第2章 命题逻辑等值演算

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

主要内容

- 等值式与基本的等值式
- 等值演算与置换规则
- 析取范式与合取范式，主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集
- 可满足性问题与消解法

2.1 等值式

- **定义2.1** 若等价式$A \leftrightarrow B$是重言式，则称A与B**等值**，记作$A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$是**等值式**.
- 几点说明：
  - 定义中，A, B, $\Leftrightarrow$均为元语言符号.
  - $\Leftrightarrow$不是一个新的联结词.
  - A或B中可能有哑元出现.例如

    $(p \to q) \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge r))$

    r为左边公式的哑元.
  - 用真值表可检查两个公式是否等值.

等值式例题

- 例1 判断下列各组公式是否等值:
- (1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\land q)\to r$

p q r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\land q$	$(p\land q)\to r$
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	0	1	0	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

- 结论：$p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\land q)\to r$

实例

```
if(x<2)
  {
    y=x;
  }
  else if(x<6)
  {
    y=x*x+1;
  }
```

```
if(x<2)
{
  y=x;
}
if(x>=2&&x<6)

{
  y=x*x+1;
}
```

等值式例题

- (2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

p	q	r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\to q$	$(p\to q)\to r$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

- 结论：$p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值

基本等值式

- 双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- 幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$
- 交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
- 结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$,
  $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
- 分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,
  $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- 德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
  $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- 吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

基本等值式

- 零律 $A\vee 1\Leftrightarrow 1$，$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$
- 同一律 $A\vee 0\Leftrightarrow A$，$A\wedge 1\Leftrightarrow A$
- 排中律 $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$
- 矛盾律 $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$
- 蕴涵等值式 $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$
- 假言易位 $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$
- 等价等值式 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
- 等价否定等值式 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$
- 归谬论 $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

基本等值式说明

- 上述等值式都是用元语言符号书写的，其中的A，B，C可以代表任意的公式，称这样的等值式为等值式模式，每个等值式模式都给出了无穷多个同类型的具体等值式。
- 例如：$A=p, B=q$时, $p\rightarrow q \Leftrightarrow \neg p\vee q$
- $A=p\vee q\vee r, B=p\wedge q$时，

  $(p\vee q\vee r)\rightarrow(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg(p\vee q\vee r) \vee (p\wedge q)$

对偶式

- 在给定的命题公式 A 中，将联结词 $\wedge$ 换成 $\vee$，将 $\vee$ 换成 $\wedge$，若有特殊变元 **0**和 **1** 亦相互取代，所得公式 A^* 称为 A 的对偶式。
- 反演规则：设 A 和 A^* 是对偶式，$p_1,p_2,\ldots,p_n$ 是出现在 A 和 A^* 中的原子变元，则

$$A(p_1,p_2,\ldots,p_n) \Leftrightarrow \neg A^*(\neg p_1, \neg p_2,\ldots, \neg p_n)$$

因为：$A\vee B\Leftrightarrow\neg(\neg A\wedge\neg B)$, $A\wedge B\Leftrightarrow\neg(\neg A\vee\neg B)$

- 对偶规则：如果 $A \Leftrightarrow B$, 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

等值演算与置换规则

- 1. 等值演算
  - 由已知的等值式推演出新的等值式的过程.
- 2. 置换规则
  - 设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换$\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式，若 $B\Leftrightarrow A$，则 $\Phi(B)\Leftrightarrow\Phi(A)$.
- 3. 等值演算的基础：
  - 基本的等值式
  - 置换规则
  - 等值关系的性质：自反性、对称性、传递性

等值演算的应用举例

- 证明两个公式等值

例2 证明 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

证　$p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow \neg p\vee(q\to r)$　（蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow \neg p\vee(\neg q\vee r)$　（蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee r$　（结合律）

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee r$　（德摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$　（蕴涵等值式）

今后在注明中省去置换规则

- 注意：用等值演算不能直接证明两个公式不等值

等值演算的应用举例

- 证明两个公式不等值
- 例3 证明 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ 不等值
- 证：

方法一 真值表法. 见例1(2)

方法二 观察法. 观察到000是左边的成真赋值，是右边的成假赋值

方法三 先用等值演算化简公式，然后再观察.

$$p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee r$$

$$(p\rightarrow q)\rightarrow r \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee r$$

看出000是左边的成真赋值和右边的成假赋值.

等值演算的应用举例

- 判断公式类型: A为矛盾式当且仅当$A \Leftrightarrow 0$

  A为重言式当且仅当$A \Leftrightarrow 1$

- **例4** 用等值演算法判断下列公式的类型

  (1) $q \wedge \neg(p \to q)$

  (2) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

  (3) $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$

判断公式类型

- 解 (1) $q \wedge \neg(p \to q)$

$\Leftrightarrow q \wedge \neg(\neg p \vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q \wedge (p \wedge \neg q)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p \wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

- 矛盾式

判断公式类型

- (2) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$　（蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$　（交换律）

$\Leftrightarrow 1$

- 重言式

判断公式类型

- (3) $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$

  $\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q)) \wedge r$ （分配律）

  $\Leftrightarrow p \wedge 1 \wedge r$ （排中律）

  $\Leftrightarrow p \wedge r$ （同一律）

- 可满足式

2.2 析取范式与合取范式

- 定义2.2

(1) 文字——命题变项及其否定的总称

(2) 简单析取式——有限个文字构成的析取式

p, $\neg q$, $p \vee \neg q$, $p \vee q \vee r$, …

(3) 简单合取式——有限个文字构成的合取式

p, $\neg q$, $p \wedge \neg q$, $p \wedge q \wedge r$, …

- 注意：单个文字既是简单析取式，又是简单合取式。

简单析（合）取式的性质

- 定理2.1 (1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.
- (2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.

证明定理2.1(2)

- 充分性，若有一个命题变项p及其否定$\neg p$同时出现在一个简单合取式中，则此简单合取式有形式：
  $p \wedge \neg p \wedge \ldots$
  显然，不管是什么解释I，$p \wedge \neg p$在I下取0值，于是此简单合取式在I下取0值，故此简单合取式是矛盾式。
- 必要性，若此简单合取式是矛盾式，而任意命题变项p及其否定均不同时在此简单合取式中出现。那么，取这样的解释I：指定带有否定号的原子取0值，不带否定号的原子取1值，显然，此简单合取式在这个解释I下取1值，与此简单合取式是矛盾式相矛盾。

析取范式与合取范式

- 定义2.3

(1)析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

- p, $\neg p\wedge q$, $p\vee\neg q$, $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)$

(2) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

- p, $\neg p\wedge q$,$p\vee\neg q$, $(p\vee q\vee\neg p)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

(3) 范式——析取范式与合取范式的总称

- 注意：简单合取式和简单析取式都既是析取范式又是合取范式。

范式的性质

- **定理2.2**

  (1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它每个简单合取式都是矛盾式.

  (2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

- **例:**

  $(p\wedge\neg p)\vee(\neg q\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge\neg r\wedge r)$ 矛盾式

  $(p\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee q\vee\neg r)\wedge(q\vee\neg r\vee r)$ 重言式

命题公式的范式

- **定理2.3**（范式存在定理）任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式。
- 公式A的析取(合取)范式——与A等值的析取(合取)范式。

命题公式的范式

- 求公式A的范式的步骤：

  (1) 消去A中的$\rightarrow, \leftrightarrow$（若存在）

  $$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

  $$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

  (2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

  $$\neg \neg A \Leftrightarrow A$$

  $$\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

  $$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

命题公式的范式

(3) 使用分配律

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$　　求合取范式

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$　　求析取范式

公式范式的不足——不惟一

求公式的范式

- **例5** 求下列公式的析取范式与合取范式
  - (1) $(p\to\neg q)\vee\neg r$
  - (2) $(p\to\neg q)\to r$
- 解 (1) $(p\to\neg q)\vee\neg r$

  $\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$ （消去→）

  $\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg r$ （结合律）

  最后结果既是析取范式(由3个简单合取式组成的析取式)，又是合取范式(由一个简单析取式组成的合取式) 。

求公式的范式

- (2) $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$

  $\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\rightarrow r$ （消去第一个→）

  $\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→）

  $\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （否定号内移——德摩根律) 析取范式

  $\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律） 合取范式

极小项与极大项

- **定义2.4** 在含有n个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第i个文字出现在左起第i位上（$1\le i\le n$），称这样的简单合取式（简单析取式）为**极小项**（**极大项**）.

实例

- 由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	编码	名称	公式	编码	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

极小项的编码(二进制):命题变项—1，其否定—0
极大项的编码(二进制):命题变项—0，其否定—1

极小项的性质

p	q	m_0	m_1	m_2	m_3
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

1) 每一个极小项当其赋值与编码相同时，其真值为 1，在其余 2^n-1 种指派情况下均为 0.
2) 任意两个不同极小项的合取式永假.
3) 全体极小项的析取式永为真.

极大项的性质

p	q	M_0	M_1	M_2	M_3
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

- 每一个极大项当其赋值与编码相同时，其真值为 0，在其余 2^n-1 种指派情况下均为 1.
- 任意两个不同极大项的析取式永真.
- 全体极大项的合取式永为假.

实例

- 由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	名称	成真赋值	公式	名称	成假赋值
$\neg p\wedge\neg q$	m_0	0 0	$p\vee q$	M_0	0 0
$\neg p\wedge q$	m_1	0 1	$p\vee\neg q$	M_1	0 1
$p\wedge\neg q$	m_2	1 0	$\neg p\vee q$	M_2	1 0
$p\wedge q$	m_3	1 1	$\neg p\vee\neg q$	M_3	1 1

极小项仅在赋值与其编码相同时为真，其余赋值下均为假；
极大项仅在赋值与其编码相同时为假，其余赋值下均为真。

实例

- 由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	名称	成真赋值	公式	名称	成假赋值
$\neg p \wedge \neg q$	m_0	0 0	$p \vee q$	M_0	0 0
$\neg p \wedge q$	m_1	0 1	$p \vee \neg q$	M_1	0 1
$p \wedge \neg q$	m_2	1 0	$\neg p \vee q$	M_2	1 0
$p \wedge q$	m_3	1 1	$\neg p \vee \neg q$	M_3	1 1

定理2.4（m_i与M_i的关系） $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$， $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

实例

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	0 0 0	m_0	$p\vee q\vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	0 0 1	m_1	$p\vee q\vee\neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	0 1 0	m_2	$p\vee\neg q\vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	0 1 1	m_3	$p\vee\neg q\vee\neg r$	0 1 1	M_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p\vee q\vee r$	1 0 0	M_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p\vee q\vee\neg r$	1 0 1	M_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p\vee\neg q\vee r$	1 1 0	M_6
$p\wedge q\wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	1 1 1	M_7

极小项与极大项的几点说明

- n个命题变项有2^n个极小项和2^n个极大项.
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值.
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示. 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示. m_i（M_i）称为极小项（极大项）的名称.
- 每一个极小（大）项当其赋值与编码相同时，其真值为真（假），在其余 2^n-1 种赋值情况下均为假（真）.

主析取范式与主合取范式

- 定义2.5
  - 主析取范式——由极小项构成的析取范式
  - 主合取范式——由极大项构成的合取范式
  - 公式A的主析取(合取)范式——与A 等值的主析取(合取)范式
- 例：n=3, 命题变项为 p, q, r 时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ ——主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_7$——主合取范式

主析取范式与主合取范式

- 定理2.5 (主范式的存在惟一定理) 任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式,并且是惟一的.
- 主范式的求法:
  - 真值表法

    > 一个公式的真值为 1 的赋值所对应的极小项的析取，即为此公式的主析取范式。
    > 一个公式的真值为 0 的赋值所对应的极大项的合取，即为此公式的主合取范式。

  - 等值演算法

说明真值表法的正确性

- 对于公式G，用这种方法写出主析取范式G’。G’＝G的真值为 1的赋值所对应的极小项的析取
- 若某一个赋值I使G取1，而在该赋值下取1的唯一极小项写在G’中，故G’也取1；
- 若I使G取0，而在I下取1的唯一极小项不在G’中且I弄假其它所有极小项，故G’取0值。
- 所以G’是与G等值的主析取范式。
- 同理，可说明主合取范式求法的正确性。

$A=(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\rightarrow r)$

p q r	$p\rightarrow q$	$p\rightarrow r$	$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\rightarrow r)$
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	1	1
1 0 0	0	0	1
1 0 1	0	1	0
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	1	1

成真赋值:000、001、010、011、100、111;
成假赋值：101、110

$A=(p\to q)\leftrightarrow(p\to r)$

成真赋值: 000、001、010、011、100、111

成假赋值: 101、110

- 主析取范式:

$A\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_7$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee$

$(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

主合取范式:

$A\Leftrightarrow M_5\wedge M_6$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

求公式主析取范式的步骤

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee \ldots \vee B_s$, 其中B_j是简单合取式 $j=1,2, \ldots ,s$.

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止.

(3) 消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i\vee m_i$.

(4) 将极小项按下标从小到大排列.

求公式主合取范式的步骤

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge\ldots\wedge B_s$, 其中$B_j$是简单析取式 $j=1,2,\ldots,s$.

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$B_j \Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止.

(3) 消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i\wedge M_i$.

(4) 将极大项按下标从小到大排列.

几点说明

$(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$ （主析取范式）

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$ （主合取范式）

- 一个公式的主析取范式的极小项的编码对应着该公式的所有成真赋值。一个公式的主合取范式的极大项的编码对应着该公式的所有成假赋值。
- 根据主析取范式可以直接求出主合取范式，方法是列出没有出现在主析取范式中的极小项编码，作为极大项的编码。同理，根据主合取范式也可以直接求出主析取范式。

实例

- 设$G=(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(\neg q\wedge\neg r)$，求其对应的主析取范式和主合取范式。

解 $G=(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(\neg q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q\wedge(r\vee\neg r))\vee(\neg p\wedge(q\vee\neg q)\wedge r)$

$\quad\vee((p\vee\neg p)\wedge\neg q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

$\quad\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

$\quad\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_6\vee m_7$ 主析取范式

实例（续）

$G \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$ 主析取范式

$\Leftrightarrow M_2 \wedge M_5$

$\Leftrightarrow (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$ 主合取范式

实例

- 例6 (1) 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$的主析取范式和主合取范式.
- 解 $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （析取范式） ①

$(p\wedge q) \Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$ ②

$r\Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$ （主析取范式）

实例

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （合取范式） ④

$p\vee r\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$ ⑤

$q\vee r \Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$ ⑥

⑤, ⑥代入④ 并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$ （主合取范式）

主范式的应用

- 1. 求公式的成真成假赋值
  - 设公式A含n个命题变项, A的主析取范式有s个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余2^n-s 个赋值都是成假赋值 。
- 例如　$(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$
  - 成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111,
  - 成假赋值为 000, 010, 100.
- 类似地，由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的应用

2. 判断公式的类型. 设A含n个命题变项:

A为重言式

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式含全部2^n个极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式不含任何极大项, 记为1.

A为矛盾式

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式含全部2^n个极大项

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式不含任何极小项, 记为0.

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

主范式的应用

例7 用主析取范式判断公式的类型:

(1) $A \Leftrightarrow \neg(p \to q) \wedge q$

(2) $B \Leftrightarrow p \to (p \vee q)$

(3) $C \Leftrightarrow (p \vee q) \to r$

解

(1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow 0$ 矛盾式

(2) $B \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$ 重言式

主范式的应用

(3) $C \Leftrightarrow \neg(p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$

$\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$

可满足式

主范式的应用

- 3. 判断两个公式是否等值
- 例8 用主析取范式判以下每一组公式是否等值

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

- 解 $p\to(q\to r) = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\to r = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\to q)\to r = m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

由主析取范式确定主合取范式

- **例9** 设A有3个命题变项p,q,r, 且已知$A=m_1 \vee m_3 \vee m_7$, 求A的主合取范式.
- 解　A的成真赋值是1,3,7的二进制表示, 成假赋值是在主析取范式中没有出现的极小项的下角标0,2,4,5,6的二进制表示, 它们恰好是A的主合取范式的极大项的下角标, 故

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

主范式的应用：应用题

- 某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人进行了判断：

  甲说王教授不是苏州人，是上海人。

  乙说王教授不是上海人，是苏州人。

  丙说王教授既不是上海人，也不是杭州人。

  听完以上3人的判断后，王教授笑着说，他们3人中有一人说的全对，有一人说对了一半，另一人说的全不对。试用逻辑演算法分析王教授到底是哪里人？

主范式的应用：应用题续

- 解 设命题

  p：王教授是苏州人。

  q：王教授是上海人。

  r：王教授是杭州人。

  p,q,r中必有一个真命题，两个假命题，要通过逻辑演算将真命题找出来。设

  甲的判断为$A_1 = \neg p \wedge q$

  乙的判断为$A_2 = p \wedge \neg q$

  丙的判断为$A_3 = \neg q \wedge \neg r$

主范式的应用：应用题续

	全对	对一半	全错
甲	$B_1=A_1=\neg p\wedge q$	$B_2=(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$	$B_3=p\wedge\neg q$
乙	$C_1=A_2=p\wedge\neg q$	$C_2=(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))$	$C_3=\neg p\wedge q$
丙	$D_1=A_3=\neg q\wedge\neg r$	$D_2=(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$	$D_3=q\wedge r$

$$E=(B_1\wedge C_2\wedge D_3)\vee(B_1\wedge C_3\wedge D_2)\vee(B_2\wedge C_1\wedge D_3)\vee(B_2\wedge C_3\wedge D_1)\vee(B_3\vee C_1\wedge D_2)\vee(B_3\wedge C_2\wedge D_1)$$

主范式的应用：应用题续

- $B_1 \wedge C_2 \wedge D_3$

$=(\neg p \wedge q) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)) \wedge (q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge ((\neg p \wedge \neg q \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge q \wedge r))$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow 0$

主范式的应用：应用题续

- 类似地，可以得到
  - $B_1 \wedge C_3 \wedge D_2 \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$
  - $B_2 \wedge C_1 \wedge D_3 \Leftrightarrow 0$
  - $B_2 \wedge C_3 \wedge D_1 \Leftrightarrow 0$
  - $B_3 \wedge C_1 \wedge D_2 \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r$
  - $B_3 \wedge C_2 \wedge D_1 \Leftrightarrow 0$
- $E \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$, 由于王教授不能同时是两个地方的人，所以王教授是上海人。

主范式的应用：应用题

- 某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察，需满足下述条件:

(1) 若A去, 则C必须去;

(2) 若B去, 则C不能去;

(3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

- 解 记 p:派A去, q:派B去, r:派C去

(1) $p\to r$, (2) $q\to\neg r$, (3) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

主范式的应用：应用题续

- 求$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$的成真赋值

$$A\Leftrightarrow(\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r))$$
$$\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow((\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q))$$
$$\vee((r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$
$$\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(\neg p\wedge q))\vee((r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$

成真赋值:101,010

结论: 方案1 派A与C去，方案2 派B去

问题

n个命题变项可以构成多少个不等值的命题公式？

答：n个命题变项可以产生2^n个极小项（极大项），所以可以构成 2^{2^n} 个不等值的命题公式。因为2^n个极小项（极大项），共可产生

$$C_{2^n}^{0} + C_{2^n}^{1} + \ldots + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n}$$

个不同的主析取范式（主合取范式），而每个命题公式都有与之等值的唯一的主范式。

2.3 联结词的完备集

定义2.6 称F:$\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 为n元真值函数.

$\{0,1\}^n=\{00\ldots0, 00\ldots1, \ldots, 11\ldots1\}$，包含$2^n$个长为$n$的0,1符号串.

共有 2^{2^n} 个n元真值函数?

1元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2元真值函数

p	q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

p	q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

公式与真值函数

- 任何一个含n个命题变项的命题公式A都对应惟一的一个n元真值函数F，F恰好为A的真值表.
- 等值的公式对应的真值函数相同.
- 例如：$p\to q$, $\neg p\lor q$ 都对应$F_{13}^{(2)}$

其他联结词

- **定义2.8** 设 p, q 为两个命题, $\neg(p\wedge q)$称作p与q的**与非式**, 记作$p\uparrow q$, 即 $p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$, $\uparrow$称为**与非联结词**.
- **与非的性质:**
  - $P\uparrow P \Leftrightarrow \neg(P\wedge P) \Leftrightarrow \neg P$
  - $(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q) \Leftrightarrow \neg(P\uparrow Q) \Leftrightarrow P\wedge Q$
  - $(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q) \Leftrightarrow \neg P\uparrow\neg Q$

    $\Leftrightarrow \neg(\neg P\wedge\neg Q) \Leftrightarrow P\vee Q$

其他联结词

- **定义2.8** 设 p, q 为两个命题, $\neg(p\vee q)$ 称作 p 与 q 的**或非式**, 记作 $p\downarrow q$, 即 $p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$, $\downarrow$称为**或非联结词.**
- **或非的性质:**
  - $P \downarrow P \Leftrightarrow \neg(P \vee P) \Leftrightarrow \neg P$
  - $(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg (P \downarrow Q) \Leftrightarrow P \vee Q$
  - $(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \downarrow \neg Q$

    $\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$

其他联结词

- 定义：给定两个命题p和q，复合命题$p \bar{\vee} q$称作p和q的“不可兼析取”. $p \bar{\vee} q$的真值为1, 当且仅当p和q真值不相同, 否则$p \bar{\vee} q$的真值为0.

p	q	$p \bar{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$P \bar{\vee} Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$$

联结词完备集

- **定义2.7** 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n\geq 1)$元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是**联结词完备集**。
  - 若S是联结词完备集，则任何命题公式都可由S中的联结词表示。
- **定理2.6** $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集。

证明 由范式存在定理可证。

联结词完备集

- **推论** 以下都是联结词完备集

  (1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ (2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

  (3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$ (4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$

  (5) $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

- 证明：(1),(2) 在联结词完备集中加入新的联结词后仍为完备集
- (3) $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- (4) $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- (5) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

最小联结词完备集

- S是联结词完备集，从S中任意去掉一个联结词后, 得到一个联结词集合S', 至少有一个公式B, 不等值于仅包含S'中联结词的任一公式, 则称S为最小联结词完备集.
- 试说明$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$和$\{\neg, \to\}$是最小联结词完备集。

最小联结词完备集

- 根据推论已知$\{\neg, \wedge\}$是联结词完备集，下面说明一元联结词$\neg$不能用二元联结词$\wedge$表示。
- 如有$\neg p \Leftrightarrow$（$\ldots (p \wedge q) \wedge \ldots \wedge \ldots$）的形式，

$\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$不是联结词完备集, $\neg$不能用它表示

它的子集$\{\wedge\},\{\vee\},\{\rightarrow\},\{\leftrightarrow\},\{\wedge,\vee\},\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$等都不是

合所替代.

- 同理可说明“$\neg$”不能由“$\vee$”和“$\rightarrow$”的复合所替代.所以去掉$\neg$是不可以的，所以$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$和$\{\neg, \rightarrow\}$是最小联结词完备集。

最小联结词完备集

- **定理2.7** $\{\uparrow\}$与$\{\downarrow\}$为最小联结词完备集.
- 证明 $\{\neg, \wedge, \vee\}$为完备集

$$\neg p \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

得证$\{\downarrow\}$为联结词完备集，且是最小联结词完备集.

对$\{\uparrow\}$类似可证。

练习

- 将$A = (p\rightarrow\neg q)\wedge r$改写成下述各联结词集中的公式:

(1) $\{\neg, \wedge, \vee\}$

(2) $\{\neg, \wedge\}$

(3) $\{\neg, \vee\}$

(4) $\{\neg, \rightarrow\}$

(5) $\{\uparrow\}$

(6) $\{\downarrow\}$

解

(1) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\wedge r$

(2) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\wedge r$

(3) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg r)$

练习（续）

(4) $(p\to\neg q)\wedge r \Leftrightarrow \neg(\neg(p\to\neg q)\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow \neg((p\to\neg q)\to\neg r)$

(5) $(p\to\neg q)\wedge r \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (p\uparrow q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg\ \neg((p\uparrow q)\wedge r)$

$\Leftrightarrow ((p\uparrow q)\uparrow r)\uparrow((p\uparrow q)\uparrow r)$

(6) $(p\to\neg q)\wedge r \Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\downarrow\neg q)\downarrow\neg r$

$\Leftrightarrow ((p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q))\downarrow(r\downarrow r)$

- 说明：答案不惟一

2.4 可满足性问题与消解法

- 约定:简单析取式不同时含某个命题变项和它的否定, 否则它为重言式, 可以把它从合取范式中消去.
- 不含任何文字的简单析取式称作空简单析取式, 记作λ. 规定λ是不可满足的.
- 文字l的补l^c:若$l=p$,则$l^c=\neg p$;若$l=\neg p$,则$l^c=p$.
- S:合取范式, C:简单析取式, l:文字, α:赋值
- $S \approx S'$:设S和S'是两个合取范式, S是可满足的当且仅当S'可满足的.

消解式

- **定义2.9** 设$C_1=l\vee C_1'$, $C_2=l^c\vee C_2'$, C_1'和C_2'不含l和l^c, 称$C_1'\vee C_2'$为C_1和C_2(以l和l^c为**消解文字**)的**消解式**或**消解结果**, 记作$\mathrm{Res}(C_1,C_2)$。
  - 例如, $\mathrm{Res}(\neg p\vee q, p)= q$
  - $\mathrm{Res}(\neg p\vee q\vee r, p\vee q\vee\neg s)= q\vee r\vee\neg s$
- **定理2.8** $C1\wedge C2 \approx \mathrm{Res}(C1,C2)$

注意

$C1\wedge C2$与$\mathrm{Res}(C1,C2)$有相同的可满足性, 但不一定等值.

$C1 \land C2 \approx \mathrm{Res}(C1,C2)$的证明

- 证 记$C=\mathrm{Res}(C_1,C_2)=C_1'\lor C_2'$, 其中$l$和$l^c$为消解文字, $C_1=l\lor C_1'$, $C_2=l^c\lor C_2'$, 且C_1'和C_2'不含l和l^c.

假设$C_1\land C_2$是可满足的, α是它的满足赋值, 不妨设$\alpha(l)=1$.

C_2必含有文字$l'\neq l$, l^c且$\alpha(l')=1$. C中含有l', 故α满足C.

反之, 假设C是可满足的, α是它的满足赋值. C必有l'使得$\alpha(l')=1$, 不妨设C_1'含l', 于是α满足C_1. 把α扩张到l(和l^c)上:

若$p=l$, 则令$\alpha(p)=0$; 若$p=l^c$, 则令$\alpha(p)=1$.

而α满足C_2. 得证$C_1\land C_2$是可满足的.

消解序列与合取范式的否证

- **定义2.10** 设S是一个合取范式, $C_1,C_2,\ldots,C_n$是一个简单析取式序列. 如果对每一个$i(1\leq i\leq n)$, C_i是S的一个简单析取式或者是$\mathrm{Res}(C_j,C_k)(1\leq j<k<i)$, 则称此序列是由$S$导出$C_n$的**消解序列**. 当$C_n=\lambda$时, 称此序列是$S$的一个**否证**.
- **定理2.9** 一个合取范式是不可满足的当且仅当它有否证.

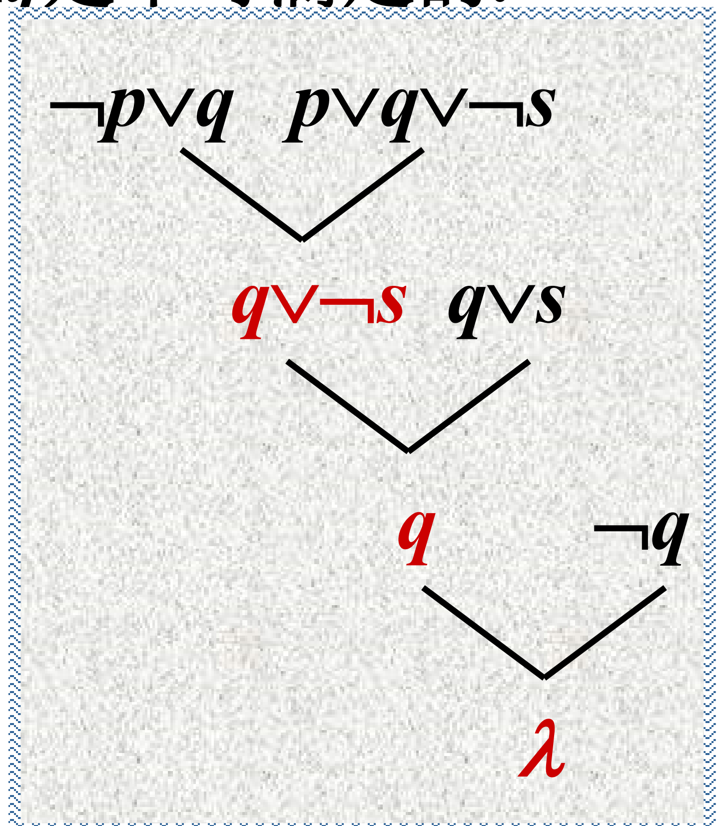
消解序列与合取范式的否证

- **例11** 用消解规则证明 $S=(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q\vee\neg s)\wedge(q\vee s)\wedge\neg q$是不可满足的.
- 证 $C_1=\neg p\vee q$, $C_2=p\vee q\vee\neg s$, $C_3=\mathrm{Res}(C_1,C_2)=q\vee\neg s$, $C_4=q\vee s$,
- $C_5=\mathrm{Res}(C_3,C_4)=q$, $C_6=\neg q$, $C_7=\mathrm{Res}(C_5,C_6)=\lambda$, 这是$S$的否证.

消解序列与合取范式的否证

- **例11** 用消解规则证明
  $S=(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q\vee\neg s)\wedge(q\vee s)\wedge\neg q$是不可满足的.
- 消解序列

  1) $\neg p\vee q$　　　　S的简单析取式
  2) $p\vee q\vee\neg s$　　S的简单析取式
  3) $q\vee\neg s$　　　　1)2)消解
  4) $q\vee s$　　　　　S的简单析取式
  5) q　　　　　　　3)4)消解
  6) $\neg q$　　　　　　S的简单析取式
  7) λ　　　　　　5)6)消解



这是S的一个否证, 从而证明S是矛盾式.

练习

- 构造公式$A=(p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q)\wedge\neg r$的否证,从而证明它是矛盾式.
- 解 消解序列:

① $p\vee q$ A的简单析取式
② $\neg p\vee q$ A的简单析取式
③ q ①,②消解
④ $\neg q\vee r$ A的简单析取式
⑤ $\neg r$ A的简单析取式
⑥ $\neg q$ ④,⑤消解
⑦ λ ③,⑥消解

这是A的一个否证, 从而证明A是矛盾式.

消解算法

输入: 合式公式A

输出: 当A是可满足时, 回答“Yes”; 否则回答“No”.

1. 求A的合取范式S
2. 令$S_0\leftarrow\varnothing$, $S_2\leftarrow\varnothing$, $S_1\leftarrow S$的所有简单析取式
3. For $C_1\in S_0$和$C_2\in S_1$
4. If C_1, C_2可以消解 then
5. 计算$C\leftarrow \mathrm{Res}(C_1,C_2)$
6. If $C=\lambda$ then
7. 输出“No”, 计算结束
8. If $C\notin S_0$且$C\notin S_1$ then
9. $S_2\leftarrow S_2\cup\{C\}$

消解算法

10. For $C_1 \in S_1$, $C_2 \in S_1$且$C_1 \neq C_2$

11. If C_1, C_2可以消解 then

12. 计算$C \leftarrow \mathrm{Res}(C_1, C_2)$

13. If $C = \lambda$ then

14. 输出“No”, 计算结束

15. If $C \notin S_0$且$C \notin S_1$ then

16. $S_2 \leftarrow S_2 \cup \{C\}$

17. If $S_2 = \varnothing$ then

18. 输出“Yes”, 计算结束

19. Else $S_0 \leftarrow S_0 \cup S_1$, $S_1 \leftarrow S_2$, $S_2 \leftarrow \varnothing$, goto 3

消解算法例题

- **例12** 用消解算法判断下述公式是否是可满足的:

  1) $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg q$

- 解 $S = (\neg p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg q$

循环1 $S_0 = \varnothing$, $S_1 = \{\neg p \vee q, p \vee q, \neg q\}$, $S_2 = \varnothing$

$\mathrm{Res}(\neg p \vee q, \neg q) = \neg p$

$\mathrm{Res}(p \vee q, \neg q) = p$

$\mathrm{Res}(\neg p \vee q, p \vee q) = q$

$S_2 = \{p, \neg p, q\}$

消解算法例题

循环2 $S_0=\{\neg p\vee q, p\vee q, \neg q\}, S_1=\{p, \neg p, q\}, S_2=\varnothing$

Res($\neg p\vee q, p$)=q

Res($p\vee q, \neg p$)=q

Res($q, \neg q$)= λ

输出“No”，说明S是不可满足的。

消解算法例题

- 例12 用消解算法判断下述公式是否是可满足的:

  2) $p\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$

- 解 $S = p\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$

循环1 $S_0=\varnothing$, $S_1=\{p, p\vee q, p\vee\neg q, q\vee\neg r, q\vee r\}$, $S_2=\varnothing$

$\text{Res}(p\vee q, p\vee\neg q)=p$

$\text{Res}(p\vee\neg q, q\vee\neg r)=p\vee\neg r$

$\text{Res}(p\vee\neg q, q\vee r)= p\vee r$

$\text{Res}(q\vee\neg r, q\vee r)=q$

$S_2=\{p\vee r, p\vee\neg r, q\}$

消解算法例题

循环2 $S_0=\{p, p\vee q, p\vee\neg q, q\vee\neg r, q\vee r\}$, $S_1=\{p\vee r, p\vee\neg r, q\}$, $S_2=\varnothing$

$\mathrm{Res}(p\vee\neg q, q)=p$

$\mathrm{Res}(q\vee\neg r, p\vee r)=p\vee q$

$\mathrm{Res}(q\vee r, p\vee\neg r)=p\vee q$

$\mathrm{Res}(p\vee r, p\vee\neg r)=p$

$S_2=\varnothing$

输出“Yes”，说明S是可满足的。