复变函数与积分变换

（2024-2025学年第一学期）

邱丽荣

办公室：中关村校区 北院 6号教学楼125

E-mail: qiulirong1@bit.edu.cn

电话：18810135629

第三章 复变函数的积分

- 复变函数积分概念
- 柯西积分定理
- 柯西积分公式

第3章 作业

书P68—70

1(1)、5、8(2)、9(2)、10(5)、12、13、16

§3-1 复变函数积分的概念

1 积分的概念

2 积分存在条件及性质

3 积分实例

一、积分的定义

1. 有向曲线

设 C为平面上给定的一条光滑（或按段光滑）曲线，如果选定 C的两个可能方向中的一个作为正方向（或正向），那么我们就把 C理解为带有方向的曲线，称为有向曲线.

设 $$C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

$$x'(t)、y'(t) \in C[\alpha,\beta], \text{且}[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \ne 0$$

$$C: \quad z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \quad (1)$$

$$z'(t)\text{连续且}z'(t) \ne 0$$

C -- z平面上的一条光滑曲线

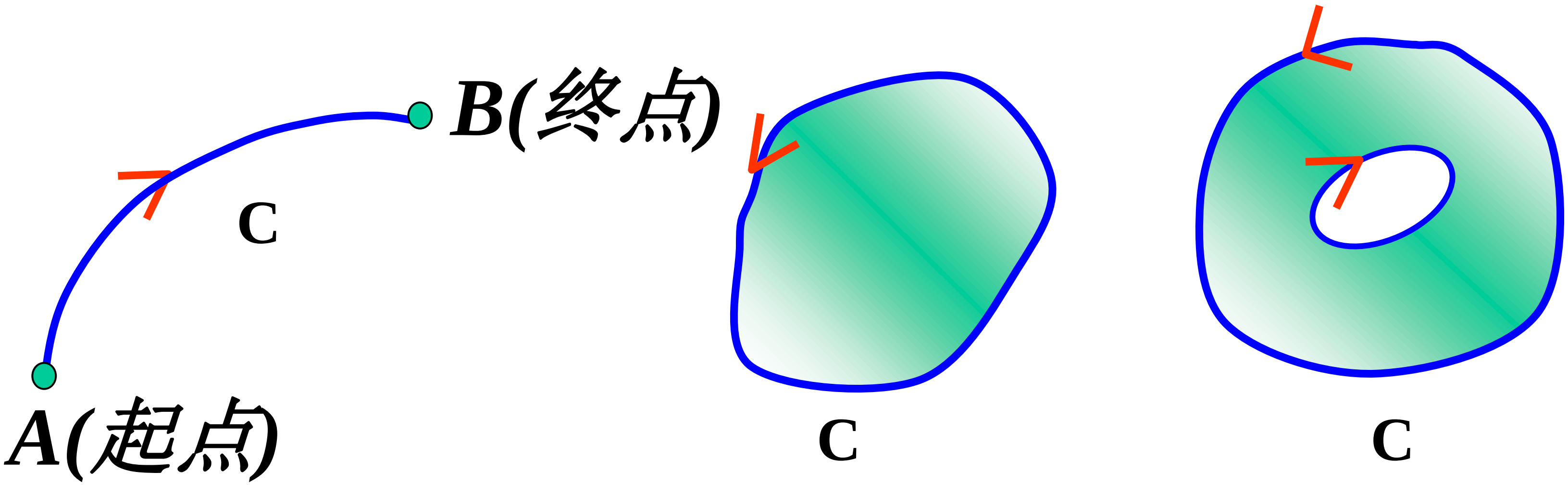
1. 有向曲线

关于曲线方向的说明:

简单曲线: 正方向总是指从起点到终点的方向.

反之,为负方向,记为C^{-}

闭曲线:正方向——观察者顺此方向沿C前进一周,C的内部一直在观察者的左边。

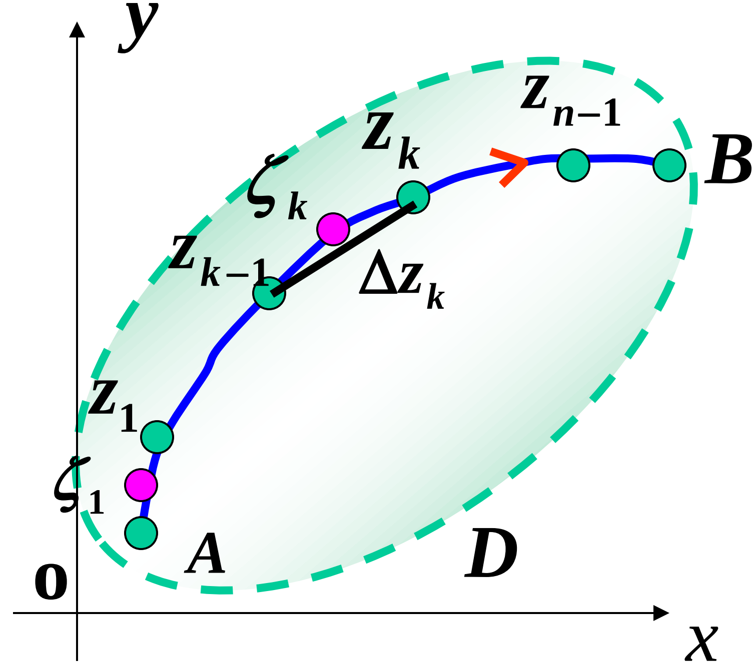


2. 积分定义

（1）设函数$w=f(z)$定义在区域D内， $w=f(z)\ \ z\in D$

（2）C为区域D内（起点）点A→（终点）点B 的一条光滑有限曲线

（3）将曲线C任意分成n个弧段，设分点为



$A=z_0,z_1,\cdots,z_{k-1},z_k,\cdots,z_n=B$

在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$

$(k=1,2,\cdots,n)$

上任意取一点 ζ_k，

"分割"、"作和"、"取极限"的步骤

(4) $\forall \zeta_k \in \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 作乘积 $f(\zeta_k)\Delta z_k$

(5) 作和式 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$,

这里 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $\Delta s_k = \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 的长度,

记 $\delta = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta s_k\}$, 当 n 无限增加且 $\delta \to 0$ 时,

不论对 C 的分法及 ξ_k 的取法如何，S_n 有唯一极限

$$\boxed{I = \lim_{\lambda(T)\to 0} S_n(T)}$$

则称这个极限为函数 $f(z)$ 沿曲线C（从A→B）的积分

记作 $\int_C f(z)dz = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$.

2. 积分定义

定义积分的步骤:

$\boxed{\text{分割}} \to \boxed{\text{取乘积}} \to \boxed{\text{求和}} \to \boxed{\text{取极限}}$

关于定义的说明:

(1) 如果 C 是闭曲线, 那么沿此闭曲线的积分

记为 $\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z.}$

(2) 如果 C 是 x 轴上的区间 $a \le x \le b$, 而 $f(z)$ $= u(x)$, 这个积分定义就是一元实变函数定积分的定义.

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b u(x)dx$$

2. 积分定义

(3)如果$\int_C f(z)dz$ 存在，一般不能写成$\int_a^b f(z)dz$.

因为$\int_C f(z)dz$不仅与a、b有关，还与曲线C的形状有关。

特例:(1) 若C表示连接点a,b的任一曲线,则

$$\int_C dz = b-a \qquad \int_C zdz = \frac{b^2-a^2}{2}$$

复变函数的积分只依赖于积分路径C的起点A与终点B，而与积分路径的形状无关.

(2) 若C表示闭曲线,则 $\oint_C dz = 0,\qquad \oint_C zdz = 0$

二. 积分存在的条件及其计算法

1. 存在条件

定理 当$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在光滑曲线C上连续时, $f(z)$必沿C可积, 即$\int_C f(z)dz$存在.

且 $$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy}$$

$$\overset{\text{记忆}}{=} \int_C (u+iv)(dx+idy)$$

这个定理表明$\int_C f(z)dz$可通过二个二元实变函数的第二型曲线积分来计算.

证

设光滑曲线 C 由参数方程给出

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$

正方向为参数增加的方向,

参数 α 及 β 对应于起点 A 及终点 B,

并且 $z'(t) \neq 0, \quad \alpha < t < \beta,$

如果 $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ 在 D 内处处连续,

那么 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内均为连续函数,

令 $z_k = x_k + iy_k \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$$

所以 $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+i\,v(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k+i\Delta y_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k-v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

$$+i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

由于 u,v 都是连续函数,根据线积分的存在定理,

当 n 无限增大而弧段长度的最大值趋于零时，

不论对C的分法如何，点(ξ_k,η_k)的取法如何，下式两端极限存在：

当$\delta\to 0$时，均是实函数的曲线积分.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=1}^{n}[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$$

公式 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$

在形式上可以看成是

$f(z) = u + iv$ 与 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ 相乘后求积分得到:

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u + iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$$

$$= \int_C u\mathrm{d}x + iv\mathrm{d}x + iu\mathrm{d}y - v\mathrm{d}y$$

$$= \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

$\because f(z)$在C上连续，$\therefore u(x,y), v(x,y)$

在C上连续 故$\int_C u(x,y)dx$、$\int_C v(x,y)dy$、

$\int_C v(x,y)dx$、$\int_C u(x,y)dy$都存在!

推论1: 当$f(z)$是连续函数，C是光滑曲线时，

$\int_c f(z)dz$一定存在。

推论2: $\int_c f(z)dz$可以通过两个二元实函数的线积分来计算。

2. 积分计算

$\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 可以通过两个二元实变函数的线积分来计算.

设光滑曲线$C: z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad t: \alpha \to \beta$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$+ i\int_\alpha^\beta \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}\{x'(t) + iy'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.$$

2. 积分计算

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

这样一来，将$f(z)$沿曲线C的积分归结为关于参数t的一个定积分.

如果C是由$C_1, C_2, \cdots, C_n$等光滑曲线依次相互连接所组成的按段光滑曲线,则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

在今后讨论的积分中,总假定被积函数是连续的,曲线C是按段光滑的.

2. 积分计算

由以上讨论可知，用上式计算积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 包含三个步骤：

1） 写出曲线C的方程

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)\ \ (\alpha \le t \le \beta)$$

2） 将$z = z(t)$与$dz = z'(t)dt$ 代入所求积分$\int_C f(z)\mathrm{d}z$

3） 计算下式右端的关于参数t的积分.

$$\int_c f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

二. 积分存在的条件及其计算法

3. 积分性质

复变函数的积分与实函数的积分有类似的性质

(1) 方向性

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z;$$

(2) 线性性

$$\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z; \quad (k\text{为常数})$$

$$\int_C [f(z) \pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z;$$

二. 积分存在的条件及其计算法

(3) 可加性

设 C_1的终点是C_2的起点，$C = C_1 + C_2$，则

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$(分段光滑曲线)

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz$$

(4) 估值不等式 (估值定理)

设曲线 C 的长度为 L，函数 $f(z)$ 在 C 上满足

$|f(z)| \le M$，则 $\boxed{\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds \le ML.}$

3. 积分性质

证明

因为$|\Delta z_k|$是z_k与z_{k-1}两点之间的距离，

Δs_k为这两点之间弧段的长度，

所以 $$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k$$

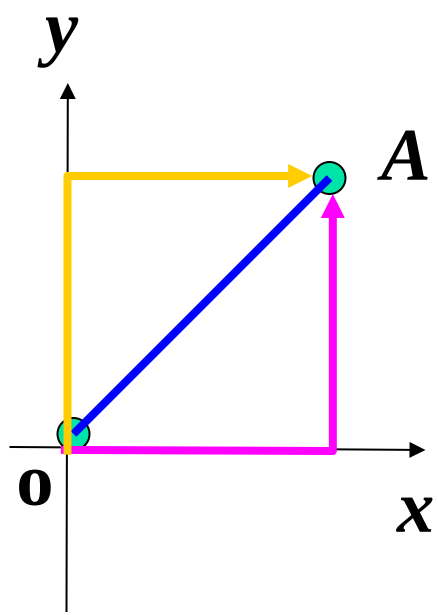
两端取极限得 $$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s.$$

因为 $$\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot\Delta s_k \le M\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k = ML,$$

所以 $$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le ML.$$ [证毕]

例1 计算 $\int_C z\mathrm{d}z$，C：从原点到点 $3+4i$ 的直线段.

解 直线方程为 $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 4t, \end{cases}$ $0 \le t \le 1,$



在 C 上, $z = (3+4i)t,$

$$\mathrm{d}z = (3+4i)\mathrm{d}t,$$

$$\int_C z\mathrm{d}z = \int_0^1 (3+4i)^2 t\mathrm{d}t = (3+4i)^2 \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{(3+4i)^2}{2}.$$

例 2 计算 $\int_C \operatorname{Re} z\mathrm{d}z$, $\int_C z\mathrm{d}z$ 其中 C 为:

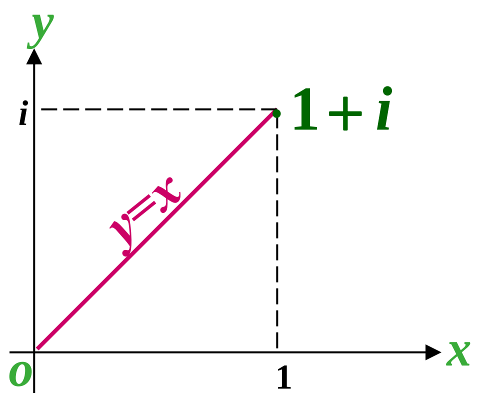
(1)从原点到点 $1+i$ 的直线段;

(2) 抛物线 $y=x^2$ 上从原点到点 $1+i$ 的弧段;

(3) 从原点沿 x 轴到点 1 再到 $1+i$ 的折线.

解　(1) 积分路径的参数方程为

$$z(t)=t+it \quad (0\le t\le 1),$$



于是　$\operatorname{Re} z=t,\quad \mathrm{d}z=(1+i)\mathrm{d}t,$

$$\int_C \operatorname{Re} z\mathrm{d}z=\int_0^1 t(1+i)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+i);$$

$$\int_C z\mathrm{d}z=\int_0^1(1+i)^2 t\mathrm{d}t=(1+i)^2\int_0^1 t\mathrm{d}t=i$$

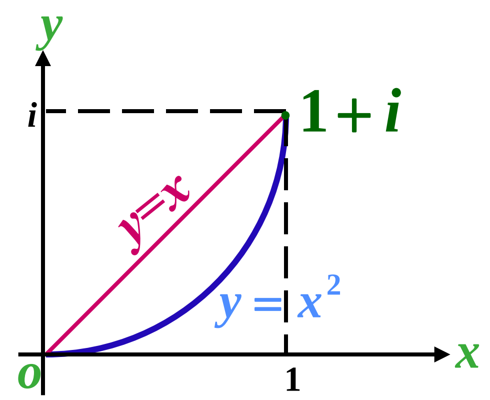
(2) 积分路径的参数方程为

$$z(t) = t + it^2 \quad (0 \le t \le 1),$$

于是 $\mathrm{Re}\,z = t, \quad \mathrm{d}z = (1 + 2ti)\mathrm{d}t,$

$$\int_C \mathrm{Re}\,z\mathrm{d}z = \int_0^1 t(1 + 2it)\mathrm{d}t$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} + \frac{2i}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i;$$



$$\int_C z\mathrm{d}z = \int_0^1 (t + it^2)(1 + 2it)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 [(t - 2t^3) + i \cdot 3t^2]\mathrm{d}t = i;$$

积分的计算

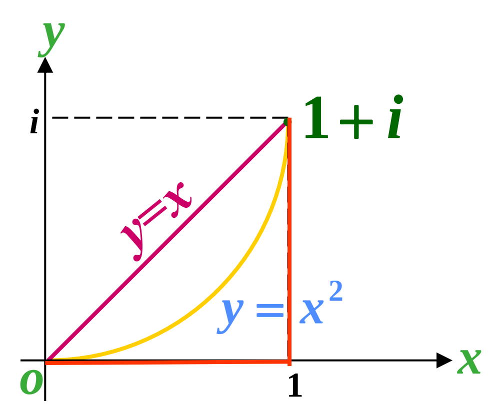
(3) 积分路径由两段直线段构成

x轴上直线段C_1的参数方程为 $z(t)=t \quad (0\le t\le 1)$,

于是 $\operatorname{Re} z = t, \quad dz = dt,$

1到1+i直线段C_2的参数方程为 $z(t)=1+it \ (0\le t\le 1)$,

于是 $\operatorname{Re} z = 1, \quad dz = i dt,$



$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_{C_1} \operatorname{Re} z dz + \int_{C_2} \operatorname{Re} z dz$$

$$= \int_0^1 t dt + \int_0^1 1\cdot i dt = \frac{1}{2} + i.$$

$$\int_C z dz = \int_0^1 t dt + \int_0^1 (1+it) i dt = i.$$

积分的计算

注意1 从例2可以看出，曲线积分$\int_C z\mathrm{d}z$与积分路径无关，但曲线积分$\int_C \mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z$与积分路径有关。

注意2 一般不能把起点为α，终点为β的$f(z)$的积分记成$\int_\alpha^\beta f(z)\mathrm{d}z$，因这是曲线积分，要受积分路线的限制，必须记作$\int_C f(z)\mathrm{d}z$.

例3 求 $\int_{|z|=R} z^m \overline{z}^n dz$ 其中 m,n 为整数

解: C 的参数方程为: $z(t) = \mathrm{R}e^{it}, t \in [0,2\pi]$, 于是有

$$dz = i\,\mathrm{R}e^{it}\,dt$$

$$\int_{|z|=R} z^m \overline{z}^n dz$$

$$= \int_0^{2\pi} R^{\mathrm{m+n}} e^{mti} \cdot e^{-nti} iRe^{it} dt = R^{m+n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(m-n+1)} dt$$

$$= R^{m+n+1} i\left(\int_0^{2\pi} cos[(m-n+1)t]dt + i\int_0^{2\pi} sin[(m-n+1)t]dt\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq m+1 \\ 2R^{2n}\pi i, & n = m+1 \end{cases}$$

积分的计算

例4 计算 $\int_C |z|\mathrm{d}z$, 其中 C 为：圆周 $|z|=2$.

解 积分路径的参数方程为

$$z = 2e^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi), \qquad \mathrm{d}z = 2ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

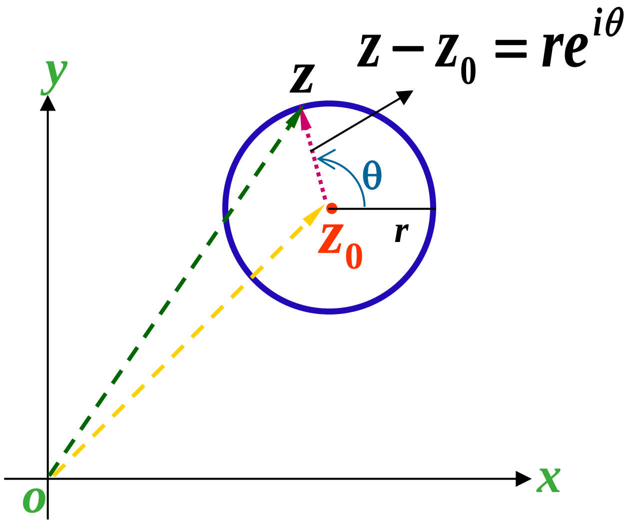
$$\int_C |z|\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} 2\cdot 2ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \quad (\text{因为 } |z|=2)$$

$$= 4i\int_0^{2\pi} (\cos\theta + i\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= 0.$$

积分的计算

例5 求 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$, C 为以 z_0 为中心, r 为半径的正向圆周, n 为整数.



解 积分路径的参数方程为

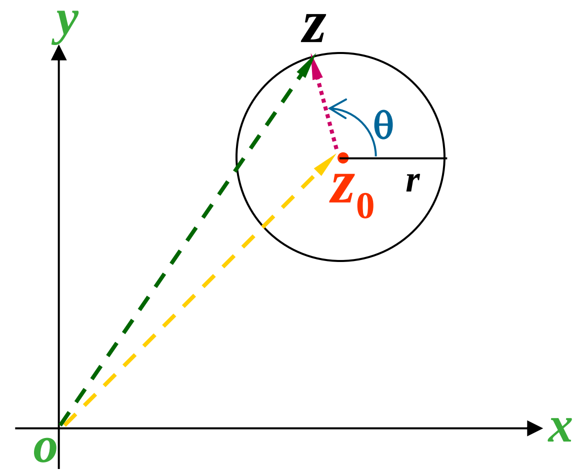
$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi),$$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta,$$

当$n=0$时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi i;$$



当$n\neq 0$时,

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\theta - i\sin n\theta)\mathrm{d}\theta = 0;$$

所以 $$\boxed{\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n=0, \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}}$$

重要结论：积分值与路径圆周的中心和半径无关.

此例可作为积分公式，在后面的积分计算中将经常用到

例6 设 C 为从原点到点 $3+4i$ 的直线段，

试求积分 $\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z$ 绝对值的一个上界.

解 C 的参数方程为 $z=(3+4i)t,\ (0\le t\le 1)$

根据估值不等式知

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right| \le \int_C \left|\frac{1}{z-i}\right|\mathrm{d}s$$

因为在 C 上，$\left|\frac{1}{z-i}\right| = \frac{1}{|3t+(4t-1)i|}$

$$=\frac{1}{\sqrt{(3t)^2+(4t-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}}\leq\frac{5}{3},$$

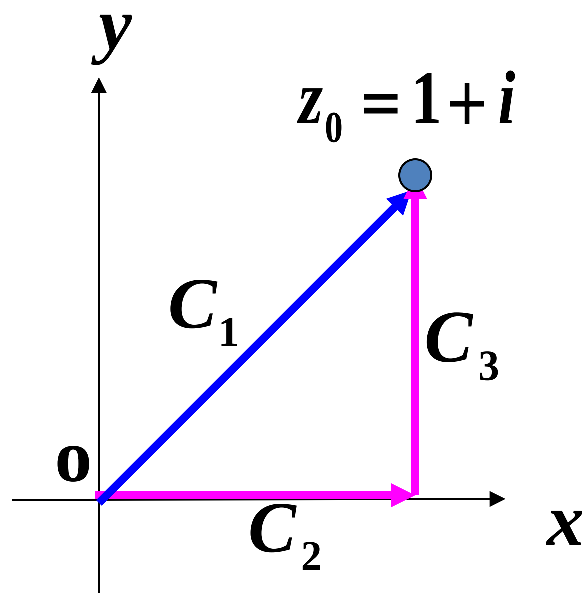
从而 $\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right|\leq\frac{5}{3}\underbrace{\int_C \mathrm{d}s}_{=5}=\frac{25}{3}$

故 $\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right|\leq\frac{25}{3}.$

例7 计算$\int_C \bar{z}dz$的值

$1)C=C_1=\overline{Oz_0}$

$2)C=C_2+C_3$(见图)



解 $1)C_1:\quad z=(1+i)t\quad 0\le t\le 1$

$$\int_C \bar{z}dz=\int_0^1(t-it)(1+i)dt=\int_0^1 2tdt=1$$

$2)C_2:z=t\quad 0\le t\le 1\quad C_3:z=1+it\quad 0\le t\le 1$

$$\int_C \bar{z}dz=\int_{C_2}\bar{z}dz+\int_{C_3}\bar{z}dz$$

$$=\int_0^1 tdt+\int_0^1(1-it)idt=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+i)=1+i$$

例8 计算$\int_{C_1}\bar{z}dz, \int_{C_2}\bar{z}dz$的值,其中

C_1是单位圆$|z|=1$的上半圆周,顺时针方向;

C_2是单位圆$|z|=1$的下半圆周,逆时针方向.

解: 1)C_1: $z=e^{i\theta}, 0\le\theta\le\pi$.

$$\int_{C_1}\bar{z}dz=\int_{\pi}^{0}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{\pi}^{0}dt=-\pi i$$

2)C_2: $z=e^{i\theta}, -\pi\le\theta\le 0$.

$$\int_{C_2}\bar{z}dz=\int_{-\pi}^{0}e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta=i\int_{-\pi}^{0}dt=\pi i$$