

# 复变函数与积分变换

(2024-2025学年第一学期)

**邱丽荣**

**办公室：北院 6号教学楼125**

**E-mail: [qiulirong1@bit.edu.cn](mailto:qiulirong1@bit.edu.cn)**

**电话：18810135629**

## 第二章 解析函数

- 本章在介绍复变函数、复变函数导数概念和求导法则的基础上，着重讲解解析函数的概念及判别方法，介绍了常用的初等函数，并对多值函数作了简单介绍。

### 主要内容：

- 1 复变函数
- 2 复变函数的导数及解析函数的概念。
- 3 复变函数可导与解析的充要条件，柯西-黎曼方程及解析函数的性质。
- 4 初等函数。

## 第二章 作业

书P44—48

1 (3) 、 2、 6、 11 (3) 、 12(4)、 16、 19、  
20(4)、 23、 25(3)、 32(4)、 35.

## §2-1 复变函数

- 一、定义与几何意义
- 二、极限
- 三、连续性

# 一、复变函数的定义

## 1. 复变函数—与实变函数定义相类似

- 定义: 设 $G$ 是复数 $z = x + iy$ 的平面点集, 如果存在一个法则 $f$ , 按照这个法则, 对任何 $z = x + iy \in G$ , 有一个或几个复数 $w = u + iv$ 与之对应, 那末称复变量 $w$ 是复变量 $z$ 的函数 (简称复变函数), 记作 $w = f(z)$

✓ 例如,  $f(z) = z + 2 - i$

✓  $f(z) = z^2$

✓  $f(z) = 3$

$$f(n) = f_n = (1+i)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$f(z) = z^n$$

$$f(z) = \exp(z)$$

$$f(z) = \ln(z)$$

# 一、复变函数的定义

## 2. 单值函数与多值函数

如果 $z$ 的一个值对应着一个 $w$ 的值，那末我们称函数 $f(z)$ 是**单值函数**；

如果 $z$ 的一个值对应着两个或两个以上 $w$ 的值，那末我们称函数 $f(z)$ 是**多值函数**

若 $z \rightarrow$  一个 $w$ 值，称 $f(z)$ 是单值函数；

$z \rightarrow$  多个 $w$ 值，称 $f(z)$ 是多值函数。

例如， $f(z) = |z|$ ， $w = \bar{z}$ ， $w = z^2$ 都是 $z$ 的单值函数  
 $w = \sqrt[n]{z} (z \neq 0, n \geq 2)$ ， $w = \operatorname{Arg} z (z \neq 0)$ 均是 $z$ 的多值函数。

今后，无特别声明，所讨论的函数均为**单值函数**。

# 一、复变函数的定义

## 3.定义集合和函数值集合:

- 集合 $G$ 称为函数 $w = f(z)$ 的**定义集合（定义域）**；
- 对应 $G$ 中的所有 $z$ 的一切 $w$ 值构成的集合 $G^*$ ，成为**函数值集合**，即 $G^* = f(G) = \{w | w = f(z), z \in G\}$ 为**函数的值域**， $z$ 称为**自变量**， $w$ 为**因变量(函数)**

# 一、复变函数的定义

## 4. 复变函数与自变量之间的关系(复变函数表示)

复变函数  $w$  与自变量  $z$  之间的关系  $w = f(z)$

相当于两个关系式：

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

它们确定了自变量为  $x$  和  $y$  的两个二元实变函数.

$$\because z = x + iy \leftrightarrow (x, y); \quad w = u + iv \leftrightarrow (u, v)$$

$$\therefore w = f(z) = f(x + iy)$$

$$= u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\text{故 } u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$$

$$w = f(z) = u + iv \leftrightarrow u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$$



# 一、复变函数的定义

## 4. 复变函数与自变量之间的关系(复变函数表示)

例如, 函数  $w = z^2$ , 令  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ ,

则  $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ ,

于是函数  $w = z^2$  对应于两个二元实变函数:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

如果,  $f(z) = u + iv$ , 且  $v = 0$ , 则  $f$  是一个单复变量的实值函数

例如,  $f(z) = |z|$ , 则

$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = 0$$

# 一、复变函数的定义

## 4. 复变函数与自变量之间的关系(复变函数表示)

可以将直角坐标形式转换为用单复变量 $z$ 来表示。

■ 例如 $f(x + iy) = x^2 + iy^2$ ,可写为

$$f(z) = [\operatorname{Re}(z)]^2 + i[\operatorname{Im}(z)]^2$$

■ 例:  $w = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 + y^2 + 4xyi$

✓ 利用 $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ,  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

✓  $x^2 + y^2 + 4xyi$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 + 4 \frac{z + \bar{z}}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} i \\ &= z^2 + z \cdot \bar{z} - \bar{z}^2 \end{aligned}$$

# 一、复变函数的定义

例

$$\text{若已知 } f(z) = x \left( 1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) + iy \left( 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

将  $f(z)$  表示成  $z$  的函数.

$$\text{设 } z = x + iy, \text{ 则 } x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

# 一、复变函数的定义

## 4. 复变函数与自变量之间的关系(复变函数表示)

- 如果用极坐标 $r$ 和 $\theta$ 代替 $x$ 和 $y$ , 则有

$$u = u(r, \theta), v = v(r, \theta)$$

或写为 $f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$

- 例:  $f(z) = z^2$ , 变为

$$f(re^{i\theta}) = r^2 e^{i2\theta} = r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta$$

因此,

$$u(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta, v(r, \theta) = r^2 \sin 2\theta$$

# 一、复变函数的定义

## 5.映射的定义:

引入:

对于复变函数, 由于它反映了两对变量 $u, v$ 和 $x, y$ 之间的对应关系, 因而无法用同一平面内的几何图形表示出来, 必须看成是两个复平面上的点集之间的对应关系

## 5. 映射

### ——复变函数的几何意义

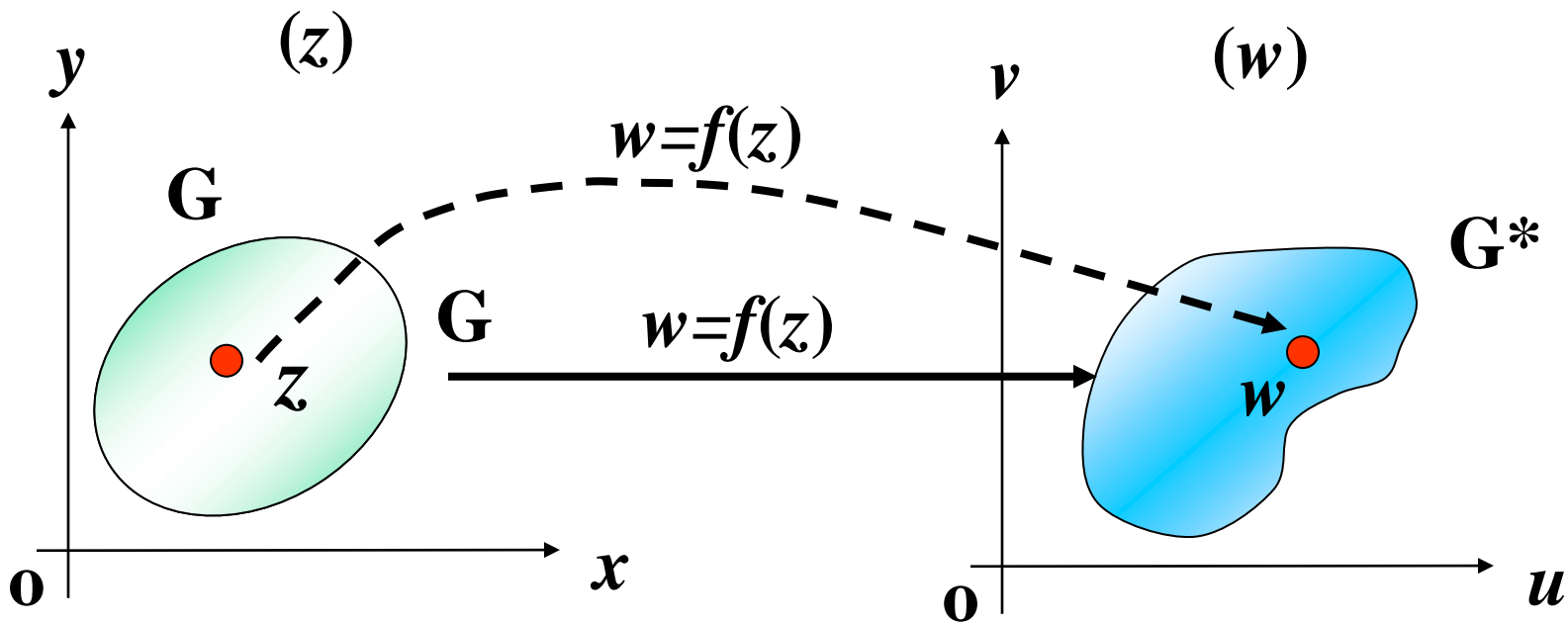
在几何上,  $w=f(z)$  可以看作:

$z \in G$  ( $z$ 平面)  $\xrightarrow{w=f(z)}$   $w \in G^*$  ( $w$ 平面) 的映射(变换).

定义域

函数值集合

称 $w$ 为 $z$ 的像点 (映像), 而 $z$ 称为 $w$ 的原像。



## 5.映射的定义

**定义：**如果用 $z$ 平面上的点表示自变量 $z$ 的值，而用另一个 $w$ 平面上的点表示函数 $w$ 的值，那么函数 $w=f(z)$ 在几何上就可以看作是把 $z$ 平面上的一个点集 $G$ （定义集合）变到 $w$ 平面上的一个点集 $G^*$ （函数值集合）的映射（或变换）。

这个映射通常简称为由函数 $w=f(z)$ 所构成的映射。

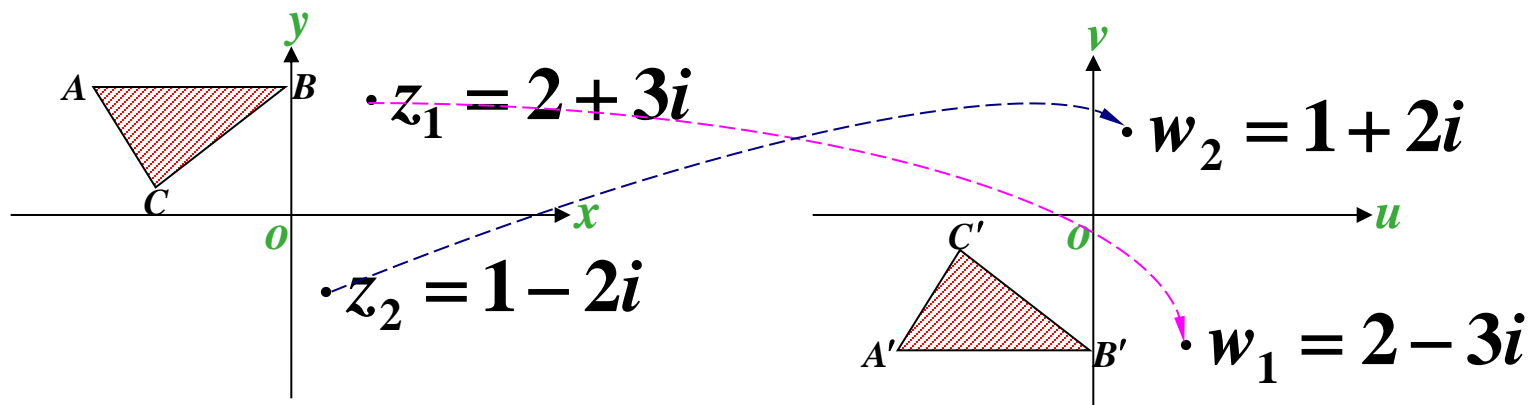
如果 $G$ 中的点 $z$ 被映射 $w=f(z)$ 映射成 $G^*$ 中的点 $w$ ，那么 $w$ 称为 $z$ 的象（映像），而 $z$ 称为 $w$ 的原像。

# 一、复变函数的定义

## 两个特殊的映射:

### (1) 函数 $w = \bar{z}$ 构成的映射.

将  $z$  平面上的点  $z = a + ib$  映射成  $w$  平面上的点  $w = a - ib$ .



$$z_1 \rightarrow w_1, \quad z_2 \rightarrow w_2, \quad \Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'.$$

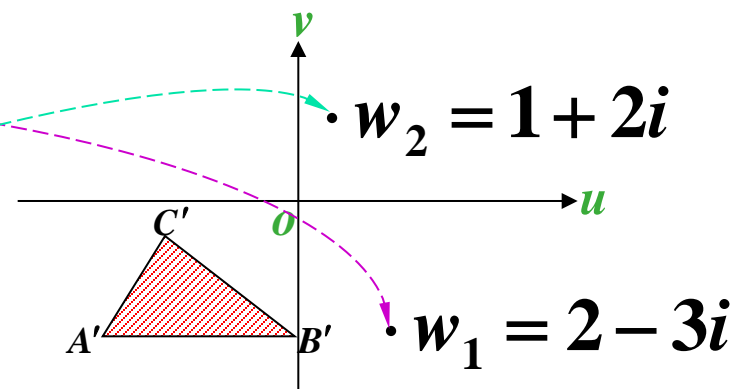
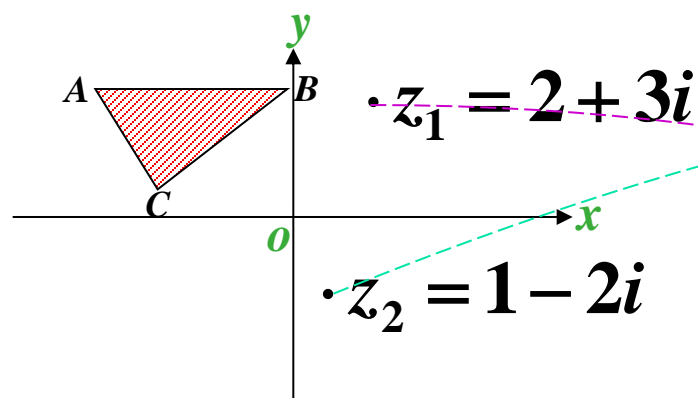
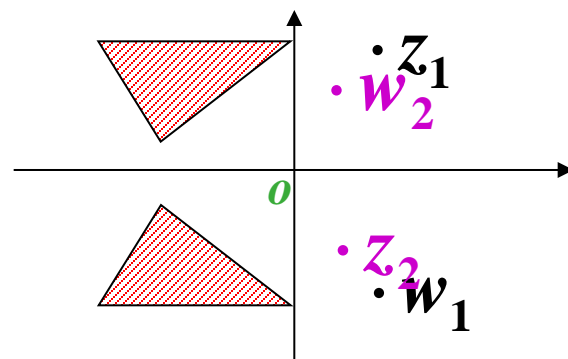


# 一、复变函数的定义

如果把 $z$ 平面和 $w$ 平面重叠在一起，不难看出

$$w = \bar{z}$$

是关于实轴的一个对称映射。  
且是全同图形。

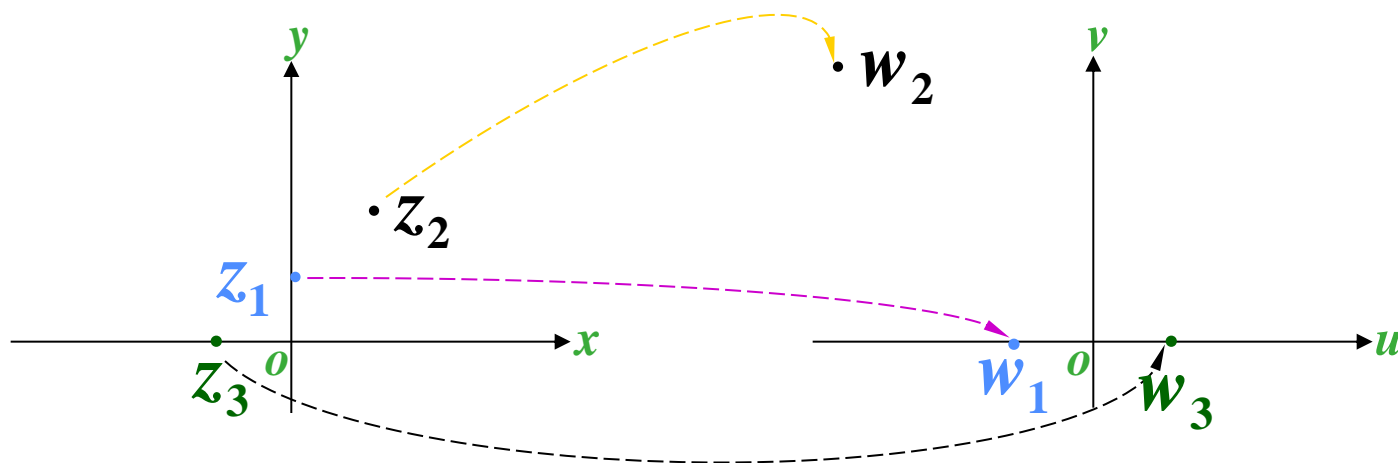


$$z_1 \rightarrow w_1, \quad z_2 \rightarrow w_2, \quad \Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'.$$

# 一、复变函数的定义

## (2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

显然将  $z$  平面上的点  $z_1 = i, z_2 = 1 + 2i, z_3 = -1$  映射成  $w$  平面上的点  $w_1 = -1, w_2 = -3 + 4i, w_3 = 1$ .

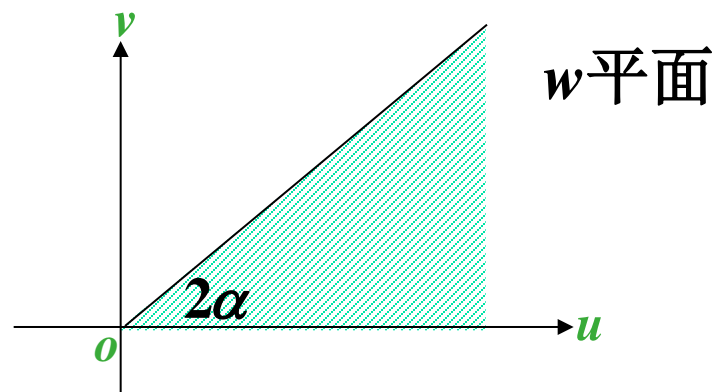
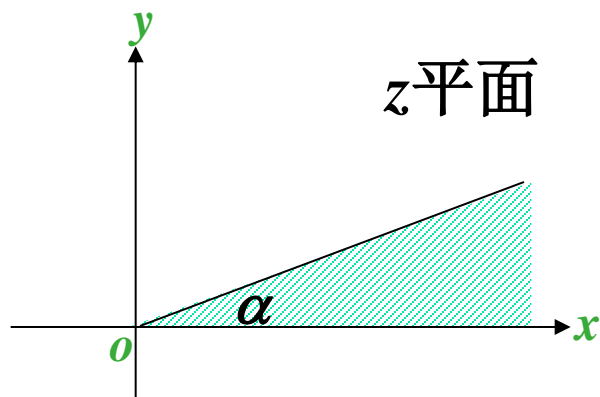


# 一、复变函数的定义

(2) 函数  $w = z^2$  构成的映射.

根据复数的乘法公式可知,

映射  $w = z^2$  将  $z$  的辐角增大一倍.



将  $z$  平面上与实轴交角为  $\alpha$  的角形域映射成  $w$  平面上与实轴交角为  $2\alpha$  的角形域.

# 一、复变函数的定义

(2) 函数  $w = z^2$  构成的映射.

函数  $w = z^2$  对应于两个二元实变函数:

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

它把  $z$  平面上的两族分别以直线  $y = \pm x$  和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2 - y^2 = c_1, \quad 2xy = c_2,$$

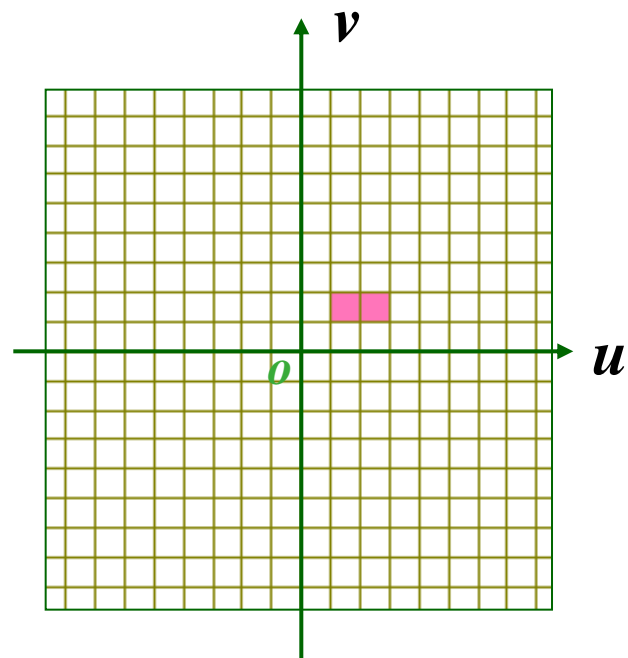
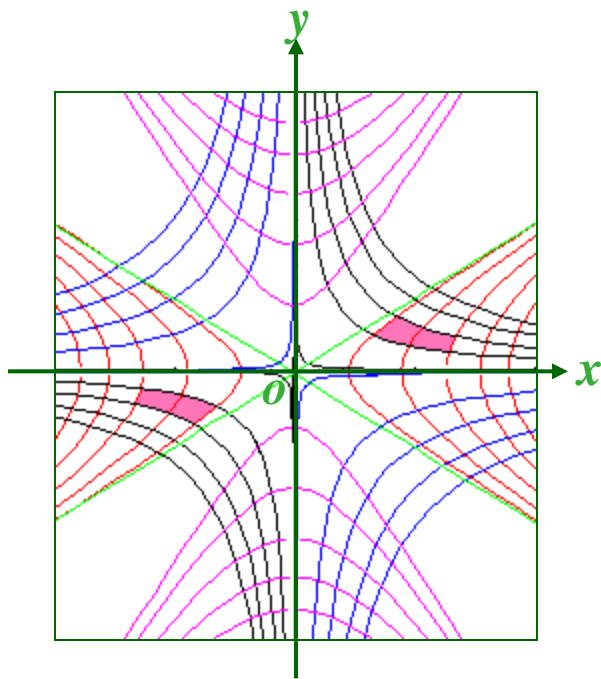
分别映射成  $w$  平面上的两族平行直线

$$u = c_1, \quad v = c_2. \quad (\text{如下页图})$$

# 一、复变函数的定义

(2) 函数  $w = z^2$  构成的映射.

将第一图中两块阴影部分映射成第二图中同一个长方形.



# 一、复变函数的定义

(2) 函数  $w = z^2$  构成的映射.

直线  $x = \lambda$  的象的参数方程为:

$$u = \lambda^2 - y^2, \quad v = 2\lambda y. \quad (y \text{ 为参数})$$

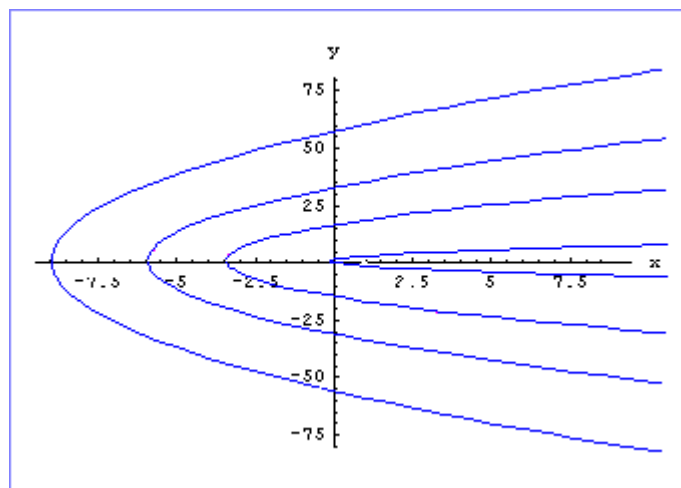
消去参数  $y$  得:  $v^2 = 4\lambda^2(\lambda^2 - u)$ ,

以原点为焦点, 开口相左的抛物线.(图中曲线)

同理直线  $y = \mu$  的象为:

$$v^2 = 4\mu^2(\mu^2 + u),$$

以原点为焦点, 开口相右的抛物线.(图中曲线)



# 一、复变函数的定义

## 整线性映射及其保圆性

整线性映射是指：

$$w = az + b$$

其中 $a$ 、 $b$ 为复常数且 $a \neq 0$ 。

令  $a = |a| e^{i\alpha}$ ，则  $w = |a| e^{i\alpha} z + b$

1. 平移  $w = \eta + b$

2. 旋转  $\eta = e^{i\alpha} \zeta$

3. 伸缩  $\zeta = |a| z$

# 一、复变函数的定义

在复平面上把圆周映射成圆周，这个性质叫保圆性。

$z = w/|a|$  代入

$$\Gamma: Az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + D = 0 \left( |\beta|^2 > AD, A \neq 0 \right)$$

$$\text{得 } Aw\bar{w} + |a|\bar{\beta}w + |a|\beta\bar{w} + |a|^2 D = 0$$

这就证明了映射  $w = |a|z$  是保圆的。

因此整线性映射  $w = az + b$  也具有保圆性。



# 一、复变函数的定义

## 6. 反函数的定义:

设  $w = f(z)$  的定义集合为  $z$  平面上的集合  $G$ , 函数值集合为  $w$  平面上的集合  $G^*$ , 那末  $G^*$  中的每一个点  $w$  必将对对应着  $G$  中的一个(或几个)点.

于是在  $G^*$  上就确定了一个单值 (或多值) 函数  $z = \varphi(w)$ , 它称为函数  $w = f(z)$  的反函数, 也称为映射  $w = f(z)$  的逆映射.

# 一、复变函数的定义

根据反函数的定义,

$$\forall w \in G^*, \quad w = f[\varphi(w)],$$

当反函数为单值函数时,  $z = \varphi[f(z)], z \in G$ .

如果函数 (映射)  $w = f(z)$  与它的反函数 (逆映射)  $z = \varphi(w)$  都是单值的, 那末称函数 (映射)  $w = f(z)$  是一一对应的. 也可称集合  $G$  与集合  $G^*$  是一一对应的.

今后不再区别函数与映射。

# 一、复变函数的定义

例1 在映射 $w=z^2$ 下求下列平面点集在 $w$ 平面上的象

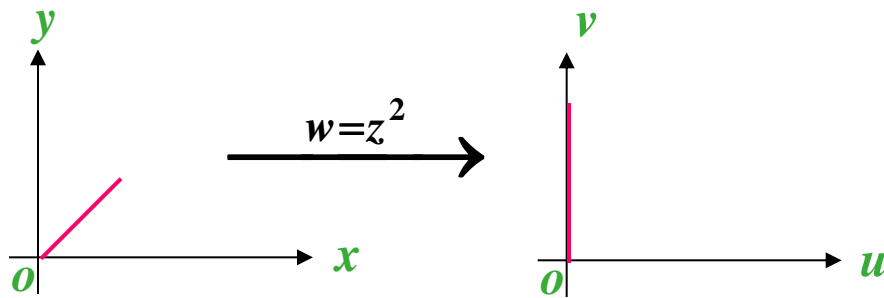
(1) 线段  $0 < r < 2, \theta = \frac{\pi}{4}$ ;

还是线段.

解 设  $z = re^{i\theta}$ ,

$$w = \rho e^{i\varphi},$$

则  $\rho = r^2, \varphi = 2\theta$ ,



故线段  $0 < r < 2, \theta = \frac{\pi}{4}$  映射为  $0 < \rho < 4, \varphi = \frac{\pi}{2}$ ,

# 一、复变函数的定义

例1 在映射 $w=z^2$ 下求下列平面点集在 $w$ 平面上的象

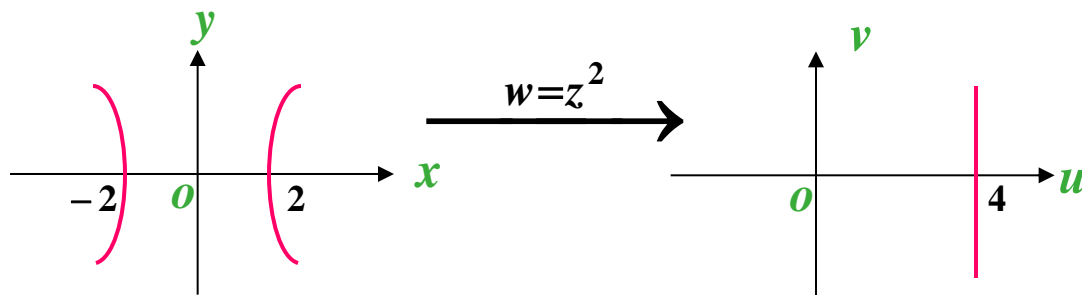
(2) 双曲线  $x^2 - y^2 = 4$ ;

解 令  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ ,

则  $u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi$ ,  $u = x^2 - y^2$ ,

$$x^2 - y^2 = 4$$

$$\Rightarrow u = 4,$$



$$G' = \{w | \operatorname{Re} w = 4\}$$

平行于  $v$  轴的直线.

# 一、复变函数的定义

例1 在映射 $w=z^2$ 下求下列平面点集在 $w$ 平面上的象

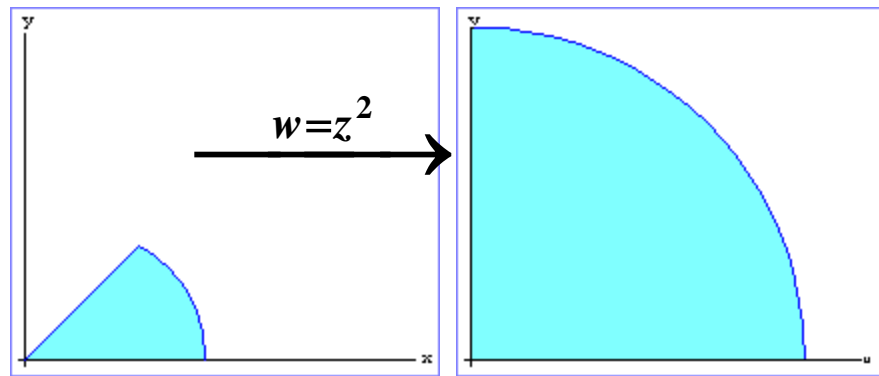
(3) 扇形域  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ,  $0 < r < 2$ .

解 设  $z = re^{i\theta}$ ,  $w = \rho e^{i\varphi}$ , 则  $\rho = r^2$ ,  $\varphi = 2\theta$ ,

故扇形域  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ,

$0 < r < 2$  映射为

$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \rho < 4$ , 仍是扇形域.



$$G' = \{w \mid |w| = 4, 0 < \arg w < \pi/2\}$$

# 一、复变函数的定义

**例2** 对于映射  $w = z + \frac{1}{z}$ , 求圆周  $|z| = 2$  的象.

**解** 令  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ ,

$$\text{映射 } w = z + \frac{1}{z} \Rightarrow u + iv = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

$$\text{于是 } u = x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = y - \frac{y}{x^2 + y^2},$$

圆周  $|z| = 2$  的参数方程为:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

# 一、复变函数的定义

所以像的参数方程为 
$$\begin{cases} u = \frac{5}{2} \cos \theta \\ v = \frac{3}{2} \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

表示  $w$  平面上的椭圆：
$$\frac{u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1.$$

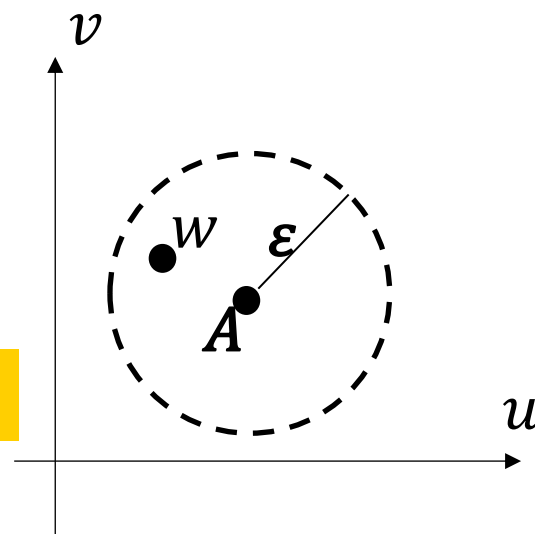
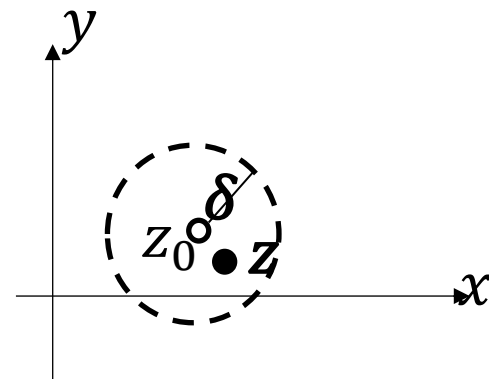
## 二、复变函数的极限

### 1. 函数极限的定义: (P23 定义2.1.2)

设函数  $w = f(z)$  定义在  $z_0$  的去心邻域  $0 < |z - z_0| < \rho$  内, 如果有一确定的数  $A$  存在, 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 相应地必有一正数  $\delta(\varepsilon)$  使得当  $0 < |z - z_0| < \delta$  ( $0 < \delta \leq \rho$ ) 时, 有  $|f(z) - A| < \varepsilon$  那末称  $A$  为  $f(z)$  当  $z$  趋向于  $z_0$  时的极限.

记作  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ . (或  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} A$ )

**注意:** 定义中  $z \rightarrow z_0$  的方式是任意的.





## 二、复变函数的极限

### 偏极限

(1)  $z$ 从右边趋向于 $z_0$

如果 $z_0 = x_0 + iy_0$ ,右偏极限可写成

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x + iy_0)$$

这就是一个通常的实变量极限。

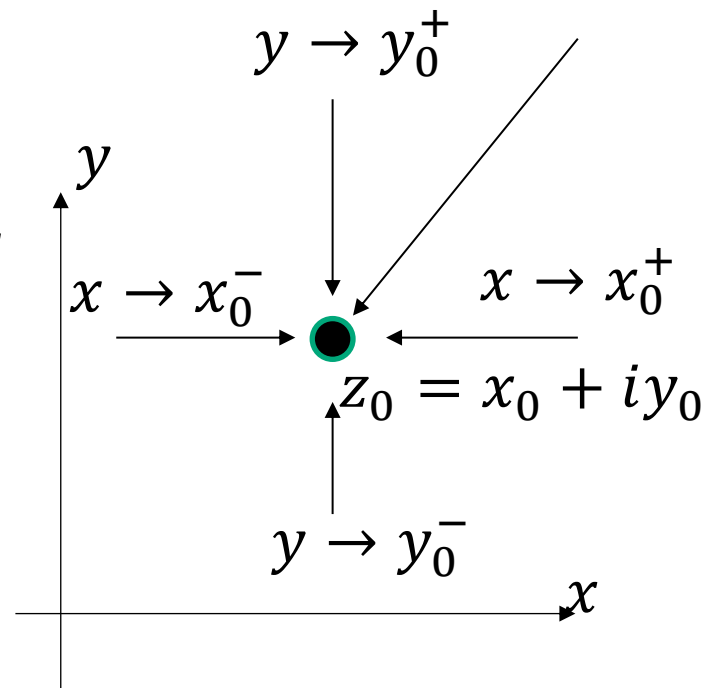
(2)  $z$ 从左边趋向于 $z_0$

左偏极限可写成  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x + iy_0)$

(3) 从**上边**的偏极限  $\lim_{y \rightarrow y_0^+} f(x_0 + iy)$

(4) 从**下边**的偏极限  $\lim_{y \rightarrow y_0^-} f(x_0 + iy)$

(5)  $z$ 从**斜线**趋向于 $z_0$   $\lim_{t \rightarrow t_0^+} f((x_0 + t) + i(y_0 + t))$



- 如果  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ ，则每个偏极限都必须也等于  $A$ 。
- 但是，有两个偏极限不相等，或者有一个偏极限发散，则极限也必须发散。
- 如果怀疑一个极限不存在，一个好的检验方法就是计算两个偏极限，看它们是否不同。
- 如果两个偏极限相同，不保证极限就存在，因其他偏极限可能不相同。

## 2. 极限计算的定理

### 定理一

设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $A = u_0 + iv_0$ ,  
 $z_0 = x_0 + iy_0$ , 那末  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$  的充要条件是

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

### 说明

该定理将求复变函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  的极限问题, 转化为求两个二元实变函数  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  的极限问题.

## 二、复变函数的极限

### 定理二 (P24 定理2.1.1)

设  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ ,  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$ , 那末

$$(1) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = AB;$$

$$(3) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

与实变函数的极限运算法则类似.

## 二、复变函数的极限

例1 证明函数  $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$  当  $z \rightarrow 0$  时的极限不存在.

证 (一) 令  $z = x + iy$ , 则  $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0,$$

当  $z$  沿直线  $y = kx$  趋于零时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} u(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + (kx)^2}}$$

## 二、复变函数的极限

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+k^2)}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

随  $k$  值的变化而变化,

所以  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y)$  不存在,  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = 0$ ,

根据定理一可知,  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$  不存在.

证 (二) 令  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,

$$\text{则 } f(z) = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta,$$

## 二、复变函数的极限

当  $z$  沿不同的射线  $\arg z = \theta$  趋于零时,

$f(z)$  趋于不同的值.

例如  $z$  沿正实轴  $\arg z = 0$  趋于零时,  $f(z) \rightarrow 1$ ,

沿  $\arg z = \frac{\pi}{2}$  趋于零时,  $f(z) \rightarrow 0$ ,

故  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$  不存在.

## 二、复变函数的极限

例2 证明函数  $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$  ( $z \neq 0$ ) 当  $z \rightarrow 0$  时的极限不存在.

证 令  $z = x + iy$ ,  $f(z) = u + iv$ ,

$$\text{则 } u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

当  $z$  沿直线  $y = kx$  趋于零时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} v(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2k}{1 + k^2},$$



## 二、复变函数的极限

随  $k$  值的变化而变化,

所以  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y)$  不存在,

根据定理一可知,  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$  不存在.

### 三、复变函数的连续性

#### 1. 连续的定义: (P24定义2.1.3)

设  $f(z)$  是区域  $D$  上的复变函数,  $z_0$  是该区域内的一个点。

如果  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , 那末我们就说  $f(z)$

在  $z_0$  处连续. 如果  $f(z)$  在区域  $D$  内处处连续, 我们说  $f(z)$  在  $D$  内连续.

函数  $f(z)$  在曲线  $C$  上  $z_0$  处连续的意义是

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \quad z \in C.$$

不是每个函数都是连续的, 例如  $\arg z$  在原点和负实轴上不连续

### 三、复变函数的连续性

#### 定理三

函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在  $z_0 = x_0 + iy_0$  连续的充要条件是： $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续.

例如,  $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$ ,

$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  在复平面内除原点外处处连续,  $v(x, y) = x^2 - y^2$  在复平面内处处连续,

故  $f(x, y)$  在复平面内除原点外处处连续.

该定理将复变函数的连续性问题与两个实元函数的连续性密切联系在一起

### 三、复变函数的连续性

#### 定理四

- (1) 在  $z_0$  连续的两个函数  $f(z)$  和  $g(z)$  的和、差、积、商 (分母在  $z_0$  不为零) 在  $z_0$  处仍连续.
- (2) 如果函数  $h = g(z)$  在  $z_0$  连续, 函数  $w = f(h)$  在  $h_0 = g(z_0)$  连续, 那末复合函数  $w = f[g(z)]$  在  $z_0$  处连续.

### 三、复变函数的连续性

特殊的:

(1) 有理整函数(多项式)

$$w = P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n, \quad a_n \neq 0$$

对复平面内的所有点  $z$  都是连续的;

(2) 有理分式函数

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \text{其中 } P(z) \text{ 和 } Q(z) \text{ 都是多项式, } Q(z) \neq 0$$

在复平面内使分母不为零的点也是连续的.

### 三、复变函数的连续性

例3 证明:如果  $f(z)$  在  $z_0$  连续,那末  $\overline{f(z)}$  在  $z_0$  也连续.

证 设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,

则  $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ ,

由  $f(z)$  在  $z_0$  连续,

知  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处都连续,

于是  $u(x, y)$  和  $-v(x, y)$  也在  $(x_0, y_0)$  处连续,

故  $\overline{f(z)}$  在  $z_0$  连续.

---

## §2.2 解析函数

1 复变函数导数

2 解析函数

# 1. 复变函数的导数

## 定义

- 设  $w = f(z)$  为定义在区域  $D$  内的单值复变函数,  $z_0 \in D$ , 如果极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ 或 } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

存在, 则称函数  $f(z)$  在  $z_0$  可导。这个极限值称为  $f(z)$  在  $z_0$  的导数, 记作  $f'(z_0)$  或者有时记作  $\frac{df}{dz}(z_0)$

$$\text{记作 } f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$



# 1. 复变函数的导数

在定义中应注意:

$z_0 + \Delta z \rightarrow z_0$  (即  $\Delta z \rightarrow 0$ ) 的方式是任意的。

即  $z_0 + \Delta z$  在区域  $D$  内以任意方式趋于  $z_0$  时, 比值

$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$  都趋于同一个数

如果函数  $f(z)$  在区域  $D$  内处处可导, 我们就称  $f(z)$

在区域  $D$  内可导

- $D$  内每一点都对应于  $f(z)$  的一个导数值, 因而, 在  $D$  内定义了一个函数, 称为  $f(z)$  在  $D$  内的导函数, 简称  $f(z)$  的导数, 记作  $\frac{df}{dz}$ ,  $f'(z)$

# 1. 复变函数的导数

例1

求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z. \end{aligned}$$

因而  $(z^2)' = 2z$

# 1. 复变函数的导数

**例2** 讨论  $f(z) = \operatorname{Im} z$  的可导性.

**解**

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\operatorname{Im}(z + \Delta z) - \operatorname{Im} z}{\Delta z} \\&= \frac{\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} \Delta z - \operatorname{Im} z}{\Delta z} = \frac{\operatorname{Im} \Delta z}{\Delta z} \\&= \frac{\operatorname{Im}(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y},\end{aligned}$$

# 1. 复变函数的导数

当点沿平行于实轴的方向( $\Delta y = 0$ )而使 $\Delta z \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = 0,$$

当点沿平行于虚轴的方向( $\Delta x = 0$ )而使 $\Delta z \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{1}{i},$$

当点沿不同的方向使 $\Delta z \rightarrow 0$ 时,极限值不同,

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \text{ 不存在.}$$

故 $f(z) = \text{Im } z$ 在复平面上处处不可导.

# 1. 复变函数的导数

**例3** 问 $f(z) = x + 2yi$ 是否可导?

**解**

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - x - 2yi}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}\end{aligned}$$

# 1. 复变函数的导数

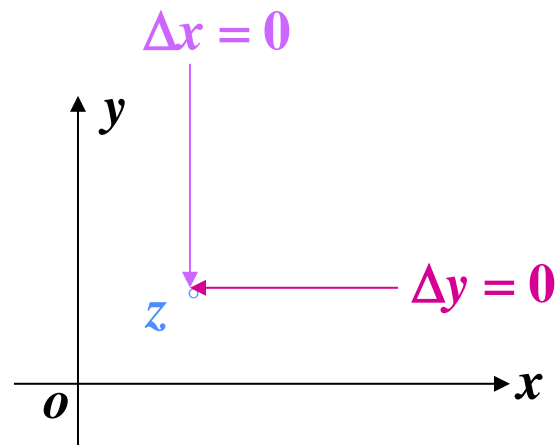
设 $z + \Delta z$ 沿着平行于  $x$  轴的直线趋向于  $z$ ,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

设 $z + \Delta z$ 沿着平行于  $y$  轴的直线趋向于  $z$ ,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta yi}{\Delta yi} = 2,$$

所以 $f(z) = x + 2yi$ 的导数  
不存在.



# 1. 复变函数的导数

## 偏极限

- 如果 $z$ 从**水平**方向趋向于 $z_0 = x_0 + iy_0$ , 因此,  
 $z = x + iy_0$ , 则上述极限就变为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{(x+iy_0) - (x_0+iy_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

- 如果 $z$ 从**垂直**方向趋向于 $z_0 = x_0 + iy_0$ , 因此,  
 $z = x_0 + iy$ , 则

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0+iy) - f(x_0+iy_0)}{(x_0+iy) - (x_0+iy_0)} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

# 1. 复变函数的导数

- 我们得出**结论**：若函数 $f$ 在 $z_0$ 可导，则

$$\frac{df}{dz}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

- 特别，为了 $f$ 在 $z_0$ 可导，对 $x$ 的导数和对 $y$ 的导数必须密切相关，**相关关系**由下列方程给出

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

- 该方程被称为**柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)方程**



# 柯西-黎曼方程的直角坐标形式

- 柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

- 若将 $f$ 写成直角坐标形式为

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

- 则 柯西-黎曼方程变成

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

- 得到柯西-黎曼方程的**直角坐标形式**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

函数可导→  
函数的实部和虚部密切相关

## 2) 可导的必要条件

- **定理** 设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , 并且  $f'(z)$  在点  $z_0 = x_0 + iy_0$  存在, 则  $u$  和  $v$  的一阶偏导数或  $\frac{\partial f}{\partial x}$  和  $\frac{\partial f}{\partial y}$  在点  $(x_0, y_0)$  存在, 并且它们在该点满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{或} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

此时,  $f'(z)$  可以写成

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

其中偏导数在点  $(x_0, y_0)$  取值。

- 柯西-黎曼方程是函数  $f$  在  $z_0$  可导的必要条件
- 所以它们经常用来判定  $f$  在哪些点不可导。

---

**例4** 共轭函数  $f(z) = \bar{z}$

- 其直角坐标形式为

$$f(x + iy) = x - iy$$

偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -i$$

对所有的  $x$  和  $y$ , 不满足C-R方程, 因此该函数处处不可导.

**例5** 函数  $f(z) = |z|^2$

其直角坐标形式为

$$f(x + iy) = x^2 + y^2$$

偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

**C-R方程**要求  $2xi = 2y$ ，取实部和虚部，得到  $x = 0$  和  $y = 0$ ，**因此  $f'(z)$  在任何非零点都不存在。**

- C-R方程原点0处满足， $f'(0)$ 是否存在呢？
- 该定理不能确保  $f'(0)$  存在！！

## 例5 说明了三个事实

- (1) 函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  可以只在某个点  $z = x + iy$  可导，但在点  $z$  的一去心邻域内都不可导；
- (2) 由于当  $f(z) = |z|^2$  时， $u(x, y) = x^2 + y^2$  且  $v(x, y) = 0$ ，一个单复变量函数的实部和虚部可以在点  $z = x + iy$  处有任意阶连续偏导数，但函数本身在该点不可导；
- (3) 因为函数  $f(z) = |z|^2$  的分量函数  $u(x, y) = x^2 + y^2$  和  $v(x, y) = 0$  在复平面内连续，很明显，函数在一点连续并不能确保它在该点可导。

**例6** 设函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  的定义如下

$$f(z) = \begin{cases} \bar{z}^2/z & \text{当 } z \neq 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } z = 0 \text{ 时} \end{cases}$$

证明  $f'(0)$  不存在, 但 C-R 方程在  $z = 0$  成立。

(1) 证: 
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}^2 / \Delta z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right)^2$$

$\Delta z$  沿着平行于实轴的方向趋于 0, 因而  $\Delta y = 0$ , 这时极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = 1$$

$\Delta z$  沿着直线  $\Delta y = \Delta x$  的方向趋于 0, 这时极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \left( \frac{1-i}{1+i} \right)^2 = -1$$

因此  $f'(0)$  不存在

(2) 证：C-R方程在 $z = 0$ 成立。

当点 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时，它的实部和虚部分别是

$$u(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} \text{ 和 } v(x, y) = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2}$$

由 $f(z=0)=0$ 定义，知 $u(0,0) = 0, v(0,0) = 0$

$$\text{因为 } \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(0+\Delta x, 0) - u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(0, 0+\Delta y) - v(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta y} = 1$$

所以C-R方程 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 在 $z = 0$ 成立

**C-R方程在 $z = 0$ 成立。**

同样可证明 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ 在 $z = 0$ 成立。

### 3)一点可导的充分条件

- **定理** 设函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在点  $z_0 = x_0 + iy_0$  的某个邻域内有定义, 并且

(1) 如果  $f$  的偏导数  $\frac{\partial f}{\partial x}$  和  $\frac{\partial f}{\partial y}$  或  $u$  和  $v$  的一阶偏导数在点  $(x_0, y_0)$  处连续;

(2) 在点  $(x_0, y_0)$  满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \text{ 或 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

则  $f'(z_0)$  存在, 其值为

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

其中偏导数在点  $(x_0, y_0)$  取值



■ **例7** 函数  $f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy)$

偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + i(2y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + i(2x)$$

对所有的 $x$ 和 $y$ ，满足C-R方程，且偏导数连续，因此该函数处处可导，且其导数为

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + i(2y)$$

换句话说，函数  $f(z) = z^2$  可导，且  $f'(z) = 2z$

■ **例8** 函数  $f(z) = |z|^2$

其直角坐标形式为

$$f(x + iy) = x^2 + y^2$$

偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

只在原点0处满足C-R方程，且偏导数在 $z = 0$ 处连续，因此**该函数原点0处可导**，对其他所有的 $x$ 和 $y$ ，该函数不可导。

■ **例9**  $f(x + iy) = e^x \cos y + ie^x \sin y$

偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y + ie^x \cos y$$

对所有的 $x$ 和 $y$ , **满足C-R方程**, 且**偏导数连续**, 因此该函数处处可导, 且其导数为

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

换句话说, 函数 $f(z) = e^z$ 可导, 且 $f'(z) = e^z$

- 例如，考虑函数  $f(z) = x^3 + i(1 - y)^3$

说  $f(z)$  在每一点都可导且

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$$

是不对的。

- 偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \frac{\partial f}{\partial y} = -i3(1 - y)^2$$

C-R方程要求  $3x^2 + 3(1 - y)^2 = 0$ ，即只有当  $x = 0$  且  $y = 1$  时 C-R 方程才成立。也就是  $z = i$  时  $f'(z)$  才存在，此时  $f'(i) = 0$

---

注意：

当应用可导的充分条件的这个定理计算函数在 $z_0$ 的导数时，我们必须注意：在判断 $f'(z_0)$ 存在之前，不能使用定理中的 $f'(z)$ 的公式。

## 4) 复变函数可导的充要条件

- **定理** 设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  是区域  $D$  上的复变函数，则函数  $f(z)$  在  $D$  内一点  $z = x + iy$  处可导的**充要条件**是

(1)  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  **可微**，(2) **满足柯西-黎曼方程**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

由该定理，可得函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在点  $z_0 = x_0 + iy_0$  处的导数公式：

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

**推论** 设  $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$  , 若  $u(x,y)$  和  $v(x,y)$  的四个一阶偏导函数在点  $(x_0,y_0)$  均连续并且满足 **C-R** 方程, 则  $f(z)$  在点  $z_0=x_0+y_0i$  处**可导**。

**注意** 1)  $f(z)$  在点  $z_0=x_0+iy_0$  **可微** 等价于它在该点**可导**。  
但不等价于其实部函数与虚部函数在点  $(x_0,y_0)$  可微。

2) 一个二元实函数在某点**可微的充分条件**是：它的两个一阶偏导数在该点不仅存在，而且是连续。

# 复变函数的导数的计算方法

如果复变函数的**导数**存在，其**计算方法**

- (1) 导数的定义

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

- (2) 柯西-黎曼方程

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$



## 5) 可导与连续的关系

- 函数 $f(z)$ 在 $z$ 处可导, 则在 $z$ 处一定连续, 但 $f(z)$ 在 $z$ 处连续不一定在 $z$ 处可导

- 由导数定义知

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = 0$$

- 即 $f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$

- 因此 $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0$

- 即 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

- 即, 可导必连续。

	实变函数	复变函数
极限	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$
连续	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$
导数	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_0)$	$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z_0)$

## 6) 求导法则

### ---实函数中求导法则的推广

$$(1) \quad (c)' = 0, \text{ 其中 } c \text{ 为复常数.}$$

$$(2) \quad [f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z).$$

$$(3) \quad [f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

$$(4) \quad \left[ \frac{f(z)}{g(z)} \right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}. \quad (g(z) \neq 0)$$

$$(5) \quad \{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z). \quad \text{其中 } w = g(z)$$

$$(6) \quad f'(z) = \frac{1}{\phi'(w)}, \quad \text{其中 } w = f(z) \text{ 与 } z = \phi(w) \text{ 是}$$

两个互为反函数的单值函数, 且  $\phi'(w) \neq 0$

$$(7) \quad (z^n)' = nz^{n-1} \quad \text{其中, } n \text{ 为正整数}$$

## 7) 可微

复变函数微分的概念在形式上与一元实变函数的微分概念完全一致.

定义：设函数  $w = f(z)$  在  $z_0$  的某个邻域内有定义，若存在复常数  $A$ ，使得

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta z$$

其中  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha = 0$ ，则称  $f(z)$  在点  $z_0$  可微。

## 7) 可微

复变函数微分的概念在形式上与一元实变函数的微分概念完全一致.

如果函数  $w = f(z)$  在  $z_0$  可导, 由导数定义, 有

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0) \Delta z + o(|\Delta z|) \Delta z$$

即,  $w = f(z)$  在  $z_0$  可微。

称  $f'(z_0) \Delta z$  为  $w = f(z)$  在  $z_0$  的微分, 记作

$$dw = f'(z_0) \Delta z$$

## 7) 可微

当 $f(z) = z$ 时,  $dz = df(z) = \Delta z$ , 因此有

$$dw = f'(z_0)dz$$

即

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0}$$

因此,  $f(z)$ 在  $z_0$ 可导与在 $z_0$ 可微是等价的。

如果 $f(z)$ 在区域 $D$ 内处处可微, 称 $f(z)$ 在区域 $D$ 内可微。