第三章 命题逻辑的推理理论

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

主要内容

- 推理的形式结构
  - 推理的正确与错误
  - 推理的形式结构
  - 判断推理正确的方法
  - 推理定律
- 自然推理系统P
  - 形式系统的定义与分类
  - 自然推理系统P
  - 在P中构造证明:直接证明法、附加前提证明法、归谬法

3.1 推理的形式结构

- **定义3.1** 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$为命题公式. 若对于每组赋值，$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为假，或当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由**前提**$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出**结论**$B$的**推理**是**有效的**或**正确的**, 并称B是**有效结论**.

推理的形式结构1：

$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$

若推理正确, 记为$\{A_1,A_2,\ldots,A_n\} \vDash B$

否则记为$\{A_1,A_2,\ldots,A_n\} \nvDash B$

实例

- 判断下列推理是否正确：

$\{\neg q, p \to q\} \vdash \neg p$

方法1：假定$\neg q \wedge (p \to q)$为1，
则$\neg q$为1，且$(p \to q)$为1。
由于q为0，$(p \to q)$为1，则必须p为0，
故$\neg p$为1。
方法2：假定$\neg p$为0，则p为1.
若q为0，则$p \to q$为0，$\neg q \wedge (p \to q)$为0.
若q为1，则$\neg q$为0，$\neg q \wedge (p \to q)$为0.

$\{\neg q, p \to q\} \models \neg p$

实例

- 判断下列推理是否正确：

$\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p$

p	q	$(p\rightarrow q)\wedge\neg q$	$\rightarrow$	$\neg p$
0	0		1	
0	1		1	
1	0		1	
1	1		1	

$\{\neg q, p \rightarrow q\} \models \neg p$

推理的形式结构

- 定理3.1 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推B的推理正确当且仅当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式。
- 推理的形式结构2：
  - $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$
  - 若推理正确, 记为$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$
- 也可以采用下述形式
  - 前提： $A_1, A_2, \ldots, A_k$
  - 结论： B
- 注意：推理正确不能保证结论一定正确。

判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法

真值表法

- 从真值表上找出 $A_1, A_2, \ldots, A_k$真值均为 1的行，对每一个这样的行，若 B 的真值也为 1,则 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$成立。
- 或者看 B为0的行,在每个这样的行中，A_1, $A_2, \ldots, A_k$真值中至少有一个为 0,
  则 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$成立。

推理实例

考察 B 是否是下列前提 A_1, A_2 的有效结论？

1) $A_1: p \to q$　　$A_2: p$　　$B: q$　　是

2) $A_1: p \to q$　　$A_2: \neg p$　　$B: q$　　否

3) $A_1: p \to q$　　$A_2: q$　　$B: p$　　否

p	q	$p \to q$	$\neg p$	
0	0	1	1	
0	1	1	1	2)
1	0	0	0	3)
1	1	1	0	1)

推理实例

- **例1** 判断下面推理是否正确

(1)如果今天天气好，我就出去玩. 今天天气好. 所以, 我出去玩.

(2)如果今天天气好，我就出去玩. 我出去玩. 所以, 今天天气好.

推理实例

(1)如果今天天气好，我就出去玩. 今天天气好. 所以, 我出去玩.

- 解：设 p：今天天气好，q：我出去玩.

(1) 推理的形式结构:$(p\to q)\wedge p\to q$

用等值演算法

$$(p\to q)\wedge p\to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q \Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee\neg p)\vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

由定理3.1可知推理正确

推理实例

- (2)如果今天天气好，我就出去玩 . 我出去玩. 所以, 今天天气好.
- 推理的形式结构:$(p\rightarrow q)\wedge q\rightarrow p$

用主析取范式法

$$
\begin{aligned}
& (p\rightarrow q)\wedge q\rightarrow p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\vee q)\wedge q\rightarrow p \\
\Leftrightarrow\ & \neg((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p \\
\Leftrightarrow\ & \neg q\vee p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q) \\
\Leftrightarrow\ & m_0\vee m_2\vee m_3
\end{aligned}
$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确

推理定律——重言蕴涵式

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ 附加律
2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ 化简律
3. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ 假言推理
4. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式
5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论
6. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ 假言三段论
7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 等价三段论

推理定律——重言蕴涵式

8. $(A \to B) \land (C \to D) \land (A \lor C) \Rightarrow (B \lor D)$ 构造性二难

$(A \to B) \land (\neg A \to B) \Rightarrow B$

构造性二难(特殊形式)

9. $(A \to B) \land (C \to D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$

破坏性二难

10. 每个等值式可产生两个推理定律.

实例

- 判断下面推理是否正确
  - 现在气温在零度以下。所以现在气温在零度以下或者正在下雨。

    $A \Rightarrow (A \vee B)$ 附加律
  - 现在气温在零度以下并且正在下雨。所以现在气温在零度以下。

    $(A \wedge B) \Rightarrow A$ 化简律
  - 现在气温在零度以下或者正在下雨。现在气温不在零度以下。所以现在正在下雨。

    $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论

实例

- 现在气温在零度以下或者正在下雨。所以现在正在下雨。

  推理错误

- 若今天下雨，则我们今天将不野餐。若我们今天不野餐，则我们明天将野餐。因此，若今天下雨，则我们明天将野餐。

  $(A \to B) \land (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$　　假言三段论

3.2 自然推理系统P

- **定义3.2** 一个形式系统 I 包括下面四个部分：

(1) 非空的字母表，记作 $A(I)$.

(2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集，记作 $E(I)$.

(3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集,记作 $A_X(I)$.

(4) 推理规则集，记作 $R(I)$.

记$I=<A(I),E(I),A_X(I),R(I)>$, 其中 $<A(I),E(I),A_X(I),R(I)>$是 I 的形式语言系统.

自然推理系统P

- 自然推理系统:
  - 无公理, 即$A_X(I)=\varnothing$.
- 公理推理系统:
  - 推出的结论是系统中的重言式, 称作定理.

自然推理系统P

- **定义3.3 自然推理系统 P 定义如下:**

  1. 字母表

  (1) 命题变项符号：$p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots$

  (2) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

  (3) 括号与逗号：(,), ,

  2. 合式公式（同定义1.6）

  3. 推理规则

  (1) 前提引入规则

  (2) 结论引入规则

  (3) 置换规则

推理规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{A\rightarrow B \qquad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A\vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A\wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A\rightarrow B \qquad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A\rightarrow B \qquad B\rightarrow C}{\therefore A\rightarrow C}$$

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A\vee B \qquad \neg B}{\therefore A}$$

推理规则

(10) 构造性二难规则

$$\frac{\begin{array}{c} A\to B \\ C\to D \\ A\vee C \end{array}}{\therefore B\vee D}$$

(11) 破坏性二难规则

$$\frac{\begin{array}{c} A\to B \\ C\to D \\ \neg B\vee\neg D \end{array}}{\therefore \neg A\vee\neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{\therefore A\wedge B}$$

在自然推理系统P中构造证明

- 设前提$A_1, A_2,\ldots, A_k$,结论B及公式序列$C_1, C_2,\ldots, C_l$. 如果每一个$C_i(1\le i\le l)$是某个A_j, 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且$C_l=B$, 则称这个公式序列是由$A_1, A_2,\ldots, A_k$推出B的证明.
- 可以证明，存在由$A_1, A_2,\ldots, A_k$推出B的证明的充要条件是B是$A_1, A_2,\ldots, A_k$的有效结论，即$A_1\wedge A_2\wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$.

说明证明的合理性

- 引理1: 设A, C_1, C_2是公式. 如果$A \Rightarrow C_1$, $A \Rightarrow C_2$, 则$A \Rightarrow C_1 \wedge C_2$.
- 引理2：如果$A \Rightarrow B$， $B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$.
- 定理：设A是公式集合，B是一个公式。于是，从A证明出B的充要条件是B是A的有效结论。

说明证明的合理性

- 证明：必要性，设存在从A推出B的证明，令C_1，…，$C_k=B$是这个证明序列。
  对任意 C_i ($i=1$，…，k)，往证C_i 是A的有效结论。

对i用归纳法:

(1) 当$i=1$时，因$C_1 \in A$，显然, $C_1 \wedge \ldots \to C_1$ 是恒真公式，故$A \Rightarrow C_1$，即 C_1是A的有效结论。

(2) 设$i<n$时，命题成立。

(3) 当$i=n$时，若 $C_n \in A$，则$A \Rightarrow C_n$，归纳法完成

说明证明的合理性

若C_n是某些C_j $(j<n)$的有效结论，不妨设

$$(C_{j1} \wedge \ldots \wedge C_{jh}) \Rightarrow C_n \qquad (1)$$

其中j_1，…，j_h都小于n。

由归纳假设知，$A \Rightarrow C_{jm}$，$m=1$，…，h。

由引理1知：

$$A \Rightarrow (C_{j1} \wedge \ldots \wedge C_{jh}) \qquad (2)$$

根据(1)，(2)式及引理2，得

$$A \Rightarrow C_n$$

即C_n是A的有效结论，归纳完成。

说明证明的合理性

- 充分性，若B是A的有效结论，则存在如下的序列：

  C_1，…，C_k，B

  其中 C_1，…，C_k 是A中所有公式，且

  $C_1 \wedge \ldots \wedge C_k \Rightarrow B$，

  这个序列就是由A到B的证明。

  证毕。

实例

- 例2 构造下面推理的证明：

  若明天是星期一或星期三，我明天就有课. 若我明天有课，今天必须备课. 我今天没备课. 所以，明天不是星期一、也不是星期三.

- 解 (1) 设命题并符号化

  设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

  r：我明天有课，s：我今天备课

直接证明法

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

(3) 证明

① $r\rightarrow s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg r$	①②拒取式
④ $(p\vee q)\rightarrow r$	前提引入
⑤ $\neg(p\vee q)$	③④拒取式
⑥ $\neg p\wedge\neg q$	⑤置换

附加前提证明法

- 附加前提证明法　适用于结论为蕴涵式
- 欲证

  前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

  结论：$C \to B$
- 等价地证明

  前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

  结论：B
- 理由：$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (C \to B)$

  $\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$

  $\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$

  $\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \to B$

附加前提证明法实例

- **例3** 构造下面推理的证明

  2是素数或合数. 若2是素数，则π是无理数. 若π是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

- 解 用附加前提证明法构造证明

  (1) 设 p：2是素数，q：2是合数，

  r： π是无理数，s：4是素数

  (2) 推理的形式结构

  前提：$p\vee q$, $p\rightarrow r$, $r\rightarrow\neg s$

  结论：$s\rightarrow q$

附加前提证明法实例

- (3) 证明

① s	附加前提引入
② $p\to r$	前提引入
③ $r\to\neg s$	前提引入
④ $p\to\neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p\vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

归谬法（反证法）

- 归谬法 (反证法)
- 欲证

  前提：$A_1, A_2, \dots, A_k$

  结论：B
- 做法

  在前提中加入$\neg B$，推出矛盾.
- 理由：$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$

  $\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee B$

  $\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B)$

  $\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0$

  $\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B \rightarrow 0$

归谬法实例

- **例4** 前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\to s$，$\neg s$，p

  结论：$\neg q$

- 证明 用归缪法

① q	结论否定引入
② $r\to s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论

归谬法实例

⑦ $\neg p \vee \neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p \wedge p$	⑧⑨合取