第三部分 代数结构

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

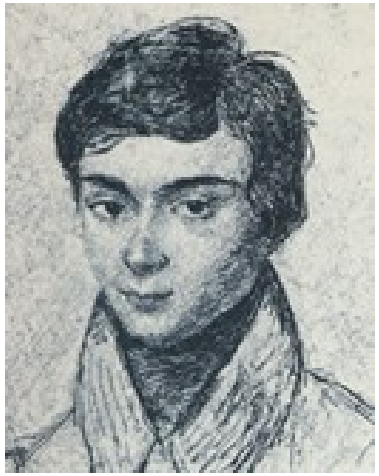
第三部分 代数结构

- 代数通常被认为是符号的操作，其发展分为两个历史阶段。
  - 古典代数（19世纪以前）：“每一个符号总是代表一个数”，以方程根的计算与分布为其研究中心。
  - 近世代数（19世纪以后）：“符号可以代表任何东西”，研究对象为各种代数系统。

第三部分 代数结构

- 近世代数起始于19世纪初，形成于20世纪30年代。
- 代表人物：
  - 法国数学家伽罗瓦（E.Galois)
  - 挪威数学家阿贝尔（N.H.Abel)
  - 英国数学家德·摩根(A.De.Morgan)
  - 英国数学家布尔(G.Boole).

“近世代数”的起源



近世代数创始人
伽罗瓦(法)
1811 ~1832

方程的根式的求解

- 一元一次方程 公元前1700年
- 一元二次方程 公元前几世纪 巴比伦人
- 一元三次方程

我国：在公元七世纪 一般的近似解法
唐朝数学家王孝通《缉古算经》

西方：16世纪 意大利数学家
卡丹公式《重要的艺术》

失败：**Euler L 、Lagrange J L、Gauss K F**等。

伽罗瓦首先提出根的置换概念，每一个方程都可以与一个置换群联系，从而用群论方法彻底解决的方程根式解问题。

伽罗瓦证明五次方程的一般求根公式是不存在的。

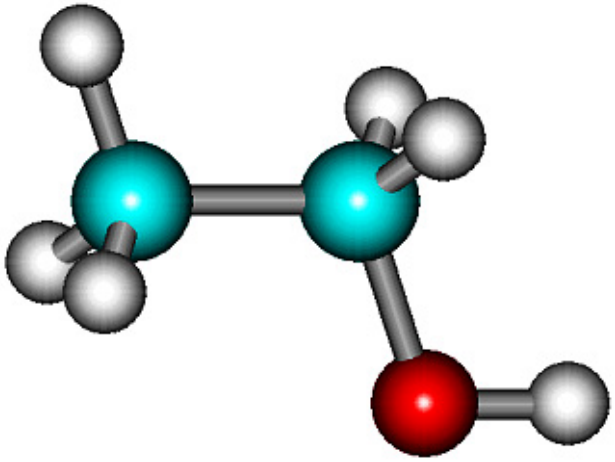
古希腊三大尺规作图问题

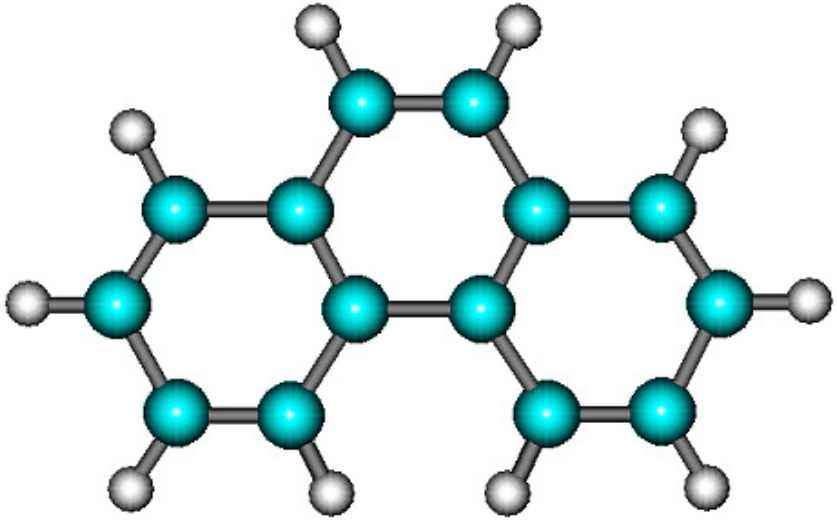
条件：用没有刻度的直尺和圆规作图。

- 三等分角：用直尺及圆规把任给的一角三等分。
- 倍立方：给定一立方体（即其一边已知），用直尺及圆规做另一立方体（即做其一边）使其体积为原立方体的两倍。
- 化圆为方：用直尺及圆规做一正多边形使其面积等于一给定圆的面积。

这三个题目被研究了两千多年，直到近世代数出现后才证明了：这三个作图题都是无解的。

科学计数

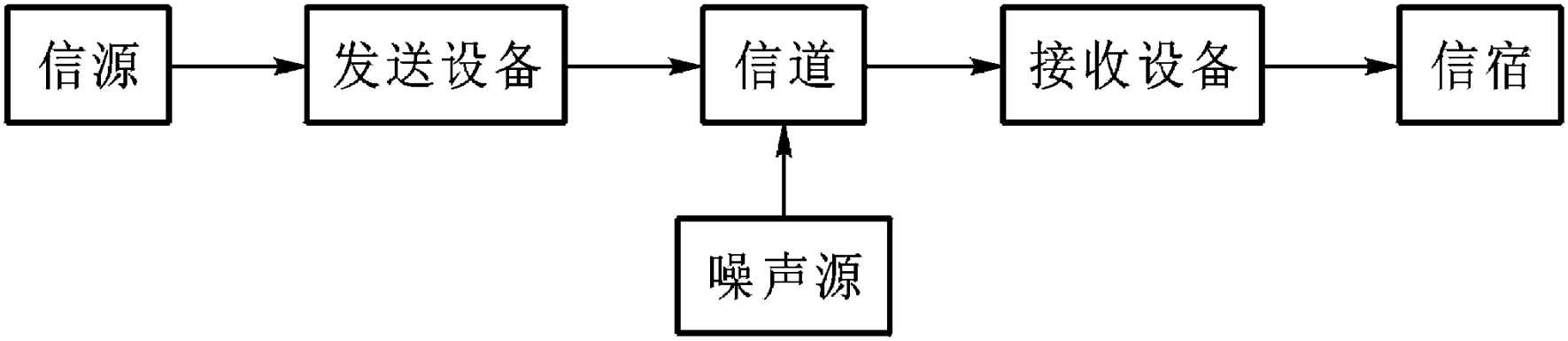




19世纪后半叶，科学家发现：

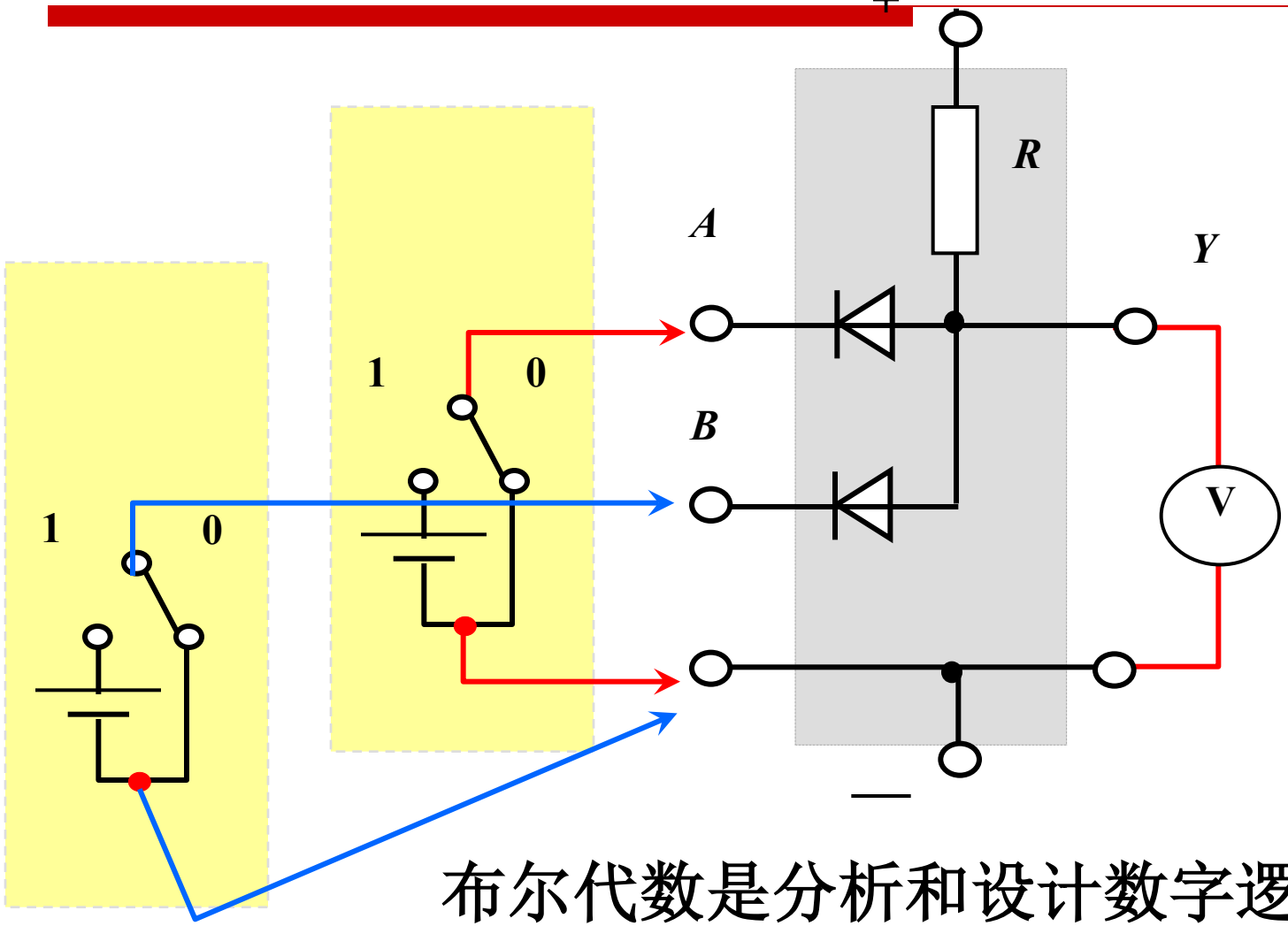
- 平面晶体对称群（壁纸群）：17种
- 对称点群：晶体外形的全部对称形式, 32种
- 空间群：晶体内部构造一切可能的对称形式, 230种。

数字通信的可靠性问题与保密问题



- 数字通信的可靠性问题：除了改进设备外，还可以采用高效的有检错和纠错能力的编码。利用近世代数方法可以得到更高效的检错码和纠错码。
- 数字通信的保密性问题：研究数字通信的加密与解密的方法与理论称为密码学，密码学的数学基础主要是数论和近世代数，涉及群、环、域的许多内容。

数字逻辑电路设计



布尔代数是分析和设计数字逻辑电路的数学工具

主要的代数结构

- 群
- 环
- 域
- 格
- 布尔代数

第三部分 代数结构

- 主要内容
  - 代数系统----二元运算及其性质、代数系统
  - 半群与群----半群、独异点、群
  - 环与域----环、整环、域
  - 格与布尔代数----格、布尔代数

第九章 代数系统

- 二元运算及其性质
  - 一元和二元运算定义及其实例
  - 二元运算的性质
- 代数系统
  - 代数系统定义及其实例
  - 子代数
  - 积代数
- 代数系统的同态与同构

集合上的运算

- 集合A上的运算

$\frac{1}{a}\ (a \neq 0)$ a 的倒数

$\lceil x \rceil$ 大于等于 x 的最小整数

$\lfloor x \rfloor$ 小于等于 x 的最大整数

} 一元运算

$x + y$ $x \cdot y$ 二元

$if\ x = 0\ then\ y\ else\ z$ 三元

9.1 二元运算及其性质

- 定义9.1 设S为集合，函数$f: S\times S\to S$称为S上的二元运算，简称为二元运算.
  - S中任何两个元素都可以进行运算，且运算的结果惟一.
  - S中任何两个元素的运算结果都属于S，即S对该运算封闭.

实例

例1 判断下面的运算哪些是相应集合上的二元运算：

- (1) 自然数集合N上的＋, －, ×, ÷
  - ＋和×是.
- (2) 整数集合Z上＋, －, ×, ÷
  - ＋, －和×是 .
- (3) 非零实数集R*上＋, －, ×, ÷
  - ×和÷是

实例

- (4) 设M_n(R)表示所有n 阶($n\geq 2$)实矩阵的集合，则矩阵加法和乘法:

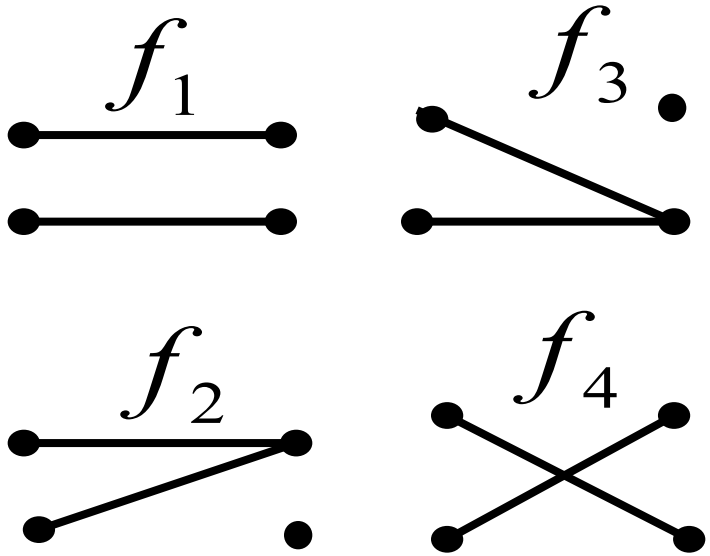
$$M_n(R)=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| \; a_{ij}\in R,\ i,j=1,2,...,n \right\}$$

  - 都是二元运算.

- (5) S为任意集合，$P(S)$上的∪、∩、－、⊕
  - 都是二元运算.

实例

- (6) S^S为S上的所有函数的集合，函数的复合运算°：
  - °是S^S上的二元运算.
- 例如：S={*a*, *b*}, 则S^S包含如下函数：



°	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_2	f_3	f_3
f_3	f_3	f_2	f_3	f_2
f_4	f_4	f_2	f_3	f_1

一元运算的定义与实例

- 定义9.2 设S为集合，函数 $f:S\to S$ 称为S上的一元运算，简称一元运算.
- 例2
  - (1) 求相反数是整数集合Z,有理数集合Q和实数集合R上的一元运算
  - (2) 求倒数是非零有理数集合Q*,非零实数集合R*上一元运算
  - (3) 求共轭复数是复数集合C上的一元运算
  - (4) 在幂集$P(S)$上规定全集为S，则求绝对补运算~是$P(S)$上的一元运算.

实例

- (5) 设S为集合，令A为S上所有双射函数的集合，$A \subseteq S^S$，求一个双射函数的反函数为A上的一元运算.
- (6) 在$n(n \geq 2)$阶实矩阵的集合$M_n(\mathbf{R})$上，求转置矩阵是$M_n(R)$上的一元运算.

二元与一元运算的表示

- 1．算符
  - 可以用$\circ$, $*$, $\cdot$, $\oplus$, $\otimes$,Δ 等符号表示二元或一元运算，称为算符.
  - 对二元运算$\circ$，如果 x 与 y 运算得到 z，记做 $x \circ y = z$
  - 对一元运算Δ, x的运算结果记作Δx.
- 2．表示二元或一元运算的方法: 解析公式和运算表

实例

- 解析公式
  - 例 设R为实数集合，如下定义R上的二元运算*：

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x * y = x.$$

那么 $3*4 = 3$， $0.5*(-3) = 0.5$

运算表

- 运算表：表示有穷集上的一元和二元运算

$\circ$	a_1	a_2	…	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	…	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	…	$a_2 \circ a_n$
.		…		
.		…		
.		…		
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	…	$a_n \circ a_n$

二元运算的运算表

a_i	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
.	.
.	.
.	.
a_n	$\circ a_n$

一元运算的运算表

运算表实例

例3 设全集 $S=\{a,b\}$，定义在$P(S)$上的$\oplus$和 $\sim$运算的运算表如下

$\oplus$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a.b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\varnothing$

x	$\sim x$
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,\mathrm{b}\}$	$\varnothing$

二元运算的性质

定义9.3 设$\circ$为S上的二元运算,

- (1) 若对任意$x,y \in S$ 有 $x \circ y = y \circ x$, 则称运算在S上满足交换律.
- (2) 若对任意$x,y,z \in S$有 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, 则称运算在$S$上满足结合律.
- (3) 若对任意$x \in S$ 有 $x \circ x = x$, 则称运算在S上满足幂等律.

二元运算的性质

定义9.4 设$\circ$和$*$为S上两个不同的二元运算,

- (1) 若对任意$x,y,z\in S$有 $(x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z)$，
  $z\circ(x*y)=(z\circ x)*(z\circ y)$, 则称$\circ$运算对$*$运算满足分配律.
- (2) 若$\circ$和$*$都可交换,且对任意$x,y\in S$有
  $x\circ(x*y)=x$，$x*(x\circ y)=x$,
  则称$\circ$和$*$运算满足吸收律.

实例

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
Z,Q,R	普通加法+ 普通乘法×	有 有	有 有	无 无
$M_n(R)$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	有 无	有 有	无 无
$P(B)$	并∪ 交∩	有 有	有 有	有 有
{0,1}	合取∧ 析取∨	有 有	有 有	有 有
A^A	函数复合°	无	有	无

实例

集合	运算	分配律	吸收律
Z,Q,R	普通加法+ 普通乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$M_n(R)$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$P(B)$	并∪ 交∩	∪对∩可分配 ∩对∪可分配	有
{0,1}	合取∧ 析取∨	∧对∨可分配 ∨对∧可分配	有

特异元素：单位元

定义9.5 设$\circ$为S上的二元运算,

(1) 如果存在e_l(或e_r)$\in S$，使得对任意 $x \in S$ 都有 $e_l \circ x = x$ (或 $x \circ e_r = x$)，则称e_l(或e_r)是S中关于$\circ$运算的左(或右)单位元.

若$e \in S$关于$\circ$运算既是左单位元又是右单位元，则称e为S上关于$\circ$运算的单位元. 单位元也叫做幺元.

实例

$*$	α	β	γ	δ
α	δ	α	β	γ
β	α	β	γ	δ
γ	α	β	γ	γ
δ	α	β	γ	δ

β、δ为左单位元

$*$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	γ	δ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	δ	β	γ

α为单位元

特异元素：零元

(2) 如果存在θ_l(或θ_r)$\in S$，使得对任意 $x\in S$ 都有$\theta_l \circ x = \theta_l$ (或 $x\circ \theta_r = \theta_r$)，则称$\theta_l$(或$\theta_r$)是$S$ 中关于$\circ$运算的左(或右)零元.

若$\theta\in S$ 关于$\circ$运算既是左零元又是右零元，则称θ为S上关于运算$\circ$的零元.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_2	f_2	f_2
f_3	f_3	f_3	f_3	f_3
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

f_2 f_3 为左零元

可逆元素和逆元

(3) 设$\circ$为S上的二元运算, 令e为S中关于运算$\circ$的单位元.

对于$x \in S$，如果存在y_l(或y_r)$\in S$使得

$$y_l \circ x = e \text{（或} x \circ y_r = e \text{）}$$

则称y_l(或 y_r)是x的左逆元（或右逆元）.

关于$\circ$运算，若$y \in S$ 既是 x 的左逆元又是 x 的右逆元，则称y为x的逆元. 如果 x 的逆元存在，就称 x 是可逆的，逆元记作x^{-1}.

实例

集合	运算	单位元	零元	逆元
Z,Q, R	普通加法 普通乘法	**0** **1**	无 **0**	***x*逆元–*x*** ***x*逆元x^{-1}** **($x\neq0$)**
{0, 1}	合取∧ 析取∨	**1** **0**	**0** **1**	**1的逆元是1** **0的逆元是0**
***P*(*B*)**	并∪ 交∩	***∅*** ***B***	***B*** ***∅***	***∅*的逆元是∅** ***B*的逆元是*B***

运算表与运算的性质

- 设代数系统 $<A, *>$，运算的性质可以从运算表中看出
  - 封闭性：表中的每个元素都属于 A;
  - 交换性：表关于主对角线对称;
  - 幂等性：主对角线上的每一个元素与它所在行（列）的表头元素相同;
  - 结合律的判断比较复杂。

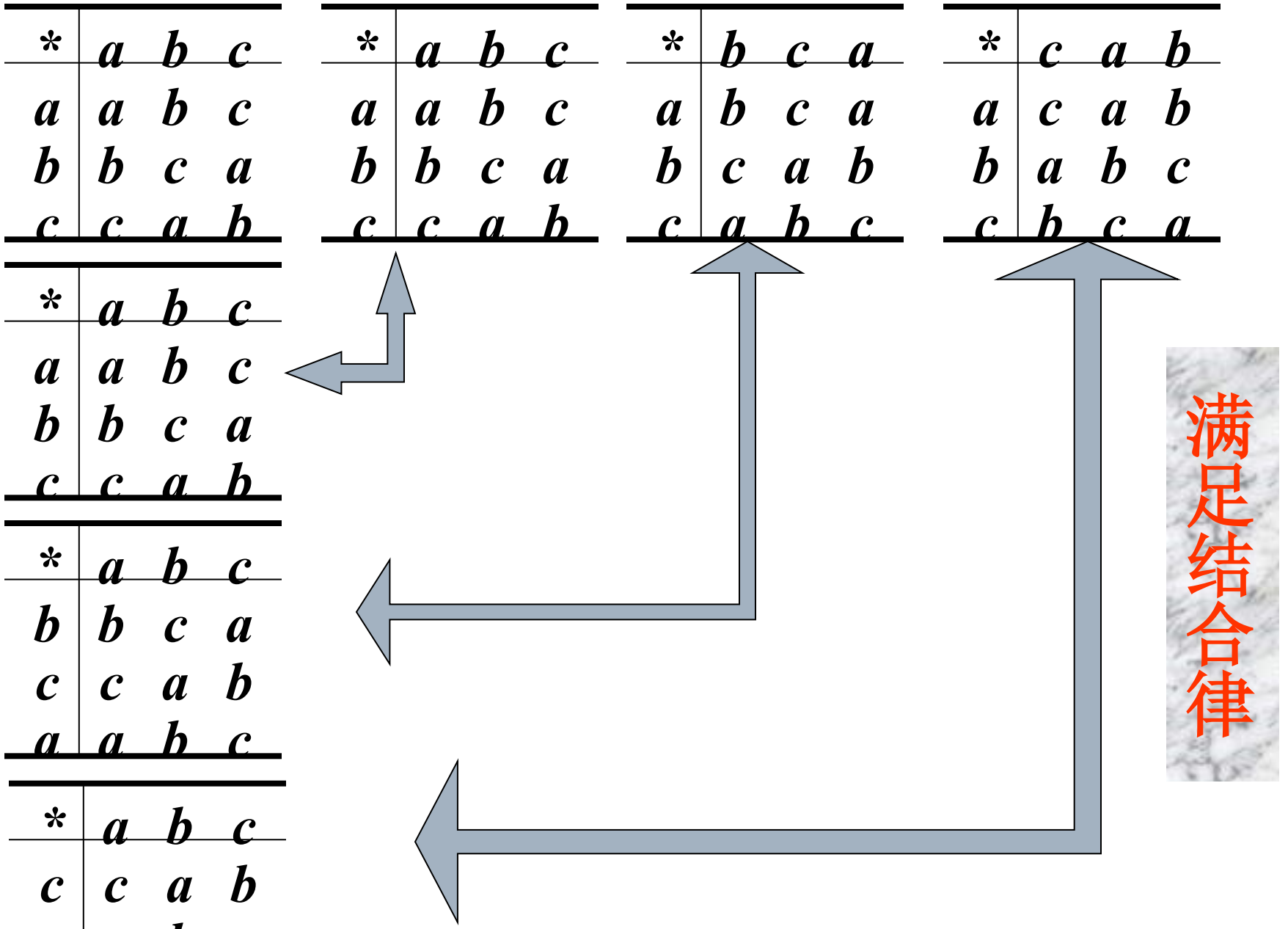
运算表与特异元素

- 有幺元：该元素所对应的行和列依次与运算表的行和列相一致；
- 有零元：该元素所对应的行和列中的元素都与该元素相同；
- 设 A 中有幺元，a 和 b 互逆，当且仅当位于 a 所在行，b 所在列的元素以及 b 所在行，a 所在列的元素都是幺元。

判断运算*的性质

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

- 封闭
- 可交换
- 幺元:a
- a的逆元是a, b和c互为逆元


* a b c
a a b c
b b c a
c c a b
* a b c
a a b c
b b c a
c c a b
* b c a
a b c a
b c a b
c a b c
* c a b
a c a b
b a b c
c b c a
* a b c
a a b c
b b c a
c c a b
* a b c
b b c a
c c a b
a a b c
* a b c
c c a b
a a b c
b b c a
满足结合律

惟一性定理

- **定理9.1** 设$\circ$为S上的二元运算，e_l和e_r分别为S中关于运算的左和右单位元，则$e_l = e_r = e$，且e为S上关于$\circ$运算的惟一的单位元.

- 证：
$$e_l = e_l \circ e_r \quad (e_r\text{为右单位元})$$
$$e_l \circ e_r = e_r \quad (e_l\text{为左单位元})$$

所以$e_l = e_r$，将这个单位元记作e.

假设e'也是S中的单位元，则有$e' = e \circ e' = e$.

惟一性得证.

惟一性定理

- **定理9.2** 设◦为S上的二元运算，θ_l和θ_r分别为S中关于运算的左和右零元，则
  $\theta_l=\theta_r=\theta$,且θ为S上关于◦运算的惟一的零元.

- 证明略。

惟一性定理

- 定理9.3 设$\circ$为S上的二元运算, e和θ分别为$\circ$运算的单位元和零元。如果$|S|>1$，则$e \neq \theta$。
- 证明：用反证法。

  设$e=\theta$, 则对于任意的$x \in S$, 必有

  $$x = e * x = \theta * x = \theta = e$$

  于是S中只有一个元素，与假设矛盾。
- 注意：当$|S| \geq 2$，单位元与零元是不同的；当$|S|=1$时，这个元素既是单位元也是零元.

惟一性定理

- **定理9.4** 设$\circ$为S上可结合的二元运算, e为该运算的单位元, 对于$x \in S$ 如果存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r, 则有 $y_l = y_r = y$, 且 y是 x 的惟一的逆元，记作 x^{-1} 。
- 证：由 $y_l \circ x = e$ 和 $x \circ y_r = e$ 得

$$y_l = y_l \circ e = y_l \circ (x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r = e \circ y_r = y_r$$

令$y_l = y_r = y$, 则 y 是 x 的逆元.

假若 $y' \in S$ 也是 x 的逆元, 则

$$y' = y' \circ e = y' \circ (x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y$$

所以 y 是 x 惟一的逆元.

本节小结

- 二元及一元运算的定义
- 运算的表示：算符、运算表
- 二元运算的性质：交换律、结合律、幂等律、分配律、吸收律
- 运算的一些特殊元素：单位元、零元、逆元
- 唯一性定理：单位元、零元、逆元唯一
- 如果|S|>1则单位元与零元不同

9.2 代数系统

- 定义9.6 非空集合S和S上k个一元或二元运算$f_1,f_2,\cdots,f_k$组成的系统称为代数系统, 简称代数, 记做$<S, f_1, f_2, \cdots, f_k>$.
- 例如：
  - (1) <N,＋>,<Z,＋,·>,<R,＋,·>是代数系统，+和·分别表示普通加法和乘法.
  - (2) $<M_n(R),+,\cdot>$是代数系统，＋和·分别表示 n 阶($n\geq 2$)实矩阵的加法和乘法.
  - (3) $<P(S),\cup,\cap,\sim>$是代数系统，∪和∩为并和交，~为绝对补.

实例

- (4) $<Z_n,\oplus,\otimes>$是代数系统，$Z_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$，$\oplus$和$\otimes$分别表示模n的加法和乘法，对于$x,y\in Z_n$，$x\oplus y=(x+y)\bmod n$，$x\otimes y=(xy)\bmod n$

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

代数系统的成分与表示

- 构成代数系统的成分：
  - 集合（也叫载体，规定了参与运算的元素）
  - 运算（这里只讨论有限个二元和一元运算）
  - 代数常数（通常是与运算相关的特异元素：如单位元等）

- 研究代数系统时，如果把运算具有它的特异元素也作为系统的性质之一，那么这些特异元素可以作为系统的成分，叫做代数常数.

实例

- 代数系统<**Z**,+,**0**>：集合**Z**, 运算+, 代数常数**0**
- 代数系统<***P*(*S*)**,∪,∩>：集合***P*(*S*)**, 运算∪和∩，无代数常数

代数系统的表示

- (1) 列出所有的成分：集合、运算、代数常数（如果存在）

  如$<Z,+,0>$, $<P(S),\cup,\cap>$

- (2) 列出集合和运算，在规定系统性质时不涉及具有单位元的性质（无代数常数）

  如$<Z,+>$, $<P(S),\cup,\cap>$

- (3) 用集合名称简单标记代数系统，在前面已经对代数系统作了说明的前提下使用

  如代数系统Z, $P(B)$

同类型的代数系统

- 定义9.7 如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，且代数常数的个数也相同，则称它们是同类型的代数系统.

- 例如：$V_1=<\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1>$,

  $V_2=<P(B), \cup, \cap, \varnothing, B>$

  V_1, V_2是同类型的代数系统，它们都含有2个二元运算, 2个代数常数.

运算性质比较

V_1	V_2
+ 可交换、可结合	∪可交换、可结合
· 可交换、可结合	∩可交换、可结合
· 对 + 可分配	∩对∪可分配
+ 对 · 不可分配	∪对∩可分配
+ 与 · 没有吸收律	∪与∩满足吸收律

子代数系统

- 定义9.8 设$V=<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$是代数系统，$B$是$S$的非空子集，如果$B$对$f_1, f_2, \ldots, f_k$都是封闭的，且$B$和$S$含有相同的代数常数，则称$<B, f_1, f_2, \ldots, f_k>$是$V$的子代数系统，简称子代数. 有时将子代数系统简记为B.
- 例如：
  - N是<Z,＋>的子代数，N也是<Z,＋,0>的子代数
  - N–{0}是<Z,＋>的子代数，但不是<Z,＋,0>的子代数

关于子代数的术语

- (1) 最大的子代数：就是V本身
- (2) 最小的子代数：如果令V中所有代数常数构成的集合是B，且B对V中所有的运算都是封闭的，则B就构成了V的最小的子代数
- (3) 最大和最小的子代数称为V 的平凡的子代数.
- (4) 若B是S的真子集，则B构成的子代数称为V的真子代数.

实例

- 设$V=<Z,+,0>$,令 $nZ=\{nz \mid z\in Z\}$,n为自然数，则nZ是V的子代数
- 当$n=1$和0时，nZ是V的平凡的子代数，其他的都是V的非平凡的真子代数.

积代数

- 定义9.9 设$V_1=<A,\circ>$和$V_2=<B,*>$是同类型的代数系统，$\circ$和$*$为二元运算，在集合$A\times B$上如下定义二元运算$\blacksquare$，

  $\forall <a_1,b_1>,<a_2,b_2>\in A\times B$，有

  $<a_1,b_1>\blacksquare<a_2,b_2>=<a_1\circ a_2,\ b_1*b_2>$

  称$V=<A\times B,\blacksquare>$为$V_1$与$V_2$的积代数，记作$V_1\times V_2$. 这时也称$V_1$和$V_2$为$V$的因子代数.

- 注意：积代数的定义可以推广到具有多个运算的同类型的代数系统。

实例

- $Z_2=\{0,1\}$，$V=<Z_2,\oplus>$，$V\times V=<Z_2\times Z_2,\blacksquare>$

$Z_2\times Z_2=\{<0,0>, <1,0>, <0,1>, <1,1>\}$

·	<0,0>	<0,1>	<1,0>	<1,1>
<0,0>	<0,0>	<0,1>	<1,0>	<1,1>
<0,1>	<0,1>	<0,0>	<1,1>	<1,0>
<1,0>	<1,0>	<1,1>	<0,0>	<0,1>
<1,1>	<1,1>	<1,0>	<0,1>	<0,0>

积代数的性质

- **定理9.5** 设$V_1=<A,\circ>$和$V_2=<B,*>$是同类型的代数系统，$V_1\times V_2=<A\times B,\blacksquare>$是它们的积代数.

  (1) 如果$\circ$和$*$运算是可交换(可结合、幂等)的，那么$\blacksquare$运算也是可交换(可结合、幂等)的.

  (2) 如果e_1和e_2（θ_1和θ_2）分别为$\circ$和$*$运算的单位元（零元），那么$<e_1,e_2>$（$<\theta_1,\theta_2>$）也是$\blacksquare$运算的单位元（零元）.

  (3) 如果x和y分别为$\circ$和$*$运算的可逆元素，那么$<x,y>$也是$\blacksquare$运算的可逆元素，其逆元就是$<x^{-1},y^{-1}>$.

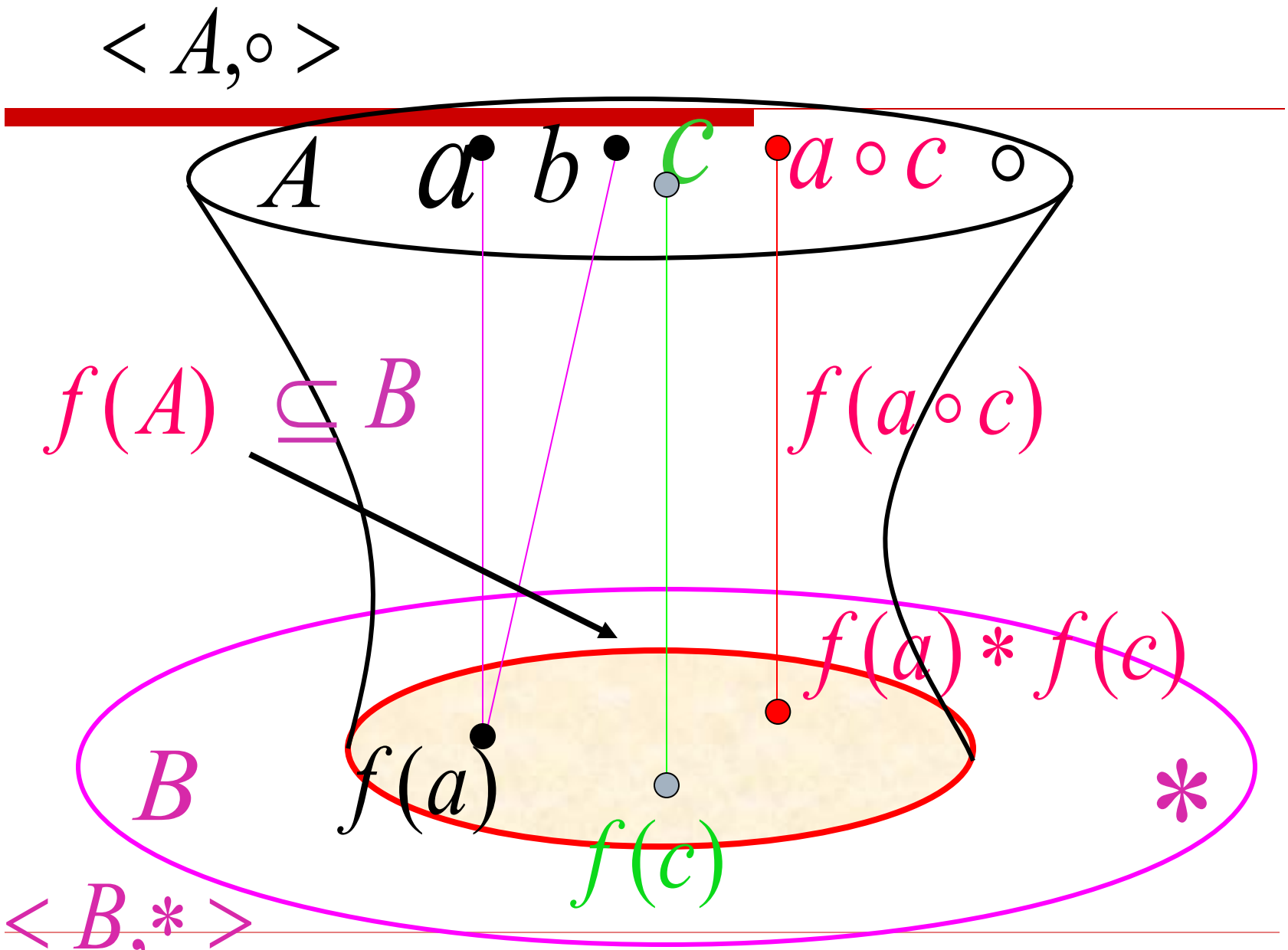
9.3 代数系统的同态与同构

- 定义9.10 设$V_1=<A,\circ>$和$V_2=<B,*>$是同类型的代数系统，$f:A\to B$，且$\forall x,y\in A$有
  $f(x\circ y)=f(x)*f(y)$,
  则称f是V_1到V_2的同态映射，简称同态.
- 例：$<Z,\times>$；$<B,*>$,B={正，负，零}

*	正	负	零
正	正	负	零
负	负	正	零
零	零	零	零

$$f(n)=\begin{cases}\text{正} & n>0\\ \text{负} & n<0\\ \text{零} & n=0\end{cases}$$

$f(x\times y)=f(x)*f(y)$


$< A, \circ >$
A
a
b
c
$a \circ c$
$\circ$
$f(A) \subseteq B$
$f(a \circ c)$
$f(a) * f(c)$
B
$f(a)$
$f(c)$
$*$
$< B, * >$

同态分类

(1) f 如果是单射，则称为单同态.

(2) f 如果是满射，则称为满同态，这时称V_2是V_1的同态像， 记作$V_1 \sim V_2$.

(3) f 如果是双射，则称为同构，也称代数系统V_1同构于V_2， 记作$V_1 \cong V_2$.

(4)如果$V_1 = V_2$，则称作自同态.

实例

- (1) 设V_1=<Z,+>, V_2=<Z_n,⊕>．其中Z为整数集，+为普通加法；Z_n={0,1,…,n−1}，⊕为模n加.
- 令 $f: Z \to Z_n$，$f(x)=(x) \bmod n$

  f 显然是满射，并且

  $f(x+y)=(x+y) \bmod n$

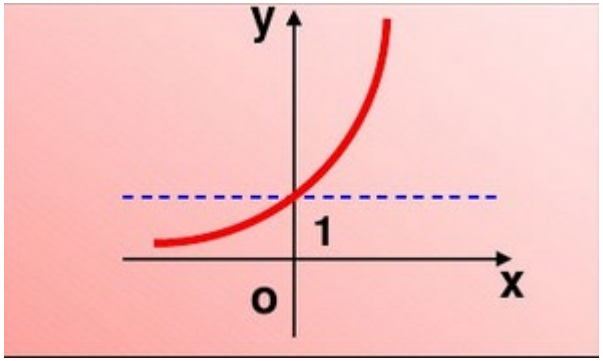
  $=(x) \bmod n \oplus (y) \bmod n$

  $=f(x) \oplus f(y)$

  所以 f 是V_1到V_2的满同态.

实例（续）

- (2) 设V_1=<R,+>, V_2=<R*,·>，其中R和R*分别为实数集与非零实数集，+ 和 · 分别表示普通加法与乘法.
- 令 $f: R \to R^*$，$f(x)= e^x$



f 显然是单射，并且

$f(x+y)=e^{x+y}$

$=e^x \cdot e^y$

$=f(x) \cdot f(y)$

则 f 是V_1到V_2的单同态.

实例（续）

×	正	负
正	正	负
负	负	正

+	偶	奇
偶	偶	奇
奇	奇	偶

- (3) 设V_1=<{正, 负},×>, V_2=<{奇, 偶},+>.
  令 f(正) = 偶，f(负) = 奇
  这两个代数系统是同构的。

实例（续）

- (4) 设$V=\langle Z,+\rangle$，其中Z为整数集，+为普通加法. $\forall a\in Z$,
- 令 $f_a: Z\to Z$，$f_a(x)=ax$，

  那么f_a是V的自同态.

  当$a=0$时称f_0为零同态;

  当$a=\pm1$时，称f_a为自同构;

  除此之外其他的f_a都是单自同态.