复变函数与积分变换

（2024-2025学年第一学期）

邱丽荣

办公室：北院 6号教学楼125

E-mail: qiulirong1@bit.edu.cn

电话：18810135629

我们从导数与积分的角度研究解析函数均获得成功．于是，我们自然会想从数学分析中选取别的研究角度，如幂级数，来讨论解析函数．实践证明，这种选择是成功的．

我们先讨论解析函数的泰勒级数和洛朗级数展开式。

第四章 级数

主要内容:

§4-1 复数项级数

§4-2 幂级数

§4-3 泰勒级数

§4-4 洛朗级数

作业　　书97-98页

3、6、10(3)、11(1)、11(2)、11(6)、11(8)、 12(1)、 12(2) 、12(3) 、12(4)

§4-1 复数项级数

- 1. 复数列的极限
- 2. 级数的概念

一、复数序列的极限

研究级数和序列的基本性质，先从复数序列开始。

1.复数序列定义

一列无穷多个有序的复数 $z_n=a_n+ib_n$, $(n=1,2,\ldots.)$ ，称为复数序列，记作$\{z_n\}$。

复数 $z_1=a_1+ib_1$

复数 $z_2=a_2+ib_2$

…

复数 $z_n=a_n+ib_n$　　　其中$a_n=\mathrm{Re}z_n$, $b_n=\mathrm{Im}z_n$

根据$\{|z_n|\}$的有界性来定义$\{z_n\}$的有界性。

一、复数列的极限

2.极限定义

设 $\{z_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$为一复数序列，其中$z_n=a_n+ib_n$，又设$z_0=a+ib$为一确定的复常数。

如果任意给定$\varepsilon>0$，相应地都能找到一个正整数$N(\varepsilon)$，使$|z_n-z_0|<\varepsilon$ 在$n>N$时成立，那么z_0称为复数序列$\{z_n\}$当$n\to\infty$ 时的极限。

记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ ，或者 当$n\to\infty$ 时，$z_n\to z_0$;

此时，也称复数序列$\{z_n\}$收敛于z_0.

一、复数列的极限

3.复数列收敛的条件

定理1 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$

定理2 （定理4.1.1)

复数列$\{z_n\}(n=1,2,\ldots)$收敛到$z_0=a+ib$的充要条件是:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

说明: 可将复数列的敛散性转化为判别两个实数列的敛散性

3.复数列收敛的条件

证 1) 必要性

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$， 那末对于任意给定的$\varepsilon > 0$

就能找到一个正数N, 当$n > N$ 时,

$$|z_n - z_0| = |(a_n + ib_n) - (a + ib)| < \varepsilon \text{ ,}$$

又$|z_n - z_0| = |(a_n + ib_n) - (a + ib)| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2}$

则$|a_n - a| \le |z_n - z_0| < \varepsilon$ ， $|b_n - b| \le |z_n - z_0| < \varepsilon$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ， $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

3.复数列收敛的条件

2) 充分性

如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

从而有 $|z_n-z_0|=|(a_n+ib_n)-(a+ib)|$

$=|(a_n-a)+i(b_n-b)| \le |a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon$

那末当 $n>N$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon/2$, $|b_n-b|<\varepsilon/2$.

所以 $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$

例1 判别下列数列的收敛性和极限

(1) $z_n = \dfrac{ni}{n+1}$ (2) $z_n = \dfrac{\cos n}{(1+i)^n}$ (3) $z_n = e^{n\pi i}$

解:

(1) 令$z_n = \dfrac{ni}{n+1} = a_n + ib_n$，则$a_n = 0, b_n = \dfrac{n}{n+1}$

则 $n \to \infty$， $z_n \to i$ 收敛，极限为i

(2)当 $n \to \infty$时，$|z_n| \to 0$，因此 $z_n \to 0$

收敛，极限为0

(3) $z_n = \cos n\pi$，$|z_n| = 1$，数列$\{z_n\}$发散

例2 数列 $z_n=(1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}$ 是否收敛？若收敛，求极限

解 因为 $z_n=(1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}} = (\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}})(\boldsymbol{cos}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}}+\boldsymbol{isin}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{n}})$

所以 $\boldsymbol{a_n=(1+\frac{1}{n})\cos\frac{\pi}{n}}$， $\boldsymbol{b_n=(1+\frac{1}{n})\sin\frac{\pi}{n}}$.

而 $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty}\boldsymbol{a_n}=\mathbf{1},\ \lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty}\boldsymbol{b_n}=\mathbf{0}$

所以数列 $z_n=(1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=1$.

例3 下列数列是否收敛, 如果收敛, 求出其极限.

(1) $\alpha_n = n\cos in$

解 由于 $\alpha_n = n\cos in = n\cosh n$,

当 $n \to \infty$ 时, $\alpha_n \to \infty$,

所以数列发散.

课堂练习:

下列数列是否收敛? 如果收敛, 求出其极限.

(1) $z_n = \dfrac{1+ni}{1-ni}$;　　收敛−1

(2) $z_n = (-1)^n + \dfrac{i}{n+1}$;　　发散

(3) $z_n = \dfrac{1}{n} e^{-\frac{n\pi i}{2}}$.　　收敛0

复数序列极限运算性质 ——同实数序列极限

定理：

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n = z'$, $\lim\limits_{n\to\infty} z''_n = z''$, 则

- $\lim\limits_{n\to\infty}(z'_n \pm z''_n) = z' \pm z''$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(z'_n z''_n) = z'z''$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(z'_n / z''_n) = z'/z''$, $z''_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$, $z'' \neq 0$

二、复数项级数

1.定义

设 $\{z_n\}=\{a_n+ib_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$为一复数序列，

表达式 $$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

称为复数项无穷级数.

部分和 其最前面 n 项的和

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$ 称为级数的部分和.

如果部分和极限存在，则部分和序列收敛。

二、复数项级数

级数 收敛与发散

如果部分和数列$\{s_n\}$收敛，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，

并且极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ 称为级数的和.

如果部分和数列$\{s_n\}$不收敛，　那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散。

说明: 与实数项级数相同，判别复数项级数敛散性的基本方法是：利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s.$

例如，级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$：

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} \quad (z \neq 1),$$

由于当$|z|<1$时，$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1}{1-z}$,

所以当$|z|<1$时级数收敛.

二、复数项级数

2.复数项级数收敛的条件

定理 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)$ 收敛的充要条件:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

证 因为 $s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + i(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

$$= \sigma_n + i\tau_n\ ,$$

根据 $\{s_n\}$ 极限存在的充要条件:

$\{\sigma_n\}$ 和 $\{\tau_n\}$ 的极限存在,

于是 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

说明 复数项级数的收敛问题

$$\Downarrow \text{(定理)}$$

实数项级数的收敛问题

课堂练习 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})$ 是否收敛?

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散; 调和级数

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

所以原级数发散.

2.复数项级数收敛的条件

收敛必要条件

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件是: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$

证: 因为实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} b_n = 0 .$$

所以复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

重要结论: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0 \Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散.

例如,级数$\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}$：

因为 $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} e^{in} \neq 0$,

不满足必要条件，所以原级数发散.

启示: 判别级数的敛散性时, 可先考察 $\lim_{n\to\infty} z_n \overset{?}{=} 0$

如果 $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} z_n \neq 0 & \text{级数发散;} \\ \lim_{n\to\infty} z_n = 0 & \text{应进一步判断.} \end{cases}$

3. 绝对收敛与条件收敛

定理 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

且不等式 $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 成立.

注意 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 的各项都是非负的实数，

应用正项级数的审敛法则判定.

正项级数的审敛法则

❖正项级数收敛的充要条件

正项级数收敛的充分必要条件它的部分和数列有界.

❖比较审敛法

设$\sum u_n$和$\sum v_n$都是正项级数, 且$u_n \le kv_n (k>0, \forall n \ge N)$. 若级数$\sum v_n$收敛, 则级数$\sum u_n$收敛; 若级数$\sum u_n$发散, 则级数$\sum v_n$发散.

❖比较审敛法的极限形式

(1)如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l\ (0<l<+\infty)$, 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

(2)如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$, 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

(3)如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l\ (0<l<+\infty)$, 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散

证 由于 $$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

而 $$|a_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad |b_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

根据实数项级数的绝对收敛性，知

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty}|b_n| \text{ 都收敛,}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也都收敛.

依据定理4.1.1级数收敛充要条件）：$\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 是收敛的.

又由 $$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

可知 $$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

或 $$\left|\sum_{k=1}^{\infty} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$$

[证毕]

若 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛 $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ (例如: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n i}{n}$)

3. 绝对收敛与条件收敛

定义:

给定复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ，其中$z_n=a_n+ib_n$, $n=1,2\ldots.$

1）若 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛；

2）若 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，

则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛；

非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛级数.

说明 由 $\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le|a_n|+|b_n|,$

知 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}\le\sum_{k=1}^{n}|a_k|+\sum_{k=1}^{n}|b_k|,$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛时, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 也绝对收敛.

$\because |a_n|\le\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad |b_n|\le\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

综上: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛.

判定复数项级数收敛性的一般步骤:

判别级数收敛性 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_k + \cdots$

1）用收敛的必要条件判别级数的发散性.
当$|z_n| \to 0$,不能判定级数是否收敛

2）用绝对收敛的性质 判别级数的绝对收敛性。
当级数不绝对收敛时，再判别级数本身是否收敛

3）用级数收敛的充要条件 判别级数的收敛性。
（实部、虚部均收敛）

4）用复数项级数收敛的定义，看$n\to\infty$时，部分和的极限是否存在。

例4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}$ 是否收敛?

解 级数满足必要条件, 即 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}=0,$

但 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n i}{n}$$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots)-i(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 虽 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛,

原级数仍发散.

例5 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 是否绝对收敛?

解 因为 $\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right| = \frac{8^n}{n!}$,

所以由正项级数的比值判别法知:

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ (ρ数或$+\infty$)

$\rho<1$ 级数收敛　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ 收敛,

故原级数收敛, 且为绝对收敛.

例6 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i]$ 是否绝对收敛?

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 也收敛,

故原级数收敛.

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 为条件收敛,

所以原级数非绝对收敛.

例7 判别下列级数的收敛性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+i}{n-i}\right)^n$　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n$　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-n+i}{n^2}\right)(-1)^n$

解：(1) 级数收敛必要条件可知

$n\to\infty$时，$z_n\to 1$,不趋于零，故该级数发散。

(2) 绝对级数收敛可知，故该级数收敛。

(3) 级数表示为实部 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$　虚部 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$

$n\to\infty$时，实部、虚部的绝对值单调下降，且趋于零，故由交错级数的判别法知它们是收敛的，从而原复数项级数是收敛的。

交错级数及其审敛法

定义 正、负项相间的级数称为交错级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \qquad (\text{其中} u_n > 0)$$

如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2^n}$

定理6 （莱布尼茨定理）

如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件:

（1） $u_n \geq u_{n+1}\ (n=1,2,3,\cdots)$; 递减

（2）$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛, 且其和 $s \leq u_1$,

其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

重要参考级数

等比级数$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$、 $p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$、 调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

例8 讨论$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$的敛散性。

解 令$|z|=r$，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}=e^r$ （e指数展开公式）

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$在复平面上处处绝对收敛。

讨论$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{\pi}{n}}$的敛散性。

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1.$

三角函数，实部发散

讨论$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$的敛散性。

$\cos in = \frac{e^n+e^{-n}}{2}$

§4-2 幂级数

- 1. 幂级数概念
- 2. 收敛定理
- 3. 收敛圆与收敛半径
- 4. 收敛半径的求法
- 5. 幂级数的运算和性质

一、幂级数的概念

1.复变函数项级数

定义 设 $\{f_n(z)\}\ (n=1,2,\cdots)$ 为一复变函数序列,

其中各项在区域 D 内有定义. 表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

称为复变函数项级数, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

一、幂级数的概念

1.复变函数项级数

级数最前面n项的和

$$s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

称为这级数的部分和.

和函数

如果对于 D 内的某一点 z_0, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(z_0) = s(z_0)$

存在, 那末称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 收敛, $s(z_0)$称为

它的和. 否则,级数发散

一、幂级数的概念

1.复变函数项级数

如果级数在 D 内处处收敛，那末它的和一定是 z 的一个函数 $s(z)$:

$$s(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

称为该级数在区域 D 上的**和函数**.

一、幂级数的概念

2. 幂级数

当 $f_n(z)=c_{n-1}(z-a)^{n-1}$ 或 $f_n(z)=c_{n-1}z^{n-1}$ 时，

函数项级数的特殊情形

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

或 $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots .$$

这种级数称为**幂级数**.

其中z是复变量，系数c_n是复常数.

下面**只讨论** $\boldsymbol{a=0}$ 的情形，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots .$$

其所有结果可通过**变量替换** $\zeta = z + z_0$ 来推广到一般情形

我们知道 $$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z}, & |z| < 1, \\ \text{发散}, & |z| \geq 1. \end{cases}$$

在一般情况下，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1 (z-a) + c_2 (z-a)^2 + \cdots + c_n (z-a)^n + \cdots$$

是否存在一个圆 $|z-a|=R$，在该圆外部发散，而在内部绝对收敛呢？

二、幂级数的敛散性

1.收敛定理 (阿贝尔Abel定理 4.2.1,p106)

1)如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z=z_0(\neq 0)$收敛，那么对

满足$|z|<|z_0|$的z，级数必绝对收敛；

2) 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z=z_0(\neq 0)$发散，那么对

满足$|z|>|z_0|$的z，级数必发散。

1.收敛定理

证　因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ 收敛,

由收敛的必要条件, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$

因而存在正数M, 使对所有的n, 有 $|c_n z_0{}^n| < M$,

如果 $|z| < |z_0|$, 那末 $\dfrac{|z|}{|z_0|} = q < 1$,

1.收敛定理

而 $\quad \left|c_n z^n\right| = \left|c_n z_0{}^n\right| \cdot \dfrac{|z|^n}{|z_0|^n} < Mq^n.$

由正项级数的比较判别法知:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n z^n\right| = |c_0| + |c_1 z| + \left|c_2 z^2\right| + \cdots + \left|c_n z^n\right| + \cdots \qquad \text{收敛.}$$

故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 是绝对收敛的.

另一部分的证明：用反证法,

假设$|z|>|z_0|$时级数收敛，得出z_0点收敛，与已知矛盾.

2. 收敛圆与收敛半径

对于一个幂级数，其收敛半径的情况有三种：

（1）对所有的正实数都收敛.

由阿贝尔定理知： 级数在复平面内处处绝对收敛.

例如，级数 $1+z+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{n^n}+\cdots$

对任意固定的z，从某个n开始， 总有 $\frac{|z|}{n}<\frac{1}{2}$，

于是有 $\left|\frac{z^n}{n^n}\right|<\left(\frac{1}{2}\right)^n$，故该级数对任意的$z$均收敛.

2. 收敛圆与收敛半径

(2) 对所有的正实数除 $z=0$ 外都发散.

此时, 级数在复平面内除原点外处处发散.

例如，级数 $1+z+2^2z^2+\cdots+n^nz^n+\cdots$

当 $z\neq 0$ 时，通项不趋于零，故级数发散.

(3) 既存在使级数发散的正实数，也存在使级数收敛的正实数.

设 $z=\alpha$ 时,级数收敛; $z=\beta$ 时,级数发散.

如图:

$\exists\alpha>0$,使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\alpha^n$ 收敛, $\exists\beta>0$,使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\beta^n$ 发散。

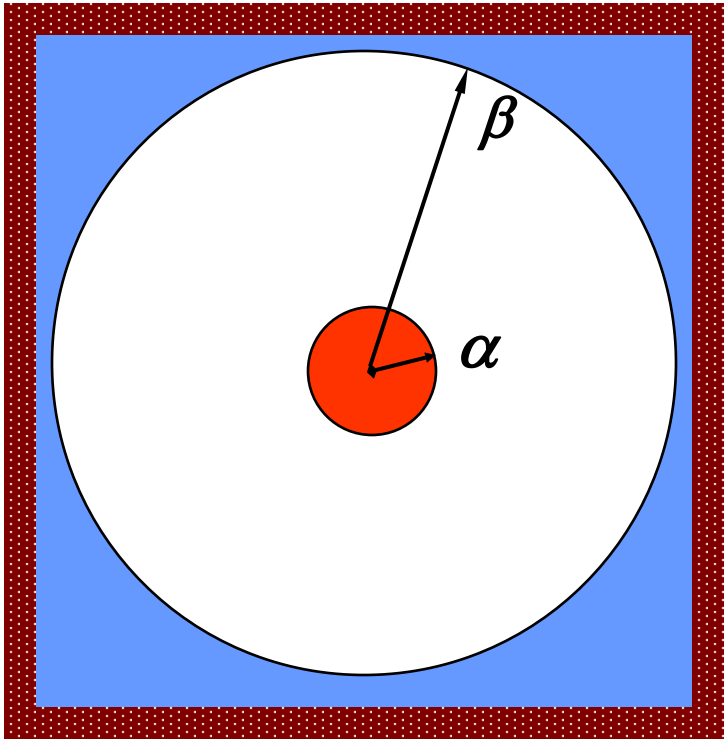
由Able定理,

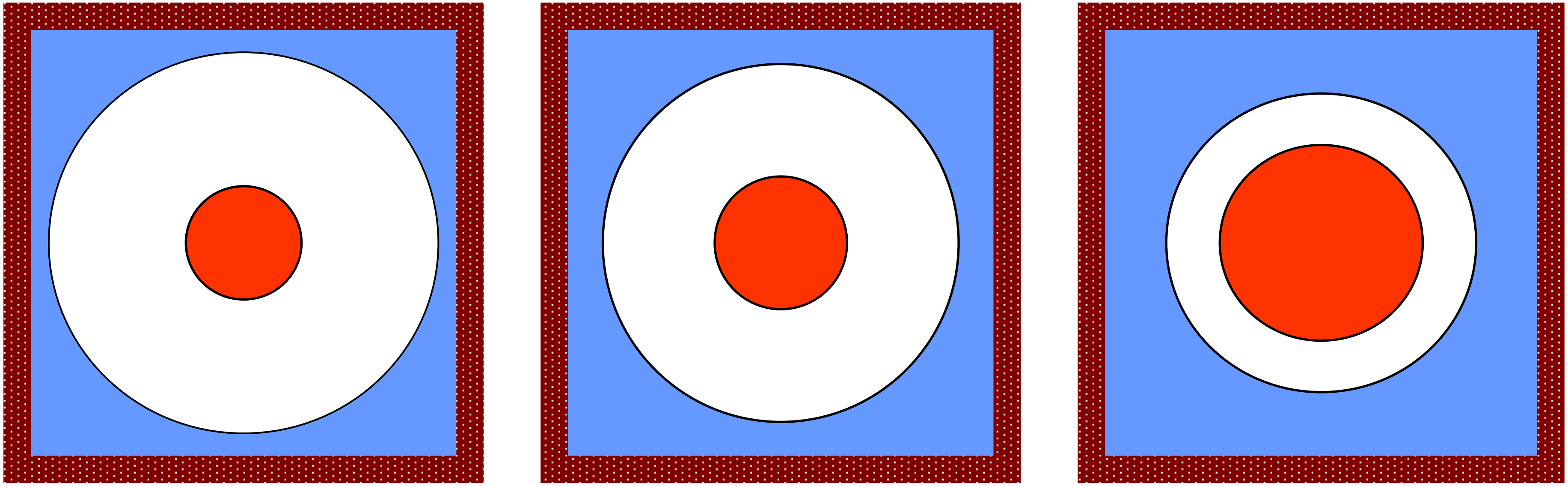
在圆周c_α:$|z|=\alpha$内,级数收敛;

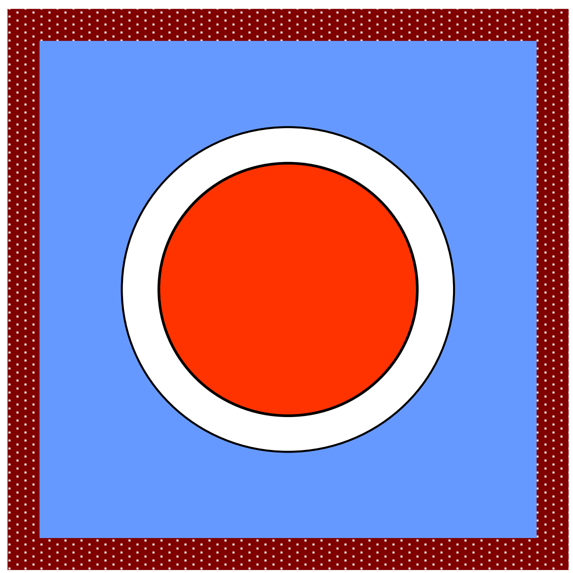
在圆周c_β: $|z|=\beta$外,级数发散.

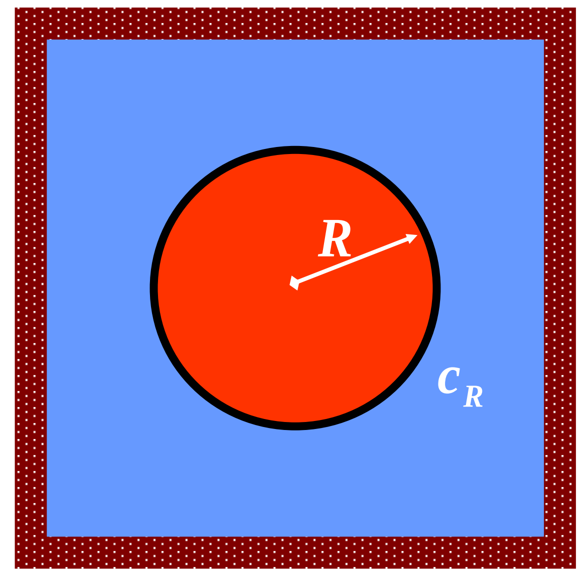
显然, $\alpha<\beta$

将收敛部分染成红色,发散部分染成蓝色,





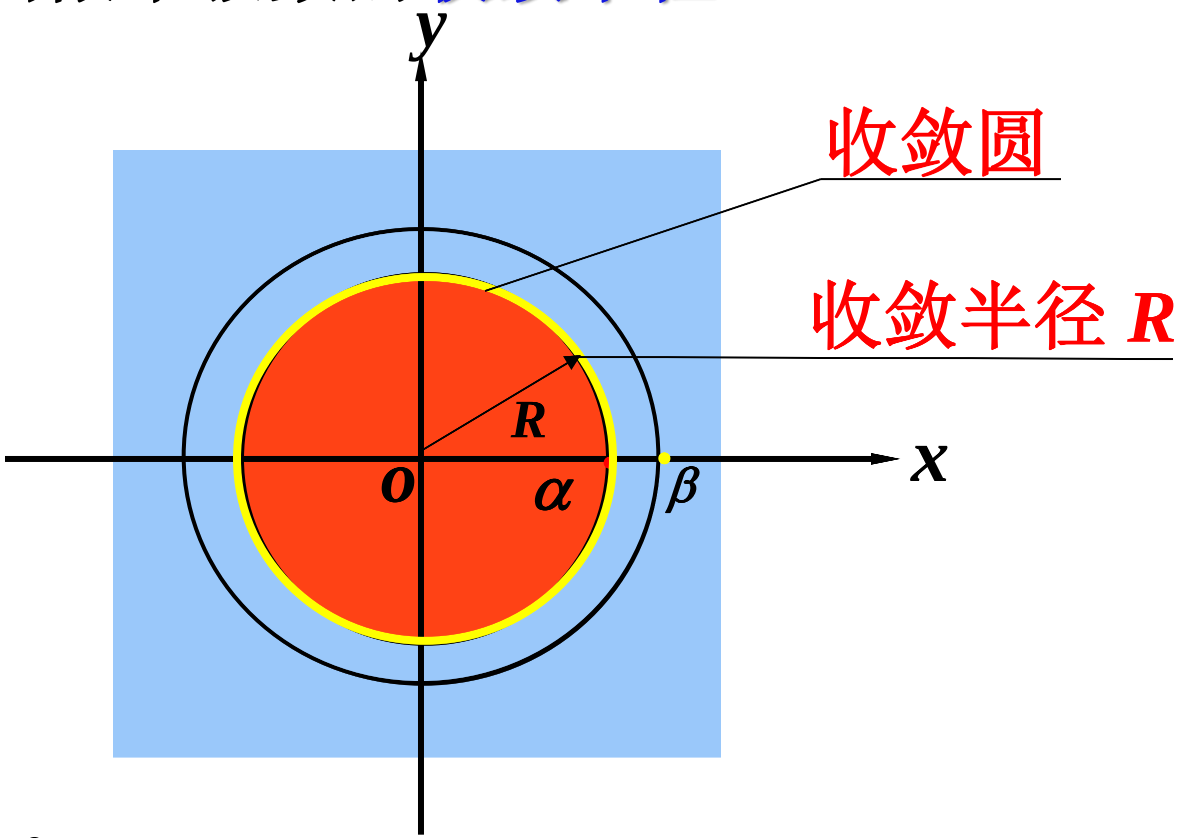




α逐渐变大，在c_α内部都是红色,β逐渐变小，在c_β外部都是蓝色，红、蓝色不会交错.

一定$\exists\, c_R:|z|=R$,为收敛、发散的分界线

定义　红蓝两色的分界圆周C_R叫做幂级数的收敛圆；圆的半径R叫做幂级数的收敛半径.



幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛范围是以原点为中心的圆域.

1) 如果 $0<R<\infty$，那么当 $|z| < R$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛；当 $|z| > R$时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 发散；

2) 如果$R=\infty$，那么级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在复平面上每一点绝对收敛；

3) 如果$R=0$，那么级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在复平面上零点外每点均发散；

问题1: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 的收敛范围是何区域?

答案: 是以 $z=a$ 为中心的圆域.

问题2: 幂级数在收敛圆周上的敛散性如何?

注意: 在收敛圆周上是收敛还是发散, 不能作出一般的结论, 要对具体级数进行具体分析.

例如, 级数: R 均为1, 收敛圆周 $|z|=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \longrightarrow$$ 收敛圆周上无收敛点;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \longrightarrow$$ 在收敛圆周上处处收敛.

3. 收敛半径的求法

关于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 收敛半径的求法，有

方法1: 比值法 (检比法或达朗贝尔法则，定理4.2.2)

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda$, 那么收敛半径

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} & 0 < \lambda < +\infty \\ \infty & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda = +\infty \end{cases}$$

课堂练习 试求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}\ (p\text{为正整数})\text{ 的收敛半径.}$$

答案 因为 $c_n = \dfrac{1}{n^p}$,

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p} = 1.$$

所以 $R = \dfrac{1}{\lambda} = 1.$

3. 收敛半径的求法

方法2: 根值法 (检根法或者柯西法则， 定理4. 2. 3)

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda\neq 0$, 那末收敛半径 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.

说明:

如果 $\lambda=\begin{cases}0 & \longrightarrow R=\infty \\ \infty & \longrightarrow R=0\end{cases}$

(与比值法相同)

三、幂级数的运算和性质

1. 幂级数的有理运算 ---幂级数的代数运算

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\ R=r_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\ R=r_2.$

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,\ |z|<R$$

---幂级数的加、减运算

$$f(z)\cdot g(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\right),\qquad R=\min(r_1,r_2)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nb_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0b_n)z^n,\qquad |z|<R$$

---幂级数的乘法运算

2. 幂级数的代换(复合)运算

如果当$|z|<r$时，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，又设在$|z|<R$内

$g(z)$解析，且满足$|g(z)|<r$，那么当$|z|<R$时

$$f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[g(z)]^n.$$

说明：此代换运算常应用于将函数展开成幂级数.

例 把$\dfrac{1}{z-b}$表示成形如$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$的幂级数，且$b\neq a$

解 $$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-\boxed{\dfrac{z-a}{b-a}}}=\frac{1}{1-g(z)}\left(-\frac{1}{b-a}\right)$$

代换

展开

$$\because \frac{1}{1-g(z)}=1+g(z)+[g(z)]^2+\cdots+[g(z)]^n+\cdots\quad ,|g(z)|<1$$

$$=1+\frac{z-a}{b-a}+\left[\frac{z-a}{b-a}\right]^2+\cdots+\left[\frac{z-a}{b-a}\right]^n+\cdots\quad ,|z-a|<|b-a|=R$$

还原

$$\therefore \frac{1}{z-b}=-\frac{1}{b-a}\frac{1}{1-g(z)}=-\frac{1}{b-a}-\frac{1}{(b-a)^2}(z-a)$$

$$-\frac{1}{(b-a)^3}(z-a)^2-\cdots\ \frac{1}{(b-a)^{n+1}}(z-a)^n-\cdots\quad |z-a|<R$$

3. 复变幂级数在收敛圆内的性质

——分析运算

定理4.2.4 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 的收敛半径为R

那末

(1) 它的和函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 是收敛圆

$|z-a|<R$ 内的解析函数 .

(2) $f(z)$在收敛圆 $|z-a|<R$内的导数可将其幂

级数逐项求导得到, 即 $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$.

(3) $f(z)$在收敛圆内可以逐项积分 (定理4.2.5)

即 $$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_c (z-a)^n\mathrm{d}z,\quad c\in |z-a|<R.$$

或 $$\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$$

简言之: 在收敛圆内，幂级数的和函数解析;

幂级数可逐项求导，逐项积分.

(常用于求和函数)

典型例题

例1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$

的收敛范围与和函数.

解 级数的部分和为

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$$

$$= \frac{1-z^n}{1-z}, (z \neq 1)$$

$|z| < 1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-z} \longrightarrow$ 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 收敛,

$|z| \geq 1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} z^n \neq 0 \longrightarrow$ 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 发散.

由阿贝尔定理知: 收敛范围为一单位圆域 $|z| < 1$,

综上 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \begin{cases} \text{收敛,且和函数为} \dfrac{1}{1-z} & \text{当} |z| < 1 \text{时;} \\ \text{发散} & \text{当} |z| \geq 1 \text{时.} \end{cases}$

且有 $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$.

例2 求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$ (并讨论在收敛圆周上的情形)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ (并讨论 $z=0, 2$ 时的情形)

解 (1) $c_n = \dfrac{1}{n^3}$

因为 $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^3 = 1,$

所以收敛半径 $R=1$

即原级数在圆 $|z|=1$ 内收敛, 在圆外发散,

在圆周 $|z|=1$ 上, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{z^n}{n^3}\right| = \boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}}$

收敛的 p 级数 $(p=3>1)$.

所以原级数在收敛圆上是处处收敛的.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ (并讨论 $z=0,2$ 时的情形)

解 $\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ 即 $R=1.$

当 $z=0$ 时，原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，交错级数，收敛.

当 $z=2$ 时，原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，调和级数，发散.

说明： 在收敛圆周上既有级数的收敛点, 也有级数的发散点.

例3 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(\cos in)z^n$的收敛半径:

解 因为 $c_n=\cos in=\cosh n=\frac{1}{2}(e^n+e^{-n})$,

所以 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}+e^{-n-1}}{e^n+e^{-n}}=e$,

故收敛半径 $R=\frac{1}{e}$.

例4 求 $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径.

解 因为 $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$,

$$c_n=(1+i)^n=(\sqrt{2})^n e^{\frac{n\pi}{4}i};$$

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2})^n}=\sqrt{2}.$$

所以 $R=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

例5 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$, 所以 $R=1$.

利用逐项积分,得:

$$\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(n+1)z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}=\frac{z}{1-z}.$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\left(\frac{z}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}$. $|z|<1$

例6 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$的收敛半径与和函数.

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}=2$, 所以 $R=\frac{1}{2}$.

当$|z|<\frac{1}{2}$时, $|2z|<1$, $\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}z^{n-1}=\frac{2}{1-2z}$$

故$\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}=\frac{2}{1-2z}-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-2z)(1-z)}$.

例7 计算 $\oint_c (\sum_{n=-1}^{\infty} z^n)\mathrm{d}z$, 其中$c$为$|z| = \frac{1}{2}$.

解 在$|z| < \frac{1}{2}$内, $\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$收敛,

和函数 $S(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$,

所以 $I = \oint_c (\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z})\mathrm{d}z = \oint_c \frac{1}{z}\mathrm{d}z + \oint_c \frac{1}{1-z}\mathrm{d}z$

$= 2\pi i + 0 = 2\pi i$.

例8　求下列幂级数的收敛圆及其收敛域。

——**变量替换法**

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}(2+i)^n z^{2n}$　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n^2}(z-i)^{2n+1}$

解　（1）令　$\xi=(2+i)z^2$　　则由于

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2+i)^n z^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n=\begin{cases}1/(1-\xi), & |\xi|<1,\\ \text{发散}, & |\xi|\geq 1.\end{cases}$$

得其收敛域为 $|\zeta|=|2+i||z|^2<1$,

即它的收敛圆域是 $|z|<\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$

而且在收敛的圆周上处处发散的。

容易发生错误：$c_n=(2+i)^n$，而得 $R=\frac{1}{\sqrt{5}}$

综上，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2+i)^n z^{2n}$

当 $|z|<\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ 该级数收敛，

$|z|\geq\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ 该级数发散.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n^2}(z-i)^{2n+1}$

解：令 $\xi=(z-i)^2$ ，则得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n^2}(z-i)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n^2}\xi^n$

检比法求得上式右端级数的收敛半径 $R=1$ ，并

且在$|\zeta|=1$ 的内部是绝对收敛的，因此原级数在

$|z-i|<1$时是绝对收敛的，而在$|z-i|>1$ 时是发散的。

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，因此当 $|z-i|=1$ 时，

原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n^2}(z-i)^{2n+1}$ 绝对收敛。

综上，原级数 在$|z-i|\le 1$，级数收敛， $|z-i|>1$ 发散

例9　求幂级数的收敛半径并讨论收敛圆周上的情形:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}(p>0)$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{z}{\ln in})^n$.

解 (1) $\because \lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^p=1\quad \therefore R=1$

$\boxed{p=1}$ 当$z=1$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 该级数发散

当$z=-1$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 该级数收敛

$\boxed{p=2}$ 在圆周$|z|=1$上, $\because \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 级数收敛

$\therefore$该级数在收敛圆上是处处收敛的.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\text{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n$;

三角函数定义 $c_n = ch\frac{i}{n} = cos\frac{1}{n}$

$$\because \lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\cos\frac{1}{n+1}\Big/\cos\frac{1}{n}\right| = 1 \quad \therefore R = 1$$

在圆周$|z-1| = 1$上, $\sum_{n=1}^{\infty}(\text{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{1}{n})e^{in\theta}$

$\because \lim_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{n})e^{in\theta} \neq 0, \therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\text{ch}\frac{i}{n})(z-1)^n$ 发散

综上 当$|z-1| < 1$时，该级数收敛，

当$|z-1| \geq 1$时，该级数发散.

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n.$$

解： $\because \ln(in)=\ln|in|+i\arg(in)=\ln n+\frac{\pi}{2}i$

其中：$|\ln in|=\sqrt{\ln^2 n+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$

$$\therefore |c_n|=\frac{1}{|\ln in|^n}=\left[\frac{1}{\ln^2 n+(\frac{\pi}{2})^2}\right]^{\frac{n}{2}}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\frac{1}{\ln^2 n+(\frac{\pi}{2})^2}\right]^{\frac{n}{2}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln^2 n+(\frac{\pi}{2})^2}\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

$\boxed{\therefore R=+\infty}$

故该级数在复平面上是处处收敛的.

§4-3 泰勒级数

- 1. 泰勒展开定理
- 2. 展开式的唯一性
- 3. 简单初等函数的泰勒展开式

一、问题的引入

由§4.2 幂级数的性质知:一个幂级数的和函数在它的收敛圆内部是一个解析函数.

现在研究与此相反的问题:

一个解析函数能否用幂级数表达?

(或者说,一个解析函数能否展开成幂级数? 解析函数在解析点能否用幂级数表示?)

一、问题的引入

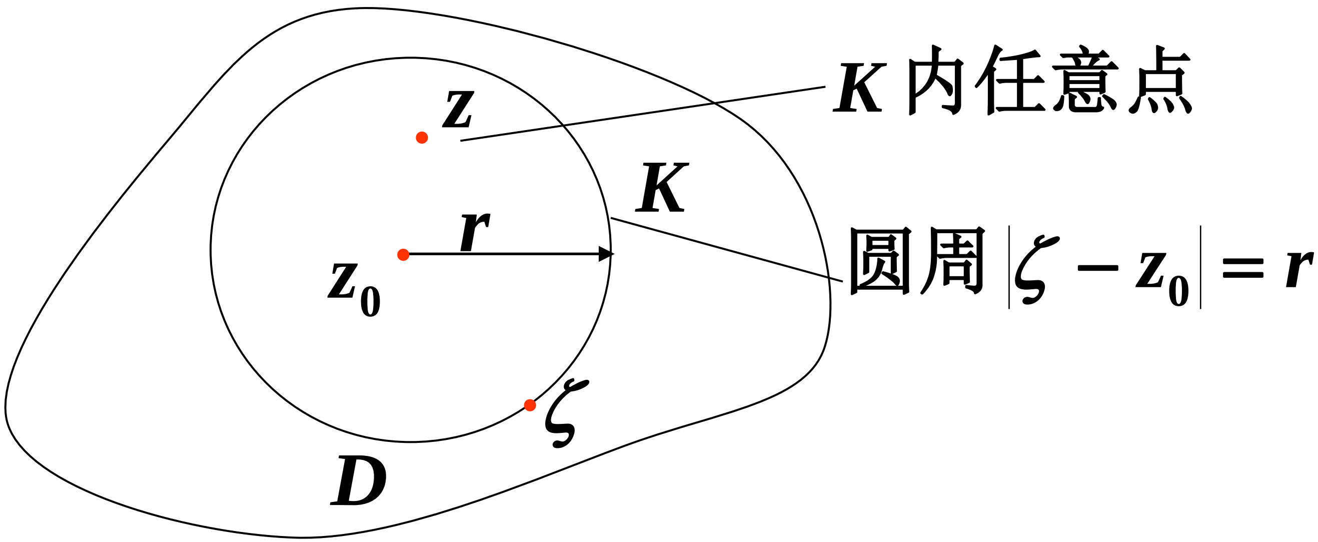
问题：任一个解析函数能否用幂级数来表达？

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $|\zeta - z_0| = r$

为 D 内以 z_0 为中心的任一圆周,

它与它的内部全包含于 D, 记为 K,

如图:



由柯西积分公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$$ 其中 K 取正方向.

因为积分变量ζ取在圆周K上，点z在K的内部，

所以 $$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1.$$

则 $$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left[1 + \left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right) + \left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^n + \cdots\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n.$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\oint_K \left[\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]\mathrm{d}\zeta.$$

由高阶导数公式, 上式又可写成

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+R_N(z)$$

其中 $$R_N(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]\mathrm{d}\zeta$$

若 $\lim\limits_{N\to\infty}R_N(z)=0,$

可知在K内 $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

即$f(z)$在K内可以用幂级数来表示。

令 $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \dfrac{|z-z_0|}{r} = q$

q是与积分变量ζ无关的量,且$0 \le q < 1$,

$f(z)$ 在 D $(K \subset D)$ 内解析，则在K上连续,

因此 $f(\zeta)$ 在 K 上也连续，$f(\zeta)$ 在 K 上有界,

即存在一个正常数M,　在 K上 $|f(\zeta)| \le M$.

$$|R_N(z)| \le \frac{1}{2\pi}\oint_K \left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right| \mathrm{d}s$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_K \left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n\right]\mathrm{d}s$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=N}^{\infty} \frac{M}{r} q^n \cdot 2\pi r = \frac{Mq^n}{1-q}.$$

$\lim_{N\to\infty} q^n = 0 \longrightarrow \lim_{N\to\infty} R_N(z) = 0$ 在 K 内成立,

从而在K内 $f(z) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}$ 泰勒级数

$f(z)$在z_0的泰勒展开式,

圆周 K 的半径可以任意增大,只要 K 在 D内成立.

如果 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离为 d,

那末 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式在 $|z-z_0|<d$ 内成立.

但 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒级数的收敛半径 R 至少等于 d ，

因为凡满足 $|z-z_0|<d$ 的 z 必能使

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$ 成立，即 $R\geq d$.

由上讨论得重要定理——泰勒展开定理

任何解析函数都一定能用幂级数表示.

二、泰勒展开定理

1. 泰勒展开定理

定理 设 $f(z)$在区域 D内解析, z_0为 D内的一点, d为 z_0到 D 的边界上各点的最短距离, 那末

当 $|z - z_0| < d$ 时, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 成立,

泰勒展开式　　泰勒级数

其中 $c_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \ n = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

d是泰勒展开式的收敛半径

说明:

1) 复变函数展开为泰勒级数的条件要比实函数时弱得多; (想一想, 为什么?)

注意: 因为 $f(z)$ 解析，可以保证无限次可各阶导数的连续性;

所以复变函数展为泰勒级数的实用范围就要比实变函数广阔的多.

说明:

2) 如果$f(z)$在D内有奇点，则d等于z_0到最近一个奇点α之间的距离，即$d=|\alpha-z_0|$；

注意：奇点α在收敛圆上，因为$f(z)$在收敛圆内解析，所以奇点α不能在收敛圆内；
如果奇点α在收敛圆外，收敛半径还可以扩大。
所以奇点α只能在收敛圆周上。

说明:

3) 当z_0=0时，级数称为麦克劳林级数;

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2!}z^2\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n+\cdots$$

4）任何解析函数在一点的泰勒级数是唯一的.

(为什么?)

问题： 利用泰勒级数可以将函数展开为幂级数，展开式是否唯一？

有关逐项积分的两个引理

引理1（函数项级数的逐项积分）设函数$g(z)$和 $f_n(z)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ 沿曲线 C可积， 且在C上处处有

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

如果存在收敛的正项级数 $A_0+A_1+\ldots+A_n+\ldots$. 使得在 C上有

$$|f_n(z)|\le A_n, \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

那么

$$\int_C g(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_C f_n(z)dz$$

引理2 若 $f(\xi)$ 在正向圆周 C: $|\xi-z_0|=r$ 上连续，则

（1）对该圆内任一点 z 有

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\right)(z-z_0)^n$$

(2）对该圆外任一点 z 有

$$-\int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-m+1}}d\xi\right)(z-z_0)^{-m}$$

2. 展开式的唯一性

设 $f(z)$ 在 z_0 已被展开成幂级数：

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

那末 $f(z_0)=a_0,\ f'(z_0)=a_1,\ \cdots\cdots\ f^{(n)}(z_0)=n!a_n,$

即 $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$

结论： 任何解析函数展开成幂级数的结果就是**泰勒级数**，因而**是唯一的**.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

定理 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 的收敛半径为R

那末

(1) 它的和函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 是收敛圆

$|z-a|<R$ 内的解析函数.

(2) $f(z)$在收敛圆 $|z-a|<R$ 内的导数可将其幂

级数**逐项求导**得到, 即 $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$.

(3) $f(z)$在收敛圆内可以逐项积分

即 $$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_c (z-a)^n\mathrm{d}z,\quad c\in|z-a|<R.$$

或 $$\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$$

简言之: 在收敛圆内，幂级数的和函数解析;

幂级数可逐项求导，逐项积分.

(常用于求和函数)

泰勒展开定理

定理　设 $f(z)$在区域 D内解析, z_0为 D内的一点,

d为 z_0到 D 的边界上各点的**最短距离**, 那末

当 $|z-z_0|<d$ 时, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 成立,

其中 $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),\ n=0,1,2,\cdots\cdots$

d是泰勒展开式的收敛半径

三、将函数展开成泰勒级数

常用方法: 直接法和间接法.

1. 直接法: ——代公式

由泰勒展开定理计算系数

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),\ n = 0,1,2,\cdots$$

将函数 $f(z)$ 在 z_0 展开成幂级数.

再写出其收敛半径。

例如，求 e^z 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

因为 $(e^z)^{(n)} = e^z$

$$(e^z)^{(n)}\Big|_{z=0} = 1,\ (n = 0,1,2,\cdots)$$

故有 $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

因为 e^z 在复平面内处处解析，

所以级数的收敛半径 $R = \infty$.

仿照上例，可得 **sinz** 与 **cosz** 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad ,$$

$$(R=\infty)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad ,$$

$$(R=\infty)$$

2. 间接展开法：

由展开式的唯一性，借助于一些已知函数的展开式，结合解析函数的性质、幂级数运算性质（逐项求导，积分等）和其它数学技巧（代换等），求函数的泰勒展开式.

间接法的优点:

不需要求各阶导数与收敛半径，因而比直接展开更为简洁，使用范围也更为广泛 .

例如，

利用间接展开法求 $\sin z$ 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

因为 $sinz=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$$=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

附: 常见函数的泰勒展开式 ($z_0=0$)

$$1)\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < \infty)$$

$$2)\ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$3)\ \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$4)\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad (|z| < \infty)$$

附: 常见函数的泰勒展开式 ($z_0=0$)

$$5)\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad (|z| < \infty)$$

$$6)\ \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad (|z| < 1)$$

7) $(1+z)^a = e^{aLn(1+z)}$

$$= 1 + az + \frac{a(a-1)}{2!}z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}z^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-n+1)}{n!}z^n \qquad (|z|<1)$$

当a=0,1,2,… 时，上式只有有限项，并且是在整个复平面上成立。

典型例题

例1 把函数 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数. 间接法

解 由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 在 $|z|=1$ 上有一奇点 $z=-1$,

且在 $|z|<1$ 内处处解析, 可展开成 z 的幂级数,

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots \qquad |z|<1$$

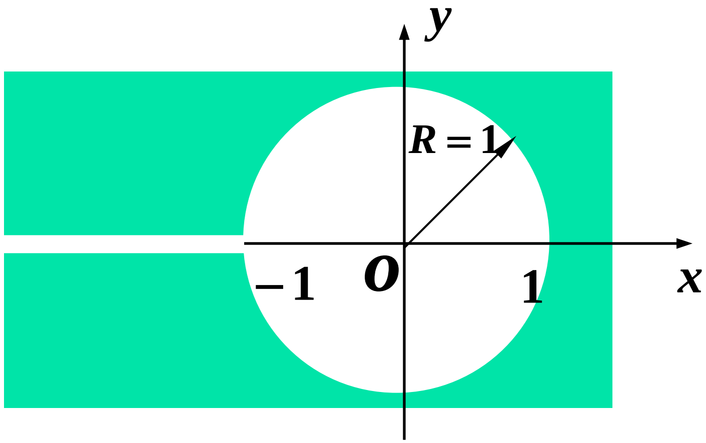
上式两边逐项求导,

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'=1-2z+3z^2-\cdots+(-1)^{n-1}nz^{n-1}+\cdots, \quad |z|<1.$$

例2 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

分析 $\ln(1+z)$ 在从 -1 向左沿负实轴剪开的平面内是解析的, -1 是它的一个奇点, 所以它在 $|z|=1$ 内可以展开成 z 的幂级数.

如图,



解 $[\ln(1+z)]' = \dfrac{1}{1+z}$ 间接法

$$= 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (|z| < 1)$$

设 C 为收敛圆 $|z| < 1$ 内从 0 到 z 的曲线,

将展开式两端沿 C 逐项积分, 得

$$\int_0^z \frac{1}{1+z} \mathrm{d}z = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \mathrm{d}z$$

即 $\ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad |z| < 1$

例3 把函数 $f(z)=\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解 $$\frac{1}{3z-2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}[1+\frac{3z}{2}+(\frac{3z}{2})^2+\cdots+(\frac{3z}{2})^n+\cdots]$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{3z}{2^2}-\frac{3^2z^2}{2^3}-\cdots-\frac{3^nz^n}{2^{n+1}}-\cdots$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nz^n}{2^{n+1}},\qquad \left|\frac{3z}{2}\right|<1,\text{即}|z|<\frac{2}{3}.$$

例4 求$\arctan z$在$z=0$的幂级数展开式.

解 因为 $\arctan z=\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$,

且 $\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z^2)^n,\quad |z|<1$

所以 $\arctan z=\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z^2)^n\mathrm{d}z$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\quad |z|<1.$$

例5 求$\cos^2 z$的幂级数.

解 因为 $\cos^2 z = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2z)$,

$$\cos 2z = 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \frac{(2z)^6}{6!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{2^2 z^2}{2!} + \frac{2^4 z^4}{4!} - \frac{2^6 z^6}{6!} + \cdots \quad |z| < \infty$$

所以 $\cos^2 z = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2z)$

$$= 1 - \frac{2z^2}{2!} + \frac{2^3 z^4}{4!} - \frac{2^5 z^6}{6!} + \cdots \quad |z| < \infty$$

例6 求下列函数在点$z_0=i$ 处的泰勒级数展开式及其收敛半径

（1） $f_1(z)=z^{-10}$

（2） $f_2(z)=(z+i)^{-1}z^{-1}$

（3） $f_3(z)=\sin z$

（4） $f_4(z)=(z-i)^3\big/z^{10}$

解 (1)

$f_1(z)$ 在 $z_1=0$ 处为唯一奇点，并且当 $z_1\to 0$ 时，函数 $f_1(z)\to\infty$，所以函数在z_0 处泰勒级数展开式的收敛半径为$|z_1-z_0|=|0-i|=1$，从而在 $z_0=i$时有

$$f_1(z)=(z-i+i)^{-10}=-[1+\frac{z-i}{i}]^{-10}$$

应用$(1+z)^a$展开式 $(1+z)^a=e^{aLn(1+z)}$

$\frac{a(a-1)}{}z^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}z^3+$

可得：
$$\boxed{z^{-10}=-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n(n+9)!}{n!9!}(z-i)^n}$$

$1)$ z^n $|z-i|<1$

（2） $f_2(z)=(z+i)^{-1}z^{-1}$

奇点为-i和0，则在$z_0=i$ 处的泰勒级数展开式的收敛半径为 1。

由于$(z+i)^{-1}z^{-1}=\dfrac{i}{z+i}-\dfrac{i}{z}$，应用 $\dfrac{1}{1-z}$ 展开式得

$$\frac{i}{z}=\sum_{n=0}^{\infty} i^n (z-i)^n \qquad \frac{i}{z+i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}i^n}(z-i)^n$$

因此，

$$(z+i)^{-1}z^{-1}=\frac{i}{z+i}-\frac{i}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}i^n}(z-i)^n-\sum_{n=0}^{\infty} i^n (z-i)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} i^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)(z-i)^n \qquad |z-i|<1$$

（3） $f_3(z)=\sin z$

（3）由于 $\sin z$ 在整个复平面上解析，故其收敛半径为 ∞，从而

$$\sin z=\sin(z-i+i)=\sin(z-i)\cos i+\cos(z-i)\sin i$$

应用**正余弦泰勒展开式**得 $\mathrm{ch}iz=\cos z$ $\quad$ $\mathrm{sh}iz=i\sin z$

$$\sin z=i\,\mathrm{sh}1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-i)^{2n}+\mathrm{ch}1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-i)^{2n+1}$$

用直接法也简单，注意到 $\boxed{\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}$

（4） $f_4(z)=(z-i)^3 f_1(z)$

其Taylor级数收敛半径为1，

从而 $f_1(z)$ 在 $z_0=i$处的泰勒级数展开式两端同乘以

$(z-i)^3$ 即可得到 $f_4(z)$ 在$z_0=i$处的泰勒级数展开式：

$$\frac{(z-i)^3}{z^{10}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n(n+9)!}{n!9!}(z-i)^{n+3} \qquad |z-i|<1$$

注意：显然不必要将 $(z-i)^3$ 写成 z 的多项式再来求

$f_4(z)$ 在$z_0=i$ 处的泰勒级数展开式。

例7 将$\dfrac{e^z}{1+z}$展为麦克劳林级数.

解 因为$\dfrac{e^z}{1+z}$的唯一奇点为$z=-1$,

所以收敛半径为1, 可在$|z|<1$内进行展开,

令$f(z)=\dfrac{e^z}{1+z}$, 对 $f(z)$ 求导得 $f'(z)=\dfrac{ze^z}{(1+z)^2}$

即微分方程 $(1+z)f'(z)-zf(z)=0$

对微分方程逐次求导得:

$$(1+z)f''(z)+(1-z)f'(z)-f(z)=0$$

$$(1+z)f'''(z)+(2-z)f''(z)-2f'(z)=0$$

L L

由 $f(0)=1$, 得 $f'(0)=0,\ f''(0)=1,\ f'''(0)=-2,\cdots$

所以$f(z)$的麦克劳林级数为

$$\frac{e^z}{1+z}=1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots,\quad |z|<1.$$

利用级数的乘法运算

令解

$$\frac{e^z}{1+z}=e^z\cdot\frac{1}{1+z}$$

$$e^z=1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots+\frac{z^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^n z^n$$

$$\frac{e^z}{1+z}=\left(1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots\right)\left(1-z+z^2-z^3+\cdots\right)$$

$$\begin{array}{cc|ccccc}
 & & z^0 & z^1 & z^2 & z^3 & \\
 & & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdot \\
\hline
z^0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdot \\
z^1 & -1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \cdot \\
z^2 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdot \\
z^3 & -1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

$$\frac{e^z}{1+z}=1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots,\quad |z|<1.$$

利用级数的乘法运算

例 把 $e^z\sin z$ 展开成 z 的幂级

解 因为 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $\sin z=$

两级数均在 $|z|<\infty$ 内绝对收

		z^0	z^1	z^2	z^3	
		1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\cdot$
z^0	0	0	0	0	0	$\cdot$
z^1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\cdot$
z^2	0	0	0	0	0	$\cdot$
z^3	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{36}$	$\cdot$
	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

所以 $e^z\sin z=\left(1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots\right)\left(z-\frac{1}{6}z^3+\cdots\right)$

$$=0+(1+0)z+(0+1+0)z^2+\left(-\frac{1}{6}+0+\frac{1}{2}+0\right)z^3+\cdots$$

$$=z+z^2+\frac{1}{3}z^3+\cdots.\quad(|z|<\infty)$$

定理4.3.1

充要条件

(1) 函数$f(z)$在点z_0解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在z_0的某一邻域内可展成幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.

充要条件

(2) 函数$f(z)$在区域D内解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在D内可展成 幂级数.

小结： $f(z)$在点z_0解析

(1) $f(z)$在点z_0的某一邻域内可导

(2) $f(z)$的实部和虚部在点z_0的某一邻域内有连续偏导数且满足C-R方程

(3) $f(z)$ 在点z_0的某一邻域内连续且沿邻域内的任一条正向封闭路线的积分为0

(4) $f(z)$ 在点z_0的某一邻域内可展开成幂级数

将函数展开成泰勒级数

1、利用定义

2、利用微分方程法

3、利用级数代入法 $g(\xi)$、$\xi=f(z)$

4、利用已知的展开式

5、利用级数的乘除运算

6、利用待定系数法

§ 4-4 洛朗级数

- 1. 洛朗级数概念
- 2. 洛朗展开式

由 § 4-3 知,

$f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f(z)$总可以在z_0 的某一个圆域 $|z-z_0|<R$ 内展开成 $z-z_0$ 的幂级数.

若 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，在 z_0的邻域中就不可能展开成 $z-z_0$ 的幂级数，但如果在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，那么，$f(z)$能否用级数表示呢？

本节主要讨论在以z_0为中心的圆环域 $r<|z-z_0|<R$ 内解析的函数的级数展开问题，并且讨论它在积分计算中的应用。它是后面将要研究的解析函数在孤立奇点邻域内的性质以及定义留数和计算留数的基础.

这里r可以为0，而 R 可以为 ∞ ，并且称环域 $r<|z-z_0|<R$ 为点 ∞ 的邻域。

一、问题的引入

上节研究了如下的幂级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

对于一般的函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

从数学研究的角度，应该可以取具有负幂的 $f_n(z)$：

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

一、问题的引入

问题: 如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析,是否能表示为 $z-z_0$ 的幂级数.

1.双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$

其中z_0及$c_n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$都是常数

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂项部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{正幂项部分}}$$

负幂项部分　　正幂项部分

主要部分　　解析部分

收敛

同时收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \xrightarrow{\text{令}\zeta=(z-z_0)^{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^{n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n}(z-z_0)^{n}$$

收敛半径 R_2

收敛域

$$|z-z_0| < R_2$$

收敛半径 R

$|\zeta| < R$时,收敛

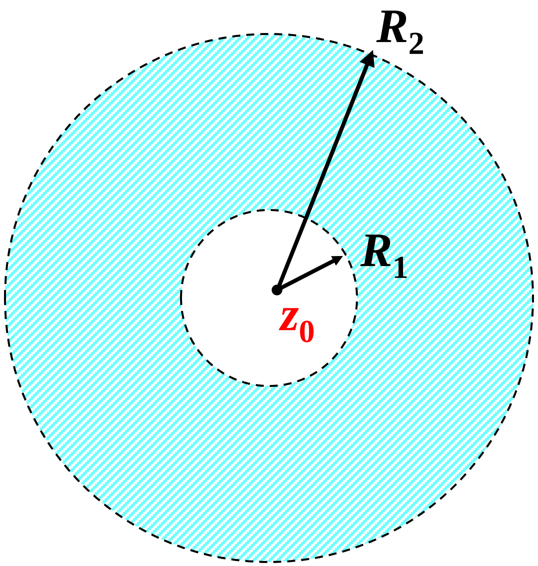
收敛域

$$|z-z_0| > \frac{1}{R} = R_1$$

若 (1) $R_1 > R_2$: 两收敛域无公共部分,

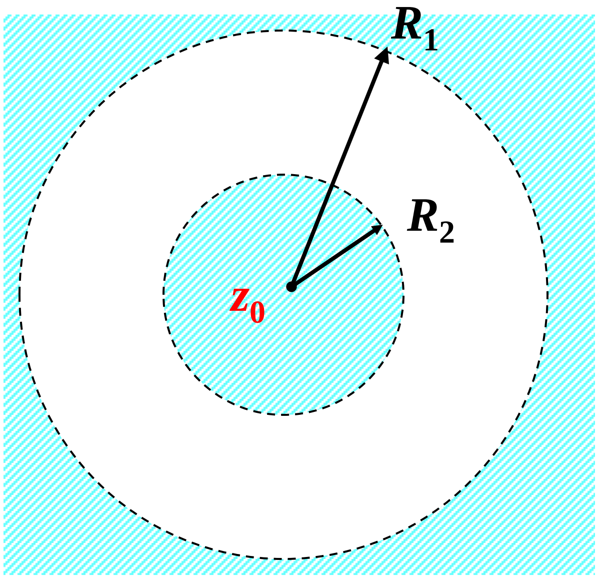
(2) $R_1 < R_2$: 两收敛域有公共部分 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.

级数和$s(z)=s(z)_+ + s(z)_-$



$R_1 < R_2$

有公共收敛域

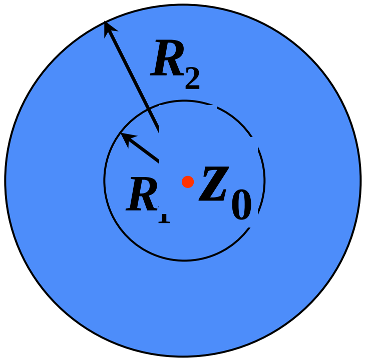


$R_1 > R_2$

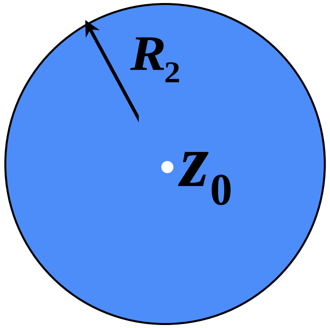
无公共收敛域

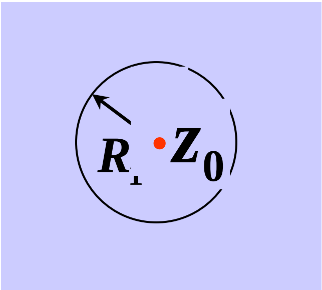
结论： 双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 的收敛区域为

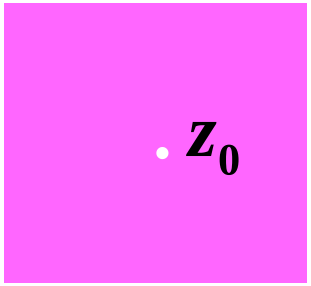
圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.



常见的特殊圆环域：







$$0 < |z - z_0| < R_2 \qquad R_1 < |z - z_0| < \infty \qquad 0 < |z - z_0| < \infty$$

注意:

(1)当$R_1 > R_2$时，称$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$处处发散。

(2) 在圆环域的边界$|z - z_0|=R_1$, $|z - z_0|=R_2$上，

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$可能有些点收敛，有些点发散。

(3)$R_1 \overset{可以}{=} 0 \quad R_2 \overset{可以}{=} \infty$，此时，

收敛域为:$0 < |z - z_0| < \infty$

(4)级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$在$R_1 < |z - z_0| < R_2$内的

和函数是解析的而且可以逐项求积和逐项求导

2. 问题:在圆环域内解析的函数是否一定能展开成级数?

例如, $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$在$z=0$及$z=1$都不解析,

但在圆环域$0<|z|<1$及$0<|z-1|<1$内都是解析的.

在圆环域 $0<|z|<1$内:

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z},$$

而 $$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,\quad |z|<1$$

所以 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}=z^{-1}+1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,$

即 $f(z)$在 $0<|z|<1$ 内可以展开成级数.

在圆环域 $0<|z-1|<1$ 内，也可以展开成级数：

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{1-z}\left[\frac{1}{1-(1-z)}\right]$$

$$=\frac{1}{1-z}\left[1+(1-z)+(1-z)^2+\cdots+(1-z)^n+\cdots\right]$$

$$=(1-z)^{-1}+1+(1-z)+(1-z)^2+(1-z)^{n-1}+\cdots.$$

二、洛朗级数的概念

定理4.4.2 设$f(z)$在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内处处解析

那末 $f(z)$ 在 D 内可展开成洛朗级数

洛朗展开式

$$\boxed{f(z)=\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n}},$$

洛朗级数

其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$ 为洛朗系数.

$$(n=0,\pm1,\cdots)$$

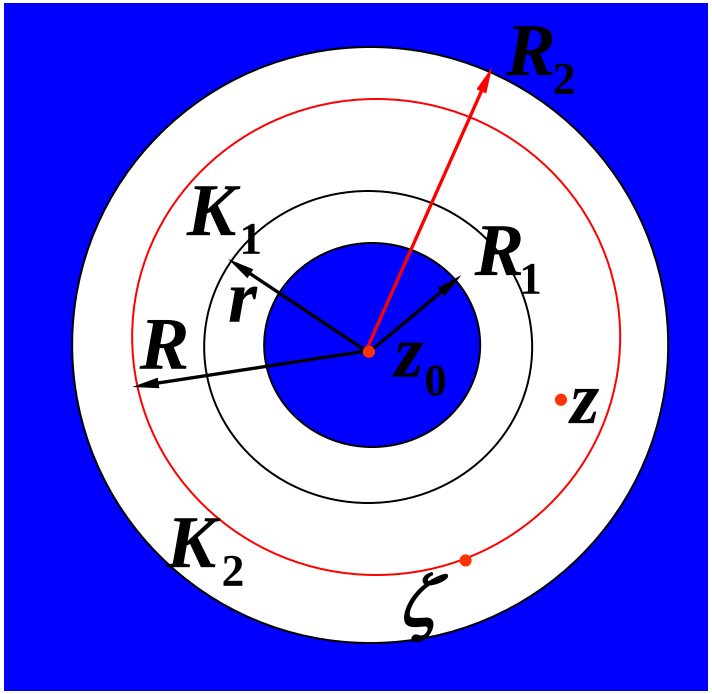
C为圆环域内绕z_0的任一正向简单闭曲线.

证明 由复连通域上的*Cauchy* 积分公式:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

K_1 半径r
K_2半径R

对于第一个积分:



因为 $\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}$

$$=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\quad\left(\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1\right)$$

$R_1<r<R<R_2$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}},$$

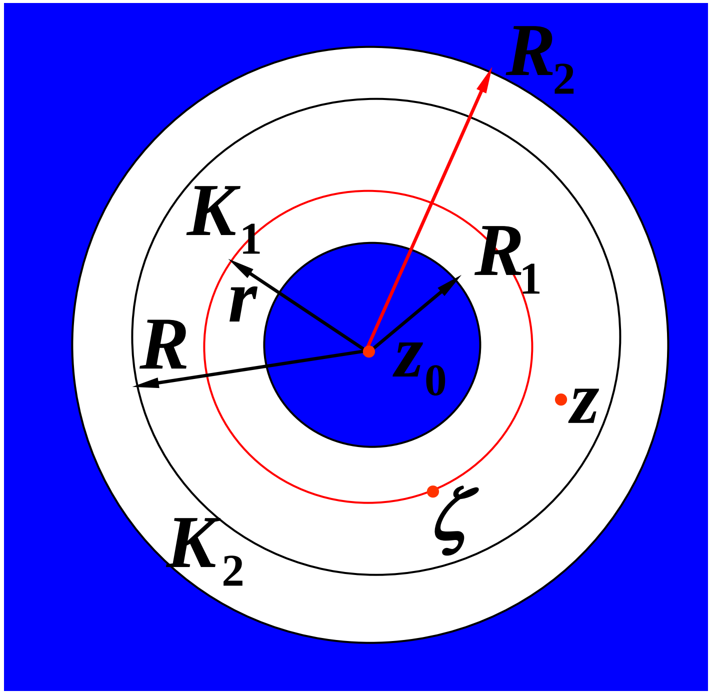
所以 $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

对于第二个积分:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$



因为 $\dfrac{1}{\zeta - z} = \dfrac{1}{(\zeta - z_0)-(z-z_0)}$

$$= \frac{-1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta - z_0}{z-z_0}} \qquad \left(\left|\frac{\zeta - z_0}{z-z_0}\right|<1\right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}(z-z_0)^{-n},$$

则 $-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$ 同乘以 $f(\xi)/2\pi \mathrm{i}$

$$=\sum_{n=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^{-n}+R_N(z)$$

其中 $R_N(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\left[\sum_{n=N}^{\infty}\dfrac{(\zeta-z_0)^{n-1}f(\zeta)}{(z-z_0)^{n}}\right]\mathrm{d}\zeta$

下面证明 $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(z)=0$ 在 K_1外部成立.

令 $q=\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|=\dfrac{r}{|z-z_0|}$ 与积分变量ζ无关,$0<q<1$.

又因为$|f(\zeta)|\le M$ (由$f(z)$的连续性决定)

$$|R_N(z)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{K_1}\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|}\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|^n\right]\mathrm{d}s$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M}{r}q^n\cdot 2\pi r=\frac{Mq^N}{1-q}.$$

所以 $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(z)=0.$

于是 $$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n},$$

则 $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

如果C为在圆环域内绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线．则 c_n与c_{-n}可用一个式子表示为:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

［证毕］

注意:

(1)当$n \geq 0$时，系数c_n形式上与高阶导数公式相同，但

$$c_n \neq \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

因为$f(z)$在C内可能**有奇点**，不是处处解析的。

(2)在许多实际应用中，经常遇到$f(z)$在奇点z_0的邻域内解析，需要把$f(z)$展成级数，那么就利用洛朗（*Laurent*）级数来展开.

说明:

1) $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

$f(z)$在圆环域内的洛朗(Laurent)级数.

函数 $f(z)$在圆环域内的**洛朗展开式**

2) 某一圆环域内的解析函数展开为含有正、负幂项的级数是**唯一的**，这就是 $f(z)$ 的洛朗级数.

定理给出了将圆环域内解析的函数展为洛朗级数的一般方法.

罗朗级数展开式的唯一性

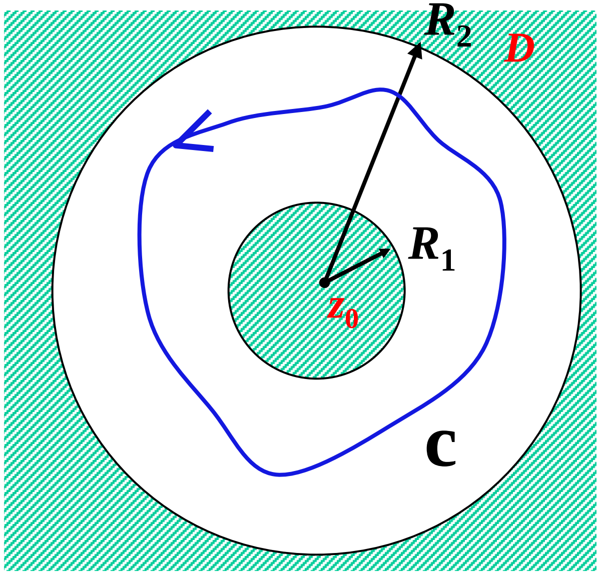
•**定理4.4.3** 若函数$f(z)$在圆环D： $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，则该函数的罗朗级数展开式 在D内处处绝对收敛、可以逐项微分和积分，其积分路径为D内的任何简单闭路，并且其展开式的系数是唯一的，即它的各项系数c_n 一定可以表示为下式 的形式。

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

证明：设$f(z)$在圆环D：$R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析

(见94)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$$



设c为D内任何一条绕z_0的简单闭曲线，$\forall \zeta\in c$

$$f(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(\zeta-z_0)^n$$

将上式两边乘以 $\dfrac{1}{(\xi-z_0)^{p+1}}$ p为任意整数，

沿c的正向积分，

$$\oint_c\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{p+1}}d\zeta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\oint_c\frac{1}{(\zeta-z_0)^{p+1-n}}d\zeta=2\pi i a_p$$

解得：$a_p=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_c\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{p+1}}d\zeta$ —洛朗级数系数

三、函数的洛朗展开式

常用方法：1. 直接法　2. 间接法

1. 直接展开法

利用定理公式计算系数 c_n

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

然后写出　$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

缺点: 计算往往很麻烦.

三、函数的洛朗展开式

2. 间接展开法

根据正、负幂项组成的洛朗级数的唯一性，可从已知的**初等函数的泰勒级数出发**,用代数运算、代换、求导和积分等方法去展开 .

优点：简捷，快速 .

典型例题

例1 在 $0<|z|<\infty$ 内, 将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开成洛朗级数.

解 由定理知: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$,

其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{e^{\zeta}}{\zeta^{n+3}}\mathrm{d}\zeta$

$$C: |z|=\rho(0<\rho<\infty),\quad (n=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$$

当 $n \le -3$ 时，$\dfrac{e^z}{z^2}$ 在圆环域内解析，

故由柯西–古萨基本定理知：$c_n = 0$

当 $n \ge -2$ 时， e^z复平面上解析，由高阶导数公式知：

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{\zeta}}{\zeta^{n+3}}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{(n+2)!}\cdot\left[\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}z^{n+2}}(e^z)\right]_{z=0} = \frac{1}{(n+2)!}$$

故 $$f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty}\frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots$$

$$0 < |z| < \infty$$

另解 $$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots$$

本例中圆环域的中心 $z=0$ 既是各负幂项的奇点,

也是函数 $\dfrac{e^z}{z^2}$ 的奇点.

例2 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域：

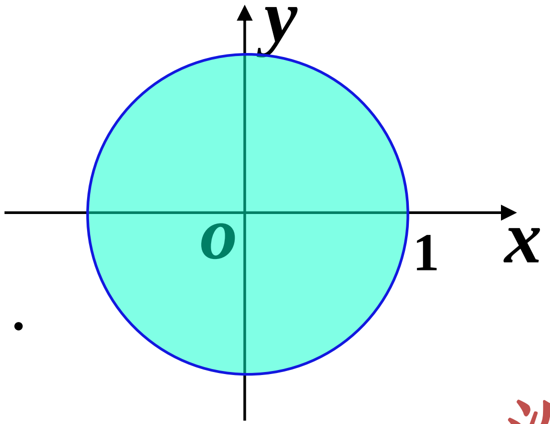
1) $0<|z|<1$;　　2) $1<|z|<2$;　　3) $2<|z|<+\infty$.

内是处处解析的,

试把 $f(z)$ 在这些区域内展开成洛朗级数.

解 $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)}-\dfrac{1}{(2-z)}$,

1) 在 $0<|z|<1$ 内,



由于 $|z|<1$，从而 $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$

则 $$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$

没有奇点

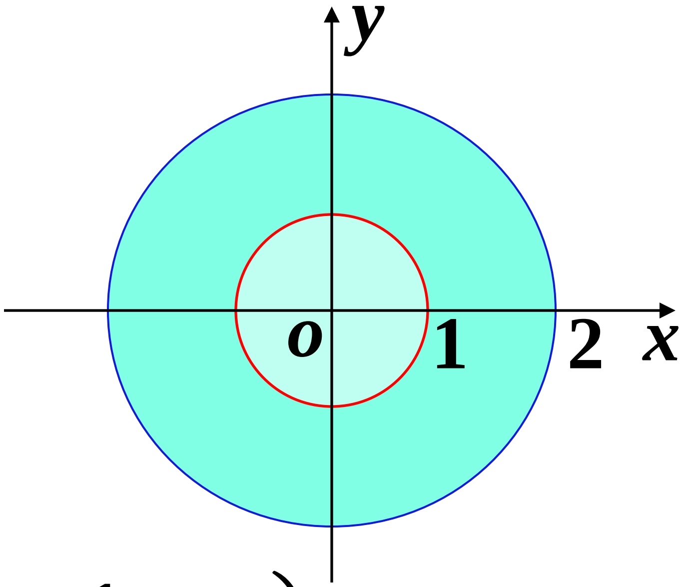
所以 $$f(z)=(1+z+z^2+\cdots)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

2) 在 $1<|z|<2$ 内,

由 $|z|>1 \longrightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1$

$|z|<2 \longrightarrow \left|\frac{z}{2}\right|<1$



$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

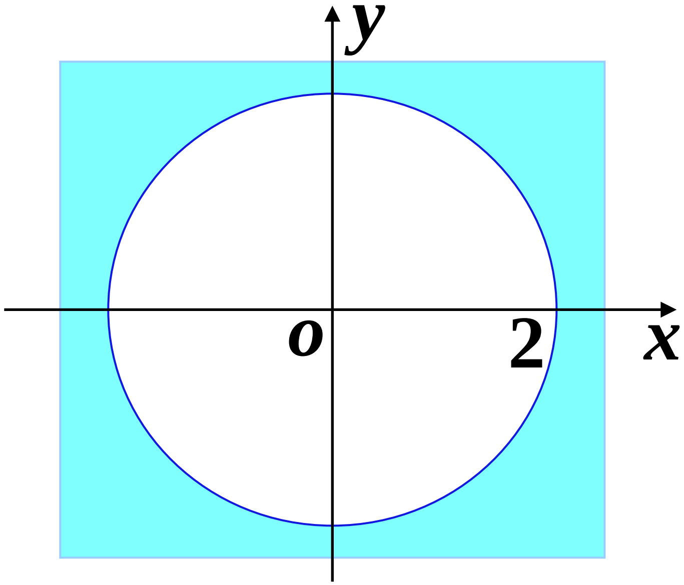
且仍有 $$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$

于是 $f(z)=-\dfrac{1}{z}\left(1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}+\cdots\right)-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{2^2}+\cdots\right)$

$$=\cdots-\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{z^2}{8}-\cdots$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

3) 在 $2<|z|<\infty$ 内,



由 $|z|>2 \longrightarrow \left|\dfrac{2}{z}\right|<1$

此时 $\dfrac{1}{2-z}=-\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{z}}$

$$= -\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\right) \qquad \text{此时} \left|\frac{1}{z}\right| < \left|\frac{2}{z}\right| < 1,$$

仍有 $$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

故 $$f(z) = \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\right) - \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots.$$

注意首项

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}$$

注意: 本例中圆环域的中心$z=0$是各负幂项的奇点但却不是函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 的奇点.

说明:

1. 函数$f(z)$在以z_0为中心的圆环域内的洛朗级数中尽管含有$z-z_0$的负幂项, 而且z_0又是这些项的奇点, 但是z_0可能是函数$f(z)$的奇点,也可能不是$f(z)$的奇点.

2. 给定了函数$f(z)$与复平面内的一点z_0以后,

函数在各个不同的圆环域中有不同的洛朗展开式 (包括泰勒展开式作为它的特例).

问题：这与洛朗展开式的唯一性是否相矛盾?

回答：不矛盾 .

(唯一性 : 指函数在某一个给定的圆环域内的洛朗展开式是唯一的)

例3 将函数 $\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z_0=0$ 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ $\qquad 0<|z|<\infty$

$$=\frac{1}{z}\left[z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

例4 将$e^{\frac{1}{z}}$在$0<|z|<+\infty$内展成*Laurent*级数.

解 $\because$在复平面上，$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots$

令$t = \frac{1}{z}$, $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$

$$(0<|z|<+\infty)$$

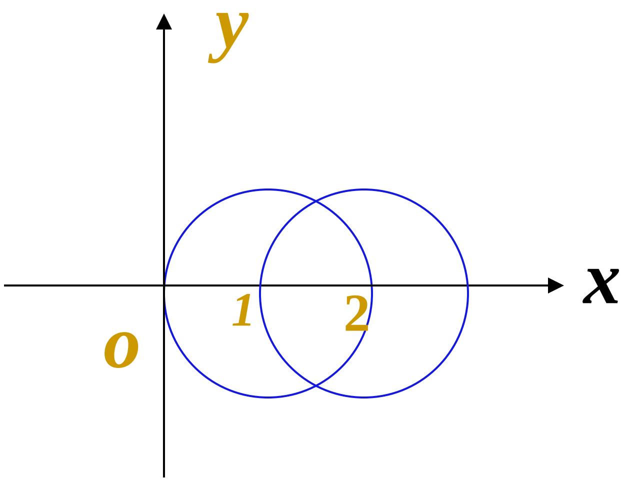
小结：把$f(z)$展成洛朗(*Laurent*)级数的方法:

(1)对于无理函数及其他初等函数的洛朗展开式，可以利用已知初等函数的泰勒展开式,经过代换、逐次求导、逐次积分等计算来获得。

(2)对于有理函数的洛朗展开式，首先把有理函数分解成多项式与若干个最简分式之和，然后利用已知的几何级数，经计算展成需要的形式.

例5 将$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

在以点$z=1, z=2$的去心邻域内展开成Laurent级数。



解 (1) 在(最大的)去心邻域 $0<|z-1|<1$

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

$$=-\frac{1}{z-1}-1-(z-1)-(z-1)^2-\cdots$$

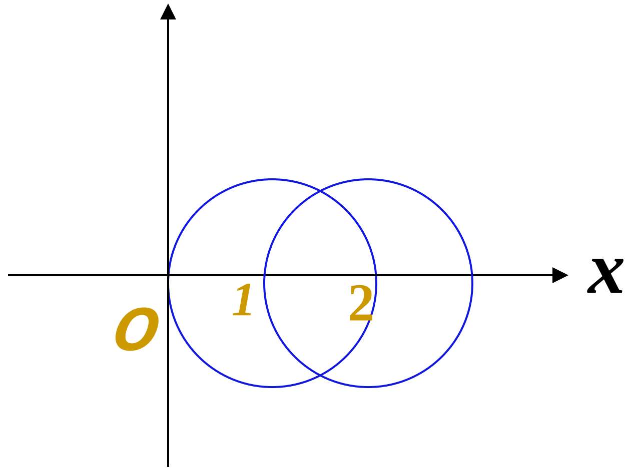
(2) 在(最大的)去心邻域

$$0 < |z-2| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1+(z-2)}$$

$$= \frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n$$

$$= \frac{1}{z-2} - 1 + (z-2) - (z-2)^2 + \cdots$$



例6 将函数$[z(z-2)]^{-1}$在$z_0=2$的去心邻域内展开成洛朗级数.

解 在$0<|z-2|<2$内,

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2+(z-2)}=\frac{1}{z-2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{2}}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^{n-1}=\frac{1}{2(z-2)}-\frac{1}{2^2}+\frac{z-2}{2^3}+\cdots.$$

该展开式中仅含有1个负幂项.

洛朗级数

定理　设$f(z)$在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内处处解析

那末 $f(z)$ 在 D 内可展开成洛朗级数

洛朗展开式

$$f(z)=\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n},$$

洛朗级数

其中　$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$　为洛朗系数.

$$(n=0,\pm1,\cdots)$$

C为圆环域内绕z_0的任一正向简单闭曲线.

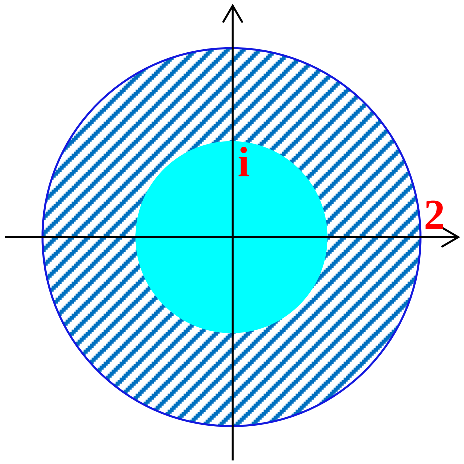
例7 求 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在以下圆环域：

(1) $1<|z|<2$;　　(2) $0<|z-2|<\sqrt{5}$ 内的洛朗展开式.

解 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}$

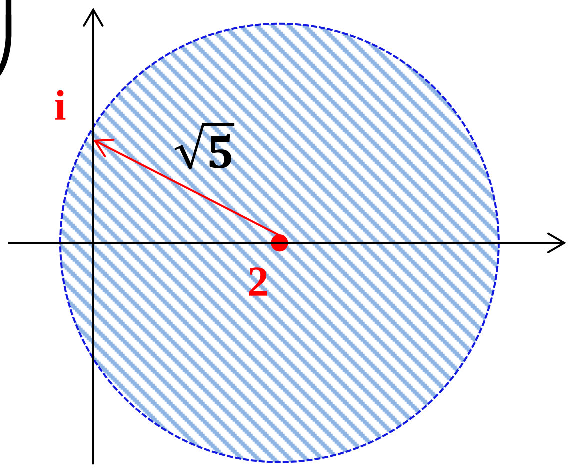
1) 当 $1<|z|<2$ 时，$f(z)=\dfrac{1}{2\left(\dfrac{z}{2}-1\right)}-\dfrac{2}{z^2\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)}$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)}$$



$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$



2) 在 $0<|z-2|<\sqrt{5}$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}=\frac{1}{z-2}-i\left(\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z-i}\right)$$

$$=\frac{1}{z-2}-i\left[\frac{1}{(z-2)+(i+2)}-\frac{1}{(z-2)+(2-i)}\right]$$

$$
= \frac{1}{z-2} + i\left[\frac{1}{(2-i)\left(1+\frac{z-2}{2-i}\right)} - \frac{1}{(2+i)\left(1+\frac{z-2}{2+i}\right)}\right]
$$

$$
= \frac{1}{z-2} + i\left[\frac{1}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2-i}\right)^n - \frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2+i}\right)^n\right]
$$

$$
= \frac{1}{z-2} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\left[\frac{1}{(2-i)^{n+1}} - \frac{1}{(2+i)^{n+1}}\right]
$$

$$
= \frac{1}{z-2} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot [(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}] \cdot \frac{(z-2)^n}{5^{n+1}}.
$$

例8 分别将下列函数在指定点 z_0 的去心邻域内展开成Laurent级数

(1) $\dfrac{\sin^2 z}{z^2}$ $\quad z_0 = 0$

利用三角公式 $2\sin^2 z = 1-\cos(2z)$ **和** $\cos(2z)$

Taylor级数展开式，可得

当 $0<|2z|<\infty$

$$\frac{\sin^2 z}{z^2} = \frac{1-\cos(2z)}{2z^2} = \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{2z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!}$$

化简得 $$\frac{\sin^2 z}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}2^{2n-1}z^{2n-2} \quad (0<|z|<\infty)$$

该展开式不含有负幂项.

(2) $(z-i)^2\cos\dfrac{2}{z-i}$ $\quad z_0=i$

令 $\xi=2/(z-i)$,利用 $\cos\xi$ 的Taylor级数展开式可得

$$(z-i)^2\cos\frac{2}{z-i}=(z-i)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2}{z-i}\right)^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}(z-i)^{-2n+2}\quad(0<|z-i|<\infty)$$

该展开式中含有无穷个负幂项.

注意

(1) 根据区域判别级数方式:

在圆域内需要把 $f(z)$ 展成泰勒(Taylor)级数,

在环域内需要把$f(z)$展成洛朗(*Laurent*)级数.

(2) Laurent级数与Taylor 级数的不同点:

- **Taylor级数展开先求R, 找出收敛域.**
- *Laurent*级数先求 $f(z)$ 的奇点，然后以 z_0为中心，奇点为分隔点，找出z_0到无穷远点的所有使 $f(z)$ 解析的环，在环域上展成级数.

四. 用Laurent 级数展开式计算积分

例10 计算积分 $I=\oint_{|z|=2}\frac{\cos(z^{10}+z^{8}+10)}{(z^{2}+1)^{2}}dz$

解：被积函数为偶函数并且在环域 $|z|>1$ 内解析，该函数在其内的罗朗级数展开式的奇次幂系数为零。

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i c_{-1}$$

$$I=2\pi i c_{-1}=0 \quad |z|>1$$

例11.试说明用什么方法将函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$ 在圆环 $0<|z|<1$ 内展开成Laurent级数比较简便?并计算它沿正向圆周 $|z|<1/2$ 的积分。

解: 先将函数 $\boxed{\varphi(z)=\dfrac{e^z}{(z^2+1)}}$ 在点 z_0 进行泰勒级数展开（直接展开法），然后等式两端同除以z,显然其负一次幂系数 $c_{-1}=\varphi(0)$，从而得

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz=2\pi i c_{-1}=2\pi i$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

例11.试说明用什么方法将函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$ 在圆环 $0<|z|<1$ 内展开成Laurent级数比较简便?并计算它沿正向圆周 $|z|<1/2$ 的积分。

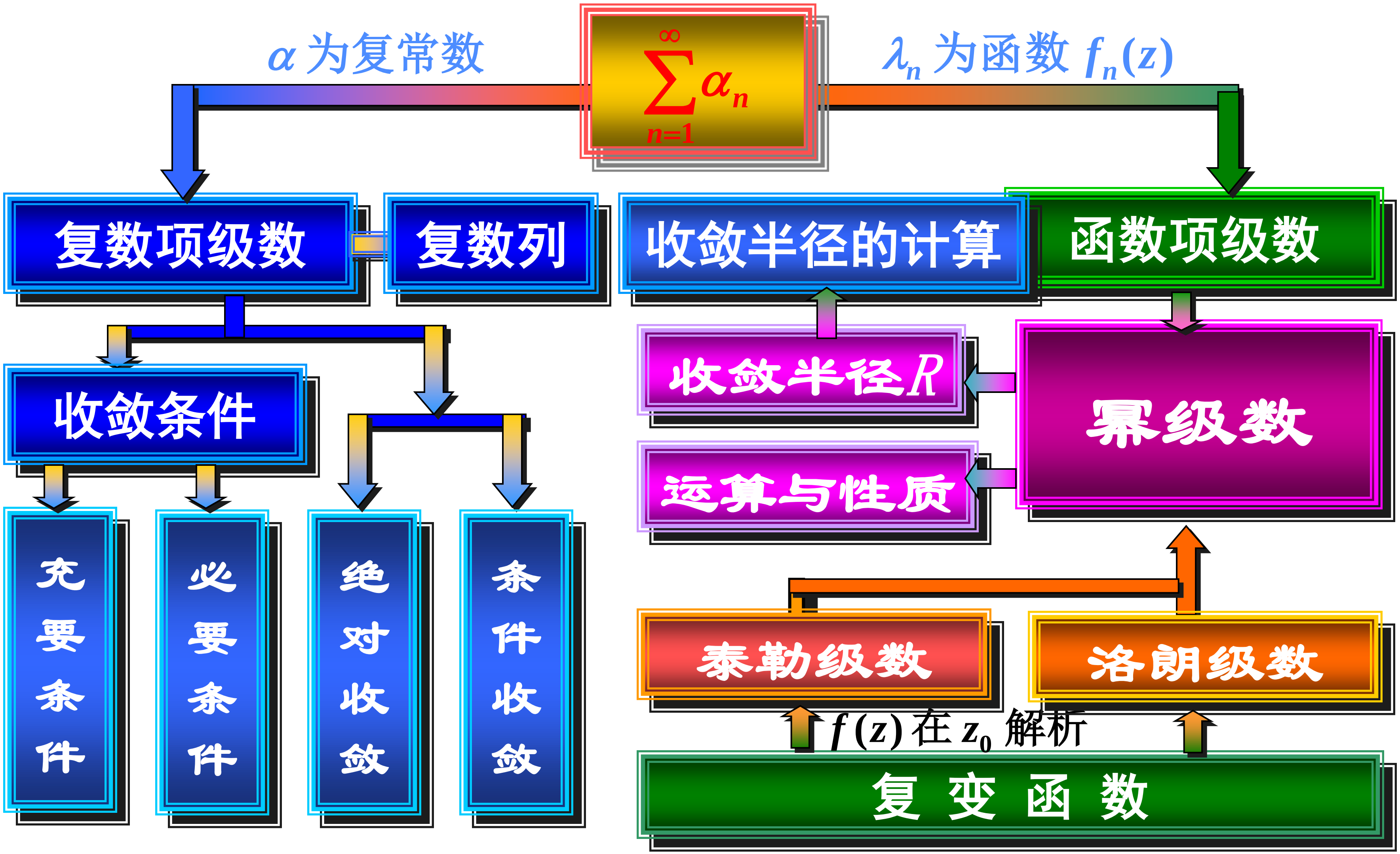
注意

显然用**Cauchy积分公式计算**上述积分更方便，即

$$\boxed{\varphi(z)=\frac{e^z}{(z^2+1)}}$$

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\varphi(z)}{z}\mathrm{d}z=2\pi i\varphi(0)=2\pi i$$

本章小结



α 为复常数
$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$
λ_n 为函数 $f_n(z)$
复数项级数
复数列
收敛半径的计算
函数项级数
收敛条件
收敛半径R
运算与性质
幂级数
充要条件
必要条件
绝对收敛
条件收敛
泰勒级数
洛朗级数
$f(z)$ 在 z_0 解析
复 变 函 数

第四章测试：

将$f(z)=\dfrac{1}{1-z}e^{z}$在区域　(1) $|z|<1$,

(2) $0<|z-1|<+\infty$内展开成幂级数。

泰勒级数

泰勒展开定理

设$f(z)$在区域D内解析，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\quad |z-z_0|<R$$

其中，$c_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),\ n=0,1,2,\cdots\cdots$

$R=|z_0-\alpha|$，α为离z_0最近的$f(z)$的一个奇点

将函数展开成泰勒级数

1、利用定义

2、利用微分方程法

3、利用级数代入法 $g(\xi)$、$\xi=f(z)$

4、利用已知的展开式

5、利用级数的乘除运算

6、利用待定系数法

1、利用定义

例1　展开函数$f(z)=e^{e^z}$为z的幂级数

解

$$f'(z)=e^z e^{e^z},\quad f''(z)=e^z e^{e^z}+(e^z)^2 e^{e^z},$$

$$f'''(z)=e^z e^{e^z}+3(e^z)^2 e^{e^z}+(e^z)^3 e^{e^z}$$

由此得

$$f(0)=e, f'(0)=e, f''(0)=2e,\ f'''(0)=5e.$$

所以　$$e^{e^z}=e+ez+ez^2+\frac{5}{6}ez^3+\cdots.\quad |z|<+\infty$$

将函数展开成泰勒级数

2、利用微分方程法

例2　展开函数$f(z)=e^{e^z}$为z的幂级数

解　$f'(z)=e^z e^{e^z}=e^z f(z)$

$f''(z)=e^z f(z)+e^z f'(z)=\left(1+e^z\right)f'(z)$

$f'''(z)=\left(1+e^z\right)f''(z)+e^z f'(z)$

由此得

$$f(0)=e, f'(0)=e, f''(0)=2e,\ f'''(0)=5e.$$

所以

$$e^{e^z}=e+ez+ez^2+\frac{5}{6}ez^3+\cdots.\quad |z|<+\infty$$

2、利用微分方程法

例3 将 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 在 $z=0$ 点展开为 $Taylor$ 级数.

解 因为 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 的唯一奇点为 $z=-1$,

所以收敛半径为1, 可在 $|z|<1$ 内进行展开,

令 $f(z)=\dfrac{e^z}{1+z}$, 对 $f(z)$ 求导得 $f'(z)=\dfrac{ze^z}{(1+z)^2}$,

即微分方程 $(1+z)f'(z)-zf(z)=0$

对微分方程逐次求导得:

将函数展开成泰勒级数

$$(1+z)f'(z)-zf(z)=0$$

$$(1+z)f''(z)+(1-z)f'(z)-f(z)=0$$

$$(1+z)f'''(z)+(2-z)f''(z)=0$$

$$\cdots \quad \cdots$$

由 $f(0)=1$, 得 $f'(0)=0,\ f''(0)=1,\ f'''(0)=-2,\cdots$

所以$f(z)$的$Taylor$级数为

$$\frac{e^z}{1+z}=1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots,\quad |z|<1.$$

将函数展开成泰勒级数

例4 将$e^{\frac{z}{1-z}}$在$z=0$点展开为*Taylor*级数.

解　因为$e^{\frac{z}{1-z}}$的有奇点为$z=1$,

所以收敛半径为1,　可在$|z|<1$内进行展开,

令$f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$,　对 $f(z)$ 求导得$f'(z)=e^{\frac{z}{1-z}}\dfrac{1}{(1-z)^2}$,

即微分方程 $(1-z)^2 f'(z)-f(z)=0$

对微分方程逐次求导得:

将函数展开成泰勒级数

$$(1-z)^2 f'(z) - f(z) = 0$$

$$(1-z)^2 f''(z) - (3-2z) f'(z) = 0$$

$$(1-z)^2 f'''(z) + (-5+4z) f''(z) - 2 f'(z) = 0$$

$$\cdots \quad \cdots$$

由 $f(0)=1$, 得 $f'(0)=1,\ f''(0)=3,\ f'''(0)=13, \cdots$

所以$f(z)$的$Taylor$级数为

$$e^{\frac{z}{1-z}} = 1 + z + \frac{3}{2} z^2 + \frac{13}{3} z^3 + \cdots, \quad |z| < 1.$$

将函数展开成泰勒级数

3、利用级数代入法

例4 将$e^{\frac{z}{1-z}}$在z : $e^{\frac{z}{1-z}}=1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{3}z^3+\cdots,\quad |z|<1.$

$$\frac{z}{1-z}=z\left(1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n+\cdots\right)\ |z|<1$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\ |z|<\infty$$

$$e^{\frac{z}{1-z}}=1+\left[z\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right)\right]+\frac{\left[z\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right)\right]^2}{2!}$$

$$+\frac{\left[z\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right)\right]^3}{3!}+\frac{\left[z\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right)\right]^4}{4!}+\cdots$$

$$=1+z+\left(1+\frac{1}{2!}\right)z^2+\left(1+\frac{2}{2!}+\frac{1}{3!}\right)z^3+\left(1+\frac{3}{2!}+\frac{3}{3!}+\frac{1}{4!}\right)z^4+\cdots$$

将函数展开成泰勒级数

4、利用已知的展开式

例5 把函数 $f(z)=\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解 $$\frac{1}{3z-2}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}[1+\frac{3z}{2}+(\frac{3z}{2})^2+\cdots+(\frac{3z}{2})^n+\cdots]$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{3z}{2^2}-\frac{3^2z^2}{2^3}-\cdots-\frac{3^nz^n}{2^{n+1}}-\cdots$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nz^n}{2^{n+1}},\qquad \left|\frac{3z}{2}\right|<1,\text{即}|z|<\frac{2}{3}.$$

4、利用已知的展开式

例6　求 $f(z)=e^{z}\cos z$ 在 $z=0$ 的泰勒展式.

解　因为 $e^{z}\cos z=\frac{1}{2}e^{z}(e^{iz}+e^{-iz})$

$$=\frac{1}{2}[e^{(1+i)z}+e^{(1-i)z}]=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^{n}z^{n}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^{n}z^{n}}{n!}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)^{n}+(1-i)^{n}]z^{n}\quad(|z|<\infty)$$

由于　$1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$,　$1-i=\sqrt{2}e^{\frac{-\pi i}{4}}$;

所以 $e^{z}\cos z=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n}}{n!}\left(e^{\frac{n\pi i}{4}}+e^{\frac{-n\pi i}{4}}\right)z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n}}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}z^{n}$.

$(|z|<\infty)$

5、利用级数的乘除运算

例6 把$e^z\cos z$展开成z的幂级数

解 因为 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\cdots}{(\cdots}$

两级数均在$|z|<\infty$内绝对收敛,

所以 $e^z\cos z=\left(1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots\right.$

$=1+(1+0)z+\left(\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}\right)z^2+\left(\frac{1}{6}+0-\cdots\right.$

$=1+z-\frac{1}{3}z^3+\cdots.\qquad(|z|<\infty)$

cos z \ e^z		z^0	z^1	z^2	z^3	
		1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	·
z^0	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	·
z^1	0	0	0	0	0	·
z^2	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{12}$	·
z^3	0	0	0	0	0	·
	·	·	·	·	·	·

将函数展开成泰勒级数

5、利用级数的乘除运算

例7 把 $e^z \sin z$ 展开成 z 的

解 因为 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sin z =$

两级数均在 $|z| < \infty$ 内绝对收

	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\cdot$
0	0	0	0	0	$\cdot$
1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\cdot$
0	0	0	0	0	$\cdot$
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{36}$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

所以 $e^z \sin z = \left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots\right)\left(z - \frac{1}{6}z^3 + \cdots\right)$

$$= 0 + (1+0)z + (0+1+0)z^2 + \left(-\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{2} + 0\right)z^3 + \cdots$$

$$= z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots. \quad (|z| < \infty)$$

6、利用待定系数法

例8 求 $f(z)=\sec z$ 在点 $z=0$ 的泰勒展开式.

解 设 $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots$

又 $f(-z)=f(z)=c_0-c_1z+c_2z^2-\cdots,$

由泰勒展式的唯一性,

$c_1=c_3=c_5=\cdots=0,$ 又 $\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\cdots,$

所以

$$1=\cos z\sec z=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)(c_0+c_2z^2+c_4z^4+\cdots)$$

将函数展开成泰勒级数

$$=c_0+\left(c_2-\frac{c_0}{2!}\right)z^2+\left(c_4-\frac{c_2}{2!}+\frac{c_0}{4!}\right)z^4+\cdots$$

比较两端系数得

$$c_0=1,\quad c_2=\frac{1}{2!},\quad c_4=\frac{5}{4!},\cdots$$

所以 $\sec z=1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{5}{4!}z^4+\cdots\quad\left(|z|<\frac{\pi}{2}\right)$

7、利用逐项求导、逐项积分法

例9 求函数 $\dfrac{1}{(1-z)^3}$ 在 $|z|<1$ 内的泰勒展开式.

解 因为 $\dfrac{1}{(1-z)^3}=\dfrac{1}{2}[(1-z)^{-1}]''$ $\qquad (|z|<1)$

所以 $$\frac{1}{(1-z)^3}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)''=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)z^n.\quad (|z|<1)$$

将函数展开成泰勒级数

例10 设$f(z)=\dfrac{z-a}{z+a}, a\neq 0$，求$\oint_C \dfrac{f(z)}{z^{n+1}}dz$，其中$C$为任一条包含原点且落在圆周$|z|=|a|$内的简单闭曲线。

解 $f(z)$在复平面上有奇点$z=-a$，$f(z)$在$|z|<|a|$内解析，

由高阶导数公式，$\oint_C \dfrac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\dfrac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(0)=2\pi i c_n$

将函数$f(z)$在$|z|<|a|$内泰勒展开，

$$f(z)=\frac{z-a}{z+a}=1-2\frac{1}{1+z/a}=1-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{a}\right)^n$$

$$c_n=\begin{cases}-1 & n=0\\ (-1)^{n-1}\dfrac{2}{a^n} & n=1,2,\cdots\end{cases}\qquad \oint_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\begin{cases}-2\pi i & n=0\\ (-1)^{n-1}\dfrac{4\pi i}{a^n} & n=1,2,\cdots\end{cases}$$

洛朗级数的概念

定理 设$f(z)$在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内处处解析

那末 $f(z)$ 在 D 内可展开成洛朗级数

洛朗展开式

$$\boxed{f(z)=\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n},} \rightarrow \text{洛朗级数}$$

其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$ 为洛朗系数.

$$(n=0,\pm1,\cdots)$$

C为圆环域内绕z_0的任一正向简单闭曲线.

将函数展为洛朗级数的方法

(1) 直接展开法

根据洛朗定理求出系数 $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,$

然后写出 $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$

(2) 间接展开法

根据正、负幂项组成的的级数的唯一性, 可用代数运算、代换、求导和积分等方法去展开 .

洛朗级数

例1 在 $0<|z|<\infty$ 内, 将 $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ 展成Laurent级数.

解 当 $0<|z|<\infty$ 时, $0<\dfrac{1}{|z|}<\infty$,

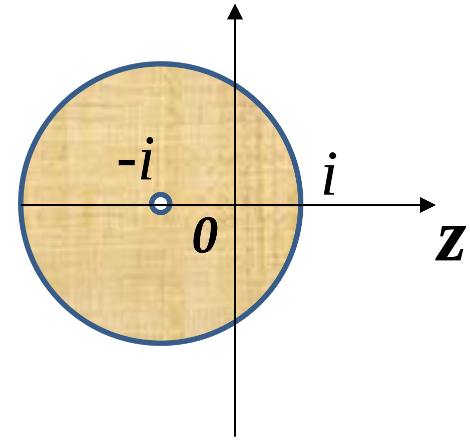
由函数 $e^{\frac{1}{z}}$ 的展开式 $e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{3!}\dfrac{1}{z^3}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{z^n}+\cdots$

可以直接得到

$$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}+\cdots\right)$$

$$=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\cdots+\frac{1}{(n+2)!}\frac{1}{z^n}+\cdots$$

例2 将函数$f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$在$z=-i$展开成级数。



函数在$0<|z+i|<2$和$2<|z+i|<\infty$内展开，

当$0<|z+i|<2$时，

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{z+i}\frac{1}{z+i-2i}=\frac{1}{z+i}\left(-\frac{1}{2i}\right)\frac{1}{1-\dfrac{z+i}{2i}}$$

$$=\frac{1}{z+i}\left(-\frac{1}{2i}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}}$$

当$2<|z+i|<\infty$时，

$$f(z)=\frac{1}{z+i}\frac{1}{z+i-2i}=\left(\frac{1}{z+i}\right)^2\frac{1}{1-\dfrac{2i}{z+i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^n}{(z+i)^{n+2}}$$

利用级数的乘除运算

用p115长除法

$$f(z)=\frac{1}{z^2\sin\frac{1}{z}}$$

在环域内 $1/\pi<|z|<\infty$ **级数**

洛朗级数展开为

$$z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!\,z^{2n+1}}\right)$$

$$\frac{1}{z^2\sin\frac{1}{z}}=z+\frac{1}{6z}+\frac{7}{360z^3}+\cdots$$

分母

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{120z^5}$$

分子

$$1$$

-

$$1-\frac{1}{6z^2}+\frac{1}{120z^4}$$

$$z+\frac{1}{6z}+\frac{7}{360z^3}$$

商

$$\frac{1}{6z^2}-\frac{1}{120z^4}$$

-

$$\frac{1}{6z^2}-\frac{1}{36z^4}+\frac{1}{720z^6}$$

$$\frac{7}{360z^4}-\frac{1}{720z^6}$$

-

$$\frac{7}{360z^4}-\frac{7}{2160z^6}+\frac{7}{43200z^8}$$

第四章测试：

$$将 f(z)=\frac{1}{1-z}e^{z} 在区域 \quad (1)\ |z|<1,$$

$$(2)\ 0<|z-1|<+\infty 内展开成幂级数。$$