第16章 树

第五部分 图论

第16章 树

- 主要内容
- 16.1无向树及其性质
- 16.2生成树
- 16.3根树及其应用

16.1 无向树及其性质

□ 定义16.1

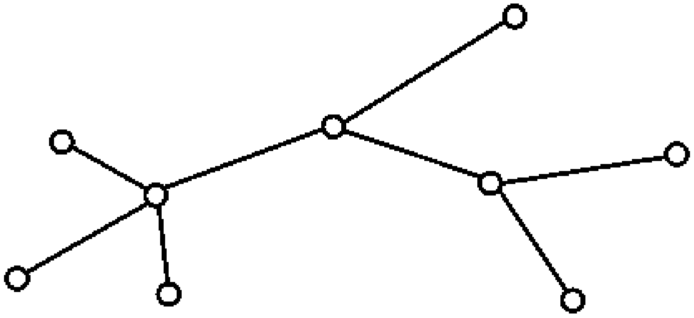
(1) 无向树——连通无回路的无向图

(2) 平凡树——平凡图

(3) 森林——至少由两个连通分支（每个都是树）组成

(4) 树叶——1度顶点

(5) 分支点——度数≥2的顶点



无向树的等价定义

- **定理16.1** 设$G=<V,E>$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树（连通无回路的无向图）

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

证明

(1)⇒(2). 反证法, 若路径不惟一必有回路.

(2)⇒(3). 首先证明G中无回路. 反证法。

a. 若存在关联于某顶点v的环，则从v到v存在长度为0和1的两条路径，与已知矛盾；

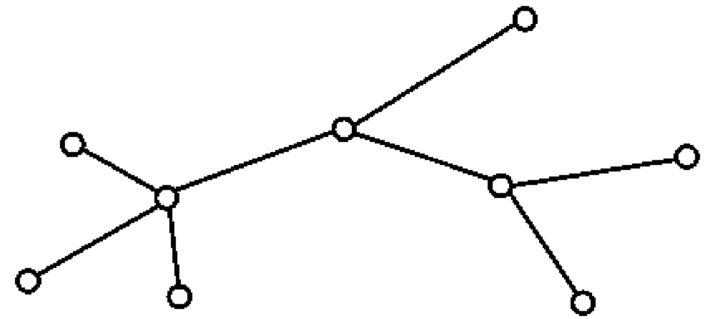
b. 若存在长度大于等于 2 的圈．则圈上任意两点间都存在两条路径，与已知矛盾。

(1) G 是树(即G是连通无回路的无向图).

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

证明



(2)⇒(3). 对n用归纳法证明$m=n-1$.

a. $n=1$时m=0, 正确.

b. 设$n\le k$时$m=n-1$

c. 下面证$n=k+1$时也成立：

取G中边e，由于G中无回路，$G-e$为两个连通分支 G_1,G_2, 且$n_1\le k$， $n_2\le k$. 由归纳假设得

$$m_1=n_1-1,\ m_2=n_2-1.$$

于是，$m=m_1+m_2+1=n_1+n_2-2+1=n-1$.

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

证明

(3)⇒(4). 只需证明G连通. 反证法.

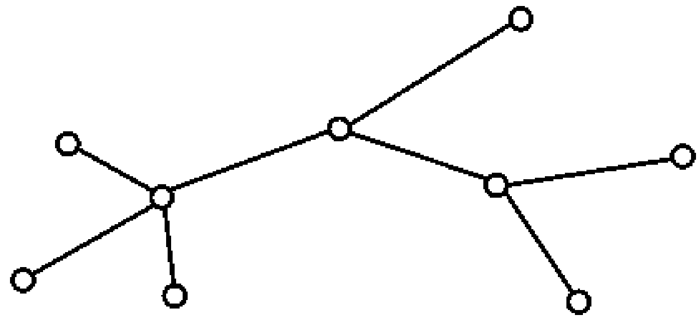
假设G有s（$s\geq 2$）个连通分支G_i，则每个连通分支中都无回路，所以它们都是树. 于是有 $m_i=n_i-1$,

$$m=\sum_{i=1}^{s} m_i=\sum_{i=1}^{s} n_i - s = n - s \; (s\geq 2)$$

这与$m=n-1$矛盾.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.



证明

(4)⇒(5). 只需证明G中每条边都是桥.

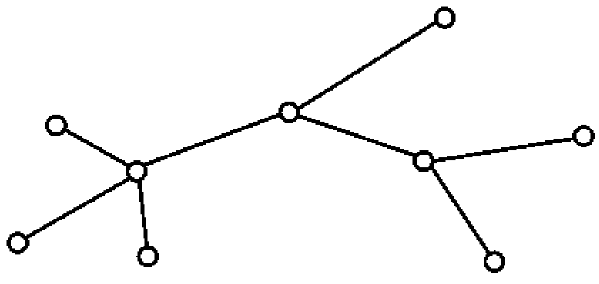
为此需证明命题

"G是n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$".

命题的证明: 对n归纳（参见14章-50题）.

$\forall e \in E$, $G-e$只有$n-2$条边，由命题可知$G-e$不连通，故e为桥.

(4) G是连通的且$m=n-1$.
(5) G是连通的且G中任何边均为桥.



证明

(5)⇒(6). 由于G 是连通的，且任何边均为桥知G 中没有回路，所以G为树。

由(1)⇒(2)知，$\forall u,v\in V$（$u\neq v$），u到v有惟一路径，加新边(u, v)得惟一的一个圈.

(6)⇒(1). 只需证明G连通，这是显然的.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.
(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.
(1) G 是树(即G是连通无回路的无向图).

无向树的性质

- **定理16.2** 设T是n阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶.
- 证明：设 T 有 x 片树叶，分支节点度至少为2.

由定理16.1 $m=n-1$

再由握手定理：

$$2(n-1)=\sum d(v_i)\geq x+2(n-x)$$

由上式解出$x\geq 2$.

实例

- 例16.1 画出所有6阶非同构的无向树。
- 解：设T为6阶无向树。则
  - n=6, m=5. T的顶点度数之和为10.
  - $\delta(T)$=1, $\Delta(T)\le$5.
  - T的可能的度序列为：

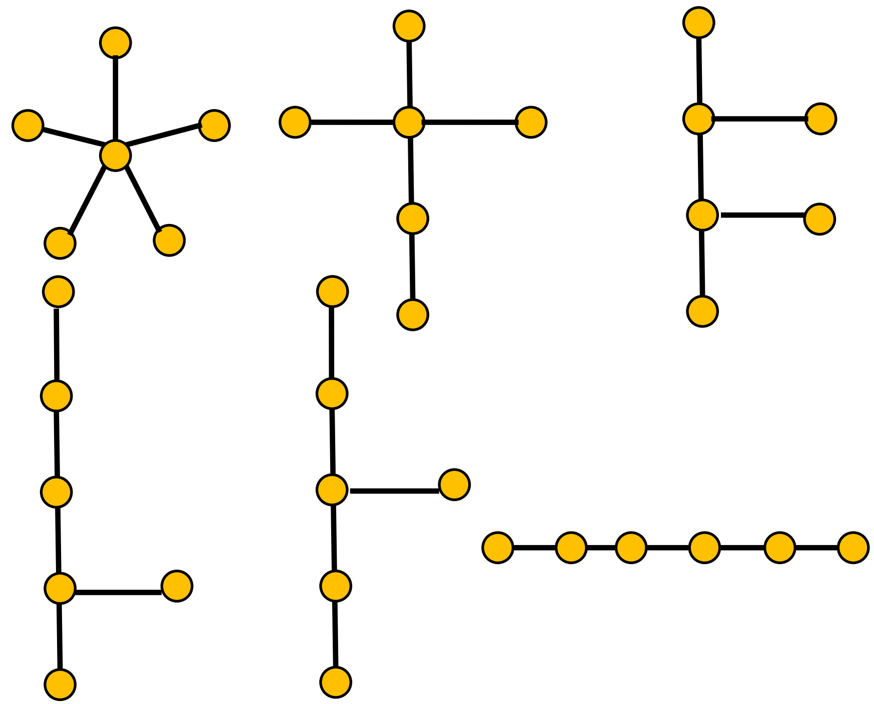
① 5,1,1,1,1,1

② 4,2,1,1,1,1

③ 3,3,1,1,1,1

④ 3,2,2,1,1,1

⑤ 2,2,2,2,1,1



练习

- 已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.
- 解 解本题用树的性质$m=n-1$，握手定理.

设有x片树叶，于是 $n = 1+2+x = 3+x$,

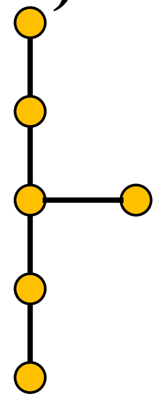
由握手定理：$2m = 1\times3+2\times2+x$

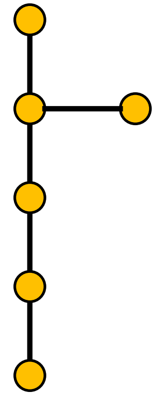
由树的性质：$m=n-1$ → $2m= 2(n-1) = 2\times(3+x-1)$

→ $2x+4 = x+7$

→ $x = 3$.

T 的度数列应为 3, 2, 2, 1, 1, 1





练习

- 已知无向树T有5片树叶，2度与3度顶点各1个，其余顶点的度数均为4，求T的阶数n，并画出满足要求的所有非同构的无向树.
- 解 设T的阶数为n, 则边数为$n-1$，4度顶点的个数为$n-7$.

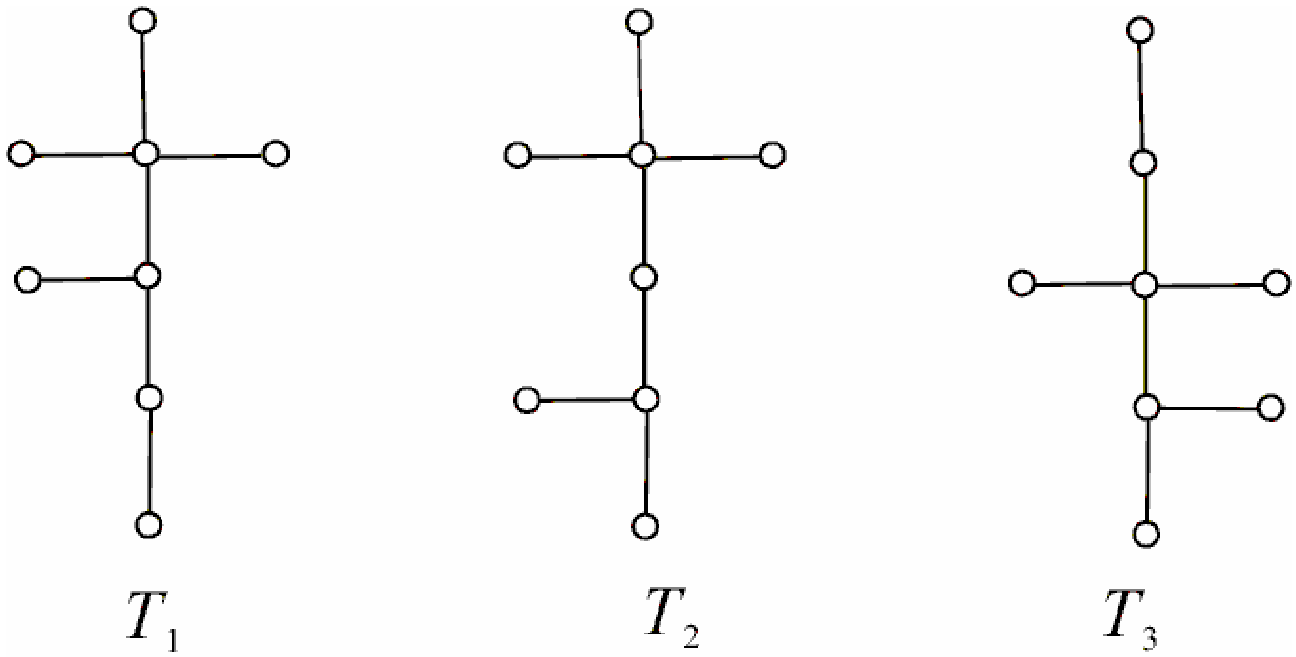
  由握手定理得

$$2m = 2(n-1) = 5\times1+2\times1+3\times1+4(n-7)$$

解出$n = 8$，4度顶点为1个.

练习（续）

- T的度数列为1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4的所有非同构的无向树如下：



第16章 树

- 主要内容
- 16.1无向树及其性质
- 16.2生成树
- 16.3根树及其应用

16.2 生成树

□ **定义16.2** 设G为无向图

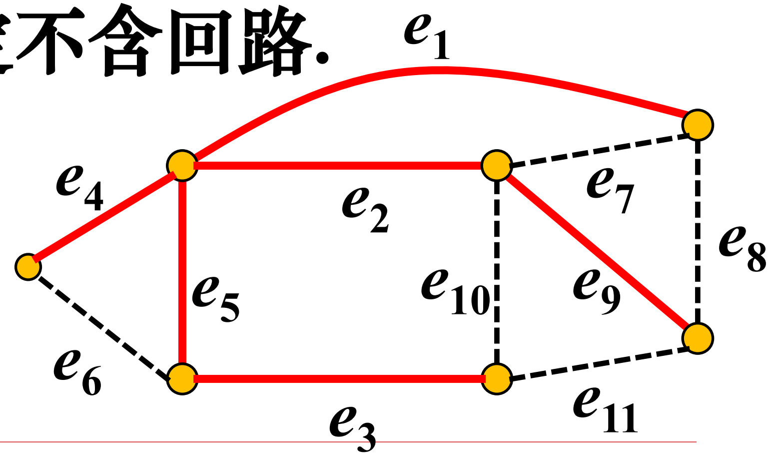
(1) 生成树——T 是G 的生成子图并且是树.

(2) 生成树T的树枝——T 中的边.

(3) 生成树T的弦——不在T 中的边.

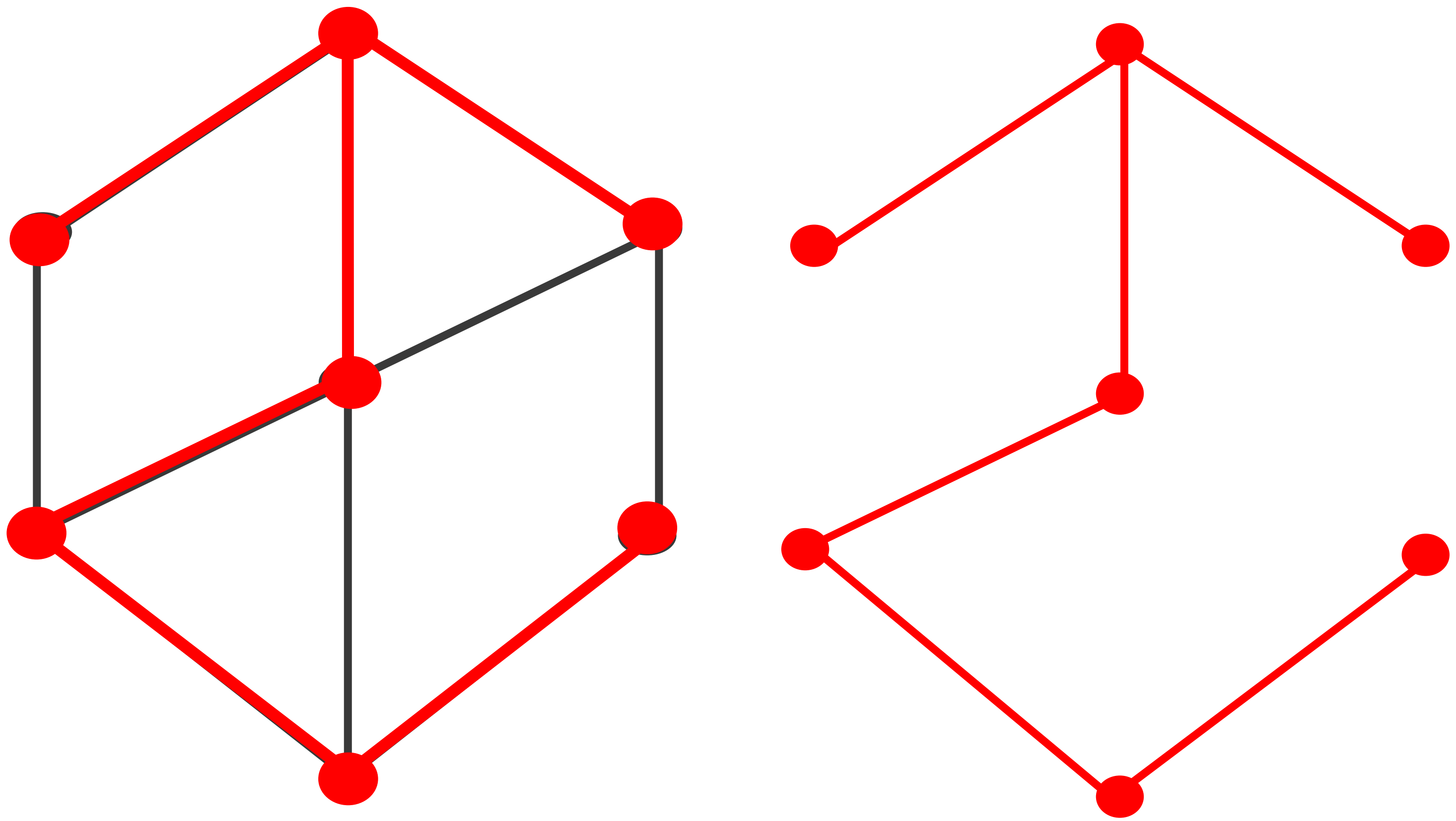
(4) 生成树T的余树$\overline{T}$ ——全体弦组成的集合的导出子图.

说明： $\overline{T}$不一定连通，也不一定不含回路.

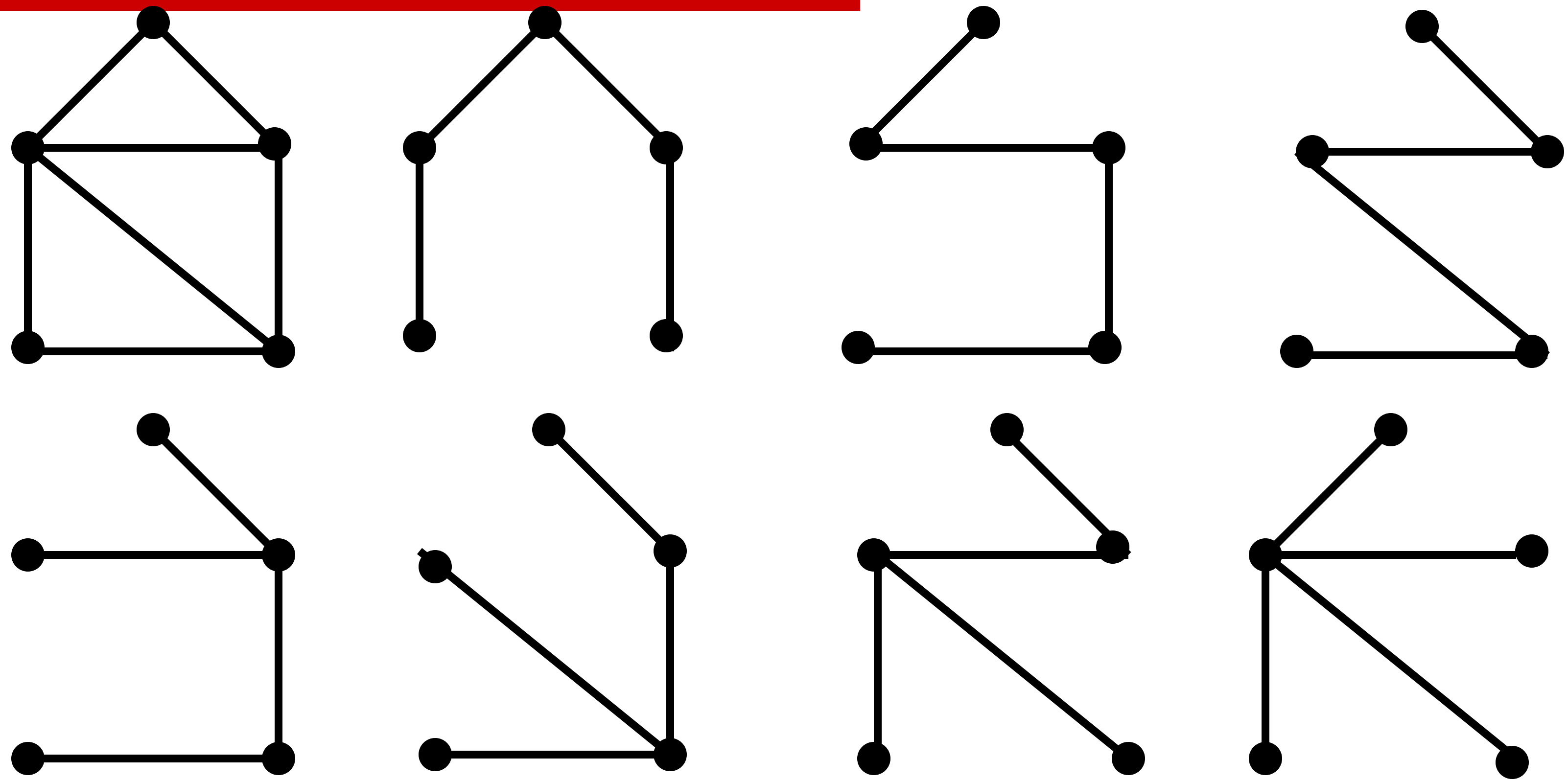


生成树存在条件

- 连通图至少有一棵生成树。



实例



一个连通图可有多棵生成树.

生成树存在条件

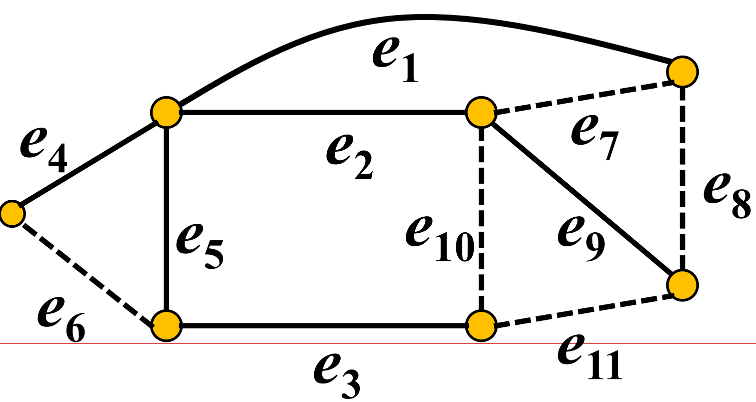
- **定理16.3** 无向图G具有生成树当且仅当G连通.

证：必要性显然.

下面证明充分性。构造性证明，破圈法

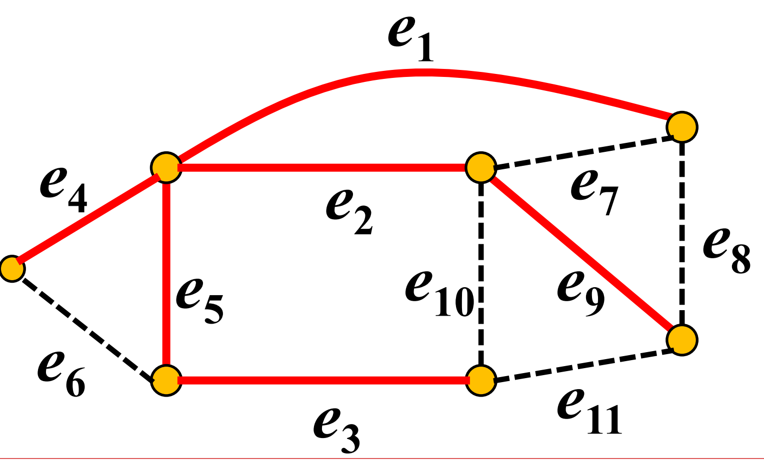
(1) 若G中无回路，则G为自己的生成树。

(2) 若G中有圈，任取G中的一个圈，随意删除圈中的一条边；若G中还有圈，则再随意删除圈中的一条边，直到无圈为止。最后得到的图即为G的生成树。



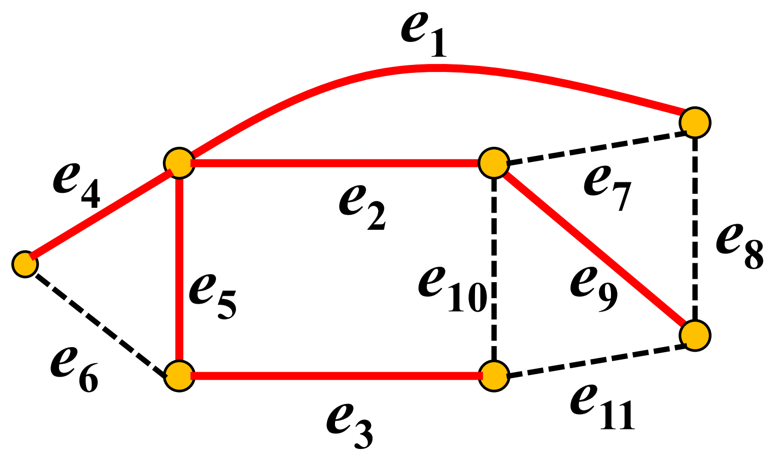
生成树存在条件

- **定理16.3** 无向图G具有生成树当且仅当G连通.
- 推论:
  - 设G为n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$.
  - $\overline{T}$为G的生成树T的余树，$\overline{T}$的边数为$m-n+1$.
  - C为G中任意一个圈，则C与$\overline{T}$一定有公共边.



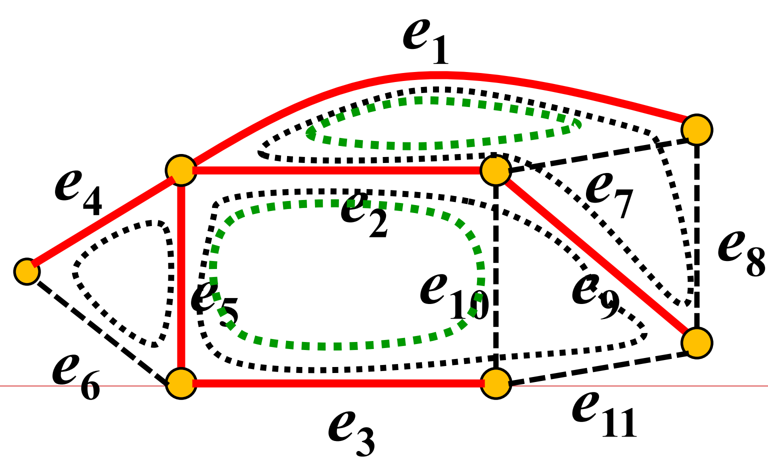
基本回路系统

- 定理16.4 设T为无向连通图G的生成树，e为T的任意一条弦，则：
  - $T\cup e$中含一个只有一条弦其余边均为T的树枝的圈
  - 不同的弦对应的圈也不同.
- 证 设$e=(u,v)$，在T中u到v有惟一路径Γ，则$\Gamma\cup e$为所求的圈.



基本回路系统

- 定义16.3 设T是n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，
- 设$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{m-n+1}$为$T$ 的弦，
- 设C_r为T 添加弦e'_r产生的只含弦e'_r、其余边均为树枝的圈，
- 称C_r为G的对应树T 的弦e'_r的基本回路或基本圈，r=1, 2, …, $m-n+1$，
- 并称$\{C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}\}$为$G$对应$T$ 的基本回路系统
- 称$m-n+1$为G的圈秩，记作 $\xi(G)$.

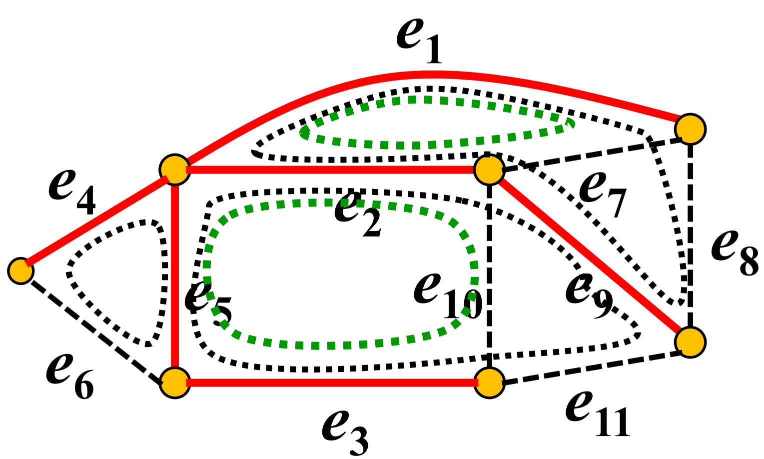


求基本回路的算法

- 设弦$e=(u,v)$，先求T中u到v的路径Γ_{uv}，再并上弦e，即得对应e的基本回路.

$C_1=e_6, e_4, e_5$　　$C_2=e_7, e_2, e_1$　　$C_3=e_8, e_9, e_2, e_1$

$C_4=e_{10}, e_3, e_5, e_2$　　$C_5=e_{11}, e_3, e_5, e_2, e_9$



基本回路系统为：
C_1, C_2, C_3, C_4, C_5

基本回路系统

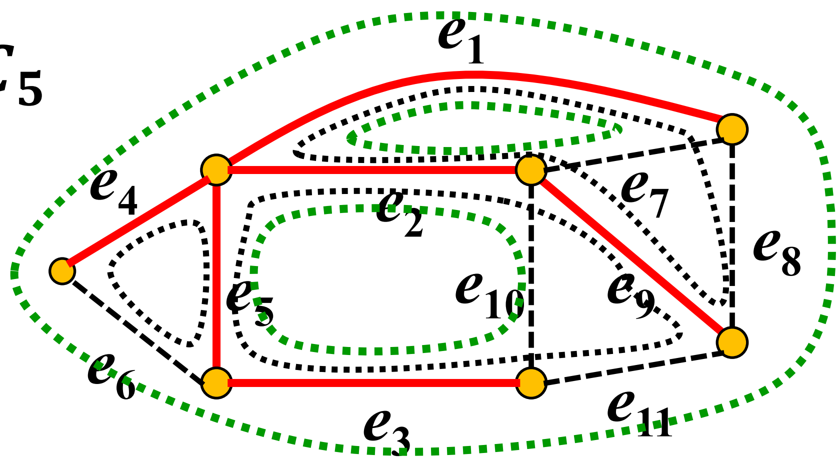
(1) 无向连通图的圈秩与生成树的选取无关，但不同生成树对应的基本回路系统可能不同。

(2) 任何一个简单回路都可以表示成基本回路的环和。

$C_1 = e_6, e_4, e_5$　　$C_2 = e_7, e_2, e_1$

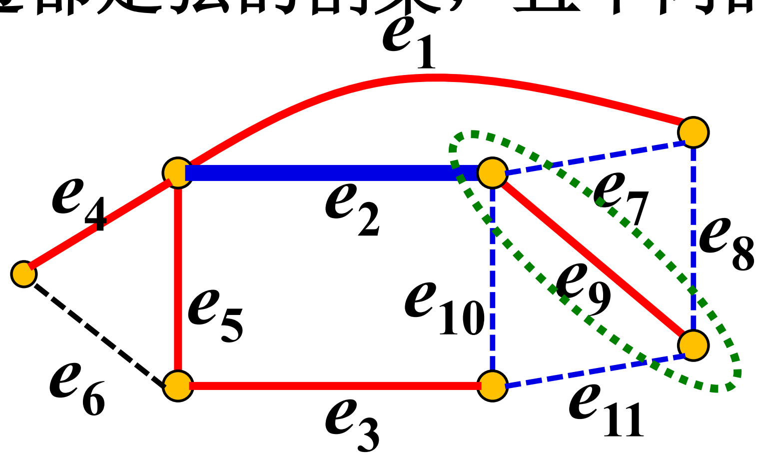
$C_3 = e_8, e_9, e_2, e_1$　　$C_4 = e_{10}, e_3, e_5, e_2$　　$C_5 = e_{11}, e_3, e_5, e_2, e_9$

$$C = C_1 \oplus C_3 \oplus C_5$$



基本割集的存在

- **定理16.5**设T是连通图G的一棵生成树，e为T的树枝，则G中存在只含树枝e，其余边都是弦的割集，且不同的树枝对应的割集也不同.



割集

$\{e_2, e_7, e_8, e_{10}, e_{11}\}$

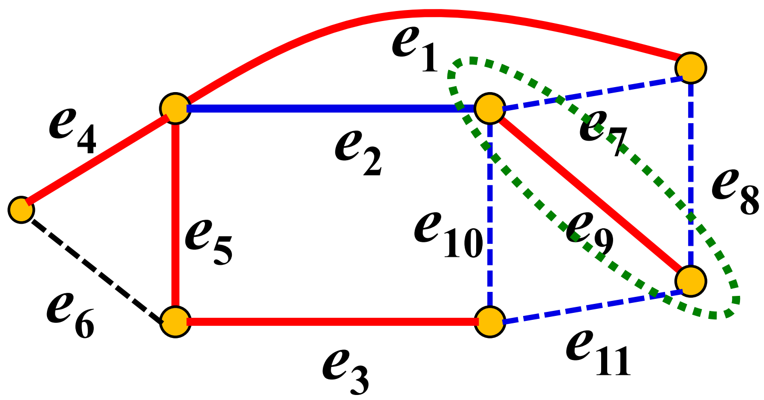
- 证：

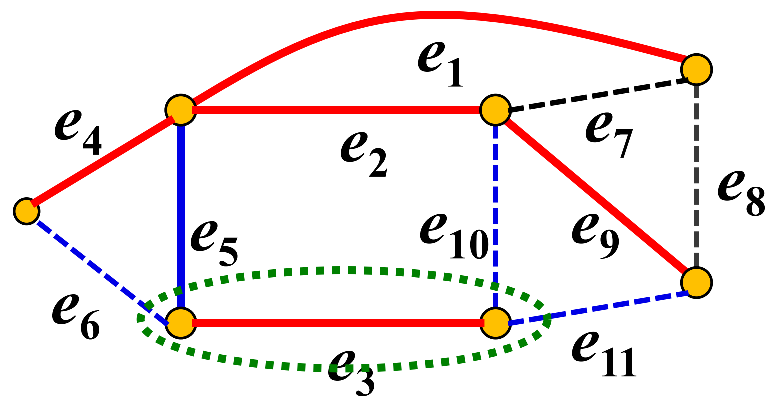
(1)由定理16.1知e是T的桥，$T-e$有两个连通分支T_1和T_2，令$S_e=\{e \mid e \in E(G)$且e的两个端点分别属于$V(T_1)$和$V(T_2)\}$，

(2)由构造显然可知S_e为G的割集，$e \in S_e$且S_e中除e外都是弦，所以S_e为所求. 显然不同的树枝对应的割集不同.

基本割集与基本割集系统

- **定义16.4** 设T是n阶连通图G的一棵生成树，$e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$为$T$的树枝，$S_i$是$G$的只含树枝$e_i$的割集，则称$S_i$为$G$的对应于生成树$T$由树枝$e_i$生成的基本割集，$i$=1, 2, …, n–1. 并称$\{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$为$G$对应$T$的基本割集系统，称$n$–1为$G$的割集秩，记作$\eta(G)$.

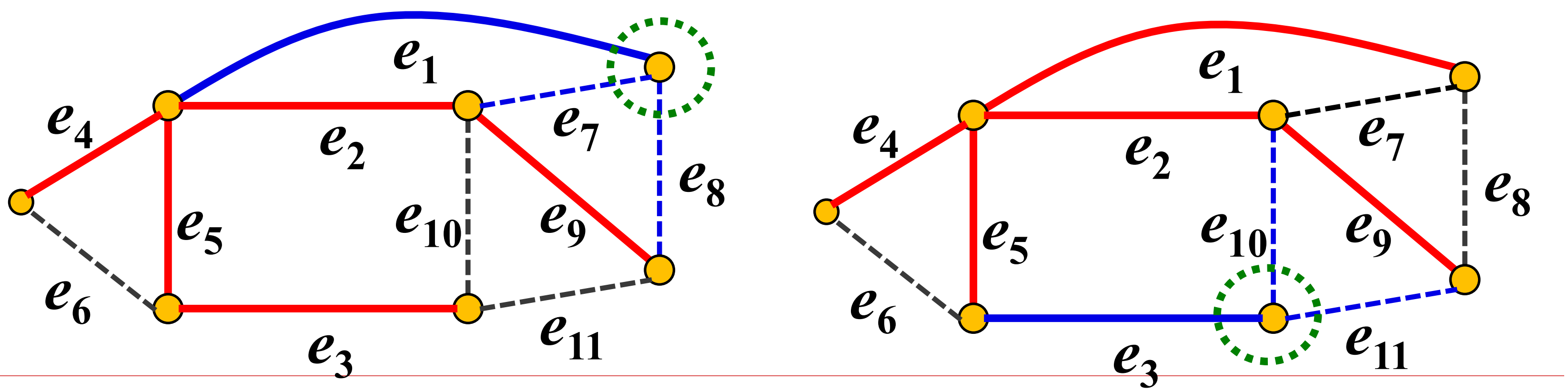




求基本割集的算法

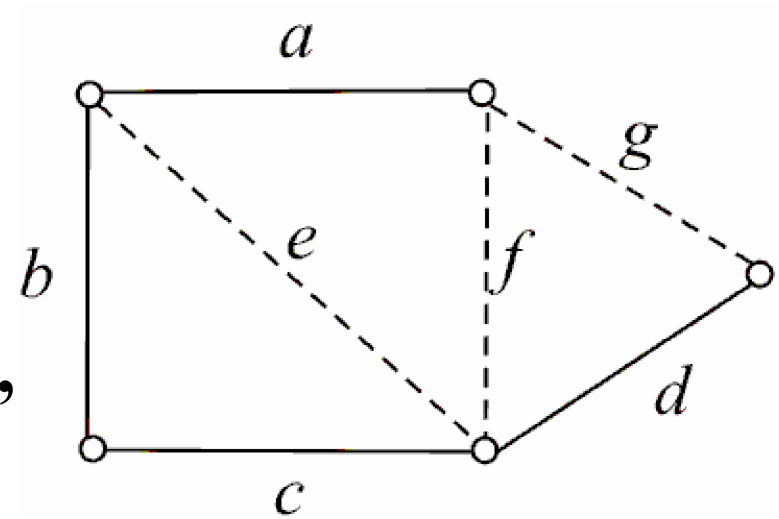
- 求基本割集的算法：
  - 设e'为生成树T的树枝，
  - $T-e'$为两棵小树T_1与T_2，
  - 令$S_{e'}=\{e \mid e\in E(G)$且$e$的两个端点分别属于$T_1$与$T_2\}$，
  - 则$S_{e'}$为e'对应的基本割集.

- ♦ 无向连通图的割集秩与生成树的选取无关，但不同生成树对应的基本割集系统可能不同。



实例

- 实线边所示为生成树，求基本回路系统与基本割集系统
- 解



弦e, f, g对应的基本回路分别为

$C_e = e\ b\ c$, $C_f = f\ a\ b\ c$, $C_g = g\ a\ b\ c\ d$,

$C_{基} = \{C_e, C_f, C_g\}$.

树枝a, b, c, d对应的基本割集分别为

$S_a = \{a, f, g\}$, $S_b = \{b, e, f, g\}$, $S_c = \{c, e, f\ g\}$, $S_d = \{d, g\}$,

$S_{基} = \{S_a, S_b, S_c, S_d\}$.

最小生成树

- **定义16.5** T是$G=<V,E,W>$的生成树

(1) $W(T)$——T各边权之和

(2) 最小生成树——G的所有生成树中权最小的。

- 求最小生成树的一个算法：

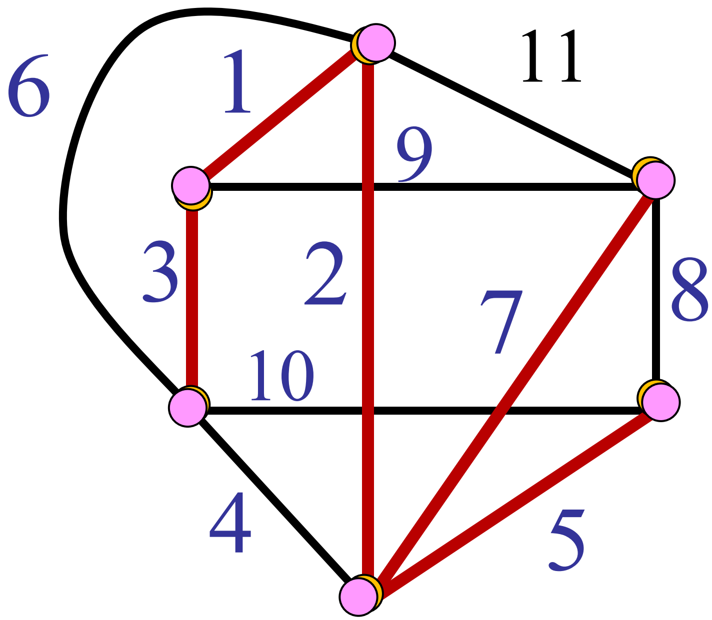
避圈法（Kruskal）设$G=<V,E,W>$，将G中非环边按权从小到大排序：$e_1, e_2, \ldots, e_m$.

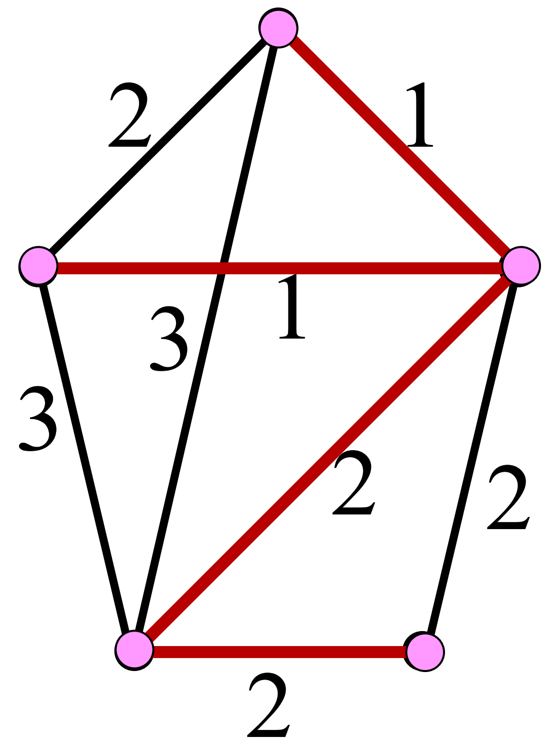
(1) 取e_1在T中

(2) 查e_2, 若e_2与e_1不构成回路, 取e_2也在T 中, 否则弃e_2.

(3) 再查$e_3,\ldots$, 直到得到生成树为止.

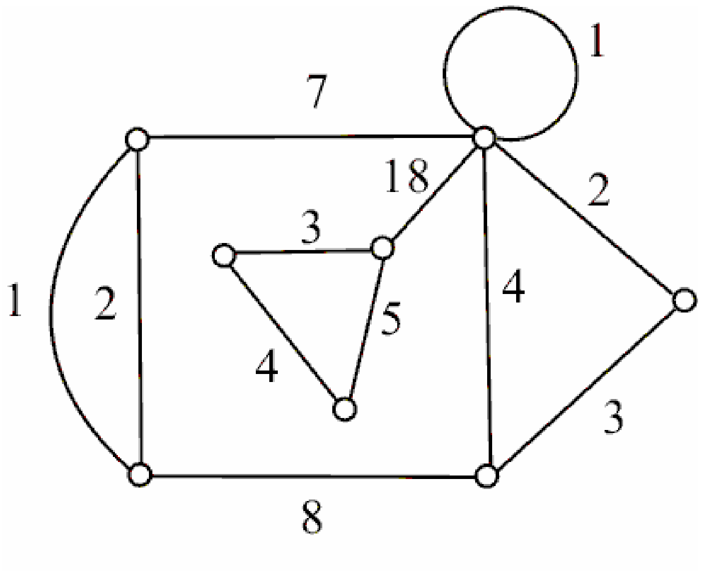
例

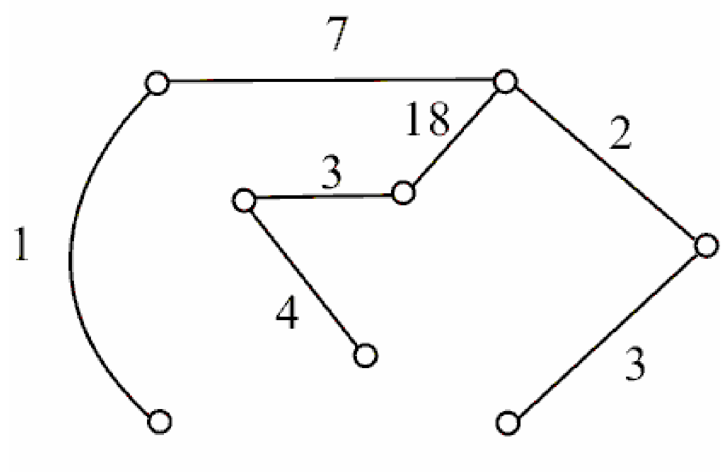




练习

- 求图的一棵最小生成树.





所求最小生成树如图所示，$W(T)$=38.

第16章 树

- 主要内容
- 16.1无向树及其性质
- 16.2生成树
- 16.3根树及其应用

根树

- 定义16.6 T是有向树（基图为无向树）

(1) T 为根树:T 中一个顶点入度为0，其余的入度均为1.

(2) 树根——入度为0的顶点

(3) 树叶——入度为1，出度为0的顶点

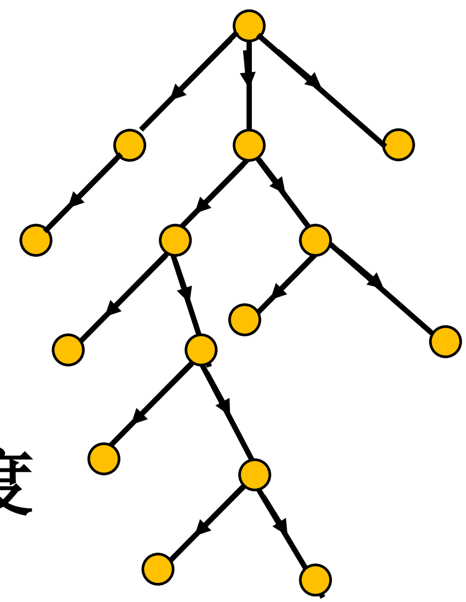
(4) 内点——入度为1，出度不为0的顶点

(5) 分支点——树根与内点的总称

(6) 顶点v的层数——从树根到v的路径长度

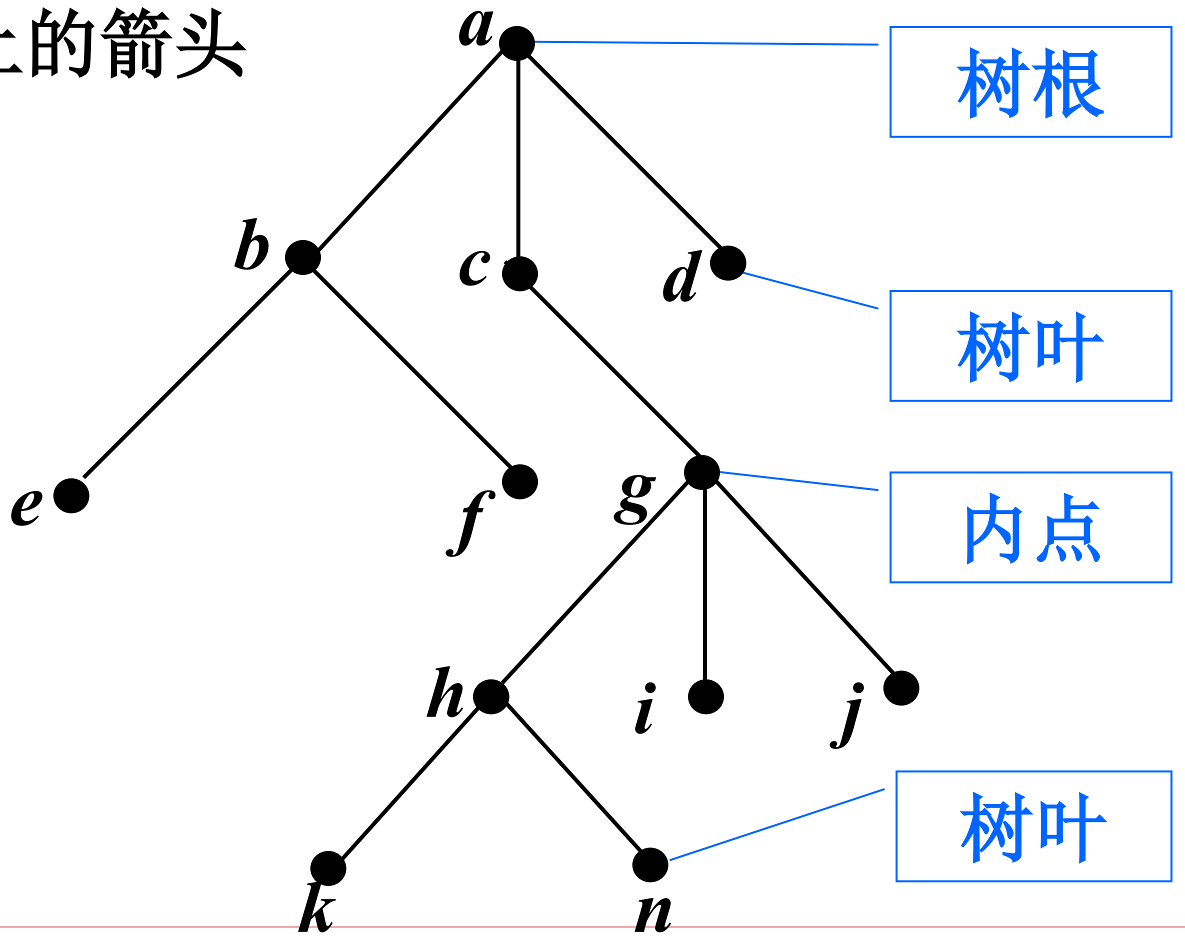
(7) 树高——T 中层数最大顶点的层数

(8) 平凡根树——平凡图



实例

- 根树的画法——树根放上方，省去所有有向边上的箭头



家族树与根子树

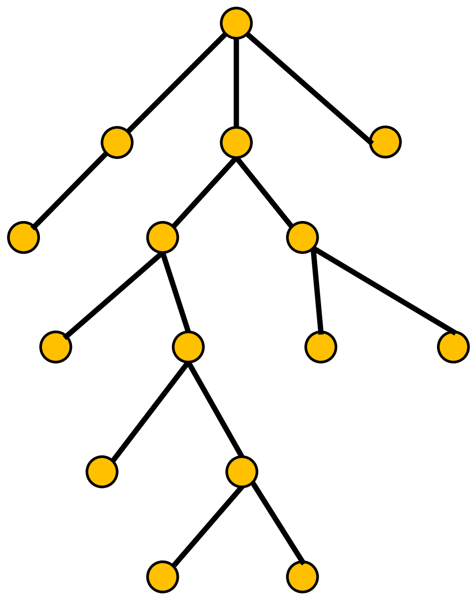
定义16.7 T 为非平凡根树, $\forall\ v_i, v_j \in V(T)$，$(i \neq j)$

(1)若v_i可达v_j，则v_i是v_j的祖先，v_j是v_i后代；

(2)若v_i邻接到v_j，则v_i是v_j的父亲，v_j是v_i儿子；

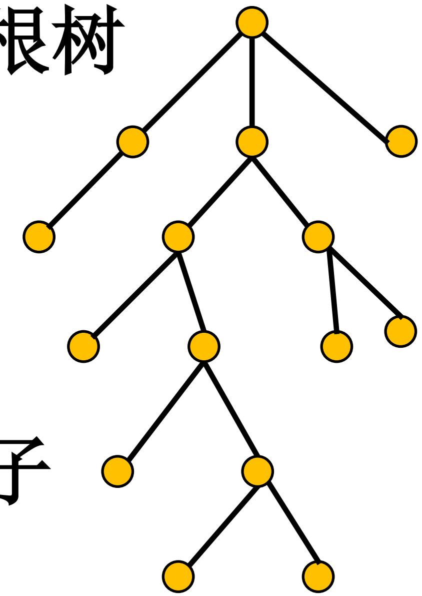
(3)若v_j, v_k父亲相同，则是v_j, v_k兄弟。

定义16.8 设v为根树T中任意一顶点，称v及其后代的导出子图为以v为根的根子树。



根树的分类

(1) *T* 为有序根树—同层上顶点标定次序的根树



(2) 分类

① *r* 叉树——每个分支点至多有*r* 个儿子

② *r* 叉有序树——*r*叉树是有序的

③ *r* 叉正则树——每个分支点恰有*r* 个儿子

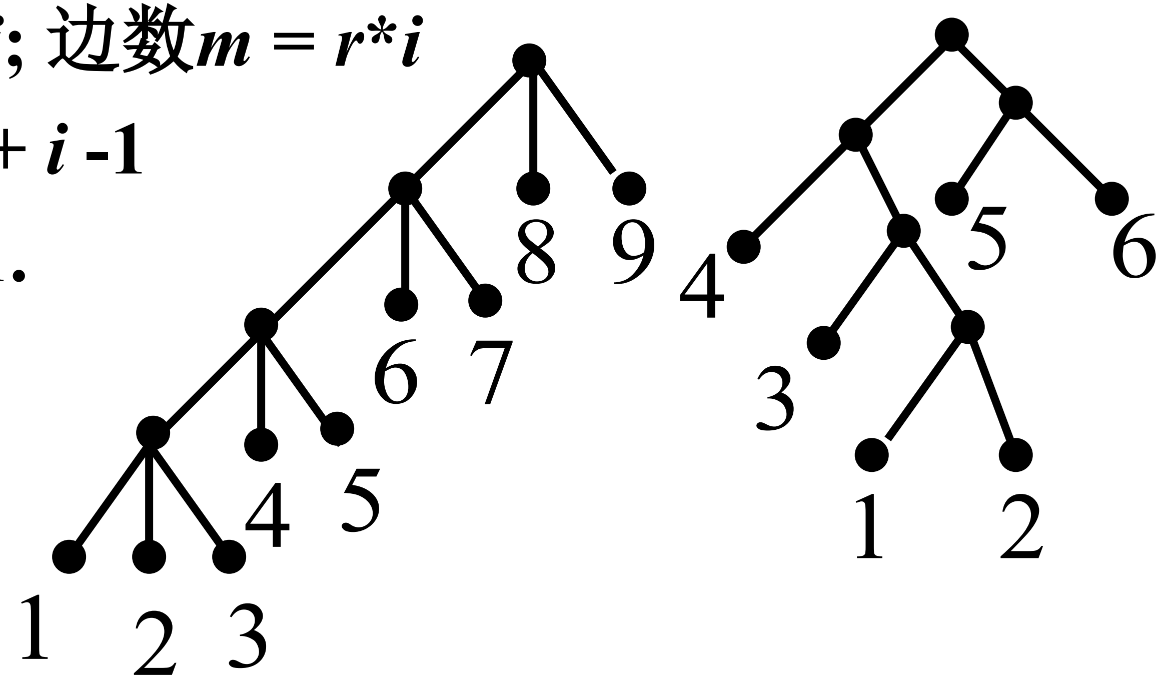
④ *r* 叉正则有序树

⑤ *r* 叉完全正则树-树叶层数相同的*r*叉正则树

⑥ *r* 叉完全正则有序树

实例

- 设有正则 r 叉树，其树叶数为 t,分支点数为 i,
  证明：$(r-1)i = t-1$.
- 证明：利用树的性质 $m = n-1$
  顶点数$n = t + i$; 边数$m = r*i$
  于是有 $r*i = t + i -1$
  所以$(r-1)i = t-1$.



练习

- 已知：28盏灯拟用一个电源插座, 问：需要多少块四插座接线板?
- 解：

问题等价于在正则4叉树中有28个叶子，问有多少分支点.

$$(4-1)\,i = 28 - 1$$

$$i = 9$$

需要 9 块四插座接线板。

最优二叉树

- **定义16.9** 设2叉树T有树叶$v_1, v_2, \ldots, v_t$，权分别为 $w_1, w_2, \ldots, w_t$，
  称$W(t) = \sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$为$T$的权，
  其中$l(v_i)$是v_i的层数.
  在所有有t片树叶、带权$w_1, w_2, \ldots, w_t$的2叉树中，权最小的2叉树称为最优2叉树.

求最优树的算法

Huffman算法

给定实数$w_1, w_2, \ldots, w_t$，且$w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_t$.

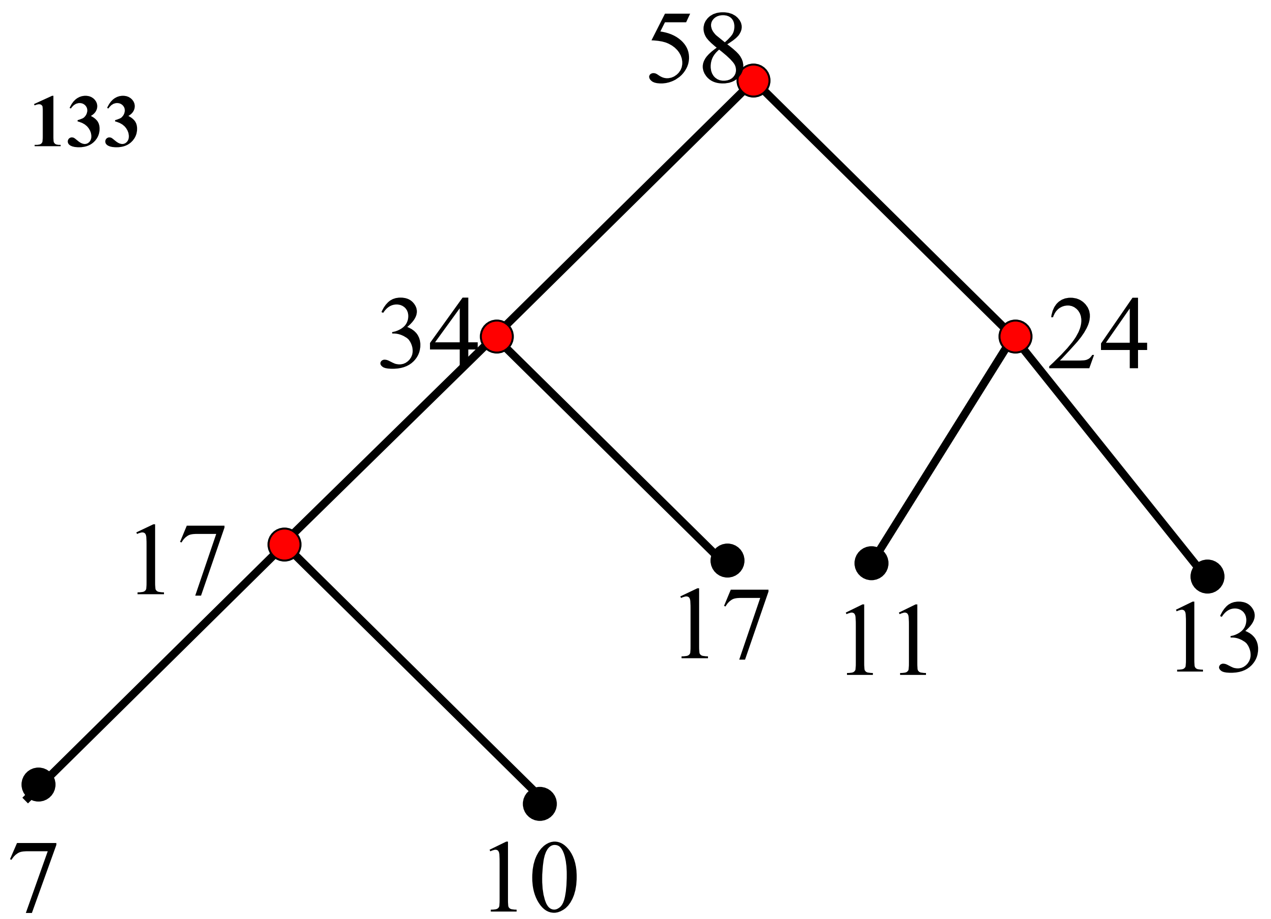
(1) 连接权为w_1, w_2的两片树叶，得一个分支点，其权为w_1+w_2.

(2) 在$w_1+w_2, w_3, \ldots, w_t$中选出两个最小的权，连接它们对应的顶点(不一定是树叶)，得新分支点及所带的权.

(3) 重复(2)，直到形成 $t-1$个分支点，t片树叶为止.

例 求带权7, 10, 11, 13, 17的最优树.

$W(T) = 133$



$W(T)$等于所有分支点的权之和

最佳前缀码

- 定义16.10 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$是长度为 n 的符号串

(1) 前缀: $\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$

(2) 前缀码: $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$中任何两个元素互不为前缀

(3) 二元前缀码: $\beta_i\,(i=1, 2, \ldots, m)$ 中只出现两个符号，如0与1.

- 例如：

  {1, 00, 011, 0101, 01001, 01000}

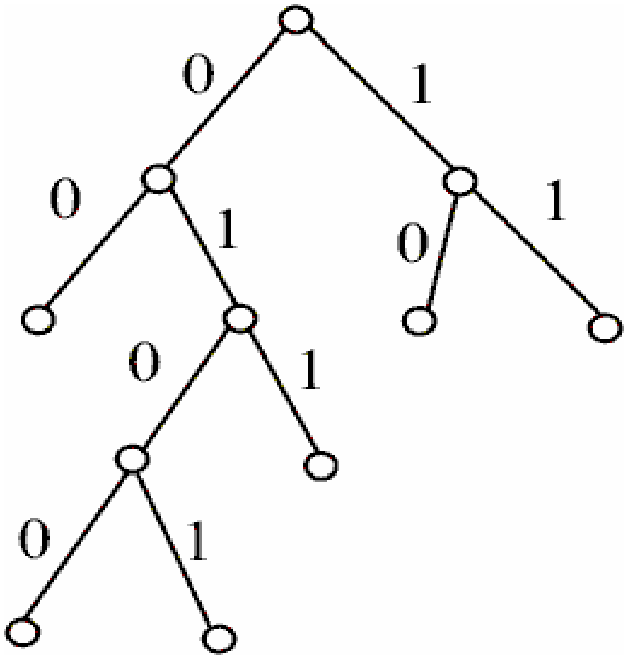
  {1, 00, 011, 0100, 01001, 01000} ✖

最佳前缀码

- 如何产生二元前缀码?

(1) 一棵2叉树产生一个二元前缀码.

(2) 一棵正则2叉树产生惟一的前缀码（左子树标0，右子树标1）



产生的前缀码为
{ 00, 10, 11, 011, 0100, 0101 }

用Huffman算法产生最佳前缀码

- 例16.7 在通信中，八进制数字出现的频率如下：

  0：25%　　1：20%

  2：15%　　3：10%

  4：10%　　5：10%

  6：5%　　7：5%

- 求传输它们的最佳前缀码，并求传输10^n（$n\geq 2$）个按上述比例出现的八进制数字需要多少个二进制数字？若用等长的（长为3）的码字传输需要多少个二进制数字？

解 用100个八进制数字中各数字出现的个数，即以100乘各频率为权，并将各权由小到大排列，得w_1=5, w_2=5, w_3=10, w_4=10, w_5=10, w_6=15, w_7=20, w_8=25. 用此权产生的最优树如图所示.

01-----0　　11-----1

001-----2　　100-----3

101-----4　　0001-----5

00000-----6　　00001-----7

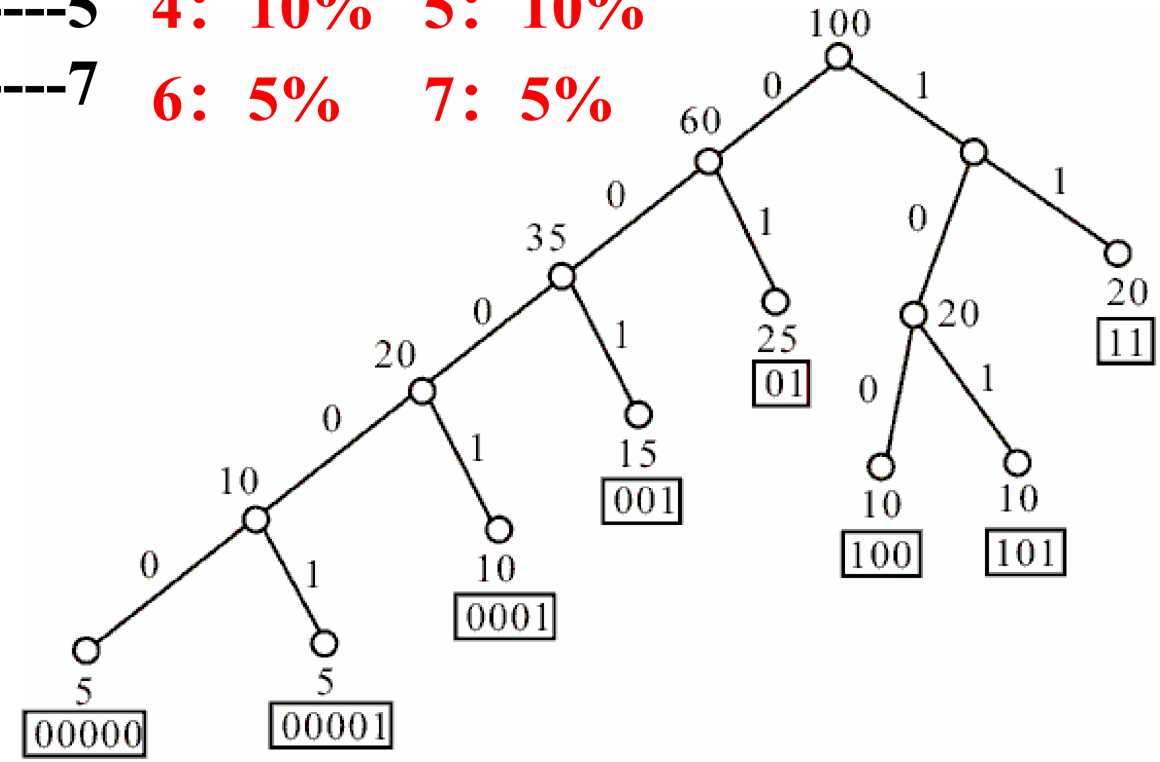
0：25%　1：20%

2：15%　3：10%

4：10%　5：10%

6：5%　7：5%

$W(T)$=285，传10^n($n\geq 2$)个用二进制数字需2.85×10^n个，用等长码需3×10^n个数字.



二叉树的周游

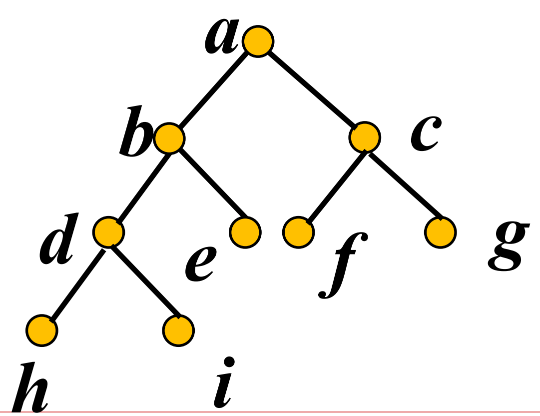
- 行遍或周游根树*T*——对*T*的每个顶点访问且仅访问一次

对2叉有序正则树的周游方式：

① 中序行遍法—次序为：左子树、根、右子树

② 前序行遍法—次序为：根、左子树、右子树

③ 后序行遍法—次序为：左子树、右子树、根



前序：abdhiecfg

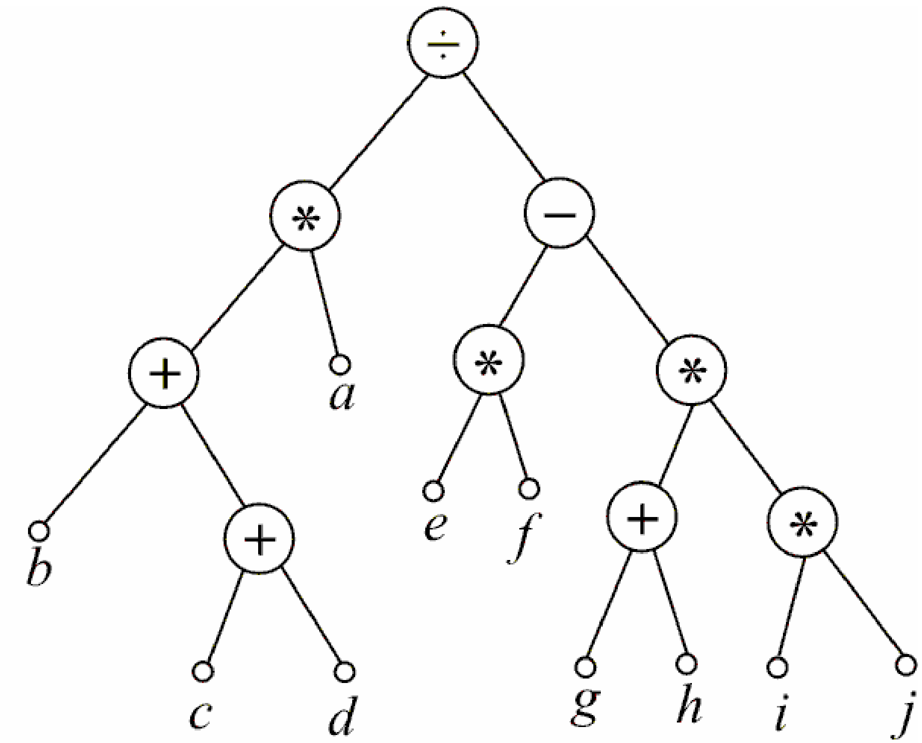
中序：hdibeafcg

后序：hidebfgca

用2叉有序正则树存放算式

算式 ($(b+(c+d))*a) \div ((e*f)-(g+h)*(i*j))$

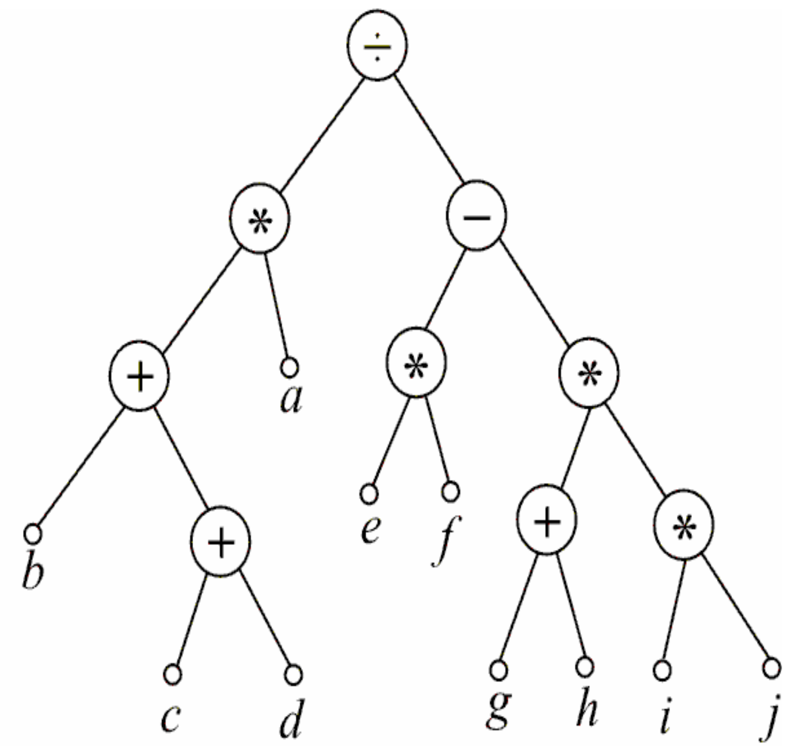
- □ 存放规则
- 最高层次运算符放在树根
- 依次将运算符放在根子树的根上
- 运算数放在树叶上
- 规定：被除数、被减数放在左子树树叶上



中序行遍法可还原算式

波兰符号法

- 波兰符号法
  - 按前序行遍法访问存放算式的2叉有序正则树
  - 规定每个运算符号与其后面紧邻两个数进行运算
- 逆波兰符号法
  - 按后序行遍法访问
  - 每个运算符与前面紧邻两数运算



波兰符号法：$\div * + b + c\,d\,a - * e f * + g h * i j$

逆波兰符号法：$b\,c\,d + + a * e f * g h + i j * * - \div$