复变函数与积分变换

（2024-2025学年第一学期）

邱丽荣

办公室：北院 6号教学楼125

E-mail: qiulirong1@bit.edu.cn

电话：18810135629

从上一章可以看出，利用将函数 $f(z)$ 在其解析的**环域** $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内展开成 洛朗 级数的方法，根据该级数系数的积分表达式

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

可以计算右端的积分. 其中C是该环域内围绕点z_0的正向简单闭曲线。这里C 的内部可能有函数$f(z)$的有限个甚至无穷多个奇点。

计算积分 $I = \oint_{|z|=5} \ln(1+\frac{2}{z})dz$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$$

解：先分析对数函数解析性，则 奇点为 $z=-2$，

因此它在环域 $2<|z|<\infty$ 内解析。于是

$$\ln(1+\frac{2}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n+1} z^{-n-1},$$

取$n=-1$，则积分值为 $I = 2\pi i c_{-1} = 4\pi i$

本章主要讨论计算函数积分的新方法：利用函数的孤立奇点的留数来计算积分的方法。

第五章 留数

§ 5-1 孤立奇点

§ 5-2 留数和留数定理

§ 5-3 留数在定积分计算中的应用

作业 书123-125页

1(6)、3(3)、4、7、 9(1)、 9(2)、

10(1)、 13(1)、 13(2)、 13(4)

§5-1 孤立奇点

- 1. 定义
- 2. 分类及性质
- 3. 零点与极点的关系

一. 孤立奇点的概念

定义 如果函数$f(z)$在 z_0 不解析, 但 $f(z)$在 z_0 的某一去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$内处处解析, 则称 z_0为$f(z)$的孤立奇点.

例1 $z=0$ 是函数 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

$z=-1$是函数 $\dfrac{1}{z+1}$ 的孤立奇点.

注意: 奇点不一定是孤立奇点.

孤立奇点 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 奇点

例2 指出函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin\dfrac{1}{z}}$ 在点 $z=0$ 的奇点特性.

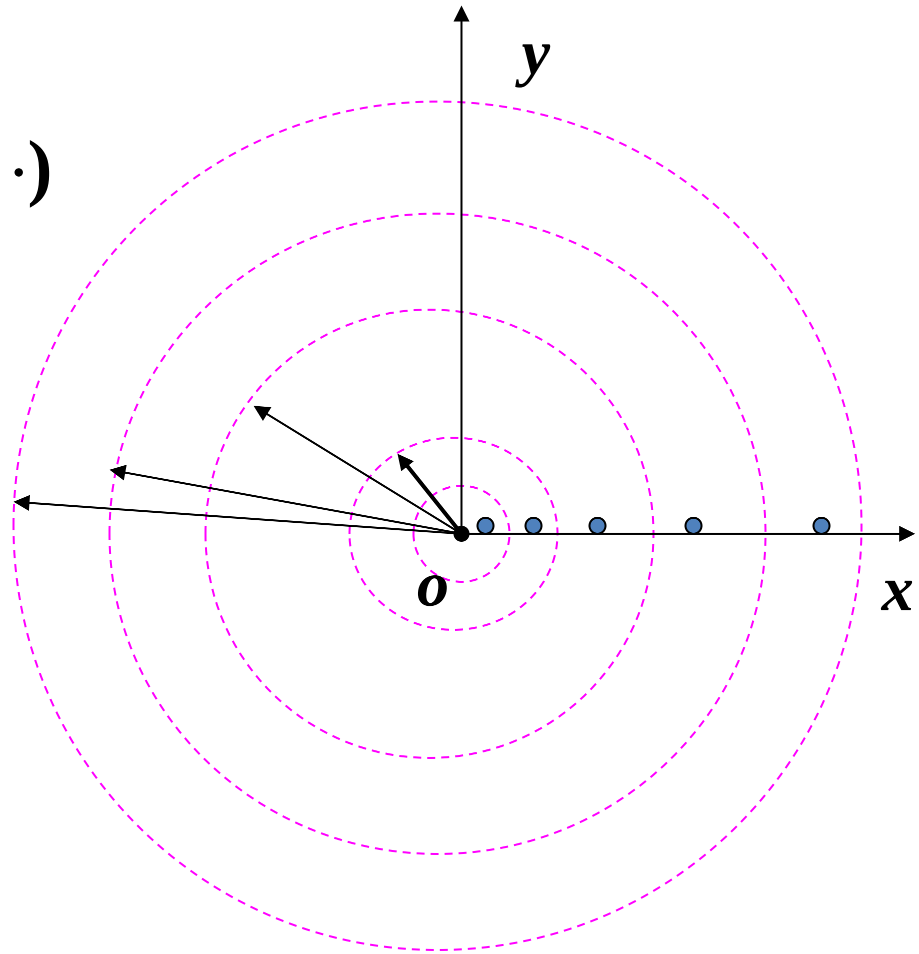
解 函数的奇点为 $z=0$、

$$z=\frac{1}{k\pi}\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

孤立奇点

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k\pi}=0,$

即在$z=0$的不论怎样小的去心邻域内,总有$f(z)$ 的奇点存在，所以$z=0$不是孤立奇点



指出函数 $f(z)=\dfrac{1}{\cos(1/z)}$ 的孤立奇点

解：$z=0$是函数$f(z)$的奇点，$z_k=2/[(2k+1)\pi]$(k为整数)

是它的孤立奇点。由于当 $k\to\infty$ 时，$z_k\to 0$，因此，

$z=0$是它的奇点而不是孤立奇点。

另外，$f(z)$在环域 $2/\pi<|z|<\infty$内解析，$z=\infty$是它的孤立

奇点。

二. 孤立奇点的分类

以下将$f(z)$在孤立奇点的邻域内展成洛朗级数，根据展开式的不同情况，将孤立点进行分类.

考察：

$$(1)\ \frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

特点：没有负幂次项

$$(2)\ \frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\cdots$$

特点：只有有限多个负幂次项

$$(3)\ e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\cdots$$

特点：有无穷多个负幂次项

二. 孤立奇点的分类

依据 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 的去心邻域

$0<|z-z_0|<\delta$ 内的洛朗级数的情况分为三类:

1. 可去奇点; 2. 极点; 3. 本性奇点.

1. 可去奇点

1) 定义 如果洛朗级数中不含 $z-z_0$ 的负幂项,

那末孤立奇点 z_0 称为 $f(z)$ 的可去奇点.

说明: (1) z_0若是$f(z)$的孤立奇点,

$$f(z)=\boxed{c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots}.$$

$$(0<|z-z_0|<\delta)$$

其和函数$F(z)$为在z_0解析的函数.

(2) 无论 $f(z)$ 在 z_0 是否有定义, 补充定义

$f(z_0)=c_0$, 则函数$F(z)$在z_0解析

$$f(z_0)=\lim_{z\to z_0} f(z)$$

$$f(z)=\begin{cases} F(z), z\neq z_0 \\ c_0\ , z=z_0 \end{cases}$$

2) 可去奇点的判定

(1) 由定义判断: 如果 $f(z)$在z_0 的洛朗级数无负幂项，则 z_0为 $f(z)$的可去奇点.

(2) 判断极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$:若极限存在且为有限值,则 z_0为 $f(z)$的可去奇点. （充要条件）

例3 $\dfrac{\sin z}{z} = 1 - \dfrac{1}{3!}z^2 + \dfrac{1}{5!}z^4 - \cdots$ 中不含负幂项,

$z=0$ 是 $\dfrac{\sin z}{z}$ 的可去奇点 .

如果补充定义:

$$z=0 \text{ 时}, \quad \frac{\sin z}{z} = 1,$$

那末 $\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z=0$ 解析.

例4 说明 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

解 $$\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{z}\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots-1\right)$$

$$=\underbrace{1+\frac{1}{2!}z+\cdots+\frac{1}{n!}z^{n-1}+\cdots}_{\text{无负幂项}},\quad 0<|z|<+\infty$$

所以 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

另解 因为 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=\lim\limits_{z\to 0}e^z=1$,

所以 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

2. 极点

1) **定义**　如果洛朗级数中只有有限多个$z-z_0$的负幂项, 其中关于 $(z-z_0)^{-1}$ 的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$,

即 $$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$
$$+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots \qquad (m\geq 1,\ c_{-m}\neq 0)$$

或写成 $$\boxed{f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z),}$$

那末孤立奇点z_0称为函数 $f(z)$的m级极点

说明:

(1) $g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots$

特点: 1. 在 $|z - z_0| < \delta$ 内是解析函数

2. $g(z_0) \neq 0$

(2) 如果 z_0 为函数 $f(z)$ 的极点，则

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

例5 有理分式函数 $f(z) = \dfrac{3z + 2}{z^2(z + 2)}$,

$z = 0$ 是二级极点， $z = -2$ 是一级极点.

2)极点的判定方法

(1) 由定义判别

$f(z)$的洛朗展开式中含有z-z_0的负幂项为有限项。

(2) 由定义的等价形式判别 **（充要条件）**

在点 z_0 的某去心邻域内 $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$

其中$g(z)$ 在z_0 的邻域内解析, 且 $g(z_0)\neq 0$.

(3) 利用极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ 判断 . **（充要条件）**

课堂练习

求 $\dfrac{1}{z^3 - z^2 - z + 1}$ 的奇点, 如果是极点, 指出它的级数.

答案 由于 $\dfrac{1}{z^3 - z^2 - z + 1} = \dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$,

所以： $z = -1$是函数的一级极点,

$z = 1$是函数的二级极点.

例 问$z=0$是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的二级极点吗?

解 $$\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right)$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots=\frac{1}{z}\varphi(z),$$

$\varphi(z)$解析且$\varphi(0)\neq 0$

所以 $z=0$不是二级极点, 而是一级极点.

思考 $z=0$是 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的几级极点? 二级极点

注 意: **不能以函数的表面形式作出结论 .**

3.本性奇点

1) 定义

如果洛朗级数中含有无穷多个$z-z_0$的负幂项，

那末孤立奇点z_0称为$f(z)$的本性奇点.

例如，$e^{\frac{1}{z}} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \cdots + \frac{1}{n!}z^{-n} + \cdots,$

含有无穷多个z的负幂项 $(0 < |z| < \infty)$

所以 $z = 0$ 为本性奇点，同时 $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$ 不存在.

特点: 在本性奇点的邻域内 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$不存在且不为 ∞.

例

$f(z)=e^{1/z}, z_0=0$ 为$f(z)$的孤立奇点.

当$z=x\to 0+$, 有$f(z)\to\infty$; 当$z=x\to 0-$, 有$f(z)\to 0$;

当$z=iy\to 0$, 有$f(z)=\cos\dfrac{1}{y}-i\sin\dfrac{1}{y}$无极限。

于是当$z\to 0$, $f(z)$无极限，也不以∞为极限。

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}$$

综上，当z_0为$f(z)$的孤立奇点时，可用极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 值存在有限、为 ∞、不存在，来区分奇点是可去奇点、极点还是本性奇点。

综上所述:　　　　　　　　　　　　　　（充要条件）

孤立奇点	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	存在且为有限值
m级极点	含有限个负幂项 关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$	∞
本性奇点	含无穷多个负幂项	不存在且不为∞

二、函数的零点与极点的关系

1、函数的零点

定义 若函数 $f(z)$ 在点 z_0 解析，并且 $f(z_0)=0$

则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的**零点**

例 $z=0$，$z=1$ 是函数 $f(z)=z(z-1)^3$ 的零点.

二、函数的零点与极点的关系

m级零点 不恒等于零的解析函数$f(z)$，如果能表示成 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$在z_0解析且$\varphi(z_0)\neq 0$, m为某一正整数, 那么z_0称为$f(z)$的 m 级零点

例6 $z=0$是函数 $f(z)=z(z-1)^3$的一级零点，

$z=1$是函数 $f(z)=z(z-1)^3$的三级零点.

注意: 不恒等于零的解析函数的零点是孤立的.

2.零点的判定

定理5.1.5　如果 $f(z)$ 在 z_0解析，那么z_0为$f(z)$ 的m级零点的充要条件是

$$f^{(n)}(z_0)=0,\ (n=0,1,2,\cdots m-1);\qquad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

证　(必要性)　如果 z_0 为 $f(z)$的 m级零点

由定义:　$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$$

设 $\varphi(z)$在z_0的泰勒展开式为:

$$\varphi(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots,$$

其中 $c_0 = \varphi(z_0) \neq 0,$

从而$f(z)$在z_0的泰勒展开式为

$$f(z) = c_0(z - z_0)^m + c_1(z - z_0)^{m+1} + c_2(z - z_0)^{m+2} + \cdots$$

展开式的前m项系数都为零，由泰勒级数的系数

公式知: $f^{(n)}(z_0) = 0, (n = 0,1,2,\cdots m-1);$

并且 $$\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = c_0 \neq 0.$$

充分性证明略.

定理 z_0为$f(z)$ 的m级零点的**充要条件是**：

$$f(z)=(z-z_0)^m\psi(z)$$

其中 $\psi(z)$ 在 z_0解析，且 $\psi(z_0)\neq 0$

例7 求以下函数的零点及级数:

$$(1)\ f(z)=z^3-1,\quad (2)\ f(z)=\sin z.$$

解 (1)由于 $f'(1)=3z^2\big|_{z=1}=3\neq 0,$

知 $z=1$ 是 $f(z)$ 的一级零点.

$$z=e^{\frac{2k\pi}{3}}(k=0,1,2)$$

级数：在z平面上处处解析，用泰勒展开的定义求级数的系数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \qquad c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),\ n=0,1,2,\cdots\cdots$$

$$f(z)=3(z-1)+3(z-1)^2+(z-1)^3$$

(2) $f(z) = \sin z$.

解 (2)由于 $z = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2)$

$$f'(z=k\pi)=\cos z|_{z=k\pi}=\pm 1\neq 0$$

知 $z = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2)$ 是 $f(z)$ 的一级零点.

$$\sin z=\sin(z-1+1)=\sin(z-1)\cos 1+\cos(z-1)\sin 1$$

课堂练习 求 $f(z)=z^5(z^2+1)^2$ 的零点及级数.

答案 $z=0$ 是五级零点, $z=\pm i$ 是二级零点.