_{N2}+(G_4+G_5)u_{N3}=i$$

节点方程实质上是 KCL 方程，所有与该节点有关的电流都必须计算在内。i_{S11}、i_{S22}、i_{S33}理解为流入节点的所有已知电流源电流和未知电压源电流的代数和

其中 i 为电压源支路的电流，i 是未知量，求解出4个未知量 u_{N1}、u_{N2}、u_{N3}和 i 必须再增一个方程 $u_{N1}-u_{N3}=u_S$

§ 2.3 节点分析法

例6：求图示电路中I_1及I_2



解：若选1为参考点，列节点电压方程

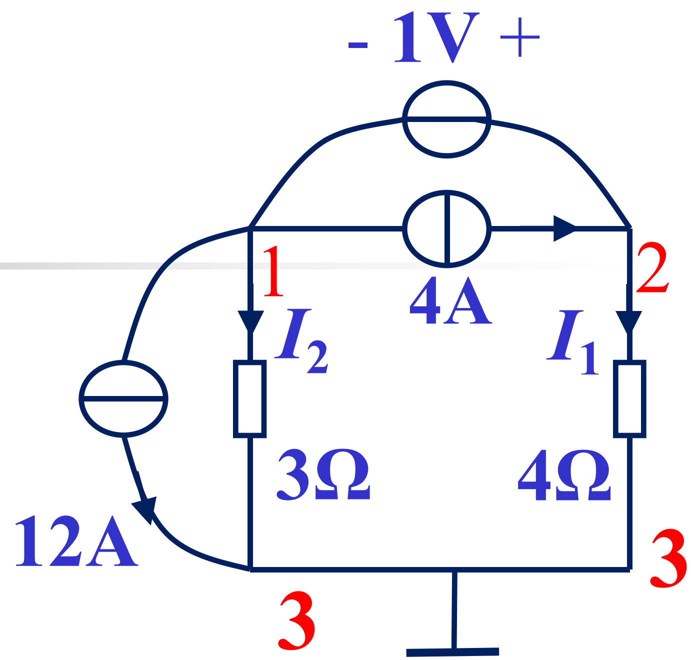
节点2　U_2=1v

节点3　$(1/3+1/4)U_3-(1/4)\ U_2=12$

$U_3=21V$　$I_1=(U_2-U_3)/4=(1-21)/4=-5A$

$I_2=-(1/3)U_3=-7A$

§ 2.3 节点分析法



若选3为参考点，列节点电压方程

节点1： $(1/3)U_1=-4-12+I_o$

节点2： $(1/4)U_2=4-I_o$

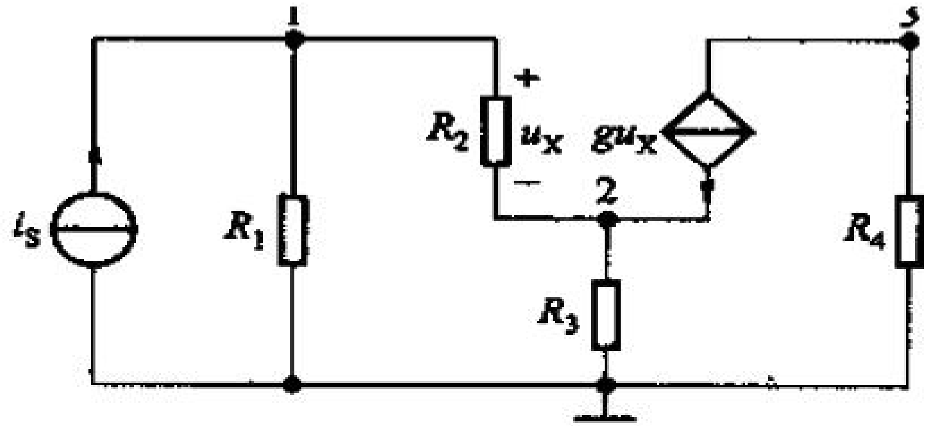
辅助方程： $U_2-U_1=1$

$U_1-3I_o=-48$ $\qquad$ $U_1+4I_o=15$

$U_1=-21\text{v}$，$U_2=-20\text{v}$， $I_1=U_2/4=-20/4=-5\text{A}$，$I_2=U_1/3=-7\text{A}$

结论：电压源支路一端接地可减少方程数；如没有接地，注意电压源支路有电流，需设一电流列入方程，再列一辅助方程。

例 2－11 试为图所示含受控电流源电路列写节点方程。



解 在把受控电流源暂时看作独立电流源列出方程后，再设法把受控源的控制量用节点电压表示，代回原方程。

节点 1 $(G_1+G_2)u_{N1}-G_2u_{N2}=i_S$

节点 2 $-G_2u_{N1}+(G_2+G_3)u_{N2}=gu_X$

节点 3 $G_4u_{N3}=-gu_X$

受控源的控制量 u_X 与节点电压的关系式为 $u_X=u_{N1}-u_{N2}$

代入节点方程后可得

$$
\begin{aligned}
&(G_1+G_2)u_{N1}-G_2u_{N2}=i_S \\
&-(G_2+g)u_{N1}+(G_2+G_3+g)u_{N2}=0 \\
&gu_{N1}-gu_{N2}+G_4u_{N3}=0
\end{aligned}
$$

为简便计，在不致引起误解的情况下，节点电压常省略下标 N。

§2.3 节点分析法

6.说明

- 存在纯电压源支路时，可设电压源的电流为变量，同时补充相应的方程。
- 存在受控源时，可将受控源按独立源处理，其后将受控源的控制量用节点电压表示出来，然后移项。
- 适用于支路多、节点少的电路分析。
- 可以运用于非平面电路。

§2.4 含运算放大器的电阻电路

集成运算放大器简介:

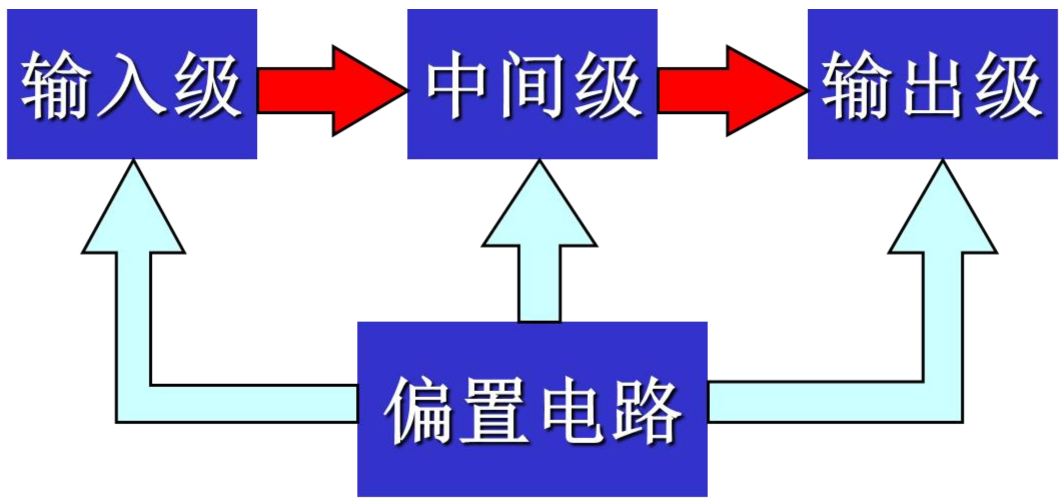
集成运放是具有很高开环电压放大倍数的直接耦合放大器。

集成电路的特点:

1. 元器件参数的一致性和对称性好;
2. 二极管多用三极管的发射结代替;
3. 电阻的阻值受到限制，大电阻常用三极管恒流源代替，电位器需外接;
4. 电容的容量受到限制，电感不能集成，故大电容、电感和变压器均需外接。

§ 2.4 含运算放大器的电阻电路

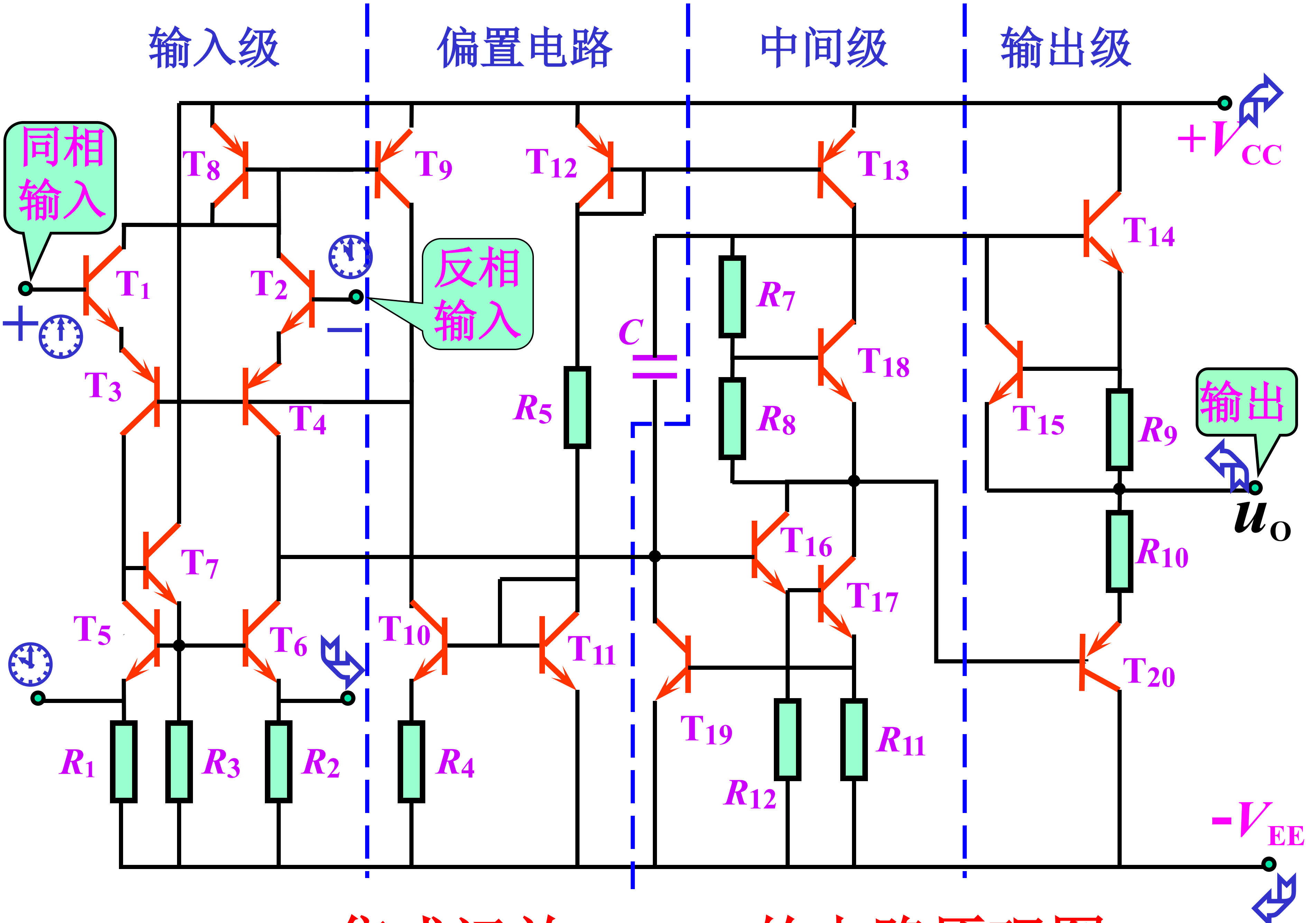
集成运放的内部电路结构框图:



输入级 — 差动放大器　　中间级 — 电压放大器

输出级 — 射极输出器或互补对称功率放大器

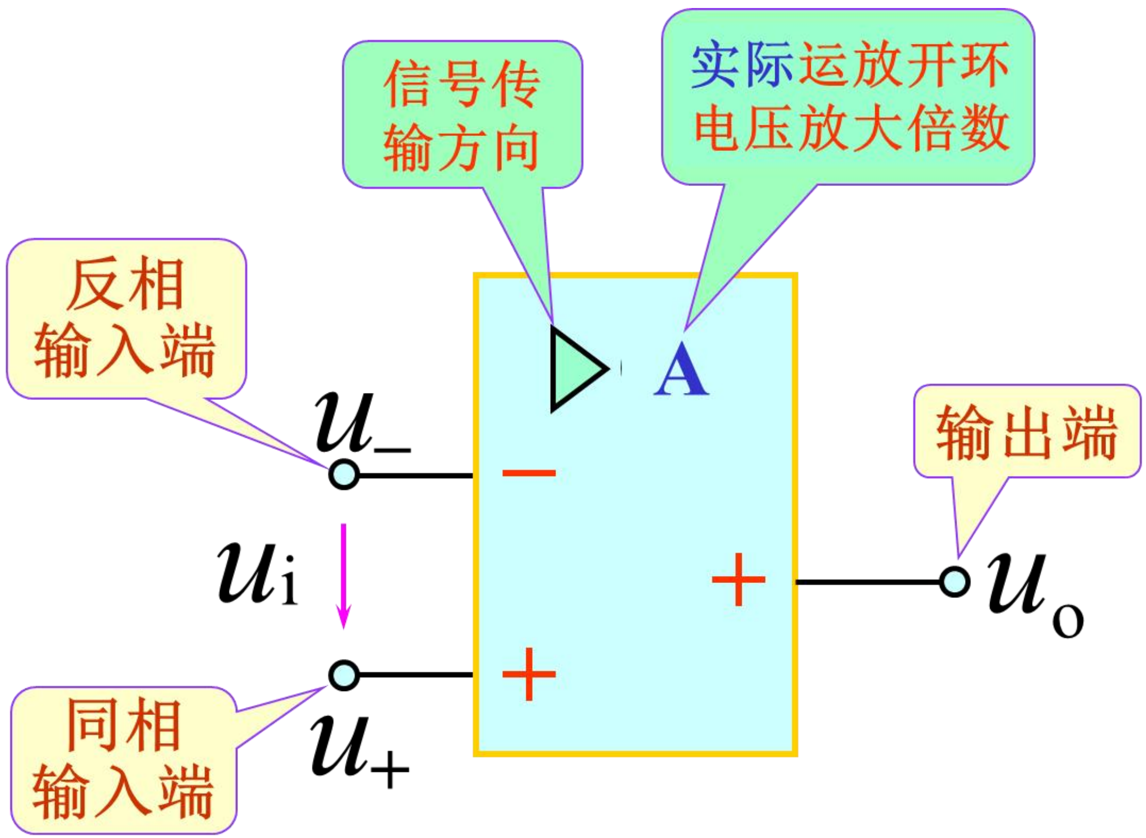
偏置电路 — 由镜像恒流源等电路组成



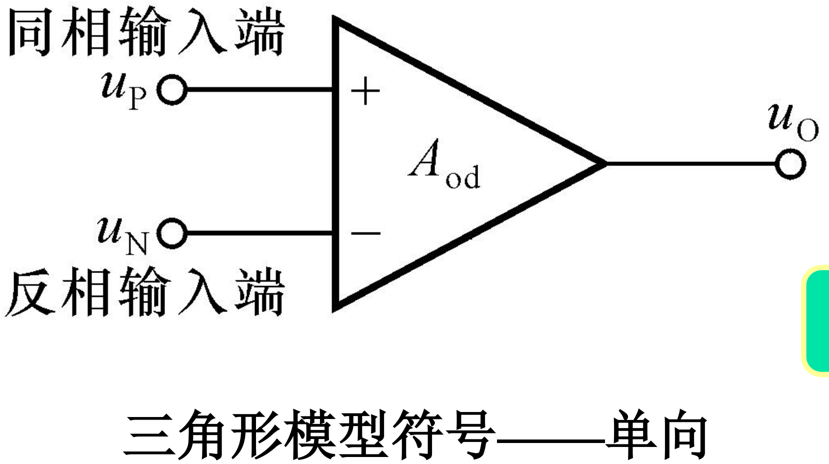
集成运放 μA741的电路原理图

§2.4 含运算放大器的电阻电路

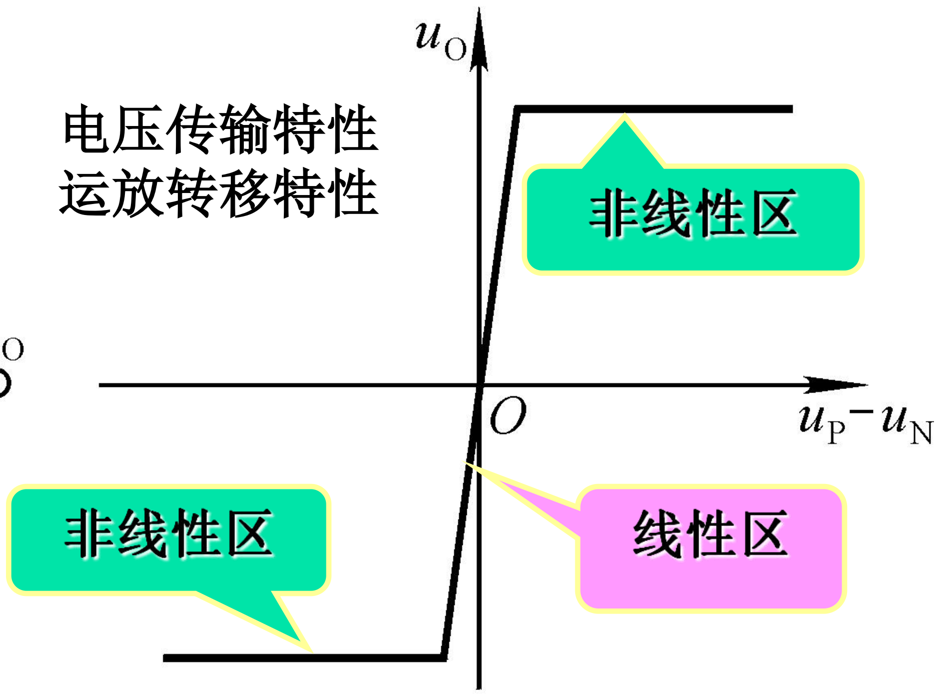
集成运算放大器的符号:



§2.4 含运算放大器的电阻电路



(a)



(b)

§2.4 含运算放大器的电阻电路

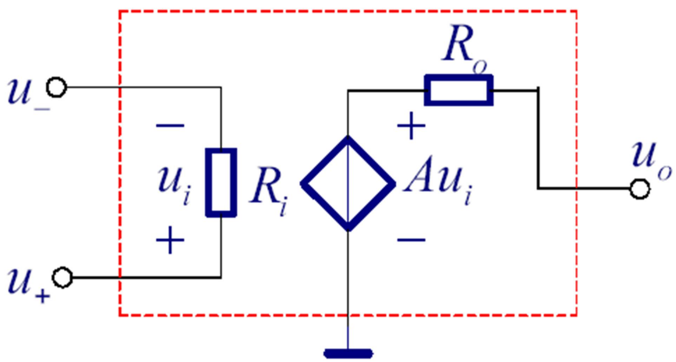
特点：

1. 是双端输入、单端输出的差分放大电路。单向器件
2. 差模放大倍数高。
3. 输入阻抗高，输出阻抗低。
4. 共模抑制比高，能较好的抑制温漂。

§ 2.4 含运算放大器的电阻电路

运放转移特性（输入-输出特性）：

工作于线性区的模型



（1）受控源表明运放的放大作用

（2）A为运放的放大倍数，理想运放A=∞且u_O为有限值

（3）u_+、u_-同时作用时，u_d=u_+-u_-为差分输入电压

（4）受控源电压为$A(u_+-u_-)$ = Au_i= Au_d，忽略R_O，则Au_i为u_O

§2.4 含运算放大器的电阻电路

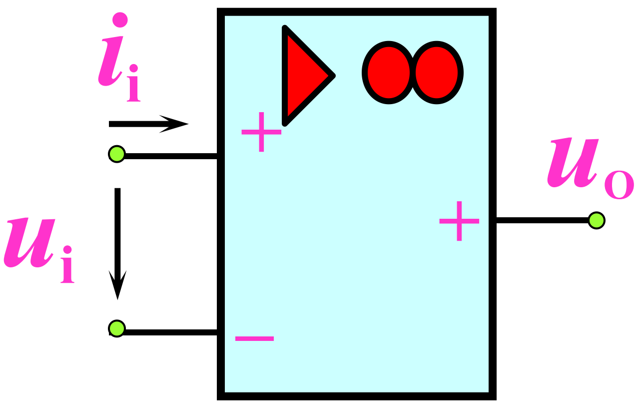
理想运放工作在线性区的分析依据

1、“虚断路”原则

$$i_i = \frac{u_i}{r_{id}}$$

对于理想运放

$r_{id} \rightarrow \infty$ ，　$i_i \approx 0$　$i_+ = i_- = 0$



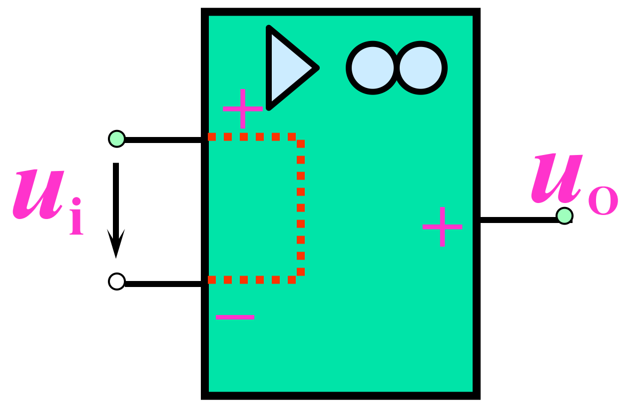
相当于两输入端之间<u>**断路**</u>

§ 2.4 含运算放大器的电阻电路

理想运放工作在线性区的分析依据

2、“虚短路”原则

$$u_i = u_+ - u_- = \frac{u_o}{A_{uo}}$$



对于理想运放 $A_{uo} \to \infty$，$u_i \approx 0$

$u_+ = u_-$ 相当于两输入端之间**短路**

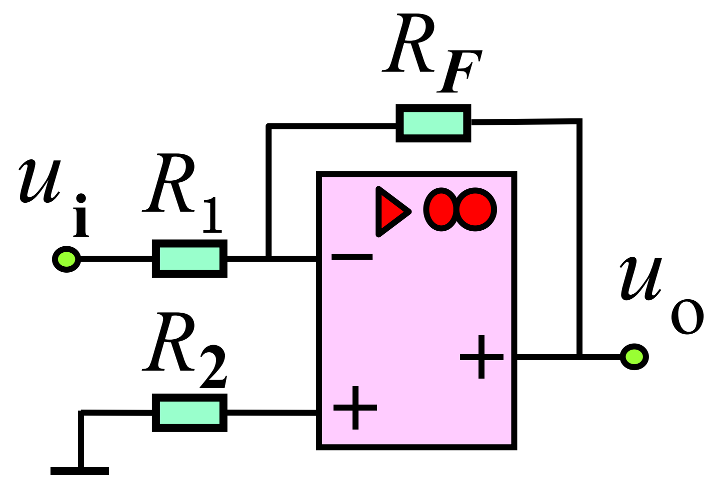
§2.4 含运算放大器的电阻电路

3 “虚地”的概念

当同相输入端接地时，

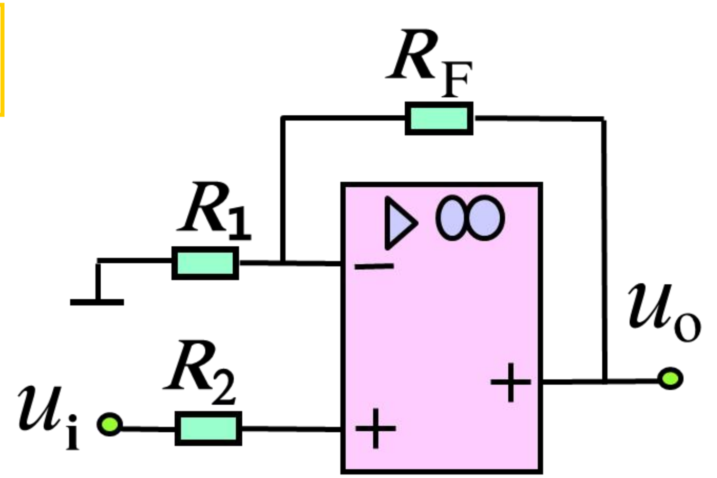
由“虚断路”原则 $i_i = 0$，有$u_+=0$

由“虚短路”原则 $u_+ \approx u_- = 0$



结论：反相输入端为“虚地”。

在右图所示电路中，因为反相端存在负反馈信号，同相输入端不是“虚地”！



§ 2.4 含运算放大器的电阻电路

1. 反相比例运算电路：

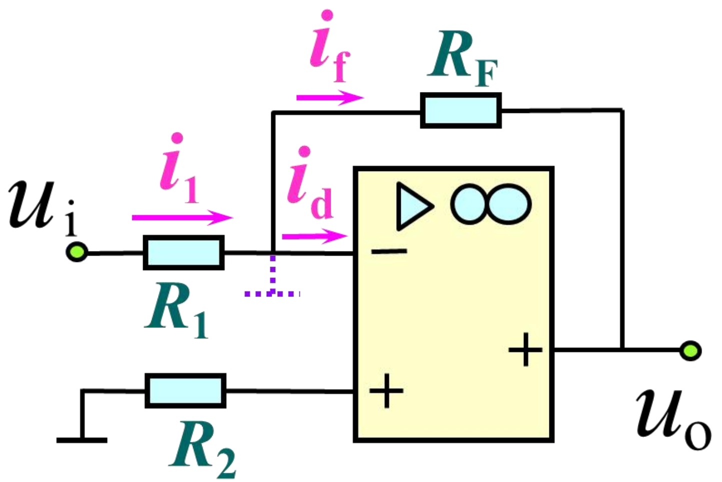
R_F引入深度负反馈

虚断路 $i_d \approx 0$

$i_1 \approx i_f$

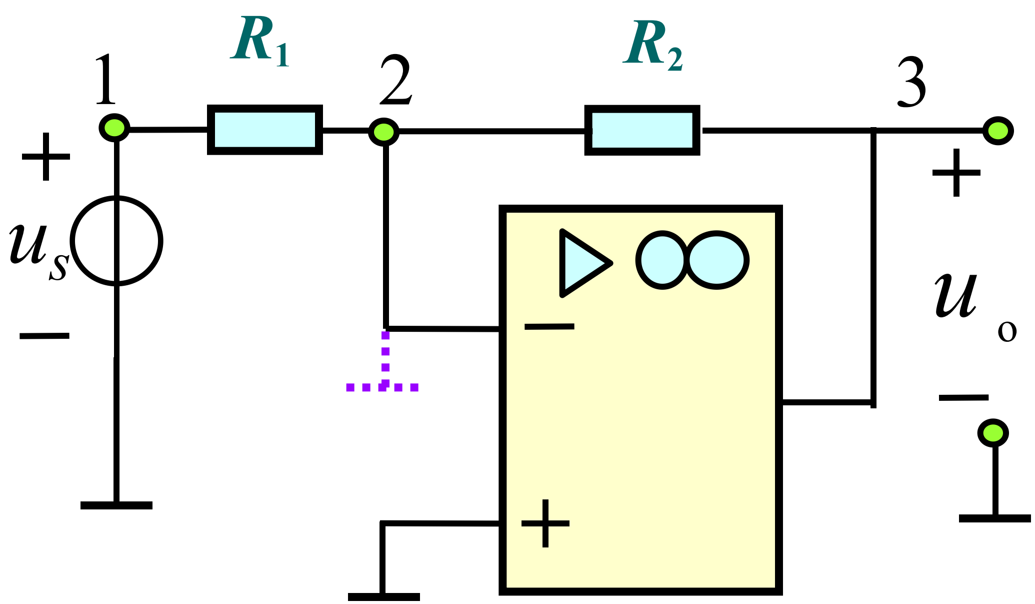
虚地 $i_1 = \dfrac{u_i}{R_1}$

$i_f = -\dfrac{u_O}{R_F}$



故有： $u_O = -\dfrac{R_F}{R_1} u_i$

§ 2.4 含运算放大器的电阻电路



N1: $u_1 = u_s$

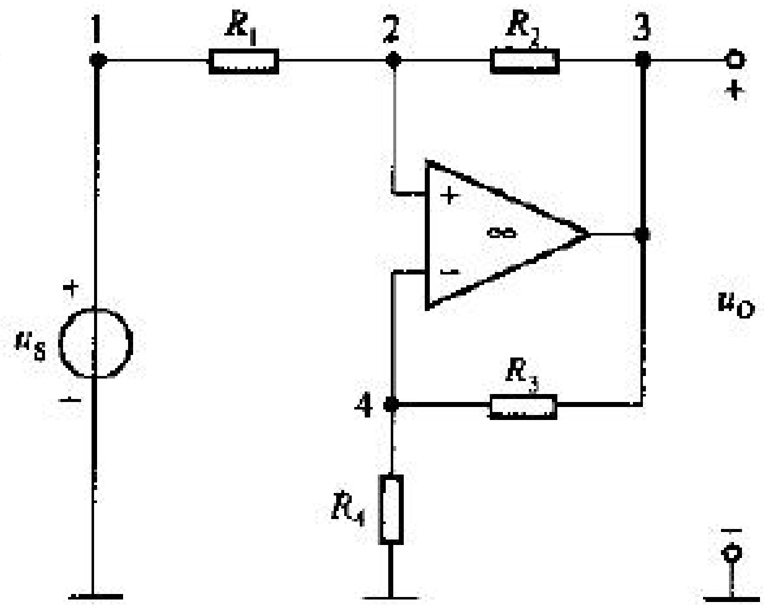
N2: $u_2 = u_+ = u_- = 0$

N3: $u_3 = u_O$

N2: $(G_1 + G_2)u_2 - G_1 u_1 - G_2 u_3 = 0$

故有： $u_O = -\dfrac{R_2}{R_1} u_s$

例 2－13　图 2－26 所示运放电路，输入端无一接地，试求输出电压 u_O 与输入电压 u_S 的关系。



解　该电路共有 4 个独立节点，节点 2、4 的节点方程分别为

$$(G_1+G_2)u_2-G_1u_1-G_2u_3=0$$

$$(G_3+G_4)u_4-G_3u_3=0$$

在列写方程时，用到了运放输入电流为零的特点，否则，在上列方程中尚需增添输入电流项。根据(2－13)式可知　$u_2=u_4$　　又 $u_1=u_S$

故得 $(G_1+G_2)u_2-G_2u_3=G_1u_S$

$(G_3+G_4)u_2-G_3u_3=0$

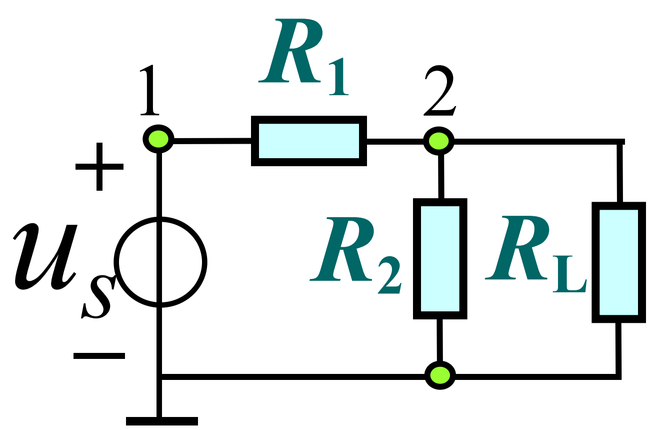
可解得 $u_O=u_3=\dfrac{G_1G_4+G_1G_3}{G_1G_3-G_2G_4}u_S=\dfrac{R_2R_3+R_2R_4}{R_2R_4-R_1R_3}u_S$

§2.4 含运算放大器的电阻电路

电压跟随器（射极跟随器，V Follower）

不接入R_L时：

$$u_o = \frac{R_2}{R_1+R_2} u_s$$



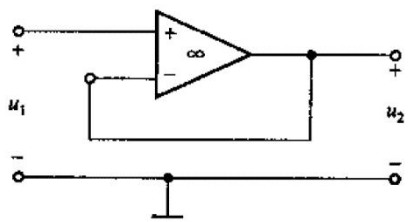
接入R_L时：

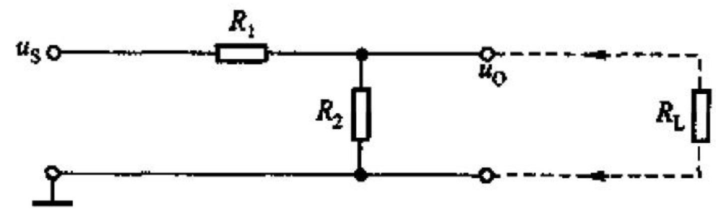
$$u_o = \frac{R_2 // R_L}{R_1+R_2 // R_L} u_s$$

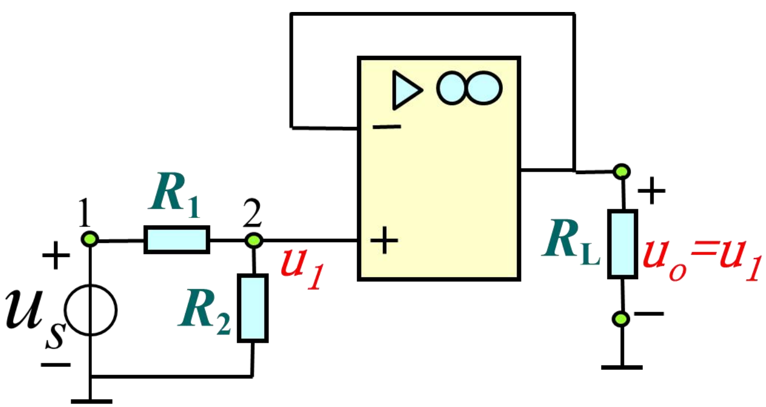
R_L引起负载效应

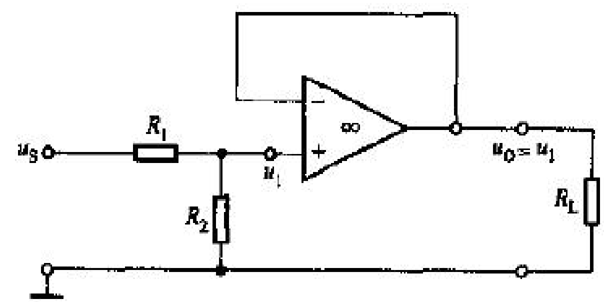
§ 2.4 含运算放大器的电阻电路

电压跟随器（射极跟随器）隔离：









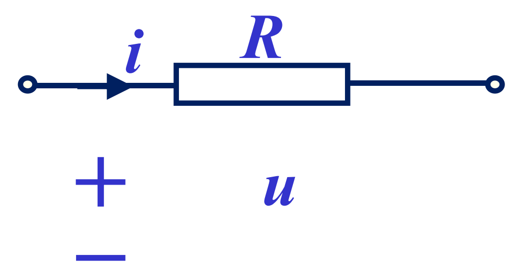
接入电压跟随器隔离R_L，消除R_L引起负载效应

§2.5 电路的对偶性

"电压 u"和"电流 i"，"电阻 R"和"电导 G"

举例1：电阻R的VCR为 $u = R * i$；

电导G的VCR为 $i = Gu$ 。



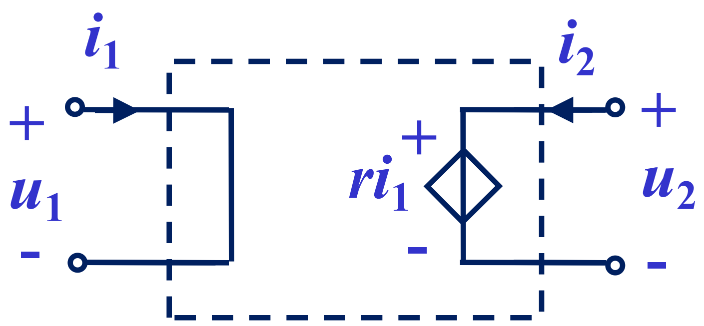
约束：电阻：R (Ω);

欧姆定律：$u=Ri$。

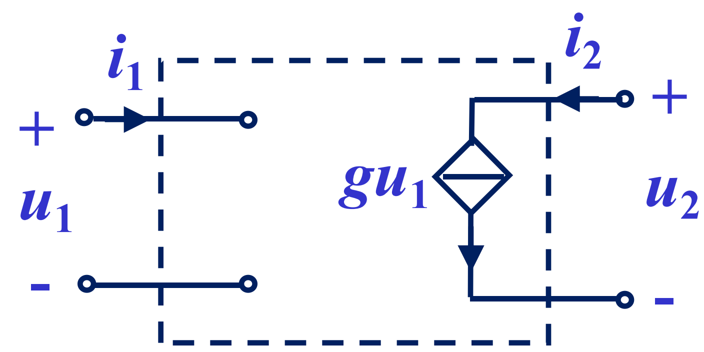
电压电流关系：VCR (voltage current relation)

§ 2.5 电路的对偶性

举例2：对于CCVS有$u_2 = ri_1$， i_1为控制电流；
对于VCCS有$i_2 = gu_1$， u_1 为控制电压。



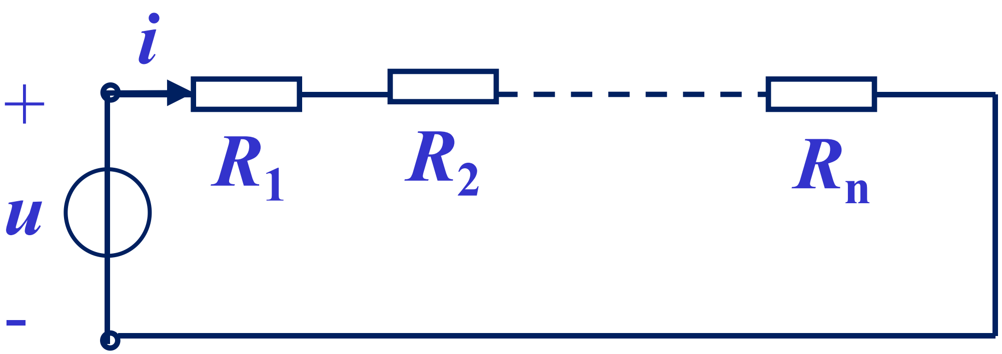
电流控制电压源 CCVS



电压控制电流源 VCCS

§ 2.5 电路的对偶性

电阻的串联及分压公式



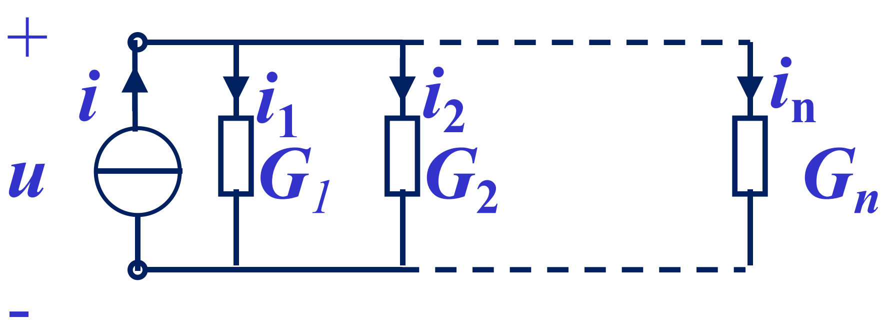
分压公式：

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

$$u = R \times i$$

$$u_k = R_k \times \frac{u}{R} = \left(\frac{R_k}{R}\right) \times u$$

电导的并联及分流公式



分流公式

$$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

$$i = G \times u$$

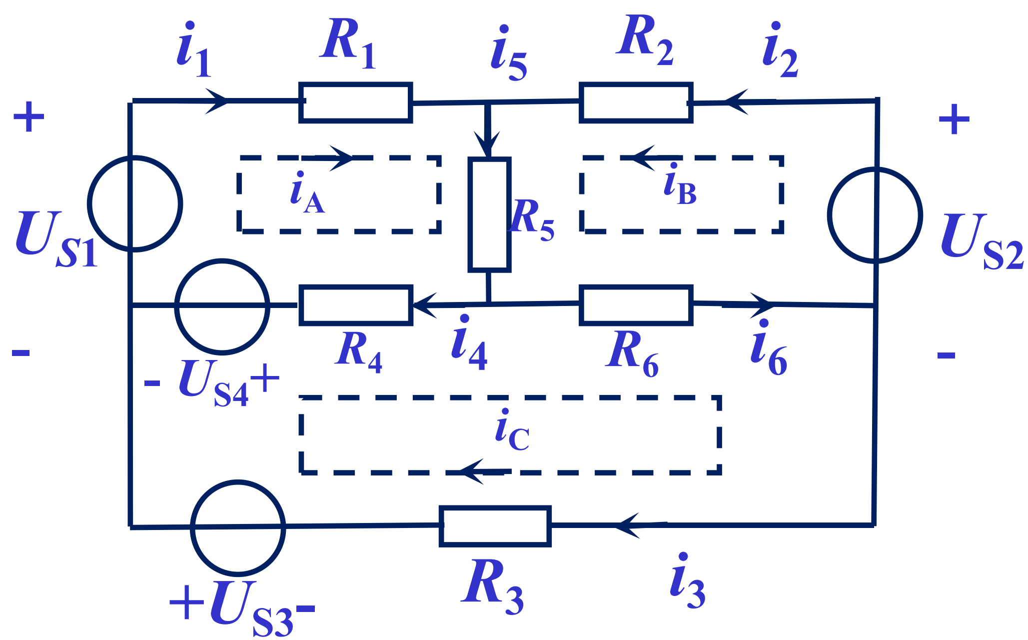
$$i_k = G_k \times \frac{i}{G} = \left(\frac{G_k}{G}\right) \times i$$

§ 2.5 电路的对偶性

"网孔电流" 和 "节点电压"

1、网孔分析法——网孔电流方程的建立

$$R_{11}i_A+R_{12}i_B+R_{13}i_C=u_{S11}$$
$$R_{21}i_A+R_{22}i_B+R_{23}i_C=u_{S22}$$
$$R_{31}i_A+R_{32}i_B+R_{33}i_C=u_{S33}$$



§ 2.5 电路的对偶性

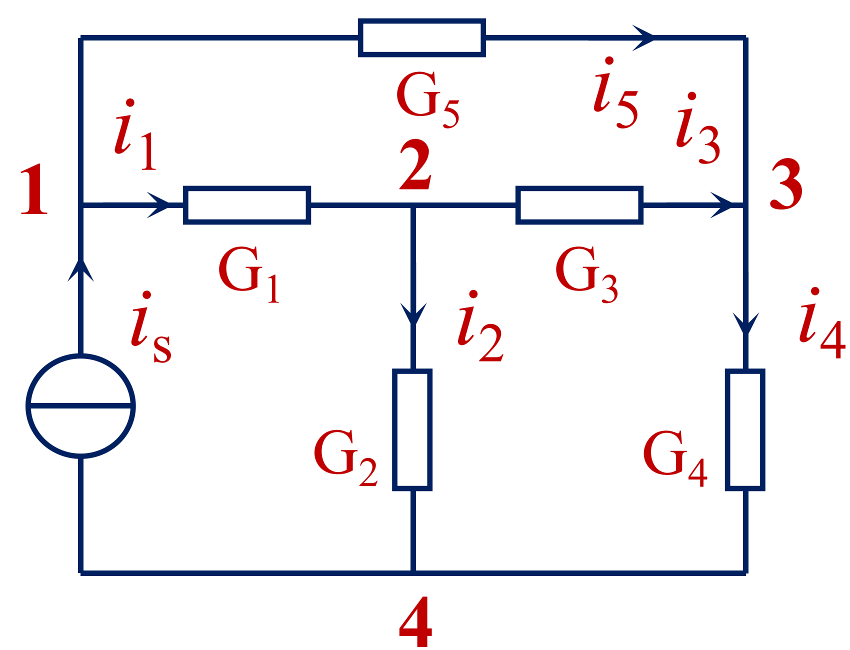
"网孔电流" 和 "节点电压"

2、节点分析法——节点电压方程的建立

$$G_{11}u_1 + G_{12}u_2 + G_{13}u_3 = i_{s11}$$

$$G_{21}u_1 + G_{22}u_2 + G_{23}u_3 = i_{s22}$$

$$G_{31}u_1 + G_{32}u_2 + G_{33}u_3 = i_{s33}$$



§2.5 电路的对偶性

对偶元素（对偶量）：

$$u=Ri，\ i=Gu；\quad u_2=ri_1，\ i_2=gu_1$$

在以上这些关系式中，如果把电压 u 和电流 i 互换，把电阻 R 和电导 G 互换，把参数 r 和参数 g 互换，则上述对应关系可以彼此转换。这些互换元素称为对偶元素（对偶量）。

§ 2.5 电路的对偶性

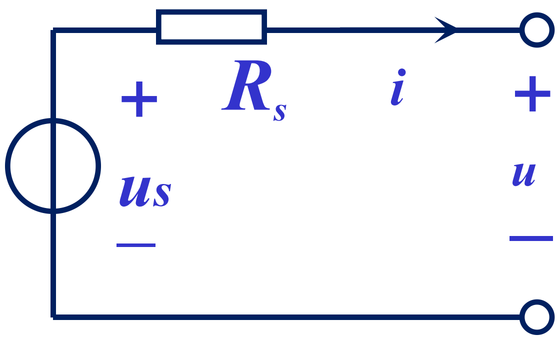
“电压u”和“电流i”
“电阻R”和“电导G”
“CCVS”和“VCCS”
“r”和“g”
“串联”和“并联”
“电压源”和“电流源”
“网孔电流”和“节点电压”
“KCL”和“KVL”
“短路”和“开路”
“电感”和“电容”等

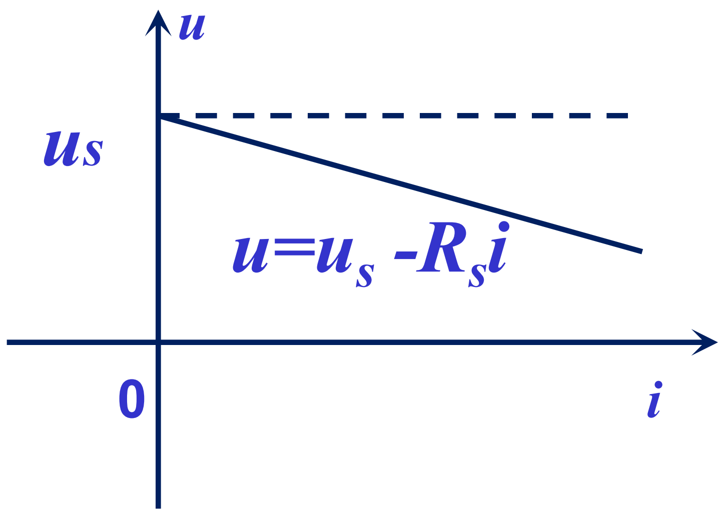
都是对偶元素（对偶量）

§2.5 电路的对偶性

两种电源模型的等效变换

1.实际电压源模型 ：





$u=u_s-R_si$

开路　　$i=0$　　$u_{oc}=u_s$

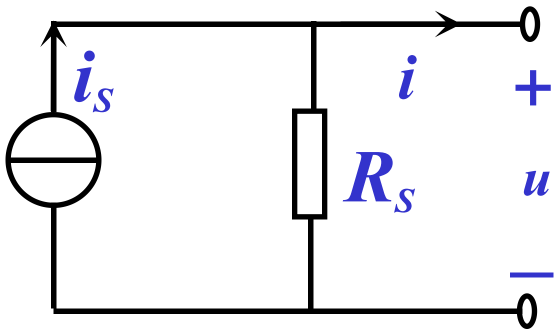
短路　　$u=0$　　$u_s-R_si_{sc}=0$

$R_S=u_s/i_{SC}=u_{oc}/i_{SC}$　可用来求内阻

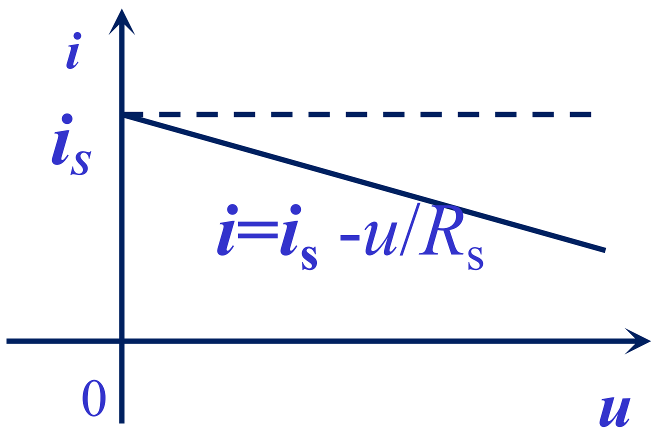
§ 2.5 电路的对偶性

两种电源模型的等效变换

2.实际电流源模型：



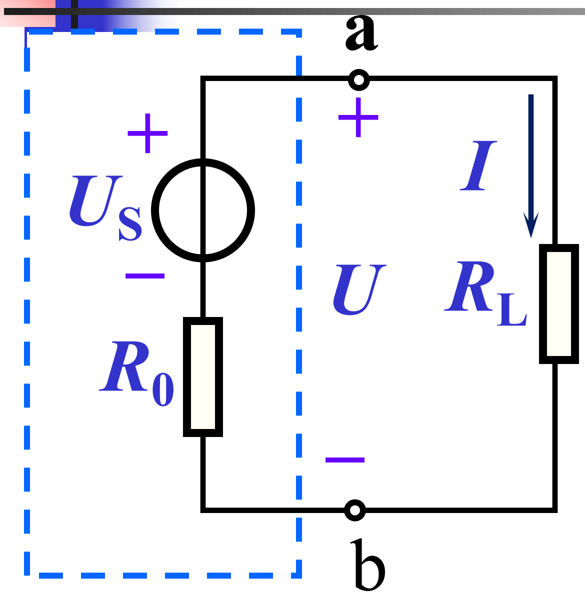
$i = i_s - u/R_s$



短路　$i_{sc} = i_s$　　开路　$i_s - u_{oc}/R_s = 0$

$R_s = u_{oc}/i_s = u_{oc}/i_{sc}$　可用来求内阻

实际电压源模型与实际电流源模型的等效变换

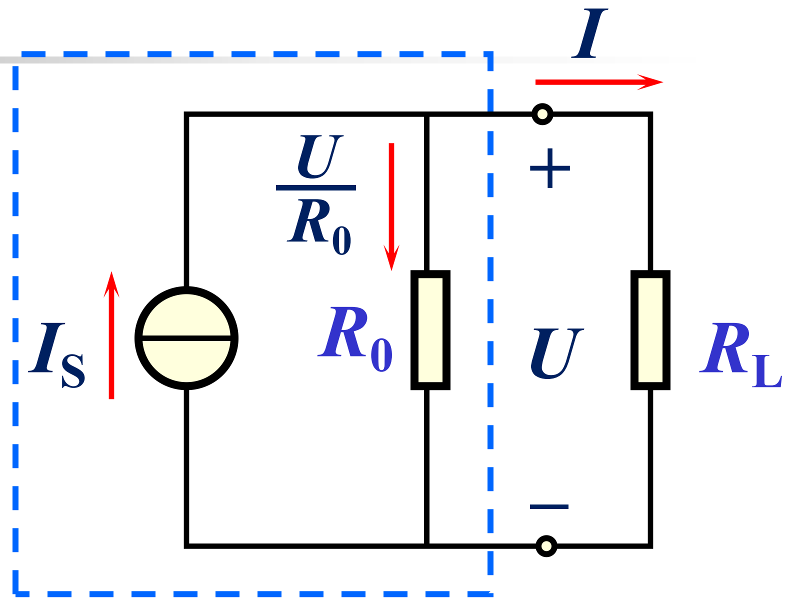


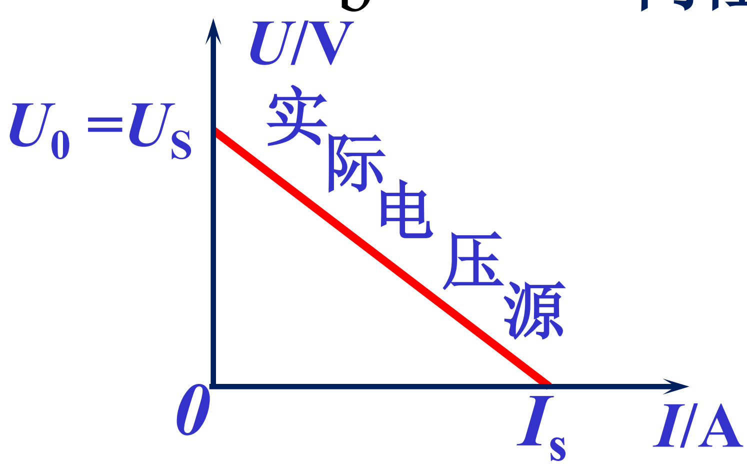
内阻改并联

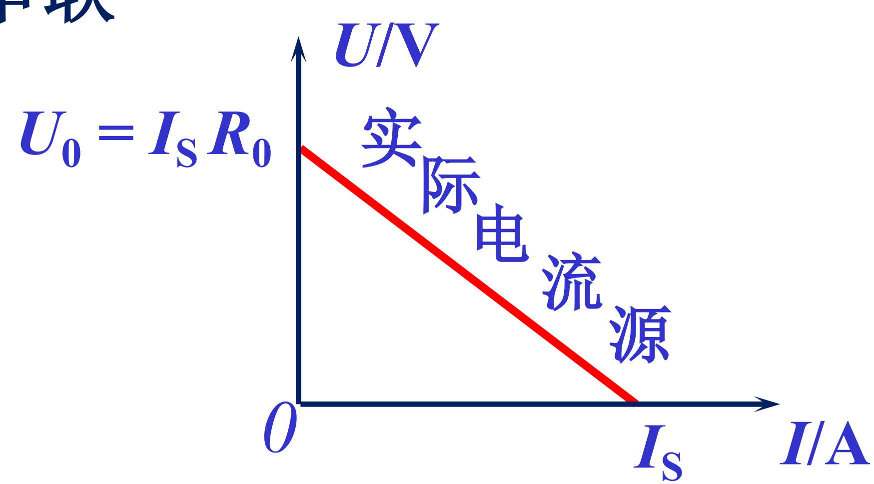
$$I_s = \frac{U_S}{R_0}$$

$$U_S = I_s R_0$$

内阻改串联







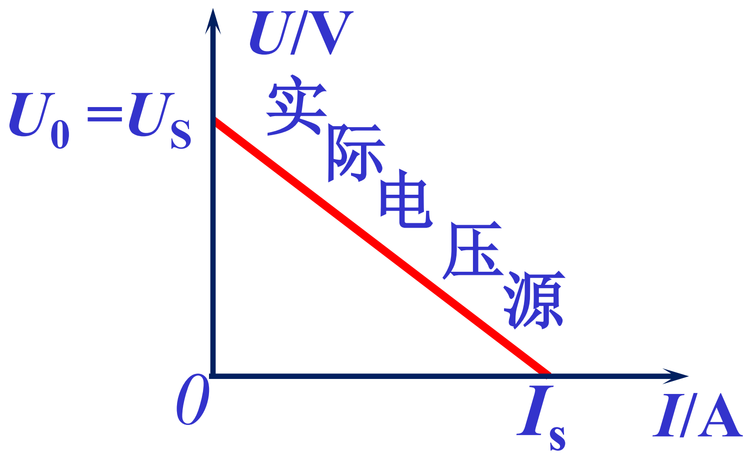
实际电压源模型与实际电流源模型的等效变换

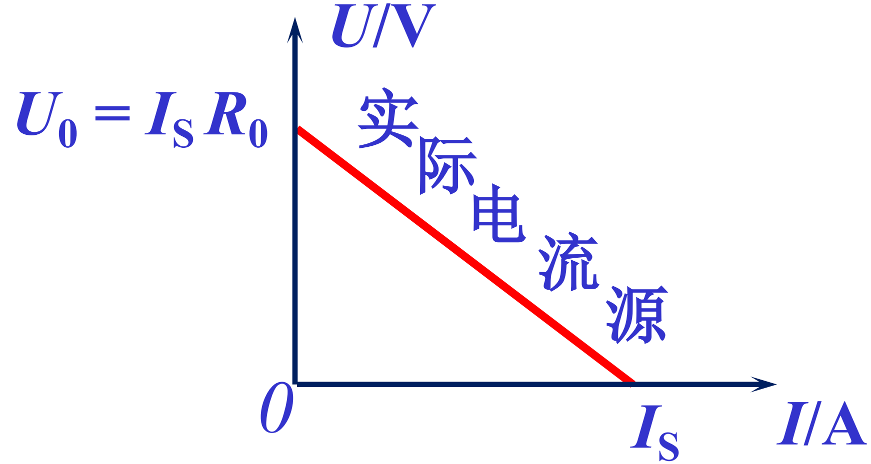
内阻改串联

$U_S = I_s R_0$

内阻改并联

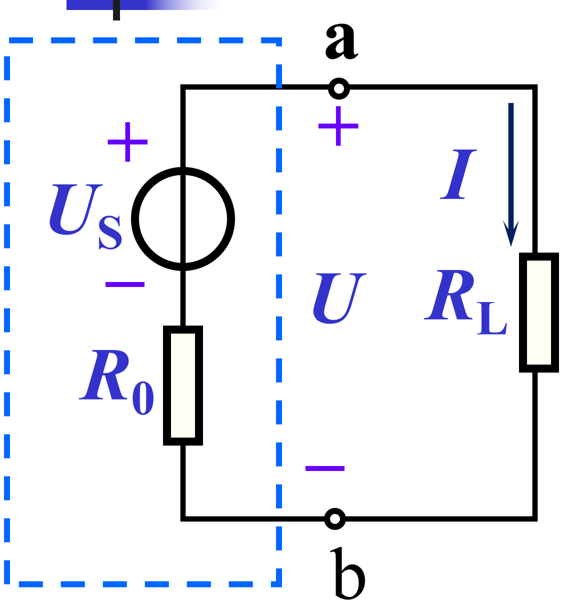
$I_s = \dfrac{U_S}{R_0}$





实际电压源模型和实际电流源模型的外特性是相同的。因此两种模型相互间可以等效变换。

实际电压源模型与实际电流源模型的等效变换

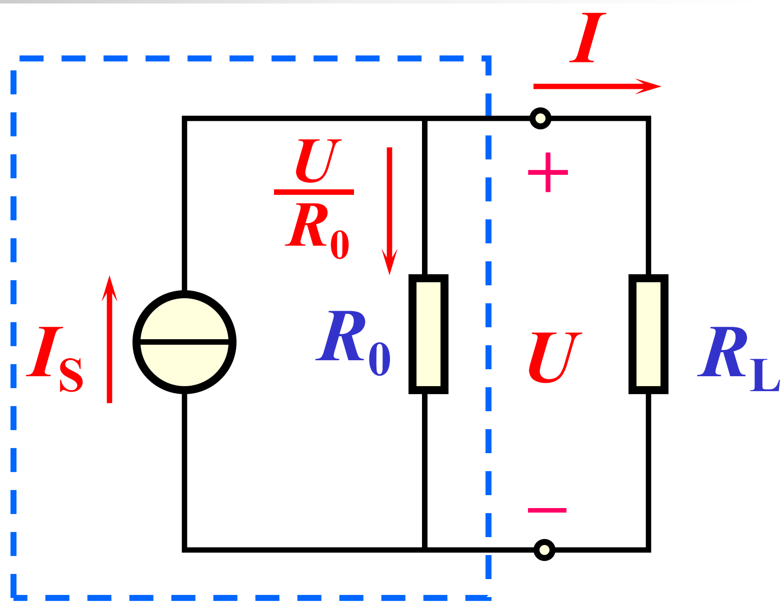


内阻改并联

$$I_s = \frac{U_S}{R_0}$$

$$U_S = I_s R_0$$

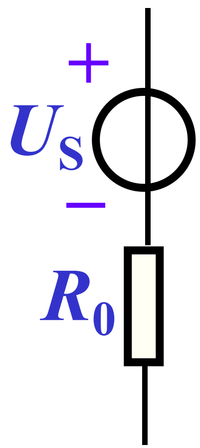
内阻改串联



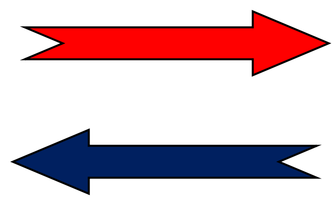
注意：变换前后U_S和I_S的方向

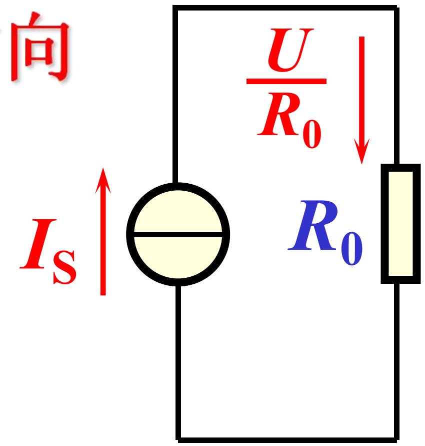
实际电压源模型与实际电流源模型的等效变换

注意：



变换前后U_S和I_S的方向



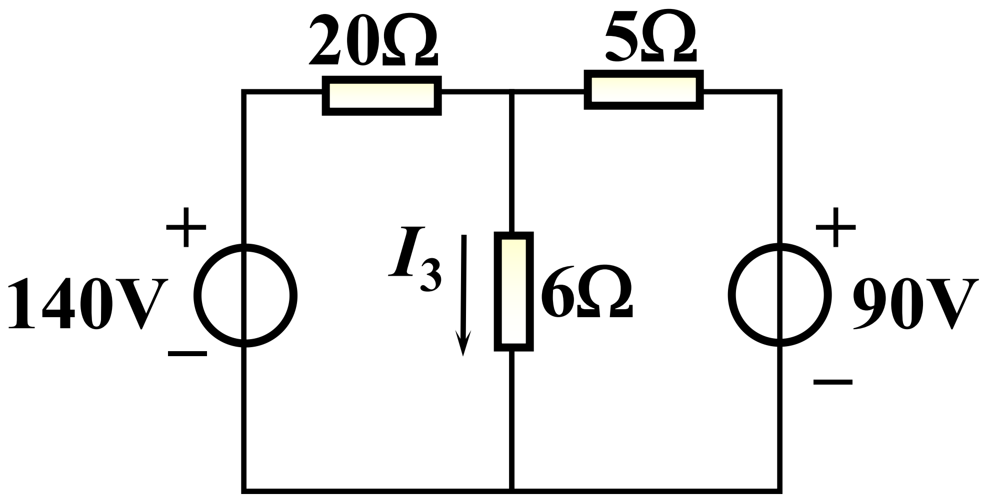


实际电压源与实际电流源模型的等效变换关系仅是对**外电路**而言，至于电源内部则是不等效的。

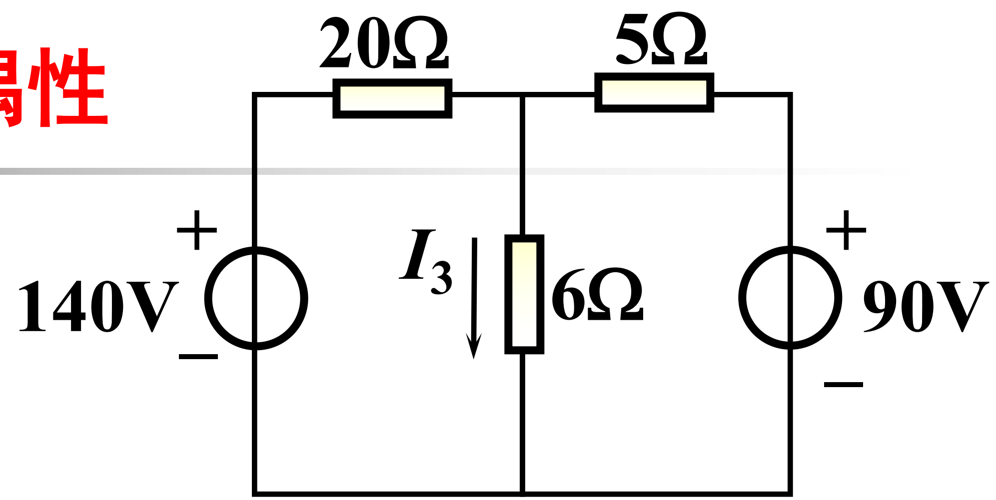
理想电压源与理想电流源不能等效变换！

§2.5 电路的对偶性

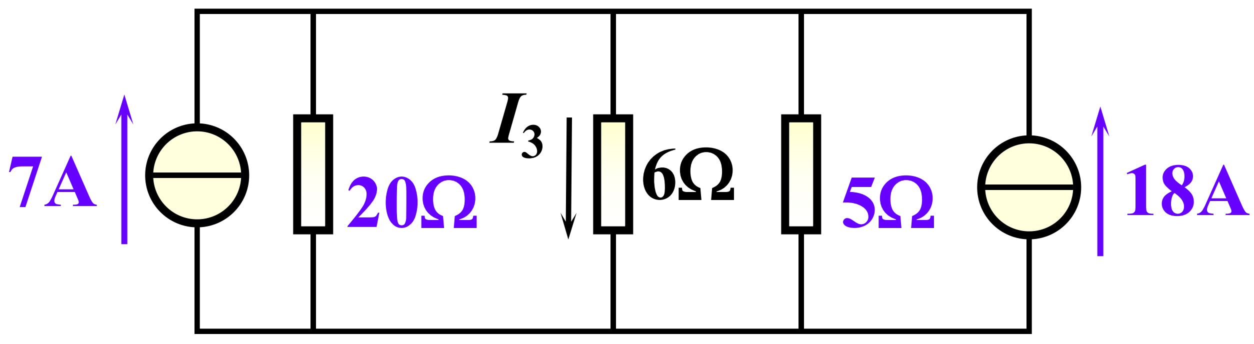
例1:用电源等效变换方法求图示电路中电流I_3。

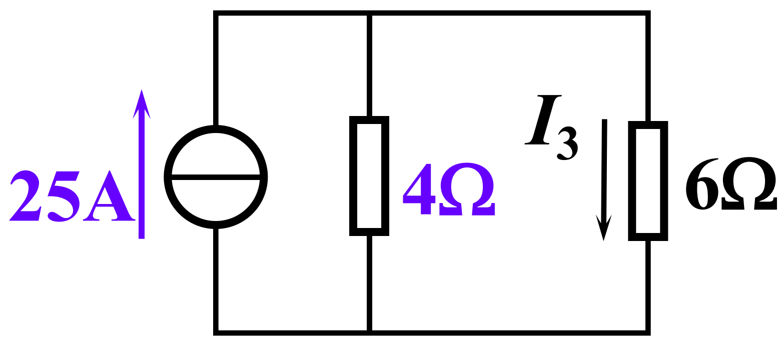


§ 2.5 电路的对偶性



解：20 Ω∥5 Ω =4 Ω



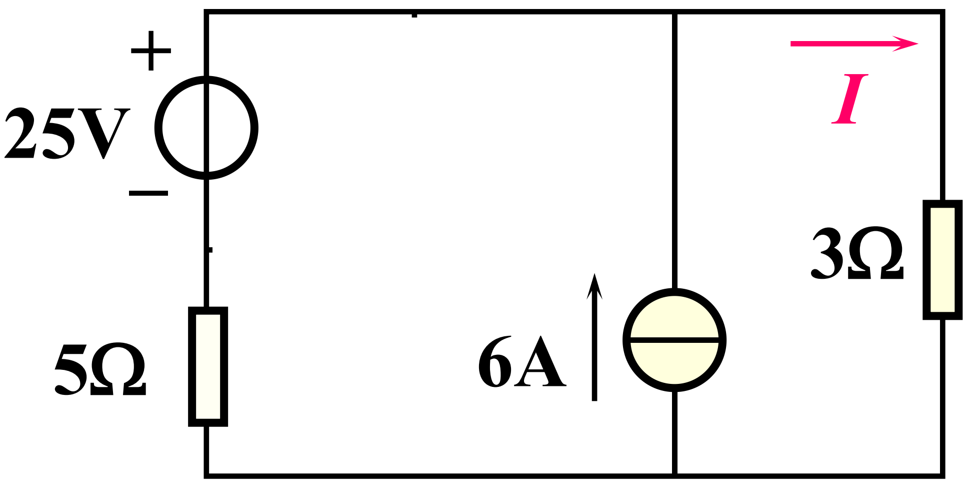


由并联电阻分流公式得

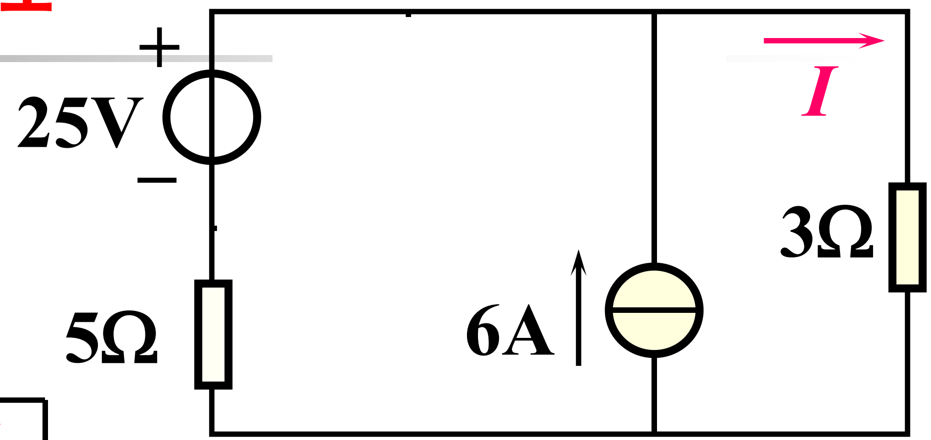
I_3=10A

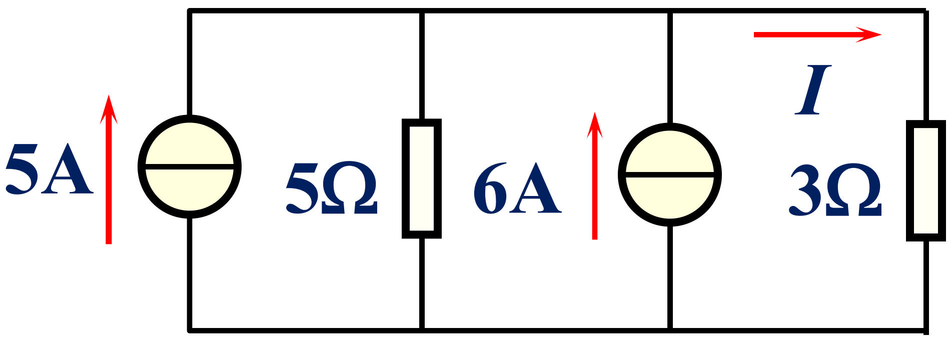
§ 2.5 电路的对偶性

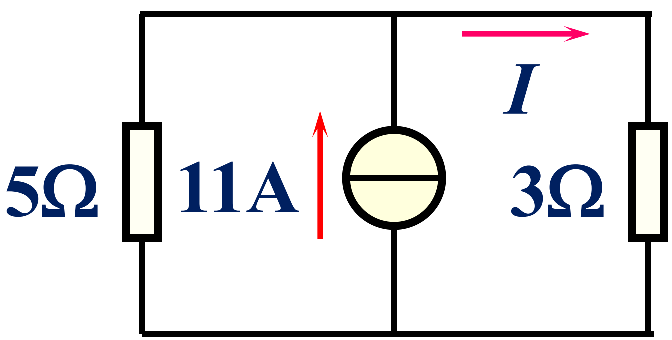
例2:用电源等效变换的方法求图示电路中电流I。



§ 2.5 电路的对偶性



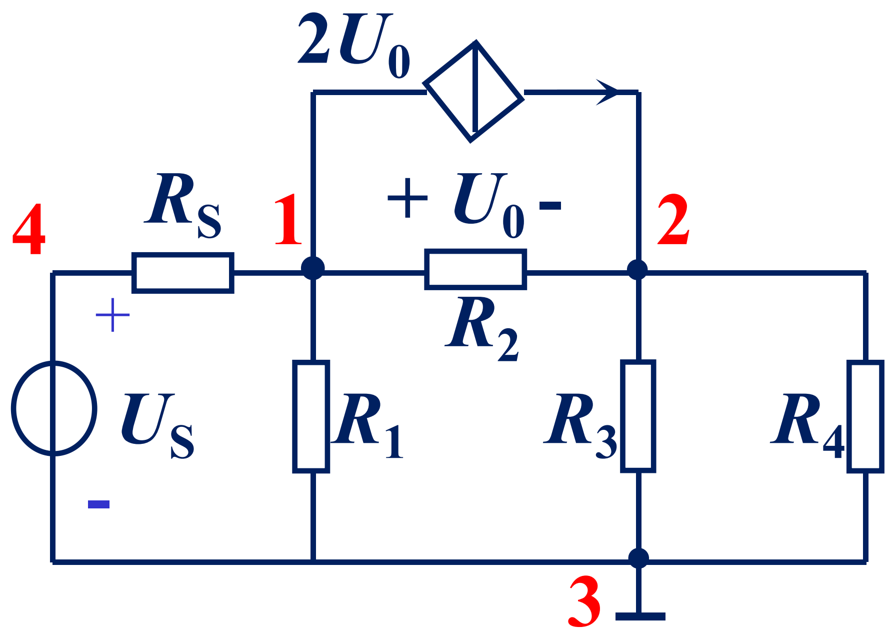




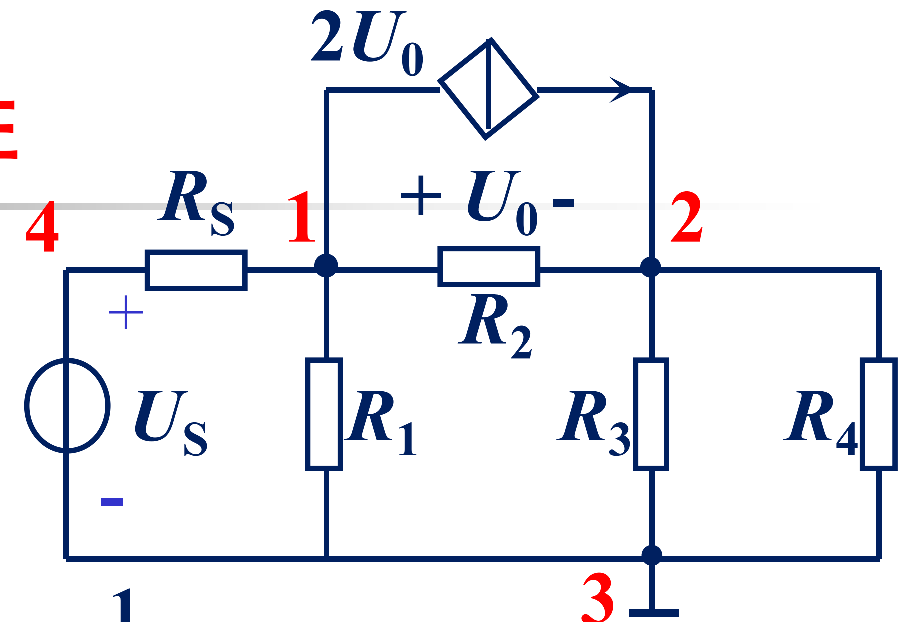
$$I=\frac{5}{5+3}\times 11=\frac{55}{8}\,\mathrm{A}$$

§ 2.5 电路的对偶性

例3:试列写图示电路的节点方程组。



§ 2.5 电路的对偶性



解法1：直接列出节点方程组

节点4 $\quad U_4 = U_S$

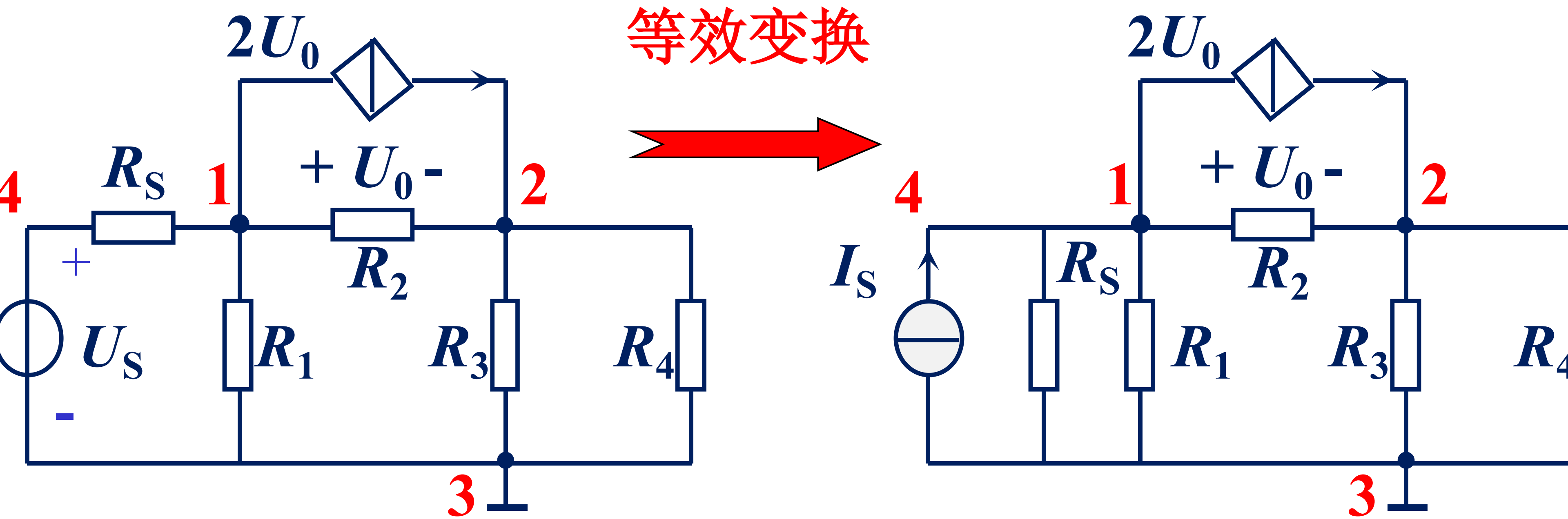
节点1 $\quad \left(\frac{1}{R_S}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)U_1 - \frac{1}{R_2}U_2 - \frac{1}{R_S}U_4 = -2U_0$

节点2 $\quad -\frac{1}{R_2}U_1 + \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_2 = 2U_0$

辅助方程 $\quad U_0 = U_1 - U_2$

结论：受控源与独立源一样对待，但要找出控制量与未知量的关系。

解法2：



节点1 $\left(\frac{1}{R_s}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)U_1-\frac{1}{R_2}U_2=\frac{U_S}{R_s}-2U_0$

节点2 $-\frac{1}{R_2}U_1+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_2=2U_0$

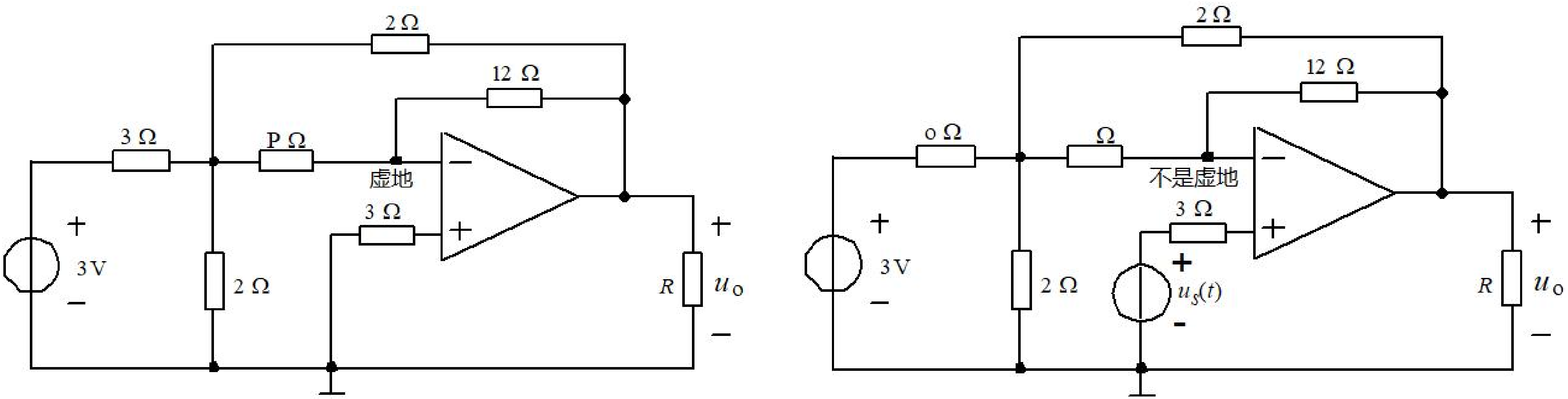
辅助方程 $U_0=U_1-U_2$

结论：受控源与独立源一样对待，但要找出控制量与未知量的关系。

作业例题

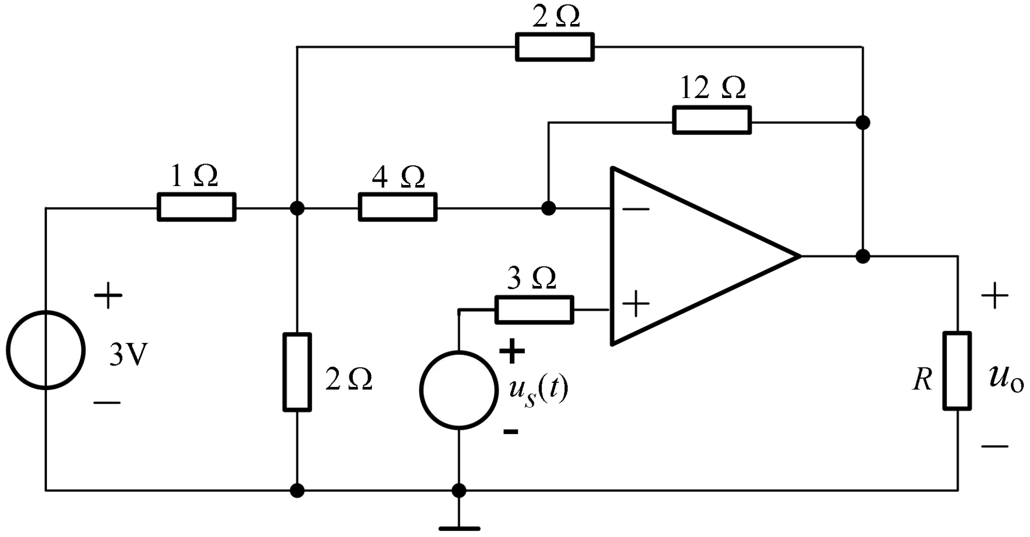
P104图题2-19

运放原理，“**虚地**”、“**虚短**”、“**虚断**”的概念。



作业例题

理想运算放大器应用电路，$u_s(t)=a\cos(\omega t+\theta)$ 求输出电压u_o表达式。



- 节点电压分析法