复变函数与积分变换

（2024-2025学年第一学期）

邱丽荣

办公室：北院 6号教学楼125

E-mail: qiulirong1@bit.edu.cn

电话：18810135629

第二章 解析函数

- 本章在介绍**复变函数、复变函数导数**概念和求导法则的基础上，着重讲解**解析函数的概念及判别方法**，介绍了常用的初等函数，并对多值函数作了简单介绍。

主要内容：

1 复变函数

2 复变函数的导数及解析函数的概念。

3 复变函数可导与解析的充要条件，柯西-黎曼方程及解析函数的性质。

4 初等函数。

第二章 作业

书P44—48

1（3）、2、6、11（3）、12(4)、 16、 19、20(4)、 23、25(3)、32(4)、 35.

§2-1 复变函数

- 一、定义与几何意义
- 二、极限
- 三、连续性

一、复变函数的定义

1. 复变函数—与实变函数定义相类似

- 定义: 设G是复数$z=x+iy$的平面点集，如果存在一个**法则** f, 按照这个法则，对任何$z=x+iy\in G$，有一个或几个复数 $w=u+iv$与之对应, 那末称**复变量w是复变量z的函数** (简称复变函数), 记作$w=f(z)$
  - 例如，$f(z)=z+2-i$
  - $f(z)=z^2$
  - $f(z)=3$

$f(n)=f_n=(1+i)^n,\ n\in N$

$f(z)=z^n$

$f(z)=\exp(z)$

$f(z)=\ln(z)$

一、复变函数的定义

2. 单值函数与多值函数

如果z的一个值对应着一个w的值，那末我们称函数$f(z)$是**单值函数**；

如果z的一个值对应着两个或两个以上w的值，那末我们称函数$f(z)$是**多值函数**

若$z \to$ 一个w值，称$f(z)$是单值函数；

$z \to$ 多个w值，称$f(z)$是多值函数.

例如，$f(z)=|z|$，$w=\bar{z}$，$w=z^2$都是z的单值函数$w=\sqrt[n]{z}(z\neq 0, n\geq 2)$,$w=\operatorname{Arg} z(z\neq 0)$均是$z$的多值函数。

今后，无特别声明，所讨论的函数均为**单值函数**。

一、复变函数的定义

3.定义集合和函数值集合:

- 集合G称为函数$w=f(z)$的**定义集合（定义域）**；
- 对应G中的所有z的一切w值构成的集合G*，成为**函数值集合**，即$G^{*}=f(G)=\{w|w=f(z),z\in G\}$为**函数的值域**，**$z$称为自变量，$w$为因变量(函数)**

一、复变函数的定义

4. 复变函数与自变量之间的关系(复变函数表示)

复变函数 w 与自变量 z 之间的关系 $w = f(z)$

相当于两个关系式:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

它们确定了自变量为 x 和 y 的两个二元实变函数.

$\because z = x + iy \leftrightarrow (x, y);\ w = u + iv \leftrightarrow (u, v)$

$$\therefore w = f(z) = f(x + iy)$$

$$= u(x, y) + iv(x, y)$$

故 $u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$

$$\boxed{w = f(z) = u + iv \leftrightarrow u = u(x, y) \quad v = v(x, y)}$$

4. 复变函数与自变量之间的关系(复变函数表示)

例如，函数 $w = z^2$，令 $z = x + iy$，$w = u + iv$，

则 $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$，

于是函数 $w = z^2$ 对应于两个二元实变函数：

$u = x^2 - y^2$， $v = 2xy$.

如果，$f(z) = u + iv$，且$v = 0$,则f是一个单复变量的实值函数

例如，$f(z) = |z|$,则

$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, v(x, y) = 0$$

一、复变函数的定义

4. 复变函数与自变量之间的关系(复变函数表示)

可以将直角坐标形式转换为用单复变量z来表示。

- **例如**$f(x+iy)=x^2+iy^2$**,可写为**

$$f(z)=[\mathrm{Re}(z)]^2+i[\mathrm{Im}(z)]^2$$

- **例：** $w=u(x,y)+iv(x,y)=x^2+y^2+4xyi$
  - ✓ **利用**$x=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$
  - ✓ x^2+y^2+4xyi

$$=\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2+4\frac{z+\bar{z}}{2}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i}i$$

$$=z^2+z\cdot\bar{z}-\bar{z}^2$$

一、复变函数的定义

例

若已知 $f(z)=x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)+iy\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

将 $f(z)$表示成 z 的函数.

设$z=x+iy$,则$x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z}), y=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$

$$f(z)=z+\frac{1}{z}$$

4. 复变函数与自变量之间的关系(复变函数表示)

- 如果用极坐标r和θ代替x和y，则有

$$u = u(r,\theta),\ v = v(r,\theta)$$

或写为$f\left(re^{i\theta}\right) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$

- 例：$f(z) = z^2$，变为

$$f\left(re^{i\theta}\right) = r^2 e^{i2\theta} = r^2\cos 2\theta + ir^2\sin 2\theta$$

因此，

$$u(r,\theta) = r^2\cos 2\theta，\ v(r,\theta) = r^2\sin 2\theta$$

一、复变函数的定义

5.映射的定义:

引入:

对于复变函数，由于它反映了两对变量u,v和x,y之间的对应关系，因而无法用同一平面内的几何图形表示出来，必须看成是两个复平面上的点集之间的对应关系

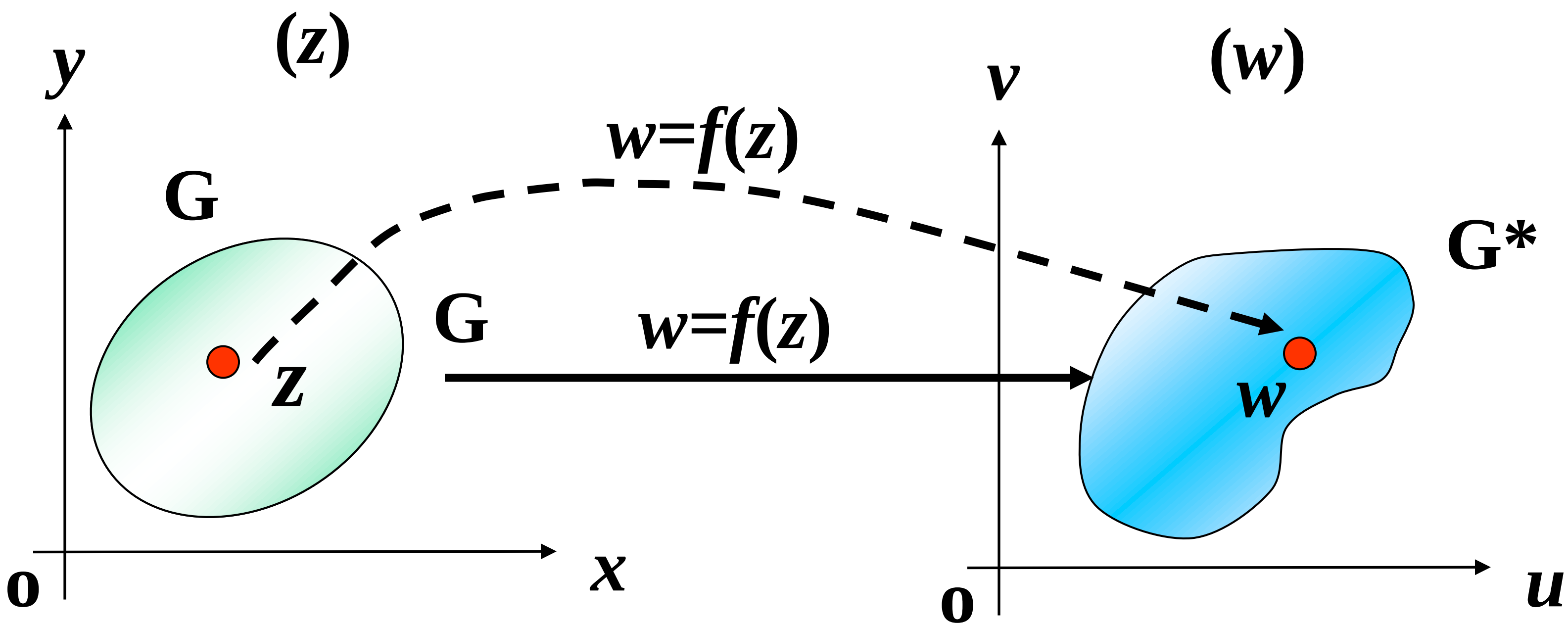
5. 映射 ——复变函数的几何意义

在几何上， $w=f(z)$可以看作：

$z \in G$ (z平面) $\xrightarrow{w=f(z)}$ $w \in G^*$ (w平面）的映射(变换).

定义域　　　　函数值集合

称w为z的像点（映像），而z称为w的原像。



5.映射的定义

定义：如果用z平面上的点表示自变量z的值，而用另一个w平面上的点表示函数w的值，那么函数$w=f(z)$在几何上就可以看作是把z平面上的一个点集G（定义集合）变到w平面上的一个点集G*（函数值集合）的映射（或变换）。

这个映射通常简称为由函数$w=f(z)$所构成的映射。

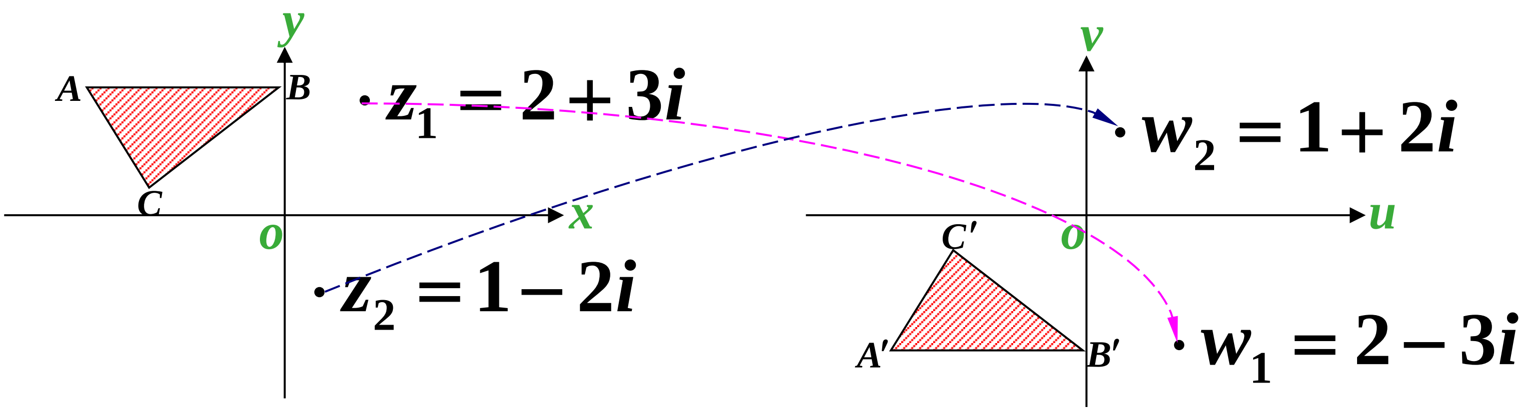
如果G中的点z被映射$w=f(z)$映射成G^*中的点w，那么w称为z的象（映像），而z称为w的原像。

一、复变函数的定义

两个特殊的映射:

(1) 函数 $w=\bar{z}$ 构成的映射.

将 z 平面上的点 $z=a+ib$ 映射成 w 平面上的点 $w=a-ib$.



$$z_1 \to w_1, \quad z_2 \to w_2, \qquad \Delta ABC \to \Delta A'B'C'.$$

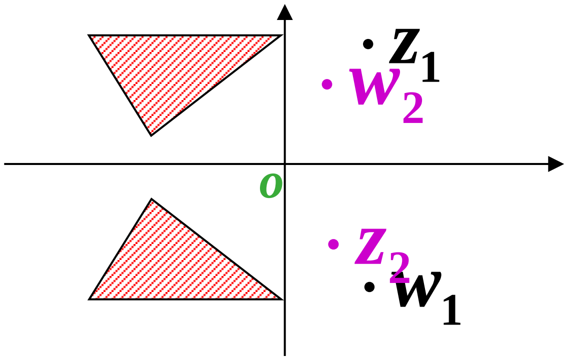
一、复变函数的定义

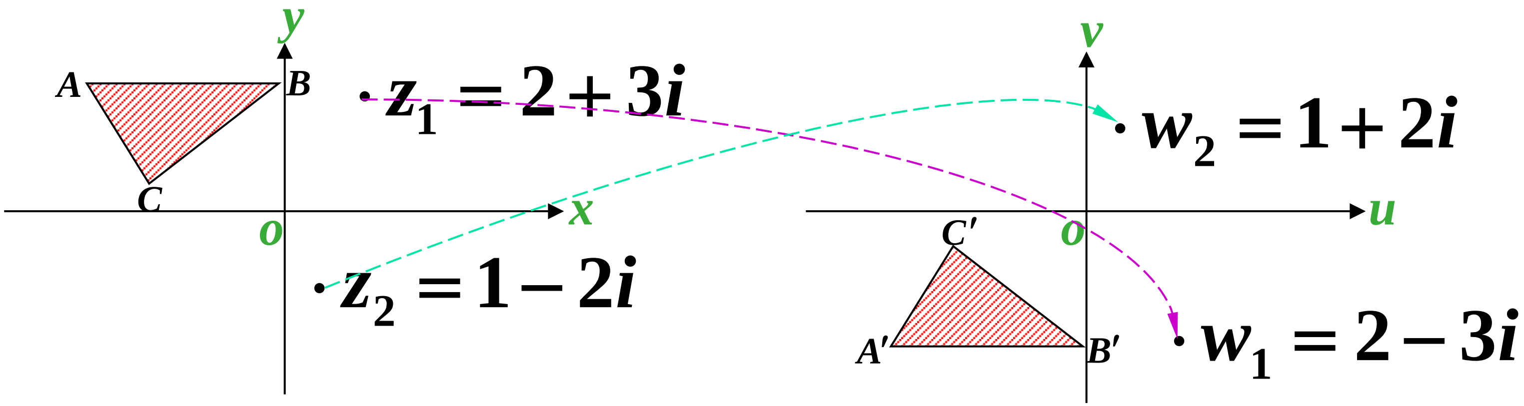
如果把z平面和w平面重叠在一起，不难看出

$$w = \bar{z}$$

是关于实轴的一个对称映射。

且是全同图形.

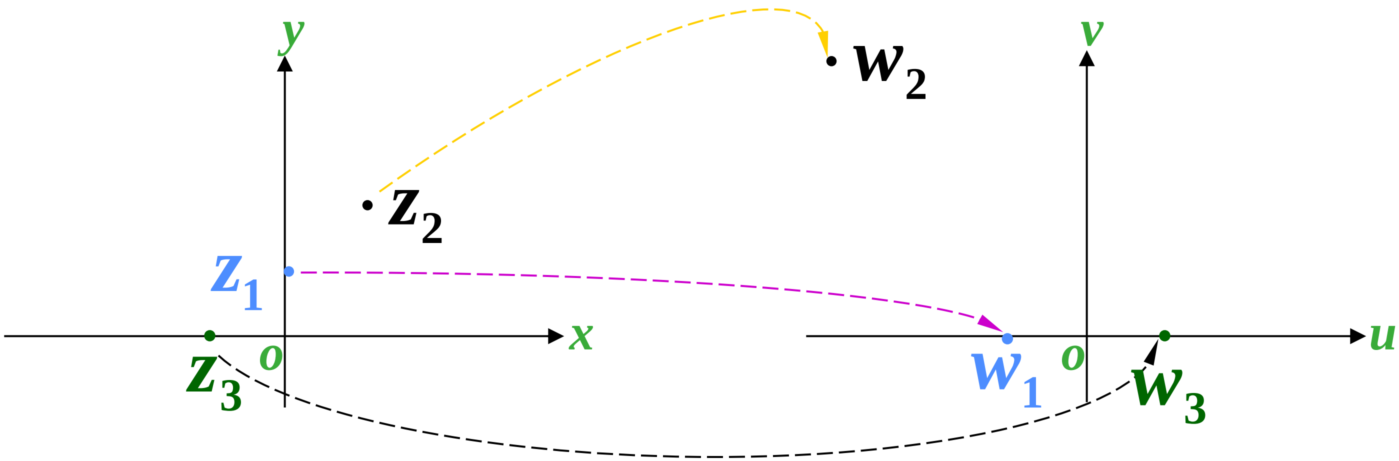




$$z_1 \to w_1, \quad z_2 \to w_2, \qquad \Delta ABC \to \Delta A'B'C'.$$

(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

显然将 z 平面上的点 $z_1 = i, z_2 = 1 + 2i, z_3 = -1$ 映射成 w 平面上的点 $w_1 = -1, w_2 = -3 + 4i, w_3 = 1.$

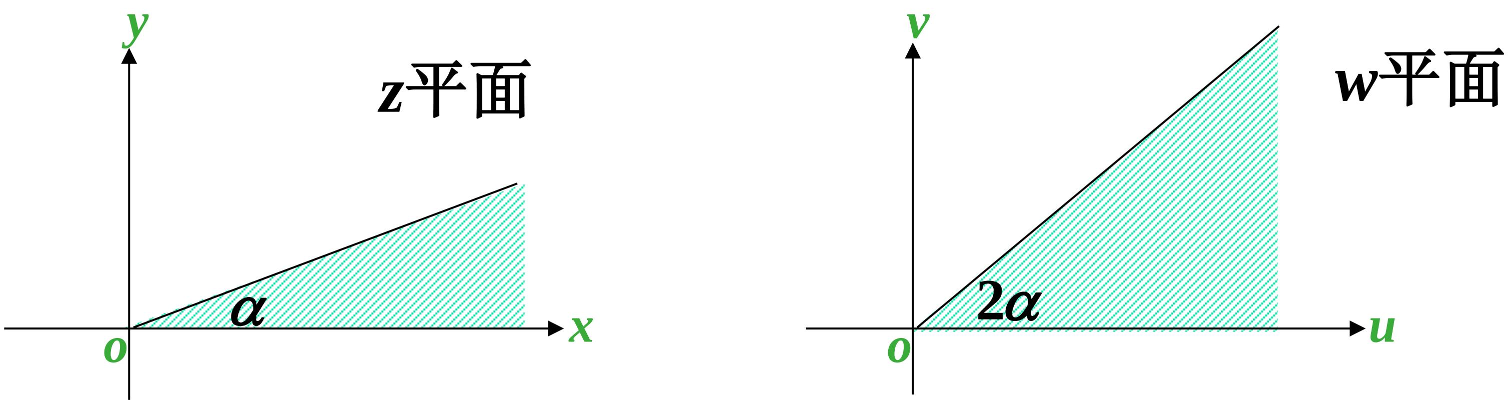


一、复变函数的定义

(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

根据复数的乘法公式可知,

映射 $w = z^2$ 将 z 的辐角增大一倍.



将 z 平面上与实轴交角为 α 的角形域映射成 w 平面上与实轴交角为 2α 的角形域.

(2) 函数 $w=z^2$ 构成的映射.

函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数:

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy.$$

它把 z 平面上的两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2-y^2=c_1,\quad 2xy=c_2,$$

分别映射成 w 平面上的两族平行直线

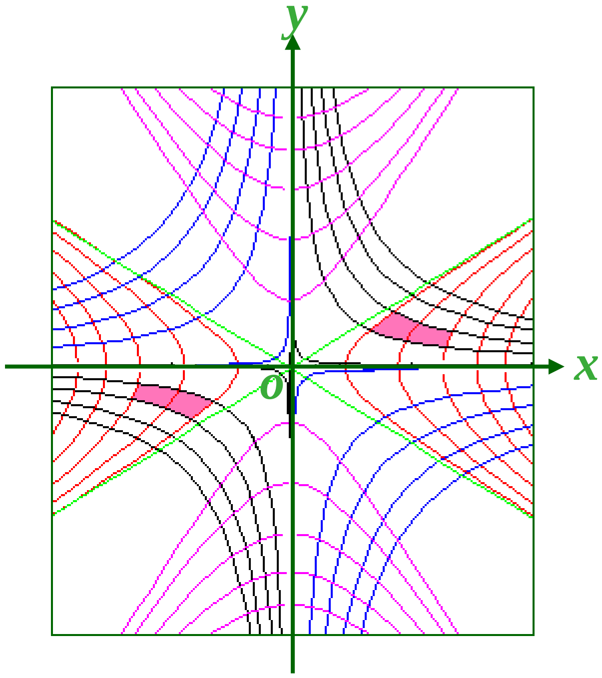
$$u=c_1,\quad v=c_2.$$

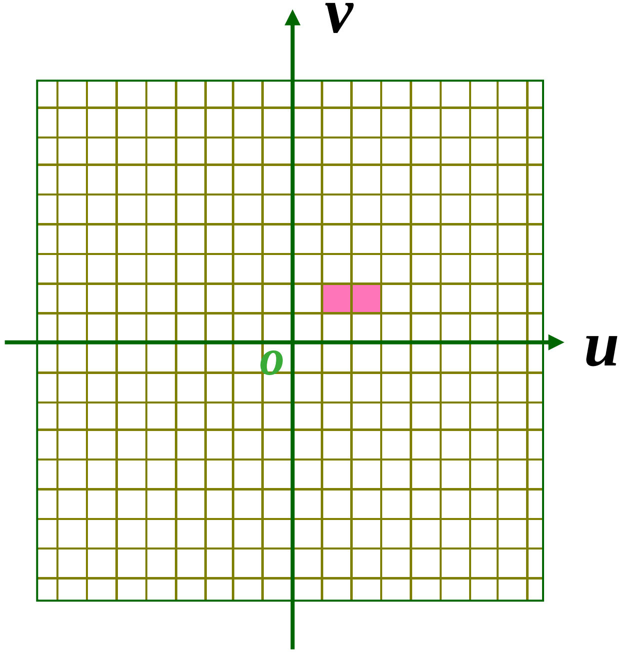
(如下页图)

一、复变函数的定义

(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

将第一图中两块阴影部分映射成第二图中同一个长方形.





一、复变函数的定义

(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射.

直线 $x = \lambda$ 的象的参数方程为:

$u = \lambda^2 - y^2, \quad v = 2\lambda y. \quad (y$ 为参数)

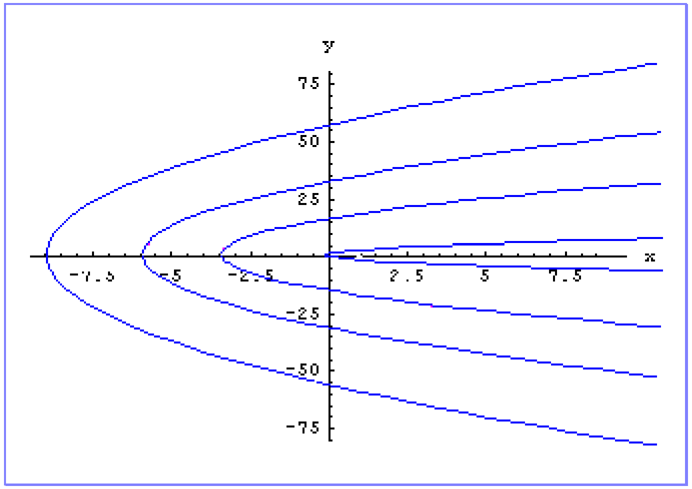
消去参数 y 得: $\quad v^2 = 4\lambda^2(\lambda^2 - u),$

以原点为焦点,开口相左的抛物线.(图中曲线)

同理直线 $y = \mu$ 的象为:

$v^2 = 4\mu^2(\mu^2 + u),$

以原点为焦点,开口相右的抛物线.(图中曲线)



一、复变函数的定义

整线性映射及其保圆性

整线性映射是指：

$$w = az + b$$

其中a、b为复常数且$a \neq 0$。

令 $a = |a| e^{i\alpha}$ ， 则 $w = |a| e^{i\alpha} z + b$

1.平移 $w = \eta + b$

2.旋转 $\eta = e^{i\alpha} \zeta$

3.伸缩 $\zeta = |a| z$

一、复变函数的定义

在复平面上把圆周映射成圆周，这个性质叫保圆性。

$z = w/|a|$ 代入

$$\Gamma: Az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + D = 0\left(|\beta|^2 > AD, A \neq 0\right)$$

得 $Aw\bar{w} + |a|\bar{\beta}w + |a|\beta\bar{w} + |a|^2 D = 0$

这就证明了映射 $w = |a|z$ 是保圆的。

因此整线性映射 *w*=az+b也具有保圆性。

6. 反函数的定义:

设 $w = f(z)$ 的定义集合为 z 平面上的集合 G, 函数值集合为 w 平面上的集合 G^*, 那末 G^* 中的每一个点 w 必将对应着 G 中的一个(或几个)点.

于是在 G^* 上就确定了一个单值(或多值)函数 $z = \varphi(w)$, 它称为函数 $w = f(z)$ 的反函数, 也称为映射 $w = f(z)$ 的逆映射.

一、复变函数的定义

根据反函数的定义,

$$\forall w \in G^*, \quad w = f[\varphi(w)],$$

当反函数为单值函数时, $z = \varphi[f(z)], \ z \in G.$

如果函数 (映射) $w = f(z)$ 与它的反函数 (逆映射) $z = \varphi(w)$ 都是单值的, 那末称函数 (映射) $w = f(z)$ 是一一对应的. 也可称集合 G 与集合 G^* 是一一对应的.

今后不再区别函数与映射。

一、复变函数的定义

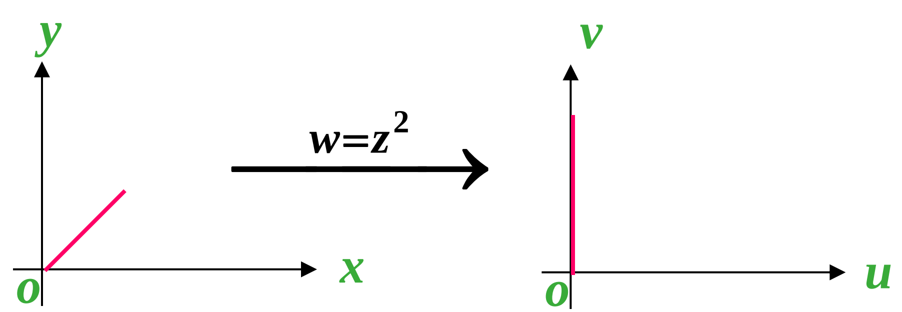
例1 在映射$w=z^2$下求下列平面点集在w平面上的象

(1) 线段$0<r<2,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$; 还是线段.

解 设$z=re^{i\theta}$,

$w=\rho e^{i\varphi}$,

则 $\rho=r^2,\quad \varphi=2\theta$,



故线段$0<r<2,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$映射为$0<\rho<4,\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}$,

一、复变函数的定义

例1 在映射$w=z^2$下求下列平面点集在w平面上的象

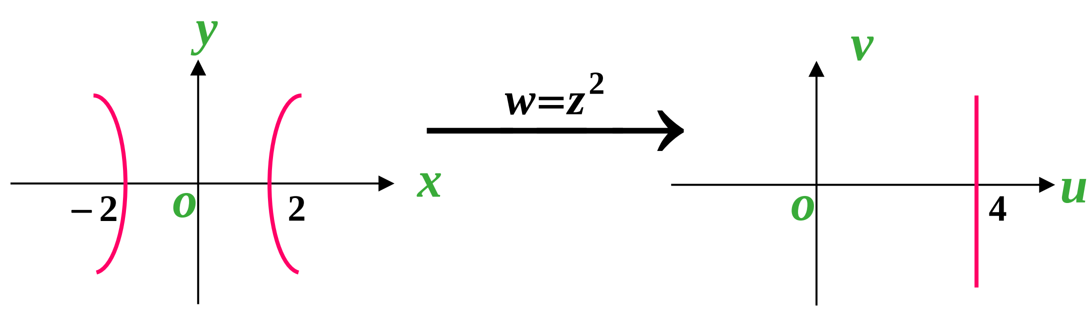
(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$;

解 令 $z=x+iy,\ w=u+iv,$

则 $u+iv=x^2-y^2+2xyi,\qquad u=x^2-y^2,$

$$x^2-y^2=4$$

$$\Rightarrow u=4,$$



$G'=\{w|\mathrm{Re}\,w=4\}$ 平行于 v 轴的直线.

一、复变函数的定义

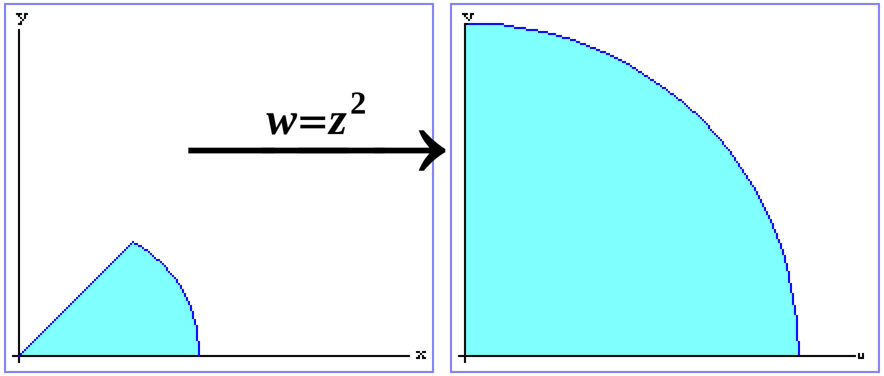
例1 在映射$w=z^2$下求下列平面点集在w平面上的象

(3) 扇形域 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4},\ 0<r<2.$

解 设 $z=re^{i\theta}$， $w=\rho e^{i\varphi}$，则 $\rho=r^2$， $\varphi=2\theta,$

故扇形域 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4},$

$0<r<2$映射为



$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}, 0<\rho<4,$ 仍是扇形域.

$G' = \{w \mid |w| = 4, 0 < \arg w < \pi/2\}$

一、复变函数的定义

例2 对于映射 $w = z + \dfrac{1}{z}$, 求圆周 $|z| = 2$ 的象.

解 令 $z = x + iy$, $w = u + iv$,

映射 $w = z + \dfrac{1}{z} \Rightarrow u + iv = x + iy + \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$,

于是 $u = x + \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$,

圆周 $|z| = 2$ 的参数方程为:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

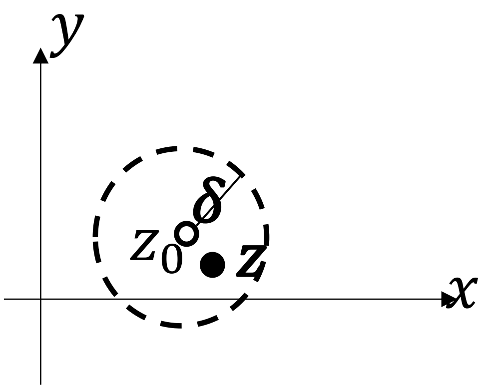
一、复变函数的定义

所以像的参数方程为 $\begin{cases} u = \dfrac{5}{2}\cos\theta \\ v = \dfrac{3}{2}\sin\theta, \end{cases}$ $0 \le \theta \le 2\pi$

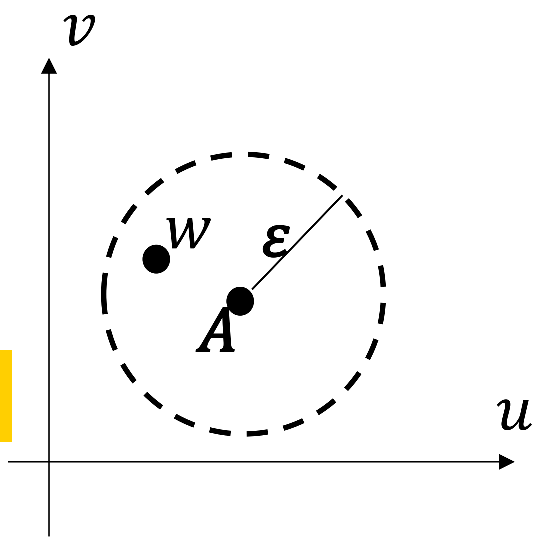
表示 w 平面上的椭圆：$\dfrac{u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1.$

二、复变函数的极限

1.函数极限的定义:（P23 定义2.1.2）



设函数 $w = f(z)$ 定义在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内,如果有一确定的数 A 存在,对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,相应地必有一正数 $\delta(\varepsilon)$ 使得当 $0 < |z - z_0| < \delta(0 < \delta \le \rho)$时,有 $|f(z) - A| < \varepsilon$ 那末称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限.

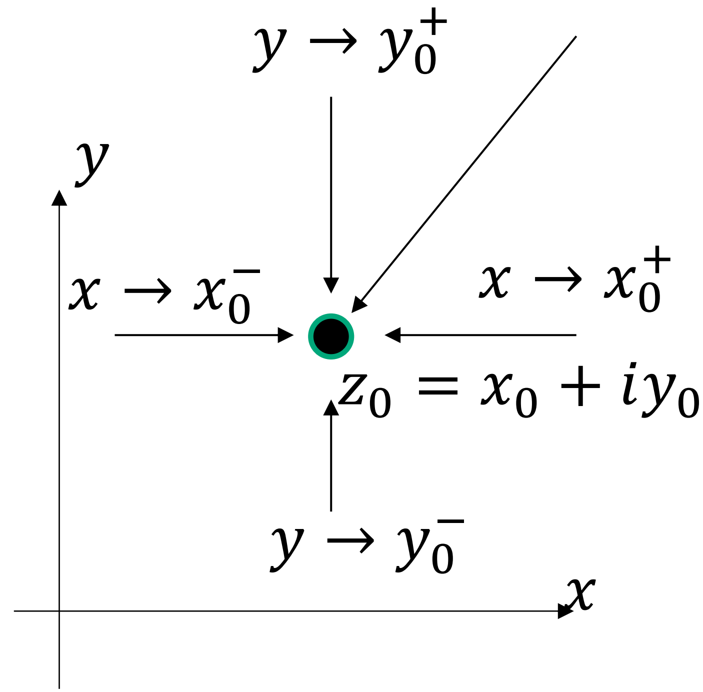


记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.(或 $f(z) \xrightarrow{z \to z_0} A$)

注意: 定义中 $z \to z_0$ 的方式是任意的.

二、复变函数的极限

偏极限



(1) z从右边趋向于z_0

如果$z_0 = x_0 + iy_0$,右偏极限可写成

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x + iy_0)$$

这就是一个通常的实变量极限。

(2) z从左边趋向于z_0

左偏极限可写成 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x + iy_0)$

(3) 从上边的偏极限 $\lim\limits_{y \to y_0^+} f(x_0 + iy)$

(4) 从下边的偏极限 $\lim\limits_{y \to y_0^-} f(x_0 + iy)$

(5)z从斜线趋向于z_0 $\lim\limits_{t \to t_0^+} f((x_0 + t) + i(y_0 + \mathrm{t}))$

偏极限

- 如果$\lim_{z\to z_0} f(z)=A$，则每个偏极限都必须也等于A。
- 但是，有两个偏极限不相等，或者有一个偏极限发散，则极限也必须发散。
- 如果怀疑一个极限不存在，一个好的**检验方法就是计算两个偏极限**，看它们是否不同。
- 如果两个偏极限相同，不保证极限就存在，因其他偏极限可能不相同。

2. 极限计算的定理

定理一

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $A=u_0+iv_0$, $z_0=x_0+iy_0$, 那末 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

说明

该定理将求复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的极限问题, 转化为求两个二元实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的极限问题.

二、复变函数的极限

定理二 （P24 定理2.1.1）

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A,\ \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B,$ 那末

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B;$

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=AB;$

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}\quad (B\neq 0).$

与实变函数的极限运算法则类似.

二、复变函数的极限

例1 证明函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ 当 $z\to 0$ 时的极限不存在.

证 (一) 令 $z=x+iy$, 则 $f(z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$u(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad v(x,y)=0,$$

当 z 沿直线 $y=kx$ 趋于零时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} u(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+(kx)^2}}$$

二、复变函数的极限

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2(1+k^2)}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

随 k 值的变化而变化,

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)$ 不存在, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=0$,

根据定理一可知, $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

证 (二)　令 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,

则 $f(z)=\dfrac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$,

二、复变函数的极限

当 z 沿不同的射线 $\arg z = \theta$ 趋于零时，

$f(z)$趋于不同的值.

例如 z 沿正实轴 $\arg z = 0$ 趋于零时，$f(z) \to 1$,

沿 $\arg z = \frac{\pi}{2}$ 趋于零时，$f(z) \to 0$,

故 $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$不存在.

例2 证明函数 $f(z)=\dfrac{z}{\bar{z}}\ (z\neq 0)$ 当 $z\to 0$ 时的极限不存在.

证 令 $z=x+iy,\quad f(z)=u+iv,$

则 $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad v(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2},$

当 z 沿直线 $y=kx$ 趋于零时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} v(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2k}{1+k^2},$$

二、复变函数的极限

随 k 值的变化而变化,

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$ 不存在,

根据定理一可知, $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

三、复变函数的连续性

1. 连续的定义:（P24定义2.1.3）

设 $f(z)$ 是区域D上的复变函数， z_0 是该区域内的一个点。

如果 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 那末我们就说 $f(z)$ 在 z_0 处连续. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 我们说 $f(z)$ 在 D 内连续.

函数 $f(z)$ 在曲线 C 上 z_0 处连续的意义是

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0), \quad z \in C.$$

不是每个函数都是连续的，例如arg z在原点和负实轴上不连续

三、复变函数的连续性

定理三

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 连续的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

例如， $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$,

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 在复平面内除原点外处处连续，$v(x,y)=x^2-y^2$ 在复平面内处处连续，

故 $f(x,y)$ 在复平面内除原点外处处连续.

该定理将复变函数的连续性问题与两个实元函数的连续性密切联系在一起

三、复变函数的连续性

定理四

(1) 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商 (分母在 z_0 不为零) 在 z_0 处仍连续.

(2) 如果函数 $h=g(z)$ 在 z_0 连续, 函数 $w=f(h)$ 在 $h_0=g(z_0)$ 连续, 那末复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 z_0 处连续.

三、复变函数的连续性

特殊的:

(1) 有理整函数(多项式)

$$w = P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \qquad a_n \neq 0$$

对复平面内的所有点 z 都是连续的;

(2) 有理分式函数

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)},$$ 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是多项式, $Q(z) \neq 0$

在复平面内使分母不为零的点也是连续的.

三、复变函数的连续性

例3 证明:如果 $f(z)$ 在 z_0 连续,那末 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$,

则 $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$,

由 $f(z)$ 在 z_0 连续,

知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0)处都连续,

于是 $u(x,y)$ 和 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0)处连续,

故 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 连续.

§2.2 解析函数

1 复变函数导数

2 解析函数

1. 复变函数的导数

定 义

- 设$w = f(z)$为定义在区域D内的单值复变函数，$z_0 \in D$，如果极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \text{ 或 } \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$$

存在，则称函数$f(z)$在z_0可导。这个极限值称为$f(z)$在z_0的导数，记作$f'(z_0)$或者有时记作$\frac{df}{dz}(z_0)$

记作 $$f'(z_0) = \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

1. 复变函数的导数

在定义中应注意:

$z_0+\Delta z \to z_0$(即$\Delta z \to 0$)的方式是任意的。

即$z_0+\Delta z$在区域D内以任意方式趋于 z_0时，比值

$\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 都趋于同一个数

如果函数$f(z)$在区域D内处处可导，我们就称$f(z)$

在区域D内可导

- D内每一点都对应于$f(z)$的一个导数值，因而，在D内定义了一个函数，称为$f(z)$ 在D内的导函数，简称$f(z)$ 的导数，记作$\dfrac{df}{dz}$，$f'(z)$

1. 复变函数的导数

例1 求$f(z)=z^2$的导数.

解

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z.$$

因而 $(z^2)'=2z$

1. 复变函数的导数

例2 讨论$f(z)=\operatorname{Im} z$的可导性.

解 $$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}(z+\Delta z)-\operatorname{Im} z}{\Delta z}$$

$$=\frac{\operatorname{Im} z+\operatorname{Im}\Delta z-\operatorname{Im} z}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Im}\Delta z}{\Delta z}$$

$$=\frac{\operatorname{Im}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

1. 复变函数的导数

当点沿平行于实轴的方向($\Delta y=0$)而使$\Delta z\to 0$时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=0,$$

当点沿平行于虚轴的方向($\Delta x=0$)而使$\Delta z\to 0$时,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1}{i},$$

当点沿不同的方向使$\Delta z\to 0$时,极限值不同,

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}\text{不存在.}$$

故$f(z)=\mathrm{Im}\,z$在复平面上处处不可导.

1. 复变函数的导数

例3 问$f(z)=x+2yi$是否可导？

解
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)i-x-2yi}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}$$

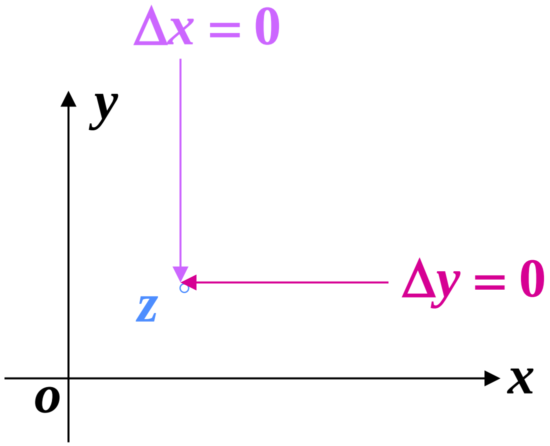
1. 复变函数的导数

设$z+\Delta z$沿着平行于 x 轴的直线趋向于 z，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

设$z+\Delta z$沿着平行于 y 轴的直线趋向于 z，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{2\Delta yi}{\Delta yi}=2,$$



所以$f(z)=x+2yi$的导数不存在.

1. 复变函数的导数

偏极限

- 如果z从水平方向趋向于$z_0 = x_0 + iy_0$，因此，

  $z = x + iy_0$,则上述极限就变为

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x+iy_0)-f(x_0+iy_0)}{(x+iy_0)-(x_0+iy_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

- 如果z从垂直方向趋向于$z_0 = x_0 + iy_0$，因此，

  $z = x_0 + iy$,则

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0+iy)-f(x_0+iy_0)}{(x_0+iy)-(x_0+iy_0)} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

1. 复变函数的导数

- 我们得出**结论**：若函数f在z_0可导，则

$$\frac{df}{dz}(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

- 特别，为了f在z_0可导，对x的导数和对y的导数必须密切相关，相关关系由下列方程给出

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

- 该方程被称为**柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)方程**

柯西-黎曼方程的直角坐标形式

- 柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

- 若将f写成直角坐标形式为

$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

- 则 柯西-黎曼方程变成

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

- 得到柯西-黎曼方程的**直角坐标形式**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

函数可导→

函数的实部和虚部密切相关

2) 可导的必要条件

- **定理** 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，并且$f'(z)$在点$z_0=x_0+iy_0$存在，则u和v的一阶偏导数或$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$在点$(x_0,y_0)$存在，并且它们在该点满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\qquad 或\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

此时，$f'(z)$可以写成

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$$

其中偏导数在点(x_0,y_0)取值。

- **柯西-黎曼方程是函数f在z_0可导的必要条件**
- 所以它们**经常用来判定f在哪些点不可导**。

例4 共轭函数$f(z)=\bar{z}$

- 其直角坐标形式为

$$f(x+iy)=x-iy$$

偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-i$$

对所有的x和y，不满足C-R方程，因此该函数处处不可导.

例5 函数$f(z)=|z|^2$

其直角坐标形式为

$$f(x+iy)=x^2+y^2$$

偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\frac{\partial f}{\partial y}=2y$$

C-R方程要求$2xi=2y$，取实部和虚部，得到$x=0$和$y=0$，**因此$f'(z)$在任何非零点都不存在**。

- C-R方程原点0处满足，$f'(0)$是否存在呢？
- 该定理不能确保$f'(0)$存在！！

例5 说明了三个事实

(1) 函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$可以只在某个点$z=x+iy$可导，但在点z的一去心邻域内都不可导；

(2) 由于当$f(z)=|z|^2$时，$u(x,y)=x^2+y^2$且$v(x,y)=0$，一个单复变量函数的实部和虚部可以在点$z=x+iy$处有任意阶连续偏导数，但函数本身在该点不可导；

(3) 因为函数$f(z)=|z|^2$的分量函数$u(x,y)=x^2+y^2$和$v(x,y)=0$在复平面内连续，很明显，函数在一点连续并不能确保它在该点可导。

例6 设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的定义如下

$$f(z)=\begin{cases}\bar{z}^2/z & \text{当}z\neq 0\text{时}\\ 0 & \text{当}z=0\text{时}\end{cases}$$

证明$f'(0)$不存在，但C-R方程在$z=0$成立。

（1）证：$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}^2/\Delta z}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}\right)^2$

Δz沿着平行于实轴的方向趋于0，因而$\Delta y=0$，这时极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=1$$

Δz沿着直线$\Delta y=\Delta x$的方向趋于0，这时极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=-1$$

因此$f'(0)$不存在

(2) 证：C-R方程在$z=0$成立。

当点$(x,y)\neq(0,0)$时，它的实部和虚部分别是

$$u(x,y)=\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}\text{和}v(x,y)=\frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}$$

由$f(z=0)=0$定义，知$u(0,0)=0,\ v(0,0)=0$

因为$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(0+\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(0,0+\Delta y)-v(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta y}=1$$

所以C-R方程$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$在$z=0$成立

C-R方程在$z=0$成立。

同样可证明$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$在$z=0$成立。

3)一点可导的充分条件

- **定理** 设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在点$z_0=x_0+iy_0$的某个邻域内有定义，并且

(1) 如果f的偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$或$u$和$v$的一阶偏导数在点$(x_0,y_0)$处连续；

(2) 在点(x_0,y_0)满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\text{或}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

则$f'(z_0)$存在，其值为

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$$

其中偏导数在点(x_0,y_0)取值

- **例7** 函数$f(x+iy)=\left(x^2-y^2\right)+i(2xy)$

偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+i(2y)，\frac{\partial f}{\partial y}=-2y+i(2x)$$

对所有的x和y，满足C-R方程，且偏导数连续，因此该函数处处可导，且其导数为

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial f}{\partial x}=2x+i(2y)$$

换句话说，函数$f(z)=z^2$可导，且$f'(z)=2z$

- **例8**　函数$f(z)=|z|^2$

其直角坐标形式为

$$f(x+iy)=x^2+y^2$$

偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\frac{\partial f}{\partial y}=2y$$

只在原点0处满足C-R方程，且偏导数在$z=0$处连续，因此**该函数原点0处可导**，对其他所有的x和y，该函数不可导。

- **例9** $\boldsymbol{f(x+iy)=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y}$

偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-e^{x}\sin y+ie^{x}\cos y$$

对所有的x和y，**满足C-R方程**，且**偏导数连续**，因此该函数处处可导，且其导数为

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y$$

换句话说，函数$f(z)=e^{z}$可导，且$f'(z)=e^{z}$

- 例如，考虑函数$f(z) = x^3 + i(1-y)^3$

  说$f(z)$在每一点都可导且

$$f(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$$

  是不对的。

- 偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \frac{\partial f}{\partial y} = -i3(1-y)^2$$

  C-R方程要求$3x^2 + 3(1-y)^2 = 0$，即只有当$x = 0$且$y = 1$时C-R方程才成立。**也就是$z = i$时$f'(z)$才存在，此时$f'(i) = 0$**

注意：

当应用可导的**充分条件**的这个定理计算函数在z_0的导数时，我们必须注意：**在判断$f'(z_0)$存在之前，不能使用定理中的$f'(z)$的公式**。

导数定义

- 设$w = f(z)$为定义在区域D内的**单值**复变函数，$z_0 \in D$，如果极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \text{或} \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$$

存在，则称**函数$f(z)$在z_0可导**。这个极限值称为**$f(z)$在z_0的导数**，记作$f'(z_0)$或者有时记作$\frac{df}{dz}(z_0)$

记作 $$f'(z_0) = \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

在定义中应注意:

$z_0+\Delta z \to z_0$(即$\Delta z\to 0$)的方式是**任意**的。

复变函数的导数

- **结论**：若函数f在z_0可导，则

$$\frac{df}{dz}(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

- 下列方程给出

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

- 该方程被称为**柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)**方程

柯西-黎曼方程的直角坐标形式

- 柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

- 柯西-黎曼方程的**直角坐标形式**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

函数可导→

函数的实部和虚部密切相关

可导的必要条件

- **定理** 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，并且$f'(z)$在点$z_0=x_0+iy_0$存在，则u和v的一阶偏导数或$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$在点$(x_0,y_0)$存在，并且它们在该点满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\quad \text{或}\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

此时，$f'(z)$可以写成

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$$

其中偏导数在点(x_0,y_0)取值。

- **柯西-黎曼方程是函数f在z_0可导的必要条件**
- 所以它们**经常用来判定f在哪些点不可导**。

一点可导的充分条件

- 定理　设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在点$z_0=x_0+iy_0$的某个邻域内有定义，并且

(1) 如果f的偏导数$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$或$u$和$v$的一阶偏导数在点$(x_0,y_0)$处连续;

(2) 在点(x_0,y_0)满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\text{或}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

则$\boldsymbol{f'(z_0)}$存在，其值为

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$$

其中偏导数在点(x_0,y_0)取值

4)复变函数可导的充要条件

- **定理** 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是区域D上的复变函数，则函数$f(z)$在D内一点$z=x+iy$处可导的**充要条件**是

(1) $u(x,y)$和$v(x,y)$可微，(2)满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

由该定理，可得函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 处的导数公式：

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

二元函数可微

- 定义：若函数在某点可微，则该函数在该点对x和y的**偏导数必存在**，且在这点的某一邻域内都存在且连续。
- 必要条件：若函数在某点可微，则该函数在该点对x和y的偏导数必存在。
- 充分条件：**若函数对x和y的偏导数在这点的某一邻域内都存在且连续，则该函数在这点可微。**
- 判断公式：若函数在某点对x和y的偏导数在这点的某一邻域内都存在且连续，则该函数在这点可微。

推论 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，若 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的四个**一阶偏导函数在点 (x_0,y_0) 均连续**并且**满足C-R 方程**，则 $f(z)$ 在点 $z_0=x_0+y_0 i$ 处**可导**。

注意 1） $f(z)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ **可微**等价于它在该点**可导**。但不等价于其实部函数与虚部函数在点 (x_0,y_0) 可微。

2）一个二元实函数在**某点可微的充分条件**是：它的两个一阶偏导数在该点某邻域内存在，而且连续。

复变函数的导数的计算方法

如果复变函数的**导数**存在，其**计算方法**

- (1) 导数的定义

$$f'(z_0)=\frac{df}{dz}(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

- (2) 柯西-黎曼方程

$$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

$$\begin{aligned}f'(z_0)&=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\\&=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\\&=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

5)可导与连续的关系

- **函数$f(z)$在z处可导，则在z处一定连续, 但$f(z)$在z处连续不一定在z处可导**

- 由导数定义知

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)=0$$

- 即$f(z)-f(z_0)=f'(z_0)(z-z_0)+o(|z-z_0|)$
- 因此$\lim\limits_{z\to z_0}\left(f(z)-f(z_0)\right)=0$
- 即$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$
- 即，可导必连续。

	实变函数	复变函数
极限	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$
连续	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$
导数	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=f'(x_0)$	$\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}=f'(z_0)$

6) 求导法则 ----实函数中求导法则的推广

(1) $(c)' = 0$, 其中c为复常数.

(2) $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$.

(3) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

(4) $$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}. \quad (g(z) \neq 0)$$

(5) $\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z)$. 其中 $w = g(z)$

(6) $f'(z) = \dfrac{1}{\phi'(w)}$, 其中 $w = f(z)$与$z = \phi(w)$是两个互为反函数的单值函数，且$\phi'(w) \neq 0$

(7) $(z^n)' = nz^{n-1}$ 其中，n为正整数

7) 可微

复变函数微分的概念在形式上与一元实变函数的微分概念完全一致.

如果函数$w = f(z)$在z_0可导，由导数定义，有

$$\Delta w = f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|)\Delta z$$

即，$w = f(z)$在z_0可微。

称$f'(z_0)\Delta z$为$w = f(z)$在z_0的微分，记作

$$dw = f'(z_0)\Delta z$$

7) 可微

当$f(z) = z$时，$d\,z= df(z)=\Delta z$，因此有

$$dw= f'(z_0)dz$$

即

$$f'(z_0)= \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$$

因此，$f(z)$在 z_0可导与在z_0可微是等价的。

如果$f(z)$在区域D内处处可微，称$f(z)$在区域D内可微。

§2.2 解析函数

1 复变函数导数

2 解析函数

2. 解析函数

1）解析函数定义

➢ 点可导充要条件

- 如果$f(z)$的**偏导数**$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$在$z_0$处**存在且连续**，则$f(z)$在$z_0$处可导**当且仅当**柯西-黎曼方程成立

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

- 大多数情况下，C-R方程只对屈指可数的几个点z_0成立，因此函数f在大多数情况下是不可导的。

例如，函数$f(x+iy) = x^2 + y^2$，只在原点0处可导

2. 解析函数

- **定义** 如果函数$f(z)$在z_0点及z_0的某个邻域内处处可导，则称$f(z)$在z_0点解析。
- 如果$f(z)$在区域D内每一点解析，则称$f(z)$在D内解析，或称$f(z)$是D内的**一个解析函数（全纯函数或者正则函数）**。
- 即：我们定义了一个函数在z_0点解析，则函数不仅在z_0点可导，且在z_0点附近的所有点都可导
- 如果一个函数在**整个复平面上解析——整函数**
- **整函数**是最佳一类复变函数。

2. 解析函数

奇点 定义　　如果函数 $f(z)$ 在 z_0 不解析，但在点z_0的每一邻域内，总有若干个点使$f(z)$解析，那末称 z_0 为$f(z)$的奇点.

◆ 函数在**区域内解析**与在**区域内可导**是**等价**的.

◆ 但是，函数在**一点处解析**与在**一点处可导**是**不等价**的概念. 即函数在一点处可导，不一定在该点处解析.

函数在一点处解析比在该点处可导的要求要高得多.

(1) $w=f(z)$ 在 D 内解析 $\Leftrightarrow$ 在D内可导.

(2) 函数$f(z)$在 z_0 点可导，未必在z_0解析.

2）函数解析的充要条件

- **定理** 设$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$是区域D上的复变函数，$u(x,y)$和$v(x,y)$具有**一阶连续偏导数**(因而u和v在D内可微)，且满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} \text{或} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

则**函数$f(z)$在D内解析**

2）函数解析的充要条件

- **定理** 设$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$在其定义的区域D内

  解析的**充要条件**是:

(1) $u(x, y)$和$v(x, y)$在区域D任一点$z = x + iy$可微，(2)

满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} \text{或} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

2）函数解析的充要条件

判定$f(z)$的解析性

- (1) 确定 $u(x,y)$和$v(x,y)$
- (2)计算偏导数$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 或$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，判定它们在哪些点处**连续**
- (3) 判定偏导数$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 或$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，在哪些点处满足柯西-黎曼方程
- (4) 判定(2)和(3)中的**共同点**为$f(z)$的**可导点**

  若可导点构成一个区域，在$f(z)$在这一区域上解析；

  若可导的点只是一些孤立点，则$f(z)$处处不解析。

解析函数举例

- **例1 函数$f(x+iy)=x^2+y^2$**

  只在原点0处可导，但在原点不解析。

  - ✓ 因为在原点的任意邻域内都不可导。

- **例2 函数$f(x+iy)=x^2+iy^2$**

  C-R方程为

$$2x=\frac{1}{i}(2iy)$$

因此f只在直线$x=y$上可导，但处处不解析，因为没有一个邻域内是可导的。

解析函数举例

- **例3** 设函数$f(z) = z^2$

因此$f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$

C-R方程为

$$2x + i(2y) = \frac{1}{i}\big(-2y + i(2x)\big)$$

对所有的x和y成立，且偏导数连续，因此该函数处处可导，也处处解析。

解析函数举例

- **例4** 设函数$f(z) = x^2 + axy + by^2 + i\left(cx^2 + dxy + y^2\right)$ 在复平面内处处解析，求常数a、b、c、d。

解：$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + ay + i(2cx + dy)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ax + 2by + i(dx + 2y\ )$$

若$f(z)$在复平面内处处解析，则这些偏导数满足C-R方程为

$$2x + ay + i(2cx + dy) = dx + 2y - i(ax + 2by)$$

比较系数得：$a = 2$，$b = -1$，$c = -1$，$d = 2$

例5　$h(z)=|z|^2$的解析性

解　$$\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}=\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}$$

$$=\frac{(z_0+\Delta z)(\overline{z_0}+\overline{\Delta z})-z_0\overline{z_0}}{\Delta z}=\overline{z_0}+\overline{\Delta z}+z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

(1) $z_0=0$,　$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}=0.$$

(2) $z_0\neq 0$,

令 $z_0+\Delta z$ 沿直线 $y-y_0=k(x-x_0)$ 趋于 z_0,

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1-i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{1+i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1-ik}{1+ik}$$

由于 k 的任意性,

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{1-ki}{1+ki}$$ 不趋于一个确定的值.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{h(z_0+\Delta z)-h(z_0)}{\Delta z}$$ 不存在.

因此，$h(z)=|z|^2$ 仅在 $z=0$ 处可导，而在其他点都不可导。根据定义，它在复平面内处处不解析。

3）解析函数的性质

定理1 设$w=f(z)$及$w=g(z)$是区域D内的解析函数，则

$f(z)\pm g(z)$，$f(z)g(z)$ 及 $f(z)/g(z)$ （$g(z)\neq 0$时）

均是D内的解析函数.

由以上讨论 $\Rightarrow$

$P(z)=a_0+a_1 z+\cdots+a_n z^n$是整个复平面上的解析函数;

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$是复平面上(除分母为0点外)的解析函数.

3)解析函数的性质

定理 2 设 $w=f(h)$ 在 h 平面上的区域 G 内解析, $h=g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析, $h=g(z)$的函数值集合$\subset$ G，则**复合函数**$w=f[g(z)]$在D内处处解析.

例6 研究函数 $w = \dfrac{1}{z}$ 的解析性.

解 因为 $w = \dfrac{1}{z}$ 在复平面内除 $z = 0$ 处处可导,

且 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{1}{z^2}$,

所以 w 在复平面内除 $z = 0$ 外处处解析,

$z = 0$ 为它的奇点.

例：如果$w=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数，则它一定能单独用z表示。

证：因为 $x=(z+\bar{z})/2$ $y=(z-\bar{z})/2i$

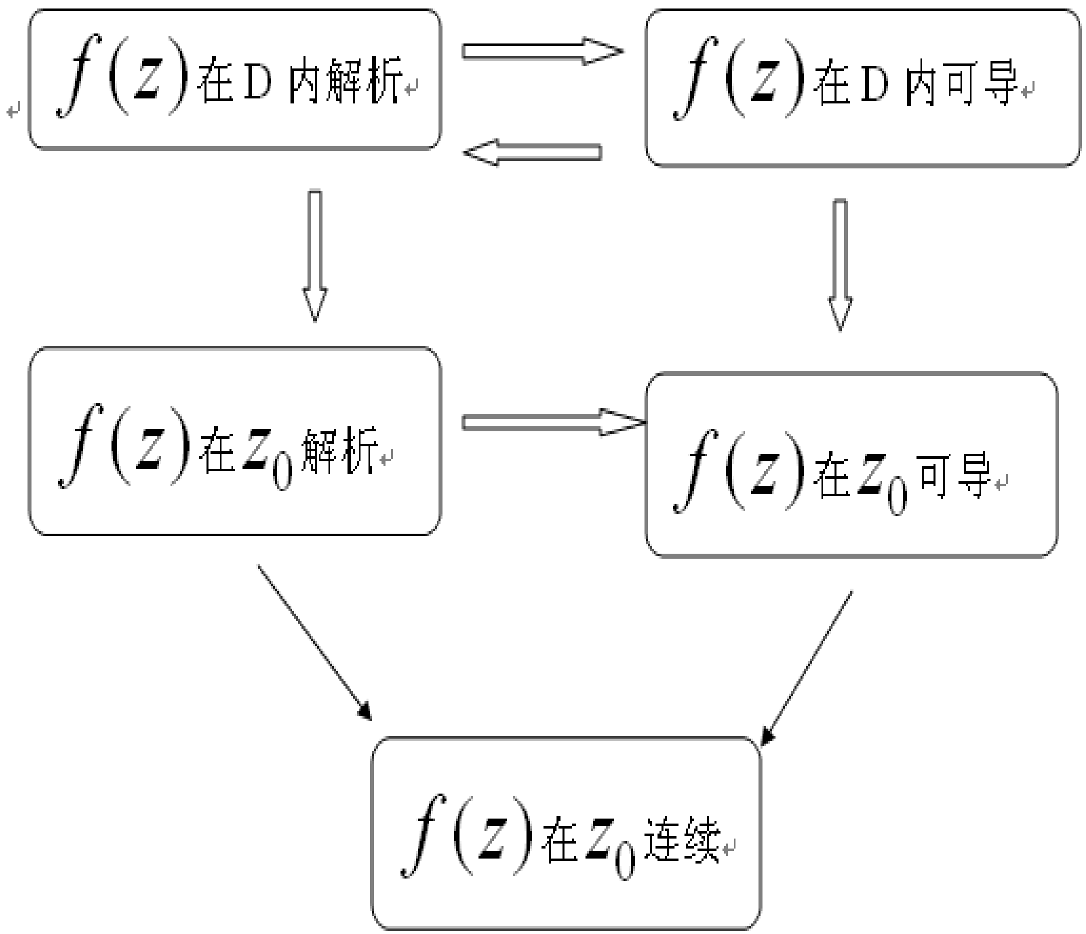
因此， $w=w(z,\bar{z})$ $\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}$ $\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{i}{2}$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}+i(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}})$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+i(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial y})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{i}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}) \quad \equiv 0$$

可导、解析和连续的关系：



5、解析函数和调和函数的关系

1) 调和函数的概念

定义　如果二元实变函数 $\varphi(x, y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数，并且满足*Laplace*方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

则称 $\varphi(x, y)$ 为区域 D 内的调和函数.

工程中的许多问题，如平面上的稳定温度场、静电场和稳定流场等都满足Laplace方程.

5、解析函数和调和函数的关系

设f在区域D上的解析函数,

$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

- 满足C-R方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

- 从而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$,
- 两个方程相加，得到

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0}$$

同理有 $\dfrac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}^2}+\dfrac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}^2}=\mathbf{0}$

u(x,y)和v(x,y)是D内的调和函数

5、解析函数和调和函数的关系

定理 任何在区域 D 内的**解析函数**,它的实部和虚部都是 D 内的**调和函数**。

- 为了使u是解析函数的实部， u必须是调和函数。
- 如果u**不是**调和函数，则它**不可能**是某个解析函数的实部
- 反过来，如果u**是区域D内的调和函数**，是不是意味着u是某解析函数的实部呢？
  - ✓ 通常答案是“是的”。
  - ✓ 如果D是整个复平面，这永远是对的。

任意两个调和函数分别为实部和虚部所构成的函数不一定解析。

5、解析函数和调和函数的关系

共轭调和函数

- 设$u(x,y)$为区域D内给定的调和函数，我们把使$u+iv$在D内构成解析函数的调和函数$v(x,y)$，称为$u(x,y)$的**共轭**调和函数
- **在区域D内满足C-R方程的两个调和函数中，称v是u的共轭调和函数**。

> **定理**　函数$f(z)=u+iv$在区域D内解析的**充要条件**是$f(z)$的**虚部v是实部u的共轭调和函数**。

6 构造解析函数

如 $v = x + y$不是$u = x + y$的共轭调和函数.

（$\because f(z) = u + iv = (x + y) + i(x + y)$在$z$平面上处处不解析$u_x = 1 = v_y \quad u_y = 1 \neq -v_x$）

要想使$u + iv$在D内解析，u及v还必须满足$C - R$方程，即v必须是u的共轭调和函数.由此，

已知一个解析函数的实部$u(x, y)$，利用$C - R$方程可求得它的虚部$v(x, y)$，从而构成解析函数$u + iv$.

(虚部$v(x, y)$)

(实部$u(x, y)$)

6 构造解析函数

定理 设$u(x,y)$在单连通D内调和函数，则(*)式所确定的$v(x,y)$，使得$f(z)=u+iv$在D内解析.

$$\boxed{v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+c \qquad (*)}$$

6 构造解析函数

设D一单连通区域,$u(x,y)$是区域D内的调和函数,则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

偏积分法

即, $-\dfrac{\partial u}{\partial y}$、$\dfrac{\partial u}{\partial x}$在$D$内有连续一阶偏导数

且 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy \overset{\exists v}{=} dv(x,y)$$

$$\boxed{v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+c \qquad (*)}$$

6 构造解析函数

$$\because \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{满足} C - R \text{方程.}$$

$\therefore u + iv$在D内解析.

6 构造解析函数

已知：$u(x,y)$,求其共轭调和函数$v(x,y)$：

由$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\overset{C-R方程}{=}-u_y dx+u_x dy$

然后两端积分。

类似地，

由$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\overset{C-R方程}{=}\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy$

然后两端积分得，

$$\boxed{u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}v_y dx-v_x dy+c \qquad (**)}$$

偏积分法

已知调和函数 $u(x,y)$ 或 $v(x,y)$, 用不定积分求解析函数的方法称为不定积分法.

不定积分法的实施过程:

解析函数 $f(z)=u+iv$ 的导数 $f'(z)$ 仍为解析函数,

且 $f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y+iv_x$

把 u_x-iu_y 与 v_y+iv_x 用 z 来表示,

求 $f(z)$

$f'(z)=u_x-iu_y=U(z)$, $\Rightarrow$ $\boxed{f(z)=\int U(z)\mathrm{d}z+c,}$ 实部 u

或　　积分

求 $f(z)$

$f'(z)=v_y+iv_x=V(z)$, $\Rightarrow$ $\boxed{f(z)=\int V(z)\mathrm{d}z+c,}$ 虚部 v

例1 由下列条件求解析函数$f(z)=u+iv$

$$u=x^2+xy-y^2 \qquad f(i)=-1+i$$

解：$\because \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y \quad -\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y+x$

$$\therefore dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=(2y-x)dx+(2x+y)dy$$

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2y-x)dx+(2x+y)dy+c$$

$$=\int_o^x -xdx+\int_0^y(2x+y)dy+c$$

$$=-\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}+c$$

曲线积分法

积分$v(x,y)$与路径无关

故 $$f(z)=(x^2-y^2+xy)+i(-\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2+c)$$

$$=(x+iy)^2-\frac{i}{2}(x+iy)^2+ic=(1-\frac{1}{2}i)z^2+ic$$

$\because f(i)=-1+i$ 代入上式得,$(1-\frac{i}{2})i^2+ic=-1+i$

$\therefore c=\frac{1}{2}$ $\quad f(z)=(1-\frac{i}{2})z^2+\frac{i}{2}$

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

又解 $\because \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + y \Rightarrow v = 2xy + \frac{y^2}{2} + \varphi(x)$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x) \overset{\because \frac{\partial v}{\partial x}}{=} 2y - x$$

偏积分法

$$\varphi'(x) = -x \qquad \varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\therefore v(x, y) = 2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + c$$

$$f(z) = (x^2 - y^2 + xy) + i(-\frac{1}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + c)$$

$u(x,y)=x^2-y^2+xy$

又解

$$\because dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

凑全微分法

$$=(2y-x)dx+(2x+y)dy$$

$$=\underline{2ydx+2xdy}\underline{-xdx+ydy}$$

$$=\underline{2dxy}+\underline{d(-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})}$$

$$v(x,y)=-\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}+c$$

$$f(z)=(x^2-y^2+xy)+i(-\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2+c)$$

$u(x,y)=x^2-y^2+xy$

$f(z)=u+iv$为解析函数 $u(x,y)=x^2-y^2+xy$

又解 $f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y$

$=(2x+y)-i(x-2y)$

$=2(x+iy)-i(x+iy)$

$=(2-i)(x+iy)\quad =(2-i)z$

$$f(z)=\int f'(z)dz=\int (2-i)z\,dz$$

$$\therefore f(z)=\frac{2-i}{2}z^2+c$$

$$f(z)=(x^2-y^2+xy)+i(-\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2+c)$$

不定积分法

2.3 初等函数

1. 指数函数
2. 对数函数
3. 幂函数
4. 三角函数
5. 双曲函数

初等复变函数

本节将实变函数的一些常用的初等函数推广到复变函数情形，研究这些初等函数的性质，并说明它们的解析性.

- 本节介绍一些基本的复变函数。例如，e^z,$\cos z$,$\sin z$,$ch\ z$,$sh\ z$,$Ln\ z$等等
- 在某些方面，这些函数非常类似于其对应的实函数，例如，$\sin z$是可导的，其导数为$\cos z$。
- 但也有很多**不同之处**。例如，$\sin z$的值并不局限在-1和1之间，它可取值2或i，或任意其他复数！

1. 指数函数

指数函数的定义:

当函数 $f(z)$ 在复平面内满足以下三个条件:

(1) $f(z)$在复平面内处处解析;

(2) $f'(z) = f(z)$;

(3) 当$\mathrm{Im}(z) = 0$时, $f(z) = e^x$,其中$x = \mathrm{Re}(z)$.

此函数称为复变数z的指数函数, 记为

$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

1. 指数函数

定义　设 $z=x+iy$，则复变数 z 的指数函数定义为

$$\exp(z)=e^{x}e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

显然

$$\mathrm{Re}(\exp(z))=e^{x}\cos y$$

$$\mathrm{Im}(\exp(z))=e^{x}\sin y$$

为简便，常用下面记号

与指数函数符号一致

与Euler公式相一致

$$e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|\exp z|=e^{x}\\ \mathrm{Arg}(\exp z)=y+2k\pi\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\end{cases}$$

注意 e^{z} 没有幂的意义, 只是代替 $\exp z$ 的符号.

1. 指数函数

性质

- 1) 满足通常的指数运算法则
  - ✓ $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$
  - ✓ $e^{z_1-z_2}=e^{z_1}/e^{z_2}$
  - ✓ $(e^z)^n=e^{nz}$
- 2) 函数e^z是整函数，即在复平面内解析，其导数为

$$\frac{d}{dz}e^z=e^z$$

- 3) 复指数是周期函数
  - ✓ $e^{z+2k\pi i}=e^z$ 该性质是实变指数函数e^x所没有的.
  - ✓ 因此，如果$e^z=e^w$，不能得出结论：$z=w$。最好说$z=w+2k\pi i$,对某个整数k

1. 指数函数

性质

- 5) 复指数不必要是正的，如

$$e^{\pi i} = -1$$

- 6) 事实上，任意非零复数可写成某个复数的复指数。例如，
  - ✓ 解方程$e^{z} = 1 + i$
  - ✓ 其解为$z = ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$
- 7) $e^{z} \neq 0$
- 8) 设$z = x + iy$，
  - ✓ 若$y = 0$，则$e^{z} = e^{x}$
  - ✓ 若$x = 0$，则$e^{iy} = \cos y + i \sin y$ 欧拉公式

1. 指数函数

例 1 设 $z = x + iy$，求(1) $\left|e^{i-2z}\right|$; (2) $\left|e^{z^2}\right|$; (3) $\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})$;

解 因为 $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

所以 $\left|e^z\right| = e^x$, $\quad \mathrm{Re}(e^z) = e^x \cos y.$

(1) $e^{i-2z} = e^{i-2(x+iy)} = e^{-2x+i(1-2y)}$, $\quad \left|e^{i-2z}\right| = e^{-2x}$;

(2) $e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2+2xyi}$, $\quad \left|e^{z^2}\right| = e^{x^2-y^2}$;

(3) $e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x+yi}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}}$, $\quad \mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}}) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos\dfrac{y}{x^2+y^2}.$

1. 指数函数

例 2 求出下列复数的辐角主值:

$$(1)\ e^{2+i};\quad (2)\ e^{2-3i};\quad (3)\ e^{3+4i};\quad (4)\ e^{-3-4i};\ (5) e^{i\alpha}-e^{i\beta}$$

解 因为 $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ 的辐角为

$$\operatorname{Arg} e^z = y+2k\pi \quad (k\text{为整数})$$

其辐角主值 $\arg e^z$ 为区间 $(-\pi,\pi]$ 内的一个辐角.

$$(1)\ \operatorname{Arg} e^{2+i}=1+2k\pi,\quad \arg e^{2+i}=1;$$

$$(2)\ \operatorname{Arg} e^{2-3i}=-3+2k\pi,\ \arg e^{2-3i}=-3;$$

$$(3)\ \operatorname{Arg} e^{3+4i}=4+2k\pi,\quad \arg e^{3+4i}=4-2\pi;$$

$$(4)\ \operatorname{Arg} e^{-3-4i}=-4+2k\pi,\ \arg e^{-3-4i}=-4+2\pi;$$

$$(5) e^{i\alpha}-e^{i\beta}=\cos\alpha+i\sin\alpha-(\cos\beta+i\sin\beta)$$

$$=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+2i\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}\right)$$

因为 $0\le\beta<\alpha\le 2\pi$, $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}>0$,

上式就是复数 $e^{i\alpha}-e^{i\beta}$ 的三角表示式.

所以 $\operatorname{Arg}(e^{i\alpha}-e^{i\beta})=\dfrac{\pi+\alpha+\beta}{2}+2k\pi$,

当$\alpha+\beta\le\pi$时, $\arg(e^{i\alpha}-e^{i\beta})=\dfrac{\pi+\alpha+\beta}{2}$,

当$\alpha+\beta>\pi$时, $\arg(e^{i\alpha}-e^{i\beta})=\dfrac{\pi+\alpha+\beta}{2}-2\pi$.

1. 指数函数

例 3 求函数 $\exp(e^{z})$ 的实部和虚部.

解 令 $z = x + iy$，则由 $e^{z} = e^{x}\cos y + ie^{x}\sin y$，得

$$\exp(e^{z}) = e^{e^{x}\cos y}[\cos(e^{x}\sin y) + i\sin(e^{x}\sin y)]$$

从而，有

$$\mathrm{Re}[\exp(e^{z})] = e^{e^{x}\cos y}\cos(e^{x}\sin y)$$

$$\mathrm{Im}[\exp(e^{z})] = e^{e^{x}\cos y}\sin(e^{x}\sin y)$$

2. 对数函数

- 设$z \neq 0$，称满足方程$e^w = z$的函数$w = f(z)$为复变量z的对数函数，记作$\mathrm{Ln}\, z$，即$w = Ln\, z$。
- 令$z = re^{i\theta}$,$w = u + iv$,则

$$e^{u+iv} = re^{i\theta}$$

所以$u = \ln r$,$v = \theta + 2k\pi$

或$u = \ln|z|$, $v = \mathrm{Arg}\, z$

定义：$Ln\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z$

$$= \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k\text{为整数}$$

$$\therefore \boxed{w = Lnz = \ln r + i(\theta + 2\pi k)} \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

2. 对数函数

注意事项

- (1) $\mathrm{Ln}\, z$是一个集合，可以写成如下形式

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z$$

意味着

$$w \in \mathrm{Ln}\, z \Leftrightarrow w\text{可以写成}\ln|z| + i\theta\text{ 的形式，}\theta \in \mathrm{Arg}\, z$$

- (2) $\forall w \in \mathrm{Ln}\, z$，有

$$e^w = e^{\ln|z|+i\theta}, \theta \in \mathrm{Arg}\, z$$

$$= e^{\ln|z|}e^{i\theta} = |z|e^{i\theta} = z$$

- (3) $\mathrm{Ln}\, e^z = \mathrm{Ln}\, e^{x+iy}$

$$= \ln e^x + i(y + 2k\pi)$$

$$= z + i2k\pi$$

2. 对数函数

因Argz为多值函数，所以对数函数 $w = Ln(z)$ 也是多值函数，且每两值相差 $2\pi i$的整数倍．若记

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

则 lnz 为一单值函数，称为 Lnz 的主值．由此

$$\mathrm{Ln} z = \ln z + 2k\pi i \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

对于每一个固定的 k，上式确定一单值函数，称为Lnz的一个分支.

特别地，当 $z = x > 0$ 时，Lnz 的主值 $\ln z = \ln x$ 就是实变数对数函数.

2. 对数函数

例4 求 $\mathrm{Ln}2$，$\mathrm{Ln}(-1)$ 以及与它们相应的主值.

解 因为 $\mathrm{Ln}2 = \ln 2 + 2k\pi i$,

所以 $\mathrm{Ln}2$ 的主值就是 $\ln 2$.

因为 $\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i\mathrm{Arg}(-1)$

$$= (2k+1)\pi i \quad (k\text{为整数})$$

所以 $\mathrm{Ln}(-1)$ 的主值就是 $\ln(-1) = \pi i$.

注意：在实函数中，负数无对数，而复变数对数函数是实对数函数的拓广.

2. 对数函数

例 5 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0.$

解 因为 $e^z = 1 + \sqrt{3}i,$

所以 $z = \mathrm{Ln}(1 + \sqrt{3}i)$

$$= \ln\left|1 + \sqrt{3}i\right| + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$= \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

解析函数

- **定义** 如果函数$f(z)$在z_0点及z_0的某个邻域内处处可导，则称$f(z)$在z_0点解析。
- 如果$f(z)$在区域D内每一点解析，则称$f(z)$在D内解析，或称$f(z)$是D内的**一个解析函数（全纯函数或者正则函数）**。
- **整个复平面上解析——整函数，**最佳一类复变函数。

(1) $w=f(z)$ 在 D 内解析 $\Leftrightarrow$ 在D内可导.

(2) 函数$f(z)$在 z_0 点可导，未必在z_0解析.

函数解析的充要条件

- **定理** 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在其定义的区域D内

  解析的**充要条件**是:

(1) $u(x,y)$和$v(x,y)$在区域D任一点$z=x+iy$可微，(2)

满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\text{或}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

函数解析的充要条件

判定$f(z)$的解析性

- (1) 确定 $u(x,y)$和$v(x,y)$
- (2)计算偏导数$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 或$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，判定它们在哪些点处**连续**
- (3) 判定偏导数$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 或$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，在哪些点处满足柯西-黎曼方程
- (4) 判定(2)和(3)中的**共同点**为$f(z)$的**可导点**

  若可导点构成一个区域，在$f(z)$在这一区域上解析；

  若可导的点只是一些孤立点，则$f(z)$处处不解析。

解析函数和调和函数的关系

1) 调和函数的概念

定义　如果二元实变函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数，并且满足Laplace方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

则称 $\varphi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

定理 任何在区域 D 内的**解析函数**,它的实部和虚部都是 D 内的**调和函数**。

共轭调和函数

- 设$u(x,y)$为区域D内给定的调和函数，我们把使$u+iv$在D内构成解析函数的调和函数$v(x,y)$，称为$u(x,y)$的**共轭**调和函数

> **定理** 函数$f(z)=u+iv$在区域D内解析的**充要条件**是$f(z)$的**虚部v是实部u的共轭调和函数**。

构造解析函数

已知一个解析函数的实部$u(x,y)$,利用$C-R$方程可求得它的虚部$v(x,y)$,从而构成解析函数$u+iv$.

(虚部$v(x,y)$)

(实部$u(x,y)$)

定理 设$u(x,y)$在单连通D内调和函数,则(*)式所确定的$v(x,y)$,使得$f(z)=u+iv$在D内解析.

$$\boxed{v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+c \qquad (*)}$$

构造解析函数

设D一单连通区域,$u(x,y)$是区域D内的调和函数,则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

偏积分法

$$\boxed{v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+c \qquad (*)}$$

$$\boxed{u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}v_y dx-v_x dy+c \qquad (**)}$$

偏积分法

已知调和函数 $u(x,y)$ 或 $v(x,y)$, 用不定积分求解析函数的方法称为不定积分法.

解析函数 $f(z)=u+iv$ 的导数 $f'(z)$ 仍为解析函数,

且 $f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=v_y+iv_x$

求$f(z)$

$f'(z)=u_x-iu_y=U(z)$, $\Rightarrow$ $\boxed{f(z)=\int U(z)\mathrm{d}z+c,}$ 实部u

或

积分

$f'(z)=v_y+iv_x=V(z)$, $\Rightarrow$ $\boxed{f(z)=\int V(z)\mathrm{d}z+c,}$ 求$f(z)$ 虚部v

1. 指数函数

指数函数的定义:

当函数 $f(z)$ 在复平面内满足以下三个条件:

(1) $f(z)$在复平面内处处解析;

(2) $f'(z) = f(z)$;

(3) 当$\mathrm{Im}(z) = 0$时, $f(z) = e^x$,其中$x = \mathrm{Re}(z)$.

此函数称为复变数z的指数函数, 记为

$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

1. 指数函数

定义 设 $z = x + iy$，则复变数 z 的指数函数定义为

$$\exp(z) = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\exp z| = e^x \\ \mathrm{Arg}(\exp z) = y + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

- 1) 满足通常的指数运算法则
- 2) 函数e^z是整函数，即在复平面内解析，其导数为

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z$$

- 3) 复指数是周期函数

该性质是实变指数函数 e^x所没有的.

1. 指数函数

性质

- 4) 复指数不必要是正的，如

$$e^{\pi i} = -1$$

- 5) 事实上，任意非零复数可写成某个复数的复指数。例如，
  - ✓ 解方程$e^z = 1 + i$
  - ✓ 其解为$z = ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$
- 6) $e^z \neq 0$

2. 对数函数

定义:

- 设$z \neq 0$，称满足方程$e^{w} = z$的函数$w = f(z)$为复变量z的对数函数，记作$\mathrm{Ln}\, z$，即$w = Ln\, z$。
- $Ln\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z$

$$= \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k\text{为整数}$$

$$\therefore \boxed{w = Lnz = \ln r + i(\theta + 2\pi k)} \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

$$u = \ln|z|,\ v = \mathrm{Arg}\, z$$

$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z$是一个集合

- $\mathrm{Ln}\, e^{z} = \mathrm{Ln}\, e^{x+iy}$

$$= \ln e^{x} + i(y + 2k\pi) = z + i2k\pi$$

2. 对数函数

因Argz为多值函数，所以对数函数 $w = Ln(z)$ 也是多值函数，且每两值相差 $2\pi i$的整数倍．若记

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i\arg z}$$

则 $\ln z$ 为一单值函数，称为 $\mathrm{Ln} z$ 的主值．由此

$$\boxed{\mathrm{Ln} z = \ln z + 2k\pi i \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots),}$$

特别地，当 $z = x > 0$ 时，$\mathrm{Ln} z$ 的主值 $\ln z = \ln x$ 就是实变数对数函数.

$\mathrm{Ln}(-1)$ 的主值就是$\ln(-1) = \pi i$.

注意： 在实函数中，负数无对数，而复变数对数函数是实对数函数的拓广.

2. 对数函数

定理2.4.3 对数函数的性质 Lnz

(1) $Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$,

(2) $Ln\dfrac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2 \quad (z_2 \neq 0)$,

(3) 在除去负实轴 (包括原点) 的复平面内， 主值支和其它各分支处处连续, 处处可导, 且

$$(\ln z)' = \frac{1}{z},$$

对于某一固定分支，有 $(Lnz)' = \dfrac{1}{z}$

4)解析性：ln z在除去原点与负实轴的平面内解析.

(5) 等式$\mathrm{Ln}\, z^n = n\mathrm{Ln}\, z$， $\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z} = \dfrac{1}{n}\mathrm{Lnz}$不再成立

2. 对数函数

证 (3) 设 $z = x + iy$, 当 $x < 0$ 时,

$$\lim_{y\to 0^-} \operatorname{Arg} z = -\pi, \qquad \lim_{y\to 0^+} \operatorname{Arg} z = \pi,$$

所以,除原点与负实轴,在复平面内其它点 $\ln z$ 处处连续.

$z = e^w$ 在区域 $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$ 内的反函数 $w = \ln z$ 是单值的,

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}e^w}{\mathrm{d}w}} = \frac{1}{z}.$$

[证毕]

$\therefore \omega = \ln z$ 除原点及负实轴外是解析的.

2. 对数函数

1） $\ln[(1+i)^2] = 2\ln(1+i)$ √

因为

$$\ln[(1+i)^2] = \ln(2i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$$

而 $2\ln(1+i)$

$$= 2(\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$$

$\mathbf{Ln}\, z^n = n\mathbf{Ln}\, z$

2） $\ln[(-1+i)^2] = 2\ln(-1+i)$ X

因为

$$\ln[(-1+i)^2] = \ln(-2i) = \ln 2 - i\frac{\pi}{2}$$

而 $2\ln(-1+i)$

$$= 2(\ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}) = \ln 2 + i\frac{3\pi}{2}$$

$\mathbf{Ln}\, z^n \neq n\mathbf{Ln}\, z$

2. 对数函数

- $\mathrm{Ln}\left(i^{1/2}\right) \overset{\surd}{=} \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\, i$ ？

$i^{1/2} = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$

$i^{1/2}$的两个根分别为$e^{i\pi/4}$和$e^{i5\pi/4}$

$\mathrm{Ln}\left(e^{i\pi/4}\right) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$

$= \pi i\left(\frac{1}{4} + 2k\right)$

$\mathrm{Ln}\left(e^{i5\pi/4}\right)$

$= \ln 1 + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$

$= \pi i\left(\frac{1}{4} + (2k+1)\right)$

这两个集合的并集就是$\mathrm{Ln}\left(i^{1/2}\right) = \pi i\left(\frac{1}{4} + k\right)$

- $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\, i$

$= \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2} i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$= \pi i\left(\frac{1}{4} + k\right)$

因此$\mathrm{Ln}\left(i^{1/2}\right)$的值集与$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\, i$的值集相同。可写成

$$\mathrm{Ln}\left(i^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\, i$$

- $\mathrm{Ln}\left(i^{2}\right) = 2\mathrm{Ln}\, i$ X

$$\boxed{\mathbf{Ln}z = \ln z + 2k\pi i \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots),}$$

3.乘幂与幂函数

定义：设$a\neq0$，a、b均为复数，定义乘幂

$$a^b=\mathrm{e}^{b\mathrm{Ln}a}.$$

由于 $\mathrm{Ln}a=\ln|a|+i(\arg a+2k\pi)$ 是多值的,

显然， a^b是多值函数。

1）如果b是整数，有

$$a^b=\mathrm{e}^{b\ln a}=e^{b[\ln|a|+i(\arg a+2k\pi)]}$$

$$=e^{b(\ln|a|+i\arg a)+2kb\pi i}=e^{b\ln a},$$

此时a^b是单值函数。

3.乘幂与幂函数

2）当$b=p/q$，(p，q互质整数， $q>0$) 时， 由于

$$a^b = \mathrm{e}^{\frac{p}{q}\ln|a|+\mathrm{i}\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)}$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{p}{q}\ln|a|}\left[\cos\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)+\mathrm{i}\sin\frac{p}{q}(\arg a+2k\pi)\right]$$

此时，a^b有q个值，即当$k=0,1, \ldots ,q-1$时的值。

除以上两种情况， a^b一般有无穷多个值。

3.乘幂与幂函数

特殊情况:

当$b=n$及$b=1/n$（n为正整数）时与a 的n次幂和n次根完全一致。

1) 当 $b=n$ (正整数)时,

$$a^n = e^{n\text{Ln}a} = e^{\text{Ln}a+\text{Ln}a+\cdots+\text{Ln}a} \qquad (\text{指数 } n \text{ 项})$$

$$= e^{\text{Ln}a}\cdot e^{\text{Ln}a}\cdot\cdots\cdot e^{\text{Ln}a} \qquad (\text{因子 } n \text{ 个})$$

$$= a\cdot a\cdot\cdots\cdot a. \qquad (\text{因子 } n \text{ 个})$$

2) 当 $b=\dfrac{1}{n}$ (分数)时,

$$a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\text{Ln}a} = e^{\frac{1}{n}\ln|a|}\left[\cos\frac{\text{Arg}\,a+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\text{Arg}\,a+2k\pi}{n}\right]$$

3.乘幂与幂函数

$$= |a|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\operatorname{Arg}a+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\operatorname{Arg}a+2k\pi}{n}\right]=\sqrt[n]{a},$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,(n-1)$.

如果 $a=z$ 为一复变数,就得到一般的幂函数 $w=z^b$;

当 $b=n$ 与 $\frac{1}{n}$ 时,就分别得到通常的幂函数 $w=z^n$

及 $z=w^n$ 的反函数 $w=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$.

3.乘幂与幂函数

例 6 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i 的值.

解 $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}1}$

$= e^{2k\pi i\cdot\sqrt{2}}$

$= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$

$i^i = e^{i\mathrm{Ln}i}$

$= e^{i\left(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i\right)}$

$= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$

3.乘幂与幂函数

例 7 求 $(1+i)^i$ 的辐角.

解 $(1+i)^i = e^{i\mathrm{Ln}(1+i)}$

$$= e^{i[\ln|1+i| + i\mathrm{Arg}(1+i)]}$$

$$= e^{i\left[\frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{\pi}{4}i + 2k\pi i\right)\right]}$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\frac{1}{2}\ln 2} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

故 $(1+i)^i$ 的辐角为 $\dfrac{1}{2}\ln 2 + 2k\pi.$ $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$

3.乘幂与幂函数

注意　求 e^i 的值.

解　$e^i = e^{i\mathrm{Ln}e} = e^{i(1+2k\pi i)} = e^{-2k\pi}\cdot e^i \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

表达式?

$$\exp(i) = \cos 1 + i\sin 1$$

$$e^i = \exp(i\mathrm{Ln}e) = \exp[i(1+2k\pi i)]$$

$$= \exp(i - 2k\pi)$$

$$= e^{-2k\pi}\cdot(\cos 1 + i\sin 1)$$

认识到 $\exp(i)$ 与 e^i 的不一致性。

约定：当计算 $e^{f(z)}$，默认 $e^{f(z)} = \exp(f(z))$

当计算 $a^{f(z)}$，默认 $=\exp(f(z)Lna)$

3.乘幂与幂函数

幂函数的解析性

(1) 幂函数 z^n 在复平面内解析, $(z^n)' = nz^{n-1}$.

(2) 幂函数 $z^{\frac{1}{n}}$ 是多值函数，具有 n 个分支.

它的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内

解析,

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \left(e^{\frac{1}{n}Lnz}\right)' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}.$$

4 三角函数

因为 $e^{iy}=\cos y+i\sin y,\quad e^{-iy}=\cos y-i\sin y,$

将两式相加与相减，得

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\qquad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

下面把余弦函数和正弦函数的定义推广到自变数取复值的情况.

余弦函数： $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$

正弦函数 $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$

4 三角函数

性质

(1) 正弦函数和余弦函数在复平面内都是解析函数.

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

(2) 奇偶性

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

(3)互余性

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right) = \cos z, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right) = -\sin z$$

(4) 正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的，即

$$\sin(z+2\pi) = \sin z, \quad \cos(z+2\pi) = \cos z.$$

(5) 但与实函数完全不同的是：*sin z, cos z* 无界

事实上，当 $y \to \infty$时, $|\sin yi| \to \infty$, $|\cos yi| \to \infty$.

4 三角函数

一些常用的重要公式:

(1) $$\begin{cases}\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2,\\ \sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2,\\ \sin^2 z+\cos^2 z=1.\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\cos(x+yi)=\cos x\cos yi-\sin x\sin yi,\\ \sin(x+yi)=\sin x\cos yi+\cos x\sin yi.\end{cases}$$

当 z 为纯虚数 yi 时,

$$\cos yi=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}=\mathrm{ch}y,\qquad \sin yi=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}=i\mathrm{sh}y.$$

(3) $$\begin{cases}\cos(x+yi)=\cos x\mathrm{ch}y-i\sin x\mathrm{sh}y,\\ \sin(x+yi)=\sin x\mathrm{ch}y+i\cos x\mathrm{sh}y.\end{cases}$$

5双曲函数

双曲余弦函数：$\text{ch}z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

双曲正弦函数：$\text{sh}z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

$\text{ch}iz = \cos z$

$\text{ch}z = \cos(zi)$

$\text{sh}iz = i\sin z$

$\text{sh}z = -i\sin(zi)$

$\text{sh}z$ 是奇函数，$\text{ch}z$ 是偶函数.

$\text{sh}z$，$\text{ch}z$ 都是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数.

双曲正弦函数和双曲余弦函数在复平面内也都是解析函数

$$(\text{sh}z)' = \text{ch}z, \qquad (\text{ch}z)' = \text{sh}z$$

$$\begin{cases} \text{ch}(x+yi) = \text{ch}x\cos y + i\,\text{sh}x\sin y, \\ \text{sh}(x+yi) = \text{sh}x\cos y + i\,\text{ch}x\sin y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 z + \sin^2 z = 1 \\ \text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1 \end{cases}$$

6 其它三角函数

正切函数： $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$,

余切函数： $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, $\quad \mathrm{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z} \quad (\sin z \neq 0)$

正割函数： $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$,

余割函数： $\csc z = \dfrac{1}{\sin z}$.

例 8　确定 $\tan z$ 的实部与虚部.

解　设 $z = x + iy$,

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin(x+yi)}{\cos(x+yi)}$$

$$= \frac{\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y}{\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y}$$

$$= \frac{\sin x \cos x + i \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + (1-\cos^2 x)\operatorname{sh}^2 y}$$

$$= \boxed{\frac{\sin 2x}{2\cos^2 x + 2\operatorname{sh}^2 y}} + i\boxed{\frac{\operatorname{sh} 2y}{2\cos^2 x + 2\operatorname{sh}^2 y}}.$$

$= \operatorname{Re}(\tan z)$　　　$= \operatorname{Im}(\tan z)$

例 9　解方程 $\sin z = i\,\mathrm{sh}1.$

解　设 $z = x + iy$, $\sin z = \sin(x + yi)$　　　$\mathrm{ch}z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

$$\sin x\,\mathrm{ch}y + i\cos x\,\mathrm{sh}y = i\,\mathrm{sh}1,$$

故　$\sin x\,\mathrm{ch}y = 0$,　　$\cos x\,\mathrm{sh}y = \mathrm{sh}1$

因 $\mathrm{ch}y \neq 0$,　　所以 $\sin x = 0$, $x = k\pi$,

将 $x = k\pi$ 代入　　$\cos x\,\mathrm{sh}y = \mathrm{sh}1$

$$\mathrm{sh}y = (-1)^k\,\mathrm{sh}1,\quad y = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm 2, \pm 4, \cdots \\ -1, & k = \pm 1, \pm 3, \cdots \end{cases}$$

即　$z = 2n\pi + i$ 或 $(2n+1)\pi - i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

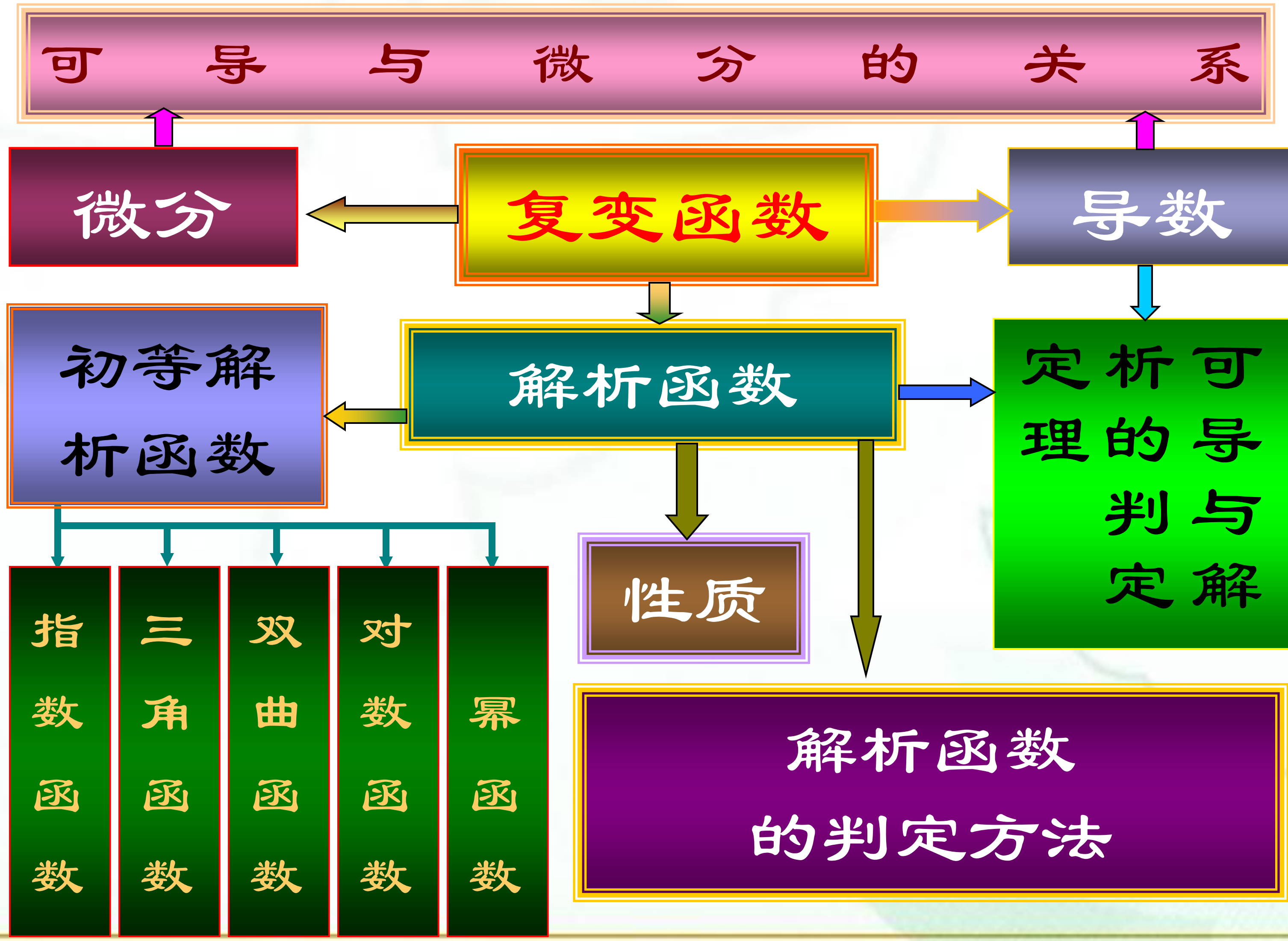
7. 初等函数

凡由常数、z、e^z和lnz 经过有限次的加、减、乘、除、乘方、开方和有限次的这类函数复合得到的函数称为初等函数。

初等函数一般有统一的分析表达式，在其有定义的区域内可微。

—

本章主要内容



可导与微分的关系
微分
复变函数
导数
初等解析函数
解析函数
可导与解析的判定定理
性质
指数函数
三角函数
双曲函数
对数函数
幂函数
解析函数的判定方法

本章主要内容

- 解析函数
  - C-R方程
  - 充要条件
  - 判别方法
  - 初等函数
    - 多项式
    - 有理函数
    - 代数函数
    - 指数函数
    - 对数函数
    - 幂 函 数
    - 三角函数

本章要注意的几点

解析的充要条件：可微，且满足柯西-黎曼方程

C-R方程 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$ 或 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$

初等函数特点

多值函数

重点：解析函数的概念及函数解析性的判别。

判定$f(z)$的解析性

- (1) 确定 $u(x,y)$和$v(x,y)$
- (2)计算偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 或$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，判定它们在哪些点处连续
- (3) 判定偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 或$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，在哪些点处满足柯西-黎曼方程
- (4) 判定$f(z)$的**可导点**

  若可导点构成一个区域，在$f(z)$在区域上解析；

  若可导的点只是一些孤立点，则$f(z)$处处不解析。