第四章 一阶逻辑基本概念

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

主要内容

- 一阶逻辑命题符号化
  - 个体词、谓词、量词
  - 一阶逻辑命题符号化
- 一阶逻辑公式及其解释
  - 一阶语言
  - 合式公式
  - 合式公式的解释
  - 永真式、矛盾式、可满足式

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 在命题逻辑中, 命题演算的基本单位是命题, 不再对原子命题进行分解, 故无法研究命题的语法结构、成分和内在的逻辑特性。

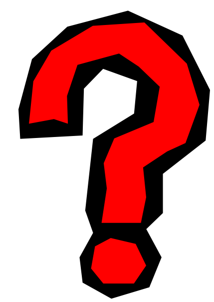
例：

p： 人总是要死的

q： 苏格拉底是人

r： 苏格拉底是要死的

$p \wedge q \rightarrow r$不是重言式



- 基于谓词分析的逻辑称为一阶逻辑，它是命题逻辑的扩充和发展。

4.1一阶逻辑命题符号化

原子命题

客体

不依人们主观而存在的客观实体，可以是具体事物或抽象概念，通常用小写字母表示.

谓词

描述客体的性质、特征，或客体间的关系的词，通常用大写字母表示.

实例

- 在命题逻辑中，
  p:　“张三是个大学生”，
  q:　“李四是个大学生”。
- 在谓词逻辑中，
  A:　“是个大学生”，
  c:　“张三”，
  e:　“李四”，则
  A(c):　“张三是个大学生”，
  A(e):　“李四是个大学生”。

个体词

- 个体词——所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体.

  个体常项：具体的事务，用a, b, c表示

  个体变项：抽象的事物，用x, y, z表示

  个体域(论域)——个体变项的取值范围

  有限个体域，如 $\{a, b, c\}$, $\{1, 2\}$

  无限个体域，如 N, Z, R, …

  全总个体域——由宇宙间一切事物组成

个体词

- 设 R(x)： “ x 是大学生”，
- 如果 x 的个体域为：
  - “某大学里的学生”，则 R(x) 是永真式。
  - “某单位里的职工”，则 R(x) 对一些人为真，对另一些人为假。

谓词

- 谓词——表示个体词性质或相互之间关系的词。

  谓词常项：表示具体性质或关系的谓词，如 $F(a)$：a是人。

  谓词变项：表示抽象的、泛指的性质或关系的谓词，如 $F(x)$：x具有性质F。
- 一般地，含n个命题变项$x_1, x_2, \ldots, x_n$的谓词P称作n元谓词，记作$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$。
- 注意：n元谓词$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$不是命题，必须用谓词常项取代P，用个体常项$a_1,a_2,\ldots,a_n$取代$x_1,x_2,\ldots,x_n$，得$P(a_1,a_2,\ldots,a_n)$是命题。

几点说明

- 将不带个体变项的谓词称为0元谓词。
  - 例如：$F(a)$，$G(a,b)$， $P(a_1,a_2,\ldots,a_n)$等都是0元谓词。
  - 当F，G，P为谓词常项时，0元谓词为命题。
- 任何命题均可以表示成0元谓词，所以可以将命题看作特殊的谓词。

一元谓词

通常一元谓词表达了客体的性质。

如 **A(a)** 可以表示：

- 张三是大学生。
- 李四聪明。
- 王五学习很好。
- **7**是素数。……

多元谓词

通常多元谓词表达了客体之间的关系。如:

- B(a, b) 可以表示:
  - a 小于 b.
  - 地球绕着太阳转.
  - 张明和张华是兄弟. ……
- L(a, b, c) 可以表示:
  - a 在 b 和 c 之间.
  - a + b = c. ……
- 在多元谓词表示式中,客体名称字母出现的次序与事先约定有关.

实例

- **例1** 用0元谓词将命题符号化

(1) 墨西哥位于南美洲

(2) π是无理数仅当7是无理数

(3) 如果2>3，则3<4

- 解：在命题逻辑中：

(1) p，p为墨西哥位于南美洲　（真命题）

(2) $p\rightarrow q$，其中，p：π是无理数，q：7是无理数.　（假命题）

(3) $p\rightarrow q$，其中，p：2>3，q：3<4.　（真命题）

实例

- 在一阶逻辑中：
  - (1) $F(a)$，

其中，a：墨西哥，$F(x)$：x位于南美洲.

  - (2) $F(\pi)\rightarrow F(7)$

其中，$F(x)$：x是无理数

  - (3) $F(2, 3)\rightarrow G(3, 4)$，

其中，$F(x, y)$：$x>y$，$G(x, y)$：$x<y$

量词

- 例如：$R(x)$表示x是大学生，x的个体域为“某单位里的职工”
  - $R(x)$：某单位所有的职工都是大学生？
  - $R(x)$：某单位有一些职工是大学生？
- 为了避免理解上的歧义，还需要引入用以刻划“所有的”、“有一些”等表示不同数量的词，即量词。

全称量词

- 全称量词∀: 表达“对所有的”，“每一个”，“对任一个”，“任意的”，“凡”，“都”等。

  $\forall x$: 对个体域中所有的x

  如, $\forall xF(x)$表示个体域中所有的x具有性质F

例

1）所有的人都是要呼吸的，个体域为人。

2）每个学生都要参加考试，个体域为学生。

3）所有的人都要呼吸，并且每个学生都要考试。

实例

1）所有的人都是要呼吸的，个体域为人。

- 设$H(x)$:x要呼吸
- $\forall xH(x)$

2）每个学生都要参加考试，个体域为学生。

- 设$Q(y)$:y要考试
  - $\forall yQ(y)$

3）所有的人都要呼吸，并且每个学生都要考试。

- $\forall xM(x) \wedge \forall yQ(y)$

特性谓词

- 为了方便我们通常使用全总个体域，对于每一个客体变元的变化范围，通常用特性谓词加以限制。除非特别说明，否则将采用全总个体域。
- 对于 $\forall$ ，表示客体变化范围的特性谓词通常作为蕴含的前件。

实例

- 符号化下列命题：

1）所有的人都是要呼吸的。

2）每个学生都要参加考试。

3）所有的人都要呼吸，并且每个学生都要考试。

解

(1)

$M(x)$:x是人，

$H(x)$:x要呼吸，

$(\forall x)\ (M(x) \rightarrow H(x))$.

实例

- 符号化下列命题：

1）所有的人都是要呼吸的。

2）每个学生都要参加考试。

3）所有的人都要呼吸，并且每个学生都要考试。

解

(2)

$P(x)$: x 是学生，

$Q(x)$: x 要参加考试，

$(\forall x)\,(P(x) \rightarrow Q(x))$.

实例

- 符号化下列命题：

1）所有的人都是要呼吸的。

2）每个学生都要参加考试。

3）所有的人都要呼吸，并且每个学生都要考试。

解

(3)

$$\forall x(M(x)\rightarrow H(x))\wedge$$
$$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$$

存在量词

- 存在量词∃: 表达“存在”，,”有的”，“有一个”，“至少有一个”，“有 一些”等。

  $\exists x$：个体域中有一个x

  如, $\exists xF(x)$表示个体域中有一个x具有性质F。

例

1) 有些人是聪明的，个体域为人。
2) 有些学生早饭吃面包，个体域为学生。

解:

1) $R(x)$: x 是聪明的.

   $\exists xR(x)$

2) $E(y)$: y 早饭吃面包.

   $\exists yE(y)$

全总个体域

- 对于∃，表示客体变化范围的特性谓词通常作为合取项。

例

符号化下列命题：

- 有些人是聪明的。
- 有些学生早饭吃面包。

解：

1) $M(x)$: x是人.
   $R(x)$: x 是聪明的.
   $\exists x(M(x) \wedge R(x))$
2) $S(x)$: x是学生.
   $E(x)$: x早饭吃面包.
   $\exists x(S(x) \wedge E(x))$

实例

- 例 2 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美

(2) 有人用左手写字

个体域分别为

(a) D为人类集合

(b) D为全总个体域

- 解：(a) D为人类集合
  - (1) $\forall xG(x)$，$G(x)$：x爱美
  - (2) $\exists xG(x)$，$G(x)$：x用左手写字

实例

- (b) D为全总个体域

  $F(x)$：x为人，$G(x)$：x爱美

  - (1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$
  - (2) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

- 1. 引入特性谓词$F(x)$

  2. (1),(2)是一阶逻辑中两个“基本”公式

特性谓词

- 想想，为什么要这样规定特性谓词加入的原则呢？若不遵循会出现什么样的问题？

例如，符号化“所有的老虎都要吃人”这个命题

若$P(x)$：x会吃人 $U(x)$：x是老虎

若符号化为 $(\forall x)(U(x)\land P(x))$

它的含义是：“对于任意的x, x是老虎, 并且x会吃人”，与原命题“所有的老虎都要吃人”的逻辑含义不符。

特性谓词

- 想想，为什么要这样规定特性谓词加入的原则呢？若不遵循会出现什么样的问题？

例如，符号化“9班有人喜欢打游戏”这个命题

若$P(x)$：x喜欢打游戏 $U(x)$：x是9班的学生

若符号化为 $\exists x(U(x)\rightarrow P(x))$

它的含义是：“存在某一个x, 如果x是9班的学生, 则x喜欢打游戏”，假设9班没有学生，则原命题为假，但该公式因为前件为假反为真。

实例

- 例3 在一阶逻辑中将下面命题符号化

  (1) 正数都大于负数

  (2) 有的无理数大于有的有理数

- 解：

注意：题目中没给个体域，一律用全总个体域

(1) 令$F(x)$：x为正数，$G(y)$：y为负数，

$L(x,y)$：$x>y$

$$\forall x(F(x)\to\forall y(G(y)\to L(x,y)))$$

或者 $\forall x\forall y(F(x)\land G(y)\to L(x,y))$

实例

(2) 有的无理数大于有的有理数

令$F(x)$: x是无理数, $G(y)$: y是有理数

$L(x,y)$: $x>y$

$$\exists x(F(x)\wedge\exists y(G(y)\wedge L(x,y)))$$

或者 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$

实例

- 例4 在一阶逻辑中将下面命题符号化

 (1) 没有不呼吸的人

 (2) 不是所有的人都喜欢吃糖

- 解 (1) $F(x)$: x是人， $G(x)$: x呼吸

$$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

(2) $F(x)$: x是人， $G(x)$: x喜欢吃糖

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

$$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

实例

- 例5 将下面命题符号化

  (1) 对每一个数x都存在一个数y使得$x<y$

  (2) 存在一个数y使得对每一个数x都有$x<y$

  个体域分别为

  (a) D为数的集合　(b) D为全总个体域

- 解 (a) 设 $L(x,y)$:$x<y$

  (1) $\forall x\exists yL(x,y)$

  (2) $\exists y\forall xL(x,y)$

- 注意: ∀与∃不能随意交换
- 显然(1)是真命题, (2)是假命题

实例（续）

- 例5 设个体域为全总个体域, 将下面命题符号化

  (1) 对每一个数x都存在一个数y使得$x<y$

  (2) 存在一个数y使得对每一个数x都有$x<y$

- 解 (b) 设R(x):x是数 $L(x,y)$:$x<y$

  (1) $\forall x\exists y(R(x)\rightarrow(R(y)\wedge L(x,y)))$

  (2) $\exists y\forall x(R(y)\wedge(R(x)\rightarrow L(x,y)))$

练习

- 符号化下列命题：

(1)所有的人都长着黑头发。

(2)有的人登上过月球。

(3)没有人登上过木星。

(4)在美国留学的学生未必都是亚洲人。

- 解：设M(x): x是人。

(1) 令F(x):x长着黑头发

$\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$

练习

- 符号化下列命题：

(1)所有的人都长着黑头发。$\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$

(2)有的人登上过月球。

(3)没有人登上过木星。

(4)在美国留学的学生未必都是亚洲人。

- 解：设M(x): x是人。

(2) 令G(x):x登上过月球

$\exists x(M(x) \wedge G(x))$

练习

- 符号化下列命题：

(1)所有的人都长着黑头发。$\forall x(M(x) \to F(x))$

(2)有的人登上过月球。$\exists x(M(x) \land G(x))$

(3)没有人登上过木星。

(4)在美国留学的学生未必都是亚洲人。

- 解：设$M(x)$: x是人。

(3) 令$H(x)$:x登上过木星

$\neg\exists x(M(x) \land H(x))$

或$\forall x(M(x) \to \neg H(x))$

练习

- 符号化下列命题：

(1)所有的人都长着黑头发。$\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$

(2)有的人登上过月球。$\exists x(M(x) \land G(x))$

(3)没有人登上过木星。$\forall x(M(x) \rightarrow \neg H(x))$

(4)在美国留学的学生未必都是亚洲人。

- 解：设M(x): x是人。

(4) 令F(x):x在美国留学的学生；

G(x):x是亚洲人.

$\neg\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 或 $\exists x(F(x) \land \neg G(x))$

练习

- 符号化下列命题：

(1)兔子比乌龟跑得快。

(2)并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

(3)不存在跑得同样快的两只兔子。

(4)有的兔子比所有的乌龟跑得快。

(5)所有兔子都比某些乌龟跑得快。

解：设F(x): x是兔子，G(y): y是乌龟，H(x,y): x比y跑得快，L(x,y):x与y跑得一样快。

(1)$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$

练习

- 符号化下列命题：

(1)兔子比乌龟跑得快。

(2)并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

(3)不存在跑得同样快的两只兔子。

(4)有的兔子比所有的乌龟跑得快。

(5)所有兔子都比某些乌龟跑得快。

解：设F(x): x是兔子，G(y): y是乌龟，H(x,y): x比y跑得快，L(x,y):x与y跑得一样快。

(2) $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

练习

- 符号化下列命题：

(1)兔子比乌龟跑得快。

(2)并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

(3)不存在跑得同样快的两只兔子。

(4)有的兔子比所有的乌龟跑得快。

(5)所有兔子都比某些乌龟跑得快。

解：设F(x): x是兔子，G(y): y是乌龟，H(x,y): x比y跑得快，L(x,y):x与y跑得一样快。

(3) $\neg \exists x \exists y(F(x) \wedge F(y) \wedge L(x,y))$

练习

- 符号化下列命题：

(1)兔子比乌龟跑得快。

(2)并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

(3)不存在跑得同样快的两只兔子。

(4)有的兔子比所有的乌龟跑得快。

(5)所有兔子都比某些乌龟跑得快。

解：设F(x): x是兔子，G(y): y是乌龟，H(x,y): x比y跑得快，L(x,y):x与y跑得一样快。

(4)$\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$

练习

- 符号化下列命题：

(1)兔子比乌龟跑得快。

(2)并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

(3)不存在跑得同样快的两只兔子。

(4)有的兔子比所有的乌龟跑得快。

(5)所有兔子都比某些乌龟跑得快。

解：设F(x): x是兔子，G(y): y是乌龟，H(x,y): x比y跑得快，L(x,y):x与y跑得一样快。

(5) $\forall x(F(x)\rightarrow \exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$

多个量词的使用

- 多个量词出现时，量词对变元的约束通常与量词的次序有关，量词的次序不能随意颠倒。
- 对于命题中的多个量词，约定从左到右的次序读出。
- 例如：设$G(x,y)$: x与y能配成一对，个体域为鞋子。
  - $\forall x \forall y G(x,y)$：所有的$x$和所有的$y$都能配成一对。 假命题
  - $\exists x \exists y G(x,y)$：存在一个x与某个y能配成一对。 真命题

多个量词的使用

- $\forall x \exists y G(x,y)$：对于每一个x，都存在一个y，x与y能配成一对。 真命题

- $\exists y \forall x G(x,y)$：存在一个y，对于每一个x，x与y能配成一对。 假命题

小结

- 一元谓词用以描述某一个个体的某种特性，而n元谓词则用以描述n个个体之间的关系；
- 根据命题的实际意义，选用全称量词或存在量词。全称量词加入时，其刻划个体域的特性谓词将以蕴涵的前件加入，存在量词加入时，其刻划个体域的特性谓词将以合取项加入；
- 有些命题在进行符号化时，由于语言叙述不同，可能翻译不同，但它们表示的意思是相同的，即句子符号化形式可不止一种.

小结

- 如有多个量词，则读的顺序按从左到右的顺序；另外，量词对变元的约束，往往与量词的次序有关，不同的量词次序，可以产生不同的真值，此时对多个量词同时出现时，不能随意颠倒它们的顺序，颠倒后会改变原有的含义。

4.2 一阶逻辑公式及解释

- **定义4.1** 设L是一个非逻辑符集合，由L生成的**一阶语言**$\mathscr{L}$的**字母表**包括下述符号：
  - 非逻辑符号

(1) 个体常项符号：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

  - 逻辑符号

(4) 个体变项符号：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号：$\forall, \exists$

(6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号：(,), ,

一阶语言$\mathscr{L}$的项与原子公式

- **定义4.2** $\mathscr{L}$ 的项的定义如下：

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用(1),(2)得到的

- **定义4.3** 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是$\mathscr{L}$的任意n元谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是$\mathscr{L}$的任意n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是$\mathscr{L}$的原子公式.

- 如，$F(x, y)$, $F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$等均为原子公式

一阶语言$\mathscr{L}$的公式

- **定义4.4** $\mathscr{L}$的**合式公式**定义如下：

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式

(4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式

(5) 只有有限次地应用(1)—(4)形成的符号串才是合式公式.

- 合式公式简称**公式**

变元的约束

- **定义4.5** 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称x为**指导变元**，A为相应量词的**辖域**. 在$\forall x$和 $\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为**约束出现**，A中不是约束出现的其他变元均称为是**自由出现**的.

实例

$$1)\ \forall x(P(x) \to Q(x))$$

指导变元

辖域

约束变元

实例

$$2)\ \forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$$

指导变元

辖域

指导变元

辖域

实例

3) $\forall x \forall y(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \wedge \exists x P(x,y)$

指导变元

辖域

指导变元

辖域

自由变元

实例

$$4)\ \forall x(P(x)\wedge \exists x Q(x,z)\rightarrow \exists y R(x,y))\vee Q(x,y)$$

指导变元

辖域

指导变元

辖域

指导变元

辖域

自由变元

实例

- 指出下列各公式中的指导变元，各量词的辖域，自由出现以及约束出现的个体变元

1） $\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$

2） $\exists x(F(x,y,z)\rightarrow \forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$

- 解：1） $\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$
  - x为指导变元，$(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$为$\forall x$ 的辖域，x的两次出现均为约束出现
  - y与 z 均为自由出现

实例

- 2）$\exists x(F(x,y,z)\rightarrow\forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$
  - $\exists x$中的x是指导变元, 辖域为$(F(x,y,z)\rightarrow\forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$.
  - $\forall y$中的y是指导变元, 辖域为$(G(x,y)\wedge H(x,y,z))$.
  - x的3次出现都是约束出现, y的第一次出现是自由出现, 后2次是约束出现, z的2次出现都是自由出现

公式的解释

定义4.7 设$\mathscr{L}$是L生成的一阶语言，$\mathscr{L}$的**解释**I由4部分组成：

(a) 非空个体域 D_I.

(b) 对每一个个体常项符号$a \in L$，有一个$\bar{a} \in D_I$，称$\bar{a}$为a在I中的解释.

(c) 对每一个n元函数符号$f \in L$，有一个D_I上的n元函数$\bar{f}$: $D_I^n \to D_I$，称$\bar{f}$为f在I中的解释.

(d) 对每一个n元谓词符号$F \in L$，有一个D_I上的n元谓词常项$\bar{F}$，称$\bar{F}$为F在I中的解释.

公式的解释

- 设公式A, 取个体域D_I, 把A中的个体常项符号a、函数符号f、谓词符号F分别替换成它们在I中的解释$\bar{a}$、$\bar{f}$、$\bar{F}$, 称所得到的公式A'为A在I下的**解释**, 或A在I下**被解释成**A'.
- 指定自由出现的个体变项的值称为赋值。

实例

例6 给定解释 I 如下：

(a) 个体域 D=R

(b) $\bar{a} = 0$

(c) $\bar{f}(x, y) = x + y$, $\bar{g}(x, y) = x \cdot y$

(d) $\bar{F}(x, y): x = y$

写出下列公式在I下的解释, 并指出它的真值.

(1) $\exists x F(f(x,a),g(x,a))$

(2) $\forall x \forall y (F(f(x,y),g(x,y)) \to F(x,y))$

(3) $\forall x F(g(x,y),a)$

实例

例6 给定解释 I 如下：

(a) 个体域 $D=\mathbf{R}$

(b) $\overline{a}=0$

(c) $\overline{f}(x,y)=x+y$, $\overline{g}(x,y)=x\cdot y$

(d) $\overline{F}(x,y): x=y$

解：(1) $\exists x F(f(x,a),g(x,a))$

$\exists x(x+0=x\cdot 0)$ 真

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,y),g(x,y))\rightarrow F(x,y))$

$\forall x\forall y(x+y=x\cdot y\rightarrow x=y)$ 假

(3) $\forall x F(g(x,y),a)$

$\forall x(x\cdot y=0)$ 真值不定，不是命题

封闭的公式

- **定义4.6** 若公式A中不含自由出现的个体变项，则称A为封闭的公式，简称闭式.

  例如，$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$ 为闭式，

  而 $\exists x(F(x)\wedge G(x,y))$ 不是闭式

- **定理4.1** 闭式在任何解释下都是命题

  注意: 不是闭式的公式在解释下可能是命题，也可能不是命题.

  例如：$\forall x(x\cdot y=0)$不是命题

  $\forall x(x\cdot 0=x)\rightarrow(x=y)$是真命题

公式的类型

- 定义4.8 若公式A在任何解释和该解释下的任何赋值下均为真, 则称A为永真式(逻辑有效式). 若A在任何解释和该解释的赋值下均为假, 则称A为矛盾式(永假式). 若至少有一个解释和该解释下的一个赋值使A为真, 则称A为可满足式.
- 几点说明:
  - 永真式为可满足式，但反之不真 。
  - 在一阶逻辑中，判断任意给定公式类型的问题是不可判定的。

一阶逻辑的判定问题

- 若说一阶逻辑是可判定的，就要求给出一个能行的方法，使得对任一公式都能判断是否是有效的。所谓能行的方法，乃是一个机械方法，可一步一步做下去，并在有穷步内实现判断。
- 由于一阶逻辑中的永真(永假)公式，要求所有解释*I*都满足(弄假)该公式。而解释*I*依赖于一个非空集合*D*。由于集合*D*可以是无穷集合，而集合*D*的“数目”也可能是无穷多个，因此，所谓公式的“所有”解释，实际上是无法考虑的。

一阶逻辑的判定问题

Alan Mathison Turing
1912.6.23—1954.6.7

- 由于一阶公式的复杂性和解释的多样性，至今还没有一个可行的算法判定任意公式的类型。早在1936年，*Churen*和*Turing*各自独立地证明了：对于一阶逻辑，其判定问题是不可解的。
- 但是，谓词逻辑是半可判定的，即若谓词逻辑中公式是重言式，则存在算法在有限步骤内能验证它。

代换实例

- **定义4.9** 设A_0是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用A_i $(1\le i\le n)$ 处处代替A_0中的p_i，所得公式A称为A_0的代换实例.
- 例如， $F(x)\rightarrow G(x)$, $\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$等都是$p\rightarrow q$的代换实例.
- **定理4.2** 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式.

实例

- 例7 判断下列公式中，哪些是永真式，哪些是矛盾式?

  (1) $\forall xF(x)\rightarrow(\exists x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$

  (2)$\neg(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

  (3)$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

  (4)$\exists x(F(x)\wedge G(x))$

- 解:

  (1)重言式 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 的代换实例，故为永真式.

  (2)矛盾式$\neg(p\rightarrow q)\wedge q$ 的代换实例，故为永假式.

实例

(3) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

- 解释I_1: 个体域N, $F(x)$:x>7，$G(x)$: x>4, 真
- 解释I_2：个体域N, $F(x)$:x<7, $G(x)$:x<4，假
- 结论: 非永真式的可满足式

(4)$\exists x(F(x)\wedge G(x))$

- 解释I_1: D_1=N，$F(x)$:x是偶数，$G(x)$: x是素数，真。
- 解释I_2:D_2=N，$F(x)$:x是偶数，$G(x)$: x是奇数，假。
- 结论: 非永真式的可满足式