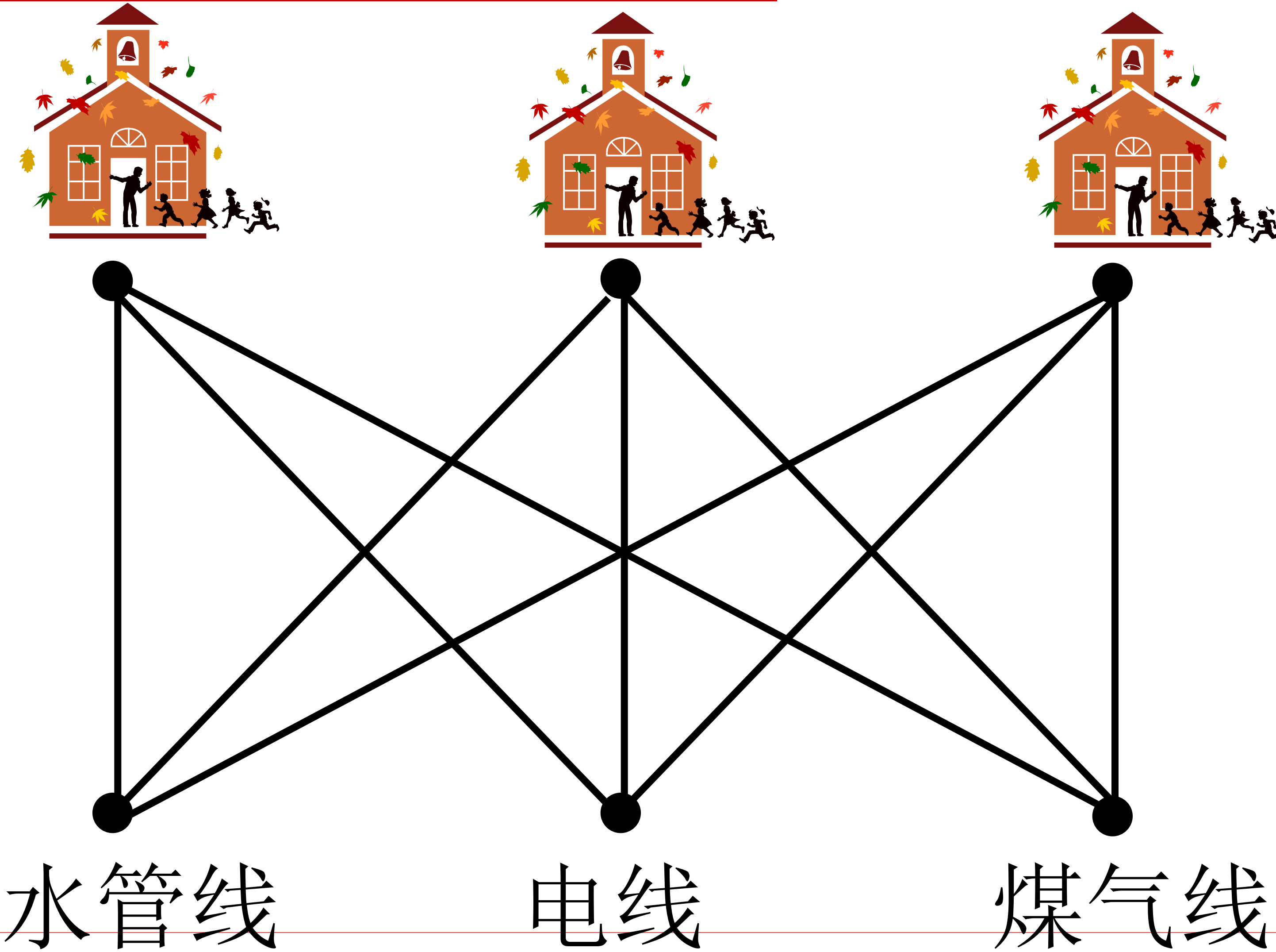
第17章 平面图

第五部分 图论

乌鲁木齐
哈尔滨
长春
沈阳
呼和浩特
北京
天津
石家庄
银川
太原
济南
西宁
兰州
西安
郑州
南京
上海
合肥
拉萨
成都
武汉
杭州
重庆
南昌
长沙
台北
贵阳
福州
昆明
广州
南宁
香港
澳门
海口

房屋布线问题



主要内容

- **17.1 平面图的基本概念**
- **17.2 欧拉公式**
- **17.3 平面图的判断**
- **17.4 平面图的对偶图**

第十七章 平面图

- 本章的主要内容
  - **17.1平面图的基本概念**
  - **17.2欧拉公式**
  - **17.3平面图的判断**
  - **17.4平面图的对偶图**

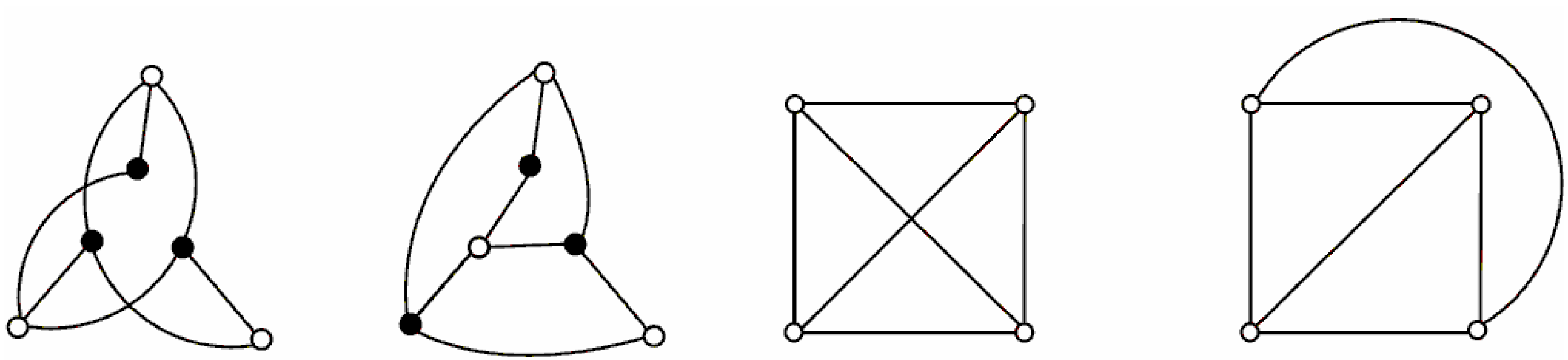
平面图(Planar graph)

定义17.1

(1) ***G*是可平面图或平面图(planar graph)——若能将*G*除顶点外无边相交地画在平面上.**

(2) 平面嵌入(graph embedding/plane graph)——画出的无边相交的平面图

(3) 非平面图(nonplanar graph)——无平面嵌入的无向图

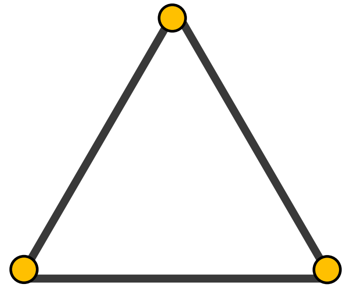


(1) (2) (3) (4)

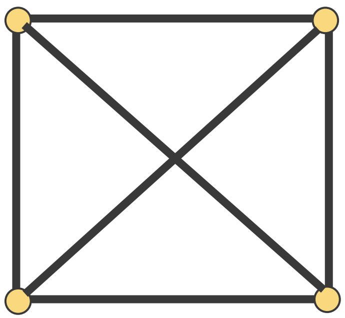
平面图

平面图

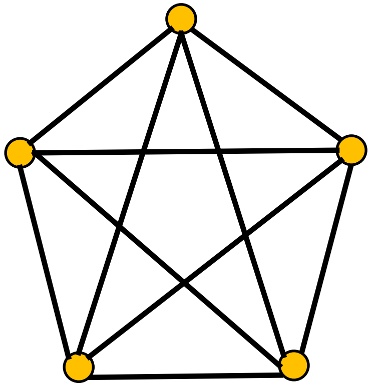
平面图



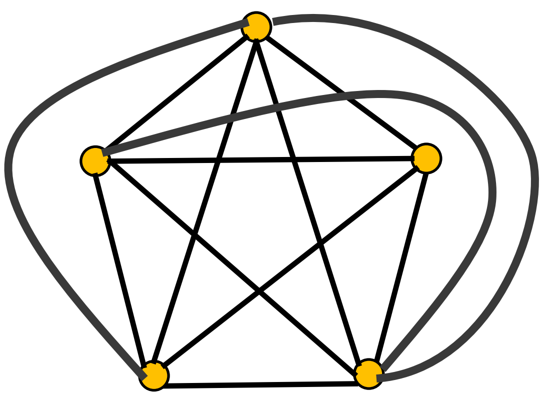
平面图

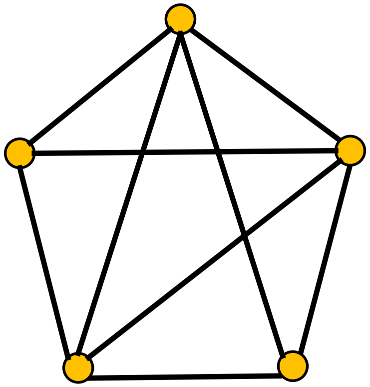


平面图

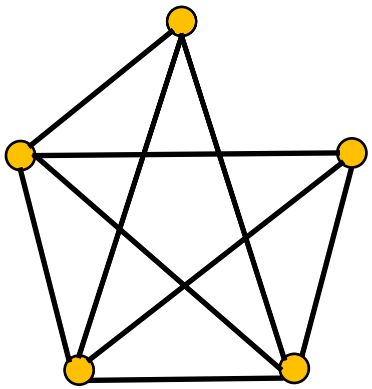


非平面图





平面图



平面图

平面图的说明

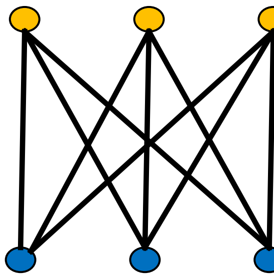
(1) 一般所谈平面图不一定是指平面嵌入，但讨论某些性质时，一定是指平面嵌入.

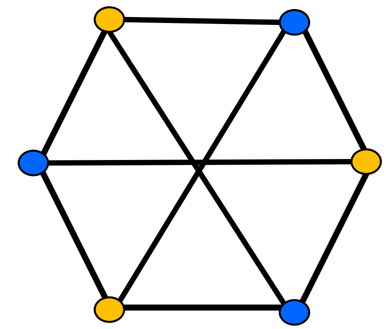
(2) K_1, K_2, K_3, K_4 , K_5-e都是平面图。

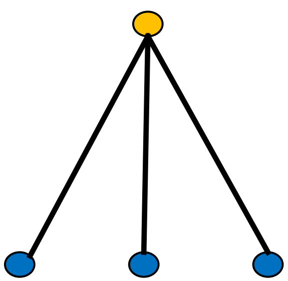
(3)完全二部图$K_{1,n}$也都是平面图。

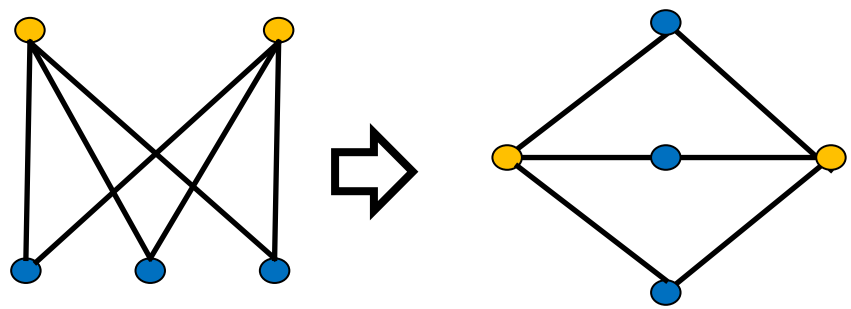
(4) $K_{2,n}$也都是平面图.

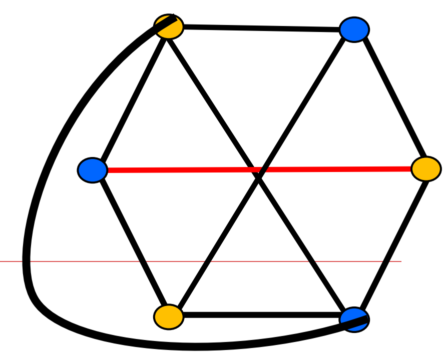
(5)K_5, $K_{3,3}$都不是平面图











平面图

- 定理17.1
  - 平面图的子图都是平面图
  - 非平面图的母图都是非平面图。
- 定理17.2
  - 设G是平面图，则在G中加入平行边或环后所得的图还是平面图。
- 例：
  - $K_{2,n}$的所有子图都是平面图
  - 含K_5, $K_{3,3}$作为子图的图都不是平面图.
  - $K_n(n\geq 6)$，$K_{3,n}(n\geq 4)$ 都是非平面图.

面(face)

定义17.2

(1) G的面——由G的平面嵌入的边将平面化分成的区域

(2) 无限面或外部面(outer face)—(用R_0表示)—面积无限的面

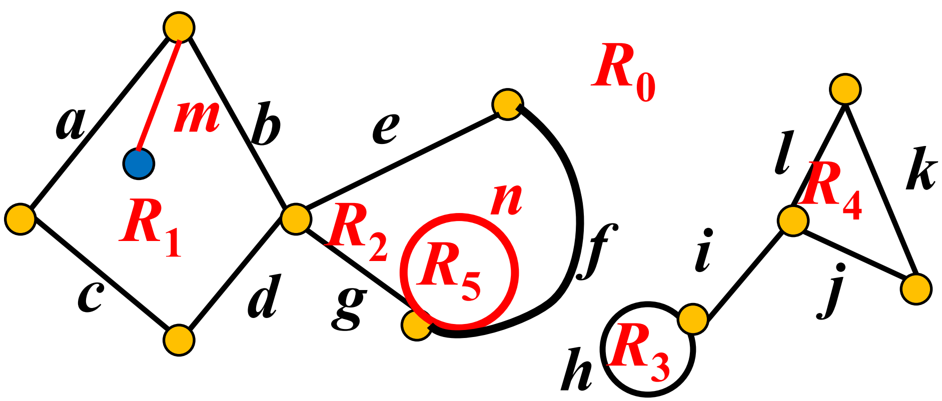
(3) 有限面或内部面（用$R_1, R_2, \ldots, R_k$等表示）——面积有限的面

(4) 面 R_i 的边界——包围R_i的所有边组成的回路

(5) 面 R_i 的次数——R_i边界的长度，用$\deg(R_i)$表示

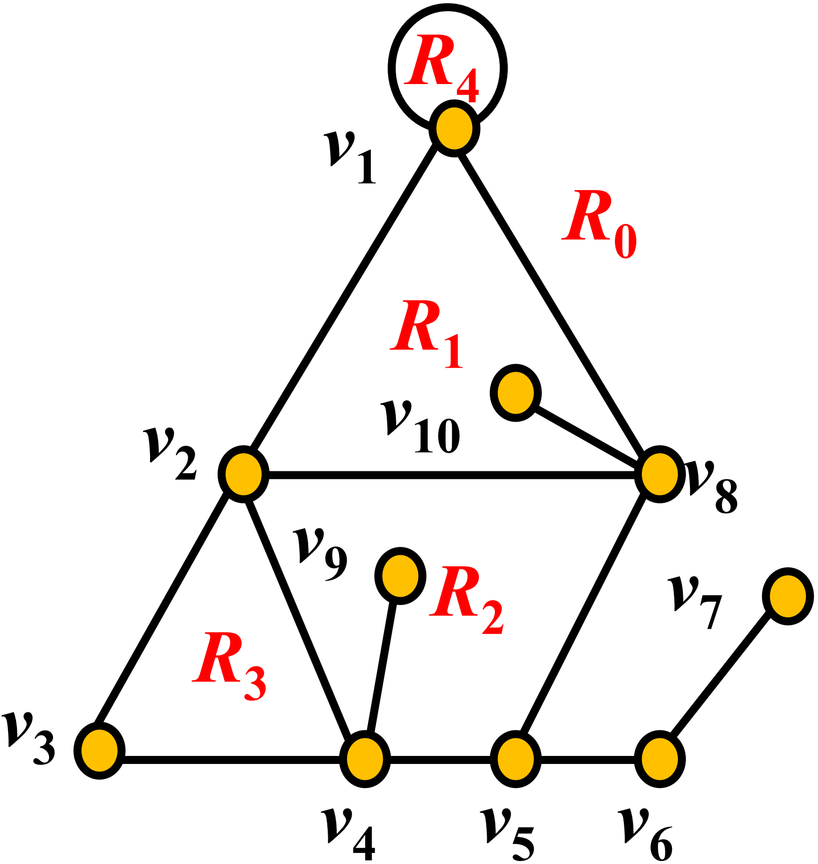
说明

- 定义17.2 中面 R_i 的边界回路是指：
  - 边界可能是初级回路(圈)，
  - 可能是简单回路，
  - 也可能是复杂回路.
  - 特别地，还可能是非连通的回路之并



R_2的边界为简单回路：*efng*
R_1的边界为复杂回路：*ammbdc*
R_3的边界为环：*h*
R_0的边界为多回路之并：*abefgdc* 并 *kjihil*

实例



R_3： $v_2v_3v_4v_2$
$deg(R_3)=3$

R_4： v_1v_1
$deg(R_4)=1$

R_2： $v_2v_4\,v_9v_4\,v_5v_8\,v_2$
$deg(R_2)=6$

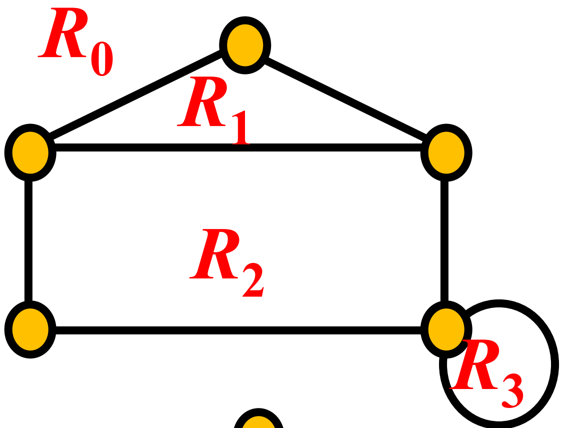
R_1： $v_1v_2v_8v_{10}v_8v_1$
$deg(R_1)=5$

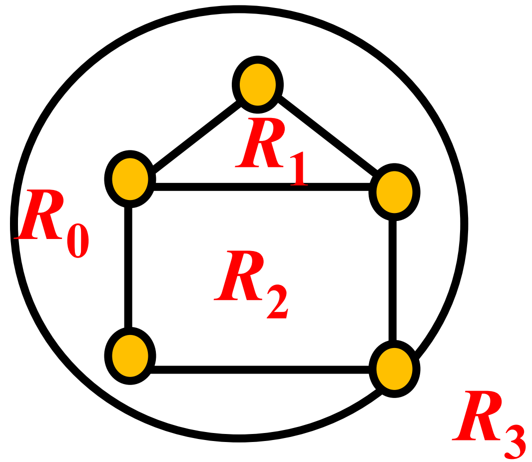
R_0： $v_2v_3\,v_4v_5\,v_6v_7\,v_6v_5v_8\,v_1v_1\,v_2$
$deg(R_0)=11$

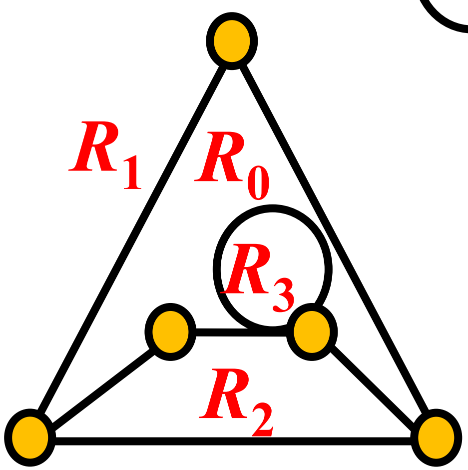
定理17.3 平面图各面次数之和等于边数的两倍.

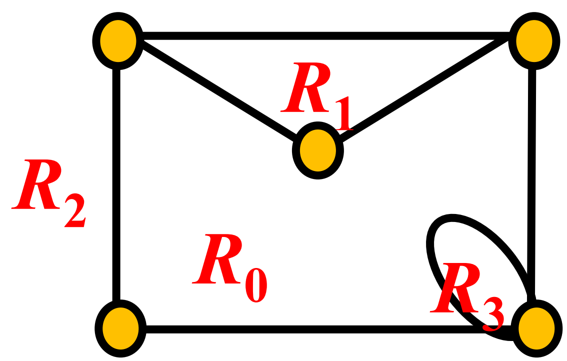
例题

- 重画下图，使其外部面的次数分别为1，3，4









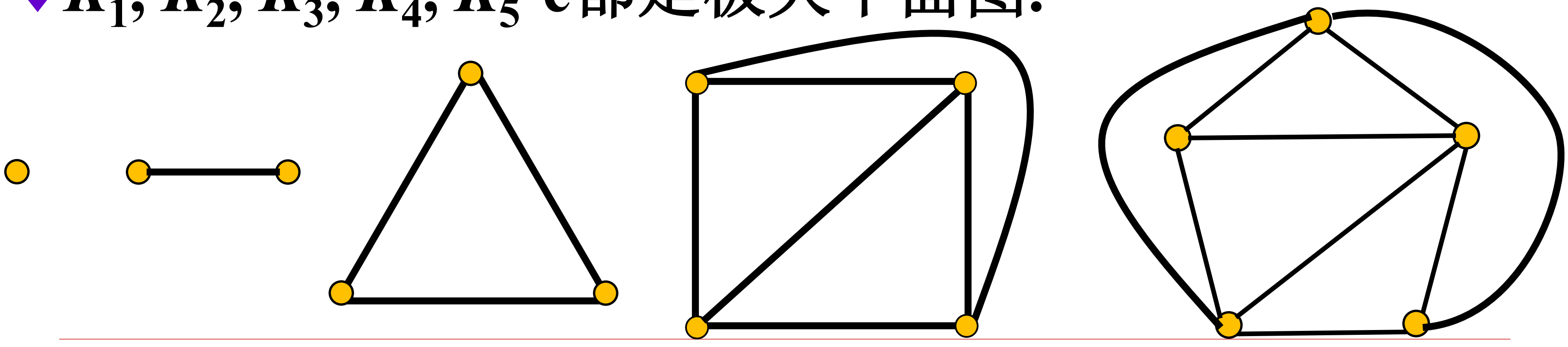
极大平面图

- 定义17.3 若在简单平面图G中的任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图，则称G为极大平面图.

◆说明：

◆若简单平面图G所有面中已无不相邻顶点，显然是极大平面图

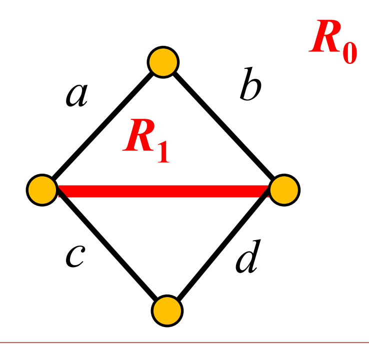
◆K_1, K_2, K_3, K_4, K_5-e都是极大平面图.



极大平面图的主要性质

- 定理17.4 极大平面图是连通的，并且n（$n\geq3$）阶极大平面图中没有割点和桥.
- 定理17.5 设G为n（$n\geq3$）阶<u>简单连通图</u>，G为极大平面图<u>当且仅当</u>G的每个面的次数均为3.
- 证明思路：

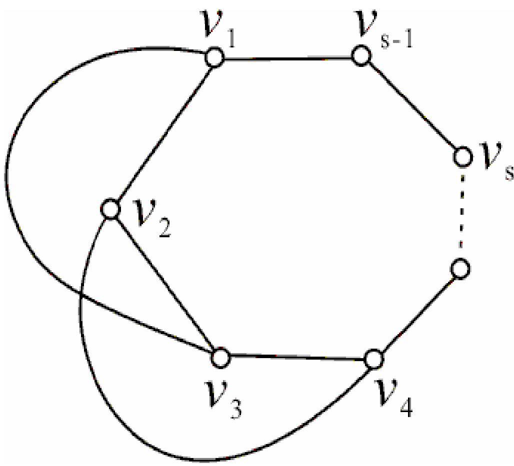
对于次数>3的面，若面中有不相邻顶点，则在该面内部不相邻顶点间添加新边不破坏平面性，



极大平面图的主要性质

- **定理17.5** 设G为n（$n≥3$）阶简单连通图，G为极大平面图当且仅当G的每个面的次数均为3.

- 证明：必要性（充分性在17.2节最后）



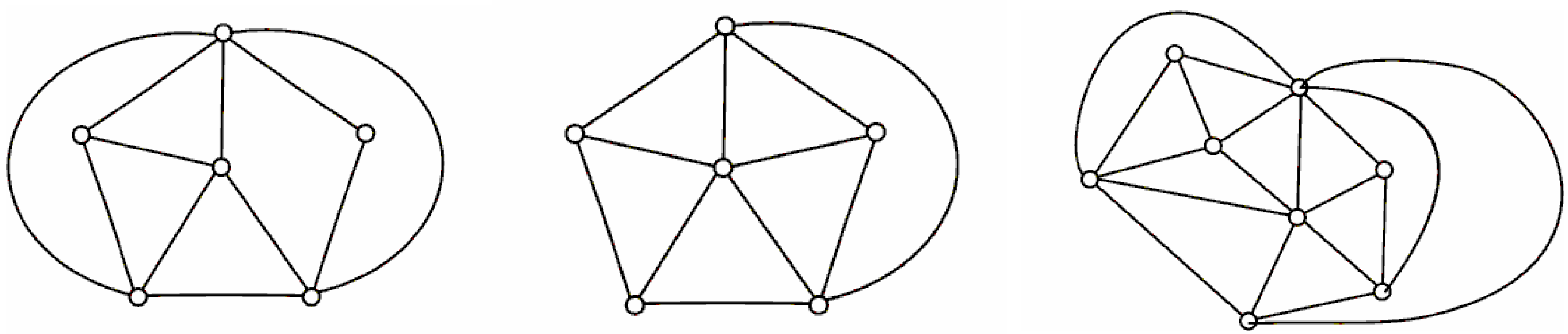
(1) G为简单平面图可知，G中无环无平行边，所以每个面的次数均≥3.

(2) 假设G存在次数>3的面

如右图所示存在≥4的面，如果v_1和v_3不相邻，则在该面内部添加新边(v_1,v_3)不破坏平面性，这与G为极大平面图矛盾. 因此 v_1和v_3必相邻，且边(v_1,v_3)不在该面内部；同理 v_2和v_4必相邻，且边(v_2,v_4)不在该面内部。

但是$(v_1,v_3)(v_2,v_4)$ 在面的外部相交，与G是平面图矛盾。

例：哪个是极大平面图？



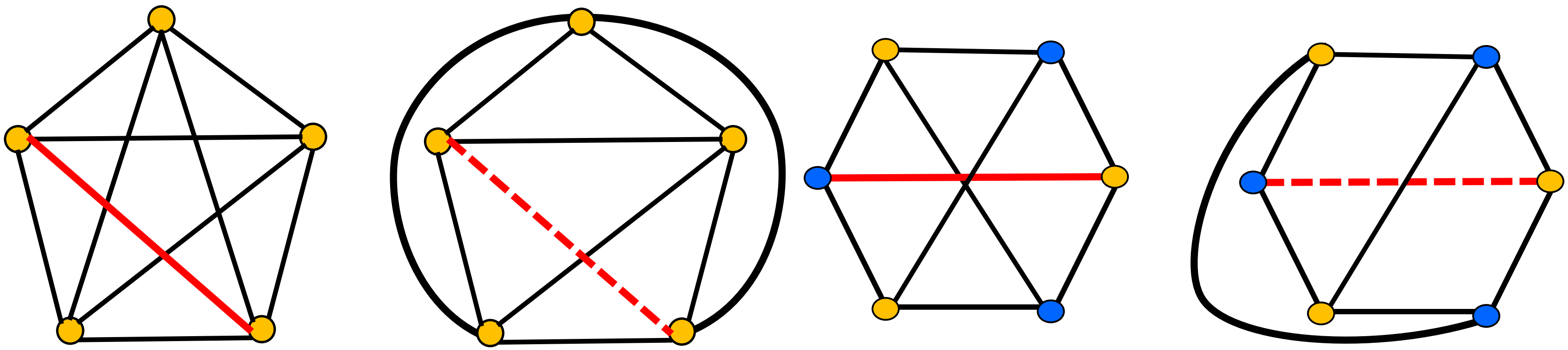
(1)　　　　　　　　(2)　　　　　　　　(3)

只有(3)为极大平面图

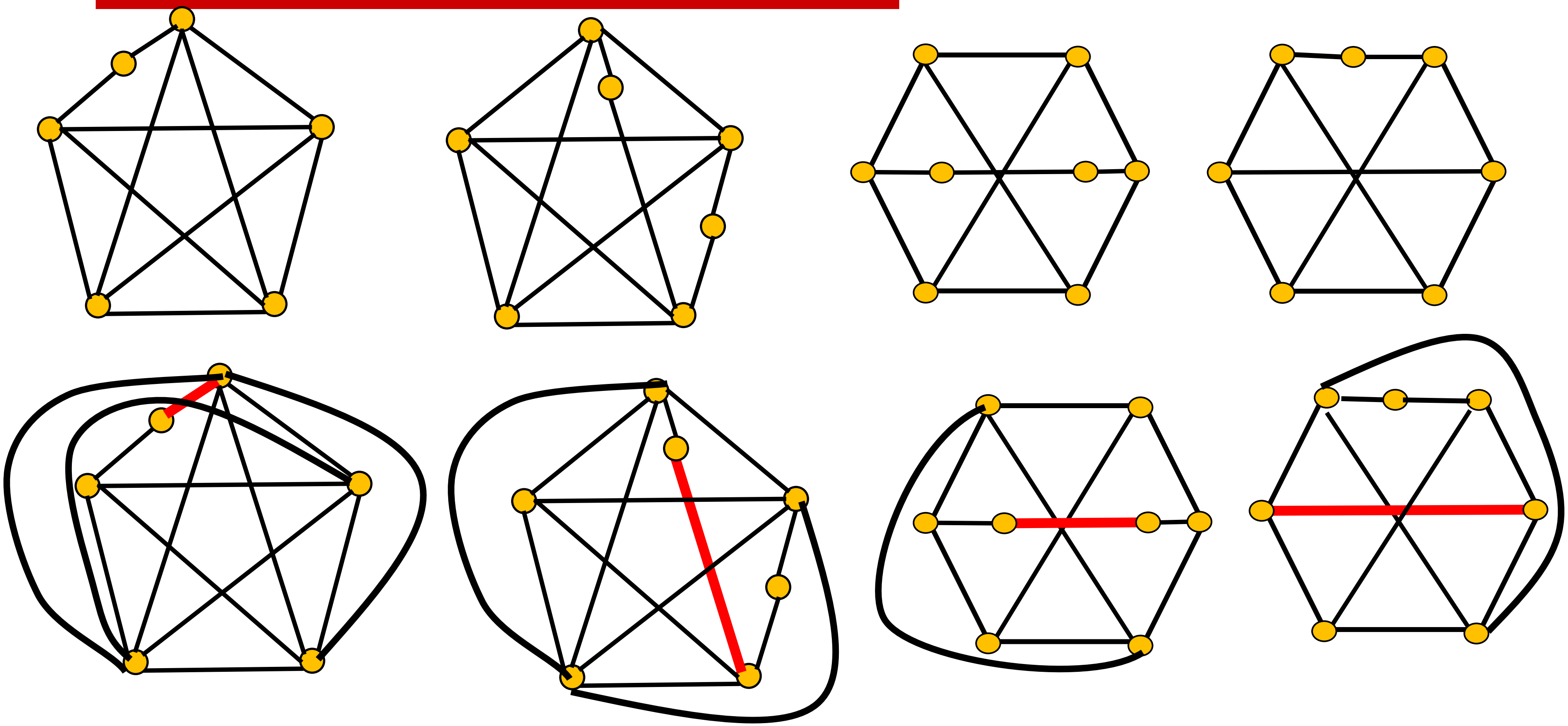
极小非平面图

- **定义17.4** 若在非平面图G中任意删除一条边，所得图G'为平面图，则称G为极小非平面图.

- 说明:
- (1) K_5, $K_{3,3}$都是极小非平面图
- (2) 极小非平面图必为简单图



极小非平面图

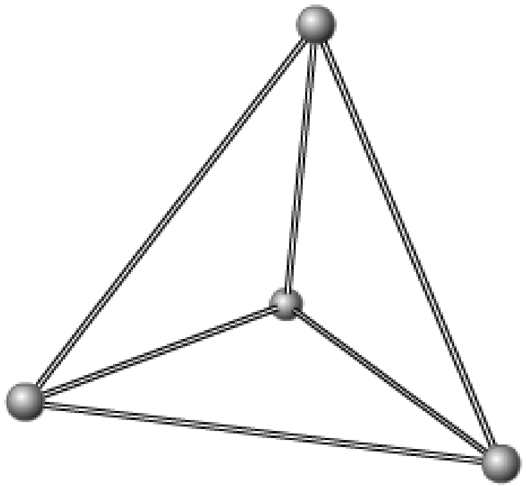


第十七章 平面图

- 本章的主要内容
- 17.1平面图的基本概念
- 17.2欧拉公式
- 17.3平面图的判断
- 17.4平面图的对偶图

凸多面体上的欧拉公式

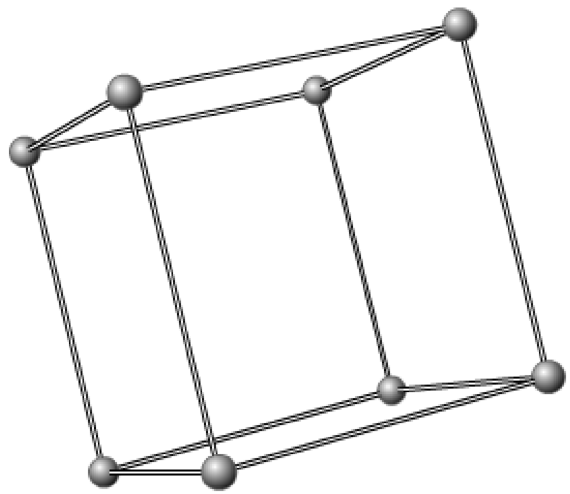
正四面体

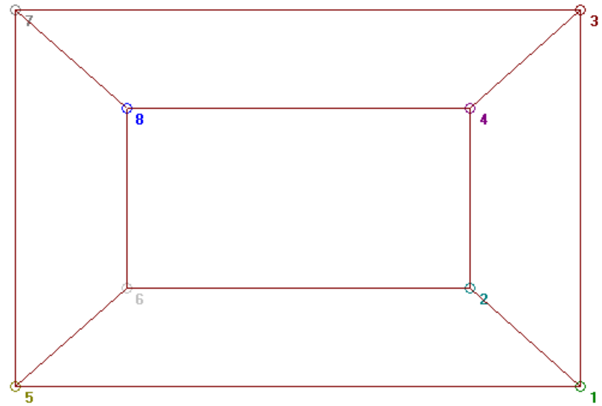


- 点数n：4
- 边数m：6
- 面数r：4
- $n-m+r=2$

凸多面体上的欧拉公式

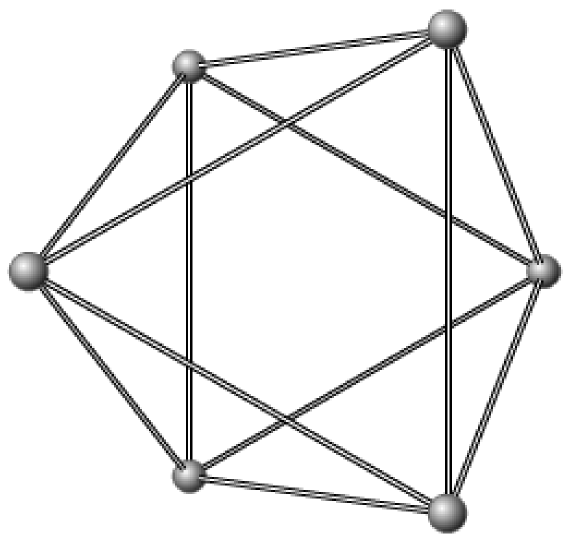
正六面体

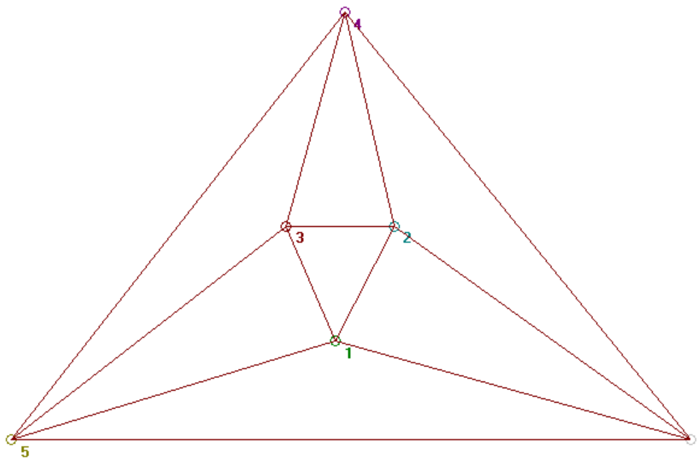




- 点数：8
- 边数：12
- 面数：6
- $n-m+r=2$

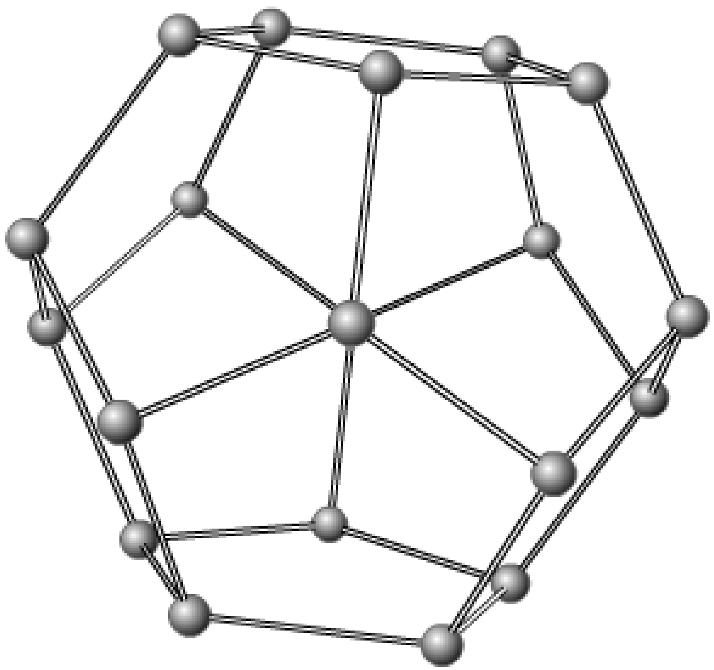
正八面体

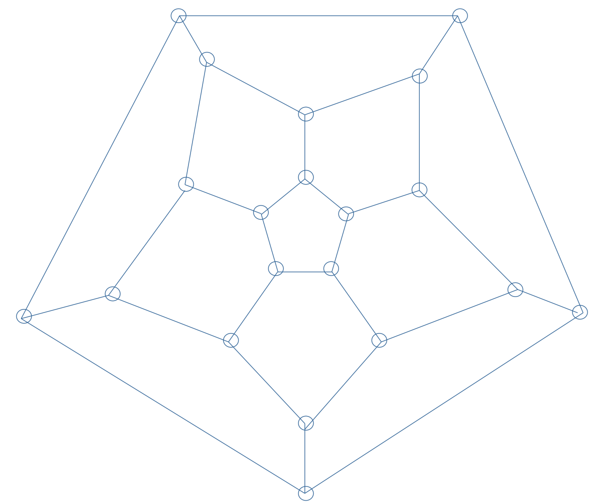




- 点数：6
- 边数：12
- 面数：8
- $n-m+r=2$

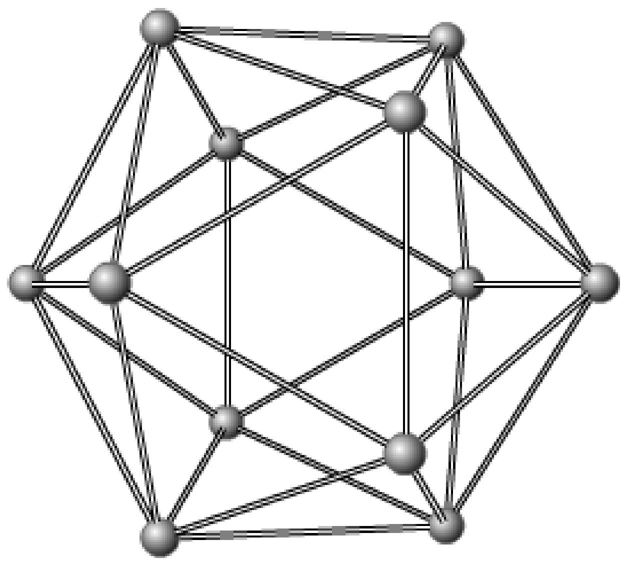
正十二面体

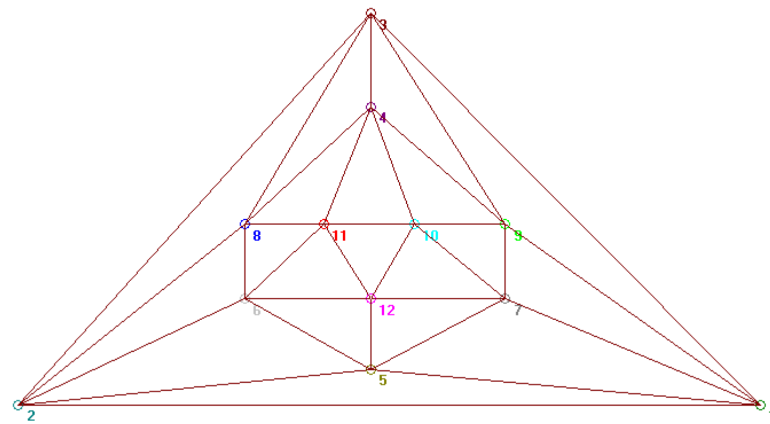




- 点数：20
- 边数：30
- 面数：12
- $n-m+r=2$

正二十面体



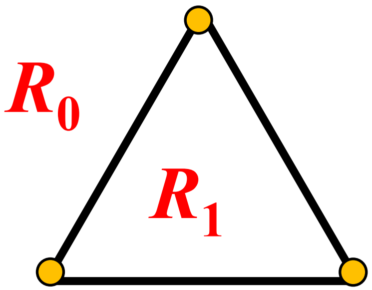


- 点数：12
- 边数：30
- 面数：20
- $n-m+r=2$

欧拉公式

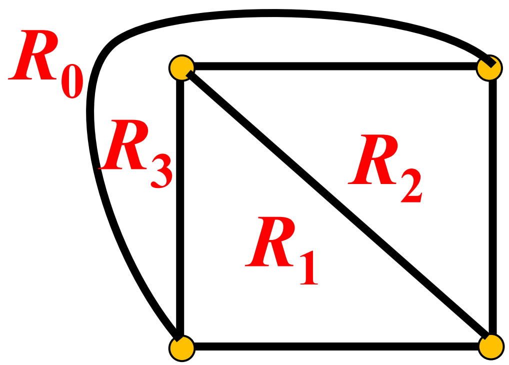
- **定理17.6（欧拉公式）**设**连通平面图**G的顶点数、边数和面数分别为n, m和r，则

$$n-m+r=2$$



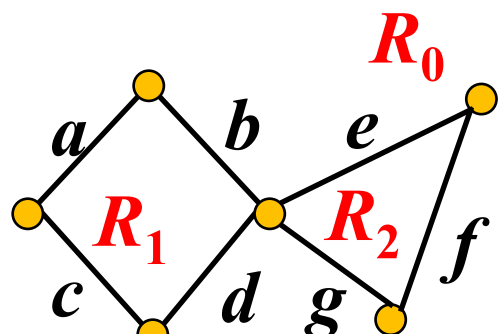
$n=3$, $m=3$, $r=2$

$n-m+r= 2$



$n=4$, $m=6$, $r=4$

$n-m+r= 2$



$n=6$, $m=7$, $r=3$

$n-m+r= 2$

欧拉公式证明

证: 对边数*m*做归纳证明

(1) m=0， G为平凡图， n=1, m=0, r=1, 结论成立.

(2) 设m=k（k≥1）结论成立，m=k+1时分情况讨论.

(2.1) 若G中无回路，则G为树，且至少有两片树叶，设v是一片树叶。

令G' = G-v，则G'满足欧拉公式 $n'-m'+r'=2$.

$$n-m+r = (n'+1)-(m'+1)+r' = n'-m'+r'=2$$

(2.2)若G中有圈，假设e是某个圈上的一条边.

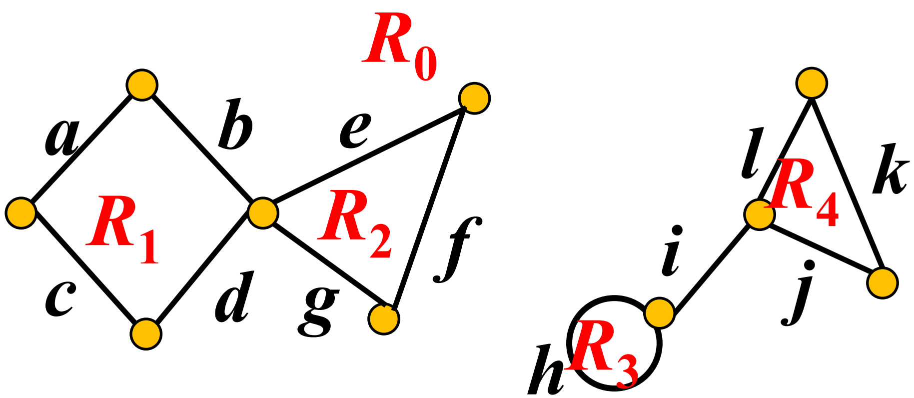
令G' = G-e，则G'满足欧拉公式 $n'-m'+r'=2$.

$$n-m+r= n' - (m'+1)+(r'+1) = n'-m'+r'=2$$

欧拉公式的推广

- **定理17.7（欧拉公式的推广）**对于有k（$k\geq 2$）个连通分支的平面图G有：

$$n-m+r=k+1$$



$n=10,\ m=12,\ r=5,\ k=2$

$n-m+r= 10-12+5 = 3 = k+1$

欧拉公式的推广证明

证明：

设第 i 个连通分支有 n_i个顶点, m_i条边和 r_i个面.

对各连通分支用欧拉公式:

$$n_i - m_i + r_i = 2, \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

求和 $\sum_{i=1}^{k}(n_i - m_i + r_i) = 2k$

展开 $\sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i=1}^{k} r_i = 2k$

由于 G有1个外部面，而每个G_i有一个外部面,

所以G的面数$r = \sum_{i=1}^{k} r_i - (k-1)$

即得 $n - m + r = k + 1$

实例

1. 已知连通平面图G的阶数n=5, 边数m=7, 求它的面数r。
2. 已知非连通平面图G的阶数n=10, 边数m=8, 面数r=3，求它的连通分支数。
3. 设G为8阶极大平面图，求它的面数。

1、解：$r = 2\text{-}n+m = 4$

2、解：$k = n\text{-}m+r\text{-}1 = 4$

3、解：极大非平面图每个面的次数都为3

- $2m = 3r.$
- 又$n-m+r=2 \rightarrow r = 12$

练习

- 设有简单连通平面图G，证明当阶数n=7, 边数m=15时，G是极大平面图。
- 证明：只需证明G每个面的次数都为3

  n=7, m=15 → r=10

  $2m = 30 = \sum_{i=1}^{10} \deg(R_i)$，

  即10个面的次数之和为30

  又由于G为简单图，所以不存在次数为1或2的面，

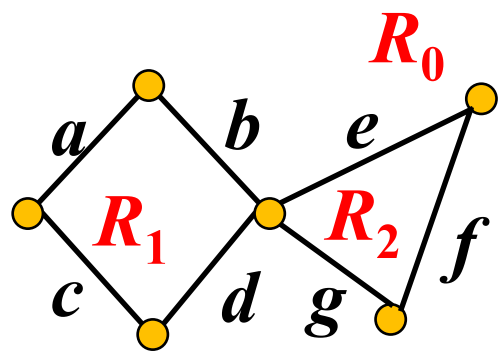
  G的10个面的次数都至少为3.

  因此每个面的次数只能为3.

与欧拉公式有关的定理

- **定理17.8** 设G为连通的平面图，且每个面的次数至少为l (即$\deg(R_i)\geq l$), $l\geq 3$，则G的边数m与顶点数n有如下关系：

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$



证 由定理17.3及欧拉公式得

$$2m = \sum_{i=1}^{r} \deg(R_i) \geq l \cdot r = l(2+m-n)$$

解得$m \leq \dfrac{l}{l-2}(n-2)$

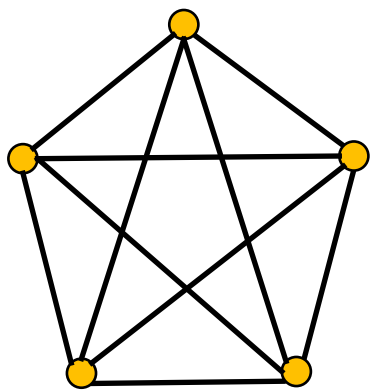
$n=6, l=3, m=7$

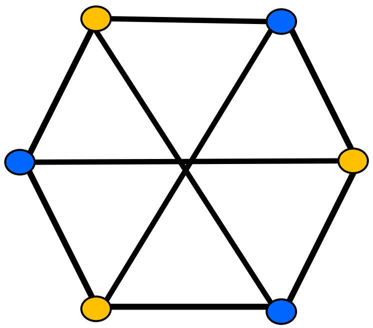
$$\frac{3}{3-2}(6-2) = 12$$

欧拉公式$n-m+r=2$

与欧拉公式有关的定理

- 定理17.8 推论 K_5, $K_{3,3}$都是非平面图。
- 证明：K_5, $K_{3,3}$都不符合定理17.8.





n=5, m=10, l= 3

$10 \geq (n\text{-}2)*l/(l\text{-}2) = 9$

n=6, m=9, l= 4

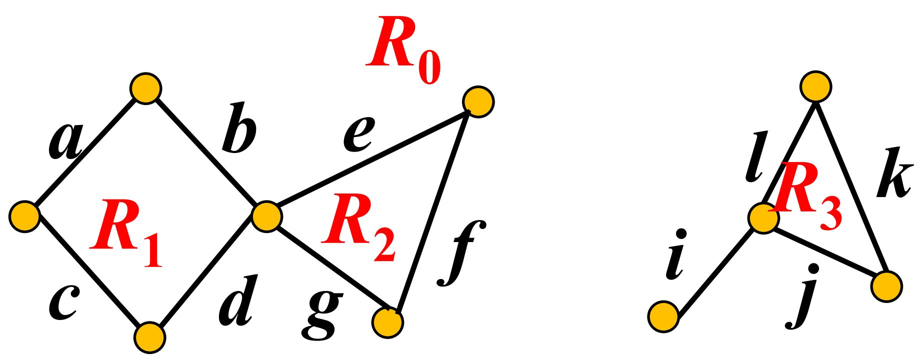
$9 \geq (n\text{-}2)*l/(l\text{-}2) = 8$

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

与欧拉公式有关的定理

- **定理17.9** 设平面图G有k（$k\geq 2$）个连通分支，各个面的次数至少为l ($l\geq 3$)，则G的边数m与顶点数n有如下关系：

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-k-1)$$



n=10, m=11, l=3, k=2

$l(n-k-1)/(l-2) = 3(10-2-1)/(3-2) = 21$

与欧拉公式有关的定理

- 定理17.10 设G为n（$n\geq3$）阶m条边的极大平面图，则$m=3n-6$.
- 定理17.10 推论 设G为n（$n\geq3$）阶m条边的简单平面图，则$m\leq3n-6$.
- 证定理17.10

  (1) 由欧拉公式得

  $n-m+r=2$

  (2) 因为G为极大平面图，每个面的次数均为3，所以

  $2m=3r \rightarrow m=3n-6$

与欧拉公式有关的定理

- **定理17.11** 设 G 为**简单平面图**，则

$$\delta(G) \le 5.$$

- 证

(1) 阶数 $n \le 6$，结论成立.

(2) 当 $n \ge 7$ 时，用反证法.

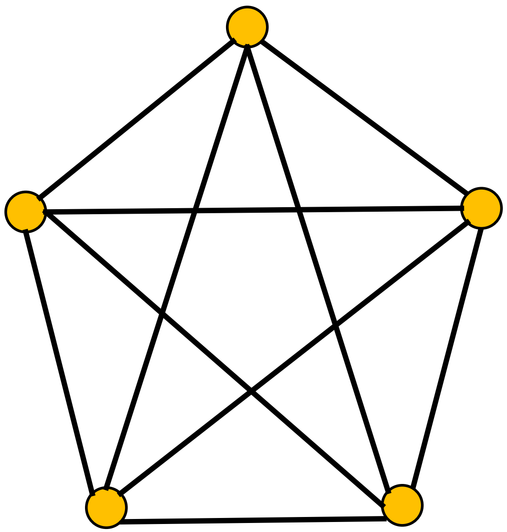
假设 $\delta(G) \ge 6$，则

$2m \ge 6n \Rightarrow m \ge 3n$，

这与定理17.10矛盾.

例K_5, $K_{3,3}$都是非平面图

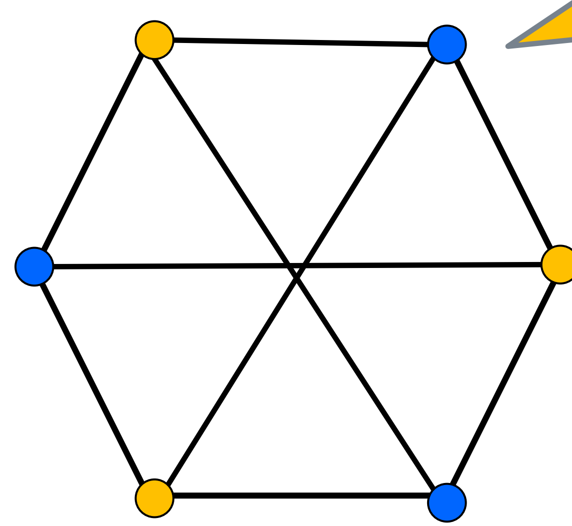
必要条件



$m = 10,\ n = 5$

不满足$m \le 3n - 6$

所以 K_5 不是平面图。



$m = 9,\ n = 6$

满足$m \le 3n - 6$

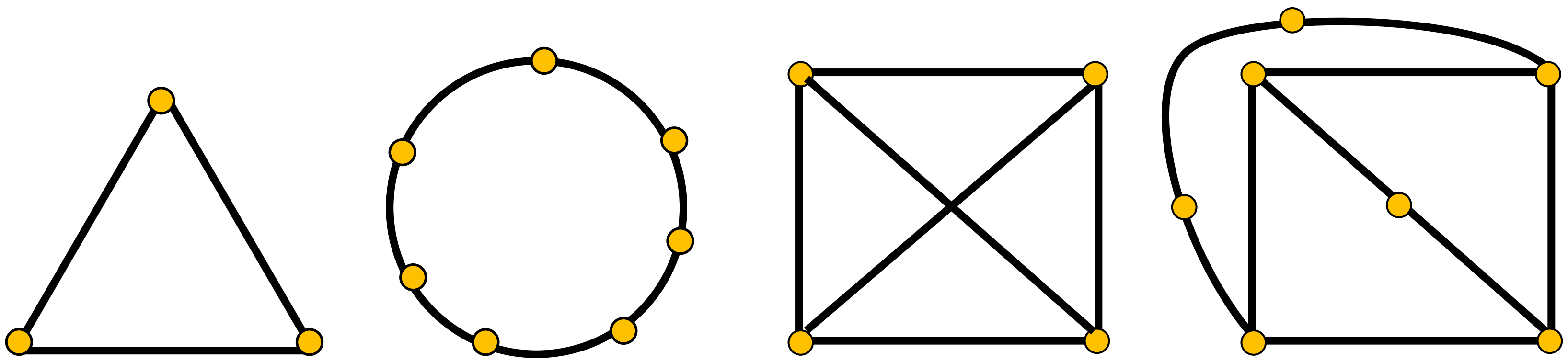
但 $K_{3,3}$ 不是平面图。

第十七章 平面图

- 本章的主要内容
- 17.1平面图的基本概念
- 17.2欧拉公式
- 17.3平面图的判断
- 17.4平面图的对偶图

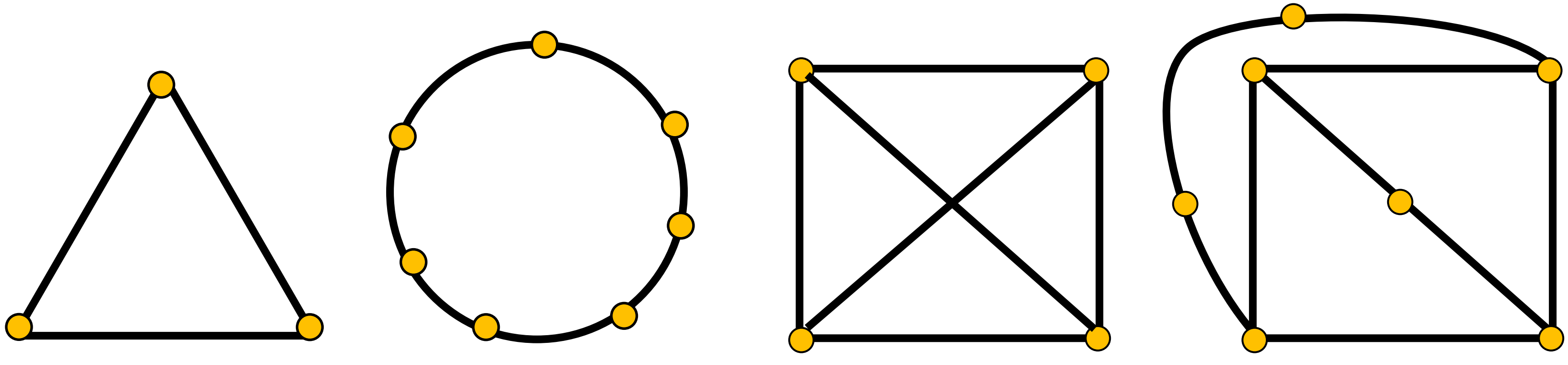
插入2度顶点和消去2度顶点

- 定义17.5 设$e=(u, v)$为图G的一条边，在G中删除e，增加新的顶点w，使u,v均与w相邻，称为在G中<u>插入2度顶点</u>w。
- 设w是G的一个2度顶点，w与u,v相邻，删除w增加新边$=(u, v)$，称为在G中<u>消去2度顶点</u>w。



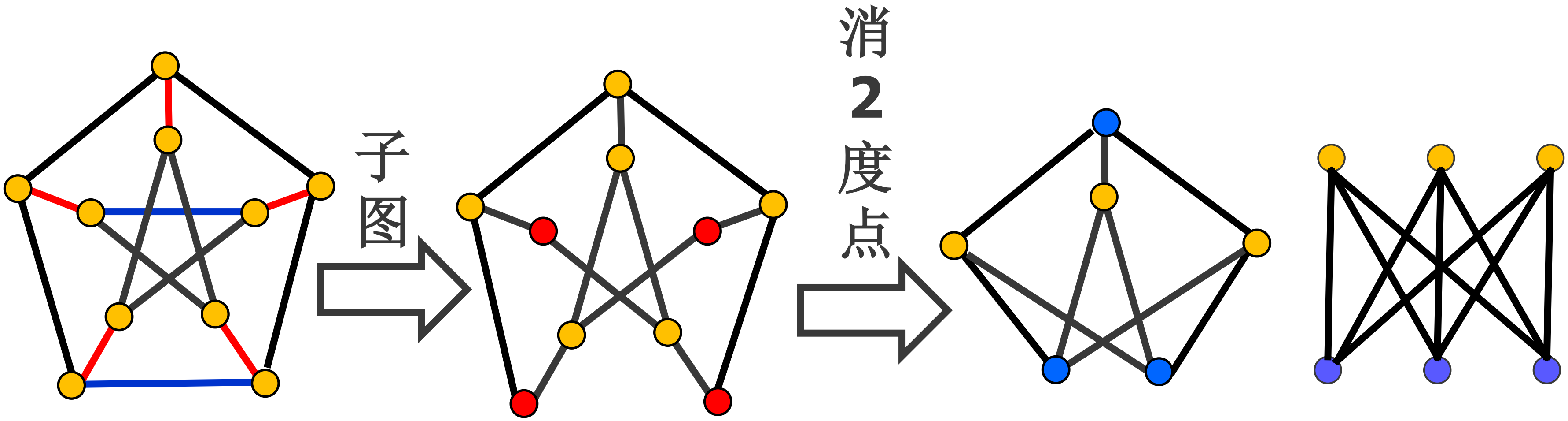
同胚

- **定义17.6** 若G_1与G_2同构，或经过反复插入或消去2度顶点后同构，则称G_1与G_2**同胚**.

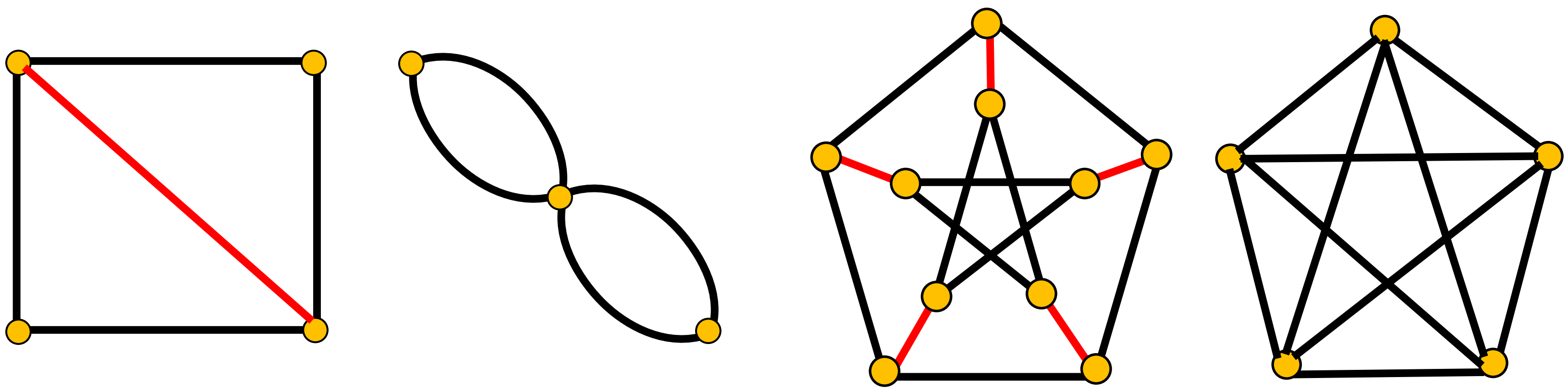


平面图的判定定理

- **定理17.12** （Kuratowski定理1） G是平面图 $\Leftrightarrow$ G中不含与K_5或$K_{3,3}$同胚的子图.

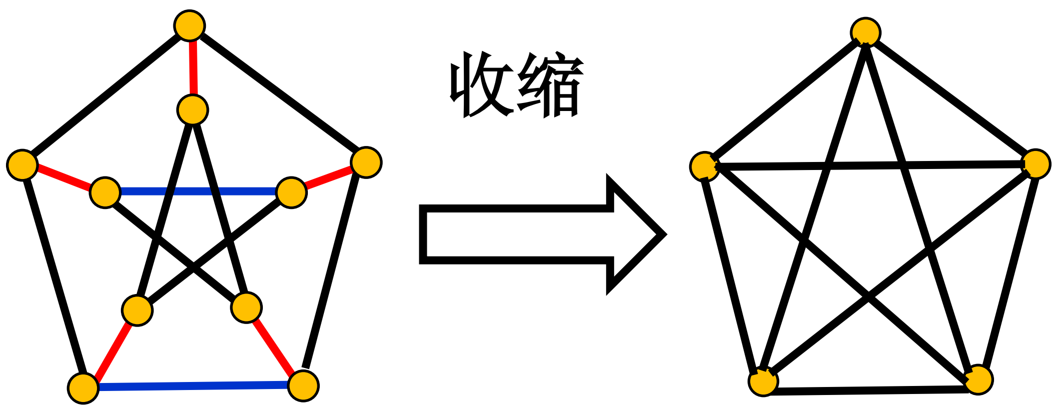


- （定义14.10）从G中删除e后将e的两个端点用一个新的顶点代替，称为**收缩边e**.



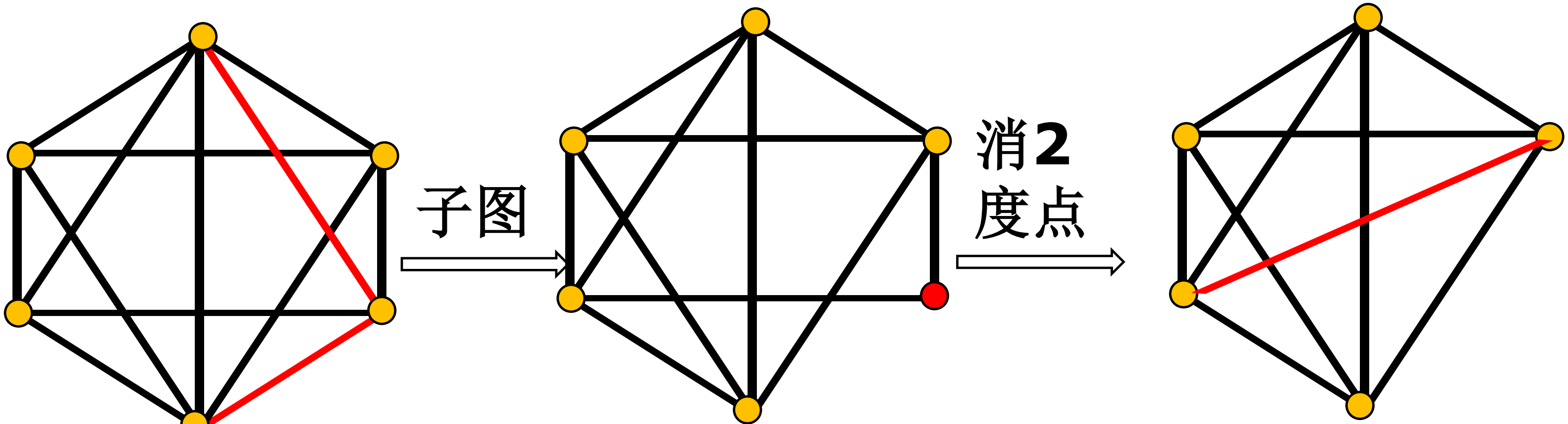
平面图的判定定理

- **定理17.13** （ **Kuratowski定理2** ）G是平面图 ⇔ G中无可收缩为K_5或$K_{3,3}$的子图



课堂练习 判断下图是否为平面图

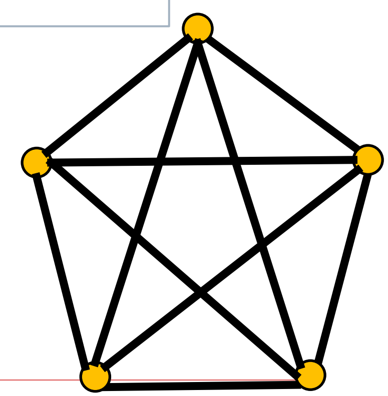
不是平面图



方法二：m=13, n=6, l=3

3(6-2) = 12. m>12 → 非平面图

$$m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$$

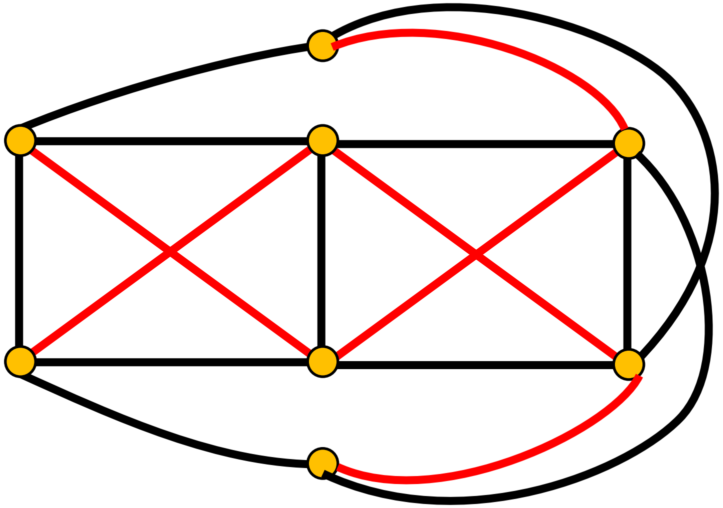


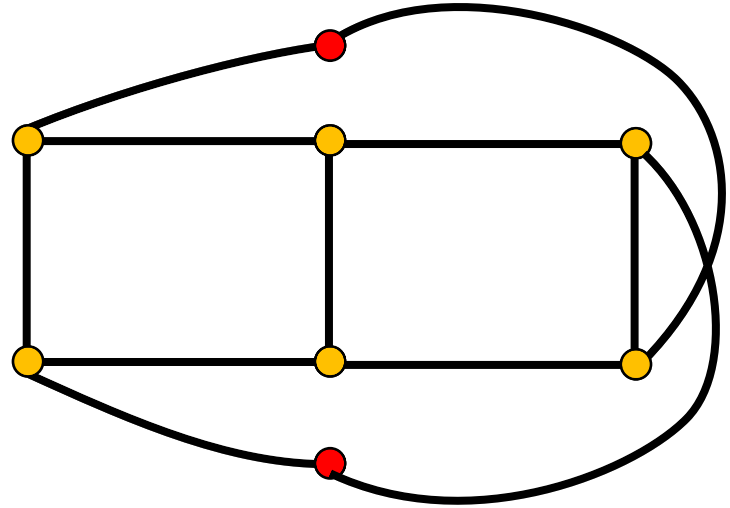
方法三：m=13, n=6

3*6-6 = 12. m>12 → 非平面图

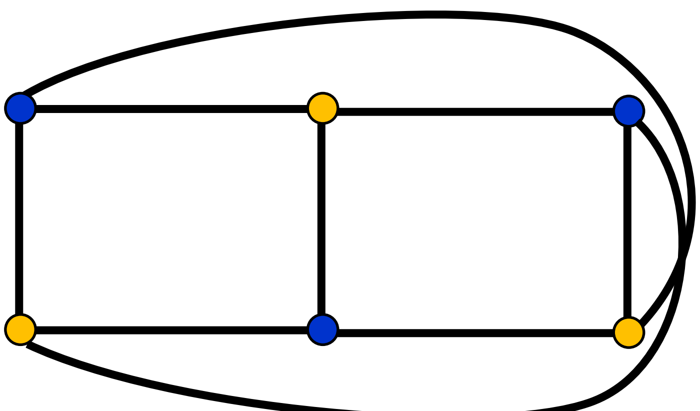
$$m \le 3n - 6$$

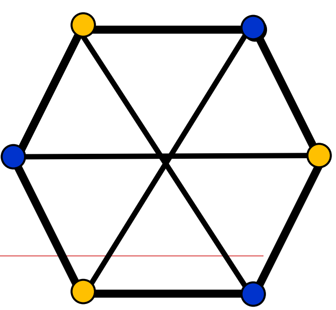
练习 判断下图是否为平面图



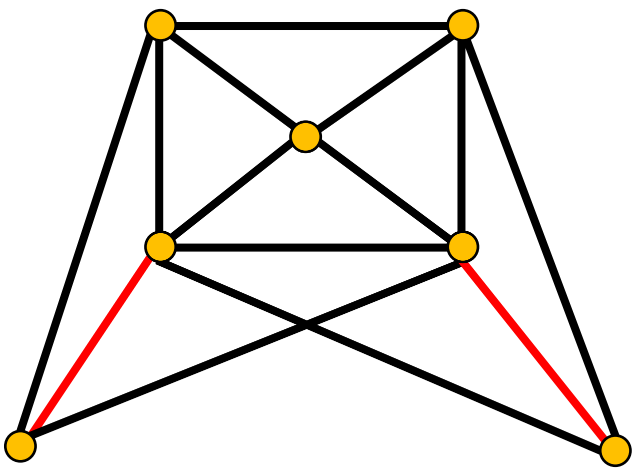


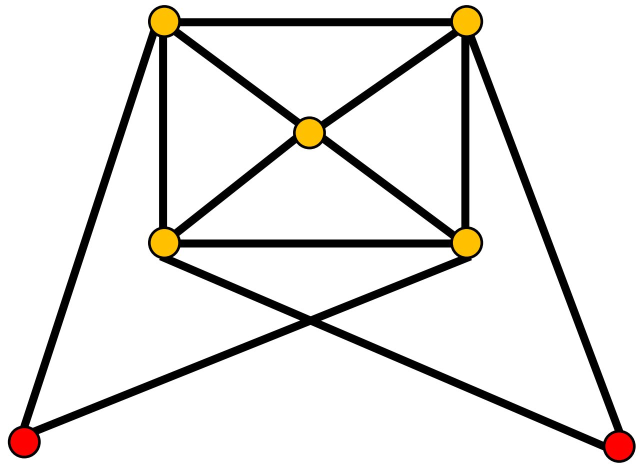
非平面图



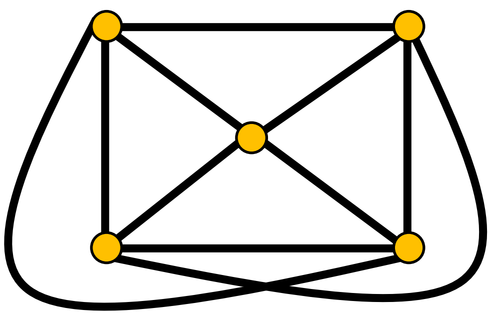


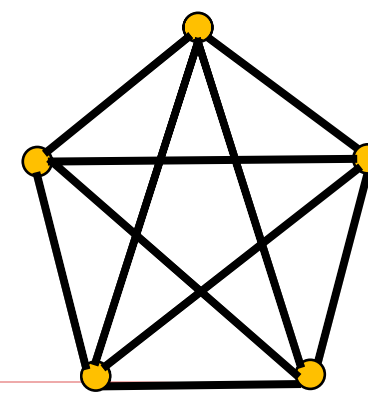
练习 判断下图是否为平面图



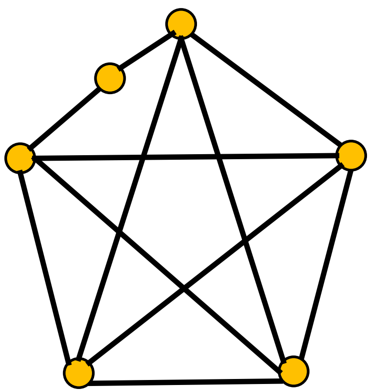


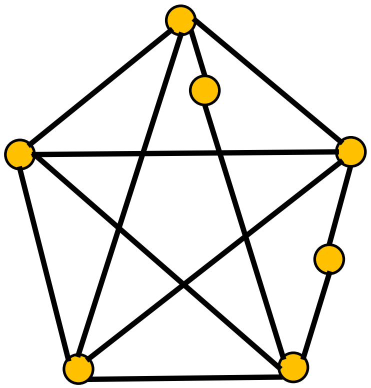
非平面图

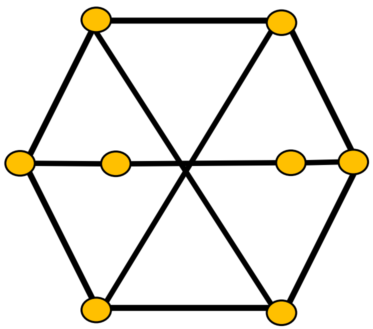


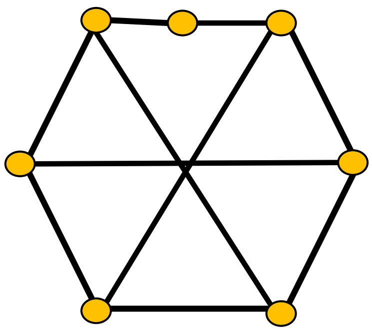


◆练习 判断下图是否为极小非平面图









与K_5, $K_{3,3}$同胚的图都是极小非平面图。

定理17.5充分性

- 若简单连通平面图G的每个面的次数都等于3，则G为极大平面图。
- 证 根据定理17.3（握手定理）可知，$2m=3r$

  因为G是连通的，根据欧拉公式可知：$r=2-m-n$.

  代入上式，得$m=3n-6$.

  若G不是极大平面图，则G中一定存在不相邻的顶点u,v，使得$G' =G\cup(u,v)$是简单平面图.

  而G'的边数 $m' =m+1$，点数 $n'= n$

  因此$m' \geq 3n' -6$. 这与定理17.10矛盾。

第十七章 平面图

- 本章的主要内容
- **17.1平面图的基本概念**
- **17.2欧拉公式**
- **17.3平面图的判断**
- **17.4平面图的对偶图**

对偶图

面 ⟺ 顶点

定义17.6 设G是一个平面图的平面嵌入,构造图G^*如下：

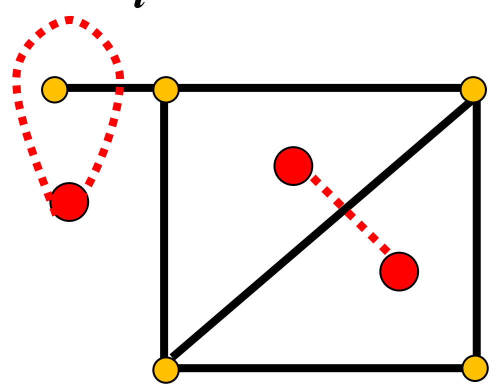
(1) 在G的面R_i中放置G^*的顶点v_i^*.

(2) 设e为G的任意一条边

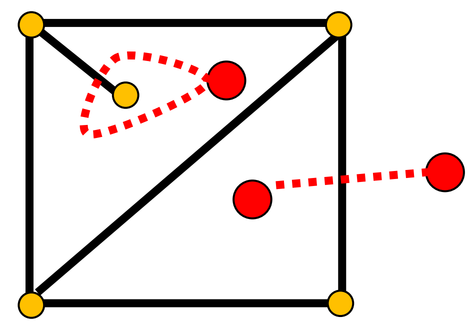
(2.1) 若e在G的面 R_i与 R_j 的公共边界上，则做边 $e^*=(v_i^*,v_j^*)$， e^*与e相交且不与其它边相交.

(2.2) 若e为G中的桥且在面R_i的边界上，则作以v_i^*为端点的环$e^*=(v_i^*,v_i^*)$.

称G^*为G的对偶图.

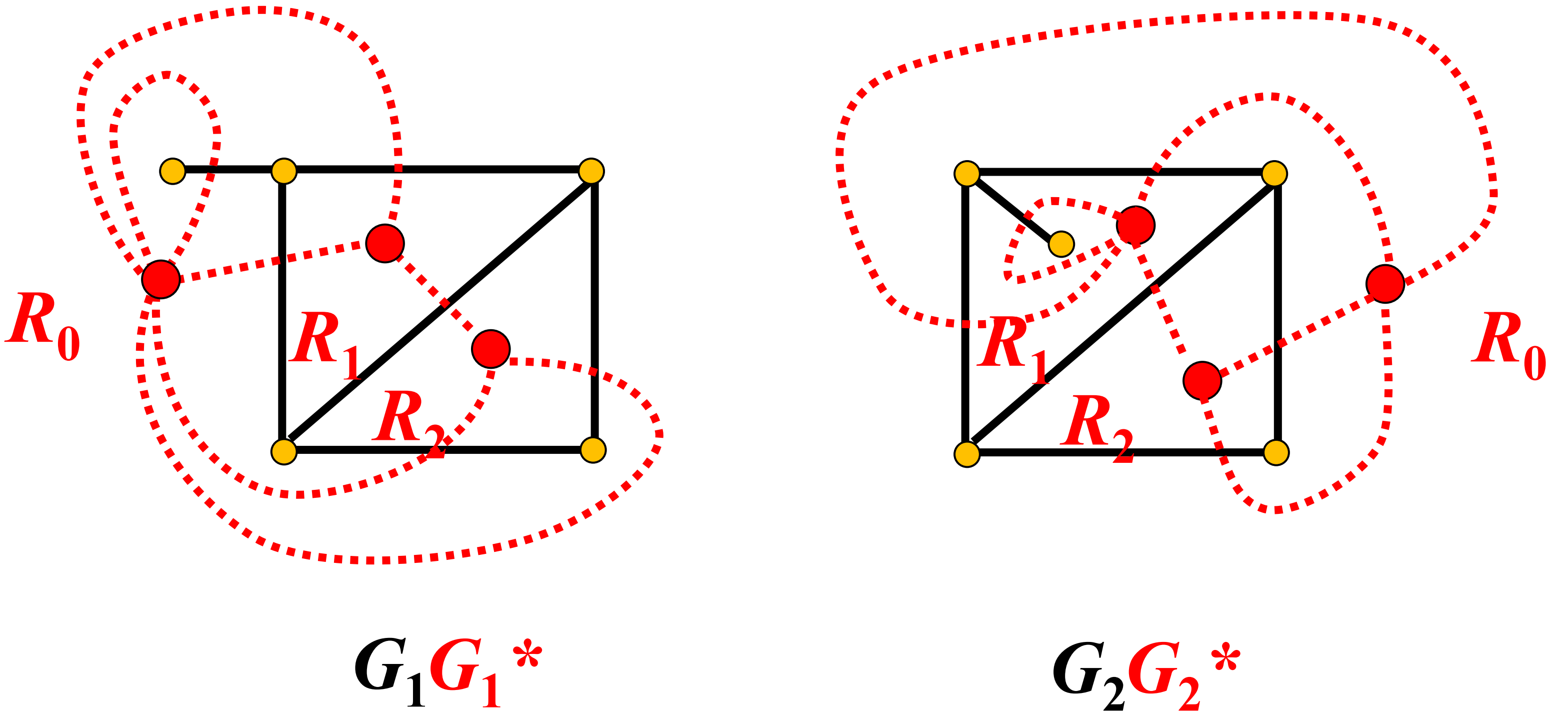


G



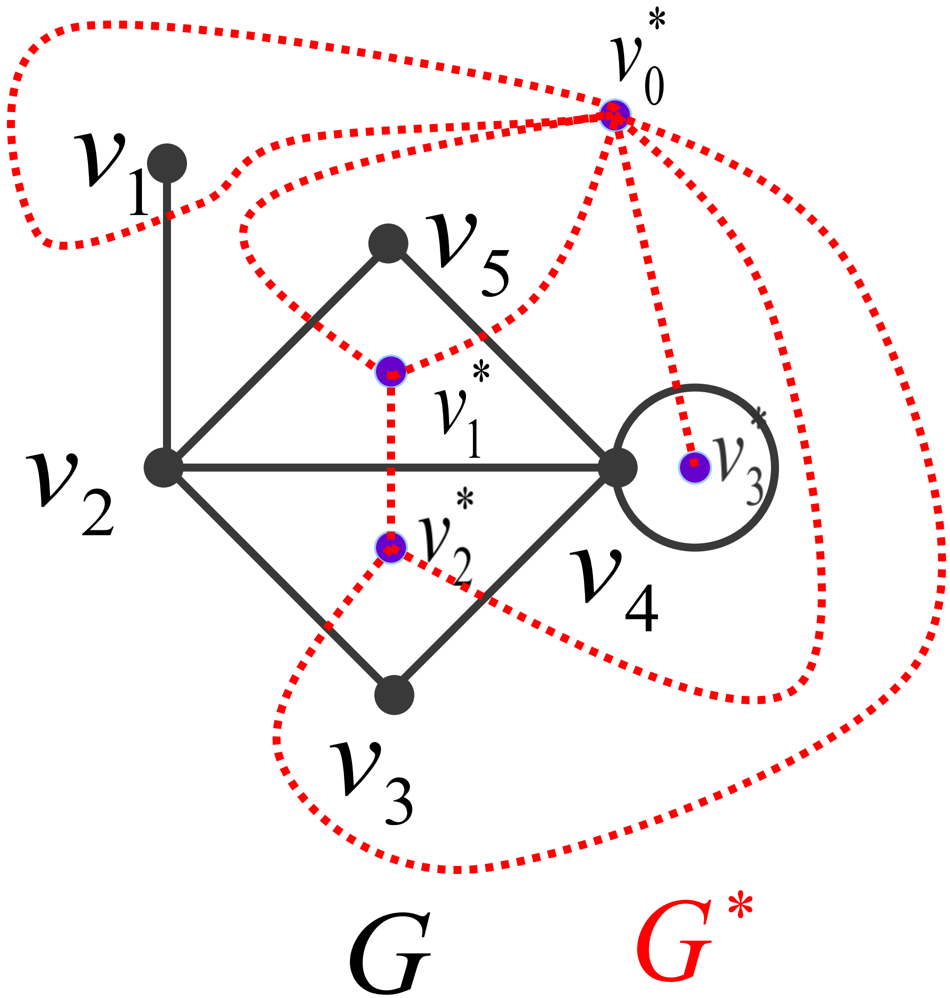
G

对偶图　面 ⟺ 顶点



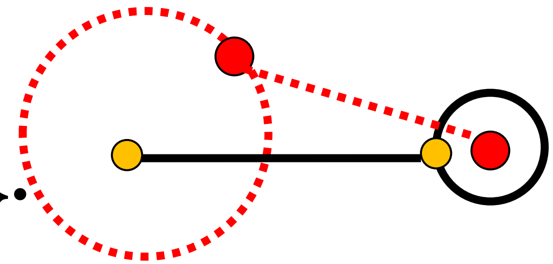
G_1*和G_2*不同构！

例　　面 ⟺ 顶点



对偶图的性质

- **G 的对偶图G^*有以下性质：**



(1) G^*是平面图，而且是平面嵌入.

(2) G^*是连通图.

(3) 若边e为G中的环，则G^*与e对应的边e^*为桥，若e为桥，则G^*中与e对应的边e^*为环.

(4) 在多数情况下，G^*为多重图（含平行边的图）.

(5) 同构的平面图（平面嵌入）的对偶图不一定是同构的.

G_2^*

平面图与对偶图的 阶数、边数与面数之间的关系

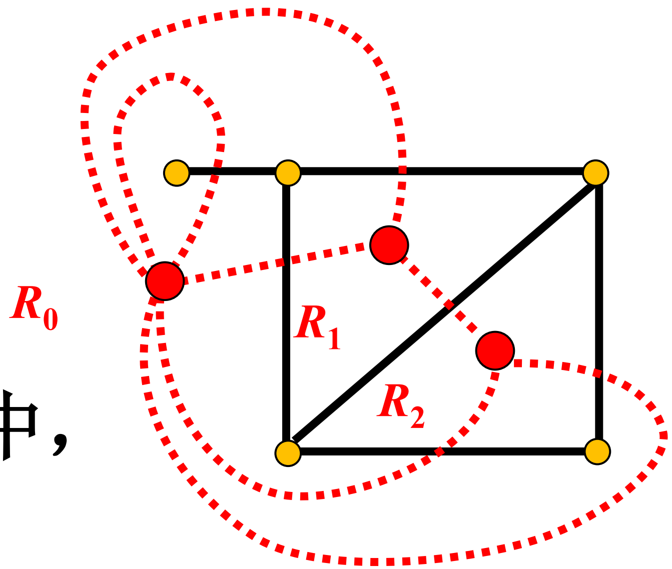
- **定理17.14** 设G^*是连通平面图G的对偶图，n^*, m^*, r^*和n, m, r分别为G^*和G的顶点数、边数和面数，则

  (1) $n^*= r$

  (2) $m^*=m$

  (3) $r^*=n$

  (4) 设G^*的顶点v_i^*位于G的面R_i中，则$d_{G^*}(v_i^*)=\deg(R_i)$



平面图与对偶图的
阶数、边数与面数之间的关系

- 证明：

由G^*的构造过程知(1)(2)(4)显然成立.

(3) 要证$r^*=n$

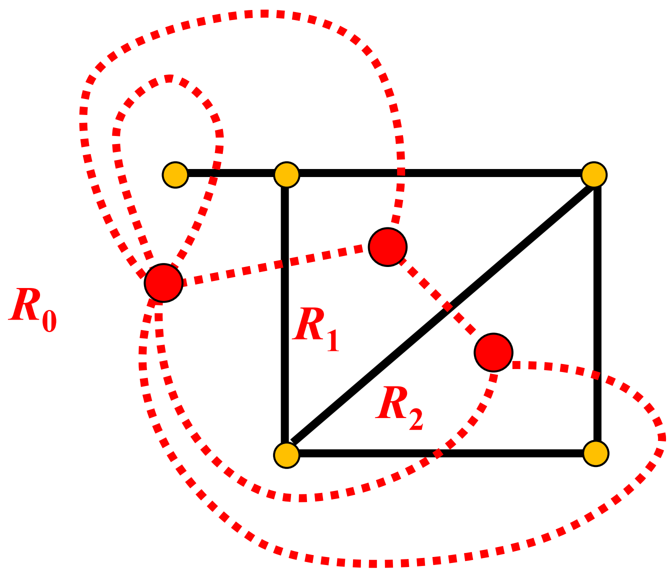
G和G^*都满足欧拉公式.

$n-m+r=2$

$n^*-m^*+r^*=2$

再由$n^*=r$，$m^*=m$成立，

可得$r^*=n$.



平面图与对偶图的
阶数、边数与面数之间的关系

- **定理17.15** 设G^*是具有k（$k\geq 2$）个连通分支的平面图G的对偶图，则

  (1) $n^* = r$

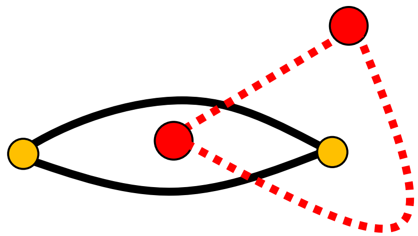
  (2) $m^* = m$

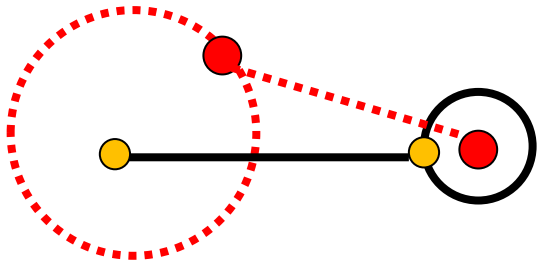
  (3) $r^* = n - k + 1$

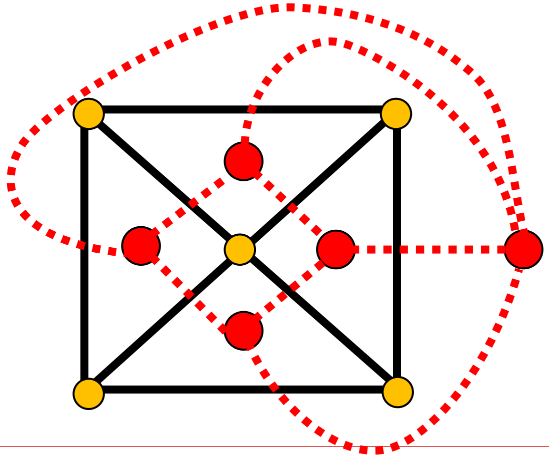
  (4)设G^*的顶点v_i^*位于G的面R_i中，则$d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$

自对偶图

- **定义17.8** 设G^*是平面图G的对偶图，若$G^* \cong G$，则称G为**自对偶图**.

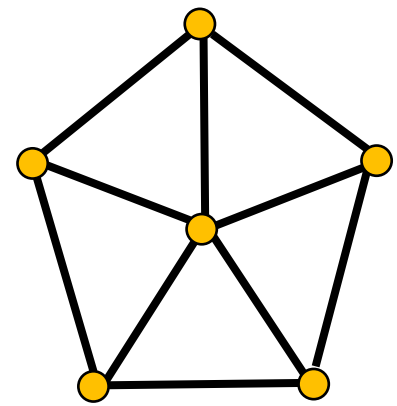




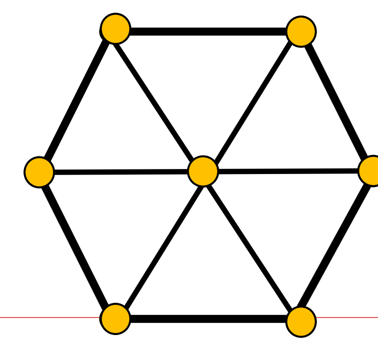


自对偶图

- 轮图定义如下：
- 在$n-1$（$n \geq 4$）边形C_{n-1}内放置1个顶点，使这个顶点与C_{n-1}上的所有的顶点均相邻. 所得n 阶简单图称为n阶轮图.
- 将 n 阶轮图记为W_n.
- n为奇数的轮图称为奇阶轮图.
- n为偶数的轮图称为偶阶轮图.



6阶轮图
偶阶轮图



7阶轮图
奇阶轮图

轮图都是自对偶图