复变函数与积分变换

（2024-2025学年第一学期）

邱丽荣

办公室：北院 6号教学楼125

E-mail: qiulirong1@bit.edu.cn

电话：18810135629

从上一章可以看出，利用将函数 $f(z)$ 在其解析的环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内展开成 洛朗 级数的方法，根据该级数系数的积分表达式

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

可以计算右端的积分. 其中C是该环域内围绕点z_0的正向简单闭曲线。这里C 的内部可能有函数$f(z)$的有限个甚至无穷多个奇点。

计算积分 $I = \oint_{|z|=5} \ln(1+\frac{2}{z})dz$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

解：先分析对数函数解析性，则 奇点为 z=-2，

因此它在环域 $2<|z|<\infty$ 内解析。于是

$$\ln(1+\frac{2}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n+1}z^{-n-1},$$

取n=-1，则积分值为 $I = 2\pi i c_{-1} = 4\pi i$

本章主要讨论计算函数积分的新方法：利用函数的孤立奇点的留数来计算积分的方法。

第五章 留数

§ 5-1 孤立奇点

§ 5-2 留数和留数定理

§ 5-3 留数在定积分计算中的应用

作业　　　**书123-125页**

1(6)、3(3)、4、7、 9(1)、 9(2)、

10(1)、 13(1)、 13(2)、 13(4)

§5-1 孤立奇点

- 1. 定义
- 2. 分类及性质
- 3. 零点与极点的关系

一. 孤立奇点的概念

定义 如果函数$f(z)$在 z_0 不解析, 但 $f(z)$在 z_0 的某一去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$内处处解析, 则称 z_0为$f(z)$的孤立奇点.

例1 $z=0$ 是函数 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

$z=-1$是函数 $\dfrac{1}{z+1}$ 的孤立奇点.

注意: 奇点不一定是孤立奇点.

孤立奇点 $\rightleftarrows$ 奇点

例2 指出函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin\frac{1}{z}}$ 在点 $z=0$ 的奇点特性.

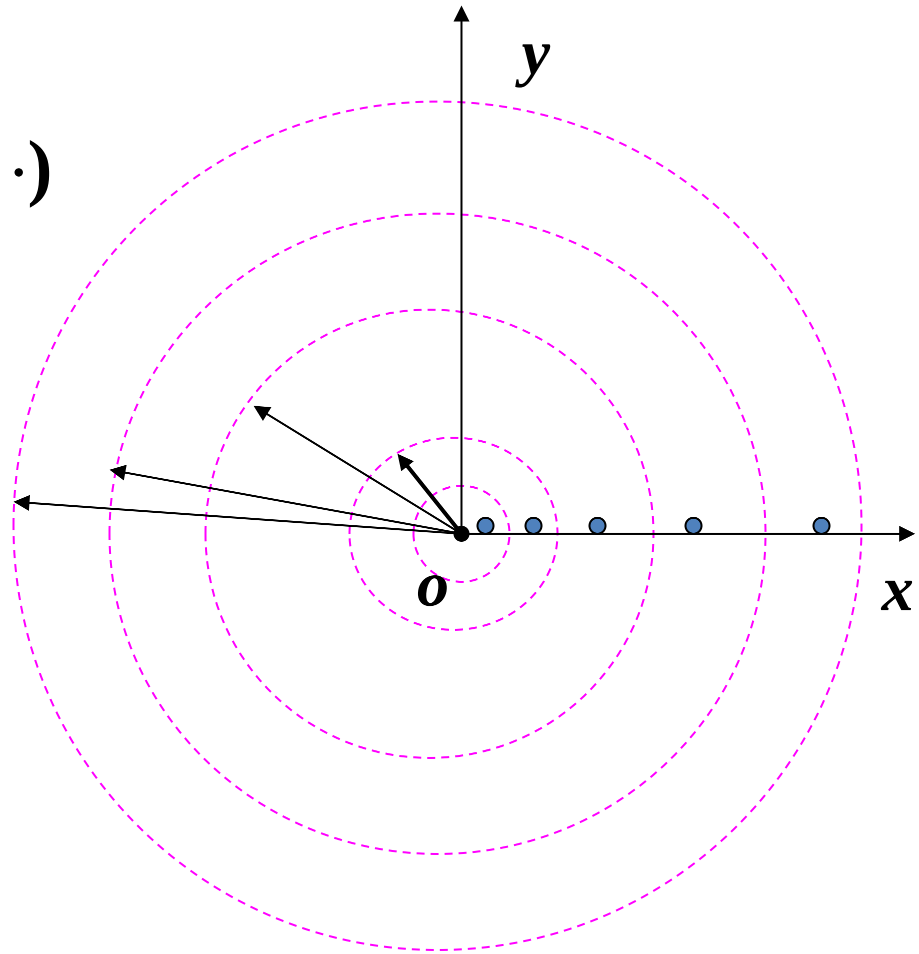
解 函数的奇点为 $z=0$、

$$z=\frac{1}{k\pi}\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

孤立奇点

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k\pi}=0$,

即在$z=0$的不论怎样小的去心邻域内,总有$f(z)$ 的奇点存在，所以$z=0$不是孤立奇点



指出函数 $f(z)=\dfrac{1}{\cos(1/z)}$ 的孤立奇点

解：$z=0$是函数$f(z)$的奇点，$z_k=2/[(2k+1)\pi](k$为整数$)$

是它的孤立奇点。由于当 $k\to\infty$ 时，$z_k\to 0$，因此，

$z=0$是它的奇点而不是孤立奇点。

另外，$f(z)$在环域 $2/\pi<|z|<\infty$内解析，$z=\infty$是它的孤立

奇点。

二. 孤立奇点的分类

以下将$f(z)$在孤立奇点的邻域内展成洛朗级数，根据展开式的不同情况，将孤立点进行分类.

考察：

$$(1)\ \frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

特点：没有负幂次项

$$(2)\ \frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\cdots$$

特点：只有有限多个负幂次项

$$(3)\ e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\cdots$$

特点：有无穷多个负幂次项

二. 孤立奇点的分类

依据 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 的去心邻域

$0<|z-z_0|<\delta$ 内的洛朗级数的情况分为三类:

1. 可去奇点; 2. 极点; 3. 本性奇点.

1. 可去奇点

1) 定义 如果洛朗级数中不含 $z-z_0$ 的负幂项,

那末孤立奇点 z_0 称为 $f(z)$ 的可去奇点.

说明: (1) z_0若是$f(z)$的孤立奇点,

$$f(z)=\boxed{c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots}.$$

$$(0<|z-z_0|<\delta)$$

其和函数$F(z)$为在z_0解析的函数.

(2) 无论 $f(z)$ 在 z_0 是否有定义, 补充定义

$f(z_0)=c_0$, 则函数$F(z)$在z_0解析

$$f(z_0)=\lim_{z\to z_0} f(z)$$

$$f(z)=\begin{cases} F(z), z\neq z_0 \\ c_0\ , z=z_0 \end{cases}$$

2) 可去奇点的判定

(1) 由定义判断: 如果 $f(z)$在z_0 的洛朗级数无负幂项，则 z_0为 $f(z)$的可去奇点.

(2) 判断极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$:若极限存在且为有限值,则 z_0为 $f(z)$的可去奇点.　（充要条件）

例3 $\dfrac{\sin z}{z}=1-\dfrac{1}{3!}z^{2}+\dfrac{1}{5!}z^{4}-\cdots$ 中不含负幂项,

$z=0$ 是 $\dfrac{\sin z}{z}$ 的可去奇点 .

如果补充定义:

$$z=0\text{ 时},\quad \frac{\sin z}{z}=1,$$

那末 $\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z=0$ 解析.

例4 说明 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

解 $$\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{z}\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots-1\right)$$

$$=\underbrace{1+\frac{1}{2!}z+\cdots+\frac{1}{n!}z^{n-1}+\cdots}_{\text{无负幂项}},\quad 0<|z|<+\infty$$

所以 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

另解 因为 $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=\lim_{z\to 0}e^z=1,$

所以 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 的可去奇点.

2. 极点

1) **定义** 如果洛朗级数中只有有限多个$z-z_0$的负幂项，其中关于 $(z-z_0)^{-1}$的最高幂为$(z-z_0)^{-m}$，

即
$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$
$$+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots \qquad (m\geq 1,\ c_{-m}\neq 0)$$

或写成
$$\boxed{f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z),}$$

那末孤立奇点z_0称为函数 $f(z)$的m级**极点**

说明:

(1) $g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots$

特点: 1. 在 $|z - z_0| < \delta$ 内是解析函数

2. $g(z_0) \neq 0$

(2) 如果 z_0 为函数 $f(z)$ 的极点,则

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

例5 有理分式函数 $f(z) = \dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$,

$z = 0$ 是二级极点, $z = -2$ 是一级极点.

2)极点的判定方法

(1) 由定义判别

$f(z)$的洛朗展开式中含有z-z_0的负幂项为有限项。

(2) 由定义的等价形式判别 **（充要条件）**

在点 z_0的某去心邻域内 $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$

其中$g(z)$ 在z_0 的邻域内解析, 且 $g(z_0)\neq 0$.

(3) 利用极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ **判断．** **（充要条件）**

课堂练习

求 $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点, 如果是极点, 指出它的级数.

答案 由于 $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}=\dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$,

所以：$z=-1$是函数的一级极点,

$z=1$是函数的二级极点.

例 问$z=0$是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的二级极点吗?

解

$$\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right)$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots=\frac{1}{z}\varphi(z),$$

$\varphi(z)$解析且$\varphi(0)\neq 0$

所以 $z=0$不是二级极点, 而是一级极点.

思考 $z=0$是 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的几级极点? 二级极点

注 意: **不能以函数的表面形式作出结论 .**

3.本性奇点

1) 定义

如果洛朗级数中含有无穷多个$z-z_0$的负幂项，那末孤立奇点z_0称为$f(z)$的本性奇点.

例如，$e^{\frac{1}{z}} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \cdots + \frac{1}{n!}z^{-n} + \cdots,$

含有无穷多个z的负幂项 $(0 < |z| < \infty)$

所以 $z = 0$ 为本性奇点，同时 $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$ 不存在.

特点: 在本性奇点的邻域内 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$不存在且不为 ∞.

例

$f(z)=e^{1/z}, z_0=0$ 为$f(z)$的孤立奇点.

当$z=x\to 0+$, 有$f(z)\to\infty$; 当$z=x\to 0-$, 有$f(z)\to 0$;

当$z=iy\to 0$, 有$f(z)=\cos\dfrac{1}{y}-i\sin\dfrac{1}{y}$无极限。

于是当$z\to 0$, $f(z)$无极限，也不以∞为极限。

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}$$

综上，当z_0为$f(z)$的孤立奇点时，可用极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 值存在有限、为∞、不存在，来区分奇点是可去奇点、极点还是本性奇点。

综上所述:　　　　　　　　　　　　　　（充要条件）

孤立奇点	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	存在且为有限值
m级极点	含有限个负幂项 关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$	∞
本性奇点	含无穷多个负幂项	不存在且不为∞

二、函数的零点与极点的关系

1、函数的零点

定义 若函数 $f(z)$ 在点 z_0 解析，并且 $f(z_0)=0$

则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的**零点**

例 $z=0$，$z=1$ 是函数 $f(z)=z(z-1)^3$ 的零点.

二、函数的零点与极点的关系

m级零点　　不恒等于零的解析函数$f(z)$，如果能表示成 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$在z_0解析且$\varphi(z_0)\neq 0$, m为某一正整数, 那么z_0称为$f(z)$的 m 级零点

例6　$z=0$是函数 $f(z)=z(z-1)^3$的一级零点,

$z=1$是函数 $f(z)=z(z-1)^3$的三级零点.

注意: 不恒等于零的解析函数的零点是孤立的.

2.零点的判定

定理5.1.5　如果 $f(z)$ 在 z_0解析，那么z_0为$f(z)$ 的m级零点的充要条件是

$$f^{(n)}(z_0)=0,\ (n=0,1,2,\cdots m-1);\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

证 (必要性)　如果 z_0 为 $f(z)$的 m级零点

由定义:　$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$

设 $\varphi(z)$在z_0的泰勒展开式为:

$$\varphi(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots,$$

其中 $c_0 = \varphi(z_0) \neq 0,$

从而$f(z)$在z_0的泰勒展开式为

$$f(z) = c_0(z-z_0)^m + c_1(z-z_0)^{m+1} + c_2(z-z_0)^{m+2} + \cdots$$

展开式的前m项系数都为零，由泰勒级数的系数

公式知：$f^{(n)}(z_0) = 0, (n = 0,1,2,\cdots m-1);$

并且 $$\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = c_0 \neq 0.$$

充分性证明略.

定理 z_0为$f(z)$ 的m级零点的**充要条件是**：

$$f(z)=(z-z_0)^m\psi(z)$$

其中 $\psi(z)$ 在 z_0解析，且 $\psi(z_0)\neq 0$

例7 求以下函数的零点及级数:

$$(1)\ f(z)=z^3-1,\quad (2)\ f(z)=\sin z.$$

解 (1)由于 $f'(1)=3z^2\big|_{z=1}=3\neq 0,$

知 $z=1$ 是 $f(z)$ 的一级零点 .

$$z=e^{\frac{2k\pi}{3}}(k=0,1,2)$$

级数：在z平面上处处解析，用泰勒展开的定义求级数的系数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \qquad c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),\ n=0,1,2,\cdots\cdots$$

$$f(z)=3(z-1)+3(z-1)^2+(z-1)^3$$

(2) $f(z)=\sin z$.

解　(2)由于　$z=k\pi(k=0,\pm1,\pm2)$

$$f'(z=k\pi)=\cos z|_{z=k\pi}=\pm1\neq0$$

知　$z=k\pi(k=0,\pm1,\pm2)$ 是 $f(z)$ 的一级零点.

$\sin z=\sin(z-1+1)=\sin(z-1)\cos1+\cos(z-1)\sin1$

课堂练习 求 $f(z)=z^5(z^2+1)^2$ 的零点及级数 .

答案 $z=0$ 是五级零点，$z=\pm i$ 是二级零点.

3.零点与极点的关系

定理5.1.6 如果z_0是$f(z)$的m级极点，那末z_0就是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的m阶零点. 反过来也成立.

（充要条件）

证 如果z_0是$f(z)$的m级极点，则有

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z) \qquad (g(z_0)\neq 0)$$

当$z\neq z_0$时，$\dfrac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\dfrac{1}{g(z)}=(z-z_0)^m h(z)$

函数$h(z_0)$在z_0解析且$h(z_0)\neq 0$.

由于 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0$, 只要令 $\dfrac{1}{f(z_0)}=0$,

那末 z_0 就是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点.

反之,如果z_0是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点,

那末$\dfrac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\varphi(z)$, 解析且 $\psi(z_0)\neq 0$

当 $z\neq z_0$时, $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}\psi(z)$, $\boxed{\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}}$

所以 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点.

推论1

若点 z_0为函数 $f_k(z)$ 的 m_k 阶零点(k=1,2)，则z_0为函数 $f_1(z)f_2(z)$ 的 m_1+m_2 阶零点；当 $m_1<m_2$ 时，z_0为函数 $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ 的 m_2-m_1 级极点。

推论2(L'Hospital法则)

设函数 $f_k(z)$不恒为零，若z_0为函数 $f_1(z)$ 和$f_2(z)$的零点(极点)，则当$z\to z_0$时，函数 $\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ 的极限一定存在或为 ∞，且有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f_1(z)}{f_2(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f_1'(z)}{f_2'(z)}$$ 洛必达法则

注意： 若函数 $g(z)$ 在点z_0解析， $g(z)\neq 0$，则当z_0为函数$f(z)$的m阶零点或 m级极点时， z_0也分别是函数$f(z)g(z)$ 的m阶零点或m级极点。

此定理为判断函数的极点提供了一个较简单的方法

例8 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 有些什么奇点, 如果是极点, 指出它的级.

解 函数的奇点是使 $\sin z = 0$ 的点,

这些奇点是 $z = k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$.是孤立奇点.

因为 $(\sin z)'\big|_{z=k\pi} = \cos z\big|_{z=k\pi} = (-1)^k \neq 0$,

所以 $z = k\pi$ 是 $\sin z$ 的一级零点, 即 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的一级极点.

例9. 求下列函数孤立奇点的类型，并指出极点级数

(1) $f_2(z)=\sin z/\left[(z-1)^2(z+1)^3\right]$

解： 显然z=1和 z=-1 是函数$f_2(z)$的孤立奇点，

分别取 $\varphi_2(z)=\dfrac{\sin z}{(z+1)^3}$ 和 $\varphi_2(z)=\dfrac{\sin z}{(z-1)^2}$

则z=1和 z=-1分别是函数$f_2(z)$的二级极点和三级极点。

例9. 求下列函数孤立奇点的类型，并指出极点级数

(2) $$f_4(z)=\frac{e^z}{z(e^z-1)}$$

解： 点 $z_0=0$ 为 $f(z)=z$ 的一阶零点;

函数 e^z-1的零点为 $z_k=2k\pi i$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$，$(e^z-1)'=e^z$ 在这些点处不为零，由定理5.1.5，这些点为函数一阶零点。

由推论1，点 $z_0=0$为函数 $z(e^z-1)$ 的二阶零点;

又由定理5.1.6，它为$f_4(z)$的二级极点，而$z_k=2k\pi i$ $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$为 $f_4(z)$ 的一级极点。

例10 求$f(z)=\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$的奇点，如果是极点指出它的级

解 显然，$z=\pm i$ 是$(1+z^2)$的一级零点

$$\because e^{\pi z}+1=0, \quad \text{即 } e^{\pi z}=-1$$

$$\therefore \pi z=Ln(-1)=i(\pi+2k\pi)=(2k+1)\pi i$$

故奇点为：$z_k=(2k+1)i \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$$\because (1+e^{\pi z})'\Big|_{z=i(2k+1)}=\pi e^{\pi z}\Big|_{z=i(2k+1)}$$

$$=\pi[\cos\pi(2k+1)+i\sin\pi(2k+1)]=-\pi\neq 0$$

$\therefore z_k=i(2k+1) \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是$1+e^{\pi z}$的一级零点

综合 $z=\pm i$为$f(z)$的二级极点;

$z_k = i(2k+1) \quad (k=1,\pm 2,\cdots)$为$f(z)$的一级极点.

练习：考察下列函数的孤立奇点，奇点类型；如果是极点，指出它的级数

$$(1)\ f(z)=\frac{1}{z^2(e^z-1)}$$

$z=0$ 三阶零点

$z_k=2k\pi i\ \ (k=\pm1,\pm2,\ldots)$ 一阶零点

$$(2)\ f(z)=\frac{\ln(1+z)}{z}$$

可去奇点

$$(3)\ f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)^2}$$

$$\frac{1}{z(z+i)^2(z-i)^2}$$

$$(4)\ f(z)=\frac{\sin z}{z^3}$$

$z=0$ 二级极点

$$(5)\ f(z)=\frac{1}{z^3-z^2-z+1}$$

$$\boxed{\frac{1}{(z+1)(z-1)^2},}$$

$$(6)\ f(z)=\frac{1}{z-\sin z}$$

z=0 三级级点

$$(7)\ f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$$

极限不存在，z=1本性奇点

$$(8)\ f(z)=\frac{(z-1)^2(z-2)^2}{(\sin \pi z)^3}$$

z=k，k≠1且k≠2的整数

——3级极点

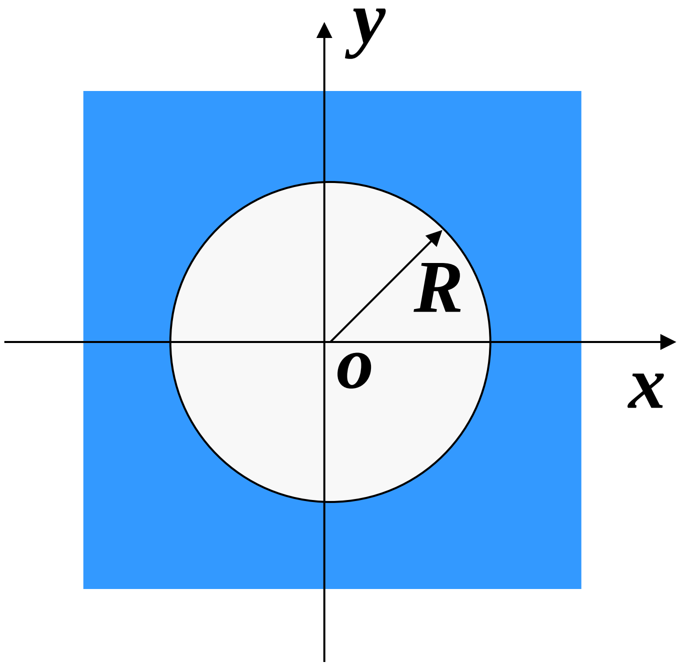
z=1，或z=2时——1级极点

三、函数在无穷远点的性态

1. 定义

如果函数 $f(z)$在无穷远点 $z=\infty$的**去心邻域**

$R<|z|<+\infty$ 内解析, 则称点∞为$f(z)$的孤立奇点.



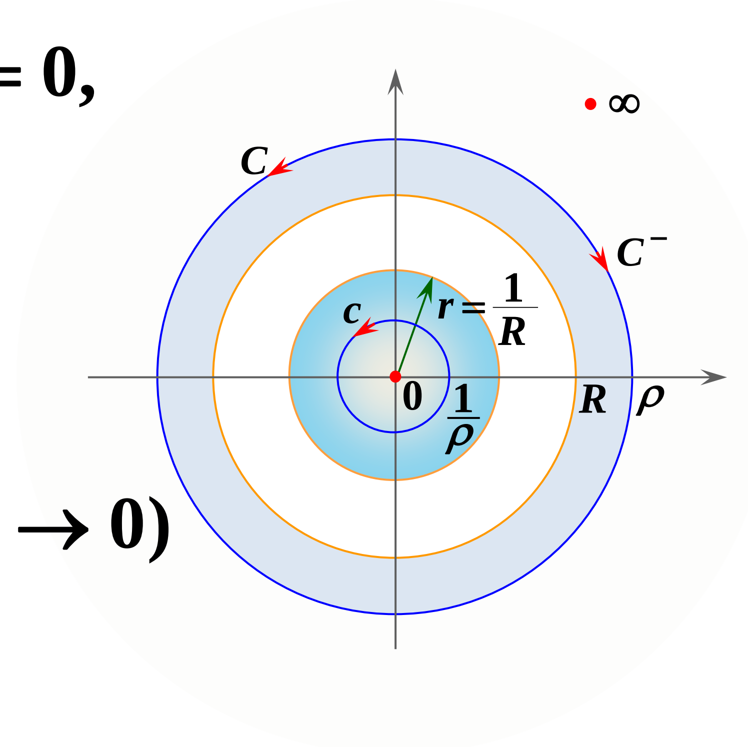
令变换 $t = \dfrac{1}{z}$:则 $f(z) = f\left(\dfrac{1}{t}\right) = \varphi(t)$, 规定此变换将:

$$z = \infty \xrightarrow{\text{映射为}} t = 0,$$

扩充 z 平面 $\xrightarrow{\text{映射为}}$ 扩充 t 平面

$$\{z_n\}\,(z_n \to \infty) \xrightarrow{\text{映射为}} \left\{t_n = \frac{1}{z_n}\right\}(t_n \to 0)$$

$$R < |z| < +\infty \xrightarrow{\text{映射为}} 0 < |t| < \frac{1}{R}$$



因此,

函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的性态可由

函数 $\varphi(t)$在原点 $t=0$ 的性态来刻画。

结论:

在去心邻域 $R < |z| < +\infty$ 内对函数 $f(z)$ 的研究

在去心邻域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 内对函数 $\varphi(t)$ 的研究

因为 $\varphi(t)$ 在去心邻域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 内是解析的,

所以 $t = 0$ 是 $\varphi(t)$ 的孤立奇点.

规定: 如果 t=0 是 $\varphi(t)$ 的可去奇点、m级级点或本性奇点, 那末就称点 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点、m级级点或本性奇点 .

2.判别方法:

判别法1(利用洛朗级数的特点)

如果 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内的洛朗级数中:

$$\varphi(\xi)=\cdots+a_{-N}\xi^{-N}+\cdots a_{-1}\xi^{-1}+a_0+a_1\xi+\cdots,$$

$$f(z)=\cdots+b_N z^N+\cdots b_1 z+b_0+b_{-1}z^{-1}+\cdots,$$

1)不含正幂项; $\xrightarrow{z=\infty}$ 可去奇点;

2)含有有限多的正幂项且 z^m 为最高正幂; $f(z)=z^m\psi(z)$; $\xrightarrow{z=\infty}$ m 级极点;

3)含有无穷多的正幂项; $\xrightarrow{z=\infty}$ 本性奇点.

判别法2：(利用极限特点)

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z)$

1)存在且为有限值； $\xrightarrow{z=\infty}$ 可去奇点；

2)无穷大; $\xrightarrow{z=\infty}$ m级极点；

3)不存在且不为无穷大； $\xrightarrow{z=\infty}$ 本性奇点.

例10 (1)函数 $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$ 在圆环域 $1<|z|<+\infty$

内的洛朗展开式为:

$$f(z)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{z}}=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{z^n}+\cdots$$

不含正幂项

所以 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点 .

(2)函数 $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ 含有正幂项且 z 为最高正

幂项,所以$z=\infty$是 $f(z)$的 1级极点.

(3)函数 $\sin z$ 的展开式:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

含有无穷多的正幂项

所以 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点.

课堂练习

说出函数 $f(z) = z + e^{\frac{1}{z}}$ 的奇点及其类型.

答案

$z = \infty$是一级极点, $z = 0$是本性奇点.

例11 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内

有些什么类型的奇点? 如果是极点, 指出它的级.

解 函数 $f(z)$ 除点 $z=0,\pm1,\pm2\cdots$ 外,

在 $|z|<+\infty$ 内解析.

因 $(\sin\pi z)'=\cos\pi z$ 在 $z=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 处均不为零.

所以这些点都是 $\sin\pi z$ 的一级零点,

故这些点中除1, -1, 2外, 都是 $f(z)$ 的三级极点.

因 $z^2-1=(z-1)(z+1)$，以1与-1为一级零点，

所以 **1与-1是 $f(z)$的2级极点.**

当$z=2$时，

$$因为 \lim_{z\to 2} f(z) = \lim_{z\to 2}\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin \pi z)^3}$$

$$=\frac{3}{\pi^3},$$

那末 $z=2$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

当$z=\infty$时， 因为$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\dfrac{(1-\zeta^2)(1-2\zeta)^3}{\zeta^5\sin^3\frac{\pi}{\zeta}}$,

$\zeta=0,\zeta_n=\dfrac{1}{n}$使分母为零， $\zeta_n=\dfrac{1}{n}$为$f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$的极点，

当$n\to\infty$时， $\zeta_n\to 0$,

故$\zeta=0$不是$f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$的孤立奇点，

所以 $z=\infty$ 不是 $f(z)$的孤立奇点.

思考题

确定函数$f(z)=\dfrac{1}{z^3(e^{z^3}-1)}$的孤立奇点的类型.

思考题答案

$z=0$是分母的6级零点，也即是函数 $f(z)$的6级极点.

$z=\sqrt[3]{2k\pi}e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}i}(k=1,2)$是分母的一级零点，

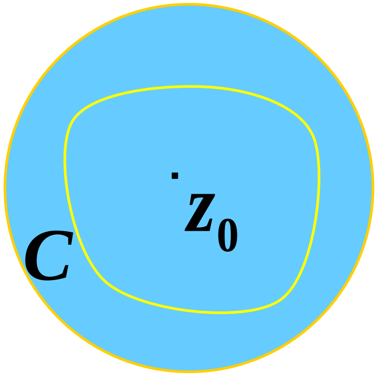
是函数的1级极点

§5-2 留数

- 1. 留数定义及计算
- 2. 留数定理
- 3. 留数在定积分计算中的应用

一、留数定义及计算

1. 留数定义



z_0为$f(z)$的一个孤立奇点;

函数$f(z)$在z_0去心邻域D: $0 < |z - z_0| < R$

解析，函数$f(z)$孤立奇点z_0的留数定义为:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

记作 $\mathrm{Res}[f(z), z_0]$.

其中，D内包含z_0的任一条正向简单闭曲线C.

一、留数定义及计算

1. 留数定义

$$\oint_c f(z)dz = \begin{cases} 0 & f(z)\text{在}c\text{所围成的区域内解析} \\ \text{未必为}0 & c\text{所围成的区域内含有}f(z)\text{的奇点} \end{cases}$$

设$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n, 0<|z-z_0|<r$

(z_0是$f(z)$的孤立奇点，c包含z_0在其内部)

对上式两边沿简单闭曲线c逐项积分得：

$$\oint_c f(z)dz = c_{-1}\oint_c \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i c_{-1}$$

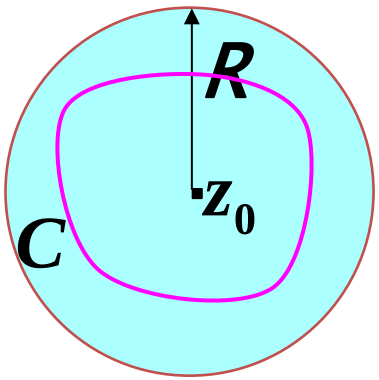
定义　设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点， $f(z)$ 在 z_0 邻域内的洛朗级数中**负幂次项** $(z-z_0)^{-1}$ **的系数** c_{-1} 称为$f(z)$ 在 z_0 的留数，记作 $\mathrm{Res}\,[f(z), z_0]$ **或** $\mathrm{Res}\ f(z_0)$.

由留数定义， $\mathrm{Res}\,[f(z), z_0] = c_{-1}$　　(1)

故　$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz \qquad (2)$$

计算留数 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$

设 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 则存在 $R>0$,



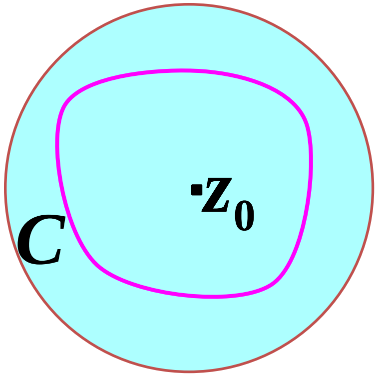
使得 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内解析.

$f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内Laurent级数为

$$f(z)=\cdots+c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+\cdots+c_0$$

$$+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots.$$

在 $0<|z-z_0|<R$ 内取分段光滑正向简单曲线 C,



曲线C包含z_0在其内部. 考虑积分

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

根据复合闭路定理,积分与曲线C的选取无关

$$=\cdots+\underbrace{c_{-n}\oint_C (z-z_0)^{-n}\mathrm{d}z}_{0}+\cdots+\underbrace{c_{-1}\oint_C (z-z_0)^{-1}\mathrm{d}z}_{2\pi i}+$$

$$+\underbrace{\oint_C c_0\mathrm{d}z}+\underbrace{\oint_C c_1(z-z_0)\mathrm{d}z}+\cdots+\underbrace{\oint_C c_n(z-z_0)^n\mathrm{d}z}+\cdots$$

0 Cauchy积分定理

$$=2\pi i c_{-1},$$

Laurent级数中负幂项c

$$\oint_{|z-z_0|=r}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi i, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

即 $c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}[f(z), z_0].$

函数 $f(z)$在孤立奇点z_0点的留数即是其在点 z_0

的去心领域内Laurent级数-1次幂项的系数.

二、留数的计算规则

一般求 Res $[f(z), z_0]$ 是采用将 $f(z)$ 在 z_0 邻域内展开成洛朗级数求系数 c_{-1} 的方法，但如果能先知道奇点的类型，对求留数更为有利.

（1）若z_0为函数$f(z)$的可去奇点，则它在点z_0的留数为零。

$$c_{-1}= \operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right]=0$$

当z_0为$f(z)$=g(z-z_0) 的孤立奇点时，若 g(ς) 为偶函数，则$f(z)$在点z_0的去心邻域内Laurent级数只含z-z_0的偶次幂，其奇次幂系数都为0，从而得知。

(2)如果 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则需将 $f(z)$ 展开成Laurent级数求 c_{-1}.

注 在具体展开的时候，并不需要写出“完整”的洛朗级数，只需将其中负一次幂的系数 a_{-1} 求出来就可以了。

(3)如果 z_0 为 $f(z)$ 的极点，则有如下计算规则

规则1° 若 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点，则有

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

规则2° 若z_0为$f(z)$ 的m级极点，则对任意整数

$n \geq m$ 有

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)]$$

说明 将**函数的零阶导数**看作它本身，规则1°可看作规则2°当$n=m=1$时的特殊情形，且规则2°可取$m=1$.

证明 先证规则2°，由于z_0为$f(z)$的m级极点，因此可设在$0<|z-z_0|<\rho$内有

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\cdots$$

于是对$n\geq m$ 得

$$(z-z_0)^n f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{n-m}+\cdots c_{-1}(z-z_0)^{n-1}+c_0(z-z_0)^n+\cdots$$

$$(0<|z-z_0|<\rho)$$

Laurent级数在其收敛环域内逐项微分得

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]=(n-1)!c_{-1}+n!c_0(z-z_0)+\cdots$$

令$z\to z_0$，规则2°成立；令$n=m=1$，规则1°成立

规则3 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}, P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 z_0 都解析，

如果 $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$，那末 z_0 为

$f(z)$ 的一级极点，且有

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

证　因为 $Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$

所以 z_0 为 $Q(z)$ 的一阶零点,

z_0 为 $\dfrac{1}{Q(z)}$ 的一级极点， $P(z_0)\neq 0$

所以 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点。

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

典型例题

例1 求$f(z)=\dfrac{e^z}{z^n}$在 $z=0$ 的留数.

解 因为$z=0$是$f(z)$的n级极点

所以 $$\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^n},0\right]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left(z^n\cdot\frac{e^z}{z^n}\right)$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}.$$

例2 求下列函数在奇点处的留数。

$$(1)\ f_1(z)=\frac{1-\cos z}{z^2},\qquad (2)\ f_2(z)=\frac{1}{z(z-1)}.$$

解 (1) $z=0$ 是 $f_1(z)$ 的可去奇点，

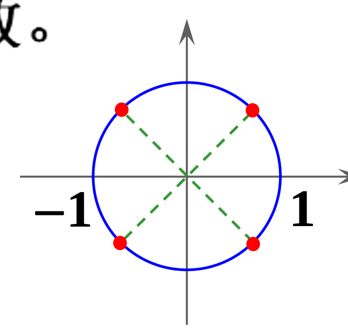
$$\mathrm{Res}[f_1(z),0]=0.$$

(2) $z=0$ 和 $z=1$ 均为 $f_2(z)$ 的一阶极点，

$$\mathrm{Res}[f_2(z),0]=\lim_{z\to 0}[z f_1(z)]=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-1}=-1,$$

$$\mathrm{Res}[f_2(z),1]=\lim_{z\to 1}[(z-1)f_2(z)]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z}=1.$$

例3 求函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+1}$ 在奇点处的留数。



解 函数 $f(z)$ 有四个简单极点，

$$z_1=e^{\frac{\pi}{4}i},\quad z_2=e^{-\frac{\pi}{4}i},\quad z_3=e^{\frac{3\pi}{4}i},\quad z_4=e^{-\frac{3\pi}{4}i},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1]=\left.\frac{z^2}{(z^4+1)'}\right|_{z=z_1}=\left.\frac{1}{4z}\right|_{z=z_1}=\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

同理 $$\mathrm{Res}[f(z),z_2]=\left.\frac{1}{4z}\right|_{z=z_2}=\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{4}i},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_3]=\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i},\quad \mathrm{Res}[f(z),z_4]=\frac{1}{4}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

例4 求函数 $f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}$ 在奇点处的留数。

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内洛朗展开， 有

$$f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}=z^2\cdot\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\cdots\right)$$

$$=z^2-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!z^2}-\frac{1}{6!z^4}+\cdots,$$

$$\Rightarrow\quad \operatorname{Res}[f(z),0]=0.$$

例5 求 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在z=0的留数.

分析 $P(0)=P'(0)=P''(0)=0,\quad P'''(0)\neq 0.$

$z=0$是$z-\sin z$的三阶零点

所以$z=0$是$f(z)$的三级极点，由规则2得

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[z^3\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right].$$

计算较麻烦.

解 **方法一** 利用洛朗展开式求留数

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域展开，得

$$f(z)=\frac{1}{z^6}\cdot\left[z-\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3!z^3}-\frac{1}{5!z}+\frac{1}{7!}z-\cdots,$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{5!}.$$

即 $\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=c_{-1}=-\frac{1}{5!}.$

解 方法二 利用极点的留数计算法则求解

由于 $z=0$ 是$f(z)$ 在 三级极点，

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}[z^3 f(z)]''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right)''$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\frac{(z^2-12)\sin z+6z\cos z+6z}{z^5}$$

(罗比达法则) $$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\frac{z^2\cos z+4z\sin z-2\cos z}{5!}=-\frac{1}{5!}.$$

计算较麻烦.

解 方法二 利用极点的留数计算法则求解

- 若 “不幸” 将 $z=0$ 判断成了 $f(z)$ 的六阶极点，

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}^5 z}[z^6 f(z)]$$

$$=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}^5 z}(z-\sin z)=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 1}(-\cos z)=-\frac{1}{5!}.$$

巧合?

(非也!)

注 (1) 此类函数求留数，可考虑利用洛朗展式。

(2) 若此类函数求闭路积分，则可考虑利用高阶导公式，而不一定非得使用下面即将介绍的留数定理。

例6．求下列函数在指定点处的留数

(1) $f_1(z)=(e^z-1)/z^5 \quad z_0=0$

解：$z_0=0$ 是函数 e^z-1 的一阶零点，

又是函数z的五阶零点.

于是它是 $f_1(z)$ 的**四级极点**，

可用规则2 计算其留数，其中 $m=4$，为了计算简便

应当取其中 $n=5$，这时有

$$\mathrm{Res}[f_1(z),0]=\frac{1}{4!}\lim_{z\to 0}\frac{d^4}{dz^4}(e^z-1)=\frac{1}{4!}$$

例6．求下列函数在指定点处的留数

(1) $f_1(z)=(e^z-1)/z^5 \quad z_0=0$

另解: $f_1(z)$ 在点 $z_0=0$ 的去心邻域 $0<|z|<\infty$ 内的Laurent级数为

$$\frac{e^z-1}{z^5}=\frac{1}{z^5}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots-1\right)$$

$$=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{2!z^3}+\frac{1}{3!z^2}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!}+\frac{z}{6!}+\cdots,$$

其中 $n=4$ 的项的系数为 $c_{-1}=1/4!$,从而也有

$$\mathrm{Res}[f_1(z),0]=c_{-1}=1/4!$$

说明：1. 在实际计算中应灵活运用计算规则.

如 z_0 为m 级极点，当 m 较大而导数又难以计算时，可直接展开Laurent级数求 c_{-1} 来计算留数 .

2. 在应用规则2时，为了计算方便一般要将m 取得比实际的级数高. 因为有时把m 取得比实际的级数高能够使得计算方便. 如上例取 $m=6$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}z^5}\left[z^6\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right]=-\frac{1}{5!}.$$

例6 (2) $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(z+1)^n}$ 在z= -1处的留数.

解 显然z= -1是$f(z)$的n阶极点，所以

$$\operatorname{Res}\left[f(z),-1\right]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\left[z^{2n}\right]^{(n-1)}$$

$$=\lim_{z\to-1}\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+2)}{(n-1)!}z^{2n-n+1}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+2)}{(n-1)!}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}.$$

(3) $f_4(z)=\sin(1/z)$ $z_0=0$

解： $f_4(z)$**在点**$z_0=0$**的去心邻域** $0<|z|<\infty$**内的Laurent级数为**

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{-2n-1}}{(2n+1)!}$$

显然$z_0=0$ **为它的本性奇点,其中** $n=0$ **的项的系数为**$c_{-1}=1$**,于是得**

$$\mathrm{Res}[\sin 1/z,0]=c_{-1}=1$$

例7 求 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)(z-2)}$ 和 $g(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$

在孤立奇点处的留数.

解 易知z=1和z=2都是 $f(z)$的1阶极点，故

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}[(z-1)f(z)]=\lim_{z\to1}\frac{e^z}{z-2}=-e,$$

$$\mathrm{Res}[f(z),2]=\lim_{z\to2}[(z-2)f(z)]=\lim_{z\to2}\frac{e^z}{z-1}=e^2.$$

由于 z=0是$g(z)$的1阶极点，于是

$$\mathrm{Res}[g(z),0]=\lim_{z\to0}[zg(z)]=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=1.$$

例8 求 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ 在孤立奇点处的留数.

解 显然 $P(z)=e^{iz}$ 和 $Q(z)=1+z^2$ 都在 $z=\pm i$ 处解析，且

$$P(\pm i)=e^{\mp 1}\neq 0,\ \ Q(\pm i)=0,\ \ Q'(\pm i)=\pm 2i\neq 0.$$

所以 $z=\pm i$ 是 $f(z)$的1阶极点，并且

$$\operatorname{Res}[f(z),\ i]=\left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=i}=-\frac{i}{2e},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-i]=\left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=-i}=\frac{e}{2}i.$$

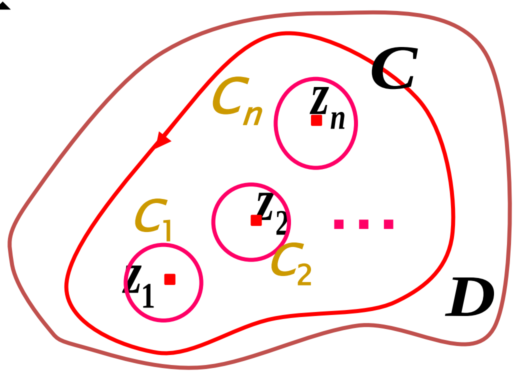
三、留数定理

留数定理（定理5.2.2） 设函数$f(z)$在区域D内除有限个孤立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$外处处解析, C是D内包含所有奇点在其内部的分段光滑正向简单闭曲线, 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right].$$

根据留数定理, 函数$f(z)$在闭曲线上的积分可归结为函数在曲线内部各孤立奇点处留数的计算

证明　分别以 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为中心，作半径充分小的、互不重叠的正向圆周 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，使得它们中的每个都在其余的外部，而都在C的内部.



根据复合闭路定理，

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

再由留数的定义，即得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

例8 计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$，$C$为正向圆周: $|z|=2.$

解 被积函数 $f(z)=\frac{e^z}{[z(z-1)^2]}$的奇点 $z=0$ （一级极点）和 $z=1$（二级极点）都在圆 $|z|=2$ 的内部,并且

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^z}{z(z-1)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{z(z-1)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{e^z}{z}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2} = 0,$$

所以 $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$

$$= 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),0] + \mathrm{Res}[f(z),1]\}$$

$$= 2\pi i(1+0)$$

$$= 2\pi i.$$

例9. 计算积分 $I = \oint\limits_{|z|=2} \dfrac{e^{\sin z} dz}{z^2(z^2+1)}$

解: $f_2(z) = e^{\sin z} / [z^2(z^2+1)]$ 在圆 $|z| = 2$ 的内部有一个二级极点 $z = 0$ 和两个一级极点 $z = \pm i$，

于是利用留数的计算规则 2° 和 1° 得

$$\operatorname{Res}[f_2(z),0] = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{\sin z}}{z^2+1}\right)'$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{e^{\sin z}}{z^2+1}\left(\cos z - \frac{2z}{z^2+1}\right) = 1$$

$$\operatorname{Res}[f_2(z),\mathrm{i}] = \lim_{z\to \mathrm{i}}\left[(z-\mathrm{i})\frac{e^{\sin z}}{z^2(z^2+1)}\right] = \frac{\mathrm{i}}{2}e^{\mathrm{ish}1}$$

$$\mathrm{Res}[f_2(z),-\mathrm{i}]=\lim_{z\to-\mathrm{i}}[(z+\mathrm{i})\frac{e^{\sin z}}{z^2(z^2+1)}]$$

$$=\lim_{z\to-\mathrm{i}}[\frac{e^{\sin z}}{z^2(z-i)}]=\frac{1}{2\mathrm{i}}e^{\sin(-\mathrm{i})}=\frac{-\mathrm{i}}{2}e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{sh}1}$$

最后由留数定理得其积分值为

$$\mathrm{I}=2\pi i[1-\frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\,\mathrm{sh}1}-e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{sh}1})]$$

$$=2\pi i[1-\sin(\mathrm{sh}1)]$$

例10 计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z$，$C$为正向圆周：$|z|=2$.

解 被积函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 有四个一级极点 $\pm 1, \pm i$ 都

在圆周 $|z|=2$ 的内部，所以

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]$$

$$+\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}$$

由规则3 $\quad \frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{z}{4z^3}=\frac{1}{4z^2},$

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right\}=0.$$

例11 计算积分 $\oint_C \frac{z-2}{z^3(z-1)(z-3)}dz,$

C为正向圆周：$|z|=2.$

解 被积函数 $f(z)=\frac{z-2}{z^3(z-1)(z-3)}$ 除 $z=0,$

$1,3$ 点外，无其他奇点， $z=3$ 在圆外。

所以 $\oint_C \frac{z-2}{z^3(z-1)(z-3)}dz$

$$=2\pi i\{\text{Res}[f(z),0]+\text{Res}[f(z),1]\}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}[(z-1)\frac{z-2}{z^3(z-1)(z-3)}]=\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}[\frac{z-2}{(z-1)(z-3)}]''$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{z\to 0}[\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-3}]''$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}[\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{(z-3)^3}]=-\frac{14}{27}$$

因此 $$\oint_C \frac{z-2}{z^3(z-1)(z-3)}dz=2\pi i(-\frac{14}{27}+\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{27}i$$

例12 计算 $I=\oint_C \dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 被积函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有两个奇点：

可去奇点 $z=0$，一阶极点 $z=1$，

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=0.$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{\sin^2 z}{z^2}=\sin^2 1.$$

$$I=2\pi i\big(\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\big)=2\pi i\sin^2 1.$$

例13 计算 $I=\oint_C \dfrac{e^z}{\cos \pi z}dz$，其中 C 为 $|z|=1$.

解 被积函数 $f(z)$的奇点为 $z_k=k-\dfrac{1}{2}$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$,

但在 $|z|<1$内只有两个简单级点: $z_0=-\dfrac{1}{2}$, $z_1=\dfrac{1}{2}$,

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\left.\frac{e^z}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{e^z}{-\pi \sin \pi z}\right|_{z=z_0}=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\left.\frac{e^z}{-\pi \sin \pi z}\right|_{z=z_1}=-\frac{1}{\pi}e^{\frac{1}{2}},$$

$$I=2\pi i\left(\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\pi}e^{\frac{1}{2}}\right)=-4i\operatorname{sh}\frac{1}{2}.$$

例14 计算 $I=\oint_C \dfrac{e^{\cos z}}{\sqrt{2}-2\sin z}\,dz$，其中 C 为 $|z|=\pi$.

解 被积函数 $f(z)$ 在 $|z|<\pi$ 内有两个奇点：

简单级点 $z_1=\dfrac{\pi}{4}$, $z_2=\dfrac{3\pi}{4}$,

$$\operatorname{Res}[f(z),z_1]=\frac{e^{\cos z}}{(\sqrt{2}-2\sin z)'}\bigg|_{z=z_1}=\frac{e^{\cos z}}{-2\cos z}\bigg|_{z=z_1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{e^{\cos z}}{-2\cos z}\bigg|_{z=z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$I=2\pi i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=-2\sqrt{2}\pi i\,\mathrm{sh}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例15 计算 $I=\oint_C \sin\frac{z}{z-1}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 令 $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$，$z=1$ 为 $f(z)$ 的本性奇点，

将 $f(z)$ 在 $0<|z-1|<+\infty$ 内展开为洛朗级数：

$$f(z)=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=\sin 1\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\cdots\right)$$

$$+\cos 1\cdot\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots\right),$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{Res}[f(z),1]=\cos 1,\quad\Rightarrow\quad I=2\pi i\cos 1.$$

例16 计算 $I=\oint_C \frac{1}{z^{101}(1-z^2)}\mathrm{d}z$，其中 C 为 $|z|=0.5$.

解 令 $f(z)=\frac{1}{z^{101}(1-z^2)}$， $z=0$ 为 $f(z)$ 的 101 阶极点。

将 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内展开为洛朗级数：

$$f(z)=\frac{1}{z^{101}}\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}=\frac{1}{z^{101}}+\frac{1}{z^{99}}+\cdots+\frac{1}{z}+z+z^2+\cdots,$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Res}[f(z),0]=1,$$

$$\Rightarrow \quad I=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0]=2\pi i.$$

例17 计算 $I=\oint_C \dfrac{e^z-1}{z^3}dz$，其中 C 为 $|z|=1$.

解 方法一 <u>利用极点的留数计算法则求解</u>

$z=0$ 为被积函数 $f(z)$ 的二级极点，

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{e^z-1}{z^3}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{ze^z-e^z+1}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$I=2\pi i\operatorname{Res}[f(z),0]=\pi i.$$

例17 计算 $I=\oint_C \dfrac{e^z-1}{z^3}dz$，其中 C 为 $|z|=1$.

解 方法二 利用高阶导数公式求解

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$$

$$I=2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}(e^z-1)'' \quad =\pi i.$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

计算 $I=\oint_C \dfrac{e^z-1}{z^3}dz$，其中 C 为 $|z|=1$.

解 **方法三** 利用洛朗展式求解

将被积函数 $f(z)$在 $z=0$的去心邻域展开，

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\cdots\right)-1\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z+\cdots,$$

$$\Rightarrow \quad \text{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \quad I=2\pi i\,\text{Res}[f(z),0]=\pi i.$$

四、无穷远点的留数

1. 定义 设函数 $f(z)$在圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内解析，C为圆环域内绕原点的任何一条正向简单闭曲线

那末积分 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$ 的值与C无关，则称此定值为 $f(z)$在 ∞ 的留数. 记作

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z$$

也可定义为 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}.$

这就是说，$f(z)$在∞点的留数等于它在∞点的去心邻域$R<|z|<+\infty$内洛朗展开式中 z^{-1} 的系数变号.

注：当∞为可去奇点时，$\mathrm{Res}[f(z),\infty]$不一定为零.

例如 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$，∞为可去奇点。

$f(z)$在$1<|z|<+\infty$内展开为Lauren级数：

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=1$$

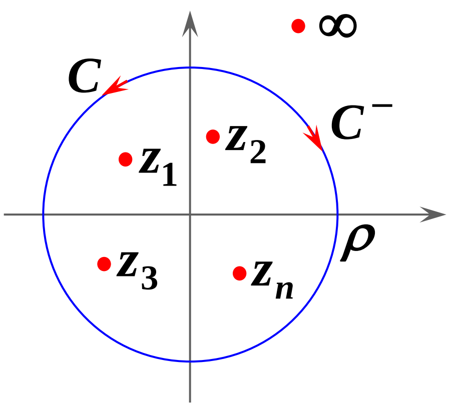
再如 $f(z)=\dfrac{1}{z}$，∞为可去奇点，$\Rightarrow \mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=-1$

留数的推广定理

定理5.2.3 如果 $f(z)$在扩充复平面内只有有限个孤立奇点,那末 $f(z)$在所有各奇点(包括∞点)的留数总和等于零.

证：除∞点外, 设$f(z)$的有限个奇点为$z_k(k=1,2,\ldots,n)$. 且C为一条绕原点的并将$z_k(k=1,2,\ldots,n)$包含在它内部的正向简单闭曲线, 则根据留数定理与在无穷远点的留数定义, 有

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\,\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$



定理5.2.4 $\boxed{Res[f(z),\infty] = -Res[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]}$

在无穷远点的留数定义中，取正向简单闭曲线C为半径足够大的正向圆周： $|z| = \rho$

令$z = \frac{1}{\xi}$，并设$z=\rho e^{i\theta}$， $\xi=\rho e^{i\varphi}$,

那么 $\rho = \frac{1}{r}$， $\theta=-\varphi$，$d\theta=-d\varphi$， 于是有

$$Res[f(z),\infty] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^{-1}} f(z)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{-2\pi} f(\rho e^{i\theta})\,\rho i e^{i\theta} d\theta$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)\frac{i}{re^{i\varphi}}d\varphi$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)\frac{1}{(re^{i\varphi})^2}d(re^{i\varphi})$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\frac{1}{\rho}} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}d\zeta\left(|\zeta|=\frac{1}{\rho}\text{为正向}\right).$$

$$=-Res\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]$$

(由于 $f(z)$在$\rho<|z|<+\infty$内解析，从而 $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$在$0<|\zeta|<\frac{1}{\rho}$内解析.)　　**所以定理5.2.4 成立.**

定理 若函数f(z)在环域 $R<|z|<\infty$内解析，则对包含圆|z|=R的任一条正向简单闭曲线C有

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f(\frac{1}{\varsigma})\frac{1}{\varsigma^2}, 0\right]$$

证明：设$f(z)$在所给环域 $R<|z|<\infty$ 内的Laurent级数为

$$f(z) = \cdots + c_{-3}z^{-3} + c_{-2}z^{-2} + c_{-1}z^{-1} + c_0 + c_1 z + \cdots$$

由Laurent级数展开定理，则有

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

作变换$\varsigma = 1/z$，$f(1/\varsigma)$在点$\varsigma = 0$的去心邻域 $0 < |\varsigma| < 1/R$ 内解析，且在该邻域内有

$$f(1/\varsigma) = \cdots + c_{-3}\varsigma^{3} + c_{-2}\varsigma^{2} + c_{-1}\varsigma^{1} + c_{0} + c_{1}\varsigma^{-1} + \cdots$$

$$f(\frac{1}{\varsigma})\frac{1}{\varsigma^{2}} = \cdots + c_{-3}\varsigma + c_{-2} + c_{-1}\varsigma^{-1} + c_{0}\varsigma^{-2}\cdots$$

$$\oint_{C} f(z)dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{\varsigma}\right)\frac{1}{\varsigma^{2}}, 0 \right]$$

定理5.2.3与5.2.4提供了计算函数沿闭曲线积分的又一种方法, 在很多情况下, 比利用上一段中的方法更简便.

例 18 计算 $\mathrm{I} = \oint_{|z|=4} \dfrac{z^{15}}{(z^4+2)^3(z^2+1)^2} dz$

$|z| < 4$内有6个极点: $\pm i$(二阶), $\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k=0,1,2,3)$(三阶)

$$I = -2\pi i \mathrm{Res}[f(z), \infty] = 2\pi i Res[f(\frac{1}{z}) \cdot \frac{1}{z^2}, 0]$$

$$= -2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(1+2z^4)^3(1+z^2)^2}, 0\right] = 2\pi i$$

例19 计算下列积分,其中积分闭路取正向.

(1) $$I_1=\oint_{|z|=2}\frac{z^5\cos\frac{1}{z}}{1+z^6}dz$$

解：被积函数 $f_1(z)$ 在环域 $1<|z|<\infty$ 内解析,它的7个奇点都在圆周 $|z|=2$ 的内部,用留数定理计算非常困难，可是该积分满足定理2的条件,利用定理5.2.3得

$$I_1=\oint_{|z|=2}f_1(z)dz=2\pi i\mathrm{Res}[f_1(\frac{1}{\zeta})\frac{1}{\zeta^2},0]$$

$$=2\pi i\mathrm{Res}[\frac{\cos\zeta}{\zeta(\zeta^6+1)},0]=2\pi i\lim_{\zeta\to 0}\frac{\cos\zeta}{\zeta^6+1}=2\pi i$$

例19 计算下列积分,其中积分闭路取正向.

(2) $$I_2=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2\sin\frac{1}{z}}$$

解：被积函数$f_2(z)$在环域内$1/\pi<|z|<\infty$解析,其奇点为$z_0=0$，$z_k=1/(k\pi)$,其中$k=\pm1,\pm2,\ldots$,显然这些奇点有无穷多个,它们都在圆周$|z|=1$的内部,不能用定理1计算其积分值；可是该积分函数满足定理5.2.3条件, 由定理3得

$$I_2=\oint_{|z|=1}f_2(z)dz=2\pi i\mathrm{Res}[f_2(\frac{1}{\zeta})\frac{1}{\zeta^2},0]$$

$$=2\pi i\mathrm{Res}[\frac{1}{\sin\zeta},0]=\frac{2\pi i}{\cos 0}=2\pi i$$

（3）计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$ ，C为正向圆周:$|z|=2$.

解 $\frac{z}{z^4-1}$ 在$|z|=2$的外部除∞外无奇点，因此

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{z^{-1}}{z^{-4}-1}=\frac{z^{-3}}{z^{-4}-1}=\frac{z}{1-z^4}$$

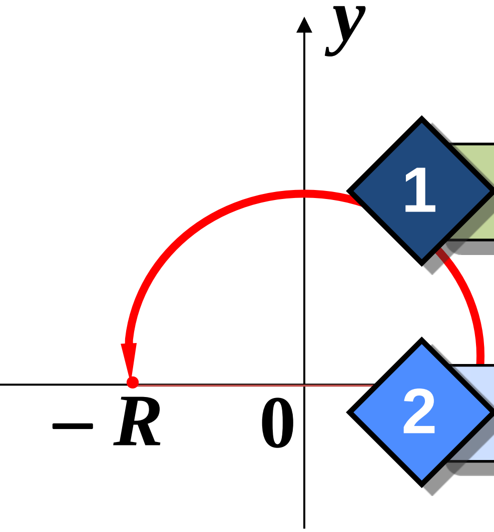
于是

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z=-2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right]=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-z^4},0\right]=0$$

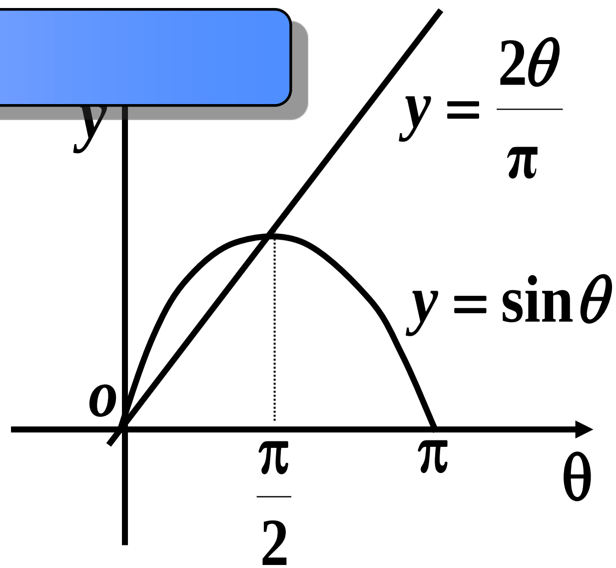
$z=0$可去奇点

§ 5-3 留数在定积分计算上的应用



1 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分

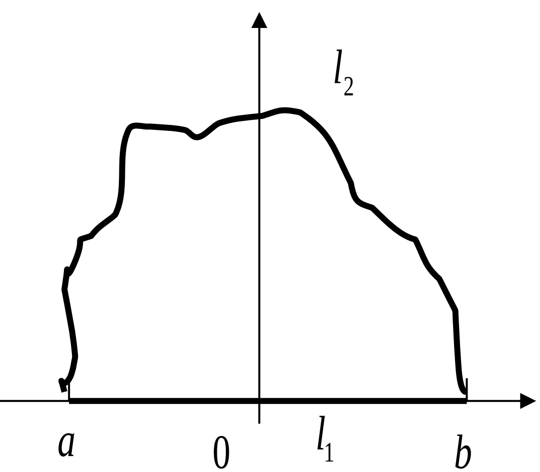
2 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 的积分



- 留数定理是复变函数的定理，若要在实变函数定积分中应用，必须将实变函数变为复变函数.这就要利用解析延拓的概念.

- 留数定理又是应用到回路积分的，要应用到定积分，就必须将定积分变为回路积分中的一部分.

如图，对于实积分 $\int_a^b f(x)dx$，变量 **x** 定义在闭区间 **[a,b]** (线段 l_1)，此区间应是回路 $l = l_1 + l_2$ 的一部分.实积分 要变为回路积分，则实函数必须解析延拓到复平面上包含回路的一个区域中,而实积分 成为回路积分的一部分：



$$\oint_l f(z)dz = \int_a^b f(x)dx + \int_{l_2} f(z)dz$$

思想方法： 把定积分化为一个复变函数沿某条封闭路线的积分

其关键是将原来的积分区间置于复平面中某个区域的边界上

两个重要工作:

1) 积分区域的转化

2) 被积函数的转化

一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分

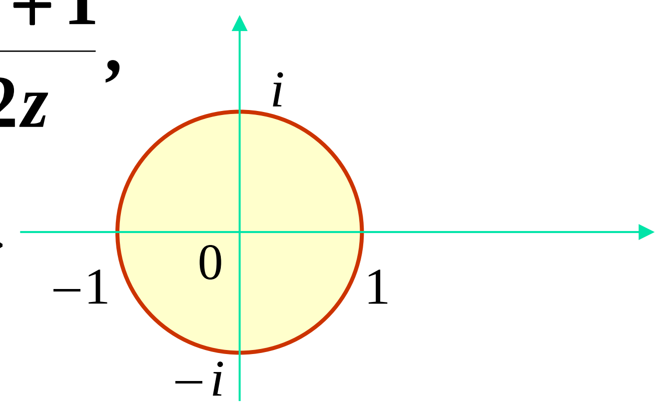
——三角函数有理式的积分

令 $z = e^{i\theta} \longrightarrow \mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta \longrightarrow \mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$,

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{z^2-1}{2iz},$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{z^2+1}{2z},$$

$\Rightarrow$



当 θ 历经变程 $[0, 2\pi]$ 时,

z 沿单位圆周 $|z| = 1$ 的正方向绕行一周.

从而积分化为沿正向单位圆周的积分

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

z的有理函数，且在单位圆周上分母不为零，满足留数定理的条件.

包围在单位圆周内的诸孤立奇点.

形如 $I_1=\int_0^{\alpha} f\left(\cos\frac{2\pi\theta}{\alpha},\sin\frac{2\pi\theta}{\alpha}\right)d\theta$ 的积分

定理1 若函数 $F(z)=\frac{1}{z}f\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)$ 在圆周 $|z|=1$ 上解析，在 $|z|<1$ 内除有限个奇点 $z_1,z_2,\ldots,z_n$ 外解析，则有

$$I_1=\alpha\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(z),z_k\right]$$

证明 令 $\varphi = 2\pi\theta/\alpha$ 则 $d\varphi = 2\pi d\theta/\alpha$，从而有

$$I_1 = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$$

其中 φ 可看作圆周|z|=1的参数方程的参数。

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\phi, \sin\phi)\, d\phi = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

则 $$I_1 = \alpha\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z), z_k]$$ 得证。

例1 计算积分 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta} \mathrm{d}\theta \quad (a>b>0)$

解　令 $z=e^{i\theta}$, 则

$$\cos\theta = \frac{z^2+1}{2z}, \qquad \mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta} \mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{a+b\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{-2i}{bz^2+2az+b} \mathrm{d}z$$

$bz^2 + 2az + b$ 在复平面上有两个零点 ：

$$z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \quad z_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

由于$a > b$，因此，$|z_1| < 1$，$|z_2| > 1$

从而，$f(z) = \dfrac{-2i}{bz^2+2az+b}$在单位圆内

只有一个一级极点 z_1;

$$\oint_{|z|=1} \frac{-2i}{bz^2+2az+b}\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left[f(z), \frac{(-a+\sqrt{a^2-b^2})}{b} \right]$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{-2i}{2bz+2a}\Bigg|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

例2 计算积分 $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\mathrm{d}\theta\ \ (a>b>0)$

解 令 $z=e^{i\theta}$, 则

$$\sin\theta=\frac{z^2-1}{2zi},\quad \cos\theta=\frac{z^2+1}{2z},\ \mathrm{d}z=ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta,$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}\cdot\frac{1}{a+b\left(\dfrac{z^2+1}{2z}\right)}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{-2iz^2(bz^2+2az+b)}\mathrm{d}z$$

$bz^2+2az+b$ 在复平面上有两个零点：

$$z_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b},\quad z_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

由于$a>b$，因此，$|z_1|<1$, $|z_2|>1$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}\mathrm{d}\theta\ \ (a>b>0)$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{-2iz^2(bz^2+2az+b)}\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2 \mathrm{d}z}{-2iz^2 b\left(z - \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\left(z - \frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)}$$

$$= 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}\left[f(z), 0\right] + \mathrm{Res}\left[f(z), \frac{(-a+\sqrt{a^2-b^2})}{b}\right] \right\}$$

$$= \frac{2a\pi}{b^2} - \frac{2\pi\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

$$= \frac{2\pi}{b^2}(a - \sqrt{a^2-b^2}).$$

例3 计算 $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x}(a>0)$.

解 $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+\frac{1-\cos 2x}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}2x}{a+\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

令 $2x=t$,

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{a+\frac{1-\cos t}{2}}=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{1-(z^2+1)/2z}{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=2i\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-2(2a+1)z+1}.$$

极点为： $z_1 = 2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1}$ (在单位圆内)

$z_2 = 2a+1+\sqrt{(2a+1)^2-1}$ (在单位圆外)

所以 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x}$

$$= 2\pi i\cdot 2i\mathrm{Res}[f(z),(2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1})].$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}.$$

例4 计算 $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}\mathrm{d}\theta\ (0<p<1)$的值.

解 由于 $0<p<1$,

$$1-2p\cos\theta+p^2=(1-p)^2+2p(1-\cos\theta)$$

在 $0\le\theta\le 2\pi$ 内不为零, 故积分有意义.

由于 $\cos 2\theta=\dfrac{1}{2}(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})=\dfrac{1}{2}(z^2+z^{-2})$,

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+z^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{1-2p\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}+p^2}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{z^2+z^{-2}}{2}\cdot\frac{1}{1-2p\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}+p^2}\cdot\frac{dz}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}dz=\oint_{|z|=1}f(z)dz.$$

被积函数的三个极点$z=0,p,\dfrac{1}{p}$,

$z=0,p$,在圆周$|z|=1$内,

且$z=0$为二级极点,$z=p$为一级极点,

所以在圆周$|z|=1$上被积函数无奇点，

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(z-pz^2-p+p^2z)4z^3-(1+z^4)(1-2pz+p^2)}{2i(z-pz^2-p+p^2z)^2}$$

$$=-\frac{1+p^2}{2ip^2},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),p]=\lim_{z\to p}\left[(z-p)\cdot\frac{1+z^4}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\right]$$

$$=\frac{1+p^4}{2ip^2(1-p^2)},$$

因此

$$I=2\pi i\left[-\frac{1+p^2}{2ip^2}+\frac{1+p^2}{2ip^2(1-p^2)}\right]=\frac{2\pi p^2}{1-p^2}.$$

例 5 计算$I=\int_0^{\alpha}\frac{1}{\left(5-3\sin\frac{2\pi\varphi}{\alpha}\right)^2}d\varphi$

解： 令$\theta=\frac{2\pi\varphi}{\alpha}\Rightarrow I=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(5-3\sin\theta)^2}d\theta$

令$z=e^{i\theta}\Rightarrow I=-\frac{2\alpha}{i\pi}\oint_{|z|=1}\frac{z}{(3z-i)^2(z-3i)^2}dz$

被积函数在$|z|<1$内只有一个二阶极点：$z=\frac{i}{3}$

$$I=\frac{2\alpha}{i\pi}2\pi i\cdot Res\left[f(z),\frac{i}{3}\right]=\frac{5}{64}\alpha$$

例6 计算积分 $I=\int_0^{\pi}\frac{\cos m\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ （m为正整数）

解 由 $\cos\theta, \cos m\theta$ **都是偶函数**

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos m\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

令 $z=e^{i\theta}$， **则** $e^{im\theta}=z^m$

$$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}, \qquad \mathrm{d}z=ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{im\theta}}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{z^m}{5-4\dfrac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{1}{iz}dz$$

$$=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z^m}{5z-2(z^2+1)}dz$$

$$=-\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z^m}{(2z-1)(z-2)}dz$$

从而，$f(z)=\dfrac{z^m}{(2z-1)(z-2)}$在单位圆内

只有一个一级极点 $z_1=\dfrac{1}{2}$;

$$-\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z^m}{(2z-1)(z-2)}dz$$

$$=-\frac{1}{i}2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{1}{2}\right]$$

$$=2\pi\cdot\frac{z^m}{4-2z}\bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{2\pi}{3\cdot 2^m}$$

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\frac{e^{im\theta}}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{3\cdot 2^m}$$

二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$ 的积分

——有理函数的无穷积分

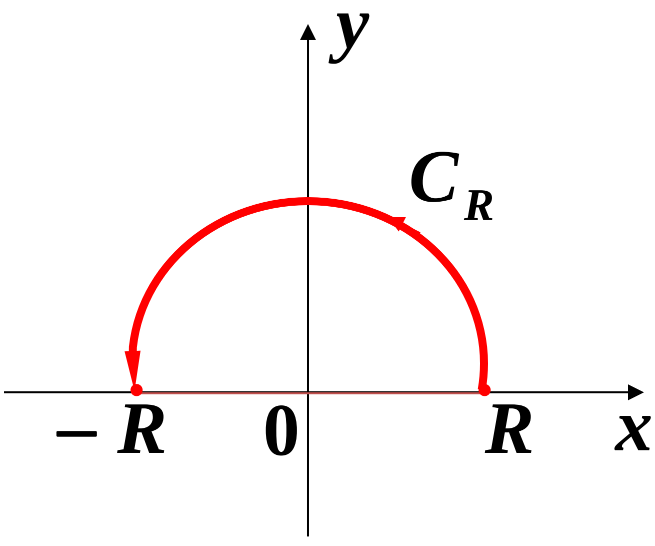
若有理函数 $R(x)$ 的分母至少比分子高两次，并且分母在实轴上无孤立奇点.

一般设 $R(z)=\dfrac{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}$, $m-n\geq 2$

分析 可先讨论 $\int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x$,

最后令 $R\to\infty$ 即可.

取R适当大, 使$R(z)$所有的在上半平面内的极点 z_k 都包在这积分路线内.



这里可补线C_R(以原点为中心 , R为半径的在上半平面的半圆周)

C_R与$[-R,R]$一起构成封闭曲线C , $R(z)$在C及其内部(除去有限孤立奇点）处处解析.

根据留数定理得 :

$$\int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum \mathrm{Res}[R(z), z_k],$$

$$|R(z)| = \frac{1}{|z|^{m-n}} \frac{|1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{|1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}$$

$$\leq \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1 + |a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{1 - |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}$$ 因为 $m - n \geq 2$,

当 $|z|$ 充分大时, 总可使 $|R(z)| \leq \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot M \leq \frac{M}{|z|^2}$

$$\left| \int_{C_R} R(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \int_{C_R} |R(z)|\,\mathrm{d}s \leq \frac{M}{R^2} \pi R$$

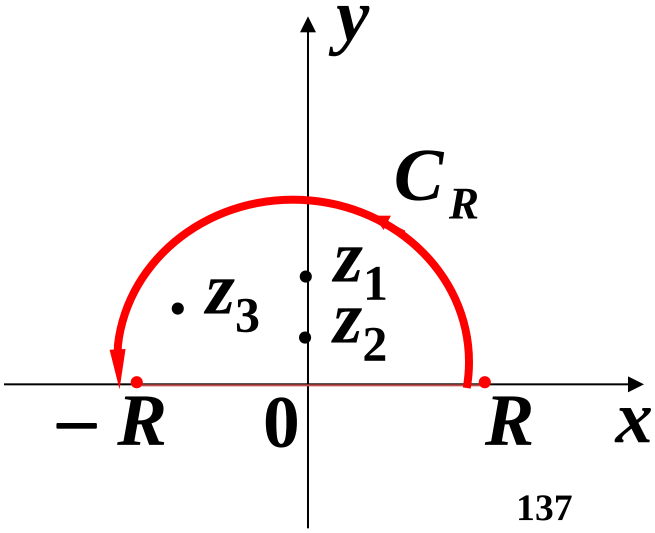
$$= \frac{M\pi}{R} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$R \to +\infty : \int_{C_R} R(z)\mathrm{d}z \to 0; \quad \int_{-R}^{R} R(z)\mathrm{d}z \to \int_{-\infty}^{\infty} R(z)\mathrm{d}z,$$

所以 $\int_{-\infty}^{\infty} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum \mathrm{Res}[R(z), z_k]$

定理2 设函数$f(z)$在实轴上解析，在上半平面除有奇点$z_1,z_2,\ldots,z_n$外解析，若存在正数M、r和$\alpha>1$，使当 $|z|\geq r$ 且 $\mathrm{Im}\, z\geq 0$ 时，$f(z)$解析 并且满足 $|f(z)|\leq M/|z|^{\alpha}$，则积分$I_2$存在且有

$$I_2=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right]$$



$$\int_{-R}^{R} R(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

1. 被积函数的转化：可取 $f(z)=R(x)$.

(当z在实轴上的区间内变动时，$R(z)=R(x)$)

2. 积分区域的转化:

取一条连接区间两端的按段光滑曲线，使与区间一起构成一条封闭曲线，并使$R(z)$在其内部除有限孤立奇点外处处解析.

(此法常称为“围道积分法”)

推论 若有理函数 $f(z)=P(z)/Q(z)$ 在上半平面上奇点为 $z_1,z_2,\ldots,z_n$， $Q(z)$在实轴上无零点，且$Q(z)$的次数至少比$P(z)$的次数高两次，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[R(z), z_k]$$

若 $R(x)$为偶函数，则

$$\int_{0}^{+\infty} R(x)dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} Res[R(z), z_k]$$

例7 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}\qquad (a>0,b>0,a\neq b)$$

解 $R(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)}$

在上半平面有二级极点 $z=ai,$ 一级极点 $z=bi.$

$$\mathrm{Res}[R(z),ai]$$

$$=\left[\frac{1}{(z+ai)^2(z^2+b^2)}\right]'\Bigg|_{z=ai}=\frac{1}{2bi(a^2-b^2)^2},$$

$$\operatorname{Res}[R(z),bi]=\left.\frac{1}{(z^2+a^2)^2(z+bi)}\right|_{z=bi}=\frac{b^2-3a^2}{4a^3i(b^2-a^2)^2},$$

所以 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$

$$=2\pi i\{\operatorname{Res}[R(z),bi]+\operatorname{Res}[R(z),ai]\}$$

$$=2\pi i\left[\frac{b^2-3a^2}{4a^3i(b^2-a^2)^2}+\frac{1}{2bi(b^2-a^2)^2}\right]$$

$$=\frac{(2a+b)\pi}{2a^3b(a+b)^2}.$$

例8 计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}\quad(a>0)$$

解 设 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}$

解方程 $z^4+a^4=0$，即 $z^4=-a^4=a^4e^{(2k+1)\pi i}$，所以

$z^4+a^4=0$ 有四个根：$z_k=ae^{\frac{(2k+1)\pi i}{4}},k=0,1,2,3$

即：$z_0=ae^{\frac{\pi i}{4}}$，$z_1=ae^{\frac{3\pi i}{4}}$，$z_2=ae^{\frac{5\pi i}{4}}$，$z_3=ae^{\frac{7\pi i}{4}}$

明显，只有z_0 、 z_1 在上半平面，且为 $f(z)$ 的一级极点，因此

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4+a^4}, z_k\right]=\frac{1}{4z_k^3}=-\frac{z_k}{4a^4} \quad (k=0,\ 1)$$

由于 $f(x)=\dfrac{1}{x^4+a^4}$为偶函数，因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+a^4}dx=\pi i\sum_{k=1}^{n}Res\left[\frac{1}{z^4+a^4},z_k\right]$$

$$=\pi i\sum_{k=1}^{n}Res\left[\frac{1}{z^4+a^4},z_k\right]=\pi i\left(-\frac{z_0}{4a^4}-\frac{z_1}{4a^4}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{4a^4}$$

例 9 计算$\mathrm{I}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$

$$z^4+z^2+1=(z^2+1)^2-z^2=(z^2+z+1)(z^2-z+1)=0$$

$\Rightarrow f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+z^2+1}$的四个一阶极点为:

$z_{1,2}=\pm\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_{3,4}=\pm\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,其中$z_1, z_2$在上半平面

$$\mathrm{I}=2\pi i\left\{\mathrm{Res}[f(z),z_1]+\mathrm{Res}[f(z),z_2]\right\}$$

$$=2\pi i\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{4\sqrt{3}i}+\frac{1-\sqrt{3}i}{4\sqrt{3}i}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

例 5　计算 $\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx$

解： $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx$

$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}$在上半平面只有一个$n+1$阶极点$z=i$,

$$\mathrm{I}=\pi i\mathbf{Res}[f(z),i]=\pi i\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{z+i}\right)^{n+1}\Bigg|_{z=i}$$

$$=\pi i\frac{(-1)^n}{n!}\frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{(2i)^{2n+1}}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n!\,2^{2n+1}}\pi=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

第五章 留数 小结

孤立奇点

- 可去奇点
- 极点
- 本性奇点

函数的零点与极点的关系

留数

- 计算方法
- 留数定理

计算 $\oint_C f(z)dz$

留数在定积分计算中的应用

1. $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$;

测试题

计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{a^2+\cos^2\theta}\ (a>0)$.

答案

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{a^2+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+2a^2+\cos 2\theta}\quad(\text{令}2\theta=t)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+2a^2+\cos t}=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+2a^2+\cos t}$$

$$\boxed{\cos\theta=\frac{1}{2z}(z^2+1)}$$

$$=\frac{\pi}{2a\sqrt{a^2+1}}.$$

$$\boxed{d\theta=\frac{1}{iz}dz}$$

留数的计算

1. 若z_0为函数$f(z)$ 的可去奇点，(负幂项的项数为零个)，则它在点z_0的留数为零。

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right]=0$$

2 . 当z_0为$f(z)=g(z-z_0)$ 的孤立奇点时，若 $g(\varsigma)$ 为偶函数，则$f(z)$在点z_0的留数为零。

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right]=0$$

留数的计算

3. 若z_0为$f(z)$ 的一级极点，则有

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right]=\lim_{z \to z_0}(z-z_0) f(z)$$

4. 若z_0为$f(z)$ 的m级极点，则对任意整数 n≥ m 有

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z \to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$$

5 设$f(z)=P(z)/Q(z)$，其中$P(z)$和$Q(z)$在点z_0都解析。

若 $P(z_0)\neq 0$，$Q(z_0)=0$且$Q'(z_0)\neq 0$，则z_0为$f(z)$ 的一级极点，且有

$$\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

6. 本性奇点：由Laurent级数展开定理，留数等于 $f(z)$在环域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内Laurent级数的负一次幂系数c_{-1}

7. 对于函数$f(z)$孤立奇点z_0和曲线C，由 $f(z)$在点z_0处留数 $\operatorname{Res}\left[f(z), z_0\right]$ 的定义，计算积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

其中闭路C取正向。

留数定理

定理1 若函数f(z)在正向简单闭曲线C上处处解析，在C的内部除有限个孤立奇点$z_1,z_2,\ldots,z_n$外解析，则有

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[f(z),z_k\right]$$

定理2 若函数$f(z)$在环域 $R<|z|<\infty$ 内解析，则对包含圆|z|=R的任一条正向简单闭曲线C有

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{\varsigma}\right)\frac{1}{\varsigma^2},0\right]$$

留数在定积分计算上的应用

1）三角函数有理式的积分

$$I=\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

其中$z_k(k=1,2,\cdots,n)$为包含在单位圆周

$|z|=1$内的$f(z)$的孤立奇点.

2）无穷积分 ——分母比分子至少高两次

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res[R(z),z_k]$$

其中$z_k(k=1,2,\cdots,n)$为$R(z)$在上半平面内的极点.

补充例题

例1 计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos 2x},\qquad 0<\varepsilon<1$ **的值.**

解： 令 $\theta=2x, d\theta=2dx;\ x:0\to\pi, \theta:0\to 2\pi$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{1+\varepsilon\frac{z+z^{-1}}{2}}=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$$

极点 2个 $\quad z_1=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\qquad z_2=\frac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$

$$I=\frac{1}{i}2\pi i\cdot Res[f(z),z_1]=\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

例2 计算积分 $\int_0^{2\pi} \dfrac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}$.

解 $$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\cdot\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$= \frac{4}{3i}\oint_{|z|=1} \frac{z\mathrm{d}z}{\left(z^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}z+1\right)^2},$$

极点为 $z_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, z_2 = -\sqrt{3},$ 其中$|z_1| < 1, |z_2| > 1;$

由留数定理，有

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2} = \frac{4}{3i}\cdot 2\pi\, i \lim_{z\to z_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{(z-z_2)^2}$$

$$= \frac{8\pi}{3}\cdot \lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_2)^2 - 2z(z-z_2)}{(z-z_2)^4}$$

$$= \frac{8\pi}{3}\cdot \frac{-(z_1+z_2)}{(z_1-z_2)^3}$$

$$= \frac{8\pi}{3}\cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \Bigg/ \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 = 4\pi\,.$$