第六章 Fourier变换

§6.1 Fourier积分与傅氏变换

§6.2 单位脉冲函数

作　业

P157-160

1(3)、4(3)、12(3)、13(1)、13(3)

本章学习目标

1、了解傅里叶积分;

2、理解傅里叶变换;

3、掌握 δ函数及傅里叶变换;

4、熟悉傅里叶变换的性质.

积分变换

所谓积分变换,就是把某函数类A中的函数(象原函数) $f(x)$ 乘上**一个确定的二元函数 $k(x,s)$**,然后**计算积分**,即

$$F(s)=\int_a^b f(x)k(x,s)dx$$

这样变成另一个函数类B中的函数(象函数).根据选取的**二元函数(核函数)**不同,就得到不同名称的积分变换.

函数 $f\left(t\right)$的傅里叶变换：

$$F\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-i\omega t}dt$$

函数 $f\left(t\right)$的拉氏变换：

$$F\left(s\right)=\int_{0}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-st}dt$$

$$\left(s=\beta+i\omega\right)$$

§6.1 Fourier积分与Fourier变换

一、周期函数的Fourier级数

二、非周期函数的Fourier变换

三、傅氏积分与积分定理

四、傅氏变换

§7.1 Fourier积分与Fourier变换

Fourier 变换是积分变换中常见的一种变换，它既能够简化运算（如求解微分方程、化卷积为乘积等等），又具有非常特殊的物理意义。

因此，Fourier 变换不仅在数学的许多分支中具有重要的地位，而且在各种工程技术中都有着广泛的应用。

Fourier 变换是在周期函数的 Fourier 级数的基础上发展起来的。在微积分课程中已经学习了 Fourier 级数内容，因此本节将先简单地回顾一下 Fourier 级数展开。

一、周期函数的Fourier级数

在高等数学中学习傅里叶级数时知道，研究周期函数实际上只须研究其中的一个周期内的情况即可, 通常研究在闭区间$[-T/2,T/2]$内函数变化的情况.

并非理论上的所有周期函数都可以用傅里叶级数逼近, 而是要满足狄利克雷(Dirichlet)条件。

一、周期函数的Fourier级数

1.狄利克雷(Dirichlet)定理

(**Dirichlet定理**) 设 $f_T(t)$ 是以 T 为周期的实值函数，且在 [-T/2, T/2]区间上满足如下条件(称为 **Dirichlet条件**)：

(1) 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 只有有限个极值点.

则在 $f_T(t)$ 的连续点处有

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t), \qquad \text{(A)}$$

在 $f_T(t)$ 的间断处，上式左端为

$$\frac{1}{2}[f_T(t+0)+f_T(t-0)].$$

一、周期函数的 Fourier 级数

2. Fourier 级数的三角形式

任何满足狄氏条件的周期函数$f(t)$，可表示为三角级数的形式如下:

$$\boxed{f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t),} \qquad \text{(A)}$$

其中，$a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=0,1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=1,2,\cdots$$

$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$，称之为**基频**。$n\omega_0$称为基频的n次倍频。

定义 称 (A) 式为 **Fourier 级数的三角形式**。

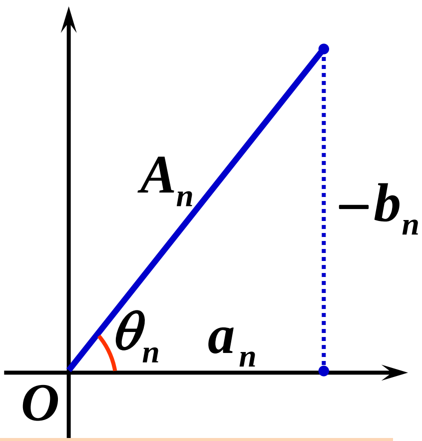
一、周期函数的Fourier级数

3. Fourier级数的物理含义

改写 $f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t),$ (A)

令 $A_0=\frac{a_0}{2},\quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},$

$\cos\theta_n=\frac{a_n}{A_n},\quad \sin\theta_n=\frac{-b_n}{A_n},$



则(A)式变为 $f_T(t)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)$

周期信号可以分解为一系列**固定频率**的简谐波之和，这些简谐波的(角)频率分别为一个基频ω_0的倍数。

一、周期函数的Fourier级数

3. Fourier 级数的物理含义

$$f_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

振幅A_n 反映了频率为 $n\omega_0$ 的简谐波在信号$f_T(t)$中所占有的份额；

相位θ_n 反映了在信号 $f_T(t)$ 中频率为 $n\omega_0$ 的简谐波沿时间轴移动的大小。

- 这两个指标完全定量地刻画了信号的频率特性。

一、周期函数的 Fourier 级数

FOURIER 级数的表示

(1) 三角函数形式 $$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t),$$

其中，$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=0,1,2,\cdots$$

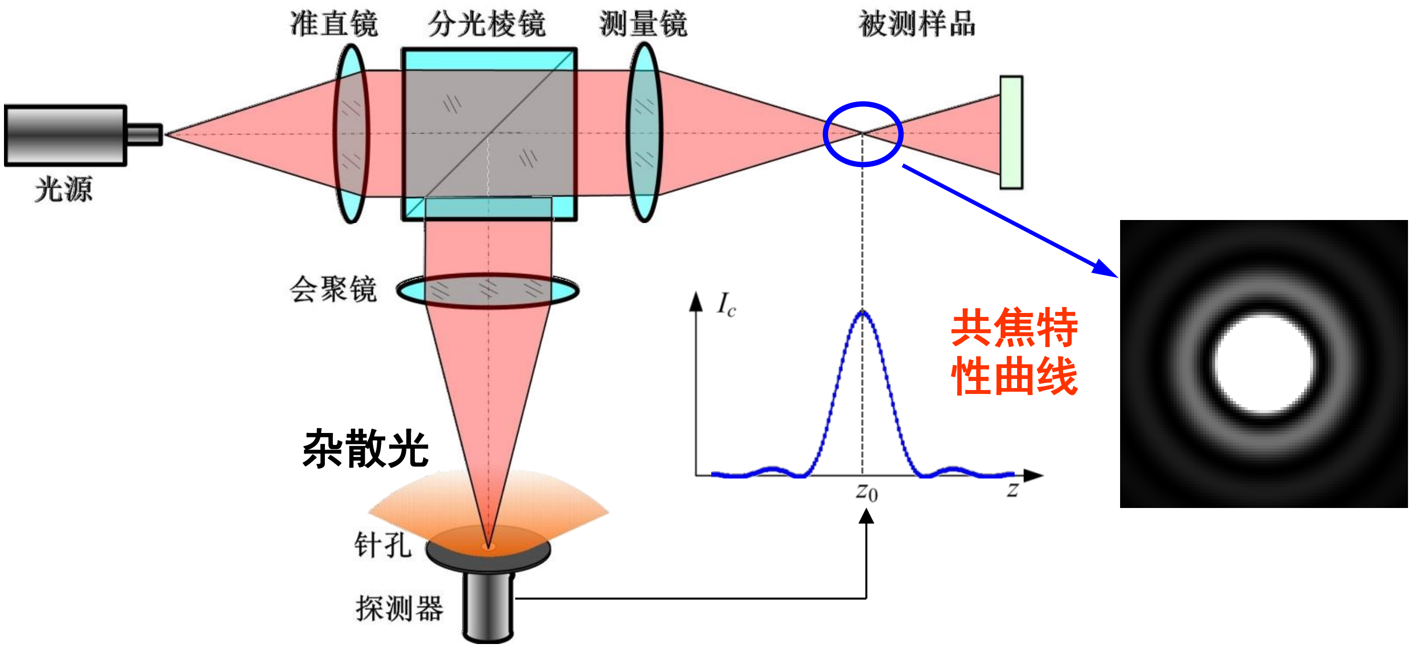
$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=1,2,\cdots$$

(2) 指数形式

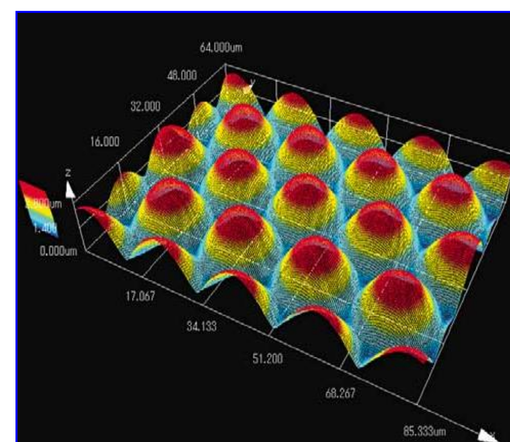
$$\boxed{f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{jn\omega_0 t},}$$

其中，$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

光学成像系统



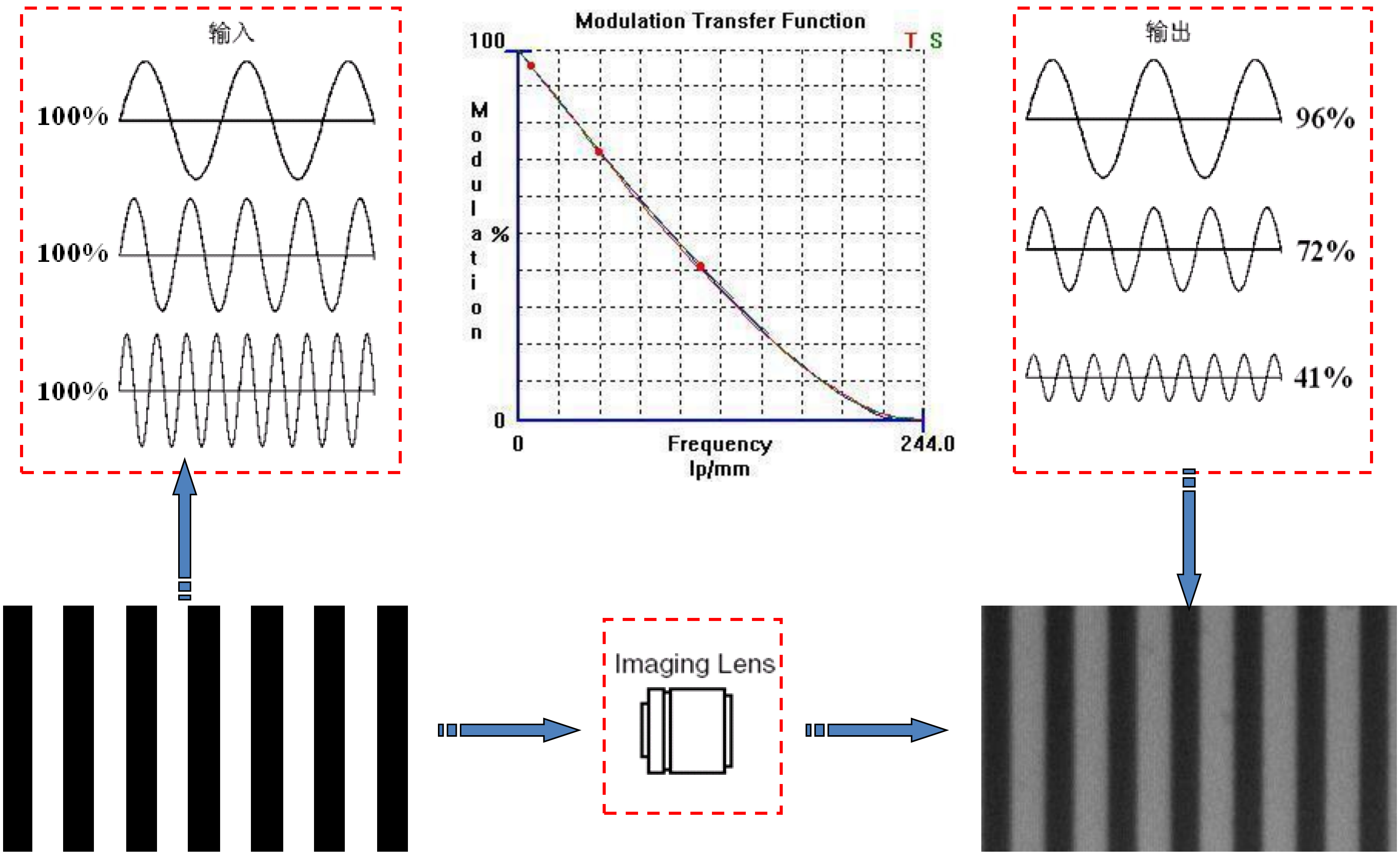
准直镜
分光棱镜
测量镜
被测样品
光源
会聚镜
I_c
共焦特性曲线
杂散光
z_0
z
针孔
探测器



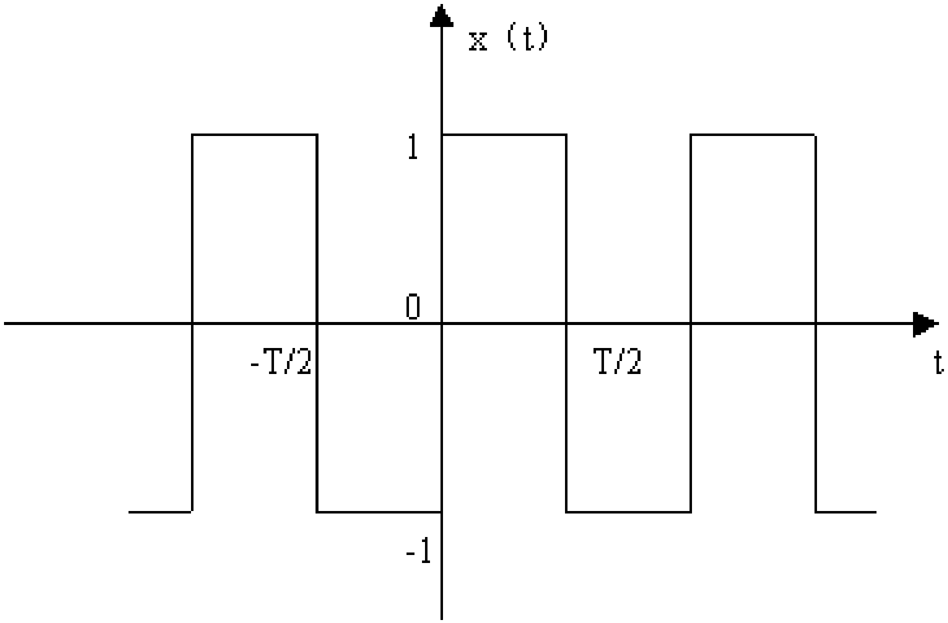
64.000um
48.000
32.000
16.000
0.000um
17.067
34.133
51.200
68.267
85.333um

光学传递函数评测

频率域



例1. 求下图所示周期方波信号$g(t)$的傅立叶级数



$$g(t)=\begin{cases} -1 & -\dfrac{T}{2}<t<0 \\ 1 & 0<t<\dfrac{T}{2} \end{cases}$$

$\boldsymbol{a_0=c_0=0}$

$$a_p = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\cos p\omega_0 t\mathrm{d}t = 0$$

$$b_p = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\sin p\omega_0 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{T}[\int_{-T/2}^{0} (-1)\sin p\omega_0 t\mathrm{d}t + \int_{0}^{T/2} \sin p\omega_0 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{1}{p\omega_0}\cos p\omega_0 t\Big|_{-T/2}^{0} + \frac{1}{p\omega_0}(-\cos p\omega_0 t)\Big|_{0}^{T/2} \right]$$

$$= \frac{2}{T}\frac{1}{p\omega_0}\left[1-\cos[p\omega_0(-\frac{T}{2})]+1-\cos(p\omega_0\frac{T}{2}) \right]$$

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_p\cos p\omega_0 t + b_p \sin p\omega_0 t),$$

利用 $\boldsymbol{\omega_0 T = 2\pi}$，有

$$b_p = \frac{2}{\pi p}\left[1-\cos p\pi\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{p\pi} & p = 1,3,5,\cdots \\ 0 & p = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{g(t)} = \frac{4}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin n\omega_0 t}{(2n-1)\pi}$$

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_p \cos p\omega_0 t + b_p \sin p\omega_0 t),$$

同样 $$g(t)=\sum_{p=-\infty}^{\infty} d_p \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\omega_0 t} \qquad \boldsymbol{d}_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}\int_{-T/2}^{T/2} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t})\mathbf{e}^{-jn\omega_0 t}\mathbf{d}\boldsymbol{t},$$

$$d_p = \frac{1}{2}(a_p - \mathrm{i}b_p) = \begin{cases} \dfrac{2}{\mathrm{i}p\pi} & p = 1, 3, 5, \cdots \\ 0 & p = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\mathrm{i}(2n-1)\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-1)\omega_0 t}$$

因而 $$g(t)=\frac{4}{\pi}\left(\sin\omega_0 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t+\cdots\right)$$

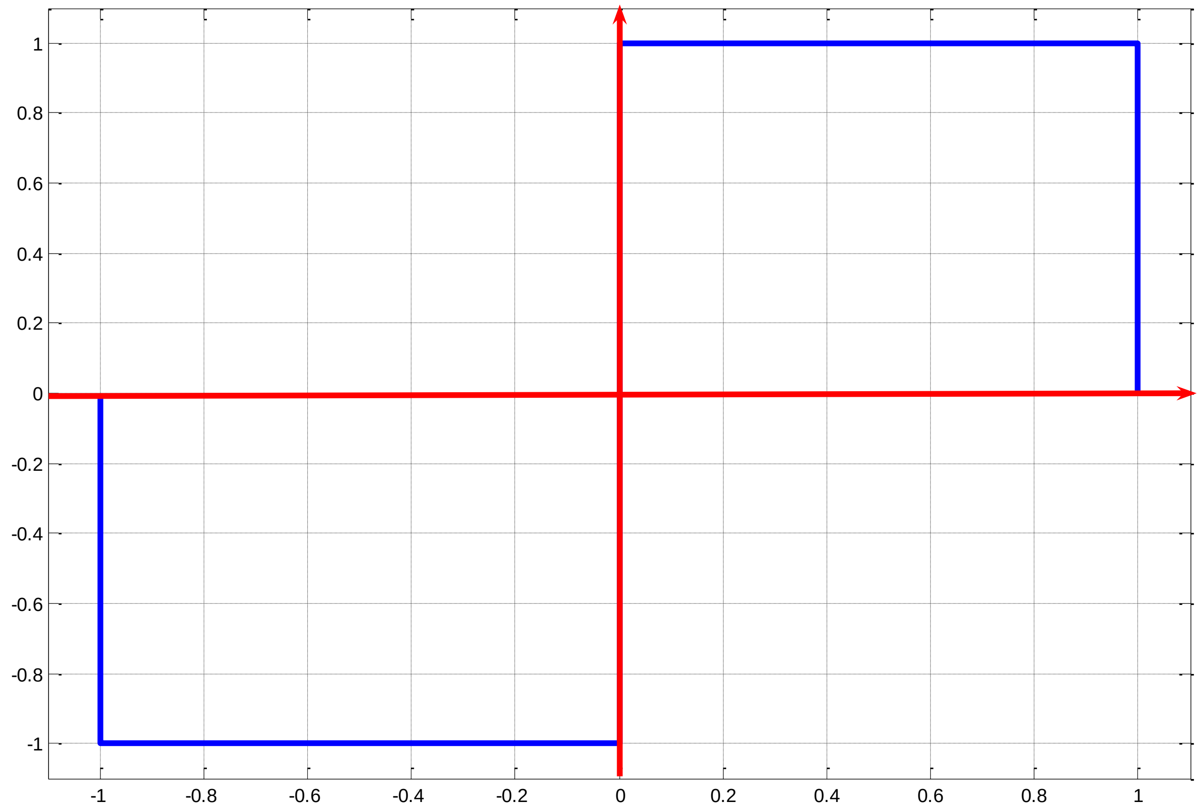
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sin n\omega_0 t}{(2n-1)\pi}$$ 三角形式

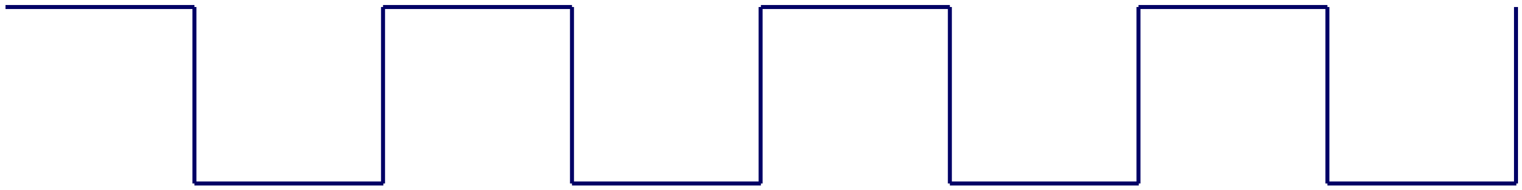
$$=\mathrm{Re}[\frac{4}{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}]+\mathrm{Re}[\frac{4}{\mathrm{i}3\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega_0 t}]+\mathrm{Re}[\frac{4}{\mathrm{i}5\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\omega_0 t}]+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}[\frac{4}{\mathrm{i}(2n-1)\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-1)\omega_0 t}]$$

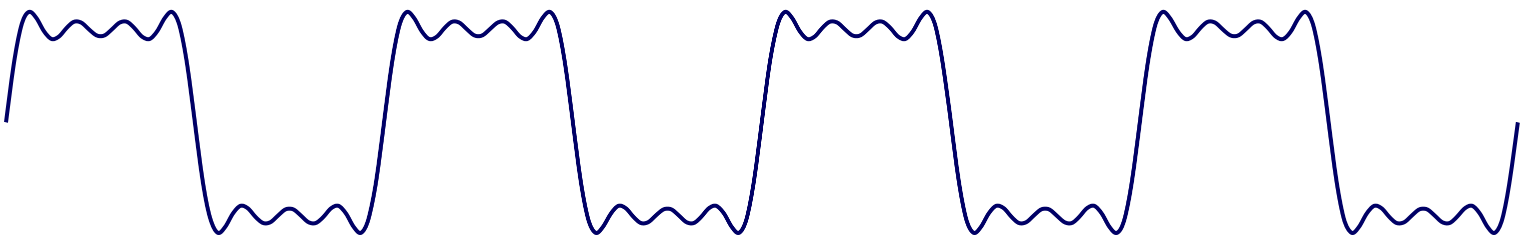
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\mathrm{i}(2n-1)\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-1)\omega_0 t}$$ 指数形式

方波

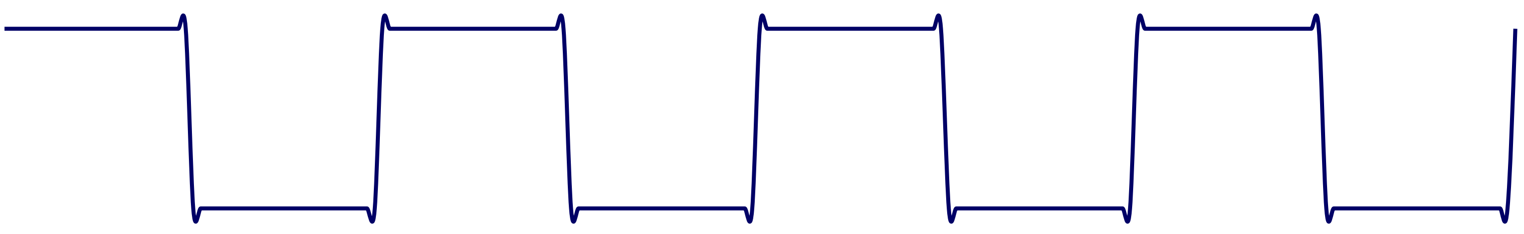




方波



4个正弦波的逼近



100个正弦波的逼近

根据三角函数的性质

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m\omega_0 t \sin n\omega_0 t \mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t \mathrm{d}t = 0 \qquad (m \neq n)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t \mathrm{d}t = 0 \qquad (m \neq n)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 p\omega_0 t \mathrm{d}t = \frac{T}{2} \qquad p=1,2,\cdots$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 p\omega_0 t \mathrm{d}t = \frac{T}{2} \qquad p=1,2,\cdots$$

二、非周期函数的傅立叶变换

借助 Fourier 级数展开，使得人们能够完全了解一个信号的**频率特性**，从而认清了一个信号的本质，这种对信号的分析手段也称为**频谱分析**(或者**谐波分析**)。

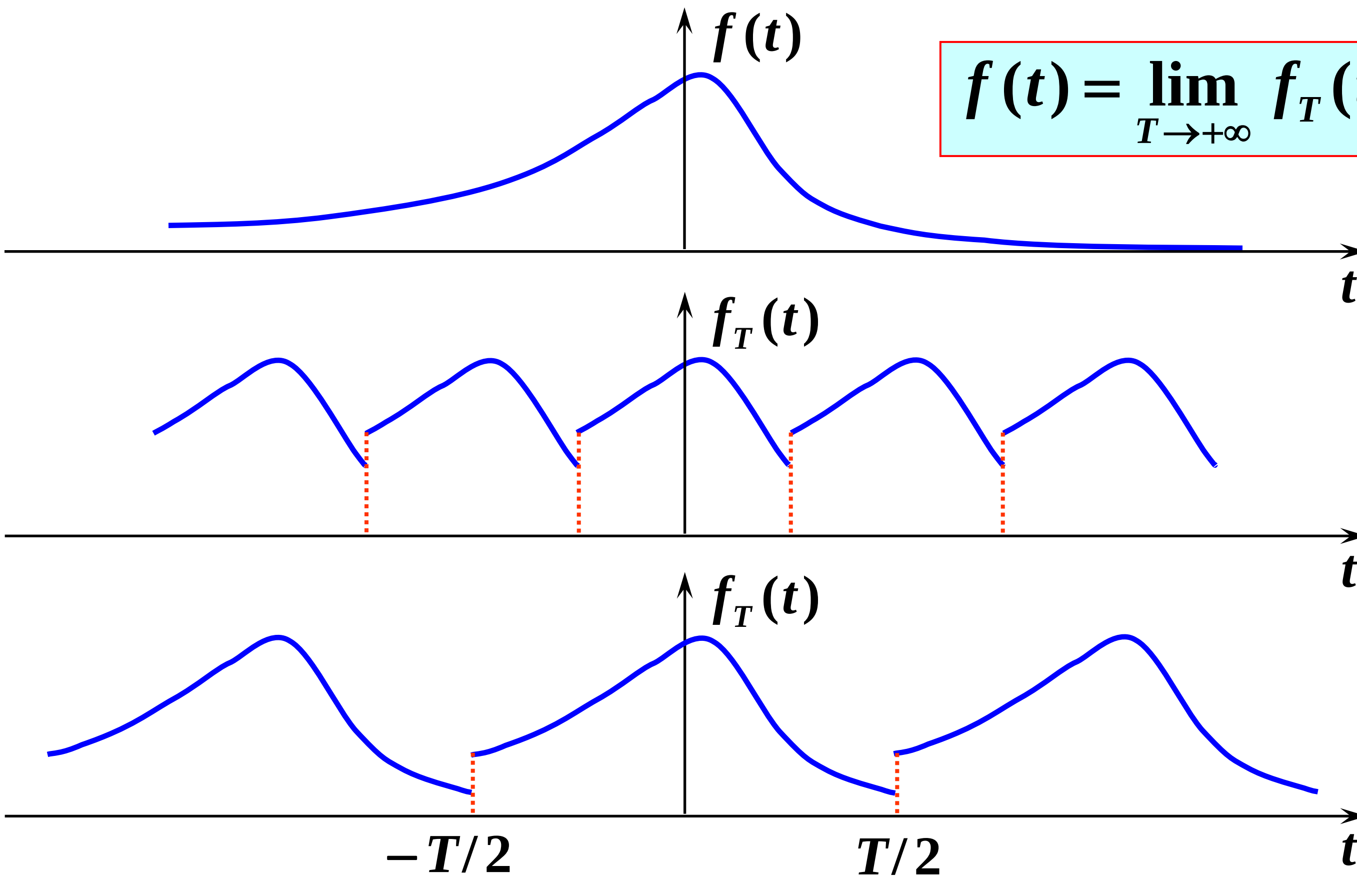
但是，**Fourier** 级数要求被展开的函数必须是**周期函数**，而在工程实际问题中，大量遇到的是非周期函数，那么，对一个非周期函数是否也能进行频谱分析呢?

首先通过一个例子看周期增大后函数的傅里叶级数的变化

二、非周期函数的傅立叶变换

(1) 非周期函数可以看成是一个周期为无穷大的“周期函数”。

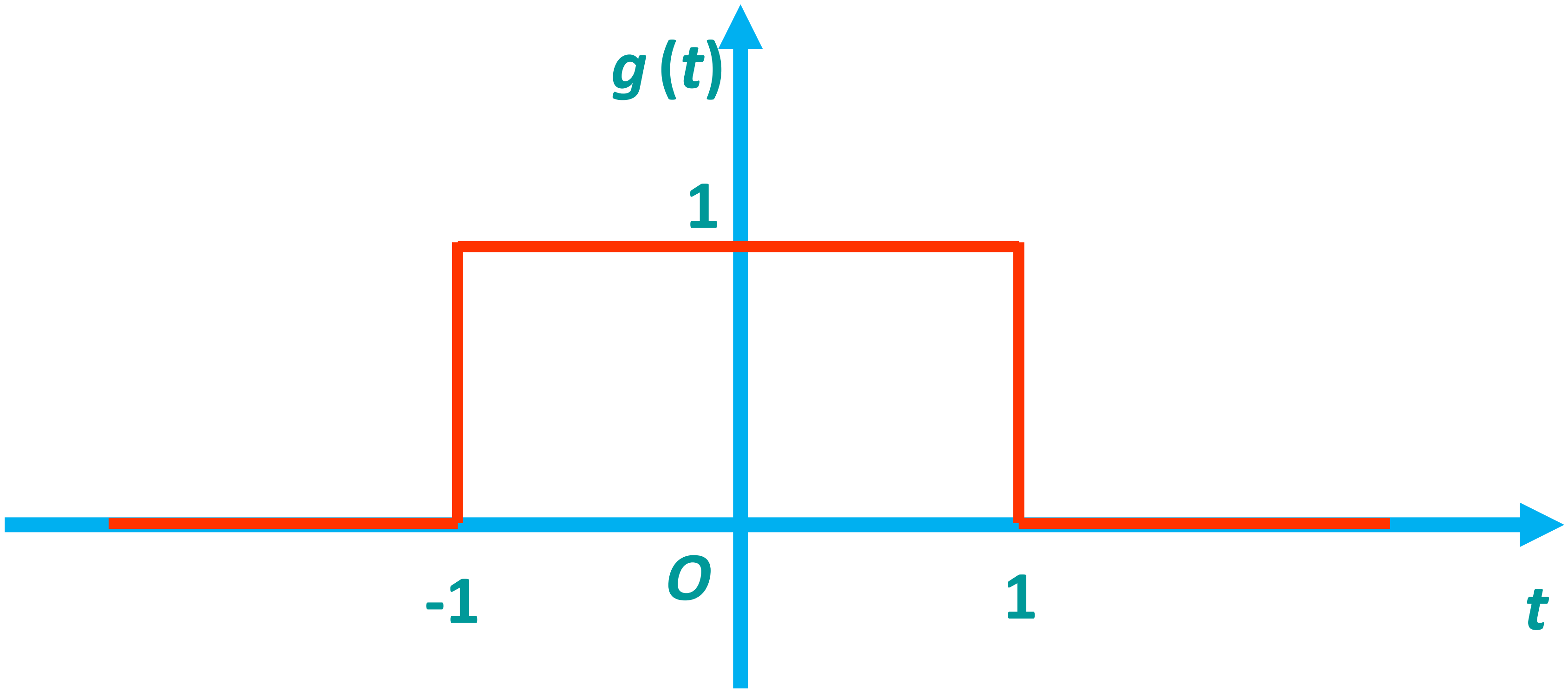
$$f(t)=\lim_{T\to+\infty} f_T(t)$$



例　矩形脉冲函数为

$$g(t)=\begin{cases}1 & |t|<1\\ 0 & |t|\geq 1\end{cases}$$

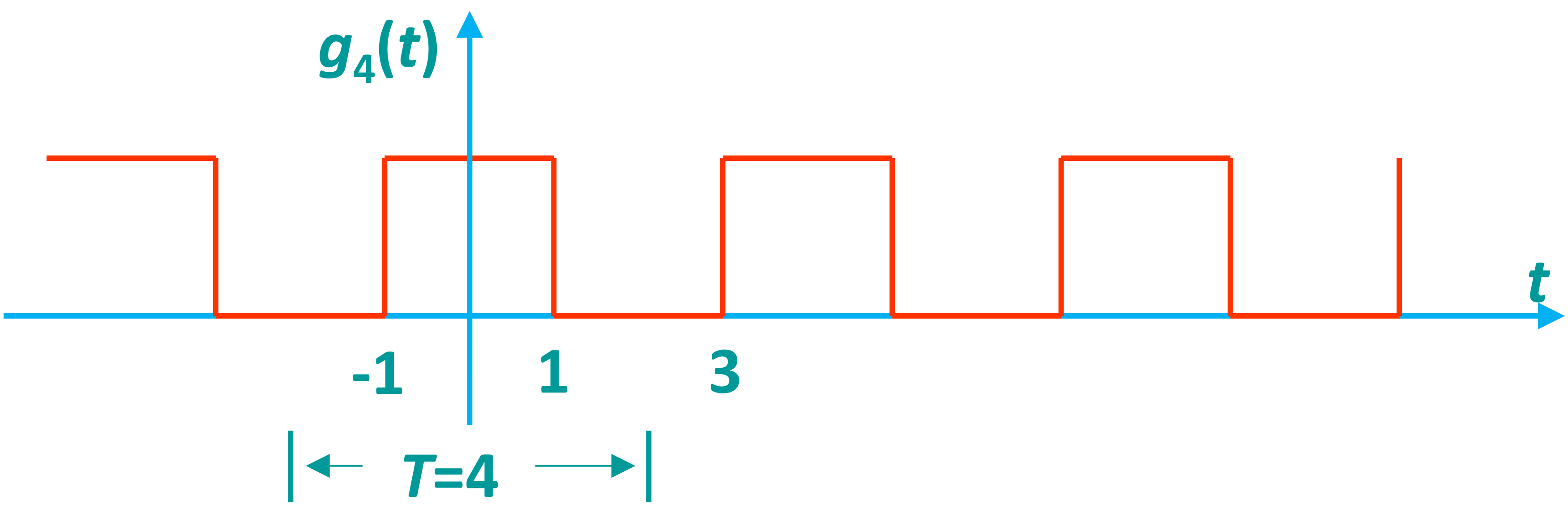
如图所示:



现以$g(t)$为基础构造一周期为T的周期函数$g_T(t)$，方波宽度不变，间隔增大。令$T=4$，则

$$g_4(t)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty} g(t+4p)$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2},\ \omega_p=p\omega=\frac{p\pi}{2}$$



令 $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2},\ \omega_p = p\omega = \frac{p\pi}{2}$$

则

$$c_p = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} g_4(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{-4\mathrm{i}\omega_p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p t}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4\mathrm{i}\omega_p}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p})$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\omega_p}{\omega_p} = \boxed{\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\omega_p)}\ (p = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

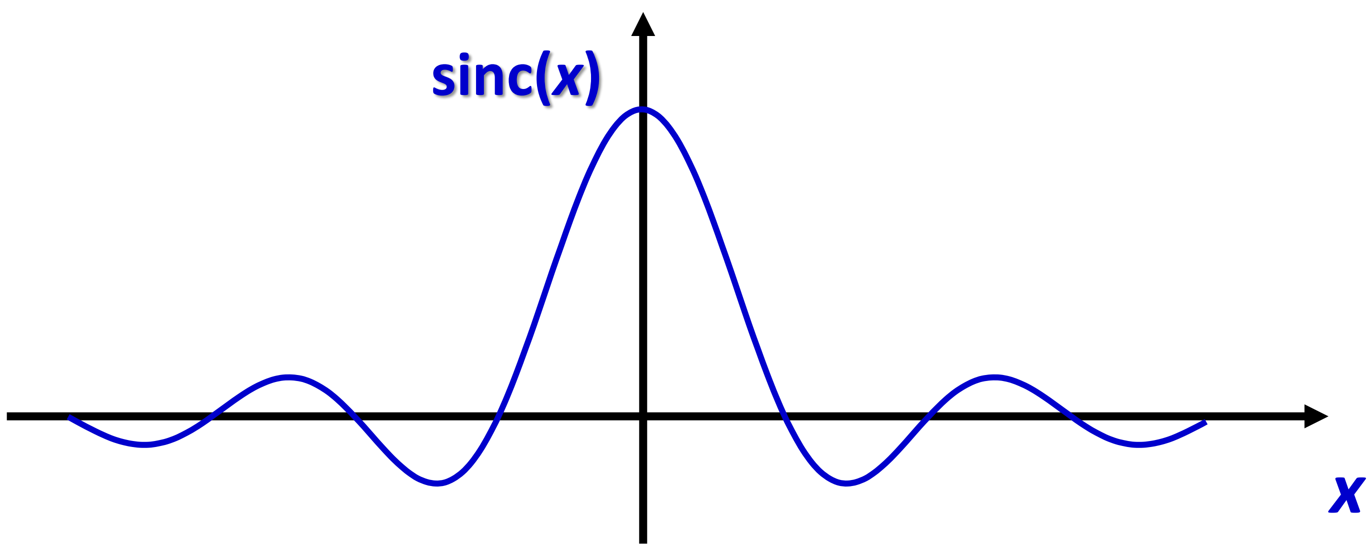
sinc函数介绍

sinc函数定义为 $\mathrm{sinc}(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 也记作 $S_a(t)$

严格讲函数在 $x=0$ 处是无定义的，但是因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

所以定义 $\mathrm{sinc}(0)=1$，用不严格的形式就写作 $\left.\dfrac{\sin x}{x}\right|_{x=0}=1$，

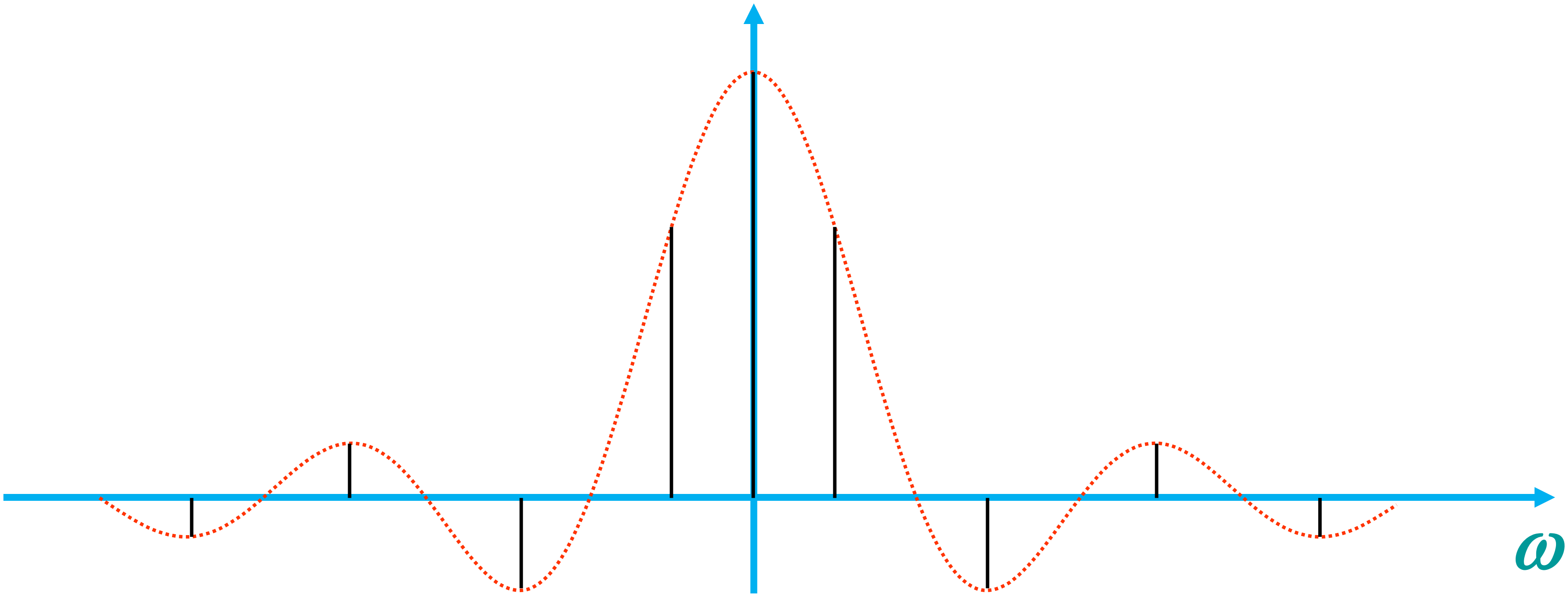
则函数在整个实轴连续。



前面计算出

$$c_p = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\omega_p) \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

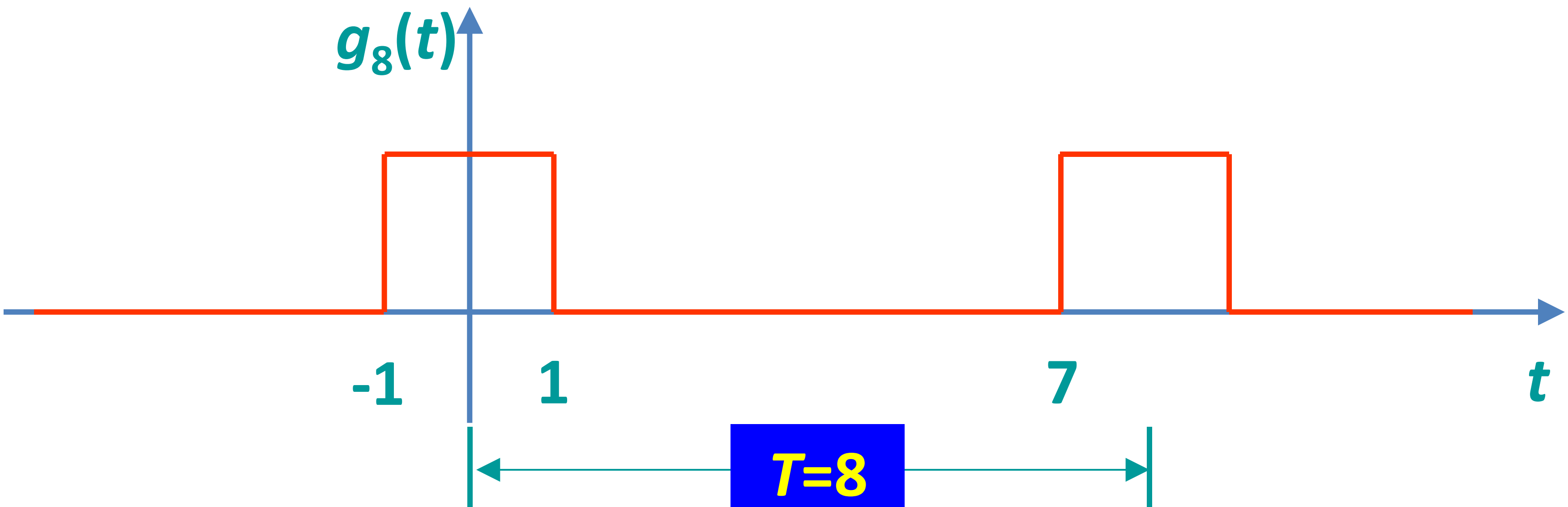
$\omega_p = p\omega = p\dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{p\pi}{2}$，可将 $\mathbf{c_p}$ 以竖线标在频率图上



现在将周期扩大一倍, 令T=8, 以$g(t)$为基础构造一周期为8的周期函数$g_8(t)$

$$g_8(t)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty} g(t+8p),$$

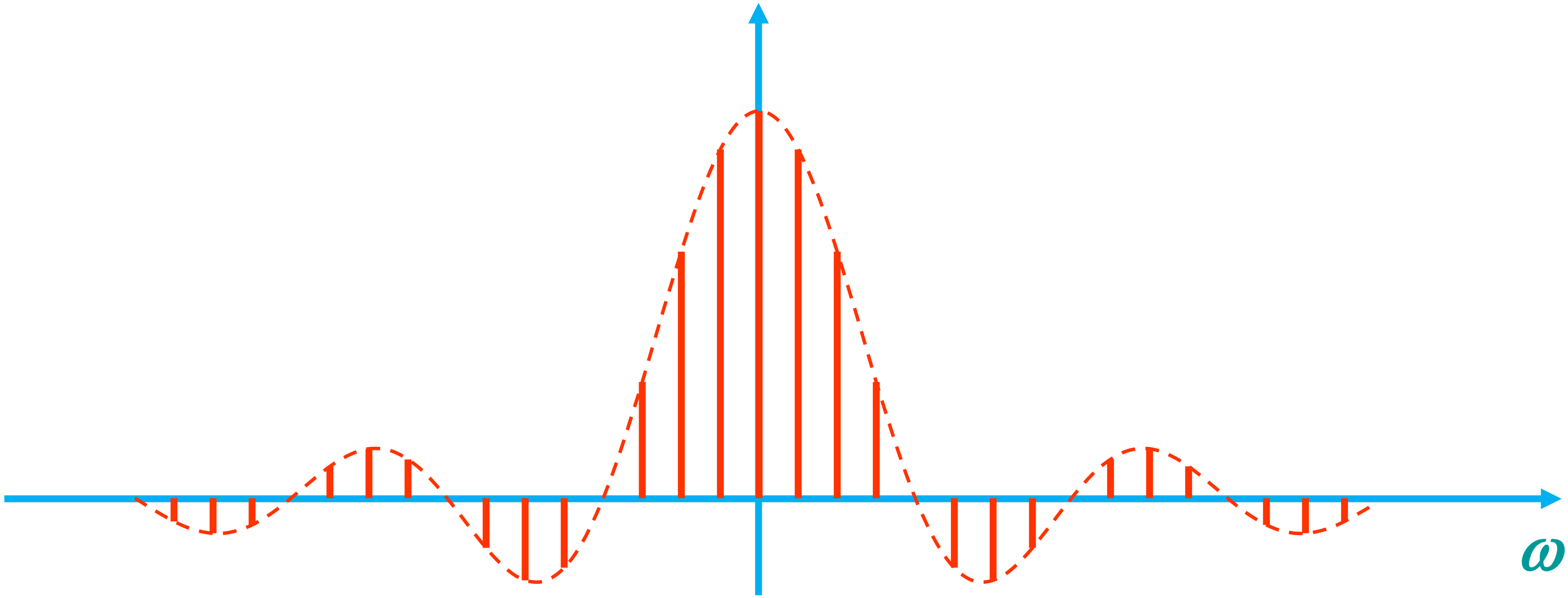
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4},\ \omega_p=p\omega=\frac{p\pi}{4}$$



则 $$c_p=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}g_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p t}\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{sinc}(\omega_p)\ (p=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

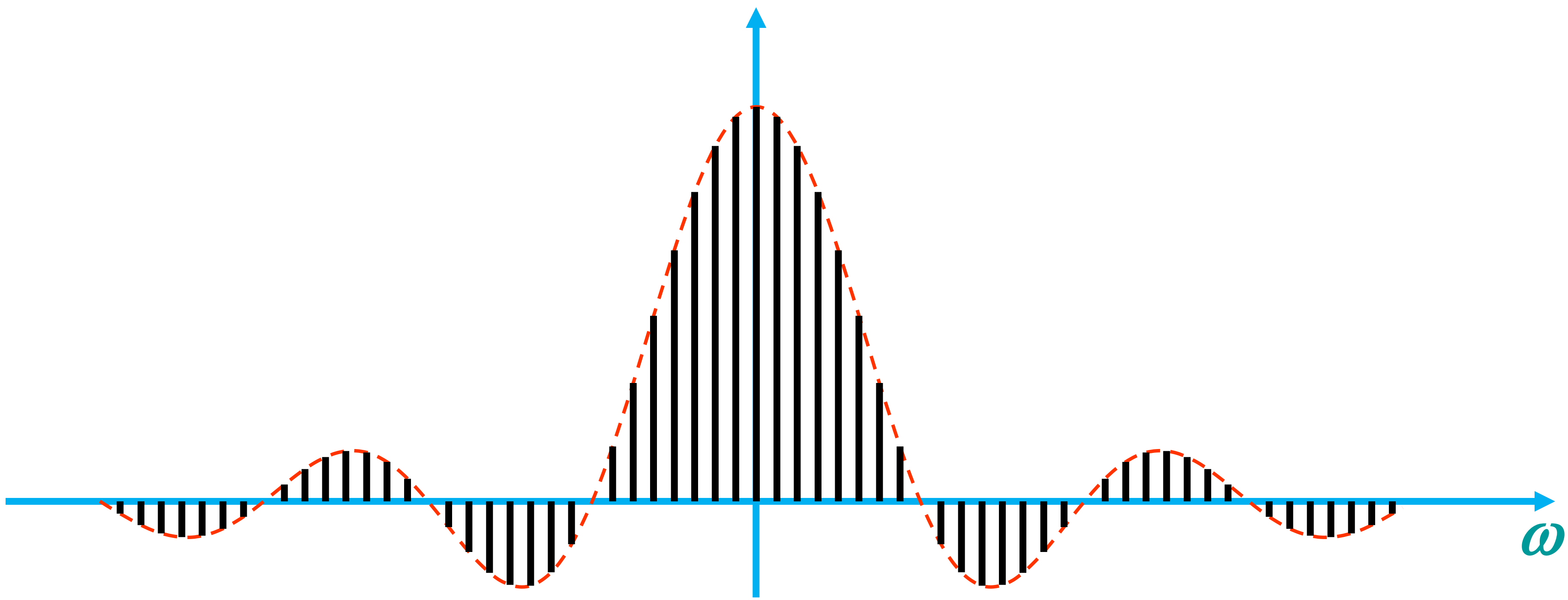
$$\omega_p=p\omega=p\frac{2\pi}{8}=\frac{p\pi}{4},$$



如果再将周期增加一倍，令**T=16**，可计算出

$$c_p = \frac{1}{8}\text{sinc}(\omega_p) \ (p = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\omega_p = p\omega = p\frac{2\pi}{16} = \frac{p\pi}{8},$$ 再将 $\mathbf{c_p}$ 竖线标在频率图上



一般地，对于任意周期$T>2$

$$c_p=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}g_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{T}\cdot\frac{\sin\omega_p}{\omega_p}=\frac{2}{T}\mathrm{sinc}(\omega_p)\ (p=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

当周期T越来越大时，各个频率的正弦波的频率间隔越来越小，而它们的强度在各个频率的轮廓则总是sinc函数的形状，因此，如果将方波函数$g(t)$可以看作是由无穷多个无穷小的正弦波构成，即sinc函数的形状看作是方波函数$g(t)$的各个频率成份上的分布，称作方波函数$g(t)$的傅里叶变换.

一、周期函数的 Fourier 级数

FOURIER 级数的表示

(1) 三角函数形式

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t),$$

其中，
$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=1,2,\cdots$$

(2) 指数形式

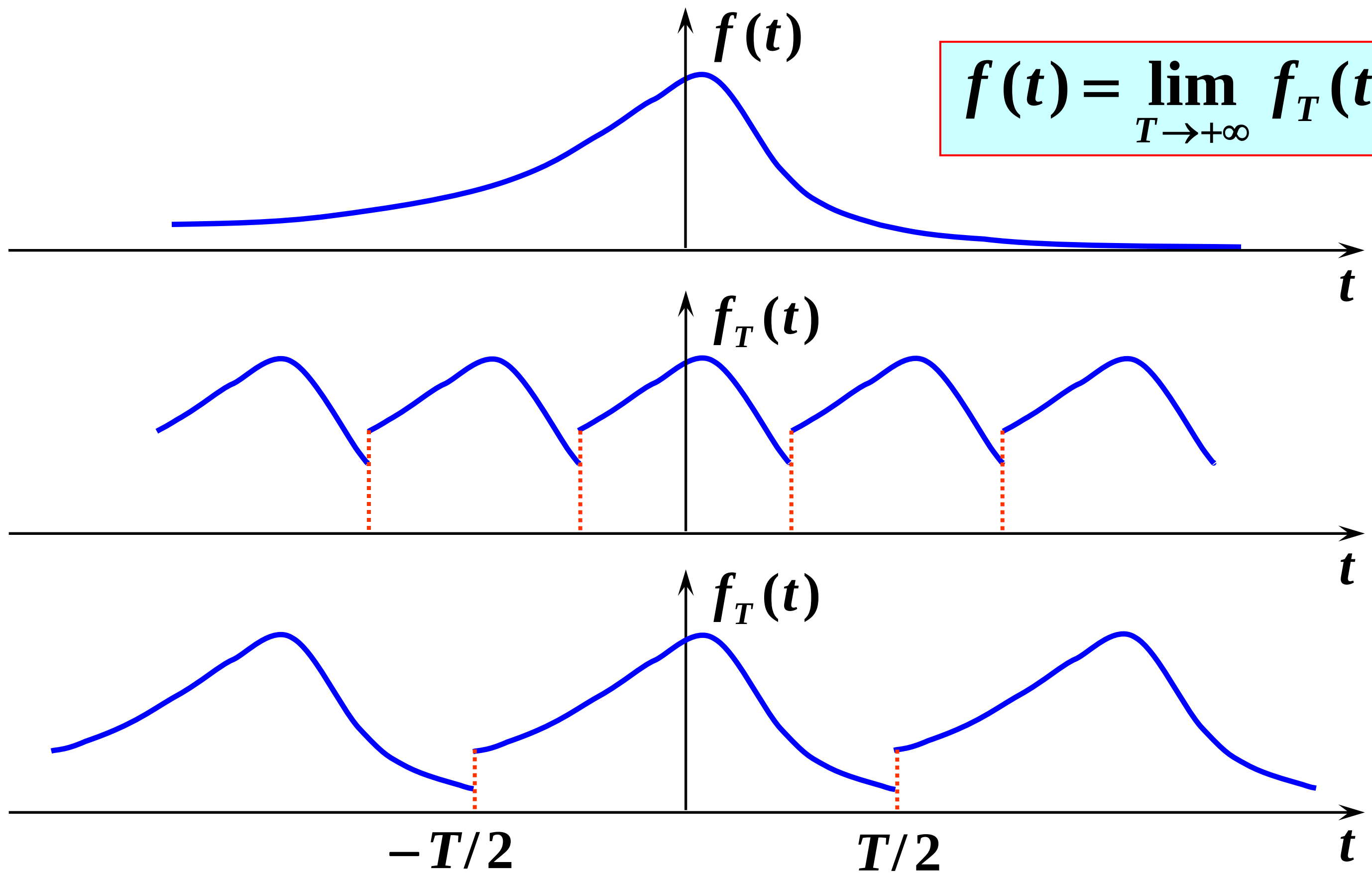
$$\boxed{f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,\mathrm{e}^{jn\omega_0 t},}$$

其中，$c_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

二、非周期函数的傅立叶变换

(1) 非周期函数可以看成是一个周期为无穷大的“周期函数”。

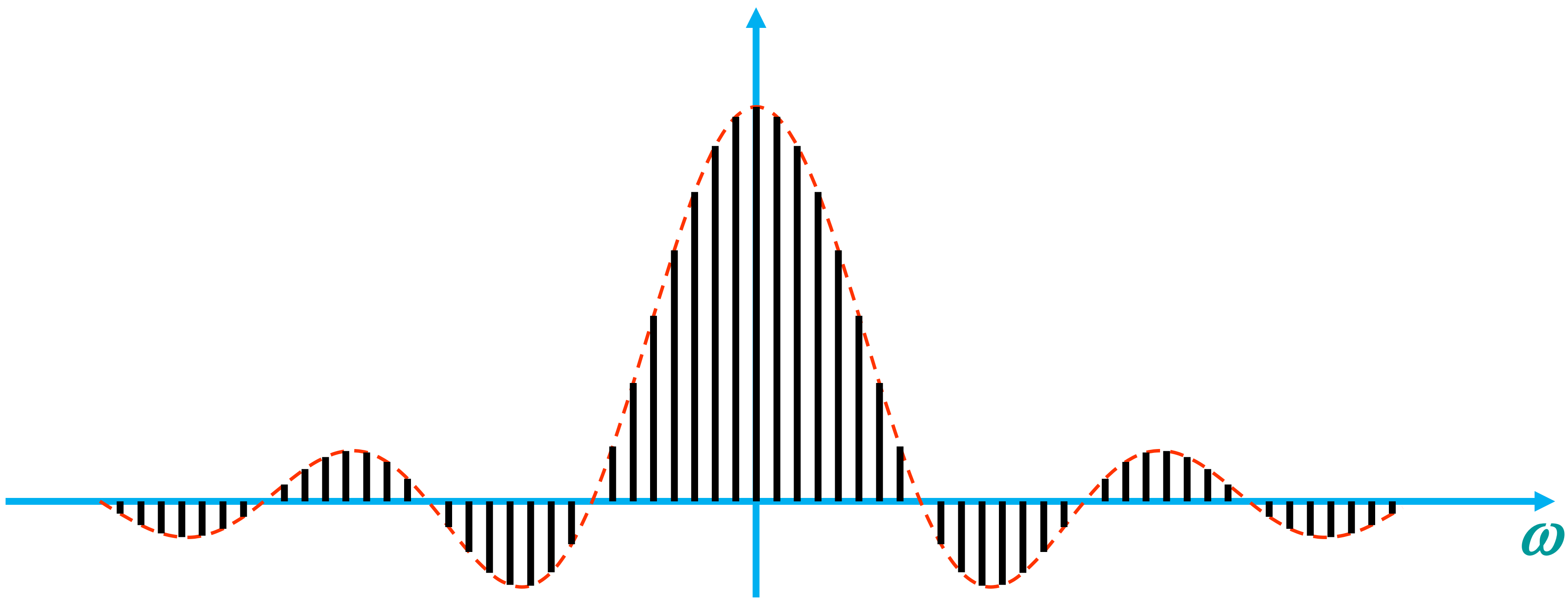
$$f(t) = \lim_{T \to +\infty} f_T(t)$$



如果再将周期增加一倍，令*T*=16，可计算出

$$c_{\mathrm{p}} = \frac{2}{T} sinc(\omega_p), \qquad p = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

$$\omega_{\mathrm{p}} = p\omega = p\frac{2\pi}{T},$$ 再将 c_{p} 竖线标在频率图上



二、非周期函数的傅立叶变换

简单分析

(2) 当 $T \to +\infty$ 时，频率特性发生了什么变化?

分析 Fourier 级数表明周期函数仅包含离散的频率成份，其频谱是以 $\omega_0 = 2\pi/T$ 为间隔离散取值的。

当 T 越来越大时，取值间隔越来越小；

当 T 趋于无穷时，取值间隔趋向于零，

即频谱将连续取值。

因此，一个非周期函数将包含所有的频率成份。

结论：离散频谱变成联系频谱

二、非周期函数的傅立叶变换

简单分析

分析

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty} f_T(t)=\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$$

将间隔 ω_0 记为 $\Delta\omega$，节点 $n\omega_0$ 记为 ω_n，

并由 $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$ 得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left[\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(t)\mathrm{e}^{-j\omega_n t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{j\omega_n t}}_{g_T(\omega)}\Delta\omega \qquad \text{(C)}$$

二、非周期函数的傅立叶变换

简单分析

(3) 当 $T\to+\infty$ 时，级数求和发生了什么变化?

分析 记 $g_T(\omega)=[\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t]\mathrm{e}^{j\omega t}$，则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_T(\omega_n)\Delta\omega$$

按照积分定义，在一定条件下，(C) 式可写为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

结论 级数求和变成函数积分。

三、 Fourier 积分公式和定理

Fourier积分定理6.1.1　定理是积分公式存在的充分条件

设函数 $f(t)$满足

(1) 在(-∞,+∞)上的任一有限区间内满足 Dirichlet 条件；

(2) 在 (-∞,+∞) 上绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty$.

则 $f(t)$的傅里叶积分公式收敛，且

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad \text{(D)}$$

$$=\begin{cases} f(t) & t\text{是}f(t)\text{的连续点} \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & t\text{是}f(t)\text{的第一类间断点} \end{cases}$$

定义　称 (D) 式为 Fourier 积分公式。

三、 Fourier 积分公式和定理

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]e^{j\omega t}d\omega$$

傅氏积分指数形式

$$=\begin{cases} \boldsymbol{f(t)} & t\text{是}f(t)\text{的连续点} \\ \dfrac{\boldsymbol{f(t+0)+f(t-0)}}{\boldsymbol{2}} & t\text{是}f(t)\text{的第一类间断点} \end{cases}$$

它的广义积分是柯西主值意义下的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)dt$$

三、 Fourier 积分公式和定理

傅氏积分三角形式

依据欧拉公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\,d\tau\right]d\omega$$

=0

ω的奇函数

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau+i\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau}}\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega$$

三、 Fourier 积分公式和定理

傅氏积分三角形式

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega$$

傅氏级数形式的积分展开式

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}[a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t]d\omega$$

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

四、Fourier 变换

1. 定义（p131 定义6.2.1）

(1) 设$f(t)$和$F(\omega)$都是在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积函数，称

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

为$f(t)$的**Fourier变换(傅氏正变换)**，记作 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

(2) Fourier变换(傅氏逆变换） 记作 $f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

称$f(t)$为$F(\omega)$的傅氏逆变换

其中，$F(\omega)$称为**像函数**，$f(t)$称为**像原函数**.

$f(t)$与$F(\omega)$称为**傅氏变换对**，记为 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$.

四、 Fourier 变换

Fourier 变换的物理意义

同 Fourier 级数，Fourier 变换同样刻画了一个非周期函数的频谱特性，不同的是，非周期函数的频谱是连续取值的。

$F(\omega)$反映的是 $f(t)$中各频率分量的分布密度，它一般为复值函数，故可表示为

$$F(\omega)=|F(\omega)|\,\mathrm{e}^{j\arg F(\omega)}.$$

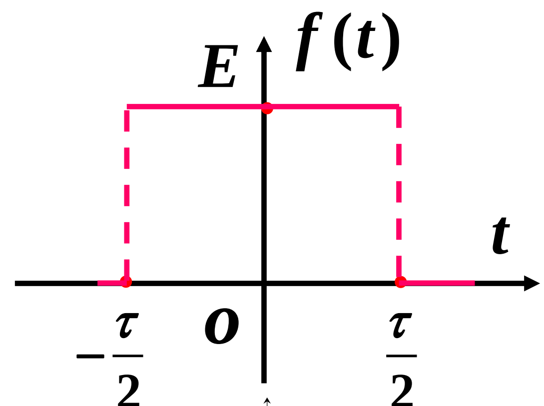
定义

称$F(\omega)$为**频谱密度函数**(简称为**连续频谱**或者**频谱**)；

称$|F(\omega)|$为**振幅谱**；称 $\arg F(\omega)$ 为**相位谱**。

例2 **(p129 例6.1.1)**

求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases} E, & |t|<\dfrac{\tau}{2} \\ 0, & |t|>\dfrac{\tau}{2} \end{cases}$ 的 Fourier 变换及 Fourier 积分表达式。

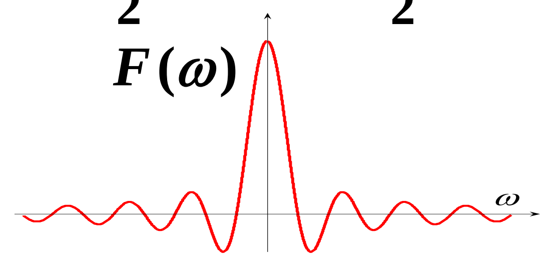


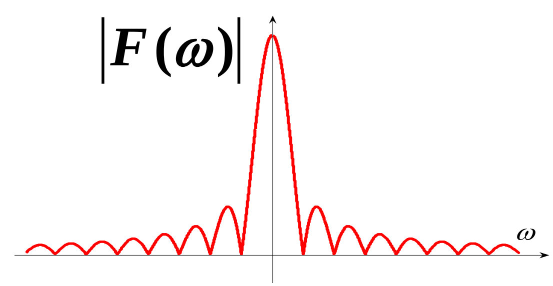
解 (1) $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} Ee^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}$$

$$=E\tau\frac{\sin\dfrac{\omega\tau}{2}}{\dfrac{\omega\tau}{2}}.$$





(2) 求 Fourier 逆变换，即可得到的 Fourier 积分表达式。

因为$f(t)$满足积分存在定理，则

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{2E}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{E}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega+\underbrace{\frac{jE}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega}_{=0}$$

$$=\frac{E}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{\tau}{2}\omega}{\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}E, & |t|<\frac{\tau}{2},\\ E/2, & |t|=\frac{\tau}{2},\\ 0, & |t|>\frac{\tau}{2}.\end{cases}$$

注 在上式中令 $t=0$， 可得重要积分公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x=\pi,\ (a>0).$$

一般地，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & a>0,\\ 0, & a=0,\\ -\pi, & a<0.\end{cases}$$

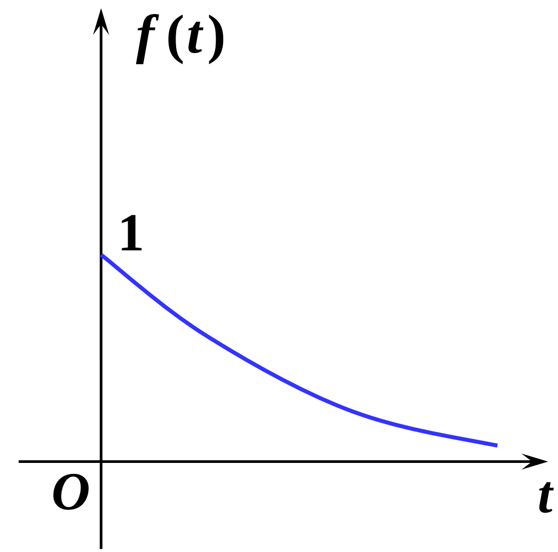
特别地，有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

例3 (p131 例6.1.2)

求单边衰减指数函数 $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t\ge 0, \\ 0, & t<0, \end{cases}$ $(\alpha>0)$ 的 Fourier 变换和积分表达式

解： 1) 根据Fourier变换的定义



$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}dt$$

$$=\frac{1}{-(\alpha+j\omega)}e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{\alpha-j\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

2) 求傅里叶逆变换，得到Fourier积分表达式

因为*f* (*t*)满足积分存在定理，则

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\,[F(\omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2} e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{a\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega$$

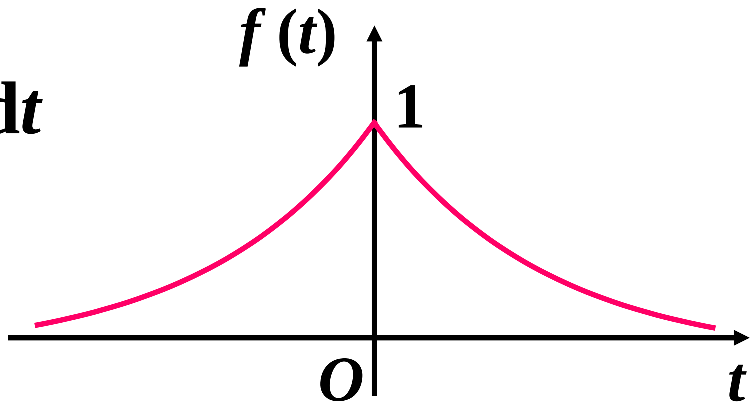
例4 求 $f(t)=e^{-\beta|t|}\ (\beta>0)$ 的Fourier变换，

解：根据Fourier变换的定义

$$\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta|t|}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{\beta t}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}e^{-\beta t}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}.$$



例5 (p133 例6.2.3)

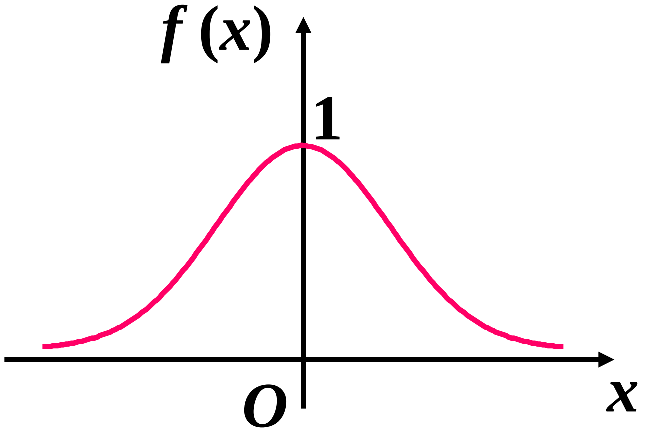
设 $f(x)=e^{-b^2x^2}\,(b>0)$，求 $\mathcal{F}[f(x)]$

解：根据定义，有

$$\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-b^2x^2-i\omega x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-b^2\left(x^2+\frac{i\omega x}{b^2}\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-b^2\left(x^2+2x\frac{i\omega}{2b^2}+\frac{i^2\omega^2}{4b^4}+\frac{\omega^2}{4b^4}\right)}\mathrm{d}x$$

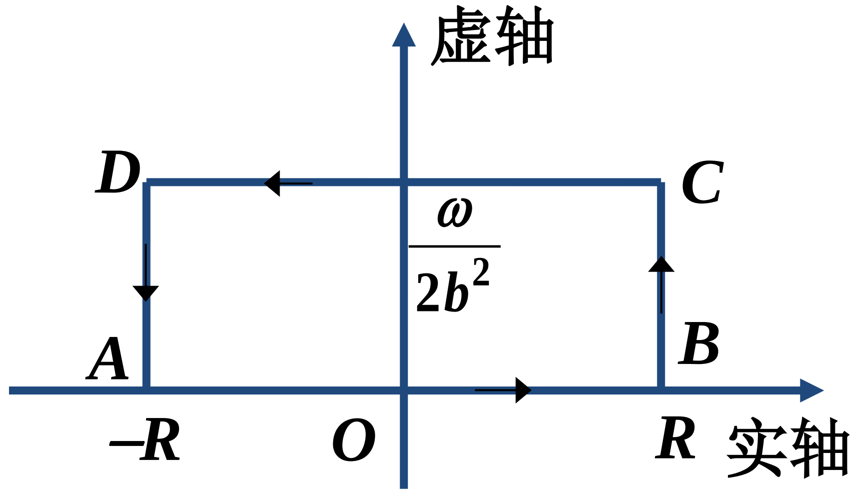
$$=e^{-\frac{\omega^2}{4b^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-b^2\left(x+i\frac{\omega}{2b^2}\right)^2}\mathrm{d}x.$$



Now loading

下面计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2\left(x+i\frac{\omega}{2b^2}\right)^2}\mathrm{d}x = \lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} e^{-b^2\left(x+i\frac{\omega}{2b^2}\right)^2}\mathrm{d}x.$

因为 $e^{-b^2z^2}$ 在全平面处处解析, 所以取图中的路径$ABCDA$时，根据



Cauchy积分定理:

$$\int_{-R}^{+R} e^{-b^2x^2}\mathrm{d}x + \int_{\overline{BC}} e^{-b^2z^2}\mathrm{d}z$$

$$-\int_{-R}^{+R} e^{-b^2\left(x+i\frac{\omega}{2b^2}\right)^2}\mathrm{d}x + \int_{\overline{DA}} e^{-b^2z^2}\mathrm{d}z = 0.$$

当$R\to+\infty$时，

$$\left|\int_{\overline{BC}} e^{-b^2z^2}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\frac{\omega}{2b^2}} e^{-b^2(R+iy)^2}\mathrm{d}y\right|$$

$$= \left|\int_0^{\frac{\omega}{2b^2}} e^{-b^2(R^2+2Riy-y^2)}\mathrm{d}y\right|$$

$$\le e^{-b^2R^2}\int_0^{\frac{\omega}{2b^2}} e^{b^2y^2}\mathrm{d}y \to 0.$$

同理可证

$$\int_{\overline{DA}} e^{-b^2z^2}\mathrm{d}z \to 0\ (R\to+\infty).$$

因此, 当$R\to+\infty$时,

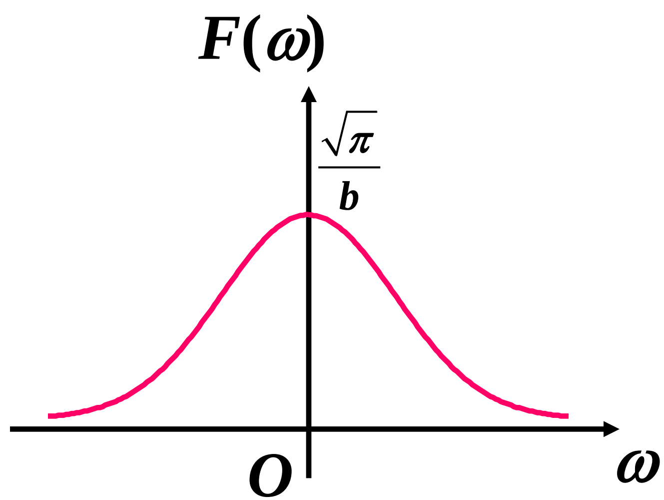
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} e^{-b^2\left(x+i\frac{\omega}{2b^2}\right)^2}\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} e^{-b^2x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{\pi}}{b},$$

概率积分
（泊松积分）

于是

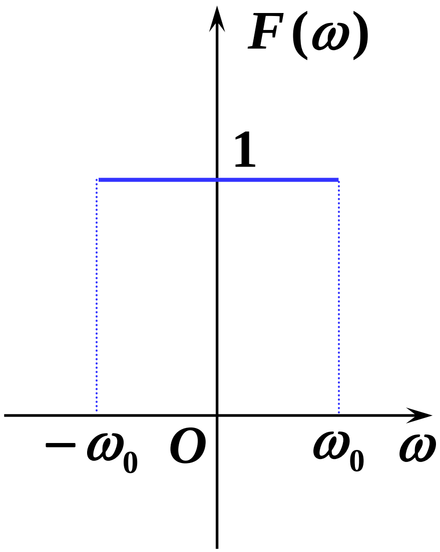
$$\mathcal{F}[f(x)]=\frac{\sqrt{\pi}}{b}e^{-\frac{\omega^2}{4b^2}}$$



例6

已知$f(t)$的频谱为 $F(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_0\\ 0, & |\omega|>\omega_0\end{cases}$ $(\omega_0>0)$，求 $f(t)$.

解



$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi jt}\mathrm{e}^{j\omega t}\Big|_{-\omega_0}^{\omega_0}=\frac{1}{\pi t}\cdot\frac{\mathrm{e}^{j\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$=\frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}=\frac{\omega_0}{\pi}\left(\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}\right)=\frac{\omega_0}{\pi}S_a(\omega_0 t).$$

例7

已知$f(t)$的频谱为 $F(\omega)=\dfrac{2}{j\omega}$，求 $f(t)$.

解 $$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{j\omega}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

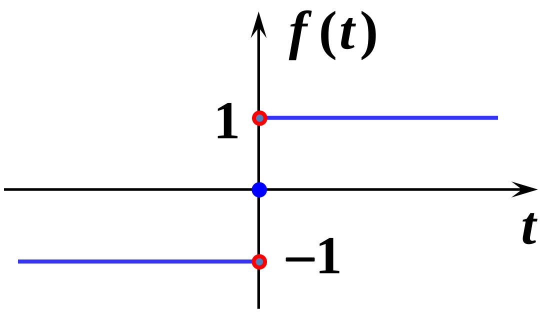
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{j\sin\omega t}{j\omega}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{j\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega}=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{aix}\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\mathrm{sgn}\,t\longleftrightarrow\frac{2}{j\omega}.}$$



五 Fourier 其性质

2. Fourier变换的性质

以下假定所讨论的函数满足Fourier积分定理的条件.

(1) 线性性质 6.5.1

设α、β是常数,$F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$, $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$, 则

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$$

$$=\alpha\mathscr{F}[f_1(t)]+\beta\mathscr{F}[f_2(t)].$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)]+\beta\mathscr{F}^{-1}[F_2(\omega)].$$

五 Fourier 其性质

(2) 坐标缩放性质 6.5.4

设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则

$$\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)\quad(\text{其中 }a\neq 0\text{ 为常数}).$$

证明　由Fourier变换的定义，

$$\mathcal{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

令 $x=at$，则 $\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}x$．于是当$a>0$时，

$$\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\frac{\omega}{a}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right);$$

五 Fourier 其性质

(2) 坐标缩放性质（相似性质）

当$a<0$时,

$$\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty}f(x)e^{-i\frac{\omega}{a}x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\frac{\omega}{a}x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

综上所证, 即得$\mathcal{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right).$

(3) 翻转性质　设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$, 则

$$\mathcal{F}[f(-t)]=F(-\omega).$$

(4) 时移性质 6.5.3

设 $F(\omega)=\mathcal{F}\,[f(t)]$, 则

$\mathcal{F}\,[f(t\pm t_0)]=e^{\pm i\omega t_0}F(\omega)$ (其中t_0为常数).

证明 由Fourier变换的定义,

$$\mathcal{F}\,[f(t\pm t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t\pm t_0)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

令 $x=t\pm t_0$，代入上式得

$$\mathcal{F}\,[f(t\pm t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega(x\mp t_0)}\mathrm{d}x$$

$$=e^{\pm i\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x=e^{\pm i\omega t_0}F(\omega).$$

利用时移性质 和 缩放性质（相似性质），易见

$$\mathcal{F}\,[f(at-b)]=\frac{1}{|a|}e^{-i\frac{b}{a}\omega}F\left(\frac{\omega}{a}\right),$$

其中a, b为常数，并且$a\neq 0$. 事实上，

$$\mathcal{F}\,[f(at-b)]=\mathcal{F}\left[f\left(a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right)\right]$$

$$=e^{-i\frac{b}{a}\omega}\mathcal{F}\,[f(at)]=\frac{1}{|a|}e^{-i\frac{b}{a}\omega}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

五 Fourier 其性质

例9 计算 $\mathcal{F}\left[e^{-(t-t_0)^2}\right]$.

解　由例5 知, $\mathcal{F}\left[e^{-t^2}\right]=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

于是根据时移性质得 $\mathcal{F}\left[e^{-(t-t_0)^2}\right]=\sqrt{\pi}e^{-i\omega t_0-\frac{\omega^2}{4}}$.

$$f(x)=e^{-b^2x^2}(b>0),\qquad \mathcal{F}[f(x)]=\frac{\sqrt{\pi}}{b}e^{-\frac{\omega^2}{4b^2}}$$

五 Fourier 其性质

(5) 频移性质　　设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$, 则

$$\mathcal{F}\left[f(t)e^{\pm i\omega_0 t}\right]=F(\omega\mp\omega_0)(\text{其中}\omega_0\text{为常数}).$$

证明 由Fourier变换的定义,

$$\mathcal{F}\left[f(t)e^{\pm i\omega_0 t}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{\pm i\omega_0 t}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i(\omega\mp\omega_0)t}\mathrm{d}t=F(\omega\mp\omega_0).$$

例10 计算 $\mathcal{F}\left[e^{-t^2}\cos\omega_0 t\right]$和 $\mathcal{F}\left[e^{-t^2}\sin\omega_0 t\right]$.

解 根据 Euler公式

$$\mathcal{F}\left[e^{-t^2}\right]=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

$$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}\right),\quad \sin\omega_0 t=\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}\right)$$

于是由线性性质、频移性质 以及 例5 知,

$$\mathcal{F}\left[e^{-t^2}\cos\omega_0 t\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4}}+e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{4}}\right),$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-t^2}\sin\omega_0 t\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{2i}\left(e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4}}-e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{4}}\right).$$

(6) 对称性质 6.5.2

设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则 $\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega).$

证明：由Fourier逆变换有 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega.$

于是 $f(-t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega.$ 将t与ω互换，则

$$f(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t,$$

所以$\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega).$

特别地, 若$f(t)$是偶函数, 则 $\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(\omega).$

§7.2 单位脉冲函数

一、为什么要引入单位冲激函数

二、单位冲激函数的概念及性质

三、单位冲激函数的 Fourier 变换

四、周期函数的 Fourier 变换

一、为什么要引入单位冲激函数

(1) 在数学、物理学以及工程技术中，一些常用的重要函数，如常数函数、线性函数、符号函数以及单位阶跃函数等等，都不能进行 Fourier 变换。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$$

(2) 周期函数的Fourier级数与非周期函数的Fourier变换都是用来对信号进行频谱分析的，它们之间能否统一起来。

(3) 在工程实际问题中，有许多瞬时物理量不能用通常的函数形式来描述，如冲击力、脉冲电压、质点的质量等等。

一、为什么要引入单位冲激函数

引例

- 长度为a，质量为m的均匀细杆放在x轴的$[0, a]$区间上，则它的线密度函数为

$$P_a(x)=\begin{cases} m/a, & 0\le x\le a, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

- 质量为m的质点放置在坐标原点，则可认为它相当于细杆取$a\to 0$的结果。相应地，质点的密度函数为

$$P(x)=\lim_{a\to 0}P_a(x)=\begin{cases} \infty, & x=0, \\ 0, & x\neq 0. \end{cases}$$

- **显然，该密度函数并没有反映出质点的任何质量信息，**密度函数在区间内的积分应该是在此区间上分布的总质量.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}P(x)\,\mathrm{d}\,x=m.$$

一、为什么要引入单位冲激函数

引例 在原来电流为零的电路中，某一瞬时(设为t=0)进入一单位电量的脉冲，现在要确定电路上的电流$i(t)$. 以$q(t)$表示上述电路中的电荷函数，则

$$q(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0;\\ 1, & t=0.\end{cases}$$

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t}$$

当$t\neq 0$时，$i(t)=0$，由于$q(t)$是不连续的，从而在普通导数意义下，$q(t)$在这一点是不能求导数的.

如果我们形式地计算这个导数t=0，则

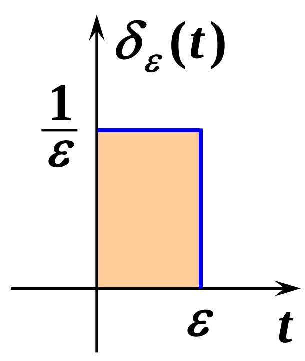
$$i(0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(0+\Delta t)-q(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)=\infty$$

针对这类问题，20世纪30年代, 英国物理学家Dirac引进了满足以上性质的“函数”，称为“δ函数”，并且要求对任何连续函数$f(x)$, 都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) \mathrm{d}x = f(0).$$

有了这种函数, 对于许多集中于一点或一瞬时的量, 例如点电荷、点热源、集中于一点的质量及脉冲技术中的非常窄的脉冲等, 就能够象处理连续分布的量那样, 以统一的方式加以解决.

给定函数序列 $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & 0 \le t \le \varepsilon, \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$



二、单位冲激函数的概念及性质

1. 单位冲激函数的概念（定义6.3.1）

定义　单位冲激函数 $\delta(t)$ 满足：　狄拉克(Dirac)定义

（1）$\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}$；　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\varepsilon}(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}dt=1$$

（在极限与积分可交换意义下）

- 单位冲激函数 $\delta(t)$ 又称为 **Dirac 函数**或者 δ **函数**。

单位冲激函数是个奇异函数，它是对强度极大、作用时间极短一种物理量的理想化模型。

二、单位冲激函数的概念及性质

1. 单位冲激函数的概念

注： 单位冲激函数 $\delta(t)$ 并不是经典意义下的函数，而是一个**广义函数**（或者**奇异函数**），它不能用通常意义下的“值的对应关系”来理解和使用，而总是通过它的性质来使用它。

二、单位冲激函数的概念及性质

2. 单位冲激函数的性质

性质　1) 筛选性质（取样性 6.3.1)

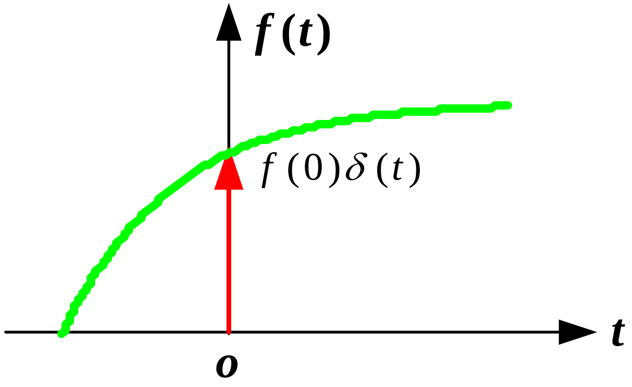
设函数 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数，

且在 $t=0$处连续，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0).$$

一般地，若 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 点连续，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=f(t_0).$$



二、单位冲激函数的概念及性质

2. 单位冲激函数的性质

性质 2) 尺度变换（比例性6.3.2）

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\boldsymbol{\delta'(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a}\delta'(t)}$$

$$\delta^{(n)}(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a^n}\delta^{(n)}(t)$$

推论:

(1) $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$ $\quad\delta(at-t_0)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t-\dfrac{t_0}{a})$

(2) 当$a=-1$时 $\quad\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\delta^{(n)}(t)$

所以，$\delta(-t)=\delta(t)$ 为偶函数，

$\delta'(-t)=-\delta'(t)$为奇函数

二、单位冲激函数的概念及性质

2. 单位冲激函数的性质

3) 奇偶性质

δ函数为偶函数，即 $\delta(t)=\delta(-t)$.

证：　对任意$f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\delta(x)dx = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(-t)dt$$

更一般地　$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x = f(x_0)$.

二、单位冲激函数的概念及性质

4) 冲激偶（微分性质）

δ函数导数定义（定义6.3.5）：

若对任意紧支集函数 $f(t)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\delta(t)dt$$

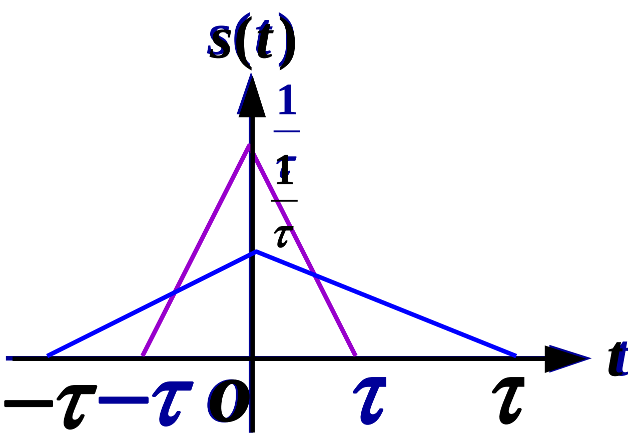
称 $\delta'(t)$为导数，也称 $\delta'(t)$为单位冲激偶

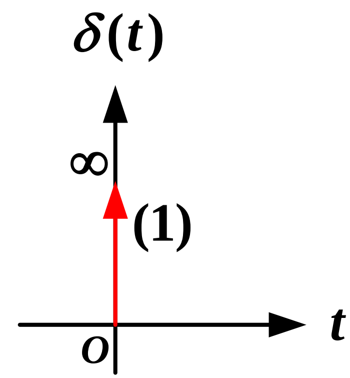
（i） $\delta'(t)$是奇函数

$$\delta'(-t) = -\delta'(t), \qquad \delta'(t_0 - t) = -\delta'(t - t_0)$$

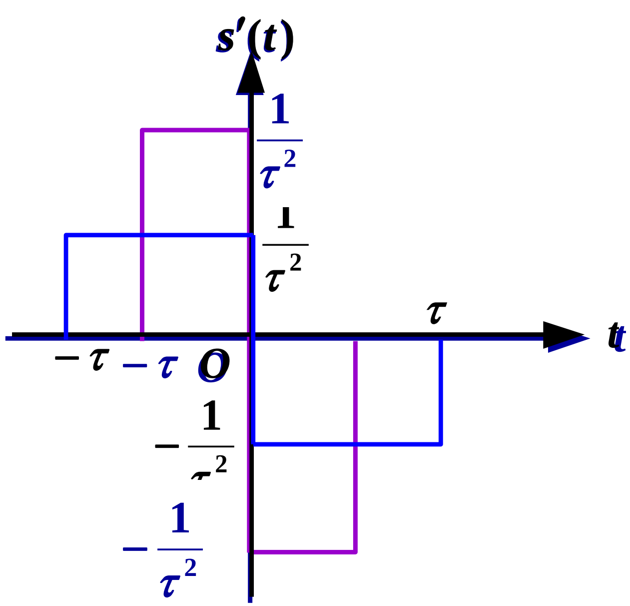
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \int_{-\infty}^{t} \delta'(t)\,\mathrm{d}t = \delta(t)$$

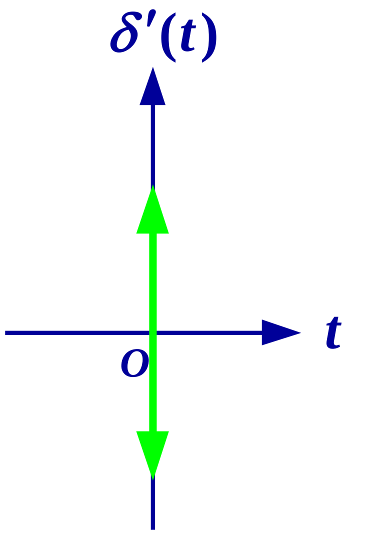
冲激偶





$$\tau \to 0$$





二、单位冲激函数的概念及性质

(4) 冲激偶（微分性质）

（ii） $\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)f(t)\mathrm{d}t=-f'(0)$ $\delta(t)$抽样性质

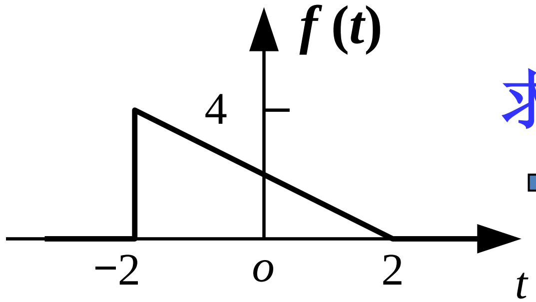
$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=-f'(t_0)$ $\delta(t)$平移抽样

（iii） $\delta(t)$是无穷可微函数, 其导函数 $\delta^{(n)}(t)$ 也是广义函数，使得对任意无穷可微函数 $f(x)$, 有

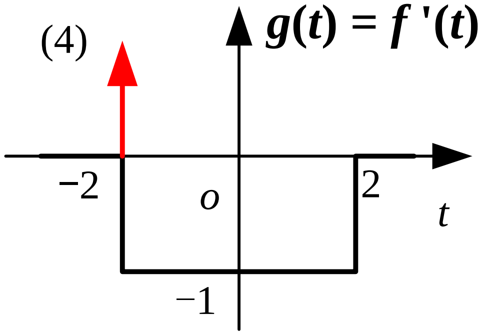
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)\mathrm{d}t=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f^{(n)}(t)\mathrm{d}t=(-1)^n f^{(n)}(0).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=(-1)^n f^{(n)}(t_0)$$ 平移抽样

举例

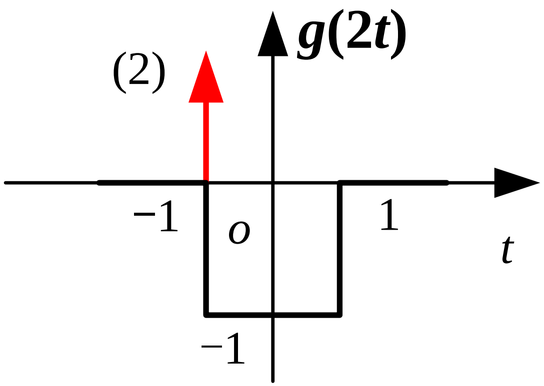


求导，得$g(t)$



$$f(t)=\begin{cases}4, & t=-2\\ -t+2, & -2<t\le 2\\ 0, & |t|>2\end{cases}$$

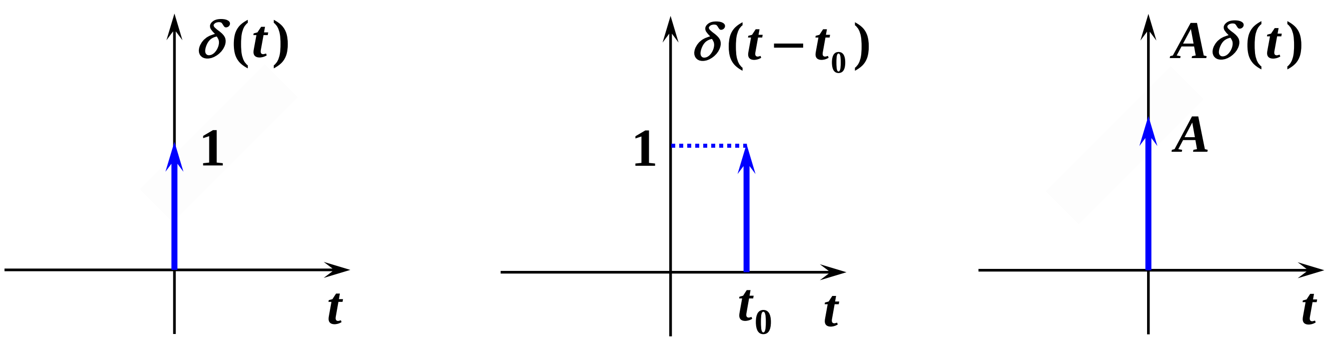
压缩，得$g(2t)$



二、单位冲激函数的概念及性质

3. 单位冲激函数的图形表示

- δ函数的图形表示方式非常特别，通常采用一个从原点出发长度为1的有向线段来表示，其中有向线段的长度代表δ函数的积分值，称为**冲激强度**。
- 同样有，函数$\mathbf{A}\delta(t)$ 的冲激强度为A。

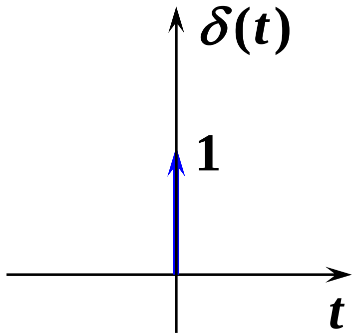


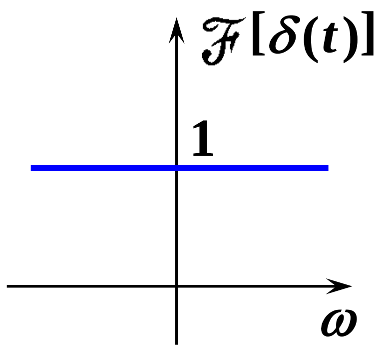
三、单位冲激函数的 Fourier 变换

- 利用筛选性质，可得出 δ 函数的 Fourier 变换：

$$\mathscr{F}[\,\delta(t)\,]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t=e^{-j\omega t}\Big|_{t=0}=1.$$

即 $\delta(t)$与 1 构成Fourier变换对 $\delta(t)\longleftrightarrow 1.$





- 由此可见，单位冲激函数包含所有频率成份，且它们具有相等的幅度，称此为**均匀频谱**或**白色频谱**。

$$F^{-1}[\delta(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}.$$

$$F\,[1]=2\pi\delta(\omega).$$

三、单位冲激函数的 Fourier 变换

- 按照 Fourier 逆变换公式有

$$\mathcal{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{j\omega t}d\omega=\delta(t).$$

- 重要公式 $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}d\omega=2\pi\delta(t).}$

注　在δ函数的 Fourier 变换中，其广义积分是根据δ函数的性质直接给出的，而不是通过通常的积分方式得出来的，称这种方式的 Fourier 变换是一种**广义的Fourier变换**。

例 分别求函数 $f_1(t)=1$ 与 $f_2(t)=t$ 的Fourier变换。

解 (1) $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot \mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$=2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega).$$

(2) 将等式 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)$ 的两边对ω求导，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(-jt)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta'(\omega),$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=2\pi j\delta'(\omega),$$

即得 $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]=2\pi j\delta'(\omega).$

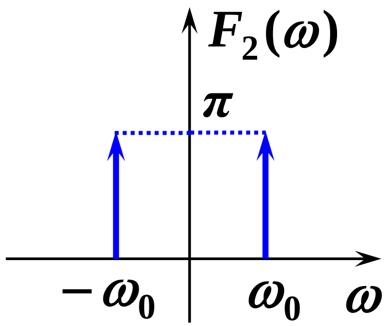
$$F\left[t^n f(t)\right]=i^n F^{(n)}(\omega).$$ 傅氏变换微分变换

例 分别求函数 $f_2(t)=\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$ 与 $f_2(t)=\cos\omega_0 t$ 的 Fourier 变换。

解 (1) $F_1(\omega)=\mathscr{F}[\,f_1(t)\;]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j\omega_0 t}\cdot\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j(\omega_0-\omega)t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega_0-\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

(2) 由 $\cos\omega_0 t=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_0 t})$ ，



$$\mathcal{F}[cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{i\omega_0 t}\right]+\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{-i\omega_0 t}\right]$$

$$=\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right],$$

(1) δ函数Fourier变换的时移和频移性质

$$\mathcal{F}[\delta(t \pm t_0)] = e^{\pm i\omega t_0}\mathcal{F}[\delta(t)],$$

$$\mathcal{F}[1 \cdot e^{\pm i\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega \mp \omega_0).$$

证明：根据Fourier变换的定义以及δ函数的性质，

$$\mathcal{F}[\delta(t \pm t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t \pm t_0) e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= e^{-i\omega(\mp t_0)} = e^{\pm i\omega t_0} = e^{\pm i\omega t_0}\mathcal{F}[\delta(t)],$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega \pm \omega_0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega \pm \omega_0) e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}e^{\mp i\omega_0 t},$$

即$\mathcal{F}[1 \cdot e^{\pm i\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega \mp \omega_0).$

本章小结

傅氏积分定理

傅氏积分变换

傅氏变换性质

δ函数

δ函数性质

δ函数傅氏变换

本章小结

1. 傅氏积分定理

设函数 $f(t)$ 满足

(1) 在(-∞,+∞)上的任一有限区间内满足 Dirichlet 条件；

(2) 在 (-∞,+∞) 上绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty$.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\begin{cases} f(t) & t\text{是}f(t)\text{的连续点} \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & t\text{是}f(t)\text{的第一类间断点} \end{cases}$$

本章小结

2. 傅氏积分变换

傅氏变换 $$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \quad =\mathcal{F}[f(t)]$$

傅氏逆变换 $$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

3. 傅氏变换性质

(1) 线性性质

设α, β是常数，$F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$, $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$, 则

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)]+\beta\mathscr{F}^{-1}[F_2(\omega)].$$

(2) 坐标缩放性质

设 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，则

$$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$ (其中$a\neq 0$为常数).

3. 傅氏变换性质

翻转性质　　设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则

$$\mathcal{F}[f(-t)]=F(-\omega).$$

(3) 位移性质（时移和频移）

设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，则

$$\mathcal{F}[f(t\pm t_0)]=e^{\pm i\omega t_0}F(\omega)\ (\text{其中}t_0\text{为常数}).$$

$$\mathcal{F}\left[f(t)e^{\pm i\omega_0 t}\right]=F(\omega\mp\omega_0)(\text{其中}\omega_0\text{为常数}).$$

本章小结

4. δ函数

狄拉克(Dirac)定义

(1) 当 $t \neq 0$ 时, $\delta(t)=0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

性质 1) **筛选性质 (取样性)**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(0).$$

性质 2) 尺度变换（比例性）

设常数 $a \neq 0$，

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$\delta(-t) = \delta(t)$ 为偶函数，$\delta'(-t) = -\delta'(t)$为奇函数

4. δ函数

见例6.3.5,p141

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)\mathrm{d}t=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f^{(n)}(t)\mathrm{d}t=(-1)^n f^{(n)}(0).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=(-1)^n f^{(n)}(t_0)$$

$$\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\delta^{(n)}(t)$$

见性质6.3.3,p141

$$g(t)\delta(t-t_0)=g(t_0)\delta(t-t_0)$$

见性质6.3.4,p142

- 利用筛选性质，δ函数的 Fourier 变换：

$$\mathscr{F}[\,\delta(t)\,]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$F^{-1}[\delta(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}.$$

课堂练习

1. 计算下列积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-3)\left(t^2+1\right)dt$$

δ函数筛选性质

练习 测试

3. 求下式的傅氏变换

1) $f(t) = costsint$ 定义,缩放

2) $f(t) = \frac{1}{2}[\delta(t+t_0) + \delta(t-t_0) + \delta\left(t+\frac{t_0}{2}\right) + \delta\left(t-\frac{t_0}{2}\right)]$

第一步. 定义

第二步. δ函数筛选和平移性质

3) $f(t) = \begin{cases} e^{|t|}, & |t| < 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases}$ 定义