第七章 Laplace变换

§7.1 Laplace变换的概念

§7.2 Laplace变换的性质

本章学习目标

1、理解拉普拉变换的概念与性质；

2、掌握拉普拉变换的逆变换；

3、了解拉普拉斯变换的应用。

作业：P192

1（2）、1（4)、2(2)

§7.1 Laplace 变换的概念

一、Laplace 变换的引入

二、Laplace 变换的定义

三、存在性定理

四、几个常用函数的 Laplace 变换

五、周期函数和冲激函数的 Laplace 变换

一、Laplace 变换的引入

1. Fourier 变换的“**局限性**”？

- 当函数 $f(t)$ 满足 Dirichlet 条件，且在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积时，便可以进行古典 Fourier 变换。

- 由于绝对可积是一个相当强的条件，使得一些简单函数(如常数函数、线性函数、正弦函数与余弦函数等等)的 Fourier 变换也受到限制。

一、Laplace 变换的引入

1. Fourier 变换的“**局限性**”？

- 广义 Fourier 变换的引入，扩大了古典 Fourier 变换的适用范围，使得“缓增”函数也能进行 Fourier 变换，而且将周期函数的 Fourier 级数与 Fourier 变换统一起来。

- 广义 Fourier 变换对以指数级增长的函数如 $e^{at}\ (a>0)$ 等仍然无能为力；而且在变换式中出现冲激函数，也使人感到不太满意。

一、Laplace 变换的引入

1. Fourier 变换的“局限性”？

- 在工程实际问题中，许多以时间 t 为自变量的函数(比如起始时刻为零的因果信号等)在 $t<0$ 时为零，而有些甚至在 $t<0$ 时根本没有意义。

- 因此在对这些函数进行 Fourier 变换时，没有必要(或者不可能)在整个实轴上进行。

一、Laplace 变换的引入

2. 如何对 Fourier 变换要进行改造？

基本想法

(1) 将函数 $f(t)$ 乘以一个单位阶跃函数 $u(t)$，
使得函数在 $t<0$ 的部分补零（或者充零）；

(2) 将函数再乘上一个衰减指数函数 $\mathrm{e}^{-\beta t}(\beta>0)$，
使得函数在 $t>0$ 的部分尽快地衰减下来。

- 这样，就有希望使得函数 $f(t)\cdot u(t)\cdot \mathrm{e}^{-\beta t}$ 满足 Fourier 变换的条件，从而对它进行 Fourier 变换。

那么**函数** $f_1(t)$容易满足**在[0,∞)上绝对可积的**要求.

例如， $f(t)$为常数、多项式、正弦与余弦函数时,

$$f_1(t) = f(t)e^{-\beta t} \quad (\beta > 0)$$

都在[0,∞)上绝对可积. 这是因为 $t \to +\infty$时， $e^{-\beta t}$是衰减速度很快的函数，称它为**指数衰减函数**.

如果 $\beta>0$ 取得适当大，那么

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t)e^{-\beta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

一、Laplace 变换的引入

2. 如何对 Fourier 变换要进行改造?

实施结果

$$\mathcal{L}[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\beta+j\omega)t}\mathrm{d}t$$

将上式中的 $\beta + j\omega$ 记为 s，就得到了一种**新的**变换：

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \xlongequal{\text{记为}} F(s).$$

注意　上述广义积分存在的关键：

变量 s 的实部 $\mathrm{Re}\, s = \beta$ 足够大。

在本章中，当不特别声明时，所有给出的实函数$f(t)$在负实轴上的定义都为零.

二、Laplace 变换的定义

定义 7.1.1 设函数 $f(t)$ 在 $t\geq 0$ 有定义，如果对于复参数 $s=\beta+j\omega$

积分 $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ 在复平面 s 的某一区域内收敛

则称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的 Laplace 变换或像函数，

记为 $F(s)=L[f(t)]$，　　即

$$\boxed{F(s)=L[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt.}$$

相应地，称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的 Laplace 逆变换或像原函数，

记为 $f(t)=L^{-1}[F(s)]$.　　　　(t>0)

注　$f(t)$ 的 Laplace 变换就是 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ 的 Fourier 变换。

例1 $$L[1]=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{-s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s},\qquad (\operatorname{Re} s>0)$$

P162 例 7.1.1

注：这个函数又称为“单位阶跃函数”，记为$u(t)$

$$L[u(t)]=\int_0^{+\infty}u(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{s},\qquad (\operatorname{Re} s>0)$$

$$L[\operatorname{sgn} t]=\int_0^{+\infty}\operatorname{sgn} t\, e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{s},\qquad (\operatorname{Re} s>0)$$

P162 例 7.1.2

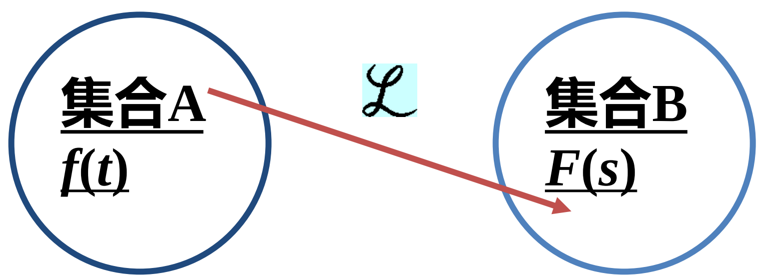
$$L[e^{at}]=\int_0^{+\infty}e^{at}e^{-st}\,dt=\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-a},\qquad (\operatorname{Re} s>\operatorname{Re} a)$$

要点 进行积分时，确定s的取值范围，保证积分存在。

从上述例子可以看出

(1) $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$. **就是一个含$s$参量的积分.**

(2) 拉氏变换实际是实函数$f(t)$的集合到复函数$F(s)$的集合的一种对应关系



所以记$F(s)$为$L[f(t)]$,并称$F(s)$为$f(t)$的象函数.

从上述例子可以看出

(1) 即使函数以指数级增长，其 Laplace 变换仍然存在;

(2) 即使函数不同，但其 Laplace 变换的结果可能相同。

问题 (1) 到底哪些函数存在 Laplace 变换呢?

若存在，收敛域(或者存在域)如何? 有何特点?

(2) Laplace 逆变换如何做? 是否唯一?

三、存在性定理

定理 设函数 $f(t)$ 满足：

P163 定理 7.1.1

(1)当 $t\geq 0$ 时，在任何有限区间上分段连续；

$t<0$ 时，$f(t)=0$

(2) 具有有限的增长性，(即 $t\to+\infty$ 时，$f(t)$增长速度不超过某一指数函数)

即存在常数 c 及 $M>0$，使得 $|f(t)|\leq M\mathrm{e}^{ct}$ 成立，

(其中，c 称为函数 $f(t)$ 的“增长”指数)。

则函数 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$

在半平面 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上一定存在.此时右端的积分绝对收敛而且一致收敛.并且在此半平面内 $F(s)$ 为解析函数

类似于幂级数中Abel定理，有下面定理.

定理7.1.2(P164)

如果 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ 在 $s_1=\beta_1+i\omega_1$处收敛,

则这个积分在 $\mathrm{Re}\,s>\beta_1$ 上处处收敛, 且由这个积分

确定的函数 $F(s)$ 在 $\mathrm{Re}\,s>\beta_1$ 上解析;

如果$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ 在 $s_2=\beta_2+i\omega_2$处发散, 则

这个积分在 $\mathrm{Re}\,s<\beta_2$ 上处处发散.

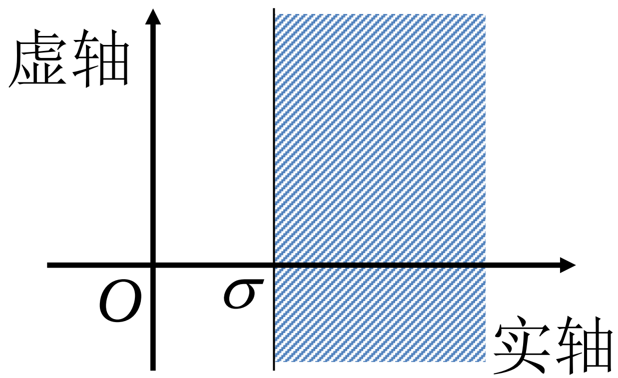
根据定理7.1.2，存在实数σ(或是$\pm\infty$)使得在

$\mathrm{Re}\,s>\sigma$上，积分 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ 收敛，而在 $\mathrm{Re}\,s<\sigma$

上，积分 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ 处处发散. 在收敛区域内，

Laplace变换的像函数

$F(s)=\mathscr{L}\,[f(t)]$是s的解析函数.



两点说明

(1) 像函数 $F(s)$ 的存在域一般是一个右半平面 Res>c，即只要复数 s 的实部足够大就可以了。

- 因此在进行Laplace变换时，常常略去存在域，只有在非常必要时才特别注明。

(2) 在 Laplace 变换中的函数一般均约定在 $t<0$ 时为零，即函数 $f(t)$ 等价于函数 $f(t)u(t)$.

- 比如 $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}]=1$.

四、几个常用函数的 Laplace 变换

例2　（1）求单位脉冲函数　$\delta(t)$ 的拉氏变换

解　　$$L[\delta(t)]=\int_0^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt=1$$

$$\delta(t)\leftrightarrow 1$$ 拉氏变换对

例2　（2）求单位阶跃函数 $u(t)$ 的拉氏变换

解　　$$L[u(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}\quad\left(Re(s)>0\right)$$

$$u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$$ 拉氏变换对

四、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $\mathrm{L}[1] = \mathrm{L}[u(t)] = \dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathrm{L}[\delta(t)] = 1$;

(3) $\mathrm{L}[t^m] = \dfrac{m!}{s^{m+1}} = \dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$; $(m>-1)$ $(\mathrm{Re}(s)>0)$

解 (3) $L[t^m] = \int_0^{+\infty} t^m e^{-st}\,dt = \dfrac{1}{-s}\int_0^{+\infty} t^m \,d e^{-st}$

m为非负整数 $= \dfrac{1}{-s} t^m e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + \dfrac{m}{s}\int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-st}\,dt = \dfrac{m}{s} L[t^{m-1}]$

$\boxed{t^m \leftrightarrow \dfrac{m!}{s^{m+1}}}$ $= \dfrac{m(m-1)}{s^2} L[t^{m-2}] = \cdots = \dfrac{m!}{s^m} L[1] = \dfrac{m!}{s^{m+1}}$.

附：$\Gamma-$函数(gamma函数)简介

定义 $\Gamma-$**函数**定义为 $$\boxed{\Gamma(m)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{m-1}\,\mathrm{d}t,\ 0<m<+\infty.}$$

性质 $\Gamma(1)=1;\quad \Gamma(m+1)=m\,\Gamma(m).$ （$m\in N$）

证明 $$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}=1;$$

$$\Gamma(m+1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{m}\,\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}t^{m}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}$$

$$=-t^{m}\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t^{m}$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}m\,t^{m-1}\,\mathrm{d}t=m\Gamma(m).$$

- 特别地，当 m 为正整数时，有 $\Gamma(m+1)=m!.$

四、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $\mathrm{L}[1] = \mathrm{L}[u(t)] = \dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathrm{L}[\delta(t)] = 1$;

(3) $\mathrm{L}[t^m] = \dfrac{m!}{s^{m+1}} = \dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$;

(4) $\mathrm{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$;

解 (4) $$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a} \quad (Re(s) > a)$$

$$e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{s-a}$$

四、几个常用函数的 Laplace 变换

$$(1)\ \mathrm{L}[1]=\mathrm{L}[u(t)]=\frac{1}{s};$$

$$(2)\ \mathrm{L}[\delta(t)]=1;$$

$$(3)\ \mathrm{L}[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}}=\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}};$$

$$(4)\ \mathrm{L}[\mathrm{e}^{at}]=\frac{1}{s-a};$$

$$(5)\ \mathrm{L}[\cos at]=\frac{s}{s^2+a^2};$$

解 (5) $L[\cos at]=\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{jat}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-jat}\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right)$

$$=\frac{1}{2}(L[\mathrm{e}^{jat}]+L[\mathrm{e}^{-jat}])$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ja}+\frac{1}{s+ja}\right)=\frac{s}{s^2+a^2}.$$

四、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $L[1] = L[u(t)] = \frac{1}{s}$;

(2) $L[\delta(t)] = 1$;

(3) $L[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}} = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$;

(4) $L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$;

(5) $L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$;

(6) $L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$.

解 (6) $$L[\sin at] = \frac{1}{2j}\left(\int_0^{+\infty} e^{jat} e^{-st}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-jat} e^{-st}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(L[e^{jat}] - L[e^{-jat}]\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-ja} - \frac{1}{s+ja}\right) = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

四、几个常用函数的 Laplace 变换

例：求单位斜坡函数 $\gamma(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geq 0\end{cases}=t\,u(t)$ 的拉氏变换

$$[\gamma(t)]=\int_0^{+\infty} te^{-st}dt=-\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}dt=\frac{1}{s^2}\quad\left(Re(s)>0\right)$$

$$\gamma(t)=tu(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2}$$

特点 变换的结果均为**分式函数**。

五、周期函数和冲激函数的 Laplace 变换

1. 关于含冲激函数的 Laplace 变换问题

- 当函数$f(t)$ 在 $t=0$附近有界时，或在通常意义下可积时，积分

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

下限取 0^+和0^-将不会影响其 Laplace 变换的结果。

$$\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=0, \quad \text{即} \quad \mathcal{L}_-[f(t)]=\mathcal{L}_+[f(t)];$$

五、周期函数和冲激函数的 Laplace 变换

1. 关于含冲激函数的 Laplace 变换问题

- 当函数 $f(t)$ 在 $t=0$处含冲激函数时，则有必要考察一下其Laplace变换中积分下限的设定。广义函数下积分时，对积分下限分别取 0^+和0^-是不同的。

$$L_+[f(t)]=\int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

$$\boxed{L_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t}=\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t+L_+[f(t)].$$

则 $\int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t\neq 0,$ 即 $L_-[f(t)]\neq L_+[f(t)].$

因此把$t\geq 0$上定义的函数延拓到$t<0$上,并且把Laplace变换定义为

- 本教材采用了后一种形式作为 δ 函数的 Laplace 变换。

例3　求单位脉冲函数$\delta(t)$的Laplace变换.

解　因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t = f(0),$$

所以

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = \mathscr{L}_{-}[\delta(t)]$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t = 1.$$

例4 求 $f(t)=e^{-\beta t}\delta(t)-\beta e^{-\beta t}u(t)\ \ (\beta>0)$

的Laplace变换(其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数).

解: 由Laplace变换的定义，当 $\mathrm{Re}\,s>-\beta$ 时，

$$\mathcal{L}\,[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}\left[e^{-\beta t}\delta(t)-\beta e^{-\beta t}u(t)\right]e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)e^{-(s+\beta)t}\mathrm{d}t-\beta\int_{0}^{+\infty}e^{-(s+\beta)t}\mathrm{d}t$$

$$=1+\beta\left.\frac{e^{-(\beta+s)t}}{s+\beta}\right|_{0}^{+\infty}=1-\frac{\beta}{s+\beta}=\frac{s}{s+\beta}.$$

2. 周期函数的 Laplace 变换问题

设$f(t)$是在$[0,\infty)$内以T为周期的函数，即

$$f(t+T)=f(t)\quad(t>0),$$

且$f(t)$在一个周期内分段连续，则

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

令 $t=\tau+kT$，$\tau\in[0,T)$，则

$$\int_{kT}^{(k+1)T}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^T f(\tau+kT)e^{-s(\tau+kT)}\mathrm{d}\tau,$$

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = e^{-kTs}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau.$$

而当 $\mathrm{Re}\, s > 0$ 时，$\left|e^{-Ts}\right| < 1$, 所以

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kTs}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

于是

$$\boxed{\mathcal{L}\,[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.}$$

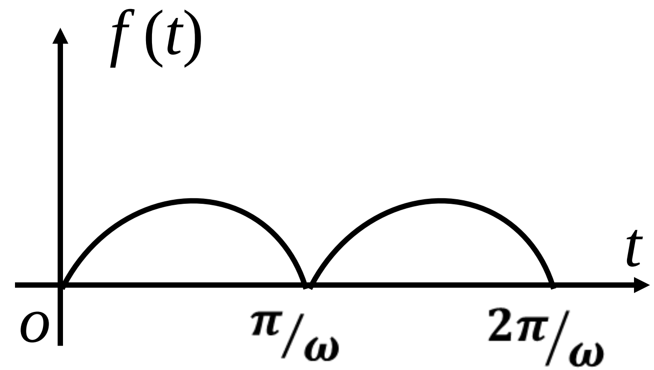
这就是周期函数的LAPLACE变换公式.

周期函数的 Laplace 变换公式

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

例5 求全波整流函数

$f(t)=|\sin\omega t|$的Laplace变换.



解： $f(t)$的周期 $T=\pi/\omega$,

所以由周期函数的Laplace变换公式

$$L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-st}\sin\omega t\mathrm{d}t$$

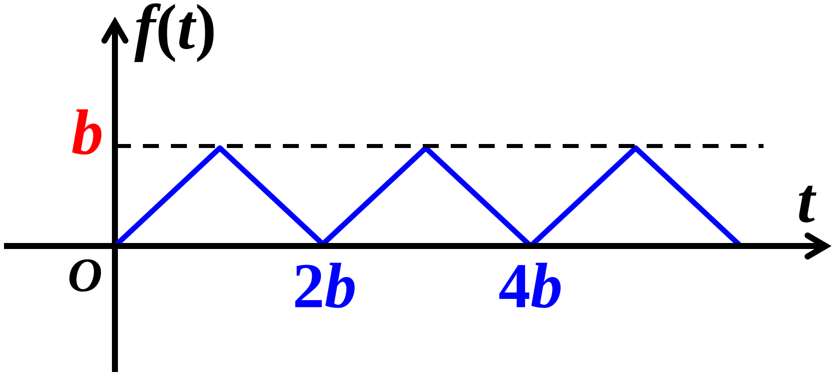
$$=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-st}(-s\sin\omega t-\omega\cos\omega t)}{s^2+\omega^2}\bigg|_0^T$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1+\mathrm{e}^{-sT}}{1-\mathrm{e}^{-sT}}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\operatorname{cth}\frac{s\pi}{2\omega}.$$

例6 求周期三角波 $f(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le b \\ 2b-t & b<t\le 2b \end{cases}$ **的拉氏变换**

(例7.1.6)

解：当Re(s)>0时,有



$$L[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2kb}^{2(k+1)b} f(t)e^{-st}dt=\frac{1}{s^2}\frac{1-e^{-bs}}{1+e^{-bs}}=\frac{1}{s^2}\operatorname{th}\frac{bs}{2}$$

周期$T=2b$，则 $L[f(t)]=\dfrac{1}{1-e^{-2sb}}\displaystyle\int_0^{2b} f(t)e^{-st}dt$

$$=\frac{1}{1-e^{-2sb}}\frac{(1-e^{-sb})^2}{s^2}$$

$$thz=\frac{shz}{chz}=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$$

§ 7.2 Laplace 变换的性质

一、线性性质与相似性质

二、延迟性质与位移性质

三、微分性质

四、积分性质

一、线性性质与相似性质

1. 线性性质 P170

性质 设α, β是常数，$F_1(s) = \mathscr{L}[f_1(t)]$，$F_2(s) = \mathscr{L}[f_2(t)]$，

则 $$\mathscr{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$$

$$= \alpha \mathscr{L}[f_1(t)] + \beta \mathscr{L}[f_2(t)],$$

对逆变换也有线性性质:

$$\mathscr{L}^{-1}[\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)] = \alpha \mathscr{L}^{-1}[F_1(s)] + \beta \mathscr{L}^{-1}[F_2(s)].$$

$$= \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$$

由Laplace变换的定义及积分的线性性质可证.

例7 求函数 $f(t)=\sin 2t \sin 3t$ 的 Laplace 变换。

解 $f(t)=\sin 2t\sin 3t=\dfrac{1}{2}(\cos t-\cos 5t)$,

$$L[f(t)]=\frac{1}{2}(L[\cos t]-L[\cos 5t])$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+25}\right)$$

$$=\frac{12s}{(s^2+1)(s^2+25)}.$$

例8

已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 $F(s)=\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s-1}$,

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-2}]-\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-1}]$$

$$=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}.$$

一、线性性质与相似性质

2. 相似性质（尺度性质） P178

性质 设 a 为任一正实数，则 $\mathcal{L}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$.

证明 $\mathcal{L}[f(at)]=\int_0^{+\infty}f(at)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

$$\xlongequal{令 x=at}\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

例9 求 $L[u(5t)]$

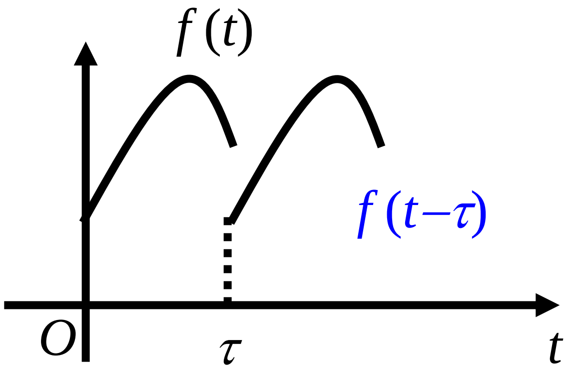
解：因为 $L[u(t)]=\dfrac{1}{s}$，所以 $L[u(5t)]=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{\frac{s}{5}}=\dfrac{1}{s}$.

二、延迟性质与位移性质

1. 延迟性质 P175

性质 设当 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则对任一非负实数 τ 有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s).$$



证明 $\mathscr{L}[f(t-\tau)]=\int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt$

$$=\int_\tau^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt$$

$$\xlongequal{令\ x=t-\tau}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\cdot e^{-s\tau}dx=e^{-s\tau}F(s).$$

因为当 $t<0$ 时, $f(t)=0$, 所以在 $[0,\tau]$ 上, 有 $f(t-\tau)=0$, 从而

二、延迟性质与位移性质

1. 延迟性质

$$L\,[f(t-\tau)]=\int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=e^{-\tau s}F(s)\ \left(\mathrm{Re}\,s>s_0\right).$$

注意 在延迟性质中专门强调了当 $t<0$ 时 $f(t)=0$ 这一**约定**。

利用单位阶跃函数 $u(t)$，直接表述为

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s).$$

可见，在利用本性质**求逆变换时**应为：

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau).$$

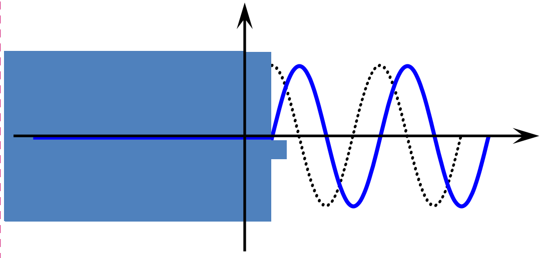
例10 求 $\mathscr{L}[\sin(t-\frac{\pi}{2})]$.

解 **方法一** 已知 $\mathscr{L}[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$,

根据**延迟性质**有

$$\mathscr{L}[\sin(t-\frac{\pi}{2})]=\frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}.$$

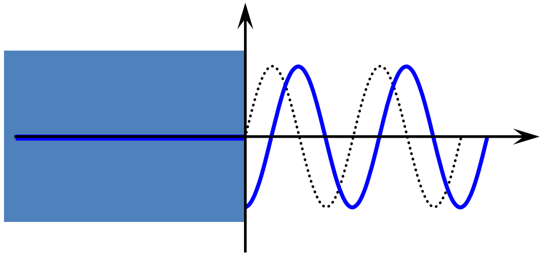
方法一 先充零再平移



方法二 $\mathscr{L}[\sin(t-\frac{\pi}{2})]=\mathscr{L}[-\cos t]$

$$=\frac{1}{s^2+1}(-s).$$

方法二 先平移再充零



- 两种方法为什么会得到不同的结果?

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)] = f(t-\tau)u(t-\tau).$$

例11 设 $F(s)=\dfrac{1}{s-1}\mathrm{e}^{-2s}$，求 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 由于 $\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s-1}]=\mathrm{e}^{t}u(t)$，根据**延迟性质**有

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathrm{e}^{t-2}u(t-2) \quad =\begin{cases}\mathrm{e}^{t-2}, & t>2,\\ 0, & t<2.\end{cases}$$

例12 **设** $F(s)=\dfrac{1}{s^2+1}e^{-2s}$ **求** $f(t)=L^{-1}[F(s)]$

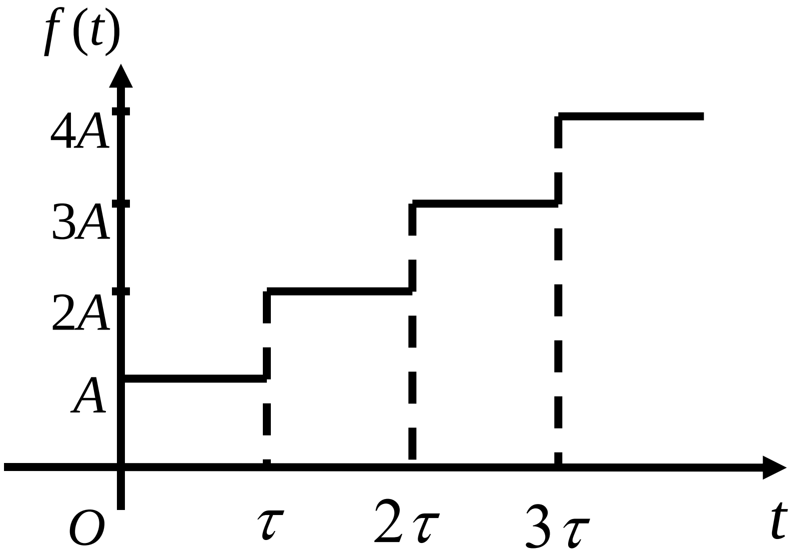
解: $f(t)=L^{-1}[F(s)] \quad =L^{-1}\left[e^{-2s}L(\sin t)\right]$

$$=\begin{cases}\sin(t-2) & t\geq 2\\ 0 & t<2\end{cases} = u(t-2)\sin(t-2)$$

例13 求如图所示阶梯函数的Laplace变换.

解法1 利用Heaviside函数

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$



图中的函数 $f(t)$ 可表示为

$$f(t)=A[u(t)+u(t-\tau)+u(t-2\tau)+\cdots]$$

$$=A\sum_{k=0}^{\infty}u(t-k\tau).$$

因为 $\mathcal{L}\,[u(t)]=\dfrac{1}{s}$, 所以由延迟性质

$$\mathcal{L}\,[u(t-k\tau)]=\frac{1}{s}e^{-k\tau s}.$$

再注意到 $\left|e^{-s\tau}\right|<1\ \ (\mathrm{Re}\,s>0)$, 于是

$$\mathcal{L}\,[f(t)]=\frac{A}{s}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\tau s}=\frac{A}{s(1-e^{-s\tau})}$$

$$=\frac{A}{s}\times\frac{1}{(1-e^{-\frac{s\tau}{2}})(1+e^{-\frac{s\tau}{2}})}$$

$$=\frac{A}{2s}\left(1+\mathrm{cth}\frac{s\tau}{2}\right)\ \ (\mathrm{Re}\,s>0).$$

解法2 $f(t)=\frac{A}{\tau}t+f(t)-\frac{At}{\tau}$，则 $f(t)-\frac{At}{\tau}$

是以τ为周期的函数，由周期函数的Laplace变换公式

$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{A}{\tau}\mathcal{L}[t]+\frac{1}{1-e^{-\tau s}}\int_0^{\tau}\left[f(t)-\frac{At}{\tau}\right]e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A}{\tau}\times\frac{1}{s^2}+\frac{1}{1-e^{-\tau s}}\int_0^{\tau}\left[A-\frac{A}{\tau}t\right]e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A}{\tau}\times\frac{1}{s^2}+\frac{A}{1-e^{-\tau s}}\left[\left(-\frac{1}{s}+\frac{t}{\tau s}+\frac{1}{\tau s^2}\right)e^{-st}\Big|_0^{\tau}\right]$$

$$=\frac{A}{s}\times\frac{1}{1-e^{-\tau s}}=\frac{A}{2s}\left(1+\mathrm{cth}\frac{\tau s}{2}\right).$$

例14 已知 $L[f(t)]=F(s)$

求$L[f(at-b)u(at-b)]$ $(a、b>0)$

解： 先延迟 $L[f(t-b)u(t-b)]=F(s)e^{-bs}$,

再相似 $L[f(at-b)u(at-b)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})e^{-\frac{b}{a}s}$,

先相似 $L[f(at)u(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$,

再延迟 $L[f(at-b)u(at-b)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})e^{-\frac{b}{a}s}$,

例15 求 $L[u(5t-2)]$. $L[u(t)]=\frac{1}{s}$,

由延迟性质和相似性质

$$L[u(5t-2)]=e^{-\frac{2}{5}s}L[u(5t)]=\frac{1}{s}e^{-\frac{2}{5}s}.$$

二、延迟性质与位移性质

2. 位移性质 P174

性质 设 a 为任一复常数，则 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]=F(s-a)$.

其中 s_0 是 $f(t)$ 的增长指数. $\big(\mathrm{Re}(s-a)>s_0\big)$,

例16 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{t}\cos t]=\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}$.

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{t}\sin t]=\frac{1}{(s-1)^2+1}.$$

$$L[e^{-at}\sin kt]=\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$$

三、微分性质

▲1. 导数的象函数 P171 性质7.2.2（像原函数的微分）

函数$f(t)$拉氏变换存在，$f^{(n)}(t)$存在且连续

性质 $\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0).$

一般地，有（n为正整数）

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$$

其中，$f^{(k)}(0)$ 应理解为 $\lim\limits_{t\to 0^+}f^{(k)}(t)$. $(1\le k\le n)$.

要求 $f^{(k)}(t)$ 存在且满足Laplace变换存在定理的条件

- Laplace 变换的这一性质非常重要，可用来求解微分方程（组）的初值问题。

例17 求函数 $f(t)=t^m$ 的Laplace变换(m 为正整数)。

解 利用导数的象函数性质来求解本题

由 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0$ 以及 $f^{(m)}(t)=m!$ 有

$$\mathscr{L}[f^{(m)}(t)]=\mathscr{L}[m!]$$

$$=s^m F(s)-s^{m-1}f(0)-s^{m-2}f'(0)-\cdots-f^{(m-1)}(0)$$

$$=s^m\mathscr{L}[f(t)]=s^m\mathscr{L}[t^m],$$

故有 $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{1}{s^m}\mathscr{L}[m!]=\dfrac{m!}{s^m}\mathscr{L}[1]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}.$

$$\boxed{\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).}$$

例18 求 $f(t) = \cos\omega t$ 的Laplace变换.

解 因为

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(t) = -\omega^2 \cos\omega t,$$

根据 **微分性质** 和线性性质

$$L[-\omega^2 \cos\omega t] = s^2 L[\cos\omega t] - sf(0) - f'(0),$$

$$-\omega^2 L[\cos\omega t] = s^2 L[\cos\omega t] - s,$$

所以 $L[\cos\omega t] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}.$

使用同样方法，可得 $L[\sin\omega t] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}.$

例19 求 $f(t)=t^2+\sin\omega t$ 的Laplace变换.

解 根据线性性质与**例17**、**例18**

$$\mathcal{L}[t^2+\sin\omega t]$$

$$=\mathcal{L}[t^2]+\mathcal{L}[\sin\omega t]$$

$$=\frac{2!}{s^3}+\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

四、积分性质

1. 积分的象函数

P173

（像原函数的积分）

性质 $\mathscr{L}[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t] = \frac{1}{s}F(s).$

一般地，有

$$\mathscr{L}[\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}t \cdots \int_0^t}_{n\text{次}} f(t)\,\mathrm{d}t] = \frac{1}{s^n}F(s).$$

例20 求函数 $f(t)=\int_0^t t\sin 2t\,\mathrm{d}t$ 的Laplace变换。

解 已知 $\mathscr{L}[\sin 2t]=\dfrac{2}{s^2+2^2}$,

根据**微分性质**有

$$\mathscr{L}[t\sin 2t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\frac{4s}{(s^2+4)^2},$$

再由**积分性质**得

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t t\sin 2t\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}\cdot\frac{4s}{(s^2+4)^2}=\frac{4}{(s^2+4)^2}.$$

例21 求函数 $f(t)=\int_0^t t\sin 2t\,\mathrm{d}t$ 的Laplace变换。

解 已知 $\mathscr{L}[\sin 2t]=\dfrac{2}{s^2+2^2}$,

根据**微分性质**有

$$\mathscr{L}[t\sin 2t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\frac{4s}{(s^2+4)^2},$$

再由**积分性质**得

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t t\sin 2t\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}\cdot\frac{4s}{(s^2+4)^2}=\frac{4}{(s^2+4)^2}.$$

部分基本性质汇总

线性性质

$$\mathscr{L}[a\, f(t)+b\, g(t)]=a\, F(s)+b\, G(s);$$

$$\mathscr{L}^{-1}[a\, F(s)+b\, G(s)]=a\, f(t)+b\, g(t).$$

相似性质

$$\mathscr{L}[\, f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

延迟性质

$$\mathscr{L}[\, f(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau).$$

部分基本性质汇总

位移性质 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at} f(t)] = F(s-a).$

微分性质 $\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$

$$\boxed{\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).}$$

积分性质 $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \dfrac{1}{s} F(s).$

附：利用 Laplace 变换计算广义积分

- 在 Laplace 变换及其性质中，如果取 s 为某些**特定**的值，就可以用来求一些函数的广义积分。

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t;$$

$$F'(s)=-\int_0^{+\infty} t f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t;$$

$$\int_s^{\infty} F(s)\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

$$F(0)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t;$$

$$F'(0)=-\int_0^{+\infty} t f(t)\mathrm{d}t;$$

$$\int_0^{\infty} F(s)\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

- 注意在使用这些公式时必须谨慎，必要时需要事先考察一下 s 的取值范围以及广义积分的存在性。

附：利用 Laplace 变换计算广义积分

例 计算积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\cos 2t\,\mathrm{d}t$.

解 由 $\mathscr{L}[\cos 2t] = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\cos 2t\,\mathrm{d}t = \dfrac{s}{s^2+4}$，得

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\cos 2t\,\mathrm{d}t = \left.\frac{s}{s^2+4}\right|_{s=3} = \frac{3}{13}.$$

附：利用 Laplace 变换计算广义积分

例 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}\,dt$.

解 已知 $\mathscr{L}[1-\cos t]=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}=\frac{1}{s(s^2+1)}$，由**积分性质**有

$$\mathscr{L}[\frac{1-\cos t}{t}]=\int_s^{\infty}\frac{1}{s(s^2+1)}\,ds$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{s^2}{s^2+1}\Big|_s^{\infty}=\frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2},$$

即得 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}\,dt=\frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2}\Big|_{s=1}=\frac{1}{2}\ln 2.$

本章主要内容

Laplace变换

基本性质

- 线性性质
- 微分性质
- 积分性质
- 位移性质
- 延迟性质
- 相似性质

Laplace变换存在定理

函数在$t \geq 0$任何区间按段连续；

$t \to \infty$增长速度有界

1) 拉氏变换的存在定理、定义及其性质

2) 周期函数拉氏变换

$$L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

3) 常用拉氏变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$;

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$;

(4) $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$;

(5) $\mathscr{L}[\cos at]=\dfrac{s}{s^2+a^2}$;

(6) $\mathscr{L}[\sin at]=\dfrac{a}{s^2+a^2}$.

课堂练习

1. 用定义求下列拉氏变换

1）$f(t)=e^{-2t}$

2）$f(t)=\sin t\cdot\cos t$

2. 求下列函数的拉氏变换

$$f(t)=\begin{cases} t+1, & 0<t<3 \\ 0, & t\geq 3 \end{cases}$$