复变函数与积分变换

（2024-2025学年第一学期）

邱丽荣

办公室：中关村校区 北院 6号教学楼125

E-mail: qiulirong1@bit.edu.cn

电话：18810135629

第三章 复变函数的积分

- 复变函数积分概念
- 柯西积分定理
- 柯西积分公式

第3章 作业

书P68—70

1(1)、5、8(2)、9(2)、10(5)、12、13、16

§3-1 复变函数积分的概念

1 积分的概念

2 积分存在条件及性质

3 积分实例

一、积分的定义

1. 有向曲线

设 C为平面上给定的一条光滑（或按段光滑）曲线，如果选定 C的两个可能方向中的一个作为正方向（或正向），那么我们就把 C理解为带有方向的曲线，称为有向曲线.

设 $C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

$x'(t)$、$y'(t) \in C[\alpha, \beta]$, 且$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$

$$C: \quad z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \quad (1)$$

$z'(t)$连续且$z'(t) \neq 0$

C -- z平面上的一条光滑曲线

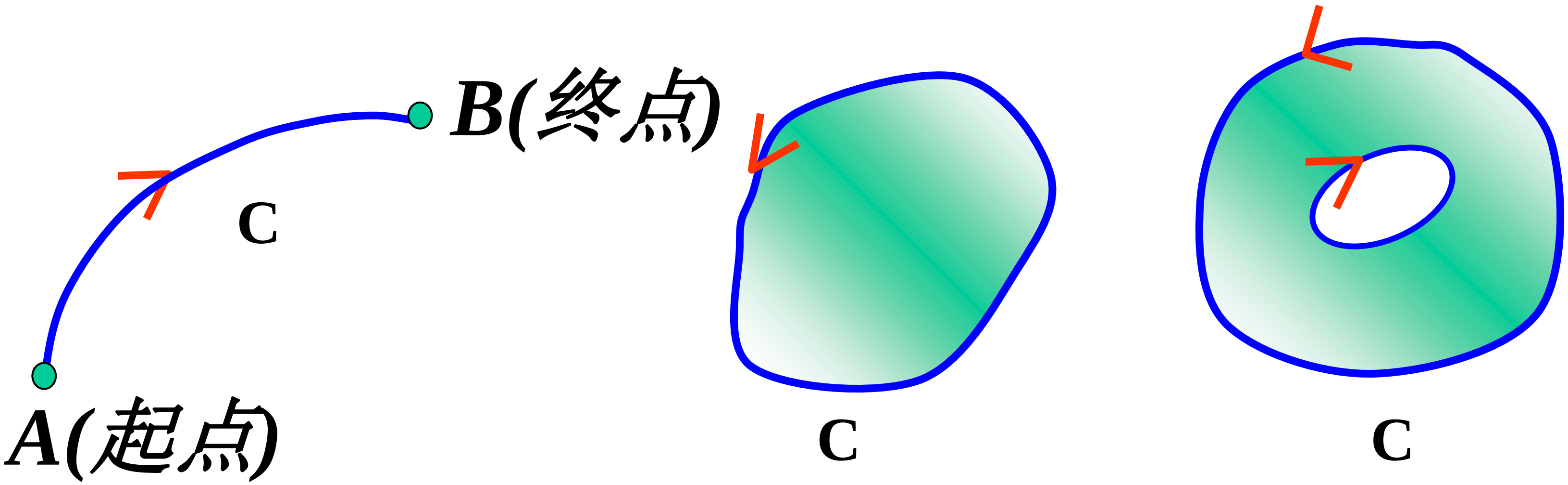
1. 有向曲线

关于曲线方向的说明:

简单曲线: 正方向总是指从起点到终点的方向.

反之,为负方向,记为C^-

闭曲线:正方向——观察者顺此方向沿C前进一周,C的内部一直在观察者的左边。

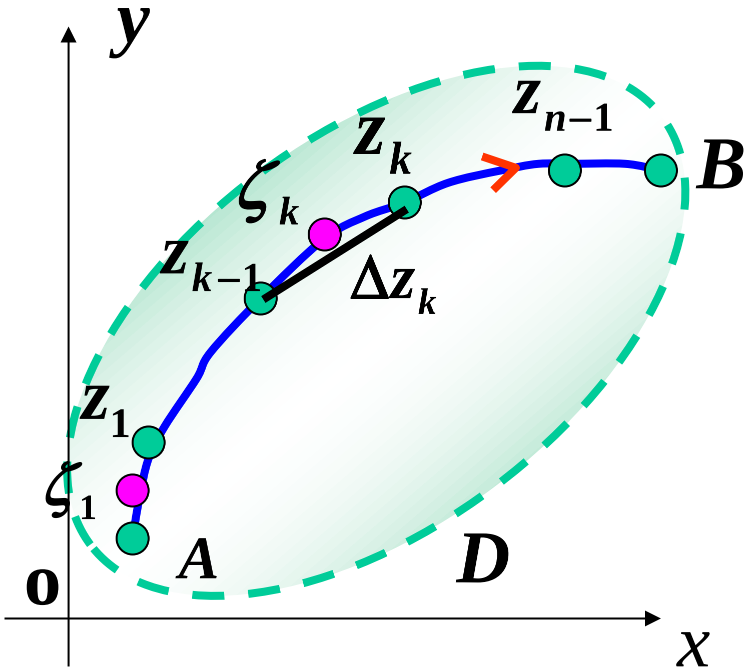


2. 积分定义

（1）设函数$w=f(z)$定义在区域D内， $w=f(z)\ \ z\in D$

（2）C为区域D内（起点）点A→（终点）点B 的一条光滑有限曲线

（3）将曲线C任意**分成**n个弧段，设分点为



$A=z_0,z_1,\dots,z_{k-1},z_k,\dots,z_n=B$

在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$

$(k=1,2,\cdots,n)$

上任意取一点 ζ_k，

“分割”、“作和”、“取极限”的步骤

$(4)\forall \zeta_k \in \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 作乘积$f(\zeta_k)\Delta z_k$

(5) 作和式 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k,$

这里 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $\Delta s_k = \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$的长度,

记 $\delta = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$, 当 n 无限增加且 $\delta \to 0$ 时,

不论对C的分法及ξ_k的取法如何，S_n有唯一极限

$$\boxed{I = \lim_{\lambda(T)\to 0} S_n(T)}$$

则称这个极限为函数$f(z)$沿曲线C（从A→B）的积分

记作 $\int_C f(z)dz = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k.$

2. 积分定义

定义积分的步骤:

$\boxed{\text{分割}} \to \boxed{\text{取乘积}} \to \boxed{\text{求和}} \to \boxed{\text{取极限}}$

关于定义的说明:

(1) 如果 C 是闭曲线, 那么沿此闭曲线的积分

记为 $\boxed{\oint_C f(z)dz.}$

(2) 如果 C 是 x 轴上的区间 $a \le x \le b$, 而 $f(z) = u(x)$, 这个积分定义就是一元实变函数定积分的定义.

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b u(x)dx$$

2. 积分定义

(3)如果$\int_C f(z)dz$ 存在，一般不能写成$\int_a^b f(z)dz$.

因为$\int_C f(z)dz$不仅与a、b有关，还与曲线C的形状有关。

特例:(1) 若C表示连接点a,b的任一曲线,则

$$\int_C dz = b - a \qquad \int_C zdz = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

复变函数的积分只依赖于积分路径C的起点A与终点B，而与积分路径的形状无关.

(2) 若C表示闭曲线,则 $\oint_C dz = 0,$ $\oint_C zdz = 0$

二. 积分存在的条件及其计算法

1. 存在条件

定理 当 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在光滑曲线 C 上连续时, $f(z)$ 必沿 C 可积, 即 $\int_C f(z)dz$ 存在.

且 $$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy}$$

$$\overset{\text{记忆}}{=} \int_C (u + iv)(dx + idy)$$

这个定理表明 $\int_C f(z)dz$ 可通过二个二元实变函数的第二型曲线积分来计算.

证

设光滑曲线C由参数方程给出

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$

正方向为参数增加的方向,

参数α及β对应于起点A及终点B,

并且 $z'(t) \ne 0, \quad \alpha < t < \beta,$

如果 $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ 在D内处处连续,

那么$u(x,y)$和$v(x,y)$在D内均为连续函数,

令$z_k = x_k + iy_k \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$$

所以 $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+i\,v(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k+i\Delta y_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k-v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

$$+i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

由于 u,v 都是连续函数,根据线积分的存在定理,

当 n 无限增大而弧段长度的最大值趋于零时,

不论对C的分法如何,点(ξ_k,η_k)的取法如何，下式两端极限存在:

当$\delta \to 0$时，均是实函数的曲线积分.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$$

公式 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$

在形式上可以看成是

$f(z) = u + iv$ 与 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ 相乘后求积分得到:

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u + iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$$

$$= \int_C u\mathrm{d}x + iv\mathrm{d}x + iu\mathrm{d}y - v\mathrm{d}y$$

$$= \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

$\because f(z)$在C上连续，$\therefore u(x,y), v(x,y)$在$C$上连续 故$\int_C u(x,y)dx$、$\int_C v(x,y)dy$、

$\int_C v(x,y)dx$、$\int_C u(x,y)dy$都存在!

推论1: 当$f(z)$是连续函数，C是光滑曲线时，

$\int_c f(z)dz$一定存在。

推论2: $\int_c f(z)dz$可以通过两个二元实函数的线积分来计算。

2. 积分计算

$\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 可以通过两个二元实变函数的线积分来计算.

设光滑曲线$C: z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad t: \alpha \to \beta$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$+ i\int_\alpha^\beta \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}\{x'(t) + iy'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

2. 积分计算

$$\boxed{\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t}$$

这样一来，将$f(z)$沿曲线C的积分归结为关于参数t的一个定积分.

如果 C 是由 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 等光滑曲线依次相互连接所组成的按段光滑曲线, 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

在今后讨论的积分中, 总假定被积函数是连续的, 曲线 C 是按段光滑的.

2. 积分计算

由以上讨论可知，用上式计算积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 包含三个步骤：

1）写出曲线C的方程

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

2）将$z = z(t)$与$dz = z'(t)dt$ 代入所求积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$

3）计算下式右端的关于参数t的积分.

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

二. 积分存在的条件及其计算法

3. 积分性质

复变函数的积分与实函数的积分有类似的性质

(1) 方向性

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z;$$

(2) 线性性

$$\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z; \quad (k\text{为常数})$$

$$\int_C [f(z)\pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z;$$

(3) 可加性

设 C_1的终点是C_2的起点，$C=C_1+C_2$，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$(分段光滑曲线)

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1}+\int_{C_2}+\cdots+\int_{C_n} f(z)dz$$

(4) 估值不等式 (估值定理)

设曲线 C 的长度为 L，函数 $f(z)$ 在 C 上满足

$|f(z)|\le M$， 则 $\boxed{\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_C |f(z)|\mathrm{d}s\le ML.}$

证明

因为$|\Delta z_k|$是z_k与z_{k-1}两点之间的距离,

Δs_k为这两点之间弧段的长度,

所以 $$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k$$

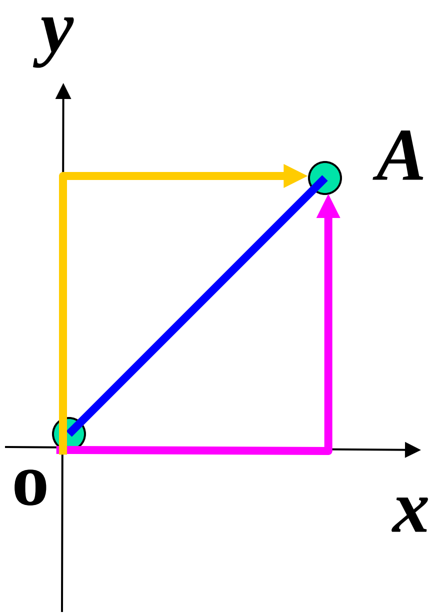
两端取极限得 $$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s.$$

因为 $$\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k \le M\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k = ML,$$

所以 $$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML.$$ [证毕]

例1 计算 $\int_C z\mathrm{d}z$，C: 从原点到点 $3+4i$ 的直线段.

解 直线方程为 $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 4t, \end{cases}$ $0 \le t \le 1$,



在 C 上, $z = (3+4i)t$,

$$\mathrm{d}z = (3+4i)\mathrm{d}t,$$

$$\int_C z\mathrm{d}z = \int_0^1 (3+4i)^2 t\mathrm{d}t = (3+4i)^2 \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{(3+4i)^2}{2}.$$

积分的计算

例 2 计算 $\int_C \mathrm{Re}\, z\mathrm{d}z$, $\int_C z\mathrm{d}z$ 其中 C 为:

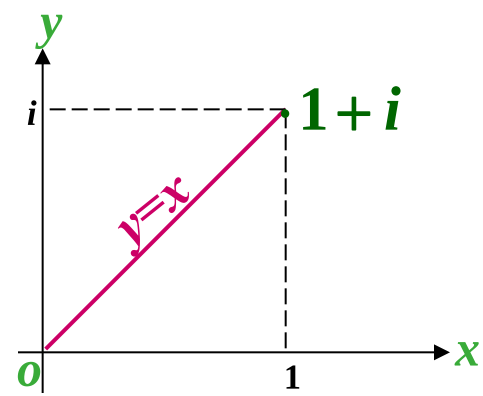
(1)从原点到点 $1+i$ 的直线段;

(2) 抛物线 $y=x^2$ 上从原点到点 $1+i$ 的弧段;

(3) 从原点沿 x 轴到点1再到 $1+i$ 的折线.

解 (1) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it \quad (0\le t\le 1),$$



于是 $\mathrm{Re}\, z=t$, $\mathrm{d}z=(1+i)\mathrm{d}t$,

$$\int_C \mathrm{Re}\, z\mathrm{d}z = \int_0^1 t(1+i)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+i);$$

$$\int_C z\mathrm{d}z = \int_0^1 (1+i)^2 t\mathrm{d}t = (1+i)^2\int_0^1 t\mathrm{d}t = i$$

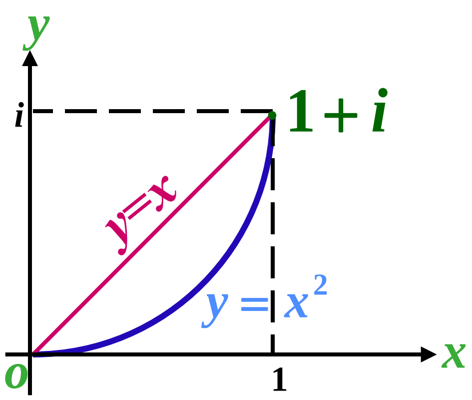
(2) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it^2 \quad (0\le t\le 1),$$

于是 $\mathrm{Re}\,z=t,\quad \mathrm{d}z=(1+2ti)\mathrm{d}t,$

$$\int_C \mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z=\int_0^1 t(1+2it)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+\frac{2i}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i;$$



$$\int_C z\mathrm{d}z=\int_0^1 (t+it^2)(1+2it)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 [(t-2t^3)+i\cdot 3t^2]\mathrm{d}t=i;$$

积分的计算

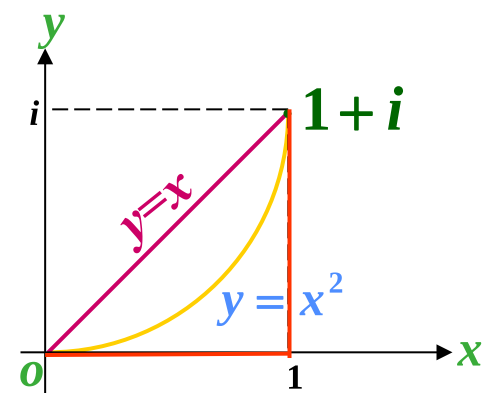
(3) 积分路径由两段直线段构成

x轴上直线段C_1的参数方程为 $z(t)=t \quad (0\le t\le 1)$,

于是 $\mathrm{Re}\,z=t, \quad \mathrm{d}z=\mathrm{d}t,$

1到1+i直线段C_2的参数方程为 $z(t)=1+it \ (0\le t\le 1)$,

于是 $\mathrm{Re}\,z=1, \quad \mathrm{d}z=i\mathrm{d}t,$



$$\int_C \mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z=\int_{C_1}\mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z+\int_{C_2}\mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_0^1 1\cdot i\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+i.$$

$$\int_C z\mathrm{d}z=\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_0^1(1+it)i\mathrm{d}t=i.$$

积分的计算

注意1 从例2可以看出，曲线积分$\int_C z\mathrm{d}z$与积分路径无关，但曲线积分$\int_C \mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z$与积分路径有关。

注意2 一般不能把起点为α，终点为β的$f(z)$的积分记成$\int_\alpha^\beta f(z)\mathrm{d}z$，因这是曲线积分，要受积分路线的限制，必须记作$\int_C f(z)\mathrm{d}z$.

积分的计算

例3 求 $\int_{|z|=R} z^m \overline{z}^n dz$ 其中 m,n 为整数

解: C 的参数方程为： $z(t)=\mathrm{Re}^{it}, t\in[0,2\pi]$ ，于是有

$$dz = i\,\mathrm{Re}^{it}\,dt$$

$$\int_{|z|=R} z^m \overline{z}^n dz$$

$$= \int_0^{2\pi} R^{\mathrm{m+n}} e^{mti}\cdot e^{-nti} iRe^{it}dt = R^{m+n+1} i\int_0^{2\pi} e^{i(m-n+1)}dt$$

$$= R^{m+n+1} i\left(\int_0^{2\pi} cos[(m-n+1)t]dt + i\int_0^{2\pi} sin[(m-n+1)t]dt\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq m+1 \\ 2R^{2n}\pi i, & n = m+1 \end{cases}$$

例4 计算 $\int_C |z| \mathrm{d}z$, 其中 C 为：圆周 $|z| = 2$.

解 积分路径的参数方程为

$$z = 2e^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi), \qquad \mathrm{d}z = 2ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

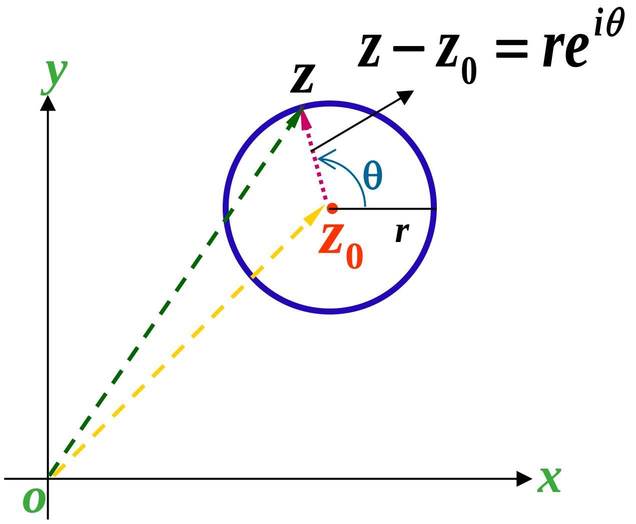
$$\int_C |z| \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} 2 \cdot 2ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \quad (\text{因为} |z| = 2)$$

$$= 4i\int_0^{2\pi} (\cos\theta + i\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= 0.$$

积分的计算

例5 求 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$, C 为以 z_0 为中心, r 为半径的正向圆周, n 为整数.



解 积分路径的参数方程为

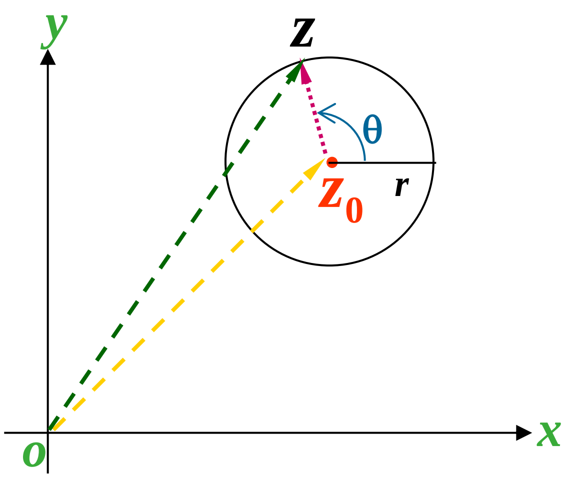
$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi),$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta,$$

当$n=0$时，

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi i;$$



当$n\neq 0$时，

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)\mathrm{d}\theta = 0;$$

所以 $$\boxed{\oint_{|z-z_0|=r}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}}$$

重要结论：积分值与路径圆周的中心和半径无关.

此例可作为积分公式，在后面的积分计算中将经常用到

积分的计算

例6 设 C 为从原点到点 $3+4i$ 的直线段,

试求积分 $\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$ 绝对值的一个上界.

解 C 的参数方程为 $z=(3+4i)t,\ (0\le t\le 1)$

根据估值不等式知

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right| \le \int_C \left|\frac{1}{z-i}\right|\mathrm{d}s$$

因为在 C 上, $\left|\frac{1}{z-i}\right| = \frac{1}{|3t+(4t-1)i|}$

$$=\frac{1}{\sqrt{(3t)^2+(4t-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}}\leq\frac{5}{3},$$

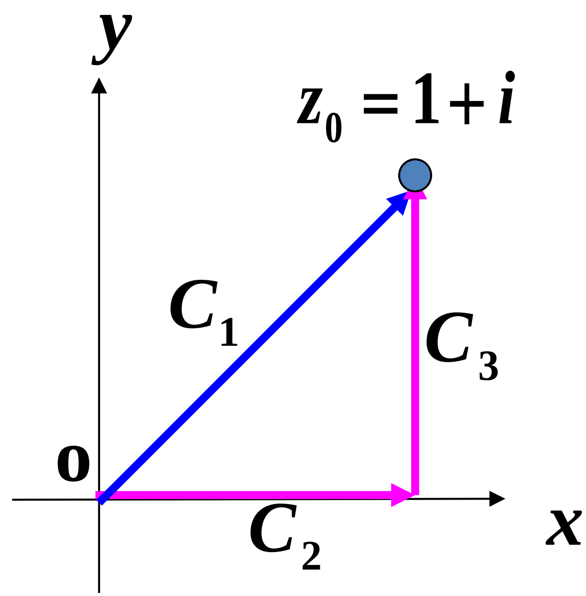
从而 $$\left|\int_C\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right|\leq\frac{5}{3}\underbrace{\int_C\mathrm{d}s}_{=5}=\frac{25}{3}$$

故 $$\left|\int_C\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right|\leq\frac{25}{3}.$$

例7 计算$\int_C \bar{z}dz$的值

1) $C = C_1 = \overline{Oz_0}$

2) $C = C_2 + C_3$(见图)



解 1) $C_1: \quad z = (1+i)t \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (t - it)(1+i)dt = \int_0^1 2tdt = 1$$

2) $C_2: z = t \quad 0 \le t \le 1 \quad C_3: z = 1 + it \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_C \bar{z}dz = \int_{C_2} \bar{z}dz + \int_{C_3} \bar{z}dz$$

$$= \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1 - it)idt = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + i) = 1 + i$$

例8 计算$\int_{C_1}\bar{z}dz,\int_{C_2}\bar{z}dz$的值，其中

C_1是单位圆$|z|=1$的上半圆周，顺时针方向；

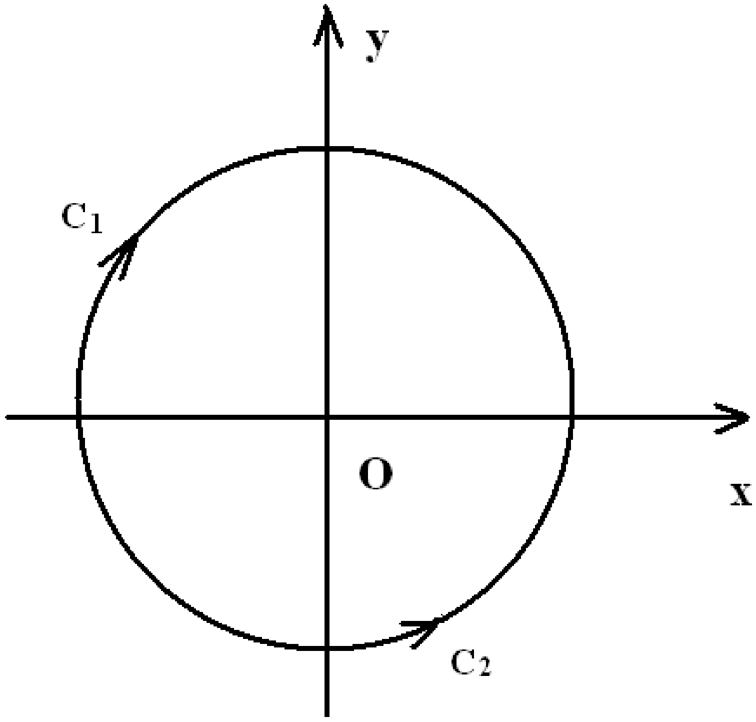
C_2是单位圆$|z|=1$的下半圆周，逆时针方向.

解: 1)C_1： $z=e^{i\theta},0\le\theta\le\pi.$

$$\int_{C_1}\bar{z}dz=\int_{\pi}^{0}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{\pi}^{0}dt=-\pi i$$

2)C_2： $z=e^{i\theta},-\pi\le\theta\le 0.$

$$\int_{C_2}\bar{z}dz=\int_{-\pi}^{0}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{-\pi}^{0}dt=\pi i$$



§3-2 柯西积分定理

§3-2 柯西积分定理

通过前面积分例子分析,可知

在例2中，$f(z)=z$在全平面解析,曲线积分

$\int_C zdz$与积分路径无关,

而$f(z)=\operatorname{Re} z$在复平面上处处不解析,

$\int_C \operatorname{Re}(z)dz$与积分路径有关。

例5中 $\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i \neq 0$

$\because z=z_0$为奇点,即不解析的点,

但在除去$z=z_0$的非单连通区域内处处解析。

例7、8中

$f(z)=\bar{z}$在复平面上处处不解析,

$\int_C \bar{z}dz$的值与积分路径C有关.

提出猜想：积分的值与路径无关或沿闭路的积分值＝0的条件可能与被积函数的解析性及解析区域的单连通有关.

先将条件加强些，作初步的探讨　　Cauchy定理

"设$f(z)=u+iv$在单连通D内处处解析,且$f'(z)$在D内连续"

$\because f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$

$\therefore u$和v以及它们的偏导数u_x,u_y,v_x,v_y在D内都是连续的,并满足$C-R$方程$u_x=v_y \quad v_x=-u_y$

又, $\forall C \subset D$,

$$\oint_c f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy$$

Green公式 $$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy$$

$$\oint_c udx - vdy = \iint\limits_D (-v_x - u_y)dxdy = 0$$

$$\oint_c vdx + udy = \iint\limits_D (u_x - v_y)dxdy = 0$$

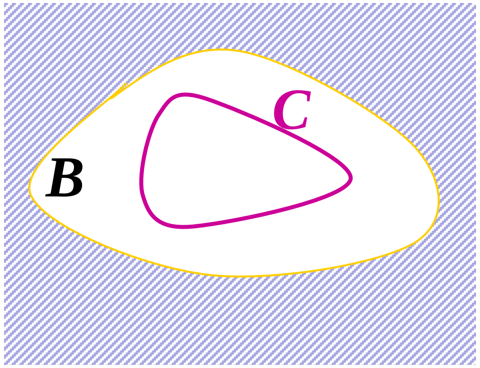
$$\therefore \oint_c f(z)dz = 0$$

§3-2 柯西积分定理

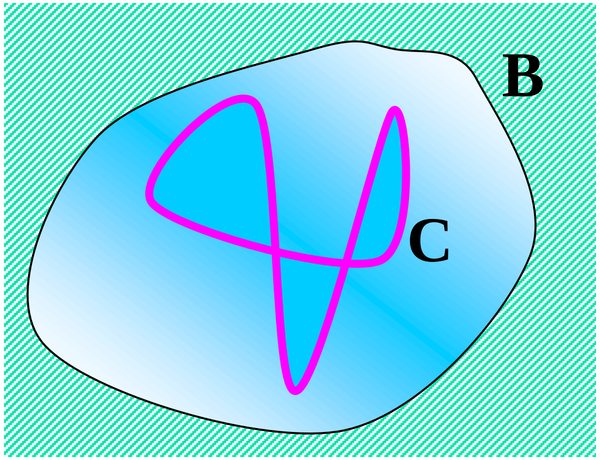
1. 柯西－古萨基本定理 此定理也称为**柯西积分定理.**

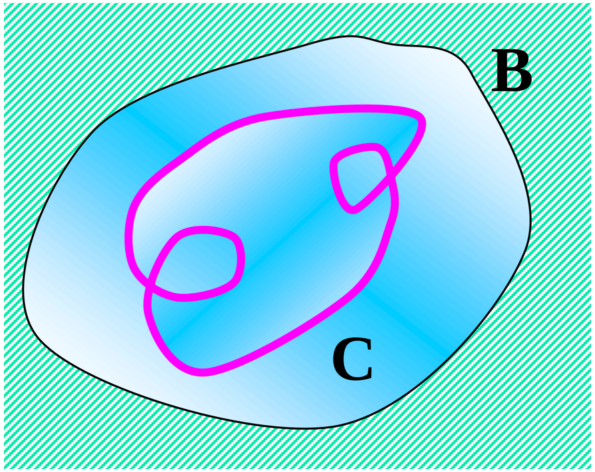
如果函数$f(z)$在单连通区域B内处处解析，那么函数$f(z)$沿B内的任何一条封闭曲线C的积分为零。

$$\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 0$$



(1)定理中的 C 可以不是简单曲线.





关于定理的说明:

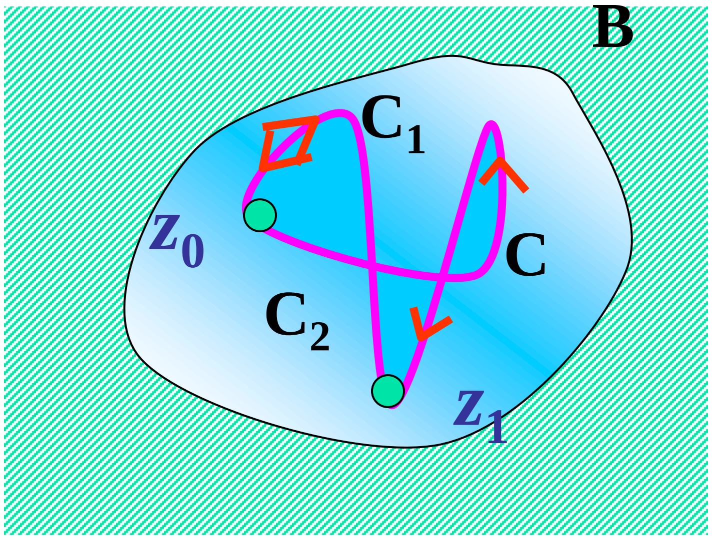
(2) 如果曲线 C 是区域 B 的边界，函数 $f(z)$ 在 B 内与 C 上解析, 即在闭区域 $\overline{B}=B+C$ 上解析, 那末

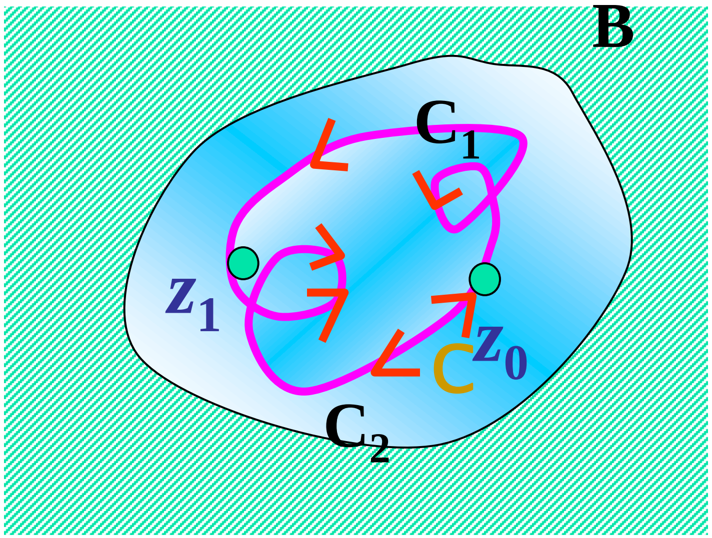
$$\oint_c f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

(3) 如果曲线 C 是区域 B 的边界，函数 $f(z)$ 在 B 内解析，在闭区域 $\overline{B}=B+C$ 上连续，那末定理仍成立.

§3-2 柯西积分定理

(1)定理中曲线C不必是简单的！如下图.





推论　设$f(z)$在单连通区域B内解析，则对任意两点$z_0, z_1 \in B$, 复积分$\int_c f(z)dz$不依赖于连接起点z_0与终点z_1的曲线，即积分与路径无关.只与动点z有关

见上图 $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$

§3-2 柯西积分定理

注意2 **定理不能反过来用.**

即不能由 $\oint_C f(z)dz=0$, 而说 $f(z)$ 在 C 内处处解析.

例如：$f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ 在 $|z|=1$ 内.　　在 $z=0$ 不解析

注意3 **只有当D是一个单连通区域且 $f(z)$ 在D上解析时才正确，否则上述结论是不成立的。**

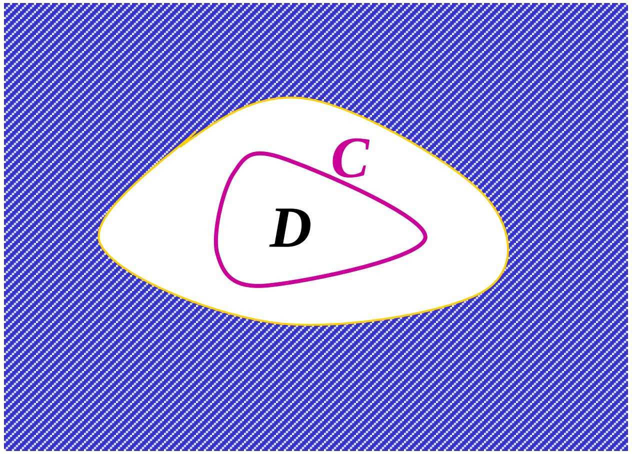
例如: $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在 $|z|=1$ 内.

§3-2 柯西积分定理

定理3.2.1　柯西积分定理(柯西–古萨定理)

若函数$f(z)$在简单光滑(或逐段光滑)闭曲线C上及其内部解析，则一定有

$$\oint_C f(z)dz = 0$$



例题

例9 计算积分 $\oint_{|z|=1} \dfrac{1}{2z-3}\mathrm{d}z.$

解 函数 $\dfrac{1}{2z-3}$ 在 $|z| \leq 1$ 内解析,

根据柯西—古萨定理, 有

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3}\mathrm{d}z = 0.$$

例题

例10 证明 $\oint_c (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = 0 \quad (n \neq -1)$, 其中 C 是任意闭曲线.

证 (1)当 n 为正整数时, $(z-\alpha)^n$ 在 z 平面上解析,

由柯西—古萨定理, $\oint_c (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = 0.$

(2)当 n 为负整数但不等于 -1 时,

$(z-\alpha)^n$ 在除点 α 的整个 z 平面上解析,

情况一： 若 C 不包围 α 点,

$(z-\alpha)^n$ 在 C 围成的区域内解析,

由柯西一古萨定理, $\oint_c (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = 0;$

情况二： 若 C 包围 α 点,

由上节例5可知, $\oint_c (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = 0.$

故 $\oint_C (z-a)^n dz = 0 \ (n \neq -1)$, 其中 C是任意闭曲线成立

例题

例11 计算积分 $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z.$

解 $\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right),$

因为 $\frac{1}{z}$ 和 $\frac{1}{z+i}$ 都在 $|z-i| \le \frac{1}{2}$ 上解析,

根据柯西一古萨定理得

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+i} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-i}\right)\mathrm{d}z$$

$$=\boxed{\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z}\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z+i}\mathrm{d}z}-\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$$

$$=0$$

$$=-\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z-i}\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\cdot 2\pi i=-\pi i.$$

例5

例题

例12　计算积分 $\oint_{|z|=5}(2z^2+e^z+\cos z)dz$

解：因为$2z^2$、　e^z、　$\cos z$ 均在复平面上解析，所以，它们的和在一包含积分路径 $|z|=5$ 的单连通区域G内解析，而积分路径 $|z|=5$是围线，

所以，由柯西定理得

$$\oint_{|z|=5}(2z^2+e^z+\cos z)dz=0$$

显然，该例所用方法是最简单的.

2、复合闭路定理

问题的提出

实例，计算 $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \mathrm{d}z.$

因为 $|z| = 2$ 是包含 $z = 1$ 在内的闭曲线，

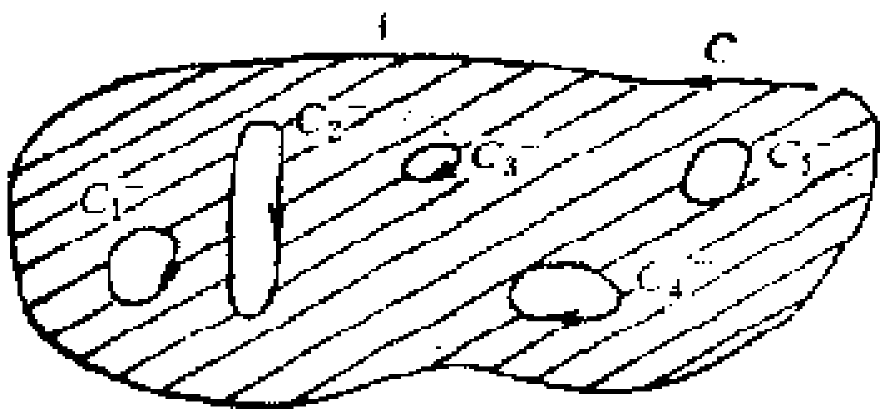
根据本章第一节例5可知，

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \mathrm{d}z = 2\pi i.$$

由此希望将基本定理推广到多连域中.

2、复合闭路定理

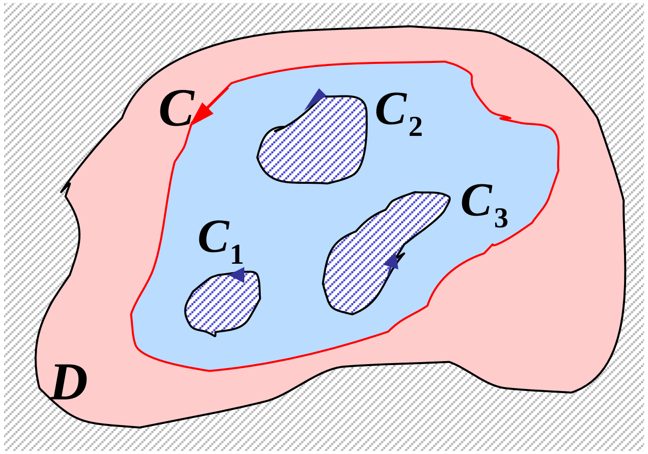
所谓复闭路是指一种特殊的有界多连区域D的边界曲线Γ， 它由几条简单闭曲线组成，可简单记为$\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$，其中简单闭曲线$C$取正向，而简单闭曲线 $C_1^-, \ldots, C_n^-$ 取负向，它们均在 C的内部且互不相交，互不包含，如图：上述Γ的方向称为区域D 的边界曲线正向。



复合闭路定理

设 D是以复闭路 $\Gamma = C + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 为边界的多连通区域。若函数 $f(z)$ 在D内及其边界 Γ上解析，则$f(z)$沿Γ的积分为0，即

$$\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z,}$$



或 $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$

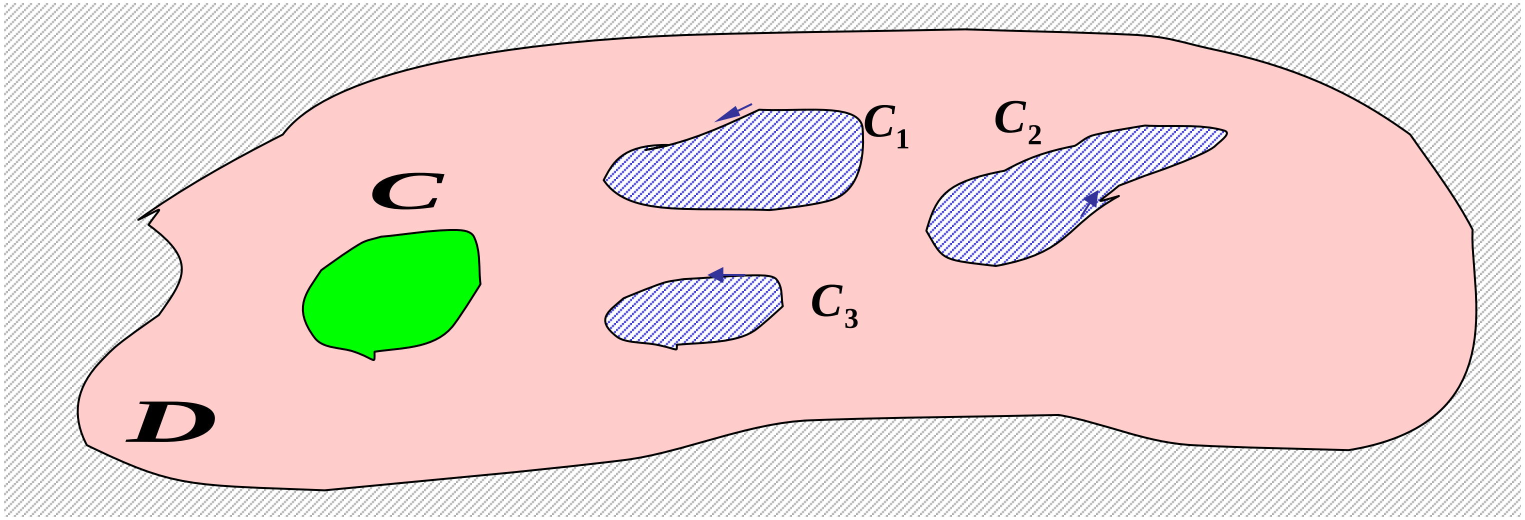
其中：闭$C \subset D, C_1, C_2, \cdots C_n$是在$C$的内部的简单闭曲线(互不包含也不相交)，每一条曲线C及C_i是逆时针，C_i^- – 顺时针.

复合闭路定理

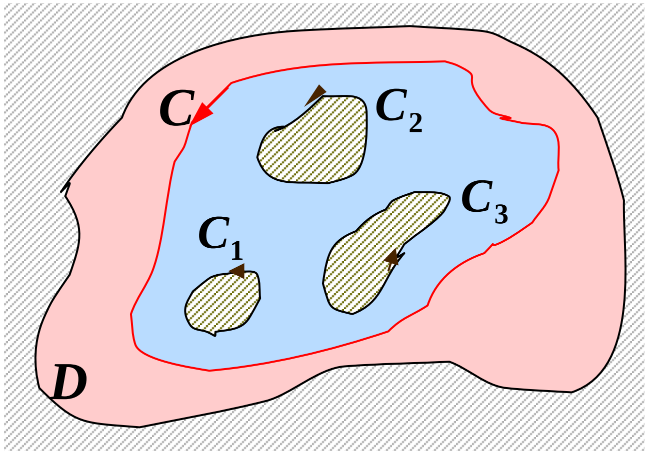
*C*为*D*内的任一条简单闭曲线，则

(1) 如果 *C*的内部完全含于*D*，则*f*(*z*)在*C*上及其内部解析，由单连域柯西基本定理知

$$\oint_C f(z)dz = 0$$



(2) C的内部有边界C_1， C_2，…，C_n，它们均为简单闭曲线，互不包含也互不相交，并且以C_1，C_2…， C_n为边界的区域全含于D，那么



1) $$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$

这里，C_k的方向为逆时针方向。

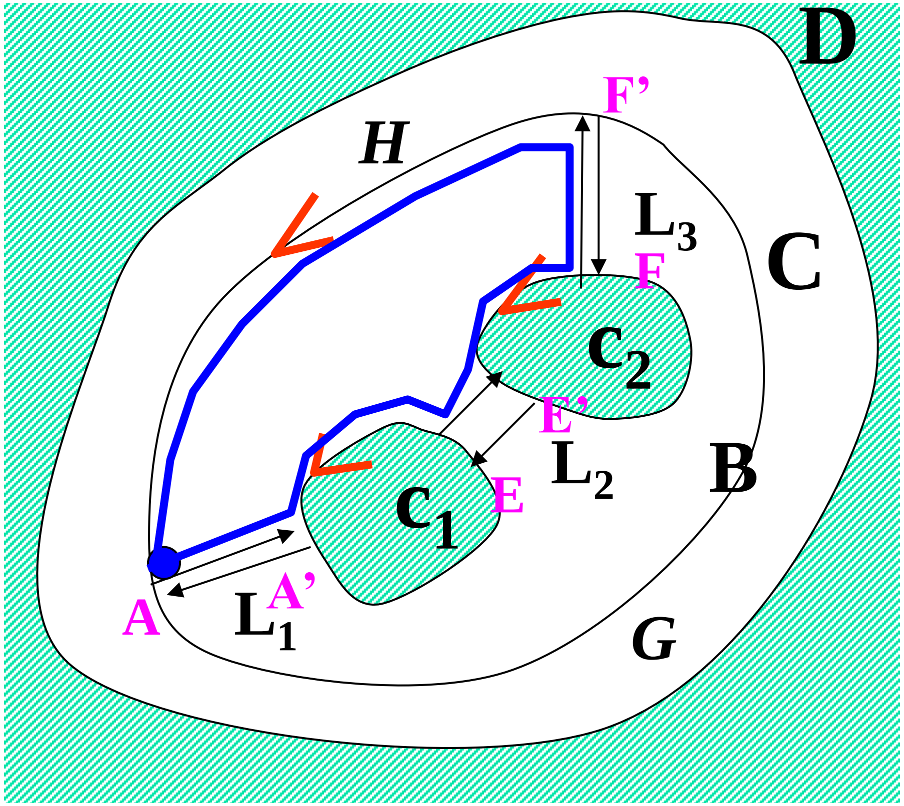
2) $$\oint_C f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k^-} f(z)dz = 0$$

这里，C_k^-的方向为顺时针方向。

证明

设$\Gamma = C + C_1^- + C_2^-$

$$\because \oint_\Gamma f(z)dz = \oint_{c+c_1^-+c_2^-+L_1+L_1^-+L_2+L_2^-+L_3+L_3^-} f(z)dz$$



$$= \oint_{AGF'FE'EA'A} f(z)dz$$

$$+ \oint_{AA'EE'FF'HA} f(z)dz$$

$$= 0$$

如：对任意C包含z_0在内的正向简单闭曲线

有：$\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$

说明　(1) Γ, C, C_k 三者之间的关系：

$$\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_k^-$$

(2) C, C_k 的特点与曲线的正向：

C 按逆时针方向, C_k 按顺时针方向.

(3)

$$0 = \oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{C+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_k^-} f(z)dz$$

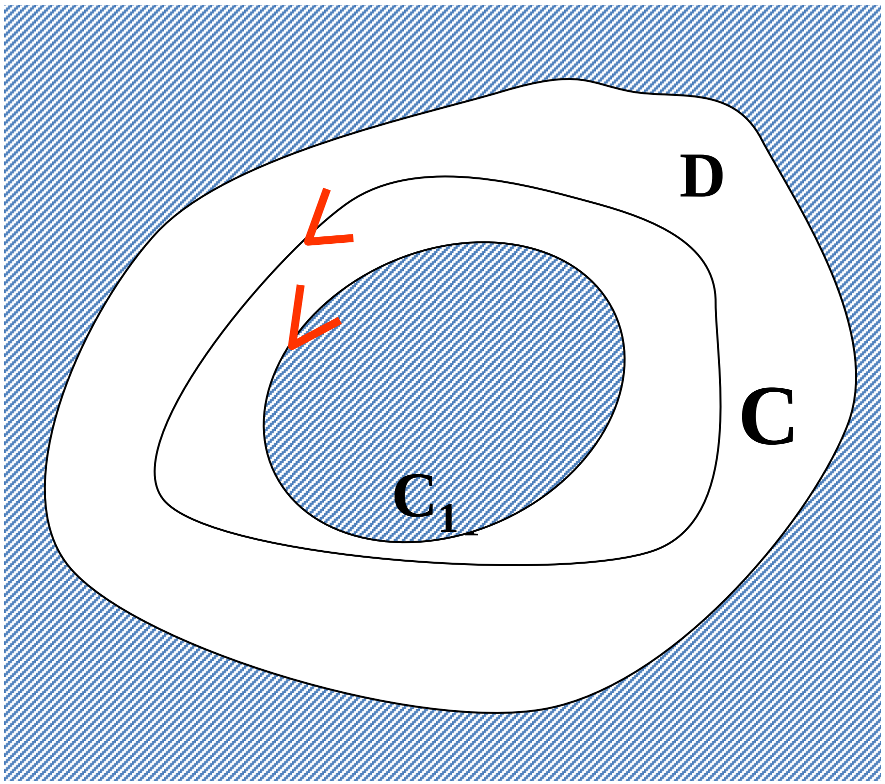
$$= \oint_{C} f(z)dz + \oint_{C_1^-} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_k^-} f(z)dz$$

$$\therefore \quad \oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_k} f(z)dz$$

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz$$

此式说明一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的积分值，只要在变形过程中曲线不经过 $f(z)$ 的不解析点.

—闭路变形原理

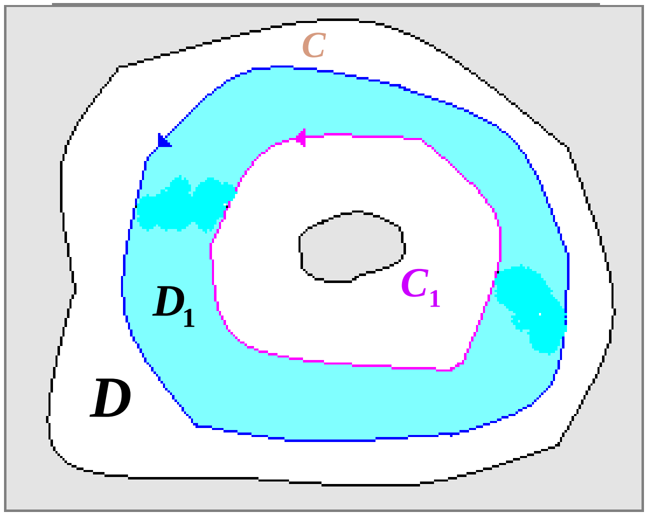


特殊情况：闭路变形原理

设函数 $f(z)$ 在多连通域内解析(如图)，

C 及 C_1 为 D 内的任意两条简单闭曲线(正向为逆时针方向)，

C 及 C_1 为边界的区域 D_1 全含于 D.



由复合闭路原理

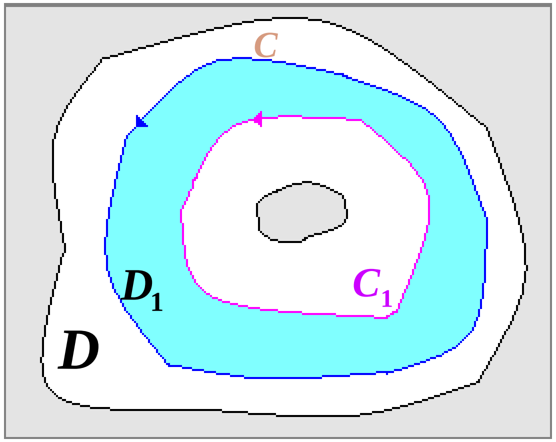
$$\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z}$$

这就是闭路变形原理

特殊情况：闭路变形原理

说明：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z$$



解析函数沿闭曲线的积分，

不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值.

在变形过程中曲线不经过函数 $f(z)$ 的不解析的点.

例13 计算$\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}dz$ Γ:包含圆周$|z|=1$在内的任意正向简单闭曲线

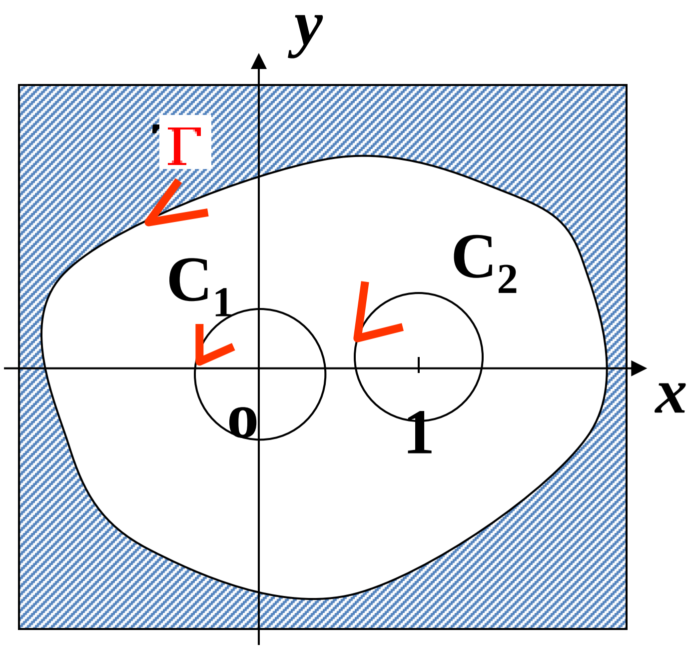
解 原式$=\oint_{\Gamma}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}\right)dz$

$$=\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z}dz$$

$$=\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz$$

$$=2\pi i+2\pi i=4\pi i$$

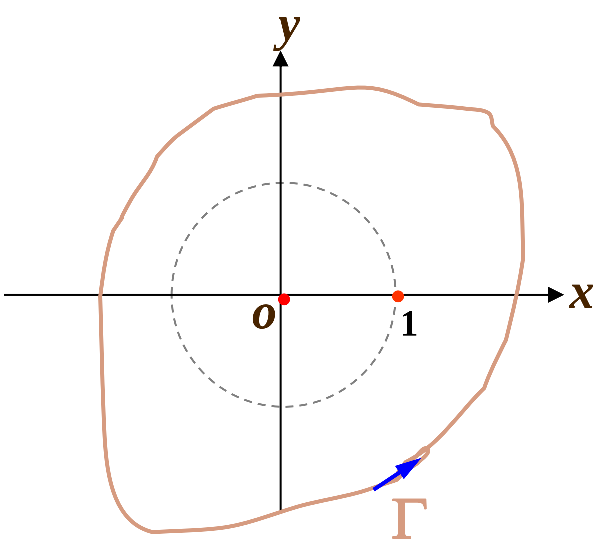
$$(\because \oint_{C_1}\frac{1}{z-1}dz=0,\oint_{C_2}\frac{1}{z}dz=0)$$



2、复合闭路定理

例14 计算积分 $\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为包含圆周 $|z|=1$ 在内的任何正向简单闭曲线.

解 因为函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在复平面内有两个奇点 $z=0$ 和 $z=1$，



依题意知，Γ 包含这两个奇点，

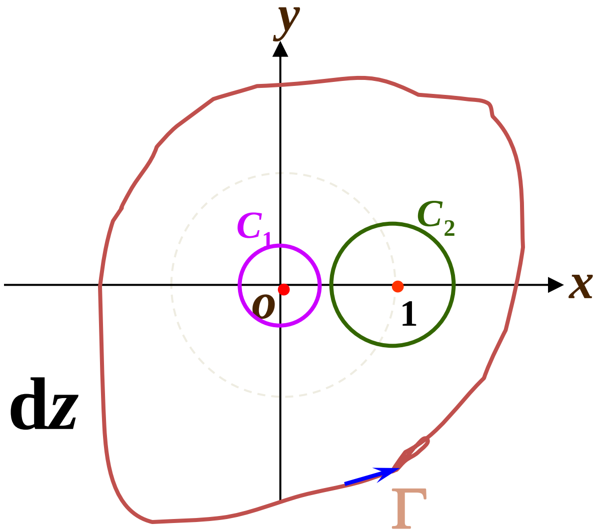
在Γ内作两个互不包含也互不相交的正向圆周

C_1 和 C_2,

C_1 只包含奇点 $z=0$, C_2 只包含奇点 $z=1$,

根据复合闭路原理,

$$\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}dz=\oint_{C_1}\frac{2z-1}{z^2-z}dz+\oint_{C_2}\frac{2z-1}{z^2-z}dz$$

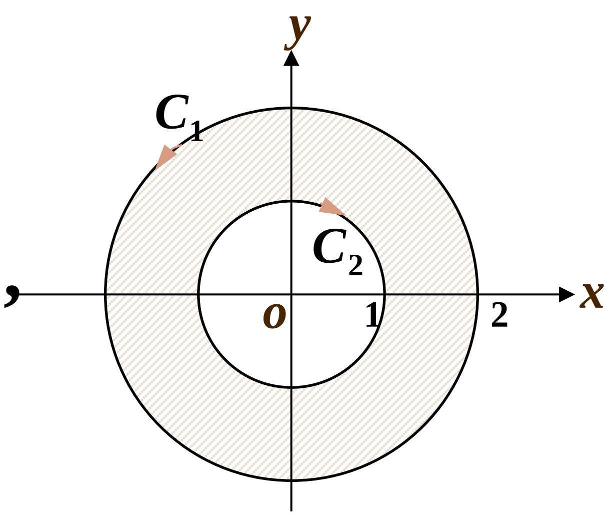


$$=\oint_{C_1}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z}dz$$

$$=0+2\pi i+2\pi i+0=4\pi i.$$

2、复合闭路定理

例15 计算积分 $\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为正向圆周 $|z| = 2$ 和负向圆周 $|z| = 1$ 所组成.



解 C_1 和 C_2 围成一个圆环域，

函数 $\frac{e^z}{z}$ 在此圆环域和其边界

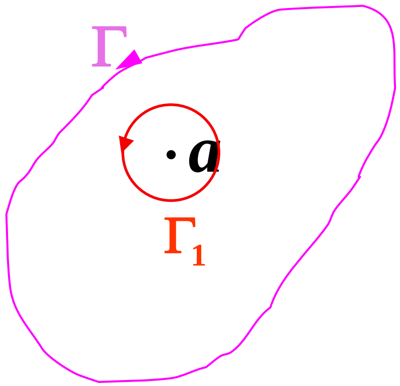
上处处解析，圆环域的边界构成一条复合闭路，

根据闭路复合原理，$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z = 0.$

2、复合闭路定理

例16 求 $\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z$,Γ 为含 a 的任一简单闭路,

n 为整数.



解 因为 a 在曲线 Γ 内部,

故可取很小的正数 ρ,

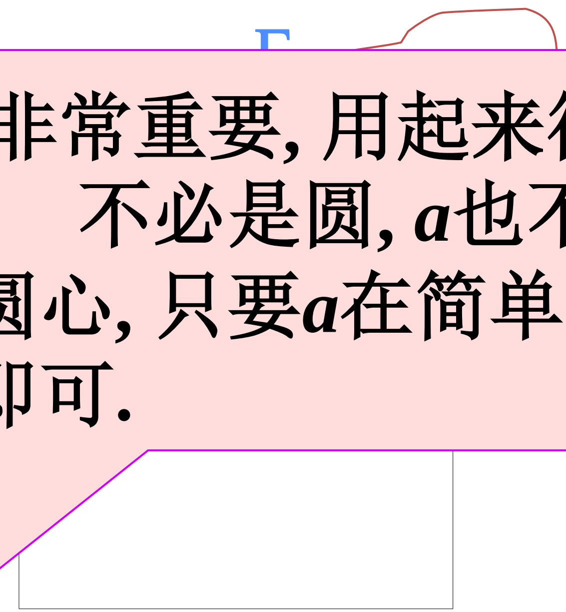
使 $\Gamma_1 : |z-a| = \rho$ 含在 Γ 内部,

$\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$ 在以 $\Gamma + \Gamma_1^-$ 为边界的复连通域

内处处解析,

由复合闭路定理,

$$\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma_1}\frac{1}{(z-\cdots}\,\mathrm{d}z$$



此结论非常重要, 用起来很方便, 因为　不必是圆, a也不必是圆的圆心, 只要a在简单闭曲线　内即可.

令 $z=a+\rho e^{i\theta}\quad 0<\theta\ \cdots$

$$\oint_{\Gamma_1}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{\rho i e\cdots}{(\rho e^{i\theta})^{n+1}}\cdots$$

故 $$\boxed{\oint_{\Gamma}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}}$$

3、原函数与不定积分

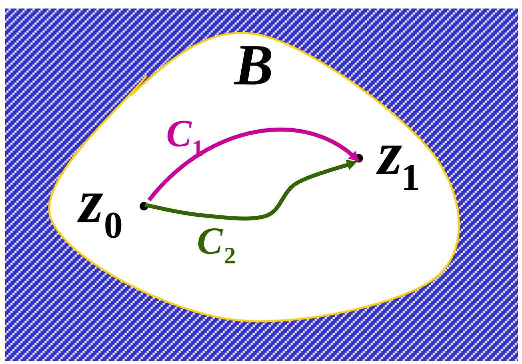
1) 定理 3.2.3 (P74)

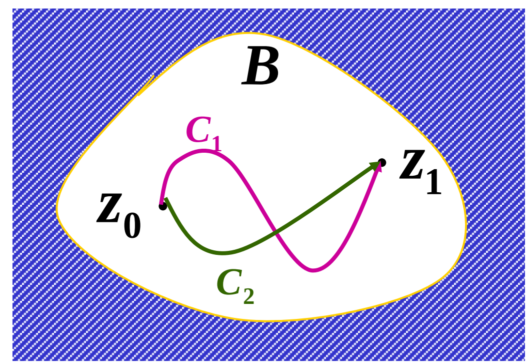
如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，

那末积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与连结起点及终点的路线

C 无关.

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z$$





如果固定 z_0，让 z_1 在 B 内变动，并令 $z_1 = z$，

便可确定 B 内的一个单值函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$.

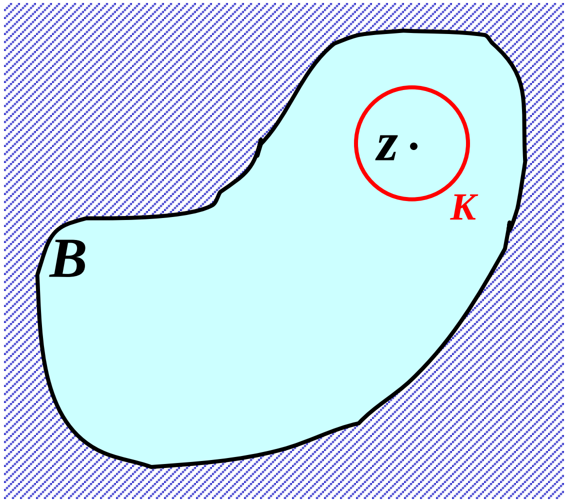
2) 定理3.2.4 (P75)

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析, 那末函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 必为 B 内的一个解析函数, 并且 $F'(z)=f(z)$.

证 利用导数的定义来证.

设 z 为 B 内任一点,

以 z 为中心作一含于 B 内的小圆 K,



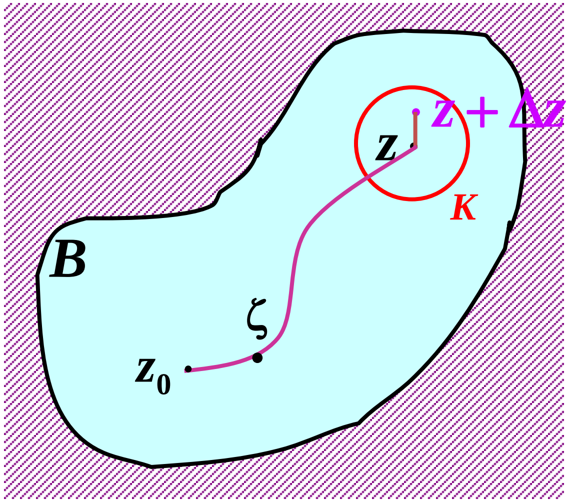
取 $|\Delta z|$ 充分小使 $z+\Delta z$ 在 K 内, 由 $F(z)$ 的定义,

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

由于积分与路线无关,

$\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的积分路线可先取 z_0 到 z,

(注意:这一段与 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的路线相同)



然后从 z 沿直线到 $z+\Delta z$,

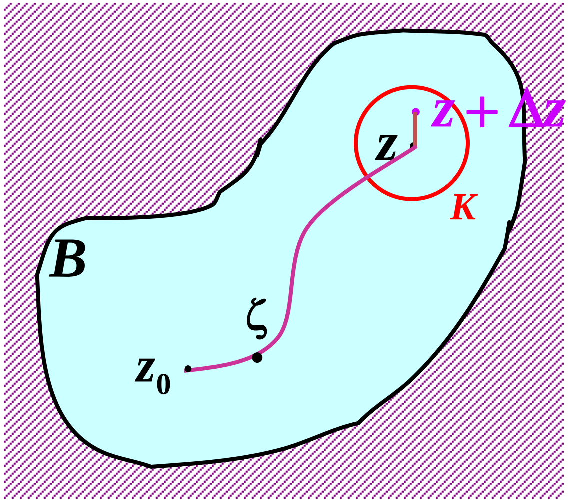
于是 $F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$

因为 $\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta = f(z)\Delta z,$

所以 $\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - f(z)$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta$$



因为 $f(z)$ 在 B 内解析，所以 $f(z)$ 在 B 内连续，

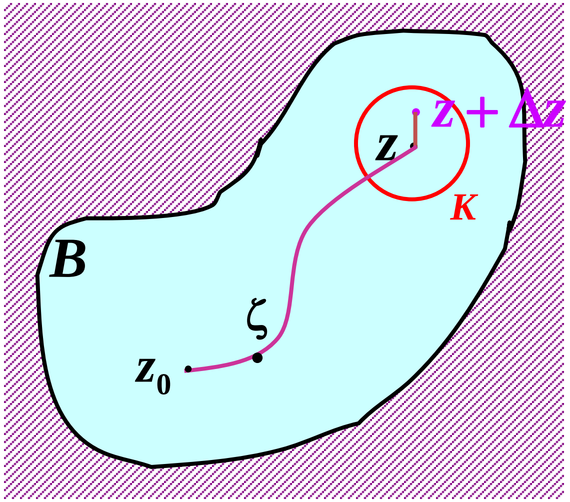
故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，

使得满足 $|\zeta - z| < \delta$ 的一切 ζ 都在 K 内，

即 $|\Delta z| < \delta$ 时，总有 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$，

由积分的估值性质，

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right|$$



$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\,\mathrm{d}\zeta\leq\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon.$$

于是 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=0,$

即 $F'(z)=f(z).$ [证毕]

此定理与微积分学中的对变上限积分的求导定理完全类似.

练习 计算$\oint_{\Gamma}\frac{1}{z^2-z}dz$ Γ:包含圆周$|z|=1$在内的任意正向简单闭曲线

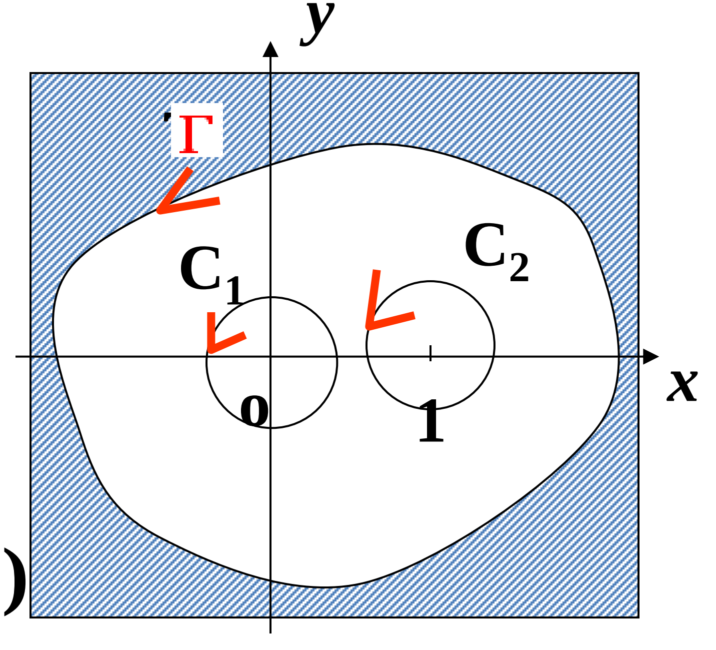
解 原式$=\oint_{\Gamma}(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z})dz$

$$=\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z-1}dz-\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z}dz$$

$$=\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}dz-\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz$$

$$=2\pi i-2\pi i=0$$

$$(\because\oint_{C_1}\frac{1}{z-1}dz=0,\oint_{C_2}\frac{1}{z}dz=0)$$



3、原函数与不定积分

（1）原函数的定义

定义 若函数$F(z)$ 在区域D内的导数等于$f(z)$，即 $F'(z)=f(z)$,称$F(z)$为$f(z)$在区域D内的原函数.

如果$f(z)$在区域D内存在原函数$F(z)$，则函数$F(z)$在区域D内必是解析函数。

原函数之间的关系

$f(z)$的任何两个原函数相差一个常数.

证 设$G(z)$和$H(z)$是$f(z)$的任何两个原函数,

那末 $[G(z)-H(z)]'=G'(z)-H'(z)$

$$=f(z)-f(z)\equiv 0$$

于是 $G(z)-H(z)=c$. (c为任意常数)

如果$f(z)$在区域 D 内有一个原函数$F(z)$,

那末它就有无穷多个原函数,

一般表达式为$F(z)+c$ (c为任意常数).

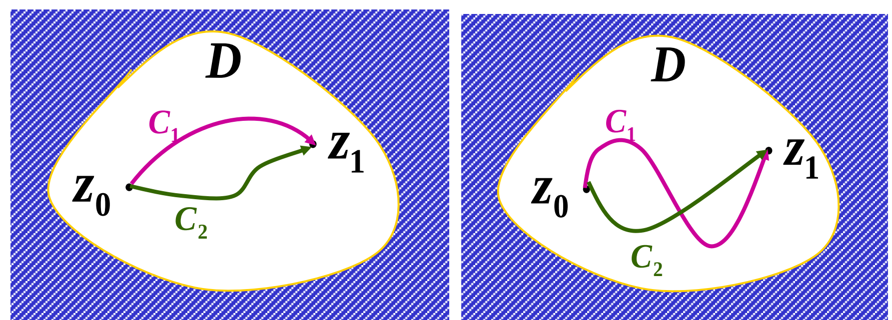
- **定理**：假设函数$f(z)$在区域D内连续，则下列论述**等价**：（**可相互推导出**）

(1) $f(z)$在D内有原函数$F(z)$

(2) 对起点z_1和终点z_2都相同的且完全含在D内的任意路径C_1和C_2的积分都相同，即

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

$$= F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)$$



(3) $f(z)$沿着含在D内的任意闭路的积分为零

3、原函数与不定积分

2）不定积分的定义：

定义　设$F(z)$是$f(z)$的一个原函数，称$f(z)$的原函数的一般表达式$F(z)+c$(c为任意常数)为$f(z)$的不定积分，记作　$\int f(z)\mathrm{d}z=F(z)+c.$

定理3.2.5（积分计算公式）

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析, $G(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数, 那末

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0)$$

这里 z_0, z_1 为域 B 内的两点.

——类似牛顿-莱布尼兹公式

证 因为 $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z$ 也是 $f(z)$ 的原函数,

所以 $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = G(z) + c,$

当 $z = z_0$ 时, 根据柯西−古萨基本定理,

得 $c = -G(z_0),$

所以 $\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = G(z) - G(z_0),$

或 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0).$ [证毕]

说明: 有了以上定理, 复变函数的积分就可以用跟微积分学中类似的方法去计算.

但是要求函数是解析的,比以前的连续条件要强

典型例题

例17　求 $\int_{z_0}^{z_1} z\mathrm{d}z$ 的值.

解　因为 z 是解析函数，　它的一个原函数是 $\frac{1}{2}z^2$

由牛顿-莱布尼兹公式知,

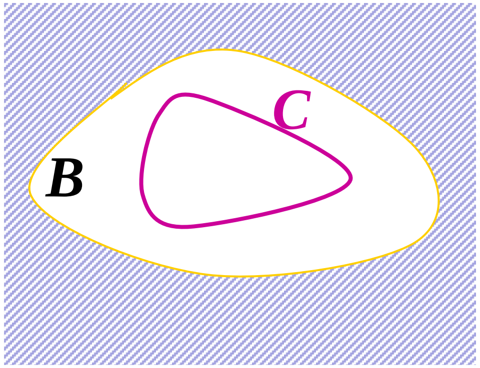
$$\int_{z_0}^{z_1} z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} z^n \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1} z^{n+1} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{n+1}\left(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\right)$$

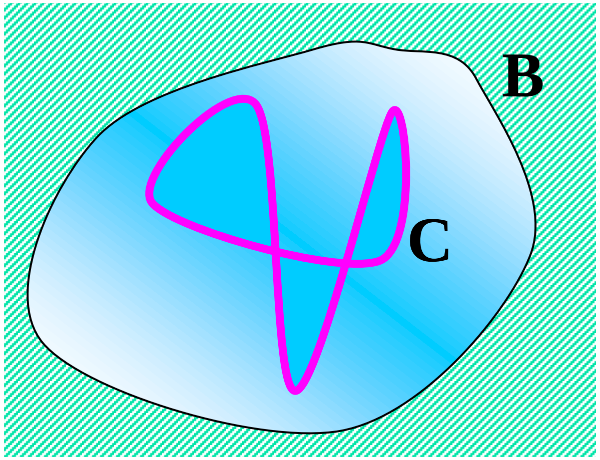
柯西积分定理（柯西－古萨）

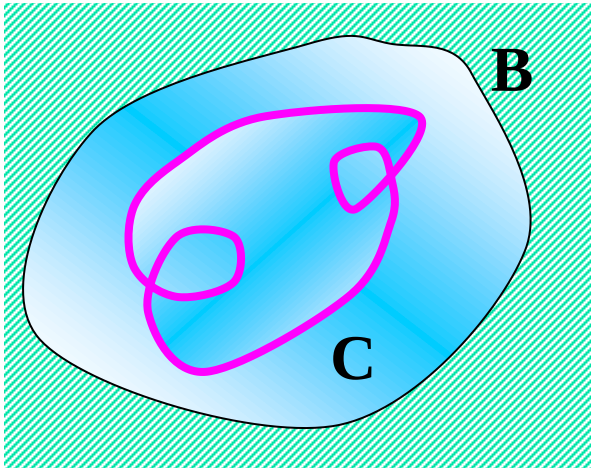
如果函数$f(z)$在单连通区域B内处处解析，那么函数$f(z)$沿B内的任何一条封闭曲线C的积分为零。

$$\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 0$$



(1)定理中的 C 可以不是简单曲线.

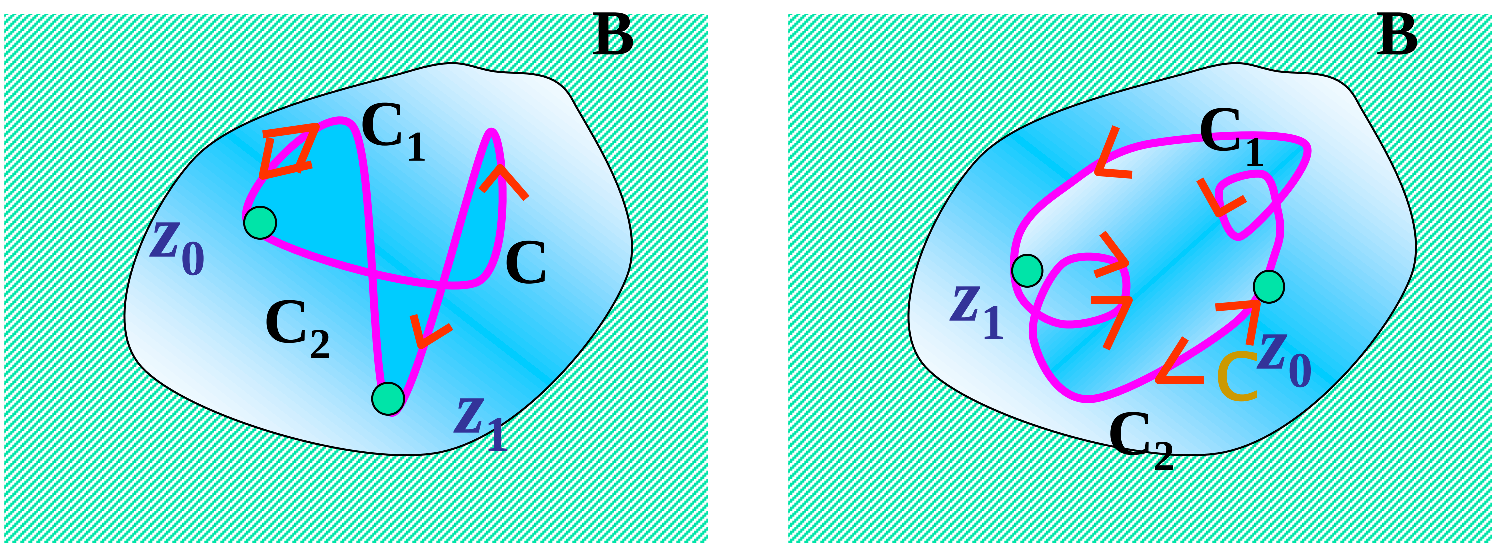




C 可以简单光滑(或逐段光滑)

推论　设$f(z)$在单连通区域B内解析，则对任意两点$z_0, z_1 \in B$，复积分$\int_c f(z)dz$不依赖于连接起点z_0与终点z_1的曲线，即积分与路径无关.只与动点z有关

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$$

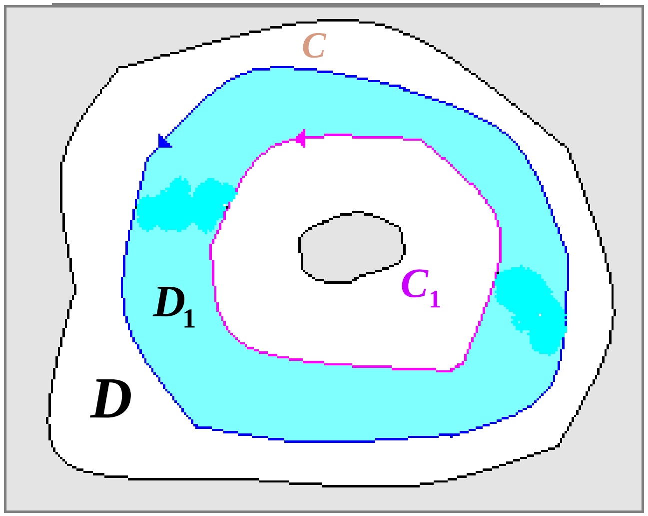


特殊情况：闭路变形原理

设函数 $f(z)$ 在多连通域内解析(如图),

C 及 C_1 为 D 内的任意两条简单闭曲线(正向为逆时针方向),

C 及 C_1 为边界的区域 D_1 全含于 D.



由复合闭路原理

$$\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z}$$

解析函数沿闭曲线的积分, 不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值.

在变形过程中曲线不经过函数 $f(z)$ 的不解析的点.

原函数与不定积分

（1）原函数的定义

定义 若函数$F(z)$ 在区域D内的导数等于$f(z)$，即

$F'(z)=f(z)$,称$F(z)$为$f(z)$在区域D内的原函数.

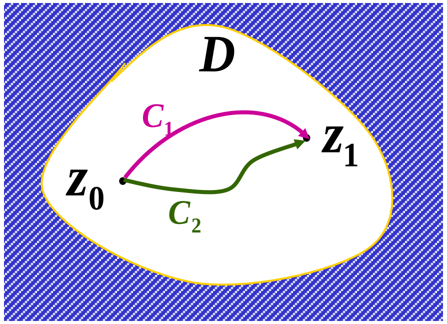
- **定理**：假设函数$f(z)$在区域D内连续，则下列论述**等价**：（**可相互推导出**）

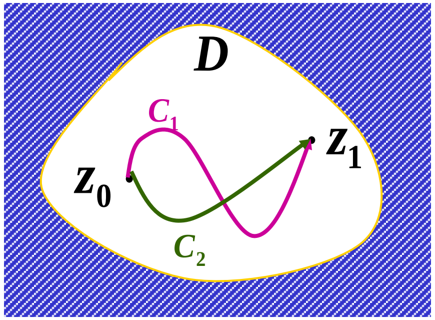
(1) $f(z)$在D内有原函数$F(z)$

(2) 对起点z_1和终点z_2都相同的且完全含在D内的任意路径C_1和C_2的积分都相同，即

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

$$= F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)$$





(3) $f(z)$沿着含在D内的任意闭路的积分为零

原函数与不定积分

2）不定积分的定义：

定义　设$F(z)$是$f(z)$的一个原函数，称$f(z)$的原函数的一般表达式$F(z)+c$(c为任意常数)为$f(z)$的不定积分，记作　$\int f(z)dz=F(z)+c$.

定理3.2.4　(积分计算公式)

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 B 内处处解析，$G(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数，那末

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = G(z_1) - G(z_0)$$

这里 z_0, z_1 为域 B 内的两点.

——类似牛顿-莱布尼兹公式

典型例题

例18 求 $\int_0^{\pi i} z\cos z^2 \mathrm{d}z$ 的值.

解 $\int_0^{\pi i} z\cos z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^{\pi i} \cos z^2 \mathrm{d}z^2$

$$= \frac{1}{2}\sin z^2 \Big|_0^{\pi i} = \frac{1}{2}\sin(-\pi^2) = -\frac{1}{2}\sin\pi^2.$$

(使用了微积分学中的“凑微分”法)

典型例题

例19 求 $\int_0^i z\cos z dz$ 的值.

解 因为 $z\cos z$ 是解析函数,

它的一个原函数是 $z\sin z+\cos z$,

由牛顿−莱布尼兹公式知,

$$\int_0^i z\cos z dz=[z\sin z+\cos z]_0^i$$

$$=i\sin i+\cos i-1$$

$$=e^{-1}-1.$$

另解

$$\int_0^i z\cos z dz=\int_0^i z d(\sin z)$$

$$=[z\sin z]_0^i-\int_0^i \sin z dz$$

$$=[z\sin z+\cos z]_0^i=e^{-1}-1.$$

使用微积分中"分部积分法" $\int u dv=uv-\int v du$

典型例题

例20 求 $\int_1^{1+i} ze^z \mathrm{d}z$ 的值.

解 利用分部积分法可得

ze^z 的一个原函数为 $(z-1)e^z$,

$$\int_1^{1+i} ze^z \mathrm{d}z = (z-1)e^z \Big|_1^{1+i} = ie^{1+i} = ie(\cos 1 + i\sin 1).$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

典型例题

例21 试沿区域 $\operatorname{Im}(z) \geq 0, \operatorname{Re}(z) \geq 0$ 内的圆弧 $|z| = 1$,

求 $\displaystyle\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}\mathrm{d}z$ 的值.

解 函数 $\dfrac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在所设区域内解析,

它的一个原函数为 $\dfrac{\ln^2(z+1)}{2}$,

$$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}\mathrm{d}z = \left.\frac{\ln^2(z+1)}{2}\right|_1^i = \frac{1}{2}[\ln^2(1+i) - \ln^2 2]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}i\right)^2 - \ln^2 2\right] = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8}\ln^2 2 + \frac{\pi \ln 2}{8}i.$$

典型例题

例22 求 $\int_C (2z^2+8z+1)\mathrm{d}z$ 的值. 其中 C 是连接 0 到 $2\pi a$ 的摆线: $x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$.

解 因为函数 $2z^2+8z+1$ 在复平面内处处解析,

所以积分与路线无关, 根据牛—莱公式:

$$\int_C (2z^2+8z+1)\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi a}(2z^2+8z+1)\mathrm{d}z$$

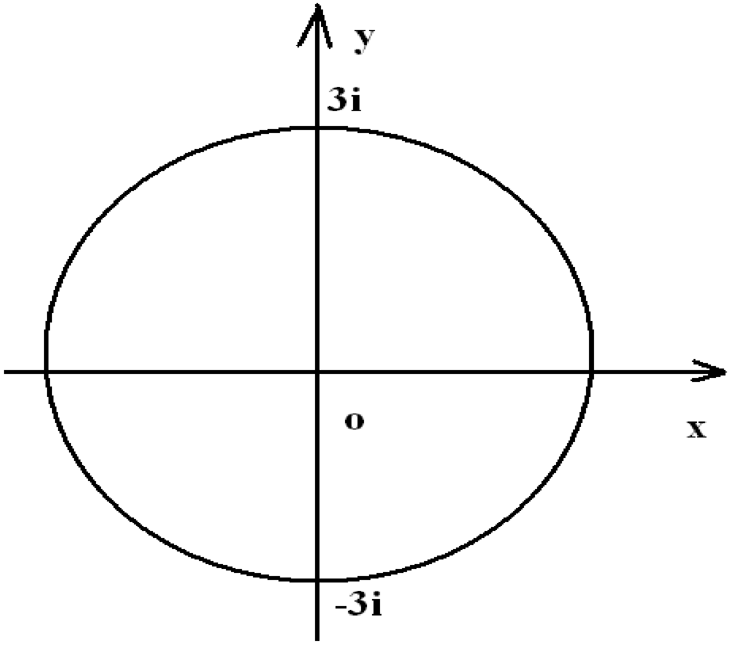
$$=\left[\frac{2}{3}z^3+4z^2+z\right]_0^{2\pi a}=\frac{16}{3}\pi^3a^3+16\pi^2a^2+2\pi a.$$

例23 计算下列积分：

1) $\int_C \frac{1}{z^2}dz$

其中C为半圆周$|z|=3, \operatorname{Re} z \geq 0,$

起点为$-3i$,终点为$3i$;



解1: $\because \frac{1}{z^2}$在$\operatorname{Re} z \geq 0$，$z \neq 0$上解析,

故 $\int_C \frac{1}{z^2}dz = -z^{-2+1}\Big|_{-3i}^{3i} = \frac{2i}{3}$

解2: $\int_C \frac{1}{z^2}dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3ie^{i\theta}}{9e^{2i\theta}}d\theta = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{i}{e^{i\theta}}d\theta = \frac{2i}{3}$

2) $\int_C \frac{1}{z}dz$

其中C为单连通区域$D: -\pi < \arg z < \pi$内起点为1，终点为z的任意曲线.

解: $\because$ $\frac{1}{z}$在D内解析，又$\ln z$是$\frac{1}{z}$的一个原函数，

故 $\int_C \frac{1}{z}dz = \ln z - \ln 1 = \ln z \ (z \in D)$.

小结　求积分的方法

$$(1)\ \int_c f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k$$

$$(2)\ \int_c f(z)dz = \int udx - vdy + i\int vdx + udy$$

$$(3)\ \int_c f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

(4)若$f(z)$解析, B单连通, $C\subset B$, 则$\oint_c f(z)dz = 0$

(5)若$f(z)$在B内解析, B单连通, 则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1},\quad F'(z) = f(z)$$

课堂练习 求 $\int_0^1 z\sin z dz$ 的值.

答案

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_0^1 z\sin z\,dz = -\boldsymbol{z}\cos z + \int_0^1 \cos z\,dz = \boldsymbol{sinz} - \boldsymbol{zcosz}$$

$$= \sin 1 - \cos 1\,.$$

§3-3 柯西积分公式

先观察等式 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{3z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z = 2\pi i$ **与** $\oint_{|z-1|=\frac{1}{6}} \frac{3z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z = 4\pi i$

的左端与右端的特征，再寻找将它的变形后的等式的左端与右端的联系后，发现，它们均满足

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$$

于是，我们可提出下面的问题来研究：等式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

对于$f(z)$**来说，是否是必然规律?**

积分基本公式对此作了回答.

分析　设D－单连通, $f(z)$在D内解析,

$z_0 \in D$, C是D内围绕z_0的一条闭曲线,则

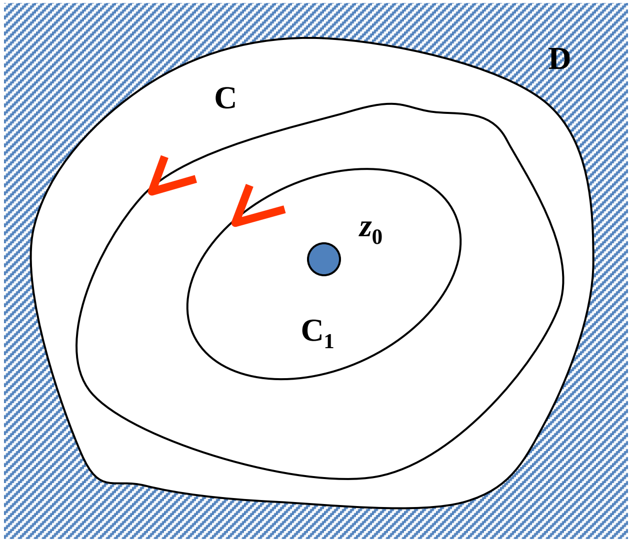
$$\frac{f(z)}{z-z_0}\text{在}z_0\text{不解析.}\ \therefore \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \overset{\text{一般}}{\neq} 0$$

由复合闭路定理得,

任意包含z_0在内部的

曲线$C_1 \subset C$的内部

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

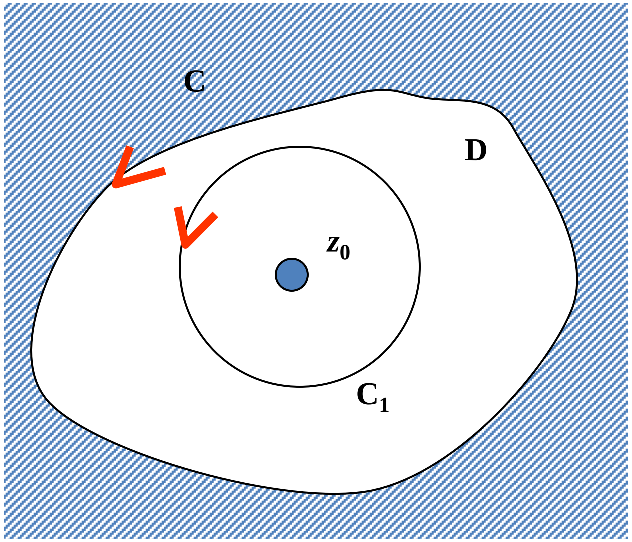


该积分值不随闭曲线 C 的变化而改变,

特别取 $C_1=\{z \mid |z-z_0|=\delta(\delta>0\text{可充分小})\}$

$\because f(z)$的连续性,在C上的函数值$f(z)$

当$\delta\to 0$时, $f(z)\to f(z_0)$



$\therefore$猜想积分

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \xrightarrow{\delta\to 0}$$

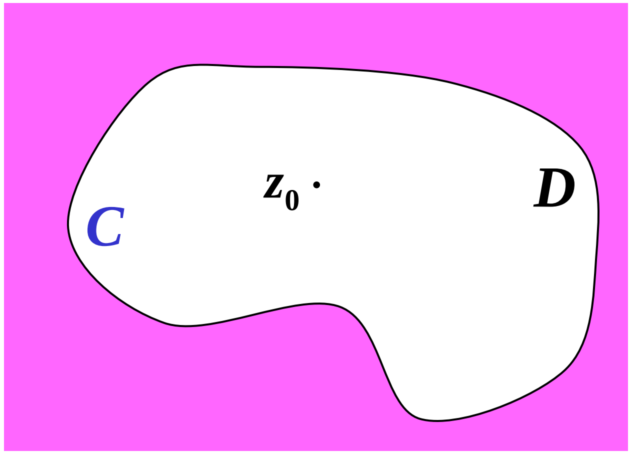
$$\to f(z_0)\oint_{C_1}\frac{1}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$$

这个猜想是对的,这就是下面的定理.

1、Cauchy积分公式

P61 定理3.3.1 设函数$f(z)$在闭路C上及其内部D解析，点$z_0\in D$，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$



定理(*Cauchy* 积分公式)

1)设$f(z)$在D内处处解析,

2)C是D内任意一条正向简单闭曲线,

它的内部完全含于D,

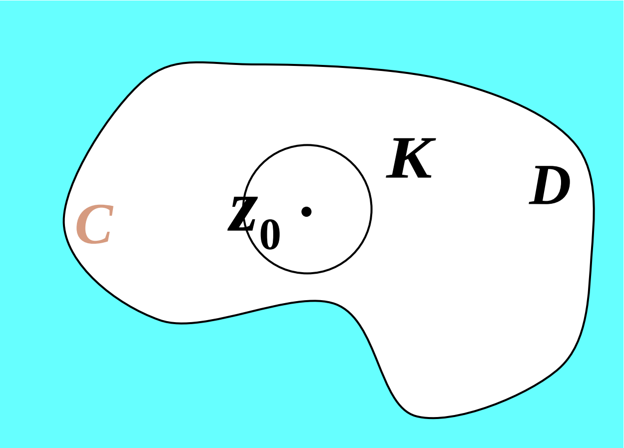
3)z_0为C内任意一点 $\Rightarrow$ $$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz}$$

1、Cauchy积分公式

证明 设$\forall K=\{z \mid |z-z_0|=R\}\subset C$的内部.

$$\because \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz \text{与}K\text{的半径}R\text{无关},$$

$$\therefore \text{只须证明}: \lim_{R\to 0}\int_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0).$$



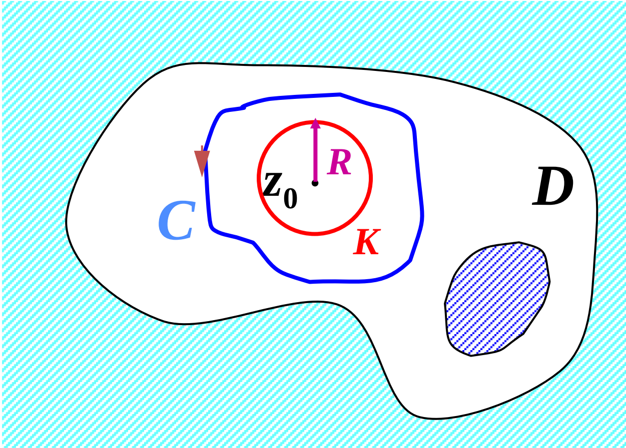
由闭路变形原理

因为 $f(z)$ 在 z_0 连续， 则 $\forall \varepsilon > 0$， $\exists \delta(\varepsilon) > 0$，

当 $|z - z_0| < \delta$ 时， $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

设以 z_0 为中心, 半径为 $R\ (R < \delta)$ 的正向圆周 K :

$|z - z_0| = R$ 全在 C 的内部,



则 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z$

$$= \oint_K \frac{f(z_0)}{z - z_0}\mathrm{d}z + \oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i f(z_0) + \oint_K \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\mathrm{d}z$$

$$\left|\oint_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \le \oint_K \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\,ds$$

$$< \frac{\varepsilon}{R}\oint_K ds = 2\pi\varepsilon.$$

不等式表明，只要ε足够小，左端积分的模就可以任意小,

根据闭路变形原理知，左端积分的值与 R无关,所以只有在对所有的 R积分值为零时才有可能.

$$\therefore \lim_{R\to 0}\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0) \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

柯西积分公式

关于柯西积分公式的说明:

(1) 把函数在 C 内部任一点的值用它在边界上的值表示. (这是解析函数的又一特征)

(2) 公式不但提供了计算某些复变函数沿闭路积分的一种方法, 而且给出了解析函数的一个积分表达式. (这是研究解析函数的有力工具)

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

(3) 一个解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 如果 C 是圆周 $z = z_0 + R \cdot e^{i\theta}$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta}) \mathrm{d}\theta.$$

典型例题

1、Cauchy积分公式

例1 求下列积分

$$(1)\ \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz; \qquad (2)\ \oint_{|z|=4} \left(\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-3} \right) dz.$$

解 (1) 因为 $f(z) = \sin z$

在复平面内解析,

$z = 0$ 位于 $|z| < 4$ 内,

由Cauchy积分公式

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i \cdot \sin z \big|_{z=0} = 0;$$

典型例题　1、Cauchy积分公式

例1 求下列积分

$$(1)\ \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z; \qquad (2)\ \oint_{|z|=4} \left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)\mathrm{d}z.$$

解

$$(2)\ \oint_{|z|=4} \left(\frac{1}{z+1}+\frac{2}{z-3}\right)dz$$

$$=\oint_{|z|=4} \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z+\oint_{|z|=4} \frac{2}{z-3}\mathrm{d}z$$

$$\overset{f(z)=1及2}{=} 2\pi i\cdot 1+2\pi i\cdot 2$$

$$=6\pi i.$$

例2 求 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$

C为包含$|z|=1$在内的任意简单正向曲线。

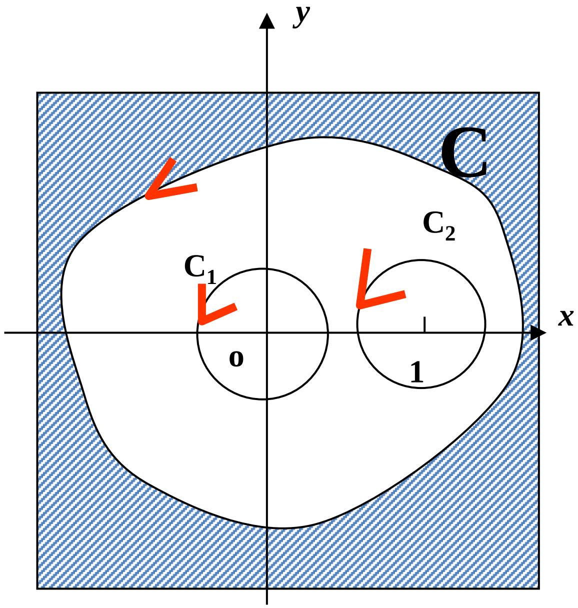
解 $$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz=\oint_{C_1}\frac{2z-1}{z^2-z}dz+\oint_{C_2}\frac{2z-1}{z^2-z}dz$$

$$=\oint_{C_1}\frac{\frac{2z-1}{z-1}}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{\frac{2z-1}{z}}{z-1}dz$$

由C积分公式

$$=\left.\frac{2z-1}{z-1}\right|_{z=0}2\pi i+\left.\frac{2z-1}{z}\right|_{z=1}2\pi i$$

$$=4\pi i$$



例3 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \mathrm{d}z.$

解 因为 $f(z) = e^z$ 在复平面内解析,

$z = 1$ 位于 $|z| < 2$ 内,

由柯西积分公式

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot e^z \Big|_{z=1} = 2e\pi i.$$

例4 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z.$

解 $\displaystyle\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z+i)(z-i)} = \frac{\boxed{\frac{1}{z(z+i)}}}{z-i}$ $\displaystyle= f(z)$ $z_0 = i,$

因为 $f(z)$ 在 $|z-i| \le \frac{1}{2}$ 内解析，由柯西积分公式

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z(z+i)}}{z-i}\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \left.\frac{1}{z(z+i)}\right|_{z=i}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2i^2} = -\pi i.$$

例5 设 C 表示正向圆周 $x^2+y^2=3$,

$$f(z)=\int_C \frac{3\xi^2+7\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi,$$ 求 $f'(1+i)$.

解 根据柯西积分公式知, 当 z 在 C 内时,

$$f(z)=2\pi i\cdot(3\xi^2+7\xi+1)\Big|_{\xi=z}=2\pi i(3z^2+7z+1),$$

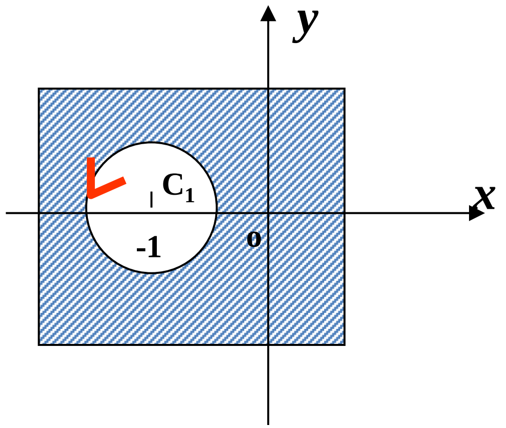
故 $f'(z)=2\pi i(6z+7)$, 而 $1+i$ 在 C 内,

所以 $f'(1+i)=2\pi(-6+13i)$.

例6 计算积分 $\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$，其中 $\boxed{C:(1)\quad |z+1|=\dfrac{1}{2};}$

解 (1) $\displaystyle\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}}{z+1}\mathrm{d}z$

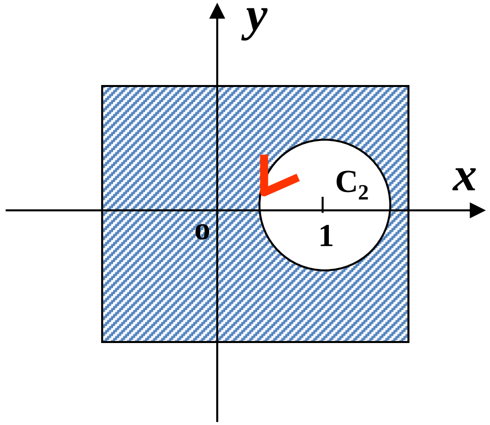
$$= 2\pi i\cdot \left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\right|_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i;$$



例6 计算积分 $\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$，其中 $\boxed{C:(2)\ \ |z-1|=\dfrac{1}{2};}$

解 (2) $$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}}{z-1}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i\cdot\left.\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}\right|_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i;$$

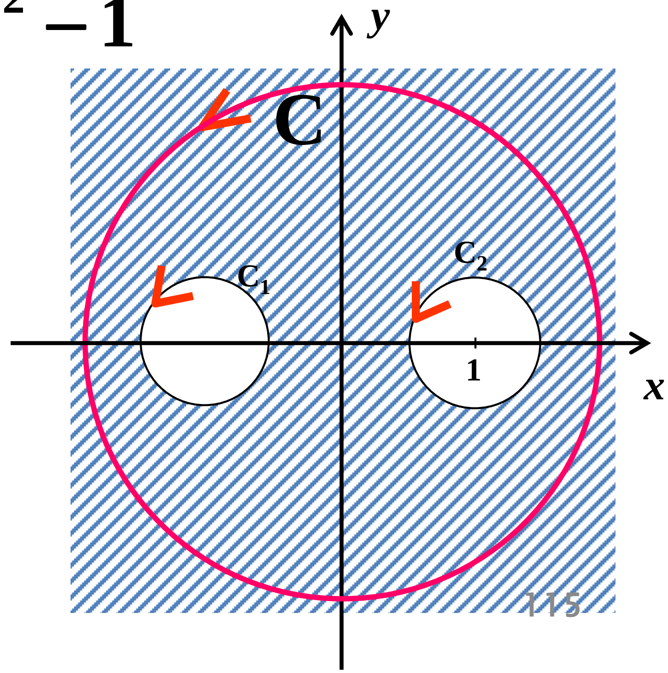


例6 计算积分 $\oint_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\,dz$，其中 $\boxed{C:(3)\quad |z|=2.}$

解 (3) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\,dz$ 由闭路复合定理，得

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\,dz = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\,dz + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\,dz$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i = \sqrt{2}\pi i.$$



例7 求积分 $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z} \mathrm{d}z$, 并证明 $\int_0^{\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) \mathrm{d}\theta = \pi.$

解 根据柯西积分公式知,

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot e^z \Big|_{z=0} = 2\pi i;$$

令 $z = re^{i\theta}$, $(-\pi \le \theta \le \pi)$ $\quad |z| = r = 1,$

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{re^{i\theta}}}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta} \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} ie^{e^{i\theta}} \mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} ie^{e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta \;=\int_{-\pi}^{\pi} ie^{\cos\theta+i\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2i\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

因为 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}\mathrm{d}z=2\pi i,$

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z=2i\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

比较两式得 $\int_{0}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi.$

课堂练习 计算积分 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz.$

答案 有三个奇点 $z=0, z=1, z=-1$

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz = \pi i(e+e^{-1}-2).$$

2、解析函数的高阶导数

观察等式 $(\sin z)' = \cos z$，$(e^z)' = e^z$，$(4z^2 + 2z)' = 8z + 2$

问题:

(1) 解析函数是否有高阶导数?

(2) 若有高阶导数，其定义和求法是否与实变函数相同? 其导函数可否用一公式来表示?

回答:

(1) 解析函数有各高阶导数.

(2) 高阶导数的值可以用函数在边界上的值通过积分来表示，这与实变函数完全不同.

解析函数高阶导数的定义是什么?

形式上，

对积分公式$f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz(z_0\in D)$

两边在积分号下对z_0求导得

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

$$f''(z_0)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz \quad \cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad (n=1,2,\cdots)$$

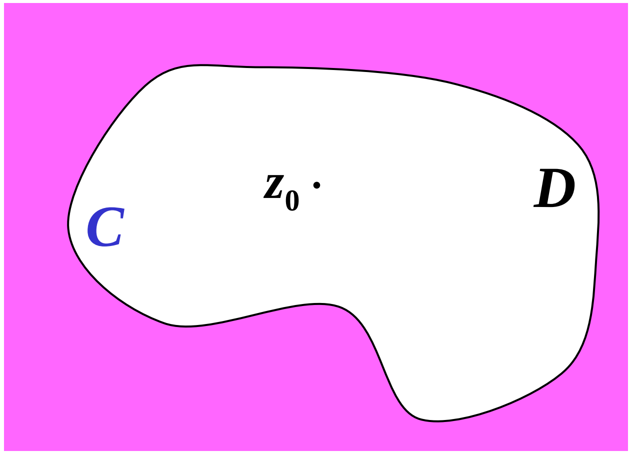
以下将对这些公式的正确性加以证明.

2、解析函数的高阶导数

定理3.3.2 设函数$f(z)$在闭路C上及其围成的单连通域D内解析，点$z_0 \in D$，则有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$



其中，C为在函数$f(z)$的解析区域D内围绕z_0的任何一条正向简单闭曲线（闭路）

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

定理表明$f(z)$在z平面上D内解析$\Rightarrow f(z)$在D内具有各阶导数,即在D内解析$--$无穷次可导.

一个解析函数的导数仍为解析函数.

高阶导数公式的作用:

不在于通过积分来求导，而在于通过求导来求积分.

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

2、解析函数的高阶导数

证明: 用数学归纳法和导数定义.

设 z_0 为 D 内任一点, 先证 $n=1$ 的情况,

根据导数的定义, $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

从柯西积分公式得 $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z,$

$$f(z_0+\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z}\mathrm{d}z,$$

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi\Delta z i}\left[\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-\Delta z}\mathrm{d}z-\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right],$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-\Delta z)}dz$$

令=I

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz+\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\Delta z f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}dz}$$

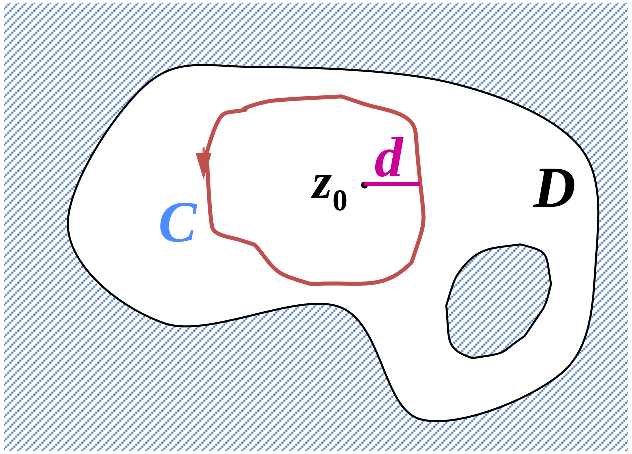
$$|I|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_C \frac{\Delta z f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)}dz\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|\Delta z||f(z)|}{|z-z_0|^2|z-z_0-\Delta z|}ds$$

$\because f(z)$在C上解析，$\therefore f(z)$在C上连续

则$\exists M, \partial\ |f(z)|\leq M, d=\min\limits_{z\in C}|z-z_0|$　取$|\Delta z|<\frac{1}{2}d$，则有

则 $|z-z_0|\ge d$ ，$\dfrac{1}{|z-z_0|}\le\dfrac{1}{d}$，



$$|z-z_0-\Delta z|\ge|z-z_0|-|\Delta z|>\frac{d}{2},$$

$$\frac{1}{|z-z_0-\Delta z|}\le\frac{2}{d},\ |I|<|\Delta z|\frac{ML}{\pi d^3},$$

$|I|<|\Delta z|\dfrac{ML}{\pi d^3}$，这里 L 为 C 的长度.

如果 $\Delta z\to 0$，那末 $I\to 0$，

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z,$$

再利用以上方法求极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z}$

可得 $f''(z_0)=\dfrac{2!}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^3}\mathrm{d}z.$

我们证明了一个解析函数的导数仍然是解析函数.

依次类推，利用数学归纳法可证

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z.$$

例1 求下列积分值 $C: |z| = r > 1$

$$1)\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz \qquad 2)\oint_C \frac{e^z}{(1+z^2)^2} dz$$

解 (1) 函数 $\dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在 C 内 $z = 1$ 处不解析,

但 $\cos \pi z$ 在 C 内处处解析,

根据公式 $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

$= f(z)$

$$\oint_C \frac{\boxed{\cos \pi z}}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{(5-1)!}(\cos \pi z)^{(4)}\Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5 i}{12};$$

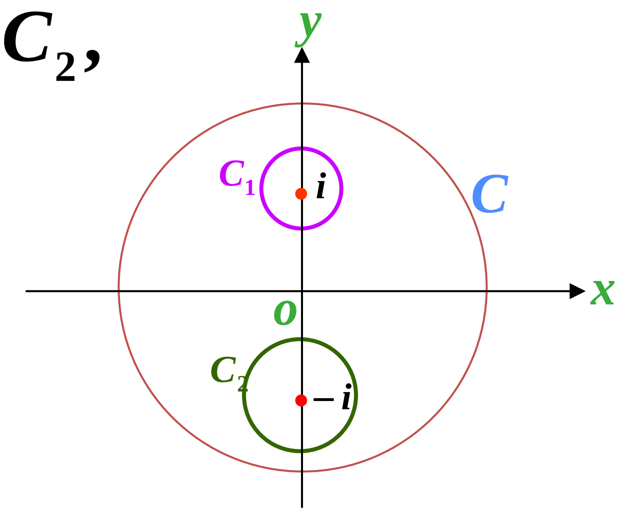
(2) 函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 C 内的 $z=\pm i$ 处不解析,

在 C 内以 i 为中心作一个正向圆周 C_1,

以 $-i$ 为中心作一个正向圆周 C_2,

则函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由 C, C_1, C_2

围成的区域内解析,



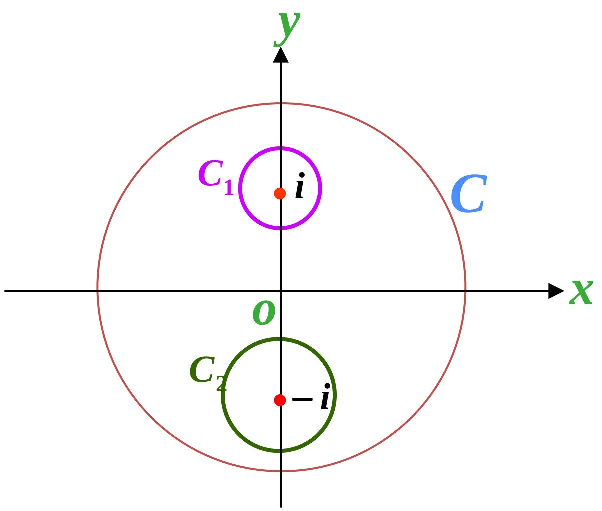
根据复合闭路定理

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$$

$$\boxed{\frac{e^z}{(z+i)^2}} = f(z)$$

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i}{2}\pi,$$



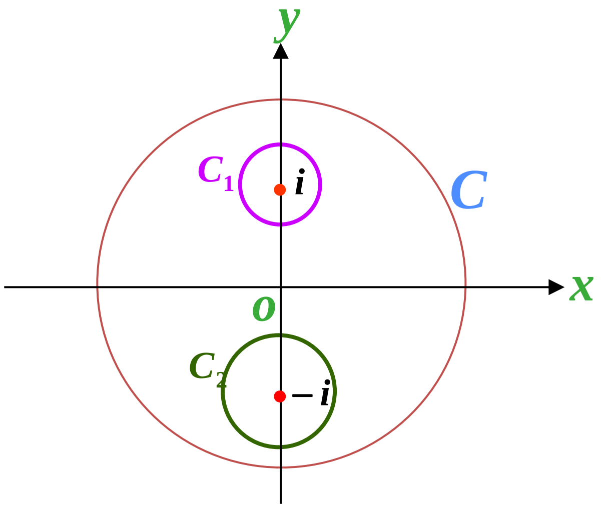
同理可得 $\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi,$

于是 $\oint_{C} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{(1-i)e^{i}}{2}\pi + \frac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)(e^i - ie^{-i})$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)^2(\cos 1 - \sin 1)$$

$$= i\pi\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$



例2 求积分 (1) $\oint_{|z|=2} \frac{z^3+1}{(z+1)^4}\mathrm{d}z$; (2) $\oint_{|z|=1} \frac{e^{-z}\cos z}{z^2}\mathrm{d}z.$

解 (1) 函数 z^3+1 在复平面内解析,

$$z_0=-1 \text{ 在 } |z|\le 2 \text{ 内}, \quad n=3,$$

根据公式 $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3+1}{(z+1)^4}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{3!}[z^3+1]'''\Big|_{z=-1} = 2\pi i;$$

$$(2)\ \oint_{|z|=1} \frac{e^{-z}\cos z}{z^2}\,dz$$

解： 函数 $e^{-z}\cos z$ 在复平面内解析,

$z_0 = 0$ 在 $|z| \le 1$ 内, $n = 1$,

$$\oint_{|z|=1} \frac{\boxed{e^{-z}\cos z}}{z^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}(e^{-z}\cos z)'\Big|_{z=0}$$

$= f(z)$

$$= 2\pi i[-e^{-z}\cos z - e^{-z}\sin z]\Big|_{z=0} = -2\pi i.$$

例3 求积分 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} \mathrm{d}z$. ($n$ 为整数)

解 (1) $n \le 0$, $\frac{e^z}{z^n}$ 在 $|z| \le 1$ 上解析,

由柯西一古萨基本定理得 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} \mathrm{d}z = 0$;

(2) $n = 1$, 由柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=1} \frac{\boxed{e^z} = f(z)}{z^n} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot (e^z)\Big|_{z=0} = 2\pi i;$$

(3) $n>1$,

根据公式 $f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^n}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{(n-1)!}(e^z)^{(n-1)}\Big|_{z=0}=\frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

因此，
$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^n}dz=\begin{cases}0 & (n\le 0)\\ 2\pi i & (n=1)\\ \dfrac{2\pi i}{(n-1)!} & (n>1)\end{cases}$$
（n为整数）

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^n}dz=\begin{cases}0 & (n\le 0)\\ \dfrac{2\pi i}{(n-1)!} & (n\ge 1)\end{cases}$$
（n为整数）

课堂练习 设 C 是不通过 z_0 的简单闭曲线,

求 $g(z_0)=\oint_C \dfrac{\boxed{z^4+z^2}}{(z-z_0)^3}\mathrm{d}z.$ $= f(z)$

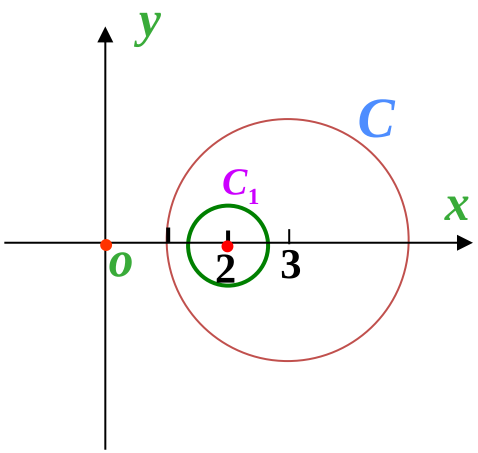
答案 z_0 在 C 外, $g(z_0)=0$;

z_0 在C 内, $n=2$

$g(z_0)=2(6z_0^2+1)\pi i.$

例4

求积分 $\oint_C \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz.$



其中 $C:(1)\ |z-3|=2;\quad (2)\ |z-1|=3.$

解 函数 $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 有两个奇点 $z=2$ 和 $z=0$,

$(1)\ |z-3|=2$, 仅包含奇点 $z=2$, 取 $f(z)=\frac{1}{z^3}$,

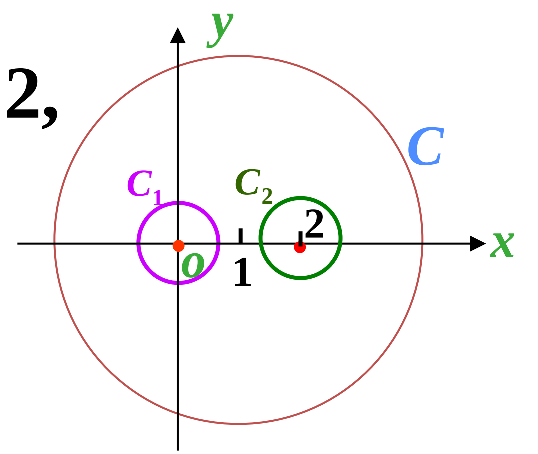
$$\oint_C \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \oint_C \frac{\boxed{\frac{1}{z^3}} = f(z)}{(z-2)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z^3}\right)'\Bigg|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8};$$

(2) $|z-1|=3$ 两个奇点 $z=2$ 和 $z=0$ 都含在 C 内,

作简单闭曲线 C_1 和 C_2 分别包含 0 和 2,

C_1 和 C_2 互不包含且互不相交,

根据复合闭路定理和高阶导数公式,

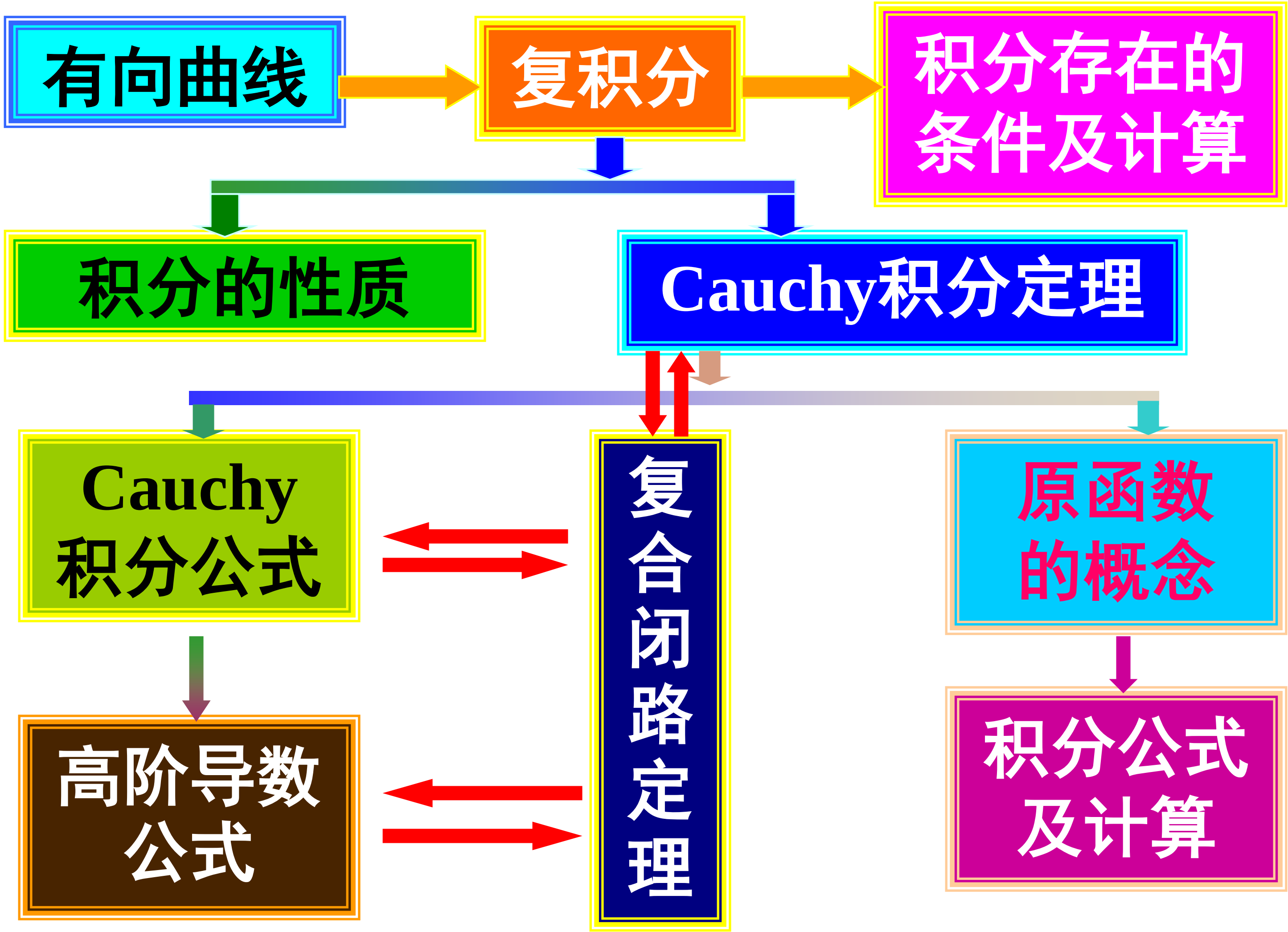


$$\oint_C \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,dz = \oint_{C_1} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,dz + \oint_{C_2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\overbrace{\boxed{\dfrac{1}{(z-2)^2}}}^{=f(z)}}{z^3}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\overbrace{\boxed{\dfrac{1}{z^3}}}^{=f(z)}}{(z-2)^2}\,dz$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right]''\Bigg|_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{1}{z^3}\right]'\Bigg|_{z=2} = \frac{3\pi i}{8} - \frac{3\pi i}{8} = 0.$$

本章主要内容



有向曲线
复积分
积分存在的条件及计算
积分的性质
Cauchy积分定理
Cauchy积分公式
复合闭路定理
原函数的概念
高阶导数公式
积分公式及计算

1. 复积分的基本定理;

柯西古萨定理公式 $\oint_C f(z)dz = 0$

复合闭路定理 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z,$

2. 柯西积分公式与高阶导数公式;

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z.$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

3. 复积分计算过程

1）判断奇点位置

2）判断奇点是否在积分域内

3）设置解析函数$f(z)$

4) 用公式计算

练习 1

$$\oint_{|z|=1}\frac{\cos(z^{100}+z+1)}{z^2+2z+4}\mathrm{d}z.$$

解 当 $|z|\le 1$ 时,

$$\left|z^2+2z+4\right|\ge 4-|2z|-|z|^2\ge 4-2-1=1,$$

$$\oint_{|z|=1}\frac{\cos(z^{100}+z+1)}{z^2+2z+4}\mathrm{d}z=0.$$

练习 2

沿指定路径$C:|z-i|=\dfrac{3}{2}$计算以下积分

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z.$$

解答 $\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$在C内有两个奇点$z=0$及$z=i$分别以$z=0$及$z=i$为圆心,以$1/4$为半径作圆C_1及C_2,则由复合闭路定理有

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(z^2+1)}\mathrm{d}z$$

$f_1(z)=\dfrac{e^z}{z^2+1}$在$C_1$内解析, $f_2(z)=\dfrac{e^z}{z(z+i)}$在$C_2$内解析,

因此由柯西积分公式得

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z^2+1)}dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z(z^2+1)}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(z^2+1)}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{e^z \big/ (z^2+1)}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z \big/ \left[z(z+i)\right]}{z-i}dz$$

$$= 2\pi i \cdot f_1(0) + 2\pi i f_2(i)$$

$$= 2\pi i + 2\pi i\left(-\frac{e^i}{2}\right) = \pi i(2-e^i)$$

$$= \pi[\sin 1 + i(2-\cos 1)].$$

第三章测试

计算$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$,其中$C$是不经过0与1的闭光滑曲线.