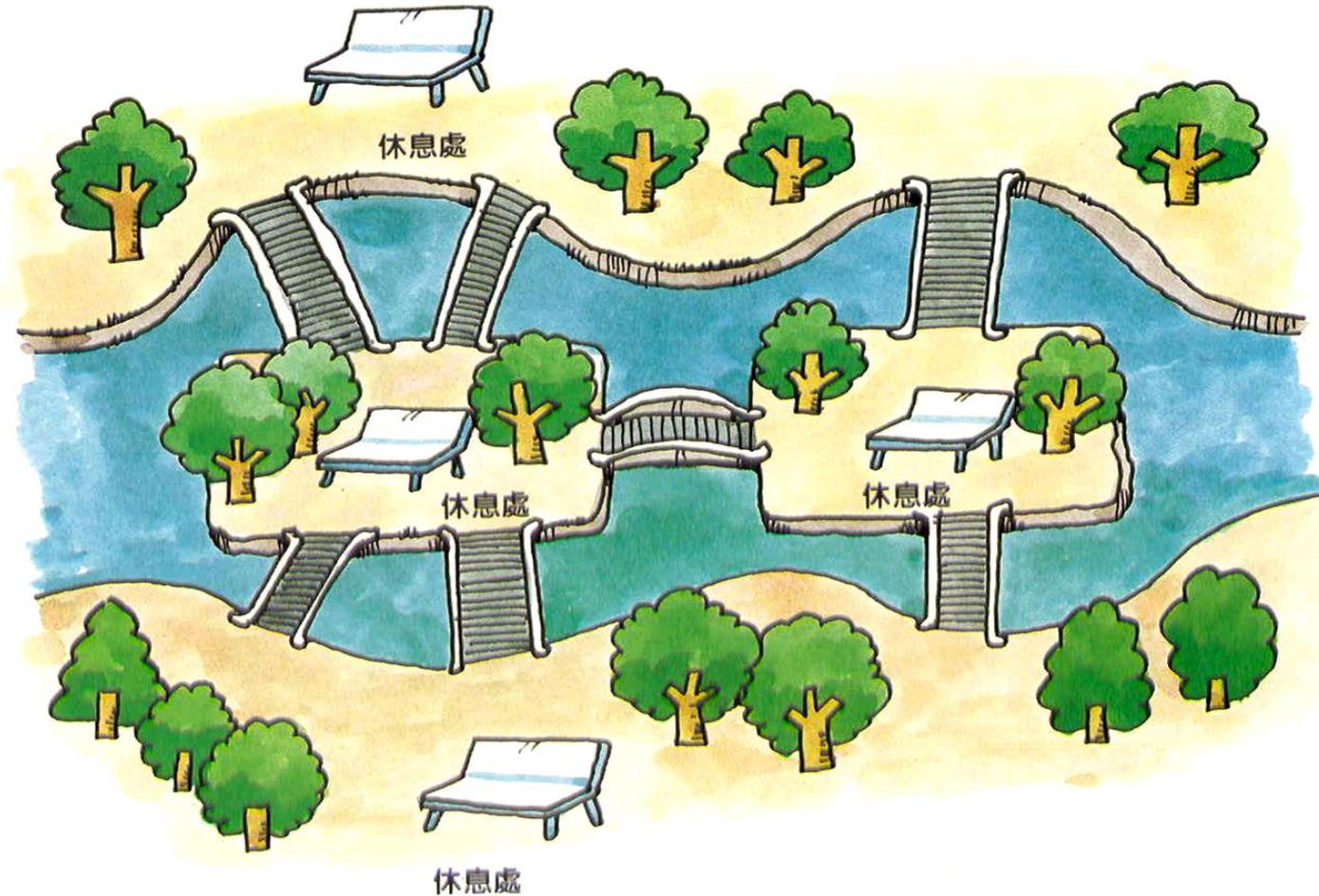




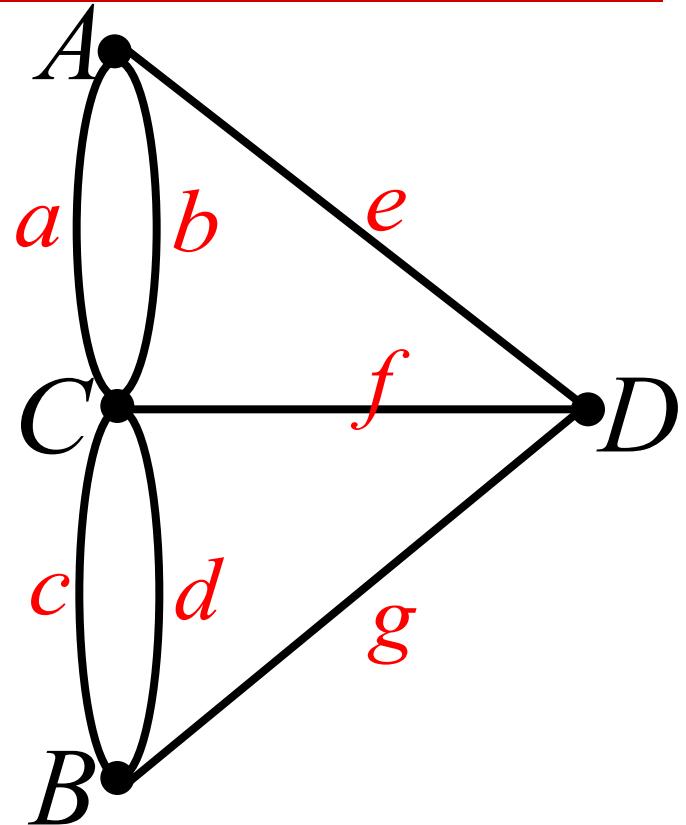
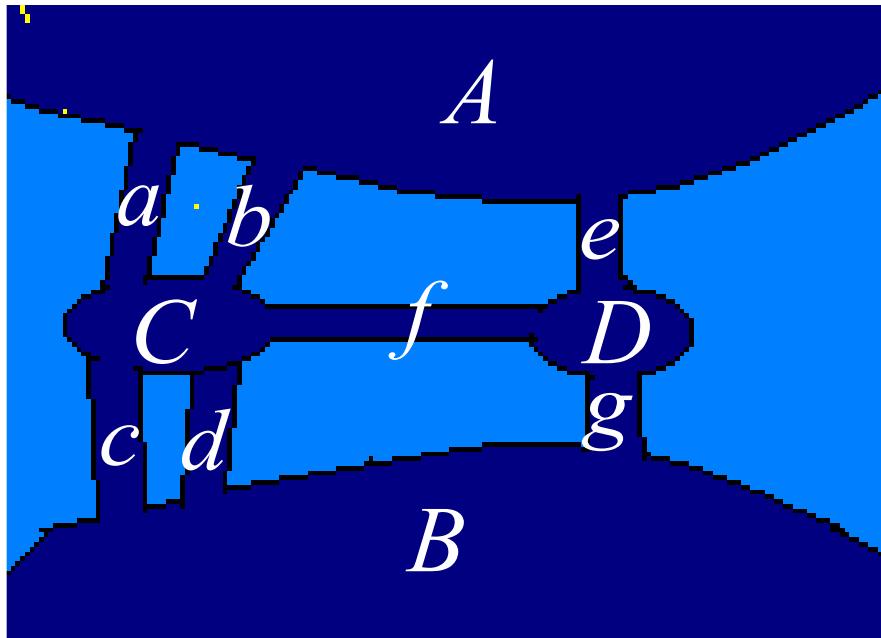
第五部分 图论

北京理工大学 计算机学院

哥尼斯堡七桥问题



哥尼斯堡七桥问题



问题

能否从河岸或小岛出发，通过每一座桥，且仅通过一次回到原地？

图论发展简史

- 1736年瑞士数学家欧拉（Euler）发表了图论的首篇论文——《哥尼斯堡七桥问题无解》。
- 1847年，克希霍夫用图论分析电路网络，这是图论在工程中的最早应用。
- 1936年，匈牙利数学家寇尼格（Konig）出版了图论的第一部专著《有限图与无限图理论》，它标志着图论将进入突飞猛进发展的新阶段。
- 目前，图论在许多领域都得到广泛的应用。如：计算机科学、物理学、化学、运筹学、信息论、控制论、网络通讯、社会科学以及经济管理、军事、国防、工农业生产等。

图论的新应用

□ 社交网络上产生了大量的规模化、群体化的数据，吸引了包括计算机科学、心理学、社会学、新闻传播学等领域专家和学者对其进行研究和探索，希望能够借助更强的社交网络的分析和处理能力发现更多人类尚未探索出的规律。

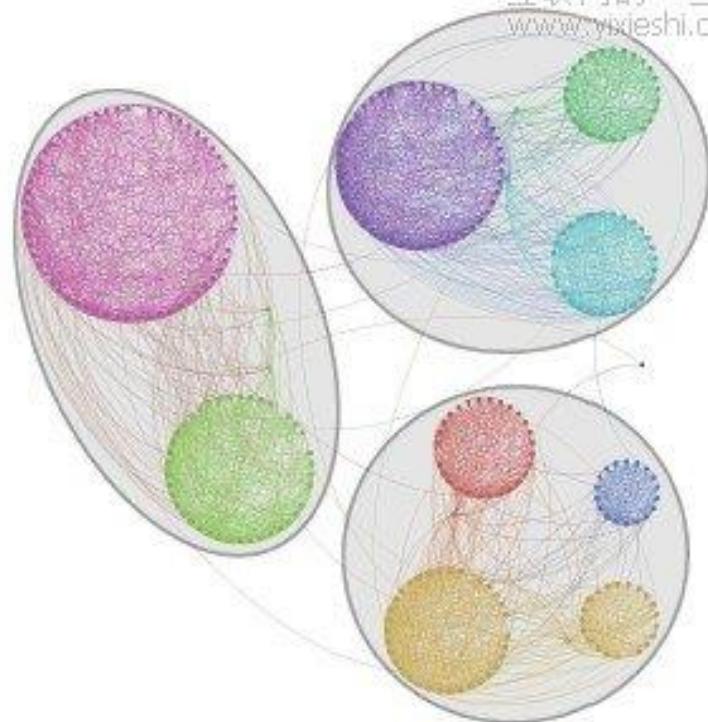


twitter

社区发现

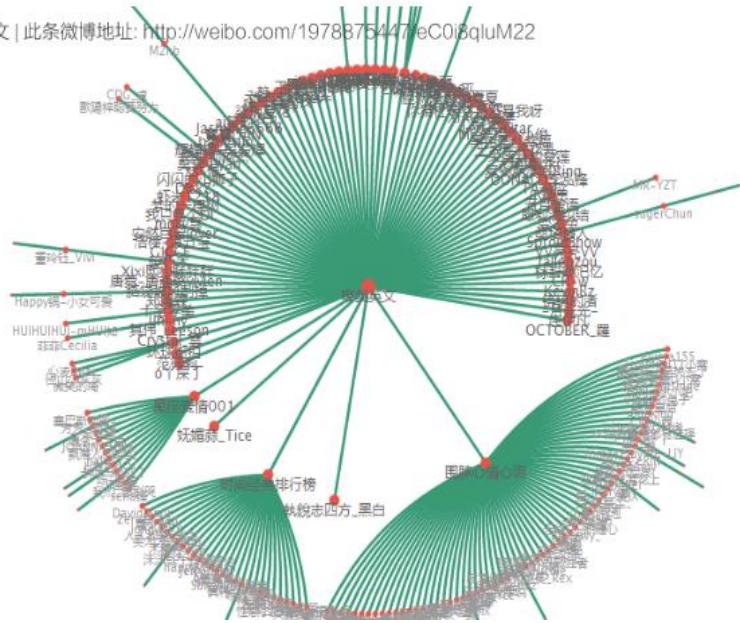


互联网的一些事
www.yxieshi.com



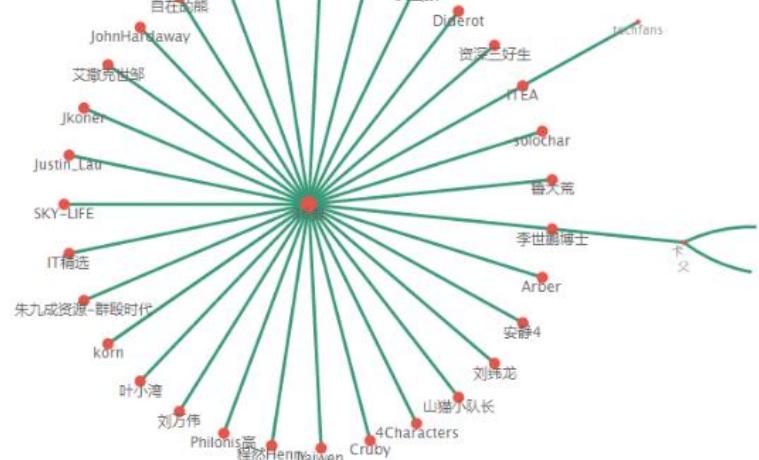
信息传播路径分析

@唯美英文 | 此条微博地址: <http://weibo.com/1978375447/eC0l8qluM22>



蒲公英式

中心式



第五部分 图论

本部分主要内容

- 第14章 图的基本概念
- 第15章 欧拉图、哈密顿图
- 第16章 树
- 第17章 平面图
- 第18章 支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

预备知识:无序对与多重集合

无序对: 2个元素构成的集合, 记作 (a,b)

无序积: $A \& B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

例如 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2\}$

$$A \& B = B \& A = \{(a,1), (b,1), (c,1), (a,2), (b,2), (c,2)\}$$

$$A \& A = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c)\}$$

$$B \& B = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}$$

多重集合: 元素可以重复出现的集合

重复度: 元素在多重集合中出现的次数

例如 $S=\{a,b,b,c,c,c\}$, a,b,c 的重复度依次为1,2,3

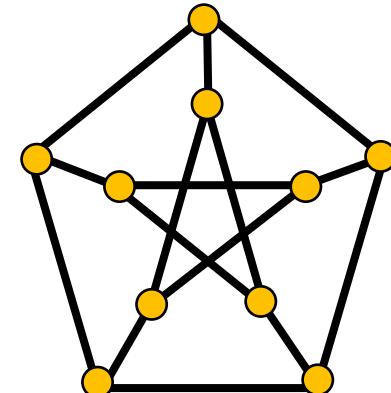
第十四章 图的基本概念

□ 主要内容

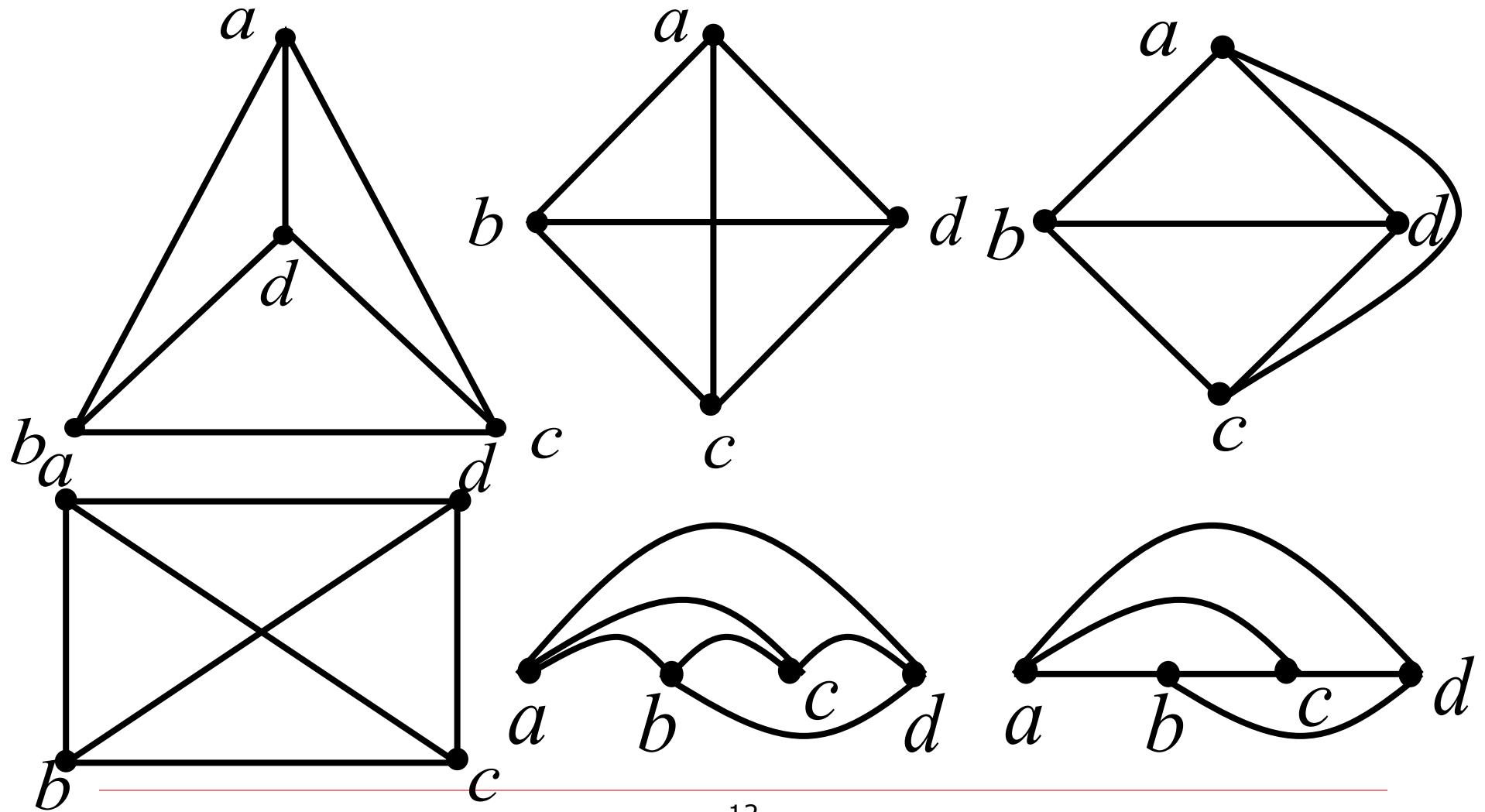
- 14.1图
- 14.2通路与回路
- 14.3图的连通性
- 14.4图的矩阵表示
- 14.5图的运算

14.1 图(Graph)

- 图可直观地表示离散对象之间的相互关系，研究它们的共性和特性，以便解决具体问题。
- 一个图是由一些结点和连接两结点间的连线组成，至于连线的长短、曲直及结点的位置是无关紧要的。



下面表示的是同一个图



无向图

□ 定义14.1 无向图(Graph)是一个有序的二元组

$$G = \langle V, E \rangle$$

V 为非空有穷集，称为顶点集，其元素称为顶点(vertex)或者结点(node)

E 为无序积 $V \& V$ 的有穷多重子集，其元素称为无向边，简称边(edge).

无向图

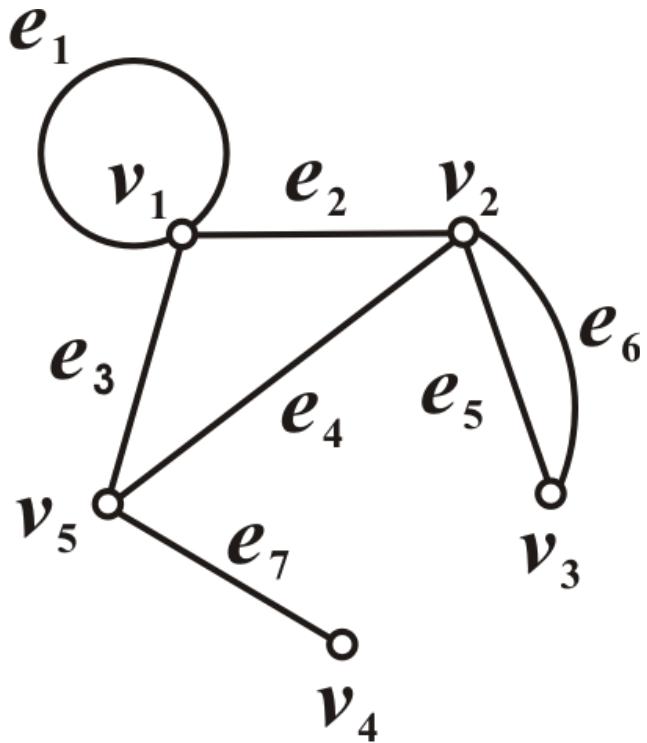
□ 例14.1(1)

$G= \langle V, E \rangle$ 如图所示,

其中

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$$

$$E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_2, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_4, v_5)\}.$$



有向图

□ 定义14.2 有向图(Digraph)是一个有序的二元组

$$D = \langle V, E \rangle$$

$V \neq \emptyset$ 称为顶点集, 其元素称为顶点或结点;
 E 是 $V \times V$ 的多重子集, 称为边集, 其元素称为有向边, 简称边(edge/arc).

有时用 $V(D)$ 和 $E(D)$ 分别表示 V 和 E .

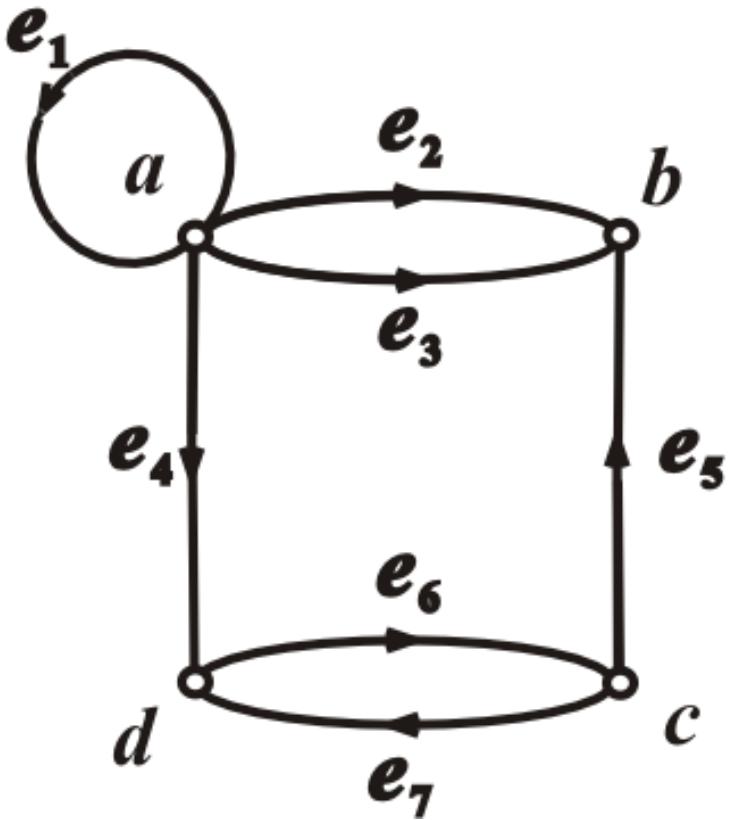
有向图

□ 例14.1(2) $D = \langle V, E \rangle$ 如右

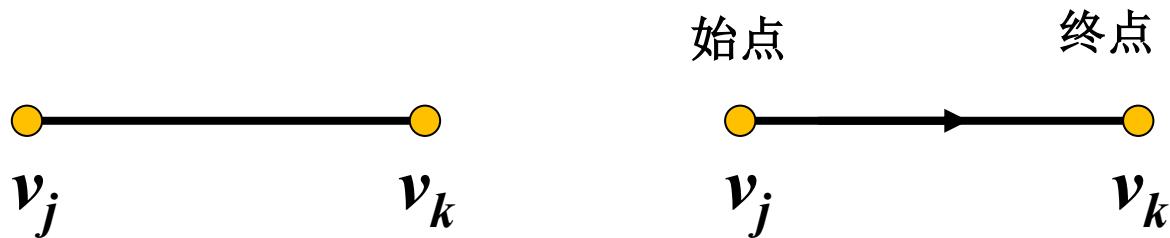
图所示,其中

$$V = \{a, b, c, d\},$$

$$E = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, b \rangle, \\ \langle a, d \rangle, \langle d, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, \\ b \rangle\}.$$



无向边、有向边

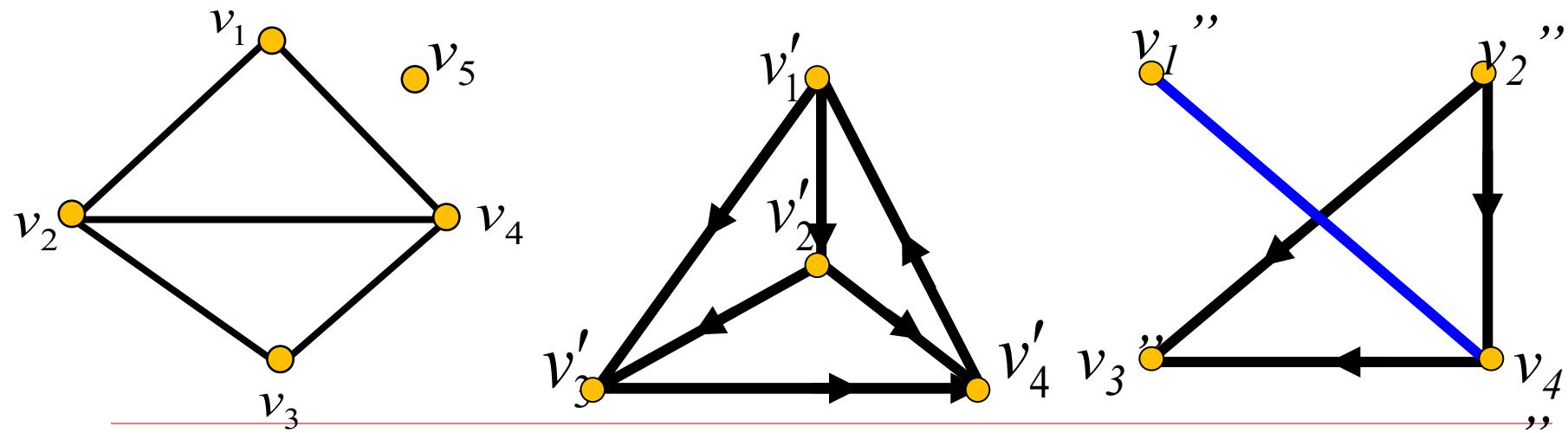


- **无向边:** 边 e_i 与结点无序对 (v_j, v_k) 相关联;
- **有向边:** 边 e_i' 与结点有序对 $< v_j, v_k >$ 相关联,
其中：
 - 始点： v_j
 - 终点： v_k

无向图、有向图、混合图

- **无向图**: 每条边都是无向边的图;
- **有向图**: 每条边都是有向边的图;
- **混合图**: 图中一些边是有向边, 另一些边是无向边。

今后我们只讨论有向图和无向图。



相关概念

□ 图

- ① 可用 G 和 D 泛指图（用 G 表示无向图， D 表示有向图）
- ② 用 $|V(G)|, |E(G)|$ 分别表示 G 的顶点数和边数。
用 $|V(D)|, |E(D)|$ 分别表示 D 的顶点数和边数。

□ n 阶(order) 图： n 个顶点的图。

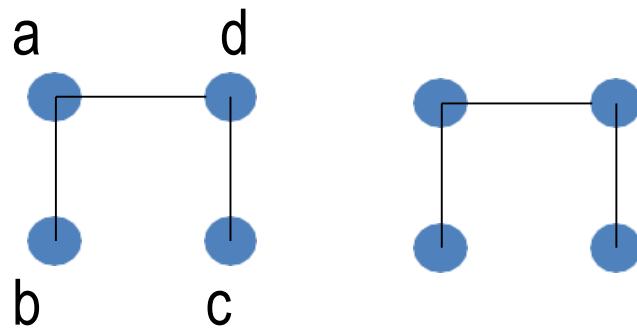
□ 零图(edgeless graph)： $E = \emptyset$ 的图。即仅由孤立点组成的图

□ 平凡图(trivial graph)：1 阶零图。

□ 空图(order-zero graph)—— \emptyset

相关概念

- **标定图**: 每个顶点和边都指定符号的图
- **基图**: 将有向图的各条有向边改成无向边后所得的无向图称为这个有向图的基图。



标定图

非标定图

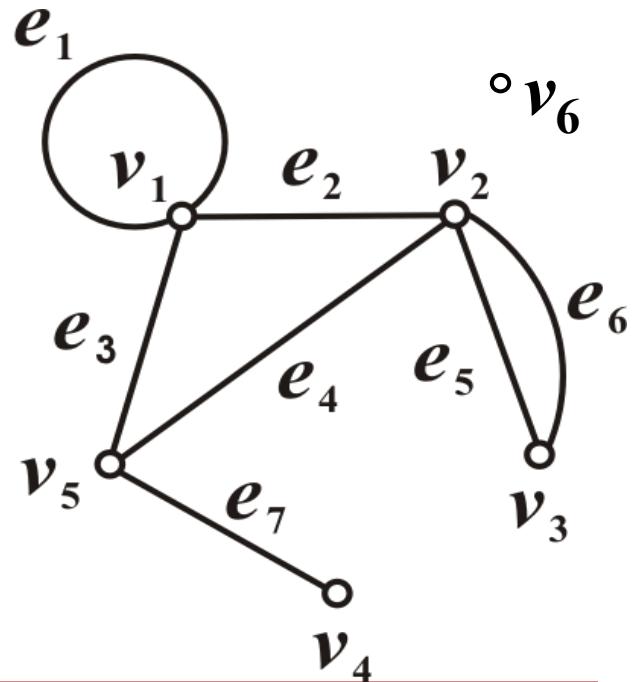
顶点和边的关联与相邻

- 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 边 $e_k = (v_i, v_j) \in E$,
- 称 v_i, v_j 为 e_k 的 端点, e_k 与 v_i (v_j) 关联 (incident).
- 若 $v_i = v_j$, 则称 e_k 为 环 (loop).
- 无边关联的顶点称作 孤立点 (isolated vertex).
- 若 $v_i \neq v_j$, 则称 e_k 与 v_i (v_j) 的 关联次数为 1;
- 若 $v_i = v_j$, 则称 e_k 与 v_i 的 关联次数为 2;
- 若 v_i 不是边 e 的端点, 则称 e 与 v_i 的 关联次数为 0.

顶点和边的关联与相邻

□ 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 边 $e_k = (v_i, v_j) \in E$,
若 $v_i, v_j \in V$, 若边 $(v_i, v_j) \in E$, 则称 v_i, v_j 相邻接 (adjacent);
若 e_k, e_l 有一个公共端点, 则称 e_k, e_l 相邻接.

□ 对有向图有类似定义.
设 $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$ 是有向图的一
条边, v_i 邻接到 v_j , v_j 邻接于
 v_i



邻域与关联集

设无向图 G , $v \in V(G)$

v 的邻域 : 与顶点 v 相邻的所有点组

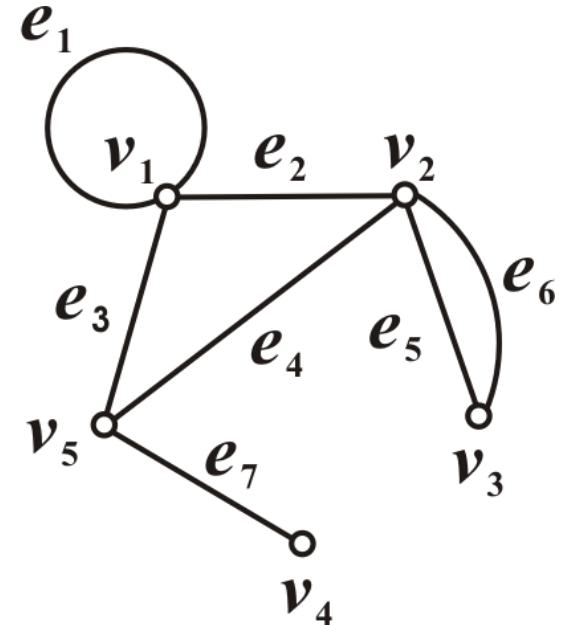
$$N_G(v) = \{u \mid u \in V \wedge (u, v) \in E \wedge u \neq v\}$$

v 的闭邻域: v 的邻域加 v 自身组成

$$\bar{N}_G(v) = N_G(v) \cup \{v\}$$

v 的关联集 : 与顶点 v 相关联的所有边构成的集合

$$I_G(v) = \{e \mid e \in E(G) \wedge e \text{ 与 } v \text{ 关联}\}$$



邻域与关联集

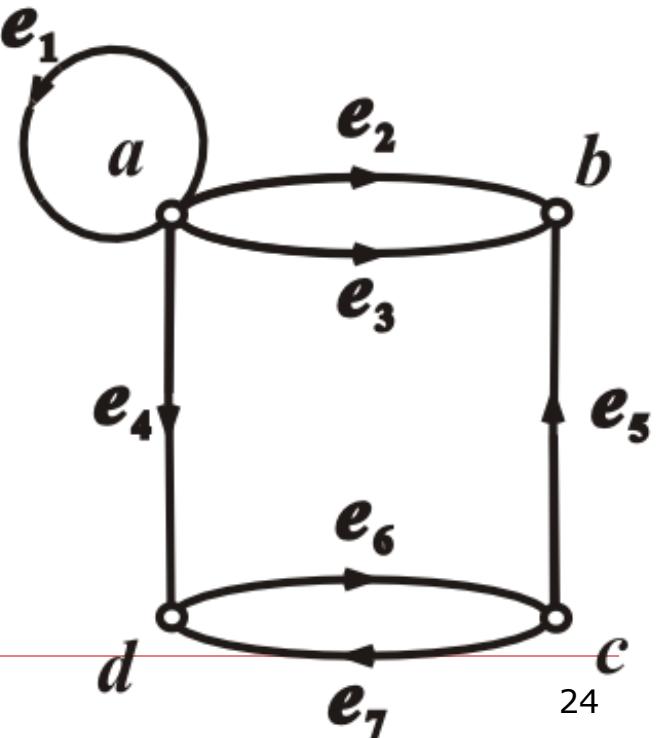
设有向图 D , $v \in V(D)$

v 的后继元集 $\Gamma_D^+(v) = \{u \mid u \in V(D) \wedge \langle v, u \rangle \in E(G) \wedge u \neq v\}$

v 的先驱元集 $\Gamma_D^-(v) = \{u \mid u \in V(D) \wedge \langle u, v \rangle \in E(G) \wedge u \neq v\}$

v 的邻域 $N_D(v) = \Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v)$

v 的闭邻域 $\bar{N}_D(v) = N_D(v) \cup \{v\}$



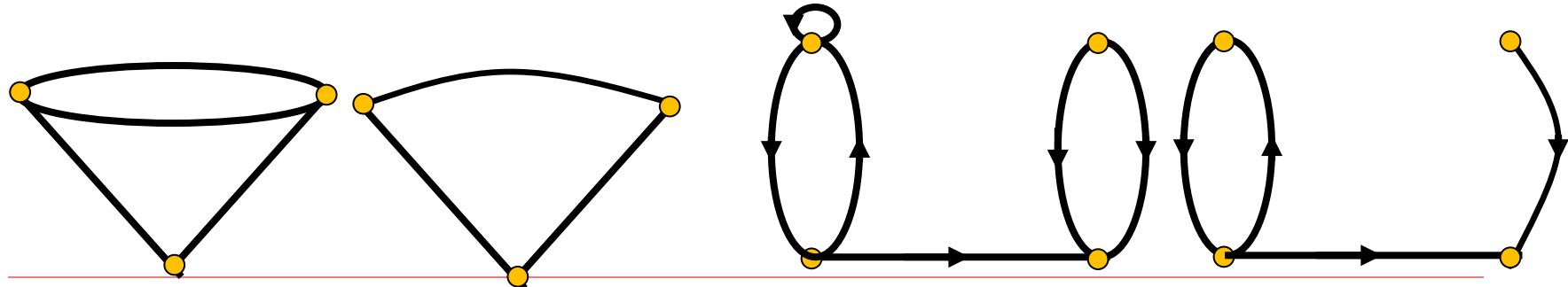
多重图和简单图

□ 定义14.3 平行边

- 在无向图中，如果关联于同一对顶点的边多于1条，则称这些边为平行边.
- 在有向图中，如果关联于同一对顶点的边多于1条，且它们方向相同，则称这些边为平行边.

□ 平行边的条数称为重数。

- 多重图(Pseudograph/Multigraph): 含有平行边的图.
- 简单图(Simple graph): 既不含平行边也不含环的图.



顶点的度数(degree)

- 定义14.4(1)设 $G= \langle V, E \rangle$ 为无向图, $v \in V$,
 v 的度数 $d(v)$: v 作为边的端点次数之和
- 注意: 环在其对应结点上度数为2。

悬挂顶点: 度数为1的顶点

悬挂边: 与悬挂顶点关联的边

G 的最大度 $\Delta(G)=\max\{d(v)| v \in V\}$

G 的最小度 $\delta(G)=\min\{d(v)| v \in V\}$

顶点的度数(degree)

例：

$$d(v_5)=3,$$

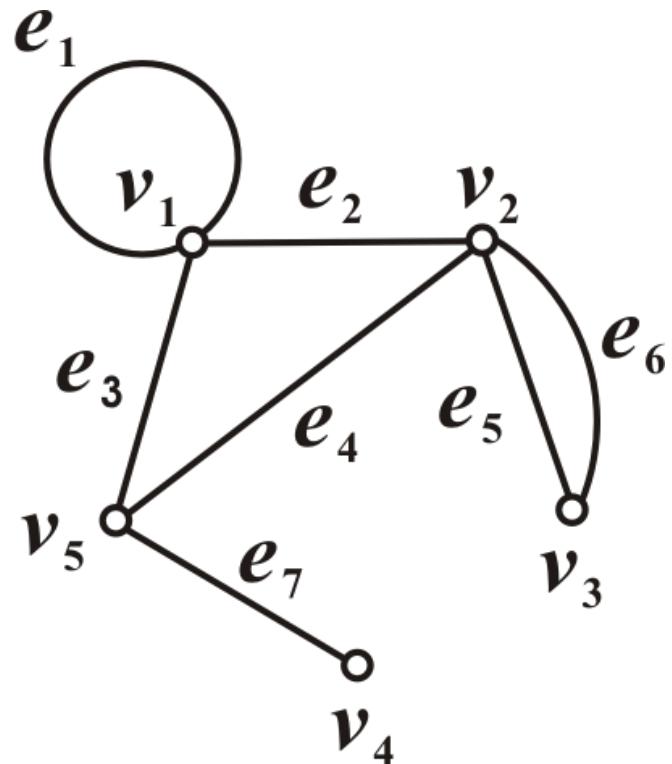
$d(v_4)=1$, 悬挂顶点
 e_7 是悬挂边.

$$d(v_3)=2,$$

$$d(v_2)=4,$$

$d(v_1)=4$, e_1 是环.

$$\Delta(G)=4, \delta(G)=1$$



顶点的度数(in-degree and out-degfree)

□ 定义14.4(2) 设 $D = \langle V, E \rangle$ 为有向图, $v \in V$,

v 的出度 $d^+(v)$: v 作为边的始点次数之和

v 的入度 $d^-(v)$: v 作为边的终点次数之和

v 的度数(度) $d(v)$: v 作为边的端点次数之和

$$d(v) = d^+(v) + d^-(v)$$

- ◆ D 的最大出度 $\Delta^+(D)$, 最小出度 $\delta^+(D)$
- ◆ 最大入度 $\Delta^-(D)$, 最小入度 $\delta^-(D)$
- ◆ 最大度 $\Delta(D)$, 最小度 $\delta(D)$

顶点的度数(in-degree and out-degree)

例 $d^+(a)=4$, $d^-(a)=1$, $d(a)=5$,

$d^+(b)=0$, $d^-(b)=3$, $d(b)=3$,

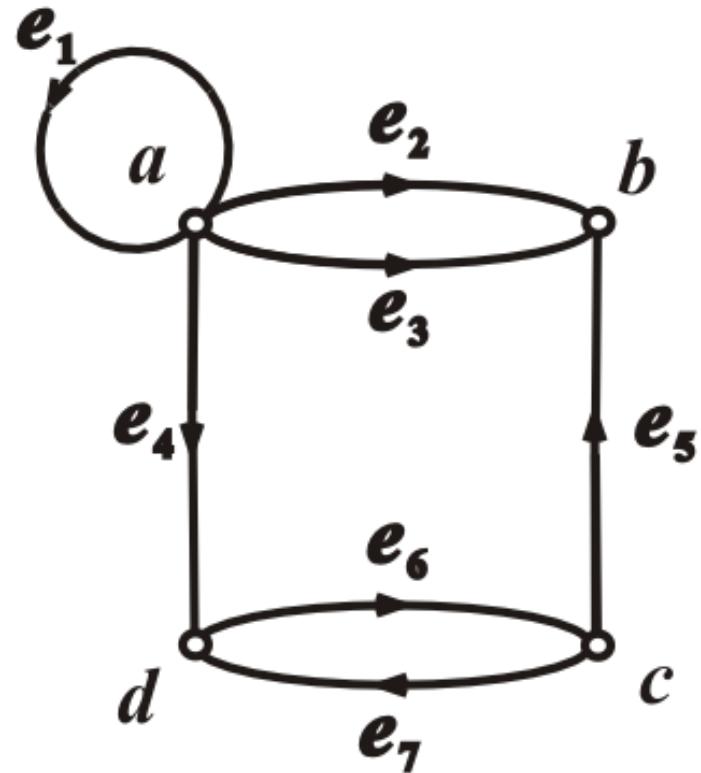
$d^+(c)=2$, $d^-(c)=1$, $d(c)=3$,

$d^+(d)=1$, $d^-(d)=2$, $d(d)=3$

$\Delta^+=4$, $\delta^+=0$,

$\Delta^-=3$, $\delta^-=1$,

$\Delta=5$, $\delta=3$



定理14.1握手定理(Handshaking lemma)

◆ 定理14.1 在任何无向图中,所有顶点的度数之和等于边数的两倍.

设 $G= \langle V, E \rangle$ 为任意无向图, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$

证 图中每条边(包括环)均有两个端点, 在计算各顶点度数之和时,
每条边均提供2度, m 条边共提供 $2m$ 度.

例：一个图中有10个结点，每个结点的度数为6, 图中有多少条边?

结点度数总和： $6 \times 10 = 60$

因为 $2m = 60$, 所以 $m = 30$.

定理14.2握手定理

定理14.2 在任何有向图中,所有顶点的度数之和等于边数的两倍;
所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和,都等于边数.

设 $D = \langle V, E \rangle$ 为任意有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|E| = m$, 则

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m, \text{ 且 } \sum_{i=1}^n d^-(v_i) = \sum_{i=1}^n d^+(v_i) = m.$$

推论 任何图(无向图和有向图)都有偶数个奇度顶点.

推论证明 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为任意图, 令

$$V_1 = \{v \mid v \in V \wedge d(v) \text{ 为奇数}\}, \quad V_2 = \{v \mid v \in V \wedge d(v) \text{ 为偶数}\}$$

则 $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, 由握手定理可知

$$2m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v)$$

偶数

偶数

→偶数

偶数

握手定理应用

- **例1** 无向图 G 有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余顶点度数均小于3，问 G 的阶数 n 为几？
- 解：设除3度与4度顶点外，还有 x 个顶点 v_1, v_2, \dots, v_x ，则

$$d(v_i) \leq 2, \quad i = 1, 2, \dots, x,$$

于是得不等式

$$32 \leq 24 + 2x$$

得 $x \geq 4$ ，阶数 $n \geq 4 + 4 + 3 = 11$.

图的度数列

- 1. $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为无向图 G 的顶点集, 称 $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$ 为 G 的 **度数列**
- 2. $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为有向图 D 的顶点集,
 D 的 **度数列**: $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$
 D 的 **出度列**: $d^+(v_1), d^+(v_2), \dots, d^+(v_n)$
 D 的 **入度列**: $d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n)$
- 3. 对于顶点标定的无向图, 它的度数序列是唯一的。
反之, 对于给定的非负整数列 $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$, 若存在以 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为顶点集的 n 阶无向图 G , 使得 $d(v_i)=d_i$, 则称 d 是 **可图化的**, 特别地, 若所得到的图是简单图, 则称 d 是 **可简单图化的**.

可图化

□ 定理14.3 设非负整数列 $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 是可图化的当且仅当度序列之和为偶数。



下面哪些可以作为一个图的度数序列

- | | | | |
|------------------|---|--------------------|---|
| 1. (2,3,3,4,4,5) | ✗ | 4. (2,3,3,4,5,6,7) | 😊 |
| 2. (2,3,4,4,5) | 😊 | 5. (1,3,3,4,5,6,6) | 😊 |
| 3. (1,3,3,3) | 😊 | 6. (1,2,3,3,4,5) | 😊 |

可图化

□ 定理14.4 设 G 为任意 n 阶无向简单图，则

$$\Delta(G) \leq n-1.$$

 下面哪些可以作为一个简单图的度数序列

- | | | | |
|------------------|--|--------------------|--|
| 1. (2,3,3,4,4,5) | | 4. (2,3,3,4,5,6,7) | |
| 2. (2,3,4,4,5) | | 5. (1,3,3,4,5,6,6) | |
| 3. (1,3,3,3) | | 6. (1,2,3,3,4,5) | |

同构(Isomorphism)

□**定义14.5** 设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 为两个无向图(有向图),

若存在双射函数 $f: V_1 \rightarrow V_2$, 使得对于任意的 $v_i, v_j \in V_1$,

- 1) $(v_i, v_j) \in E_1$ ($\langle v_i, v_j \rangle \in E_1$) 当且仅当 $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$ ($\langle f(v_i), f(v_j) \rangle \in E_2$)
 - 2) (v_i, v_j) ($\langle v_i, v_j \rangle$) 与 $(f(v_i), f(v_j))$ ($\langle f(v_i), f(v_j) \rangle$) 的重数相同
- 则称 G_1 与 G_2 是同构的, 记作 $G_1 \cong G_2$.

两图同构的条件

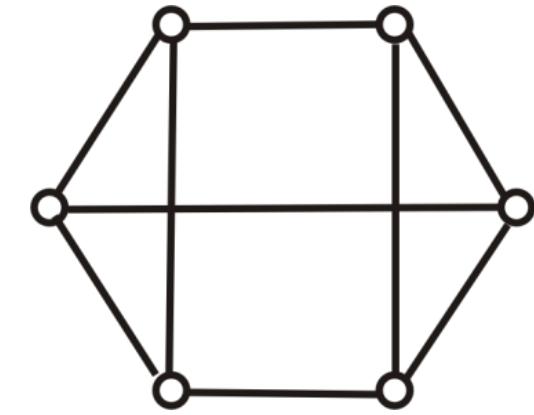
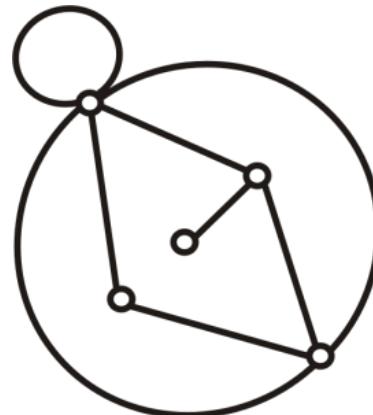
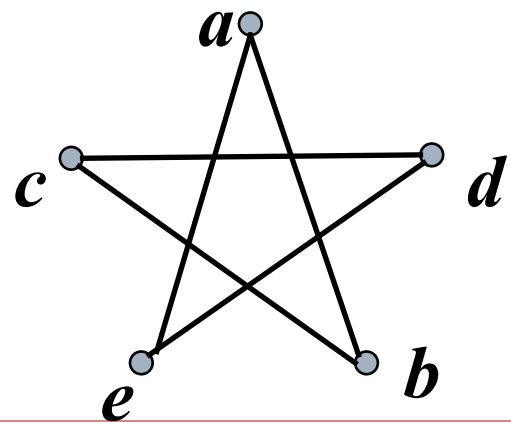
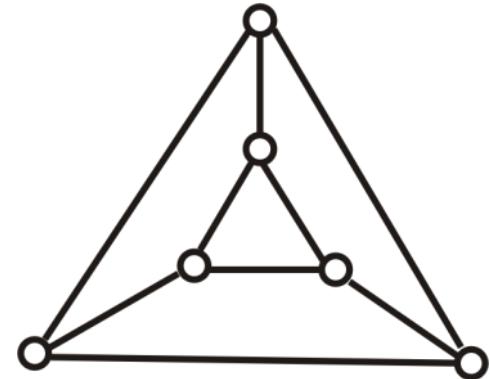
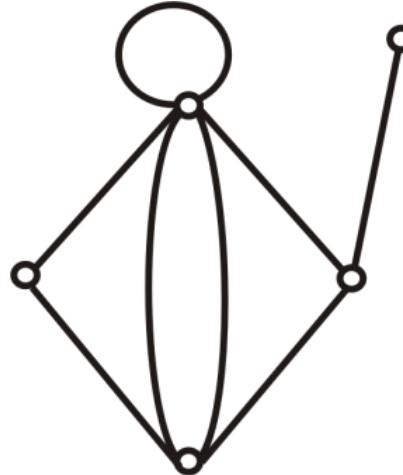
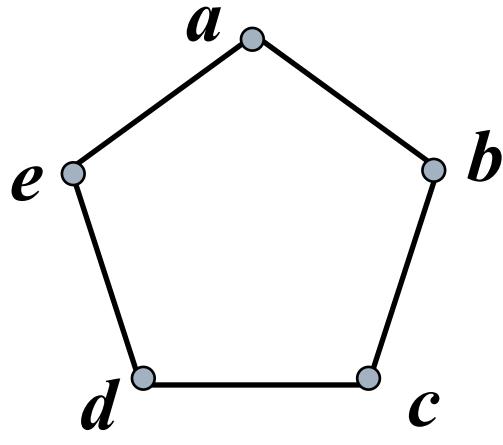
□ 充要条件：

图中结点和边分别存在着一一对应，且保持同样的关联关系。

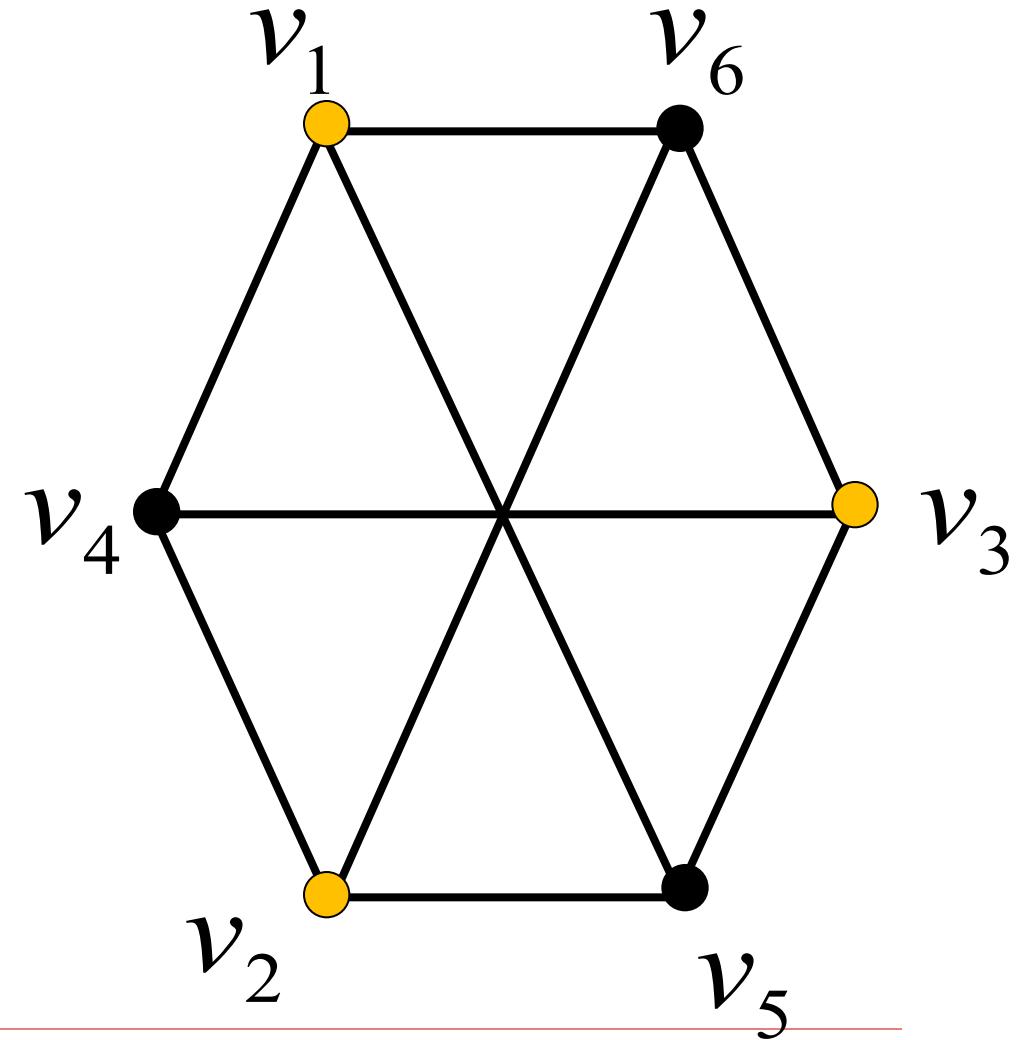
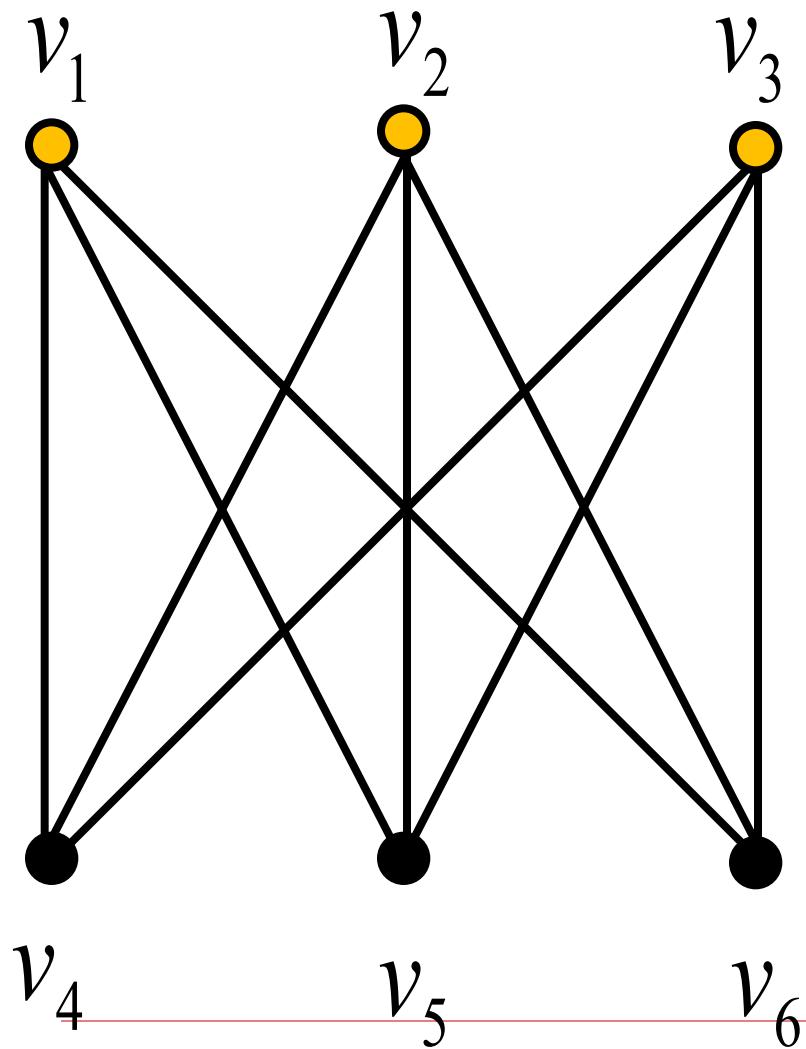
□ 必要条件

1. 结点数目相同；
2. 边数相同；
3. 度数相同的结点数目相同。

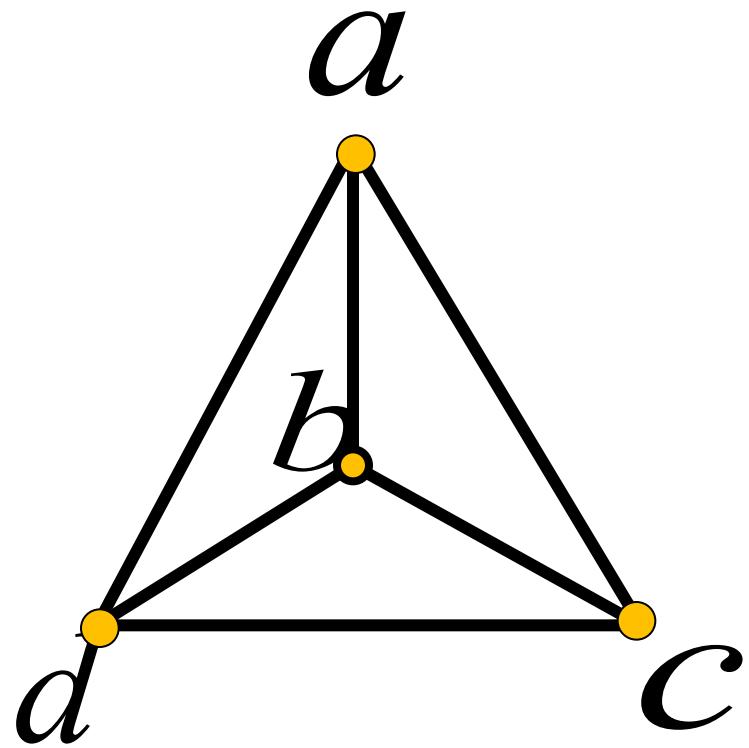
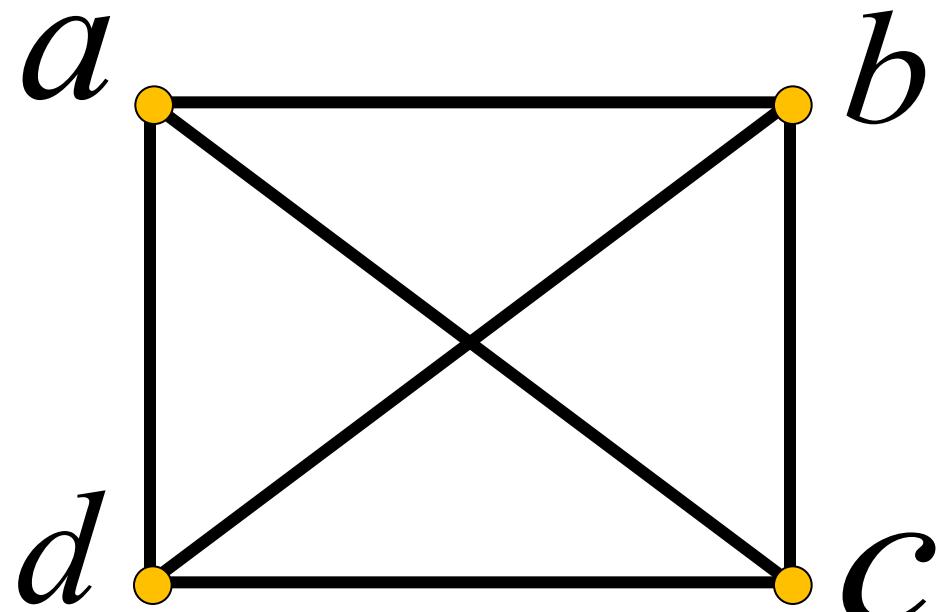
同构实例



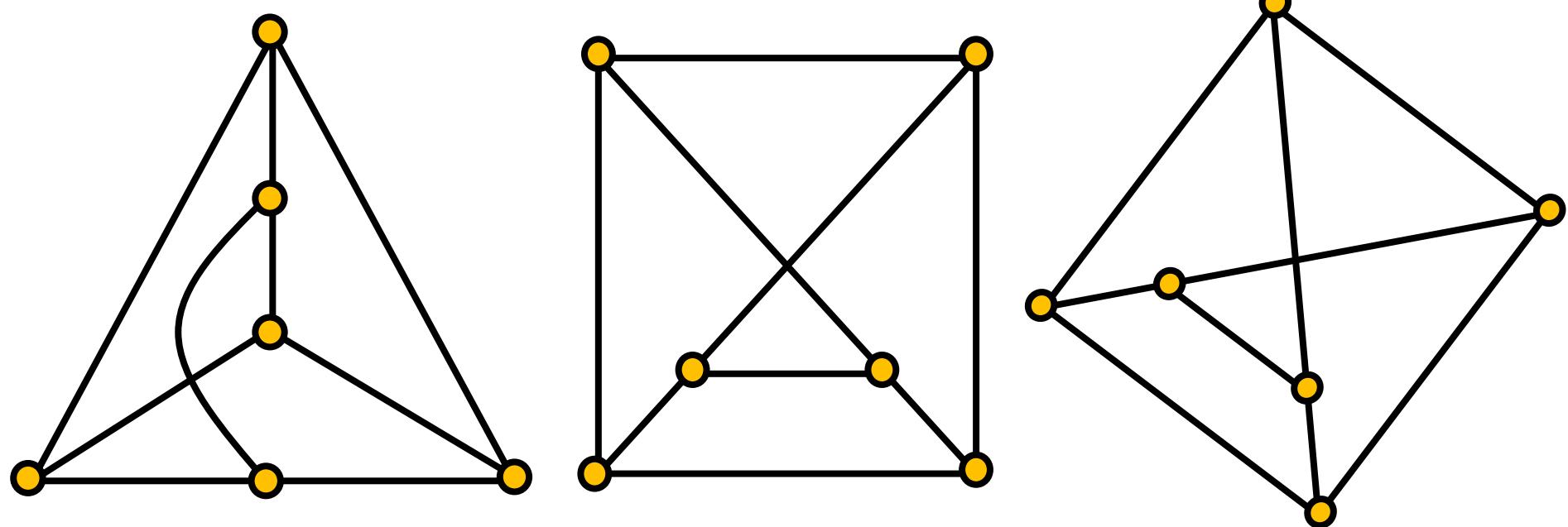
同构实例



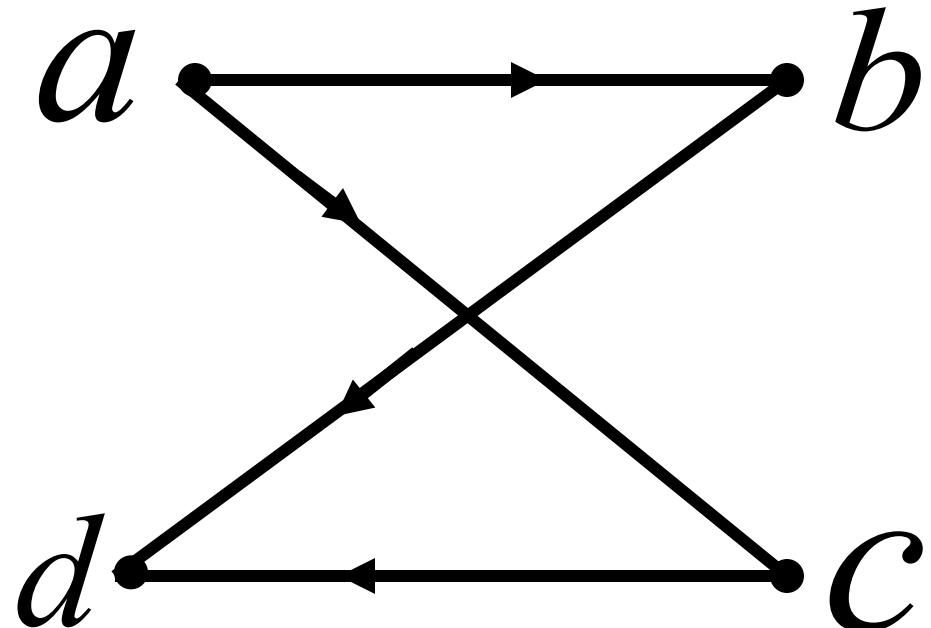
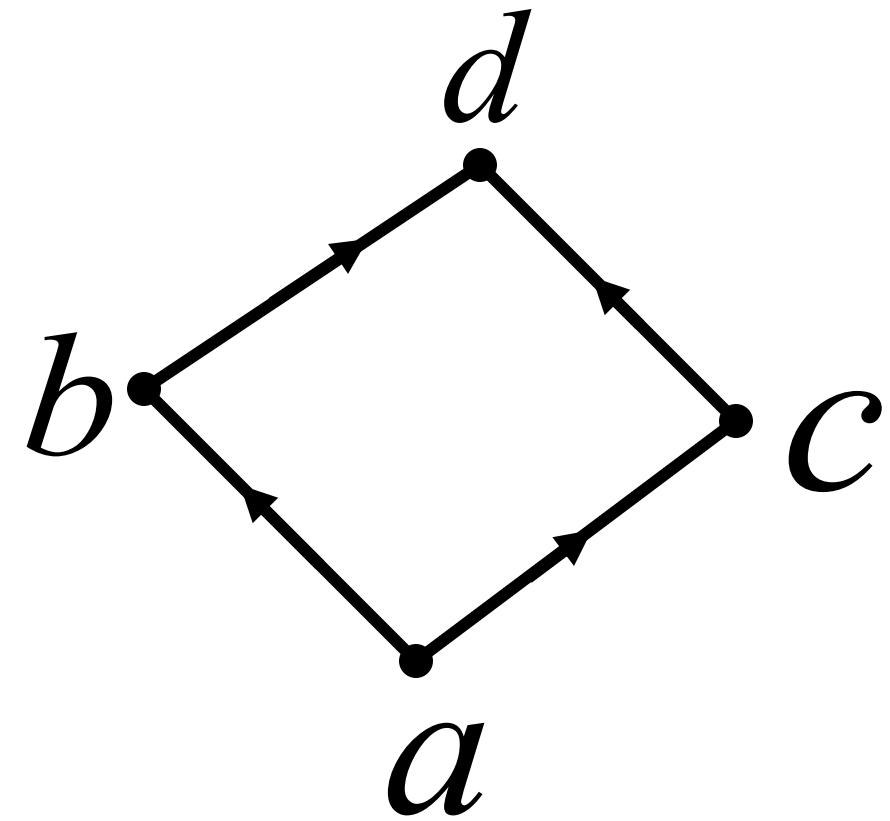
同构实例



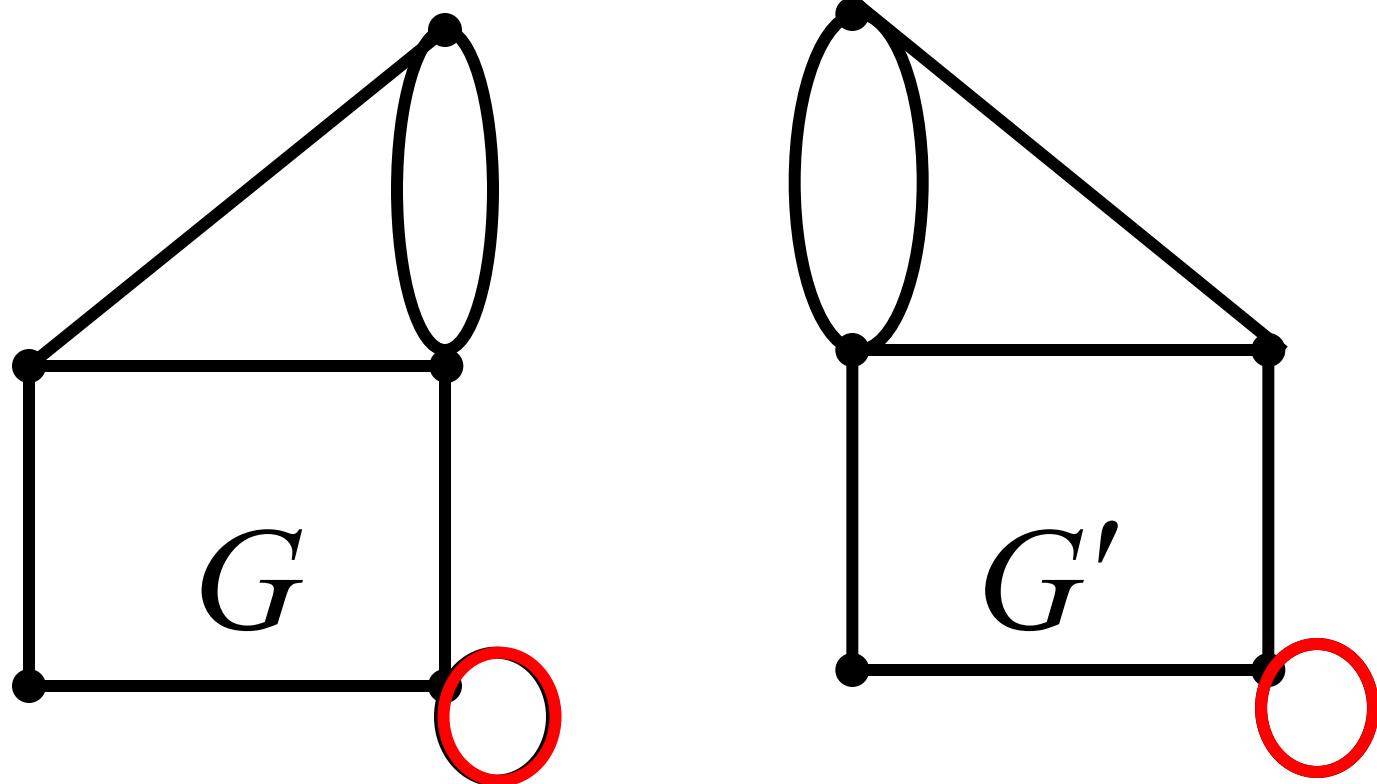
同构实例



同构实例

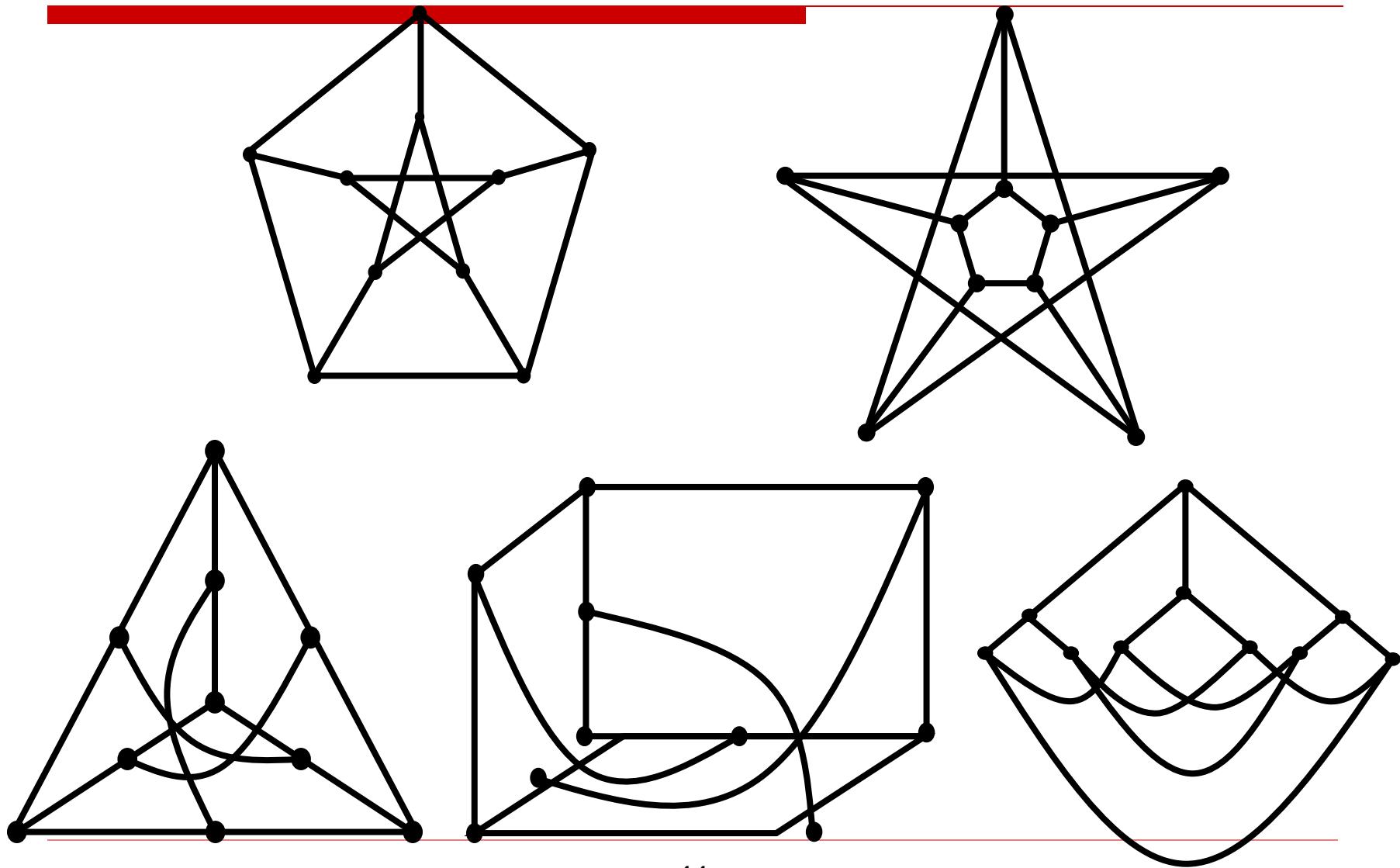


非同构实例

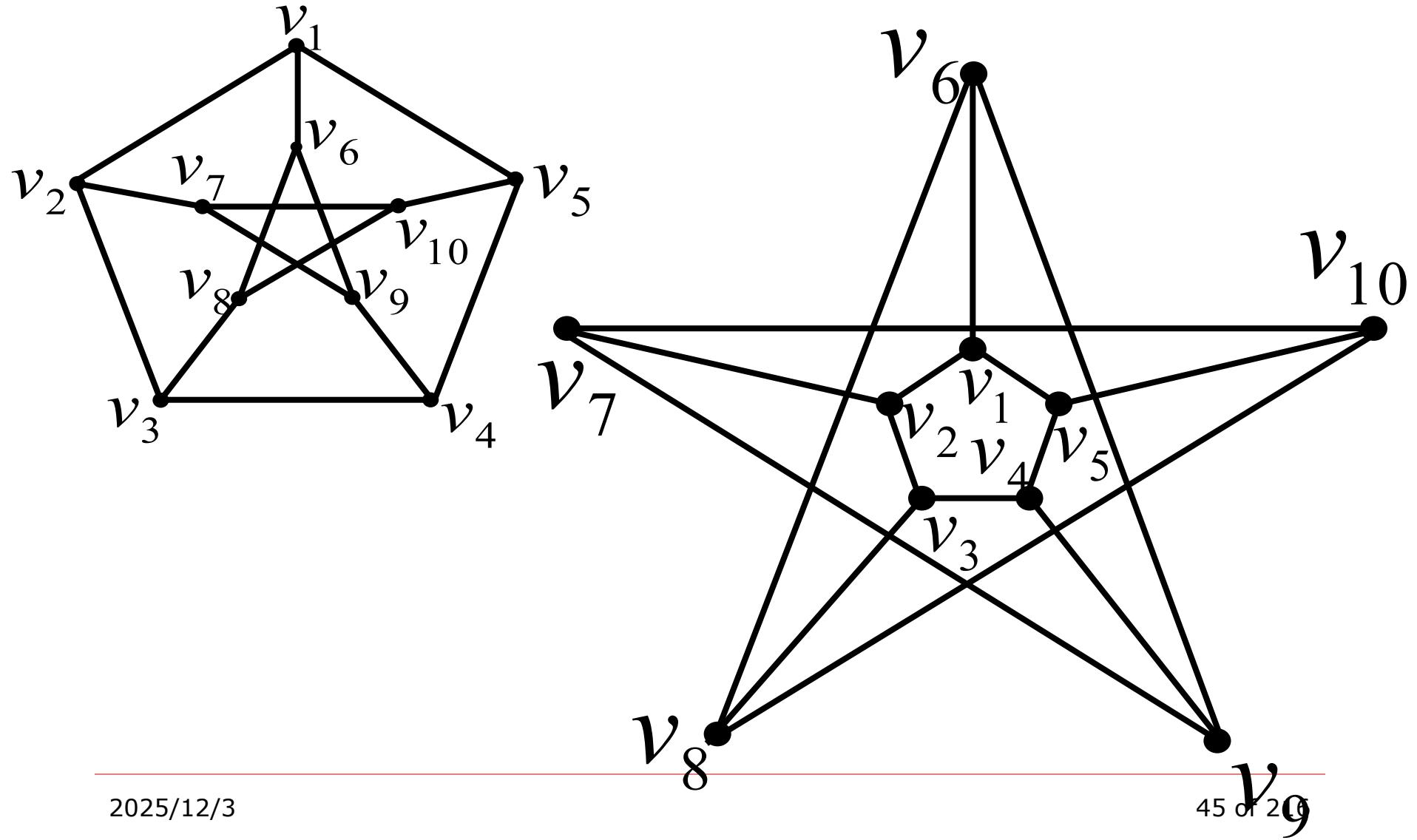


$$G \not\cong G'$$

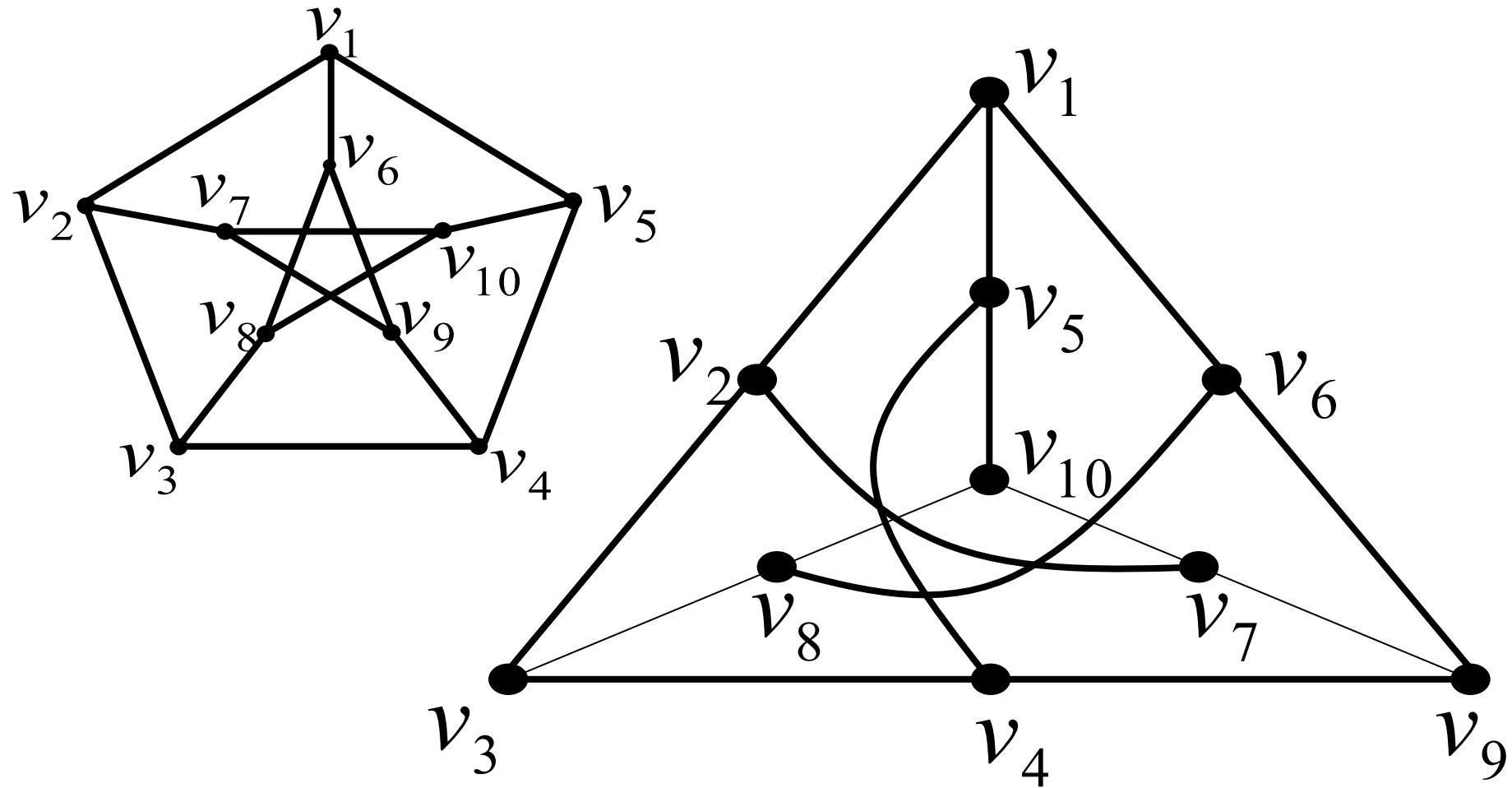
同构实例



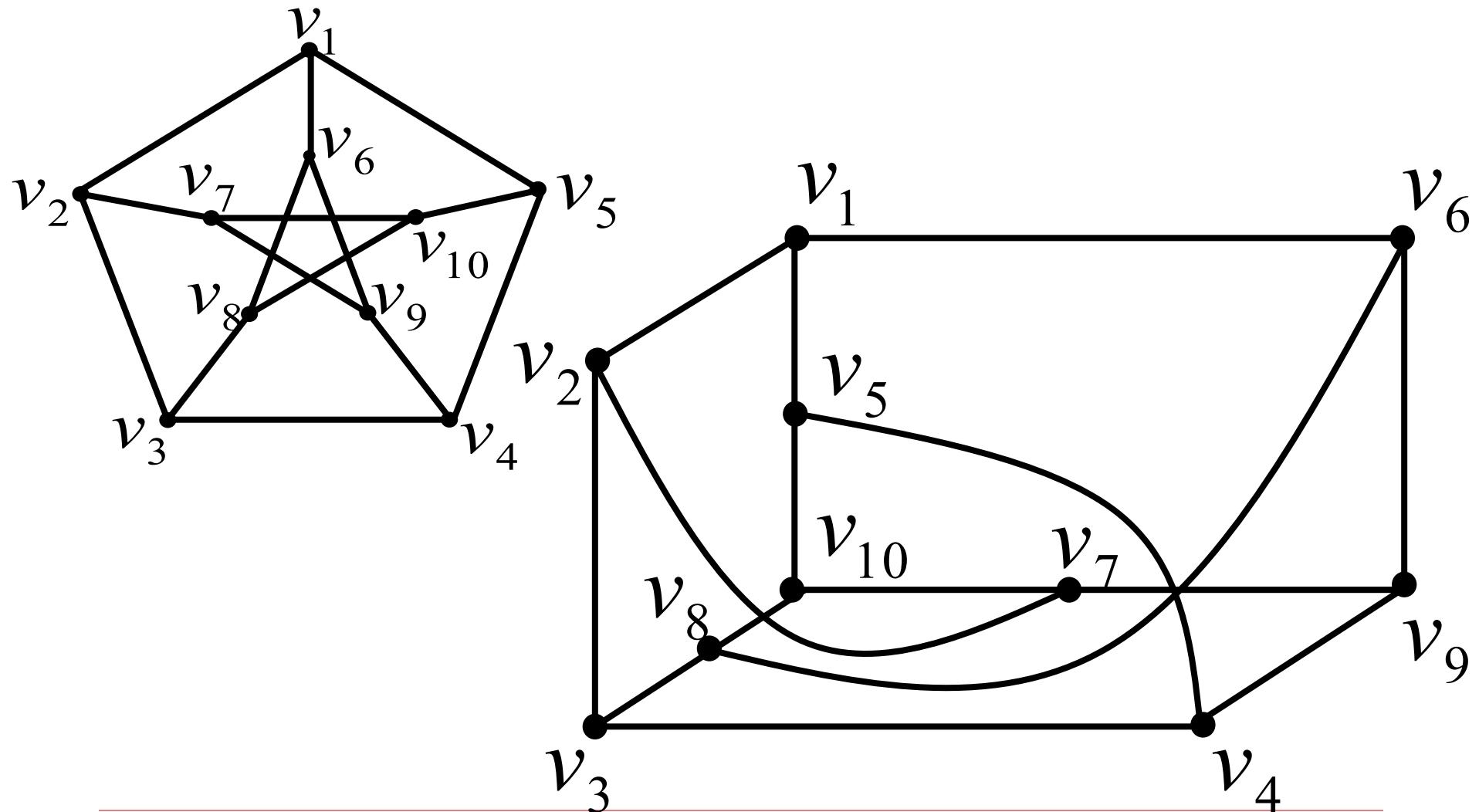
同构实例（续）



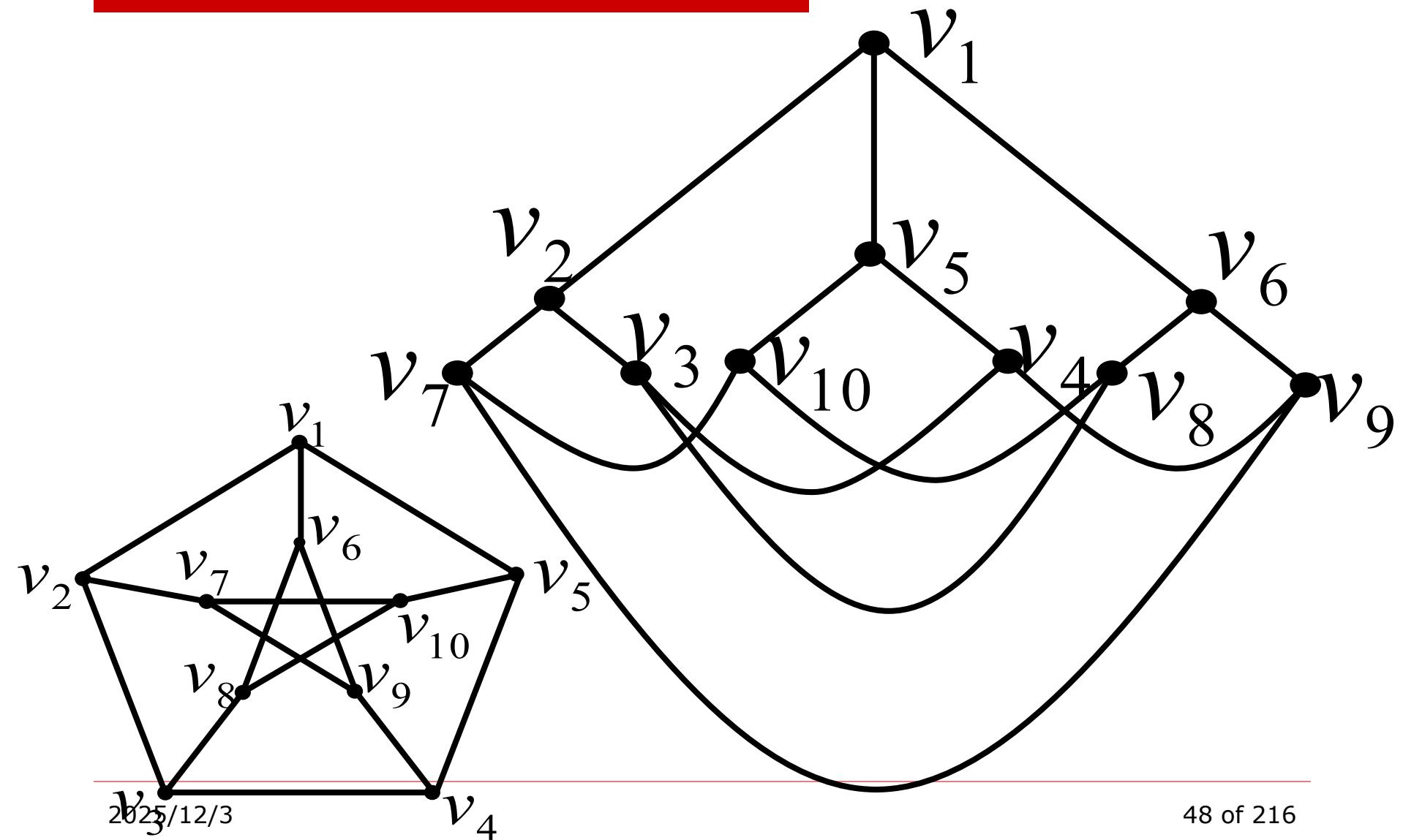
同构实例（续）



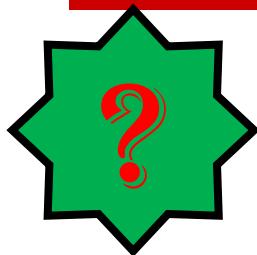
同构实例（续）



同构实例（续）

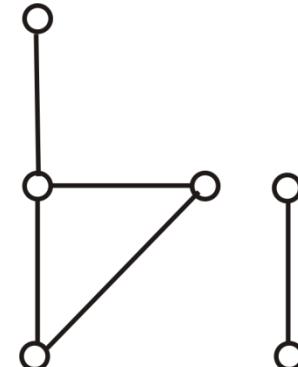
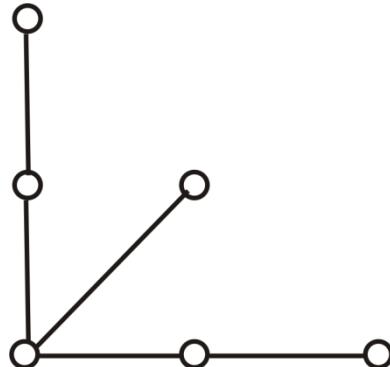
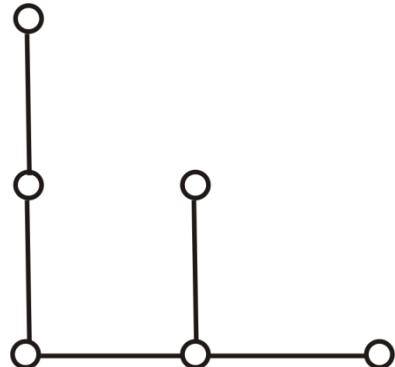


问题

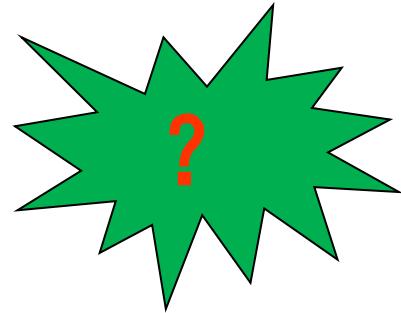


◆ **例** 画出3个以 $1,1,1,2,2,3$ 为度数列的非同构的无向简单图.

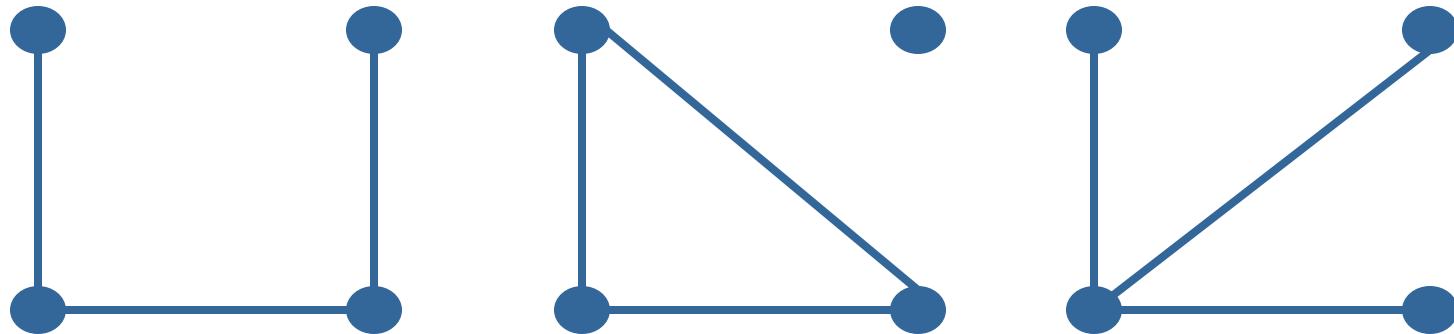
◆ **解:** $n=6$



问题

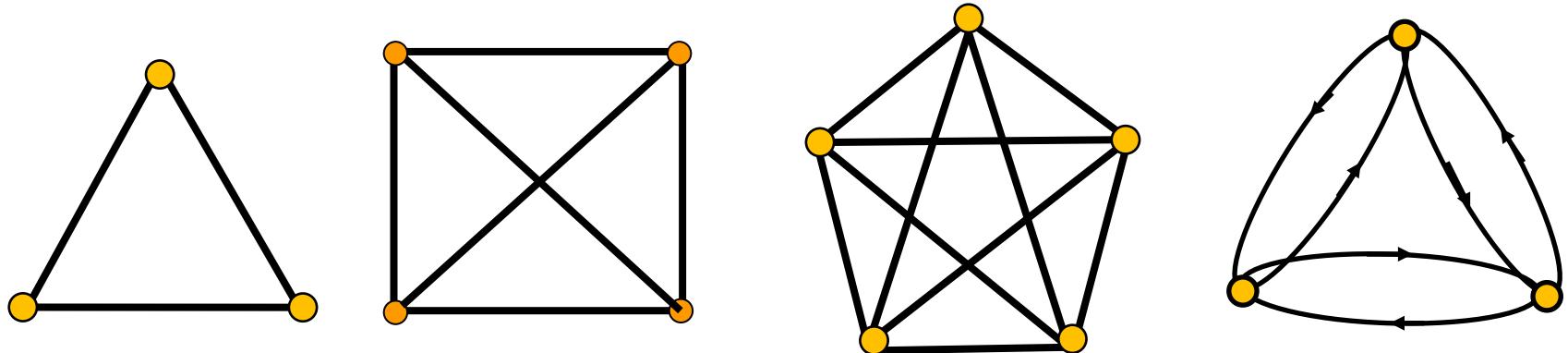


请画出 4 个顶点 3 条边的所有可能不同构的无向简单图？



完全图(Complete graphs)

- 定义14.6 无向完全图 G : 每对顶点之间都有一条边的无向简单图.
- 有向完全图 D : 每对顶点之间均有两条方向相反边的有向简单图.



完全图(Complete graphs)

□ n 阶无向完全图记作 K_n

顶点数 n , 边数 $m=n(n-1)/2$

$$\Delta=\delta=n-1$$

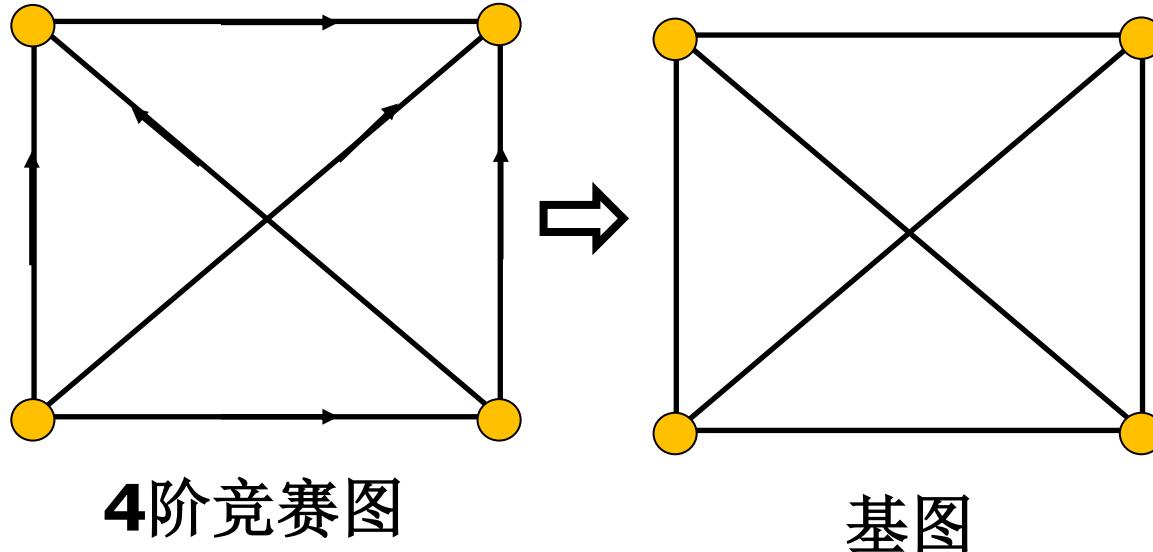
□ n 阶有向完全图:

顶点数 n , 边数 $m=n(n-1)$,

$$\Delta^+=\delta^+=\Delta^-=\delta^-=n-1, \Delta=\delta=2(n-1).$$

竞赛图

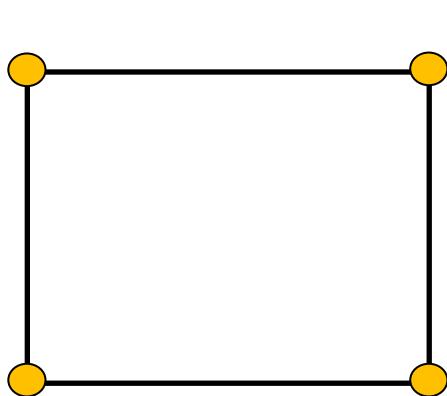
- **N阶竞赛图(tournament):** D 为有向简单图,且它的基图为 K_n .
顶点数 n , 边数 $m=n(n-1)/2$.



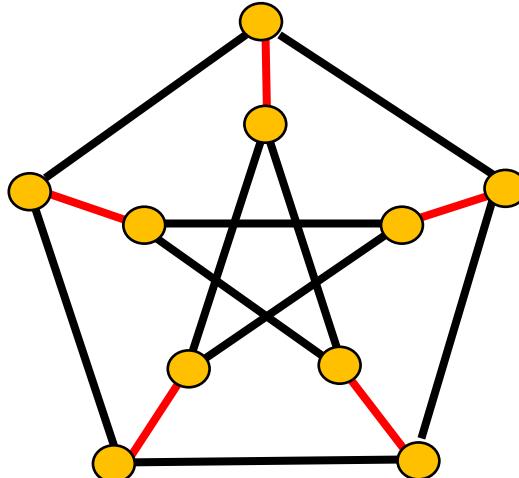
正则图

□ 定义14.7 k -正则图(k -regular graph): 每个顶点的度数均为 k 的无向简单图.

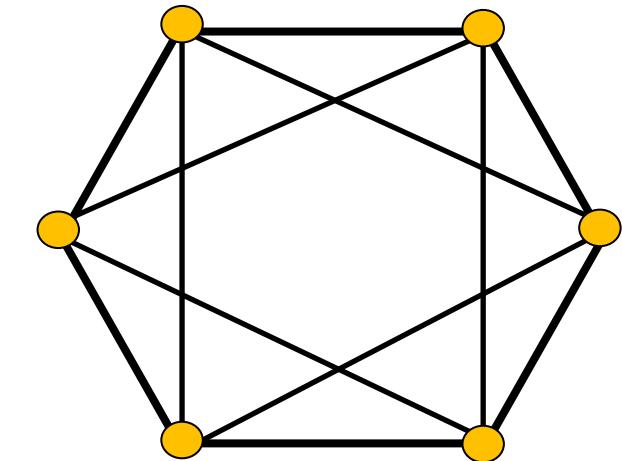
顶点数 n , 边数 $m=kn/2$. $\Delta=\delta=k$



2正则图



3正则图



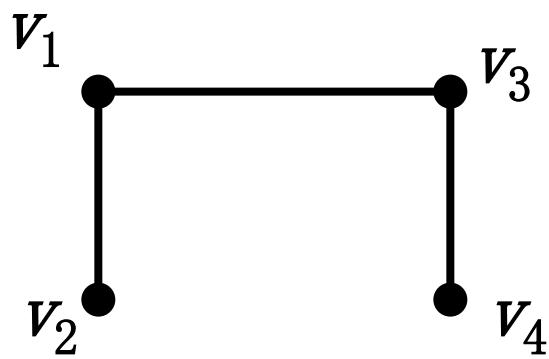
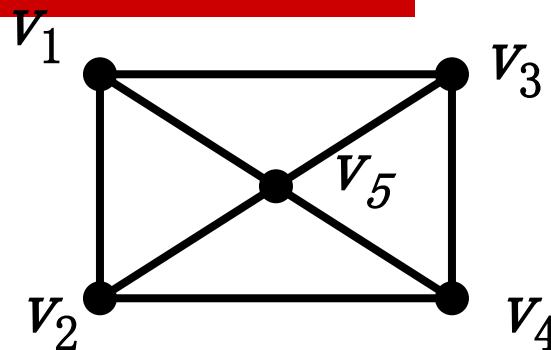
4正则图

子图(Subgraph)

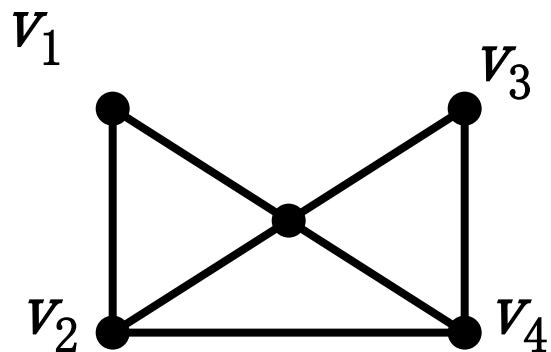
□ 定义14.8 $G = \langle V, E \rangle$, $G' = \langle V', E' \rangle$

- (1) 若 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$, 称 G' 为 G 的 子图, 记作 $G' \subseteq G$,
 G 为 G' 的 母图
- (2) 若 $G' \subseteq G$ 且 $V' = V$, 则称 G' 为 G 的 生成子图
- (3) 若 $V' \subset V$ 或 $E' \subset E$, 称 G' 为 G 的 真子图
- (4) V' ($V' \subset V$ 且 $V' \neq \emptyset$) 的 导出子图, 记作 $G[V']$
(以 G 中两个端点都 V' 在中的边组成边集 E')
- (5) E' ($E' \subset E$ 且 $E' \neq \emptyset$) 的 导出子图, 记作 $G[E']$
(以 E' 中边关联的 G 中的顶点为顶点集 V')

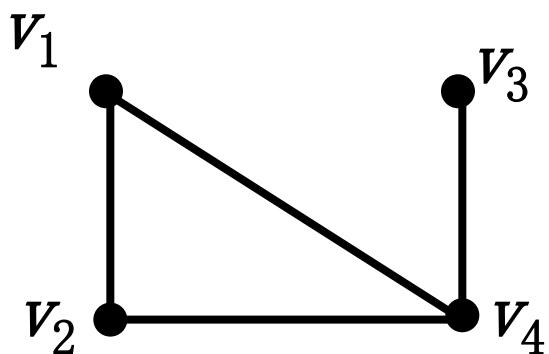
子图的实例



真子图

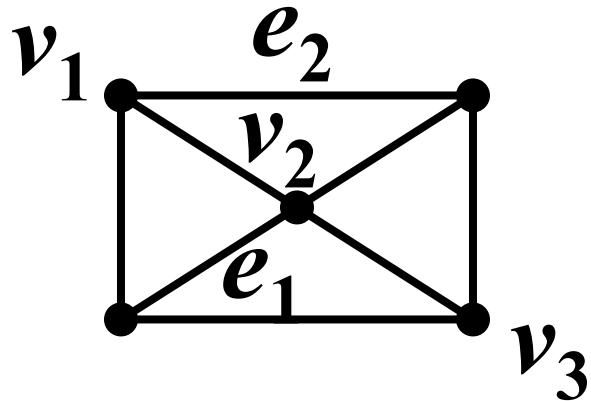


生成子图

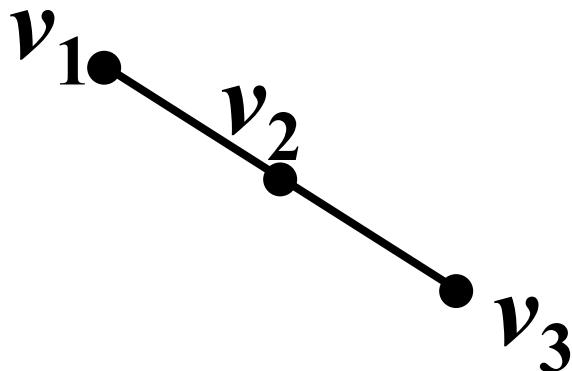


不是子图

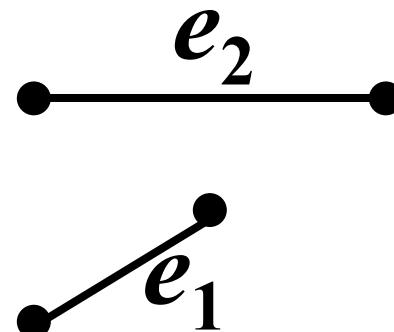
导出子图的实例



$G[\{v_1, v_2, v_3\}]$



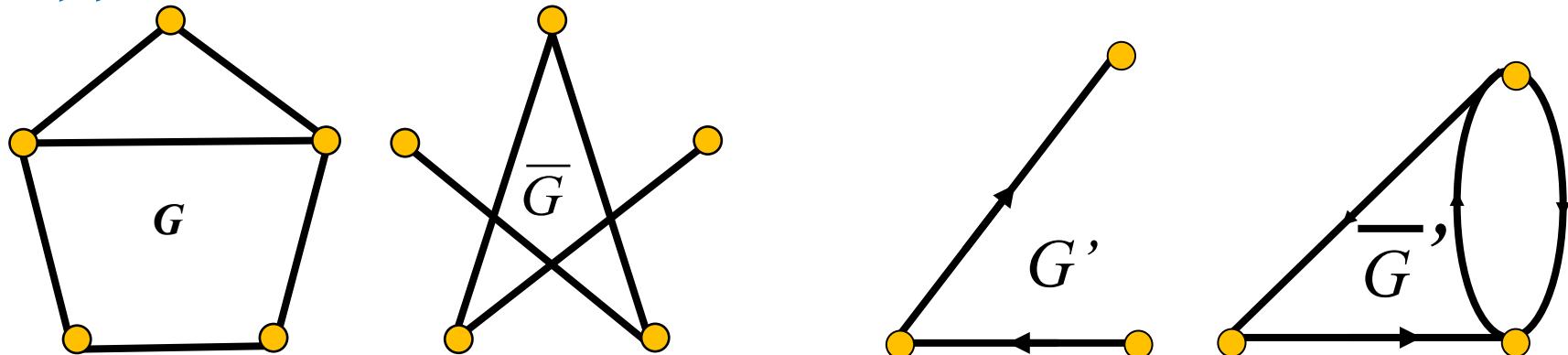
$G[\{e_1, e_2\}]$



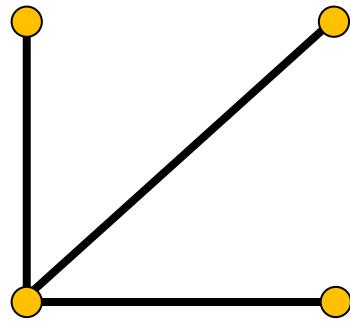
补图

□ **定义14.9** 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为 n 阶无向简单图，以 V 为顶点集，以所有使 G 成为完全图 K_n 的添加边组成的集合为边集的图，称为 G 的**补图**，记作 \bar{G} .

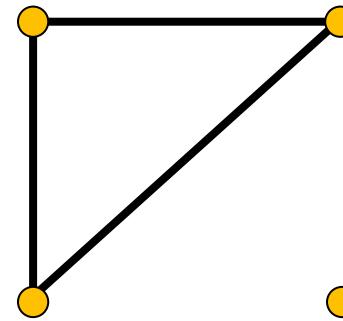
□ 若 $G \cong \bar{G}$ ，则称 G 是**自补图**. (一个图与其补图同构)



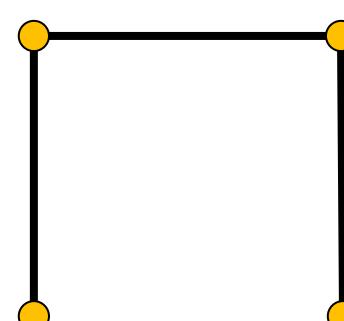
补图



(1)



(2)



(3)

(1),(2)互为补图.

自补图

问题



G 是一个有 15 条边的简单图，
 \bar{G} 有 13 条边，请问 G 中有多少个结点？

解： $G \cup \bar{G}$ 共有 $15 + 13 = 28$ 条边，是一个完全图
它的结点数与 G 相同，设为 n ，则

$$\begin{aligned} n(n-1)/2 &= 28 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

从图中删边、 点集合

定义14.10 设 $G=<V,E>$ 为无向图。

记 **$G-e$** : 从 G 中删除 e .

$G-E'$: 从 G 中删除 E' 中所有边.

$G-v$: 从 G 中删除 v 及关联的边.

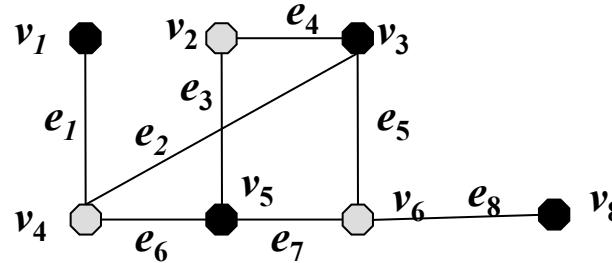
$G-V'$: 从 G 中删除 V' 中所有的顶点及关联的边.

$G \setminus e$: 从 G 中删除 e 后将 e 的两个端点用一个新的顶点代替， 称为收缩边 e .

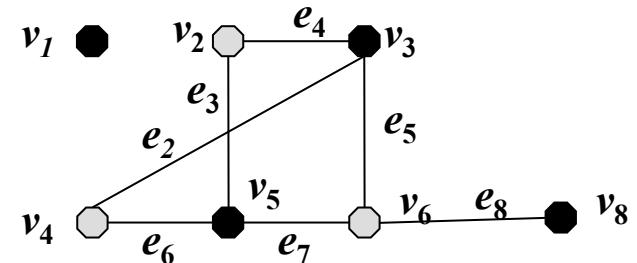
$G+(u, v)$: 在 G 中 u, v 之间添加边 (u, v) .

从图中删边、 点集合

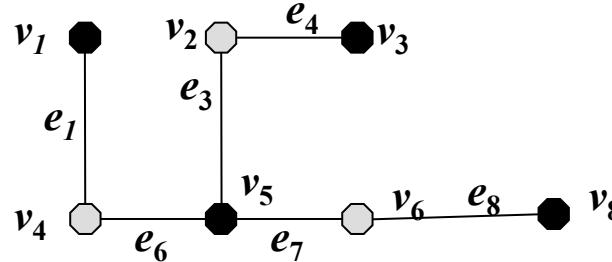
$G:$



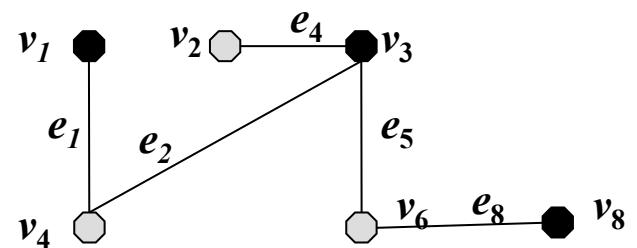
$G - e_1:$



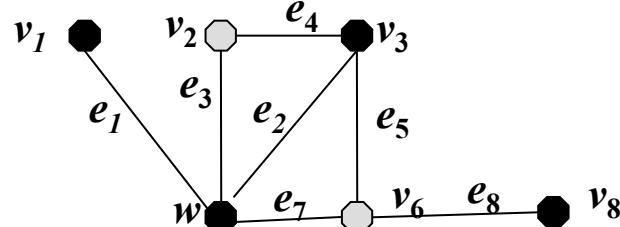
$G - \{e_2, e_5\}:$



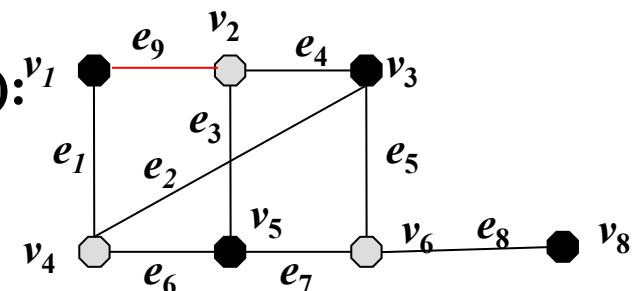
$G - v_5:$



$G \setminus e_6:$



$G + (v_1, v_2):$



练习



画出 K_4 的所有非同构的生成子图

m	0	1	2	3	4	5	6
	 	 	 	 	 	 	 

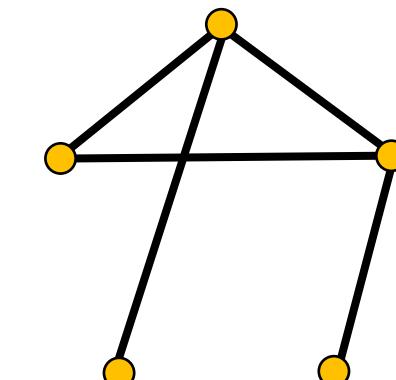
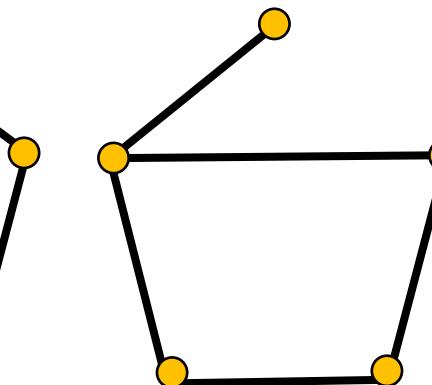
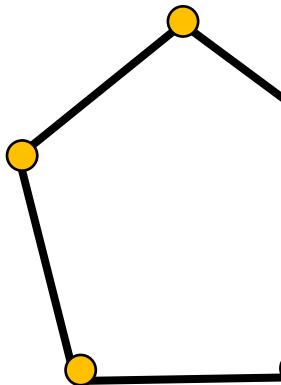
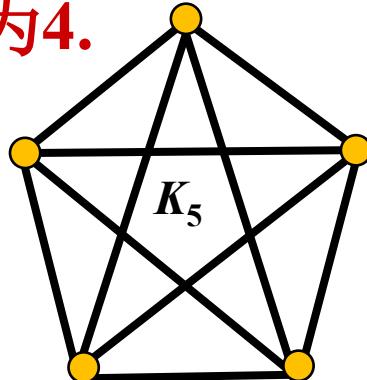
练习



1) 给出5阶的所有自补图.

2) 有6阶的自补图吗? 没有. $n(n-1) = 30$, 不能被4整除.

(1) 5阶自补图中边数 $m = n(n-1)/4 = 5$, 顶点度之和为10. 最大度为4.



自补的度序列:

(1) 2,2,2,2,2

(2) 3,2,2,2,1

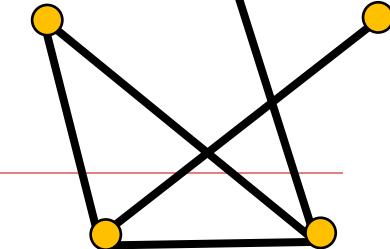
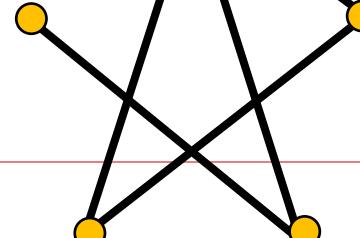
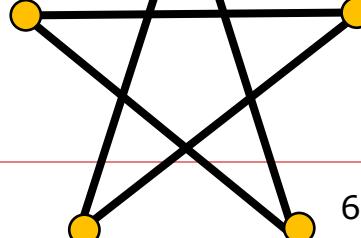
(3) 3,3,2,1,1

2,2,2,2,2

3,2,2,2,1

✗

3,3,2,1,1



第十四章 图的基本概念

□主要内容

- 14.1图
- 14.2通路与回路
- 14.3图的连通性
- 14.4图的矩阵表示
- 14.5图的运算

14.2 通路与回路

定义14.11 给定图 $G = \langle V, E \rangle$ (无向或有向的), G 中顶点与边的交替序列 $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_l v_l$, v_{i-1}, v_i 是 e_i 的端点.

(1) 通路与回路: Γ 为通路;

若 $v_0 = v_l$, Γ 为回路, l 为回路长度.

(2) 简单通路与回路: 所有边各异, Γ 为简单通路,

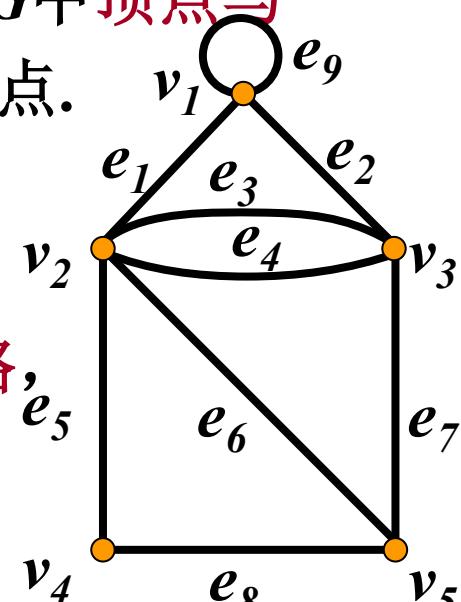
又若 $v_0 = v_l$, Γ 为简单回路

(3) 初级通路(路径)与初级回路(圈):

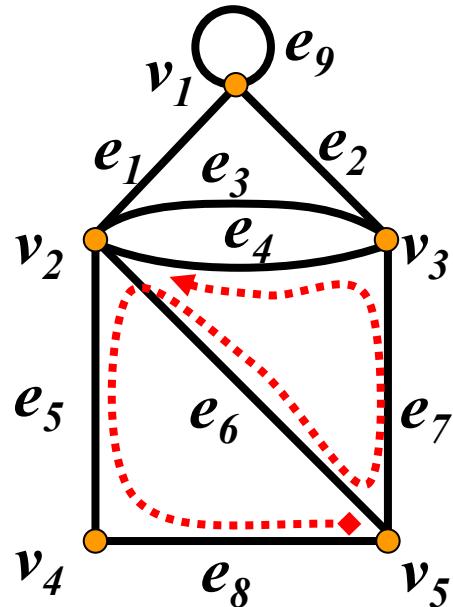
Γ 中所有顶点 (除 v_0 和 v_l 可能相同之外) 各异且所有边各异, 则称 Γ 为初级通路(路径),

又若除 $v_0 = v_l$, 所有的顶点各异且所有边各异, 则称 Γ 为初级回路(圈)

(4) 复杂通路与回路: 有边重复出现

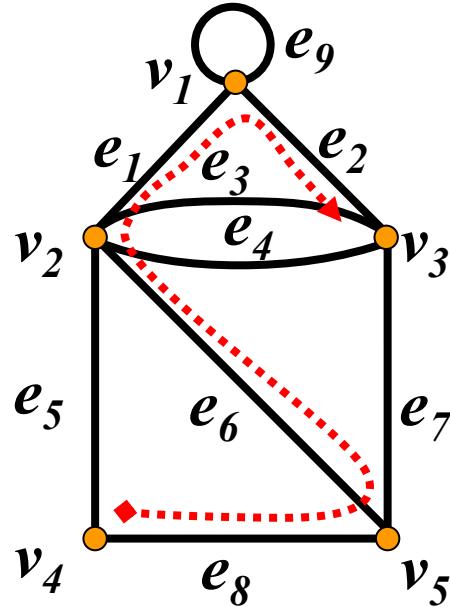


定义14.11 通路与回路



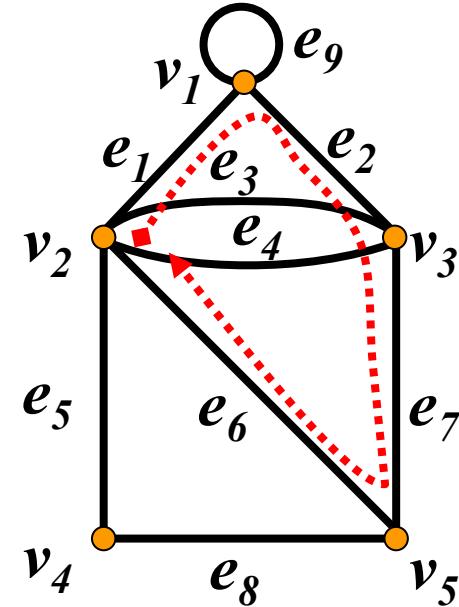
$v_5e_8v_4e_5v_2e_6v_5e_7v_3e_4v_2$

**简单通路
(边异)**



$v_4e_8v_5e_6v_2e_1v_1e_2v_3$

**路径 (初级通路)
(边异且点异)**



$v_2e_1v_1e_2v_3e_7v_5e_6v_2$

圈 (初级回路)

通路与回路的说明

(1) 表示方法

① 按定义用顶点和边的交替序列, $\Gamma=v_0e_1v_1e_2\dots e_lv_l$

② 简单图中, 用顶点序列, $\Gamma=v_0v_1\dots v_l$

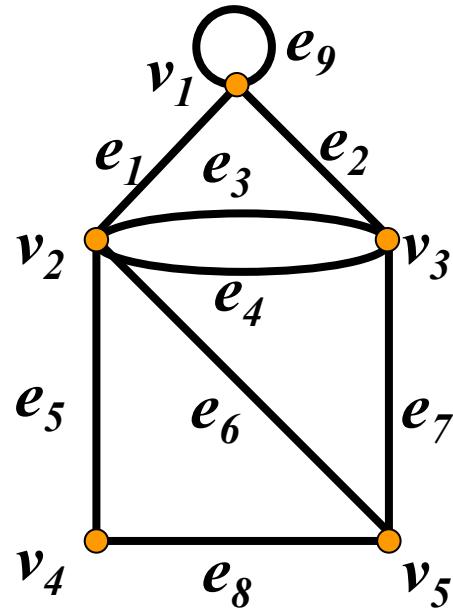
(2) 在无向图中, 长度为1的圈由环构成.

长度为2的圈由两条平行边构成.

在无向简单图中, 所有圈的长度 ≥ 3 .

在有向图中, 长度为1的圈由环构成.

在有向简单图中, 所有圈的长度 ≥ 2 .



通路与回路的说明

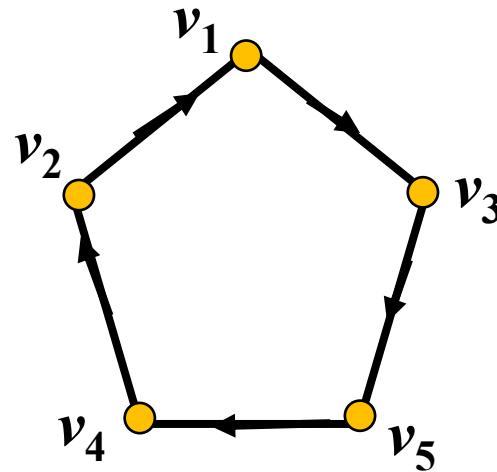
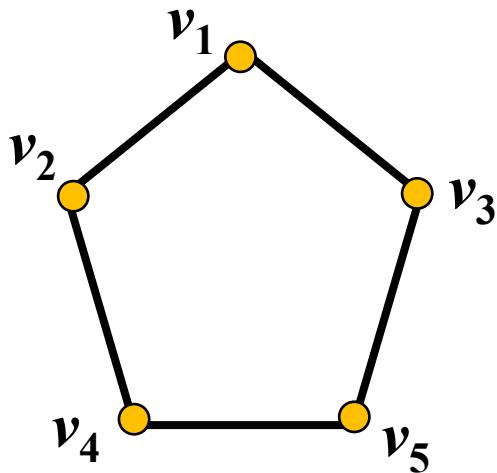
(3) 不同的圈（以长度 ≥ 3 的为例）

① 定义意义下（标定图中认为不同）

无向图：图中长度为 l ($l \geq 3$) 的圈，定义意义下为 $2l$ 个

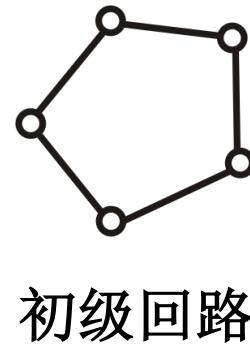
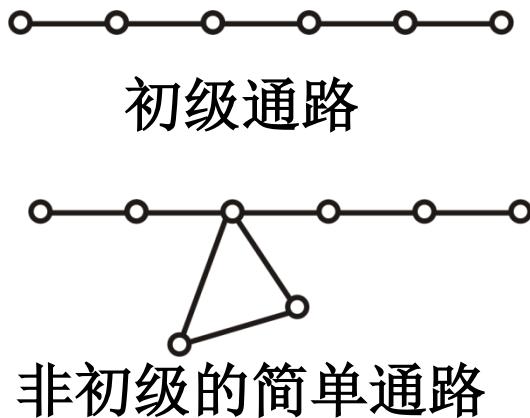
有向图：图中长度为 l ($l \geq 3$) 的圈，定义意义下为 l 个

② 同构意义下：长度相同的圈均为1个



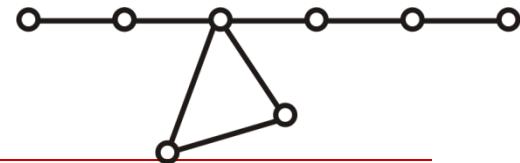
通路与回路的说明

(4) 初级通路(回路)是简单通路(回路), 但反之不真.



若通路 Γ 中所有边各异, 则称**简单通路**, 否则称为**复杂通路**.
若通路 Γ 中所有顶点各异, 所有边各异, 则称 Γ 为**初级通路**或**路径**

通路与回路的定理



- 定理14.5 在 n 阶图 G 中, 若从顶点 u 到 v ($u \neq v$)存在通路, 则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路.

证: 若通路中没有相同的顶点(即初级通路), 长度必 $\leq n-1$.

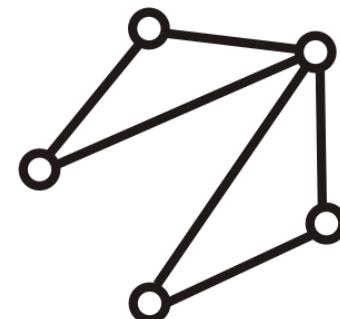
若有相同的顶点, 删去这两个顶点之间的这一段, 仍是 u 到 v 的通路.

重复进行, 直到没有相同的顶点为止.

- 推论 在 n 阶图 G 中, 若从顶点 u 到 v ($u \neq v$)存在通路, 则从 u 到 v 一定存在长度小于或等于 $n-1$ 的初级通路

通路与回路的定理

- **定理14.6** 在一个 n 阶图 G 中，若存在 v_i 到自身的回路，则一定存在 v_i 到自身长度小于或等于 n 的回路。
- **推论** 在一个 n 阶图 G 中，若存在 v_i 到自身的简单回路，则一定存在长度小于或等于 n 的初级回路。



第十四章 图的基本概念

□主要内容

- 14.1图
- 14.2通路与回路
- 14.3图的连通性
- 14.4图的矩阵表示
- 14.5图的运算

无向图的连通性(Connectivity)

定义14.12 $G=<V,E>$ 为无向图，若 v_i 与 v_j 之间有通路，则称 v_i 与 v_j 是连通的，记作 $v_i \sim v_j$

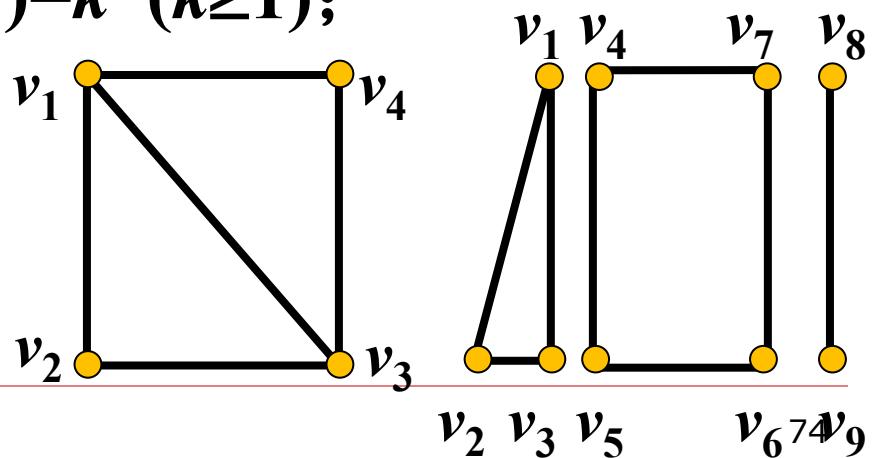
\sim 是 V 上的等价关系 $R=\{<u,v>| u,v \in V \text{且 } u \sim v\}$

定义14.13 G 的连通性与连通分支

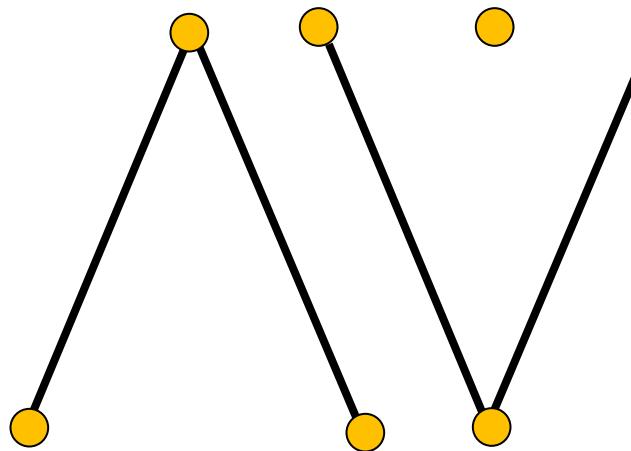
① 若 $\forall u,v \in V, u \sim v$ ，则称 G 连通

② $V/R=\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ ，称 $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ 为连通分支，其个数 $p(G)=k$ ($k \geq 1$);

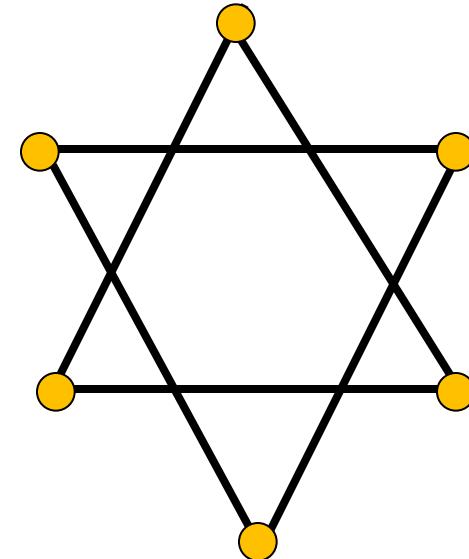
$k=1 \Leftrightarrow G$ 连通



实例



非连通图
三个连通分支



非连通图
两个连通分支

问题



求证：若无向图 G 中恰有两个奇数度结点，则这两个结点必是连通的。

证明：

设 G 中两个奇度结点分别为 u, v 。

若 u 与 v 不连通，则至少有两个连通分支 G_1 和 G_2 ,

$$u \in G_1, v \in G_2.$$

于是 G_1 和 G_2 各含一个奇度结点，这与握手原理的推论矛盾，

因此 u 与 v 必是连通的。

短程线与距离

定义14.14 设 u, v 为无向图 G 中的任意两个顶点，

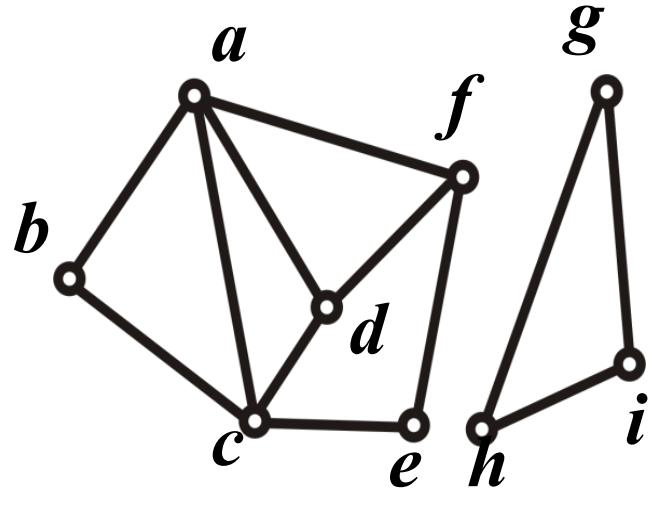
- ① u 与 v 之间的**短程线**: $u \sim v$, u 与 v 之间长度最短的通路
- ② u 与 v 之间的**距离**: $d(u, v)$ — 短程线的长度
- ③ $d(u, v)$ 的性质:

$$d(u, v) \geq 0, u \not\sim v \text{ 时 } d(u, v) = \infty$$

$$d(u, v) = d(v, u)$$

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$$

实例



a 与 e 之间的短程线:

$ace, afe.$

$d(a,e)=2$

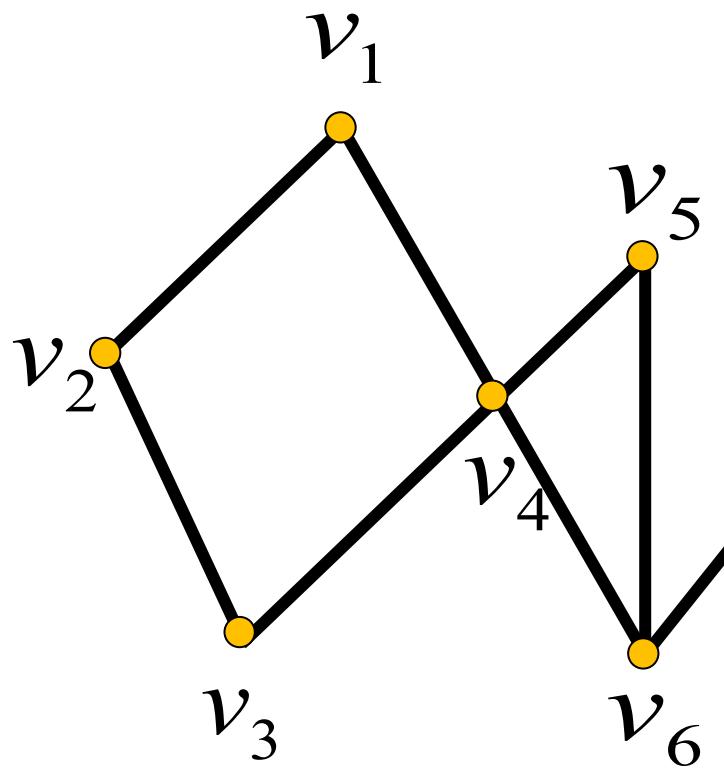
$d(a,h)=\infty$

点割集

- 定义14.15点割集(cut set) 设无向图 $G=<V,E>$,
 - 若 $V' \subset V$ 且 $V' \neq \emptyset$, 使得 $p(G-V') > p(G)$,
 - 而对 $\forall V'' \subset V'$, $p(G-V'') = p(G)$, 则称 V' 为 G 的点割集.
- 若 $\{v\}$ 为点割集, 则称 v 为割点(cut vertex).

实例

试验证下列结点集合是否为点割集



$\{v_4\}$

$\{v_6\}$

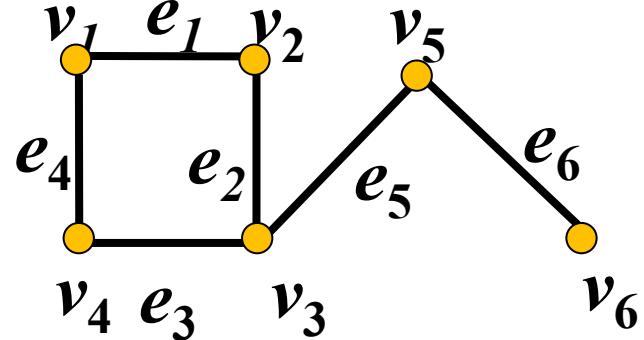
$\{v_1, v_3\}$

$\{v_2, v_4\}$



实例

试验证下列点割集和割点是否正确？



点割集： 割点：

- | | |
|------------------|---------|
| $\{v_3\}$, | v_3 , |
| $\{v_5\}$, | v_5 |
| $\{v_2, v_4\}$, | |
| $\{v_1, v_3\}$ | ✗ |

边割集

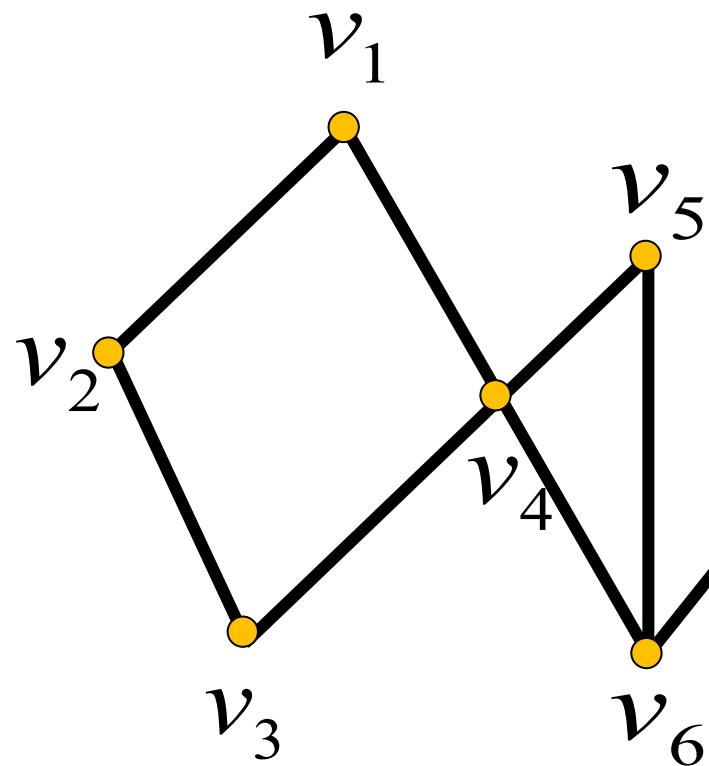
□ 定义14.16 $G = \langle V, E \rangle$,

- 若 $E' \subseteq E$, $E' \neq \emptyset$, 使得 $p(G - E') > p(G)$,
- 而对 $\forall E'' \subset E'$, $p(G - E'') = p(G)$, 则称 E' 为 G 的 **边割集(edge cut set)**.

□ 若 $\{e\}$ 为边割集, 则称 e 为 **割边或桥**.

实例

试验证下列边集合是否为边割集



$\{(v_1, v_2), (v_3, v_4)\}$

$\{(v_4, v_5), (v_5, v_6)\}$

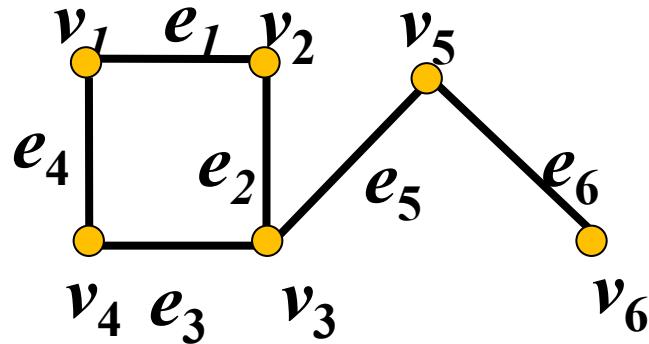
$\{(v_6, v_7)\}$

$\{(v_5, v_6), (v_6, v_7)\}$

✗

实例

试验证下列边割集和桥是否正确？



边割集:

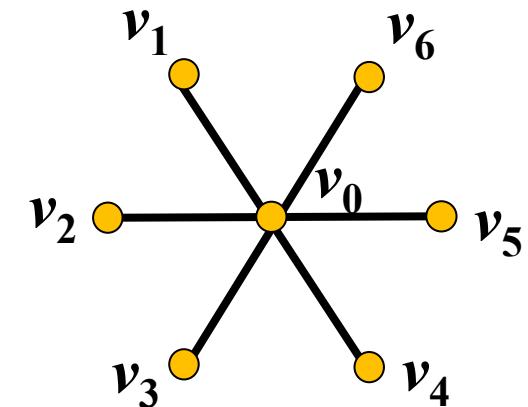
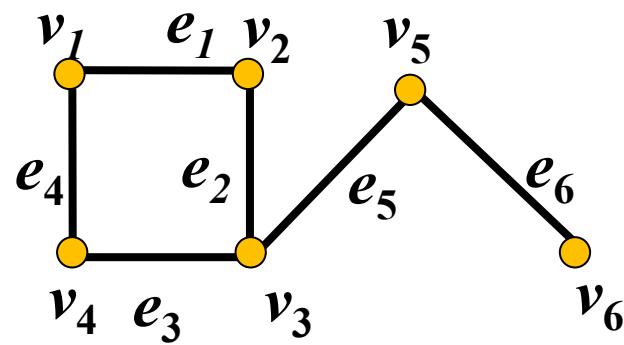
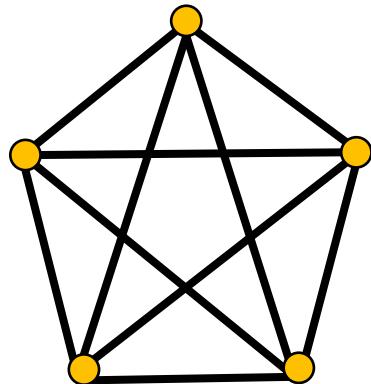
$\{e_5\}$, $\{e_1, e_4\}$,
 $\{e_6\}$, $\{e_2, e_3\}$,
 $\{e_1, e_2\}$, $\{e_2, e_4\}$,
 $\{e_1, e_3\}$, $\{e_3, e_4\}$

桥:

e_5 ,
 e_6

割集的说明

1. K_n 无点割集.
2. n 阶零图 N_n 既无点割集，也无边割集.
3. 若 G 连通， E' 为边割集，则 $p(G-E')=2$.
4. 若 G 连通， V' 为点割集，则 $p(G-V')\geq 2$.



点连通度

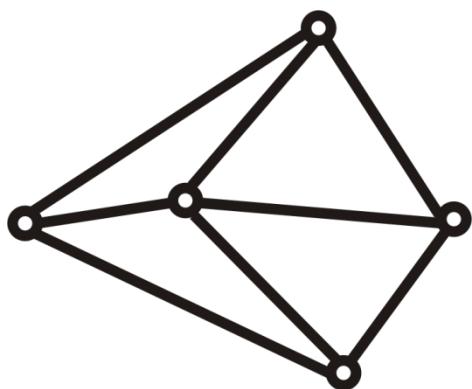
□ 定义14.17 G 为连通非完全图

点连通度— $\kappa(G) = \min\{ |V'| \mid V' \text{为点割集} \}$

规定 $\kappa(K_n) = n-1$

若 G 非连通, $\kappa(G) = 0$

若 $\kappa(G) \geq k$, 则称 G 为 k -连通图

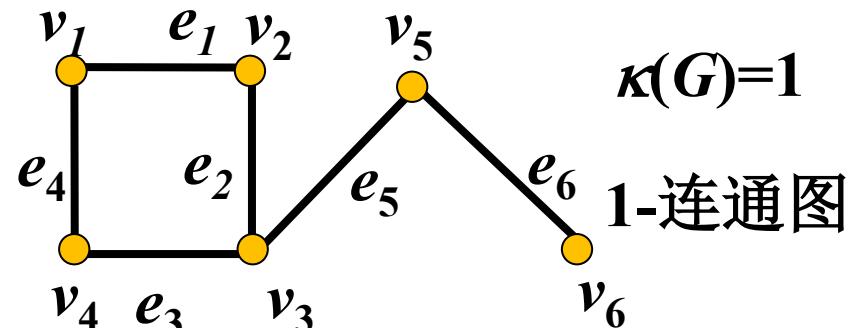


$$\kappa(G)=3$$

1-连通图

2-连通图

3-连通图



$$\kappa(G)=1$$

1-连通图

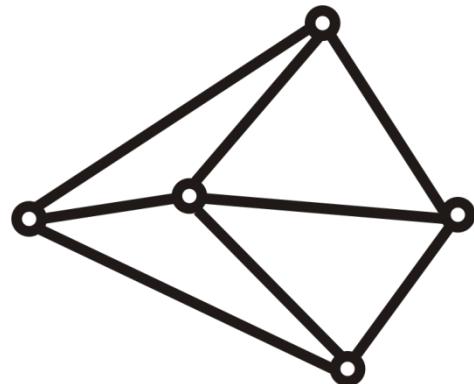
边连通度

□ 定义14.18 设 G 为连通图

边连通度—— $\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E' \text{为边割集}\}$

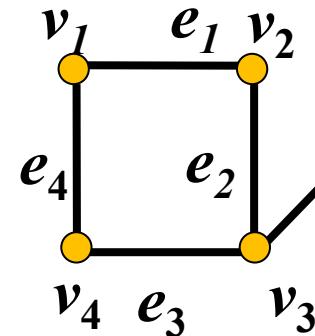
若 G 非连通，则 $\lambda(G) = 0$

若 $\lambda(G) \geq r$ ，则称 G 是 r 边-连通图



$$\kappa(G) = 3$$

$$\lambda(G) = 3$$



$$\kappa(G) = 1$$

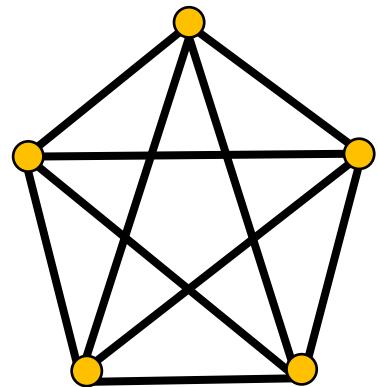
$$\lambda(G) = 1$$

点连通度与边连通度

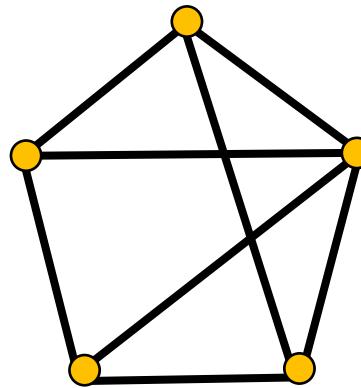
说明:	$\kappa(G)=? , \lambda(G)=?$
(1) G 是平凡图	$\kappa(G)=0, \lambda(G)=0$
(2) G 是完全图 K_n	$\kappa(G)=n-1, \lambda(G)= n-1$
(3) G 中存在割点 G 中存在割边	$\kappa(G)=1$ $\lambda(G)= 1$
(4) 非连通图	$\kappa(G)=0, \lambda(G)=0$
(5) 设 G_1, G_2 都是 n 阶无向简单图, 若 $\kappa(G_1) > \kappa(G_2)$, 则称 G_1 比 G_2 的点连通程度高. 若 $\lambda(G_1) > \lambda(G_2)$, 则称 G_1 比 G_2 的边连通程度高.	

例14.6 $\delta=?$, $\kappa=?$, $\lambda=?$

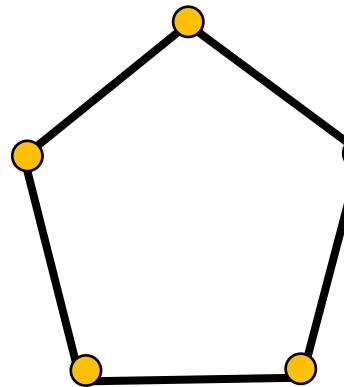
$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$



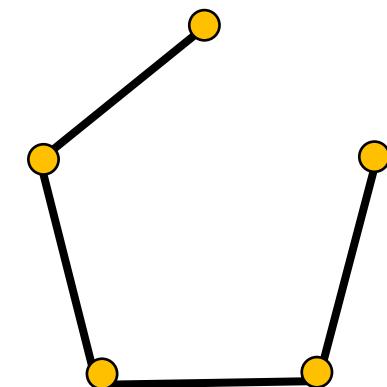
$$\delta=4, \kappa=4, \lambda=4$$



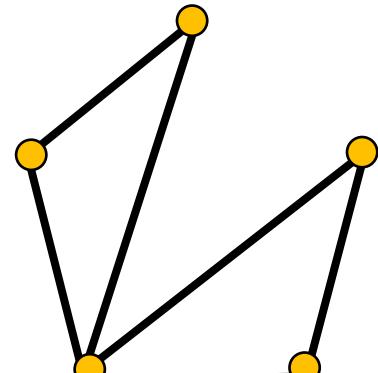
$$\delta=3, \kappa=3, \lambda=3$$



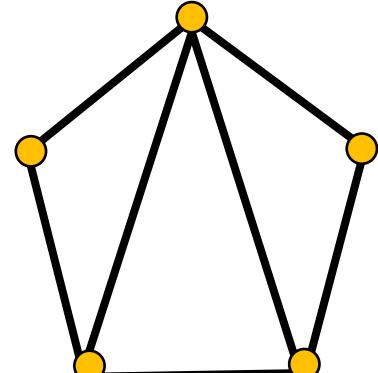
$$\delta=2, \kappa=2, \lambda=2$$



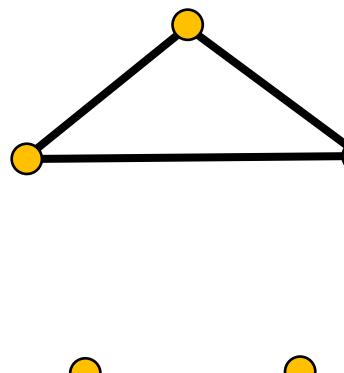
$$\delta=1, \kappa=1, \lambda=1$$



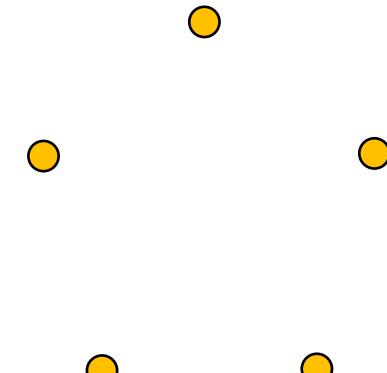
$$\delta=2, \kappa=1, \lambda=2$$



$$\delta=2, \kappa=2, \lambda=2$$



$$\delta=1, \kappa=0, \lambda=0$$



$$\delta=0, \kappa=0, \lambda=0$$

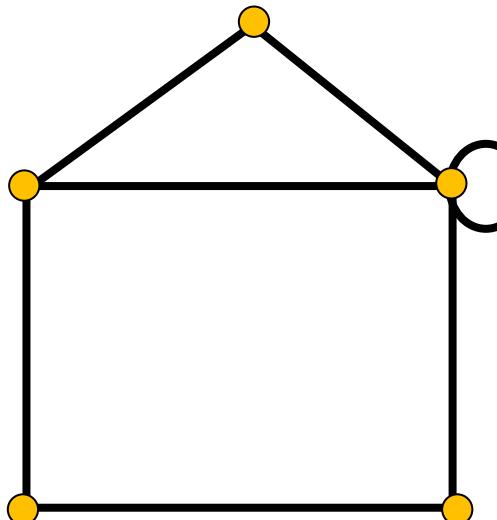
δ 最小度, κ 点连通度, λ 边连通度

点连通度与边连通度的关系

□ 定理14.7 对于任何无向连通图 G , 有

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

例1 求出下图的 $\delta(G)$, $\kappa(G)$, $\lambda(G)$



$$\delta(G) = 2$$

$$\kappa(G) = 2$$

$$\lambda(G) = 2$$

例2 已知无向图 G 的点连通度 $\kappa(G)$ 等于最小度 $\delta(G)$, 求 $\lambda(G)$.

解: 已知 $\kappa(G)=\delta(G)$

由定理14.7

$$\rightarrow \lambda(G) = \kappa(G) = \delta(G)$$

证明 若 G 不连通， 则 $k(G)=\lambda(G)=0$ ， 故上式成立。

若 G 连通，

1) 证明 $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

如果 G 是平凡图，则 $\lambda(G)=0 \leq \delta(G)$ ，

若 G 是非平凡图，则因每一结点的所有关联边必含一个边割集，故 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

2) 再证 $k(G) \leq \lambda(G)$

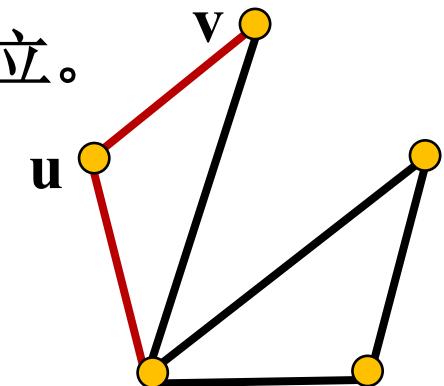
(a) 设 $\lambda(G)=1$ ， 即 G 有一割边， 显然这时 $k(G)=1$ ， 上式成立。

(b) 设 $\lambda(G) \geq 2$ ， 则必可删去某 $\lambda(G)$ 条边， 使 G 不连通。

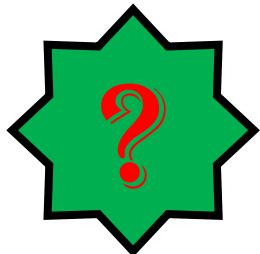
而删去其中 $\lambda(G)-1$ 条边仍是连通的， 且有一条桥 $e=(u,v)$ 。

对 $\lambda(G)-1$ 条边中的每一条边都选取一个不同于 u, v 的点， 把这些点删去，则必至少删去 $\lambda(G)-1$ 条边。若这样产生的图是不连通的，则 $k(G) \leq \lambda(G)-1 < \lambda(G)$ ， 若这样产生的图是连通的，则 e 仍是桥，此时再删去 u 或 v ，就必产生一个不连通图，故 $k(G) \leq \lambda(G)$ 。

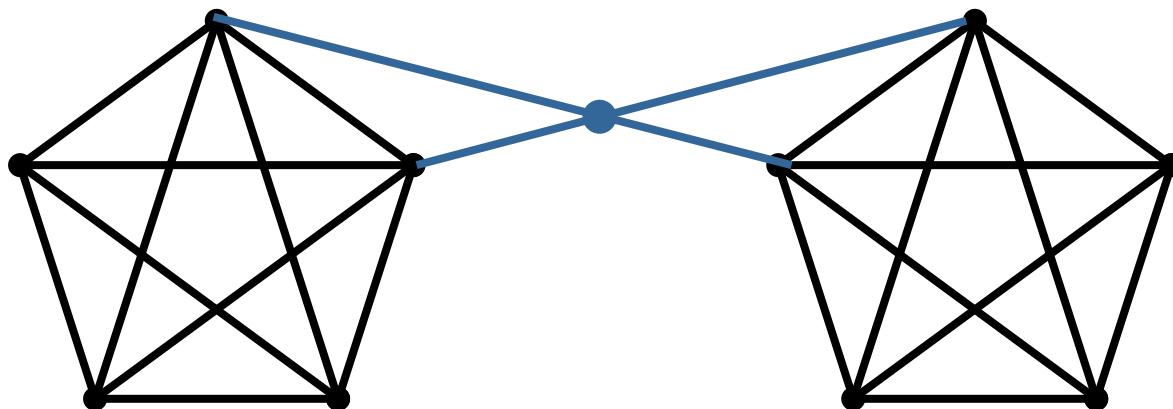
由 1) 和 2) 得 $k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$



问题



画出一个 $\kappa < \lambda < \delta$ 的无向简单连通图



$$\kappa(G) = 1$$

$$\lambda(G) = 2$$

$$\delta(G) = 4$$

有向图的连通性

□ 定义14.19 $D = \langle V, E \rangle$ 为有向图, $\forall v_i, v_j \in V$

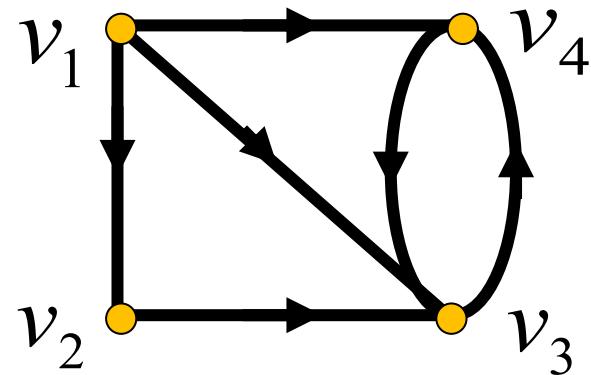
$v_i \rightarrow v_j$ (v_i 可达 v_j) —— v_i 到 v_j 有通路

$v_i \leftrightarrow v_j$ (v_i 与 v_j 相互可达)

□ 性质

→ 具有自反性($v_i \rightarrow v_i$)、传递性

↔ 具有自反性、对称性、传递性



有向图的连通性

□ 定义14.20 设 $D=<V,E>$ 为有向图， $\forall v_i, v_j \in V$
若 $v_i \rightarrow v_j$ 则称 v_i 到 v_j 长度最短的通路为 v_i 到 v_j 的**短程线**。

短程线的长度是 v_i 到 v_j 的**距离**，记作 $d<v_i, v_j>$ 。

□ 说明：

与无向图中定义相似，只是距离表示法的不同

- 无向图中 $d(v_i, v_j)$ ，有向图中 $d<v_i, v_j>$
- $d<v_i, v_j>$ 无对称性

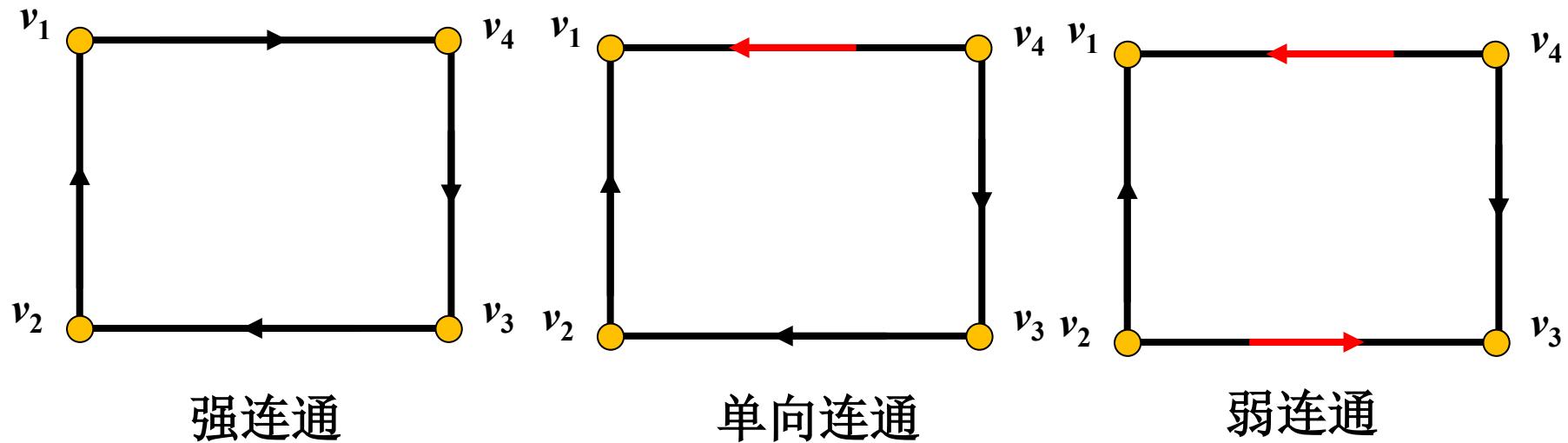
有向图的连通性分类

定义14.21 设有向图 $D = \langle V, E \rangle$,

D 弱连通(连通): 略去各边的方向所得无向图为连通图

D 单向连通: $\forall v_i, v_j \in V, v_i \rightarrow v_j$ 成立或者 $v_j \rightarrow v_i$ 成立。

D 强连通: $\forall v_i, v_j \in V$, 均有 $v_i \leftrightarrow v_j$ 与 v 相互可达



有向图的连通性

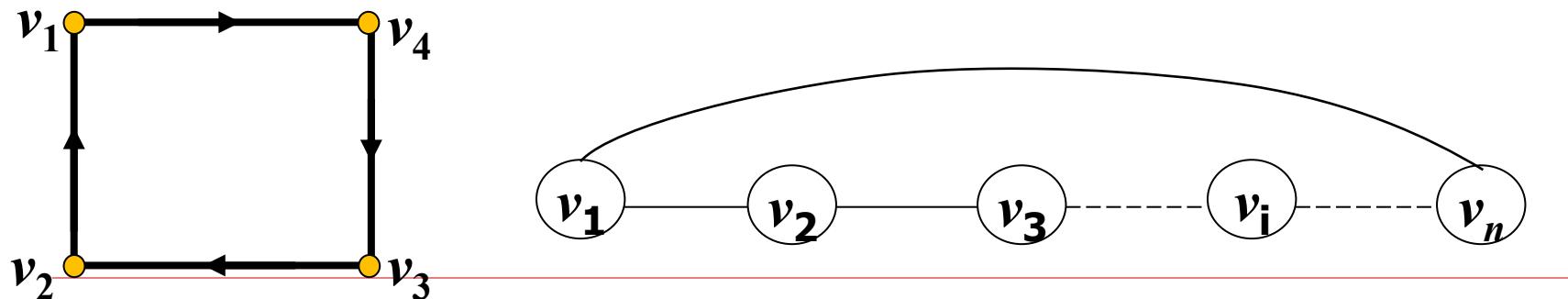
- 定理14.8 D 是强连通的当且仅当 D 中存在经过所有顶点的回路。
- 定理14.9 D 是单向连通的当且仅当 D 中存在经过所有顶点的通路。

定理14.8证明

充分性:显然成立。

必要性: 若 D 是强连通的, 则每两点之间都是双向可达的。

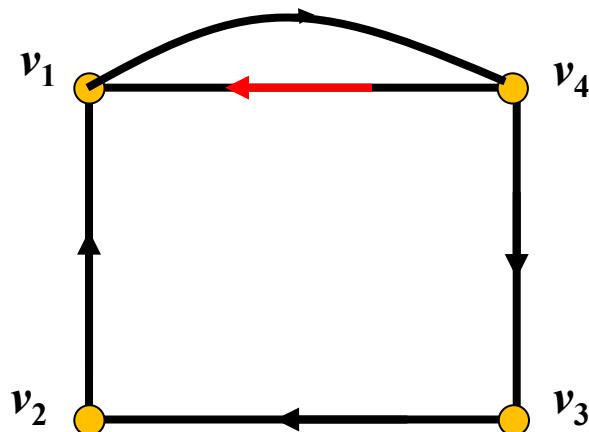
- 假设 Γ_i 是 $v_i \rightarrow v_{i+1}$ 的通路($i=1,2,\dots,n-1$),假设 Γ_n 是 $v_n \rightarrow v_1$ 的通路,
- 依次连接 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$. 就得到了一条经过所有点的回路。



问题

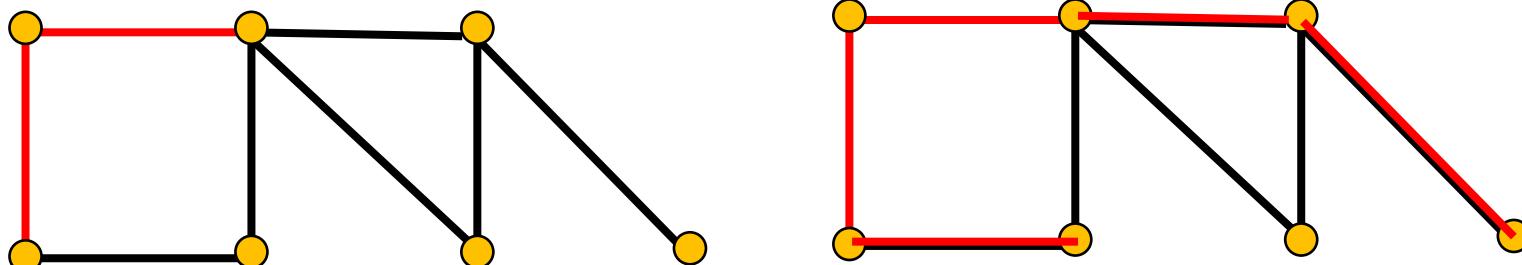


- ◆ 设有向图 D 是单连通图, 但不是强连通.
问: 在 D 中至少加几条边后就能成为强连通图?
- ◆ 解: 根据定理14.9, D 中存在经过所有顶点的通路.
- ◆ 所以只需要在 D 中加1条边就得到经过所有顶点的回路, 即成为强连通图了.



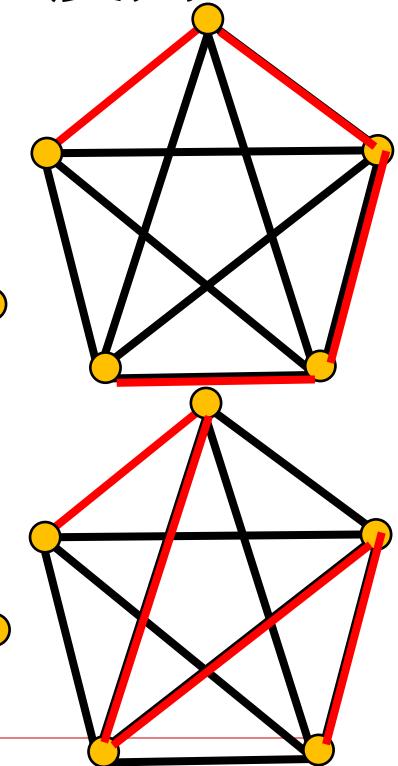
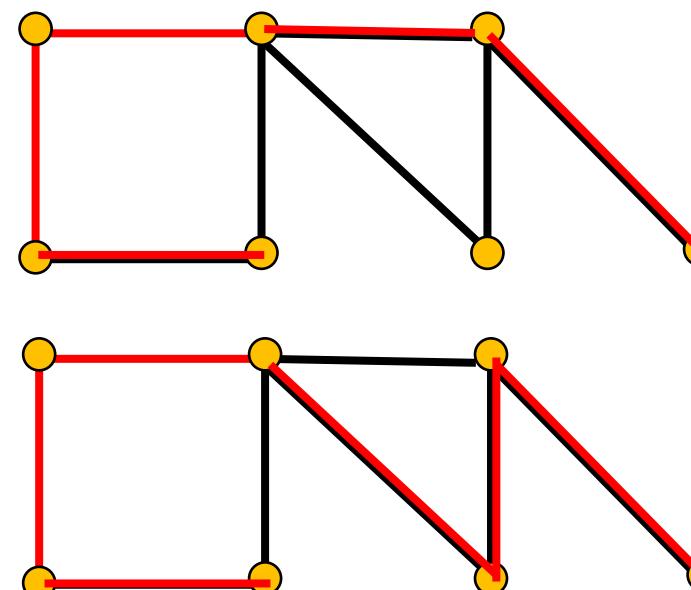
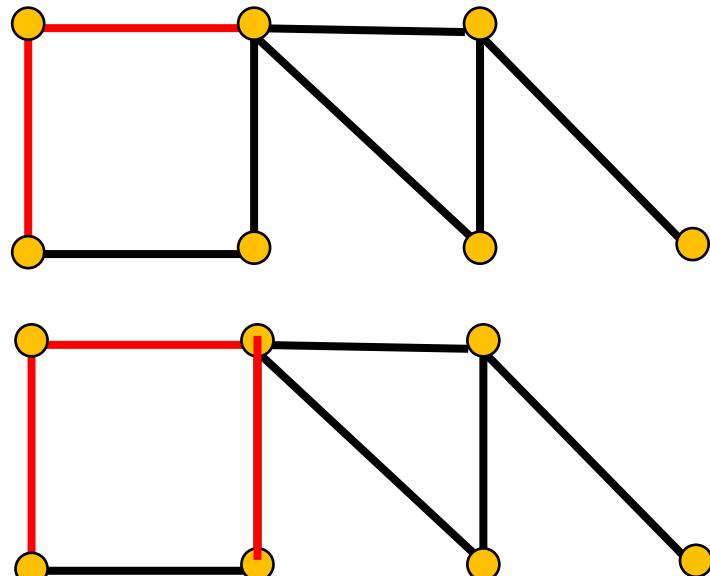
扩大路径法

- **极大路径：**无向图中设 $G= \langle V, E \rangle$ 为 n 阶无向图， $E \neq \emptyset$. 设 Γ 为 G 中一条路径，若此路径的始点或终点都不与 Γ 外的顶点相邻，称 Γ 为一条“**极大路径**”。
- **扩大路径法：**任给 G 中一条路径，如果它的始点或终点与路径外的某个顶点相邻，就将它们扩到路径中来，继续这一过程，直到最后得到的路径的两个端点不与路径外的顶点相邻为止. 称如此构造极大路径的方法为“**扩大路径法**”.

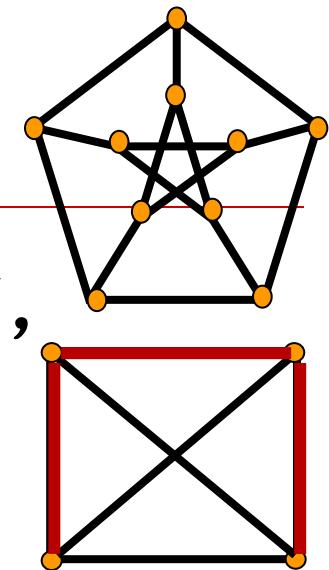


说明

- (1) 由某条路径扩大出的极大路径不惟一，极大路径不一定是图中最长的路径。
- (2) 在 K_n 中的极大路径是最长的路径,长度为 $n-1$.



扩大路径法的应用



□ **例14.8** 设 G 为 n ($n \geq 4$) 阶无向简单图, $\delta \geq 3$, 证明 G 中存在长度大于4的圈.

□ 证明

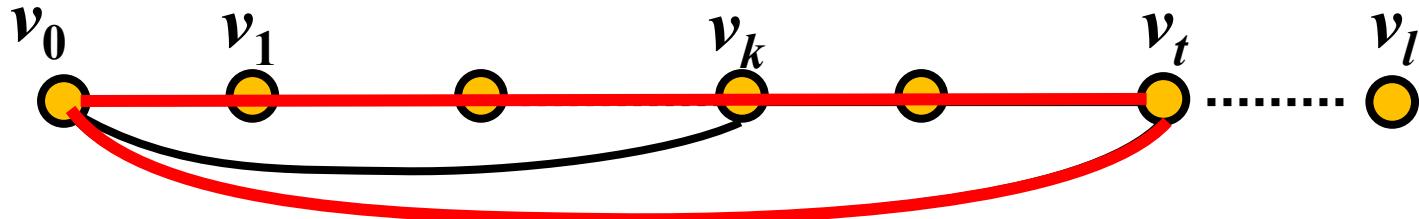
- (1) 不妨设 G 为连通图, 否则因为 G 的各个连通分支的最小度也都大于等于3, 所以可对它的某个连通分支进行讨论.
- (2) 设 u 和 v 是 G 中任意两个顶点, 由 G 是连通图, 因此 u 和 v 之间存在路径 Γ . 用扩大路径法扩大这条路径, 设最后得到的极大路径为 $\Gamma = v_0v_1\dots v_l$.
- (3) 由于 $\delta \geq 3$, 则 $l \geq \delta \geq 3$.

扩大路径法的应用

□ 例14.8 设 G 为 n ($n \geq 4$) 阶无向简单图,
 $\delta \geq 3$, 证明 G 中存在长度大于4的圈.

- (4) 若 v_0 与 v_l 邻接, 则 $\Gamma \cup (v_0, v_l)$ 为长度 ≥ 4 的圈.
- (5) 否则, 因为 $d(v_0) \geq \delta \geq 3$, 因而在 Γ 上除 v_1 外,
至少还存在 $\delta - 1$ (至少为2) 个顶点 v_k 和 v_t ($2 \leq k < t \leq l - 1$) 与 v_0 邻接.

于是 $v_0v_1\dots v_k\dots v_tv_0$ 为 G 中长度 $\geq \delta + 1 = 4$ 的圈.

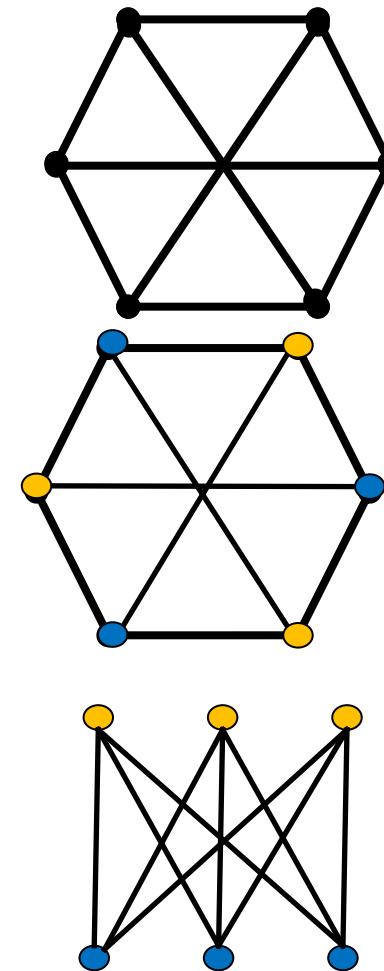
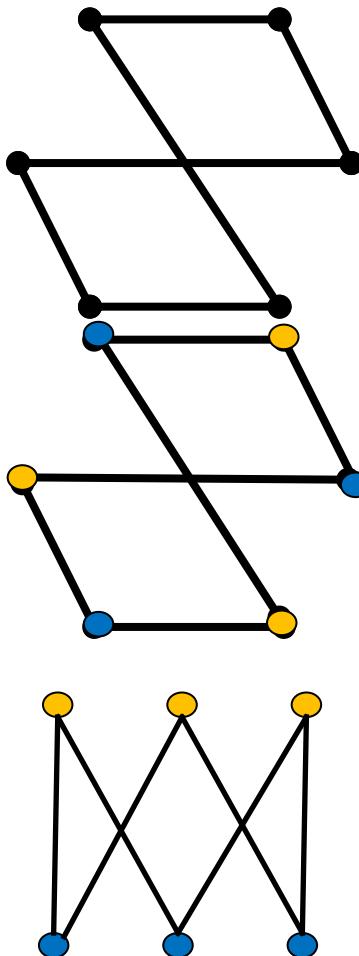
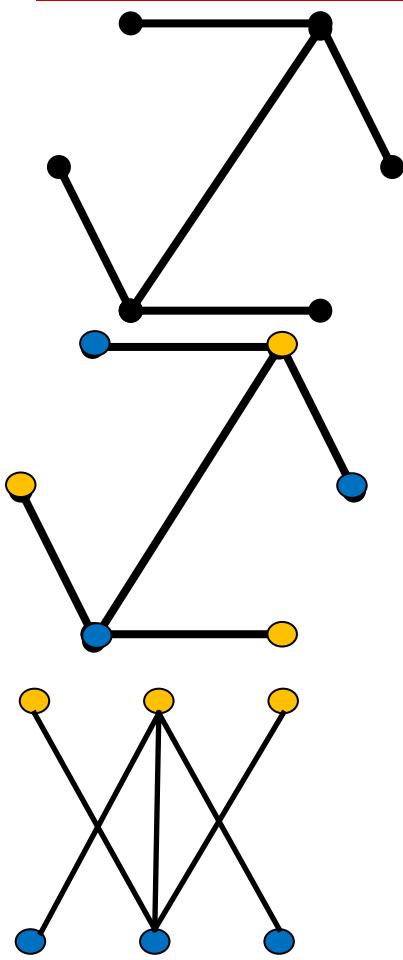


二部图(bipartite graph)

定义14.22 设无向图 $G= \langle V, E \rangle$, 若能将 V 分成 V_1 和 V_2 (即 $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$),

- 使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于 V_1 , 另一个属于 V_2 , 则称 G 为**二部图** (或称**二分图**、**偶图**等), 称 V_1 和 V_2 为**互补顶点子集**, 将二部图 G 记为 $\langle V_1, V_2, E \rangle$.
- 又若 G 是**简单二部图**, V_1 中每个顶点均与 V_2 中所有的顶点相邻, 则称 G 为**完全二部图**, 记为 $K_{r,s}$, 其中 $r=|V_1|$, $s=|V_2|$.
- 注意, n 阶 ($n \geq 2$) 零图为二部图.

实例



完全二部图 $K_{3,3}$

$K_{2,3}$

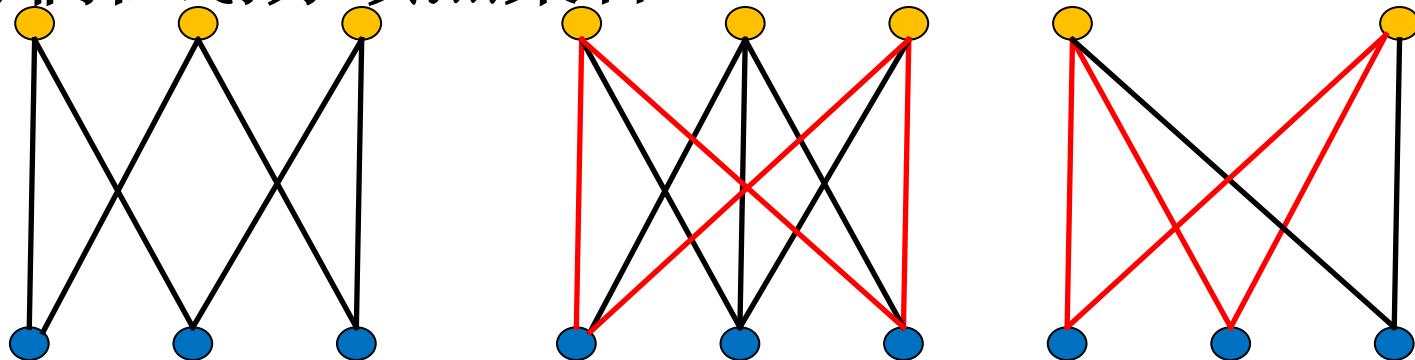
二部图的判别法

□ 定理14.10 $n(n \geq 2)$ 阶无向图 G 是二部图当且仅当 G 中无奇圈。

□ 证明思路

必要性: G 有回路 \rightarrow 每个圈为偶圈, 利用顶点划分。

充分性: 考虑连通性, 然后根据跟某个点的距离的奇偶性划分顶点集合。



证 (一) 必要性: 如果 G 是二部图, 则 G 中无奇圈

设 $G= \langle V_1, V_2, E \rangle$ 是二部图, 每条边只能从 V_1 到 V_2 , 或从 V_2 到 V_1 , 故任何回路必为偶长度.

(二) 充分性: 如果 G 中无奇圈, 则 G 是二部图。

不妨设 G 连通. 取任一顶点 v_0 , 令

$V_1 = \{v \mid v \in V \wedge d(v_0, v) \text{ 为偶数}\}$, 距离 v_0 为偶数的顶点集

$V_2 = \{v \mid v \in V \wedge d(v_0, v) \text{ 为奇数}\}$, 距离 v_0 为奇数的顶点集

则 $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

只需要证 V_1 中任意两点不相邻, V_2 中任意两点也不相邻.

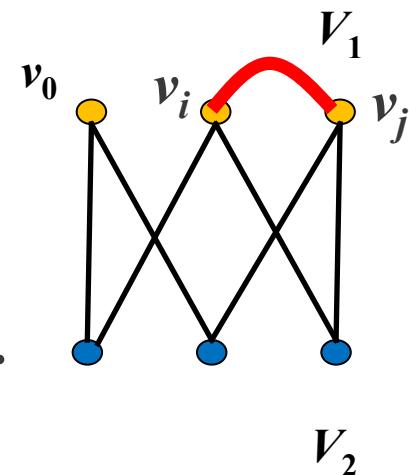
先证 V_1 中任意两点不相邻:

假设存在 $v_i, v_j \in V_1$, $e = (v_i, v_j) \in E$.

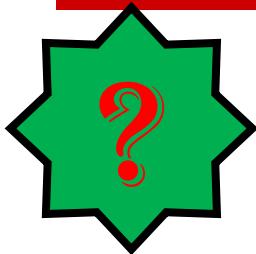
设 Γ_1, Γ_2 分别是 v_0 到 v_i, v_j 的短程线, 则

$\Gamma_1 \cup e \cup \Gamma_2$ 是一条回路, 其长度为奇数, 与假设矛盾.

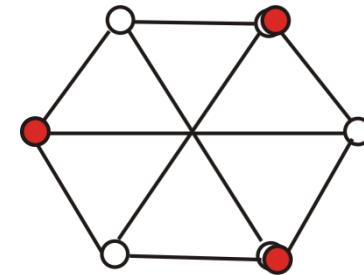
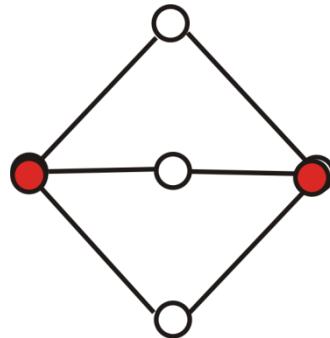
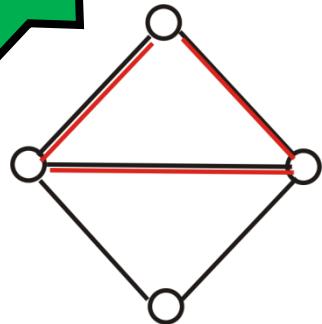
同理可证 V_2 中任意两点不相邻.



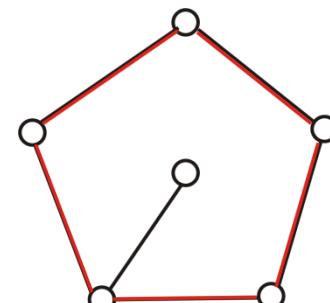
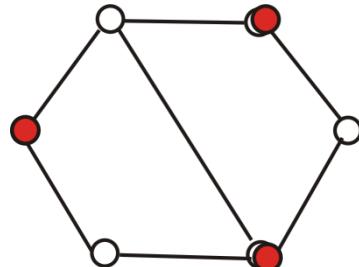
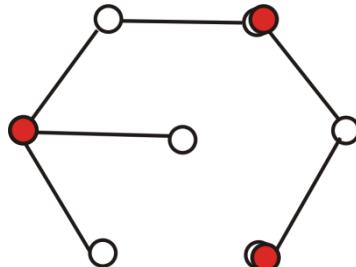
问题:二部图的判别法



哪些是二部图?



非二部图



非二部图

问题

- 在无向完全图 K_n 中，寻找边数最多的生成子图，使其成为完全二部图 $K_{r,s}$.

解：由已知 $K_{r,s}$ 中有 n 个顶点，即 $r+s = n$ (1)

$K_{r,s}$ 中有 $r*s$ 条边， $m=r*s = r(n-r)$

$$m = nr - r^2. \quad (2)$$

令(2)右边导数为零， $n - 2r = 0$

$\rightarrow r = n/2$ 时 m 为最大值

又 r 和 s 均为整数，所以，

当 n 为偶数时， $r=s=n/2$ ， $K_{r,s}$ 中边最多

当 n 为奇数时， $r=(n-1)/2$ $s=(n+1)/2$ ， $K_{r,s}$ 中边最多.

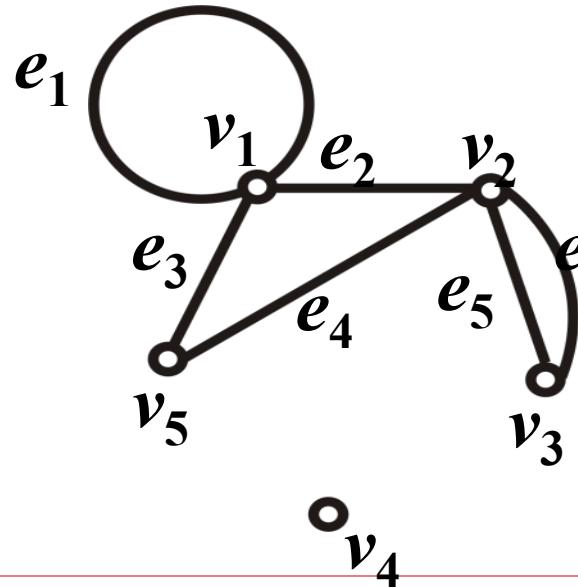
第十四章 图的基本概念

□主要内容

- 14.1 图
- 14.2 通路与回路
- 14.3 图的连通性
- 14.4 图的矩阵表示
- 14.5 图的运算

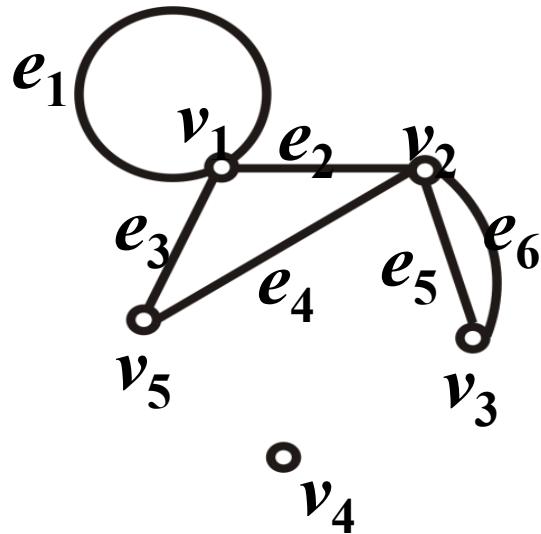
无向图的关联矩阵(Incidence matrix)

- 定义14.24 设无向图 $G= \langle V, E \rangle$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.
- 令 m_{ij} 为 v_i 与 e_j 的关联次数, 称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 G 的关联矩阵, 记为 $M(G)$.



$$M(G) = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}$$

无向图的关联矩阵的性质


$$M(G) = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

v_1
 v_2
 v_3
 v_4
 v_5

□ 性质

$$(1) \sum_{i=1}^n m_{ij} = 2 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$(2) \sum_{j=1}^m m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(3) \sum_{i,j} m_{ij} = 2m$$

(4) 平行边的列相同

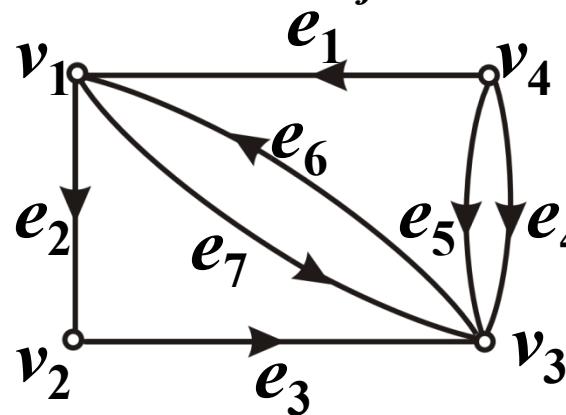
无环有向图的关联矩阵

定义14.25 设无环有向图 $D = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. 令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的始点} \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ -1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

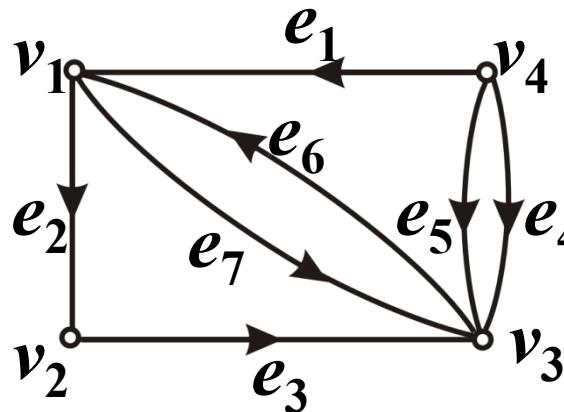
则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 D 的关联矩阵, 记为 $M(D)$.



$M(G)$

$$= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ v_1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ v_2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

无环有向图的关联矩阵的性质



$$M(G) = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ v_1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ v_2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 0 \quad (j=1,2,\dots,m)$

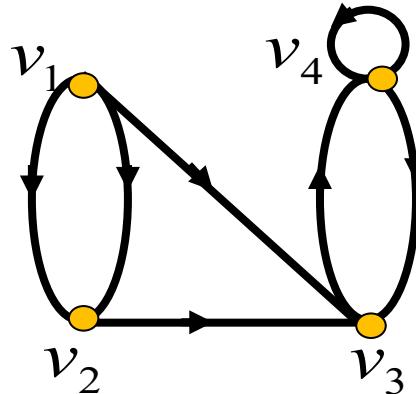
(2) $\sum_{j=1}^m (m_{ij} = 1) = d^+(v_i), \quad \sum_{j=1}^m (m_{ij} = -1) = d^-(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 0$

(4) 平行边对应的列相同

有向图的邻接矩阵(Adjacency matrix)

定义14.25 设有向图 $D = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,
令 $a_{ij}^{(1)}$ 为 顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数,
称 $(a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$ 为 D 的邻接矩阵, 记作 $A(D)$, 简记作 A .



$$A^1 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}$$

有向图中的通路数与回路数

定理14.11 设 A 为 n 阶有向图 D 的邻接矩阵, 则 $A^l(l \geq 1)$ 中元素:

$a_{ij}^{(l)}$ 等于 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数;

$a_{ii}^{(l)}$ 等于 v_i 到自身长度为 l 的回路数,

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)}$ 等于 D 中长度为 l 的通路(含回路)总数;

$\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(l)}$ 等于 D 中长度为 l 的回路总数.

有向图中的通路数与回路数

证明：只需要证明 $a_{ij}^{(l)}$ 是 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数。

对 l 做归纳证明。

- (1) 当 $l = 1$ 时成立， $a_{ij}^{(1)}$ 是 v_i 到 v_j 长度为 1 的通路数。
- (2) 假设对 l 结论成立，即 $a_{ij}^{(l)}$ 是 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数。
- (3) 下证对 $l+1$ 结论成立，即 $a_{ij}^{(l+1)}$ 是 v_i 到 v_j 长度为 $l+1$ 的通路数。

➤ 从 v_i 到 v_j 长度为 $l+1$ 的一条通路 =
= v_i 到某一点 v_k 长度为 l 的通路 + v_k 到 v_j 的一条边组成。

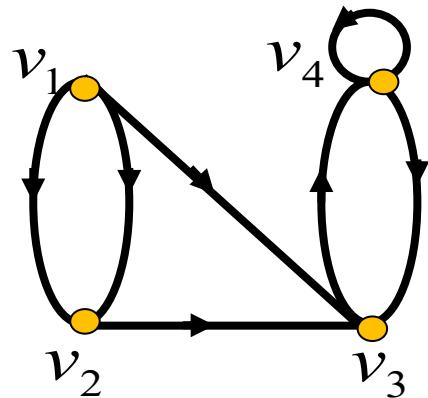
➤ 根据归纳假设长度为 l 的通路等于 $a_{ij}^{(l)}$ 。
➤ 所以从 v_i 到 v_j 长度为 $l+1$ 的通路数为 $a_{ij}^{(l+1)} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot a_{kj}^{(l)})$
所以，命题对 $l+1$ 也成立。

有向图中的通路数与回路数

推论 设 $B_l = A + A^2 + \dots + A^l (l \geq 1)$, 则 B_l 中元素

- $b_{ij}^{(l)}$ 等于 D 中 v_i 到 v_j 长度小于等于 l 的通路(含回路)数,
- $b_{ii}^{(l)}$ 等于 D 中 v_i 到 v_i 的长度小于等于 l 的回路数,
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(l)}$ 等于 D 中 **长度小于等于 l** 的通路(含回路)数,
- $\sum_{i=1}^n b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中 **长度小于等于 l** 的回路数.

实例



$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 有向图D如图所示，求 A, A^2, A^3, A^4 ，并回答：
- (1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？
 - (2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？

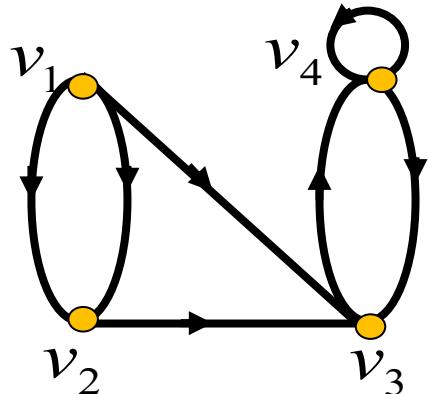
实例 (续)

$$A^2 = A^1 \times A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot a_{kj}^{(1)}) \quad a_{ij}^{(l+1)} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot a_{kj}^{(l)})$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

实例（续）



$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

上述结论对无向图也成立。

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

(1) D 中长度为1的通路为7条，其中有1条是回路.

D 中长度为2的通路为9条，其中有3条是回路.

D 中长度为3和4的通路分别为14和23条，回路分别为4与7条.

(2) D 中长度小于等于4的通路为53条，其中有15条是回路

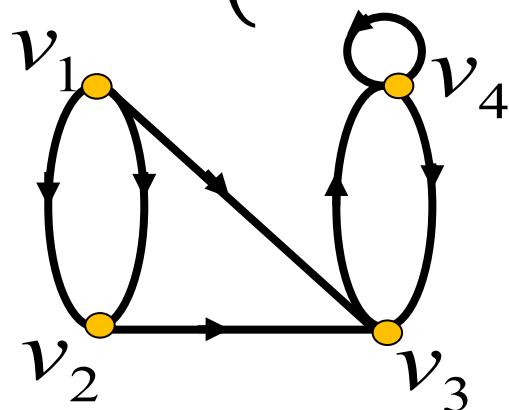
可达矩阵(reachability matrix)

定义14.26 设 $D = \langle V, E \rangle$ 为有向图,

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 令 $P = (p_{ij})_{n \times n}$ 称为 D 的**可达矩阵**,

其中:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 可达 } v_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad p_{ii} = 1 \ (i = 1, 2, \dots, n)$$



$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

可达矩阵的求法

□ 方法1：可由邻接矩阵 A 求可达矩阵 P , 令

$$B_{n-1} = A + A^2 + \dots + A^{n-1},$$

然后将 B_n 中的非零元和对角线上元素置为1, 即得 P .

□ 方法2：把邻接矩阵看作是 V 上关系 R 的关系矩阵, 则 P 为 R 的传递闭包的关系矩阵 M_{R^+} , 可以用 *Warshall* 算法计算。

最后将可达矩阵 P 的对角线上元素置为1.

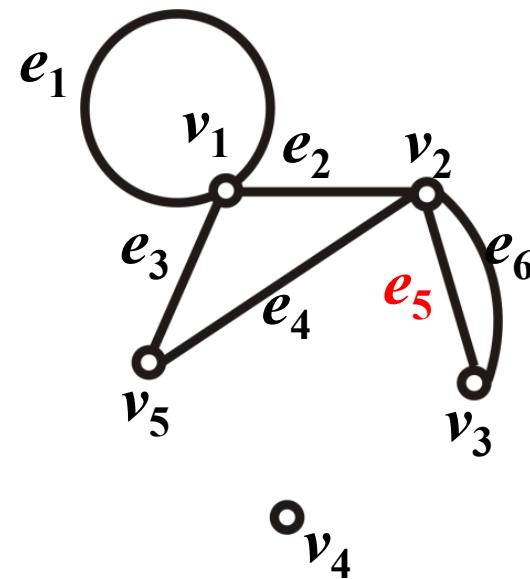
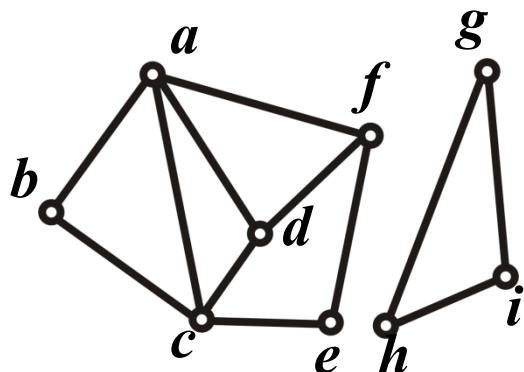
第十四章 图的基本概念

□主要内容

- 14.1图
- 14.2通路与回路
- 14.3图的连通性
- 14.4图的矩阵表示
- 14.5图的运算

图的运算

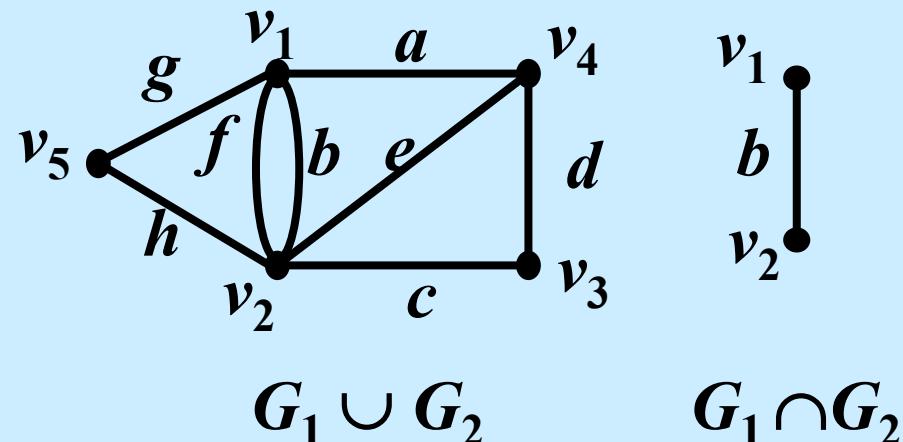
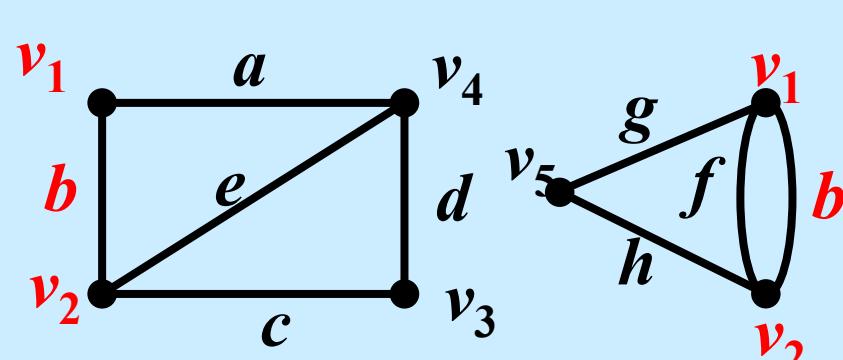
□ 定义14.27 设图 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ 和 $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ ，若 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ，则称 G_1 与 G_2 是不交的；若 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ，则称 G_1 与 G_2 是边不交的或边不重的。



图的运算

□ 定义14.28 设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ 和 $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 是不含孤立点的两个图（同为无向图和有向图）

- (1) 称以 $V_1 \cup V_2$ 为顶点集，以 $E_1 \cup E_2$ 为边集的图为 G_1 与 G_2 的并图，记作 $G_1 \cup G_2$ ；
- (2) 称以 $E_1 \cap E_2$ 为边集，以 $E_1 \cap E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的交图，记作 $G_1 \cap G_2$ ；



图的运算

□ 定义14.28 设 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ 和 $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 是不含孤立点的两个图（同为无向图和有向图）

- (3) 称以 $E_1 - E_2$ 为边集，以 $E_1 - E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的**差图**，记作 $G_1 - G_2$ ；
- (4) 称以 $E_1 \oplus E_2$ 为边集，以 $E_1 \oplus E_2$ 中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为 G_1 与 G_2 的**环和**，记作 $G_1 \oplus G_2$.

