# 第五章
# 一阶逻辑等值演算与推理

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

# 主要内容

- 一阶逻辑等值式与基本的等值式
- 置换规则、换名规则、代替规则
- 前束范式
- 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$及其推理规则

# 5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

- **定义5.1** 设$A$, $B$是两个谓词公式, 如果$A \leftrightarrow B$是永真式, 则称$A$与$B$**等值**, 记作$A \Leftrightarrow B$, 并称$A \Leftrightarrow B$是**等值式.**
- 由定义显然可以看出：公式$A$，$B$等值的充要条件是：对$A$，$B$的任意解释$I$，$A$，$B$在$I$下的真值相同。
- 因为对任意公式$A$，$B$，在解释$I$下，$A$，B就是两个命题，所以命题逻辑中给出的基本等价式，在谓词逻辑中仍然成立。

# 基本等值式

- 第一组 命题逻辑中16组基本等值式的代换实例

  例如，$\neg\neg\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall x F(x)$,

  $\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y) \Leftrightarrow \neg\forall x F(x) \vee \exists y G(y)$ 等

- 判断下列公式的类型：

（1）$\forall x P(x) \rightarrow (\exists x \exists y Q(x,y) \rightarrow \forall x P(x))$ 永真式

（2）$\forall x P(x) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \exists y G(y))$ 永真式

（3）$\neg (P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \wedge Q(x,y)$ 矛盾式

# 基本等值式

- 第二组

(1) 消去量词等值式

设$D=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

① $\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\ldots\wedge A(a_n)$

② $\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n)$

**例** 设个体域 $A=\{a,b\}$, 公式 $(\forall x)P(x)\wedge(\exists x)S(x)$在$A$上消去量词后应为:

$P(a)\wedge P(b)\wedge(S(a)\vee S(b))$

# 基本等值式

**(2) 量词否定等值式**

① $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

② $\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

例 设论域为人，$P(x)$: $x$来上课，$\neg P(x)$: $x$没来上课

$\forall x P(x)$:所有人都来上课

$\neg \forall x P(x)$:不是所有人都来上课

$\exists x \neg P(x)$: 有人没来上课

$\exists x P(x)$:有人来上课

$\neg \exists x P(x)$:没有人来上课

$\forall x \neg P(x)$: 所有人都没来上课

# ① $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$的证明

- 对于任意给定的解释$I$，若$I$使$\neg\forall x A(x)$为真，则$I$使$\forall x A(x)$为假。则必有某一个$x_0 \in D$，$A(x_0)$ 是假命题，于是$\neg A(x_0)$ 是真命题，即$\exists x \neg A(x)$在$I$下是真命题，故$I$使$\exists x \neg A(x)$为真。
- 若$I$使$\neg\forall x A(x)$为假，则$I$使$\forall x A(x)$为真。即对任意的$x \in D$，有$A(x)$是真命题。也就是对任意的$x \in D$，$\neg A(x)$是假命题，于是$\exists x \neg A(x)$是假命题，故$I$使$\exists x \neg A(x)$为假。

# 实例

- **例1** 将下面命题用两种形式符号化, 并证明两者等值:

(1) 没有不犯错误的人

解 令$F(x)$：$x$是人，$G(x)$：$x$犯错误.

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$\Leftrightarrow \forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x(\neg F(x)\vee G(x))$ 置换

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 置换

# 实例

(2) 不是所有的人都爱吃面包

解 令$F(x)$：$x$是人，$G(x)$：爱吃面包.

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 或 $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \exists x\neg(\neg F(x)\vee G(x))$ 置换

$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 置换

# 量词否定等值式（续）

设个体域中的客体变元为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，则

$$\neg \forall x A(x)$$
$$\Leftrightarrow \neg (A(a_1) \wedge \cdots \wedge A(a_n))$$
$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \vee \cdots \vee \neg A(a_n)$$
$$\Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x)$$
$$\Leftrightarrow \neg (A(a_1) \vee \cdots \vee A(a_n))$$
$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \wedge \cdots \wedge \neg A(a_n)$$
$$\Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

# 基本等值式

- (3) 量词辖域收缩与扩张等值式.

  $A(x)$ 是含 $x$ 自由出现的公式，$B$ 中不含 $x$ 的自由出现

  关于全称量词的：

  ① $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\vee B$

  ② $\forall x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge B$

  ③ $\forall x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\rightarrow B$

  ④ $\forall x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

# ① $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\vee B$的证明

- 设$I$是$A$(x)和$B$的一个解释。若$\forall x(A(x)\vee B)$在$I$下取1值，则在$I$下，对任意$x\in D$，$A(x)\vee B$都是真命题。若$B$是真命题，则$\forall xA(x)\vee B$是真命题；若B是假命题，则必然是对每个$x\in D$，$A(x)$都是真命题，故$\forall xA(x)$取1值。所以$\forall xA(x)\vee B$在$I$下取1值。
- 若$\forall x(A(x)\vee B)$在$I$下取0值，则必有一个$x_0\in D$，使$A(x_0)\vee B$在$I$下取0值。故$A(x_0)$为假命题，并且$B$为假命题。所以$\forall xA(x)$取0值。从而$\forall xA(x)\vee B$在$I$下取0值。

# 基本等值式

关于存在量词的：

① $\exists x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee B$

② $\exists x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge B$

③ $\exists x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\rightarrow B$

④ $\exists x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

# ① $\exists x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee B$的证明

- 设$I$是$A(x)$和$B$的一个解释。若$\exists x(A(x)\vee B)$在$I$下取1值，则在$I$下，存在$x_0 \in D$，$A(x_0)\vee B$是真命题。若$B$是真命题，则$\exists xA(x)\vee B$是真命题；若$B$是假命题，则必然有$A(x_0)$ 是真命题，故$\exists xA(x)$取1值。所以$\exists x\mathrm{A}(x)\vee B$在I下取1值。
- 若$\exists x(A(x)\vee B)$在$I$下取0值，则在$I$下对任意的$x\in D$，使$A(x)\vee B$在$I$下取0值。故$A(x)$和$B$都为假命题，所以$\exists xA(x)\vee B$在$I$下取0值。

# 基本等值式

- **(4) 量词分配等值式**

  ① $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

  ② $\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

  注意：$\forall$对$\vee$，$\exists$对$\wedge$无分配律

# ① $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

- 设$I$是$A(x)$和$B(x)$的一个解释。若$\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$在$I$下取1值，则在解释$I$下，对任意$x\in D$，$A(x)$、$B(x)$都是真命题，所以$A(x)\wedge B(x)$是真命题，即对任意$x\in D$，$A(x)\wedge B(x)$是真命题，所以$\forall x(A(x)\wedge B(x))$在$I$下取1值。
- 若$\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$在$I$下取0值，则$\forall xA(x)$为假，或$\forall xB(x)$为假，若$\forall xA(x)$为假，必有一个$x_0\in D$，使$A(x_0)$ 在$I$下取0值，所以$A(x_0)\wedge B(x_0)$为假命题，所以$\forall x(A(x)\wedge B(x))$在$I$下取0值。若$\forall xB(x)$为假，同理可证。

# 置换规则、换名规则、代替规则

- 1. 置换规则：设$\Phi(A)$是含$A$的公式, 那么, 若$A \Leftrightarrow B$, 则$\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.
- 2. 换名规则：设$A$为一公式，将$A$中某量词辖域中个体变项的所有约束出现及相应的指导变元换成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号，其余部分不变，设所得公式为$A'$，则$A' \Leftrightarrow A$.
- 3. 代替规则：设$A$为一公式，将$A$中某个个体变项的所有自由出现用$A$中未曾出现过的个体变项符号代替，其余部分不变，设所得公式为$A'$，则$A' \Leftrightarrow A$.

# 约束变元的换名

约束变元的换名规则：

1) 换名范围:量词中的指导变元和作用域中出现的该变元.公式中其余部分不变.

2) 要换成作用域中没有出现的变元名称.

**例：**

$$\forall x(P(x) \to R(x,y)) \land Q(x,y)$$

$$\forall z(P(z) \to R(z,y)) \land Q(x,y) \quad \checkmark$$

$$\forall y(P(y) \to R(y,y)) \land Q(x,y) \quad \times$$

$$\forall z(P(z) \to R(x,y)) \land Q(x,y) \quad \times$$

# 自由变元的代替

自由变元代替的规则：

1) 对该自由变元每一处进行代替.

2) 代替的变元与原公式中所有变元名称不能相同.

**例：**

$$\exists x(P(y) \wedge R(x, y))$$

$$\exists x(P(z) \wedge R(x, z))$$

# 实例

- 例2 将公式化成等值的不含既有约束出现、又有自由出现的个体变项：
  $\forall x(F(x,y,z)\to\exists yG(x,y,z))$
- 解 $\quad \forall x(F(x,y,z)\to\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,y,z)\to\exists tG(x,t,z))$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall x\exists t(F(x,y,z)\to G(x,t,z))$ 辖域扩张等值式

或者

$\quad \forall x(F(x,y,z)\to\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,u,z)\to\exists yG(x,y,z))$ 代替规则

$\Leftrightarrow \forall x\exists y(F(x,u,z)\to G(x,y,z))$ 辖域扩张等值式

# 实例

- **例3** 设个体域$D=\{a,b,c\}$, 消去下述公式中的量词:

(1) $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$　　(2) $\exists x\forall y F(x,y)$

**解**　$\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

$\Leftrightarrow (\exists y(F(a)\rightarrow G(y)))\wedge(\exists y(F(b)\rightarrow G(y)))$
$\wedge(\exists y(F(c)\rightarrow G(y)))$

$\Leftrightarrow((F(a)\rightarrow G(a))\vee(F(a)\rightarrow G(b))\vee(F(a)\rightarrow G(c)))$
$\wedge((F(b)\rightarrow G(a))\vee(F(b)\rightarrow G(b))\vee(F(b)\rightarrow G(c)))$
$\wedge((F(c)\rightarrow G(a))\vee(F(c)\rightarrow G(b))\vee(F(c)\rightarrow G(c)))$

# 实例

解法二

$$\forall x \exists y(F(x)\rightarrow G(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow \exists y G(y))$$ 辖域缩小等值式

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\Leftrightarrow (F(a)\rightarrow G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\wedge(F(b)\rightarrow G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\wedge(F(c)\rightarrow G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

# 实例

解法三

$$\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$$ 辖域缩小等值式

$$\Leftrightarrow (F(a)\vee F(b)\vee F(c))\rightarrow(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

如果题目要求消去公式中的量词，结论尽可能简单，则正确答案为解法三

# 实例

**(2)** $\exists x \forall y F(x,y)$

$$\begin{aligned}
&\exists x \forall y F(x,y) \\
\Leftrightarrow\ &\exists x (F(x,a) \wedge F(x,b) \wedge F(x,c)) \\
\Leftrightarrow\ &(F(a,a) \wedge F(a,b) \wedge F(a,c)) \\
&\quad \vee (F(b,a) \wedge F(b,b) \wedge F(b,c)) \\
&\quad \vee (F(c,a) \wedge F(c,b) \wedge F(c,c))
\end{aligned}$$

# 5.2 一阶逻辑前束范式

- **定义5.2** 设$A$为一个一阶逻辑公式，若$A$具有如下形式 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$则称$A$为**前束范式**，其中$Q_i$ $(1\le i\le k)$为$\forall$或$\exists$，$B$为不含量词的公式.
- 例如， $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$

  $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow(G(y)\wedge H(x,y)))$ 是前束范式

  而 $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

  $\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$ 不是前束范式，

# 前束范式存在定理

- 定理5.1（前束范式存在定理）：一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式
- 例4 求下列公式的前束范式

  (1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$
- 解 $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$
- 后两步结果都是前束范式，说明公式的前束范式不惟一.

# 求前束范式的实例

(2) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ （量词分配等值式）

或

$\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ 辖域收缩扩张规则

# 求前束范式的实例

(3) $\forall xF(x)\to\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$

解 $\quad \forall xF(x)\to\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$

$\Leftrightarrow \forall zF(z)\to\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$ 换名规则

$\Leftrightarrow \exists z\exists y(F(z)\to(G(x,y)\wedge\neg H(y)))$ 辖域收缩扩张规则

或

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\to\exists y(G(z,y)\wedge\neg H(y))$ 代替规则

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\to(G(z,y)\wedge\neg H(y)))$

# 求前束范式的实例

4) $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$

$\Leftrightarrow \neg\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

$\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x)$

$\Leftrightarrow \exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \exists x(P(x) \to Q(x))$

或

$\Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists y Q(y)$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y(P(x) \to Q(y))$

# 求前束范式的实例

5) $\forall x \forall y(\exists z(P(x,z) \wedge P(y,z)) \to \exists u Q(x,y,u))$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z(P(x,z) \wedge P(y,z) \to \exists u Q(x,y,u))$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z \exists u(P(x,z) \wedge P(y,z) \to Q(x,y,u))$

# 求前束范式的实例

$$6)\quad (\forall xF(x,y)\to\exists yG(y))\to\forall xH(x,y)$$

$$\Leftrightarrow(\forall xF(x,z)\to\exists yG(y))\to\forall xH(x,z)$$

$$\Leftrightarrow\exists x(F(x,z)\to\exists yG(y))\to\forall xH(x,z)$$

$$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x,z)\to G(y))\to\forall xH(x,z)$$

$$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x,z)\to G(y))\to\forall tH(t,z)$$

$$\Leftrightarrow\forall x\forall y((F(x,z)\to G(y))\to\forall tH(t,z))$$

$$\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall t((F(x,z)\to G(y))\to H(t,z))$$

# 求前束范式的实例

7) $\neg\forall x\{\exists y A(x,y) \rightarrow \exists x\forall y[B(x,y) \wedge \forall y(A(y,x) \rightarrow B(x,y))]\}$

$\Leftrightarrow \exists x\neg\{\neg\exists y A(x,y) \vee \exists x\forall y[B(x,y) \wedge \forall y(A(y,x) \rightarrow B(x,y))]\}$

**1.** 否定深入。

$\Leftrightarrow \exists x\{\exists y(A(x,y)) \wedge \forall x\exists y[\neg B(x,y) \vee \exists y\neg(A(y,x) \rightarrow B(x,y))]\}$

$\Leftrightarrow \exists x\{\exists y(A(x,y)) \wedge \forall u\exists r[\neg B(u,r) \vee \exists z\neg(A(z,u) \rightarrow B(u,z))]\}$

**2.** 改名，把量词提到前面。

$\Leftrightarrow \exists x\exists y\forall u\exists r\exists z\{(A(x,y)) \wedge [\neg B(u,r) \vee \neg(A(z,u) \rightarrow B(u,z))]\}$

# *Skolem*范式

- 设$G$是一个公式，$Q_1x_1\ldots Q_nx_nM$是与$G$等价的前束范式，其中$M$为合取范式形式。若$Q_r$是存在量词，并且它左边没有全称量词，则取异于出现在$M$中所有常量符号的常量符号$c$，并用$c$代替$M$中所有的$x_r$，然后在首标中删除$Q_rx_r$。
- 若$Q_{s1}, \ldots, Q_{sm}$是所有出现在$Q_rx_r$左边的全称量词($m\geq 1$，$1\leq s_1<s_2<\ldots<s_m<r$)，则取异于出现在$M$中所有函数符号的$m$元函数符号$f(x_{s1},\ldots,x_{sm})$，用$f(x_{s1},\ldots,x_{sm})$代替出现在$M$中的所有$x_r$，然后在首标中删除$Q_rx_r$。

# *Skolem*范式

- 对首标中的所有存在量词做上述处理后，得到一个在首标中没有存在量词的前束范式，这个前束范式就称为公式*G*的*Skolem*范式。其中用来代替$x_r$的那些常量符号和函数符号称为公式*G*的*Skolem*函数。

# 实例

- $G=\exists x\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w P(x, y, z, u, v, w)$

  用$a$代替$x$，
  用$f(y, z)$代替$u$，
  用$g(y, z, v)$代替$w$，
  得公式$G$的*Skolem*范式：

  $$\forall y\forall z\forall v P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))$$

# 实例

- 设$G=\forall x\exists yP(x, y)$，则$G$的*Skolem*范式为 $S=\forall xP(x, f(x))$
- 给定满足$S$的解释$I_1$如下：

  $D=\{1, 2\}$

  $\overline{f}(x)$: $f(1)=2$  $f(2)=1$

  $\overline{P}(x,y)$: $P(1,1)=1$  $P(1,2)=1$  $P(2,1)=1$  $P(2,2)=0$

  则$I_1$是满足$S$的解释，且不看对函数的解释，也是满足$G$的解释。

# 实例

- 给定满足$G$的解释$I_2$如下：

  $D$={1，2}

  $\overline{P}(x,y)$: $P(1,1)=1$ $P(1,2)=1$ $P(2,1)=1$ $P(2,2)=0$

  现在$I_2$还不是$S$的解释，因为有函数没有指定，扩充$I_2$为$I_2$’，使其包括对函数的指定：

  $\overline{f}(x)$: $f(1)=2$ $f(2)=1$

  则$I_2$’不看对函数的解释是满足$G$的解释，也是满足$S$的解释，

注意

$G$与$S$可满足性等值。

# 实例

- 但是满足$G$的解释$I$，不一定满足$S$，因为在扩充时，可随意指定*Skolem*函数的值。
- 例如，$G=\exists xP(x)$，$S=P(a)$

  令$G$和$S$的解释$I$如下：

  $D=\{2，3\}$，

  $\overline{a}=2$

  $\overline{P}(x)$: $P(2)=0$ $P(3)=1$

  则$I$满足$G$，但$I$弄假$S$。

注意

$G$与$S$不等值，但$G$与$S$的可满足性等值

# 5.3 一阶逻辑的推理理论

- 推理的形式结构

  1. $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$

     若此式是永真式, 则称推理正确, 记作

     $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

  2. 前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$

     结论: $B$

- 推理定理: 永真式的蕴涵式

# 推理定理

- 第一组 命题逻辑推理定理的代换实例

  如, $\forall xF(x)\wedge\exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$

- 第二组 基本等值式生成的推理定理

  如, $\forall xF(x) \Rightarrow\neg\neg\forall xF(x)$, $\neg\neg\forall xF(x) \Rightarrow\forall xF(x)$

  $\neg\forall xF(x)\Rightarrow\exists x\neg F(x)$, $\exists x\neg F(x) \Rightarrow \neg\forall xF(x)$

- 第三组 其他常用推理定律

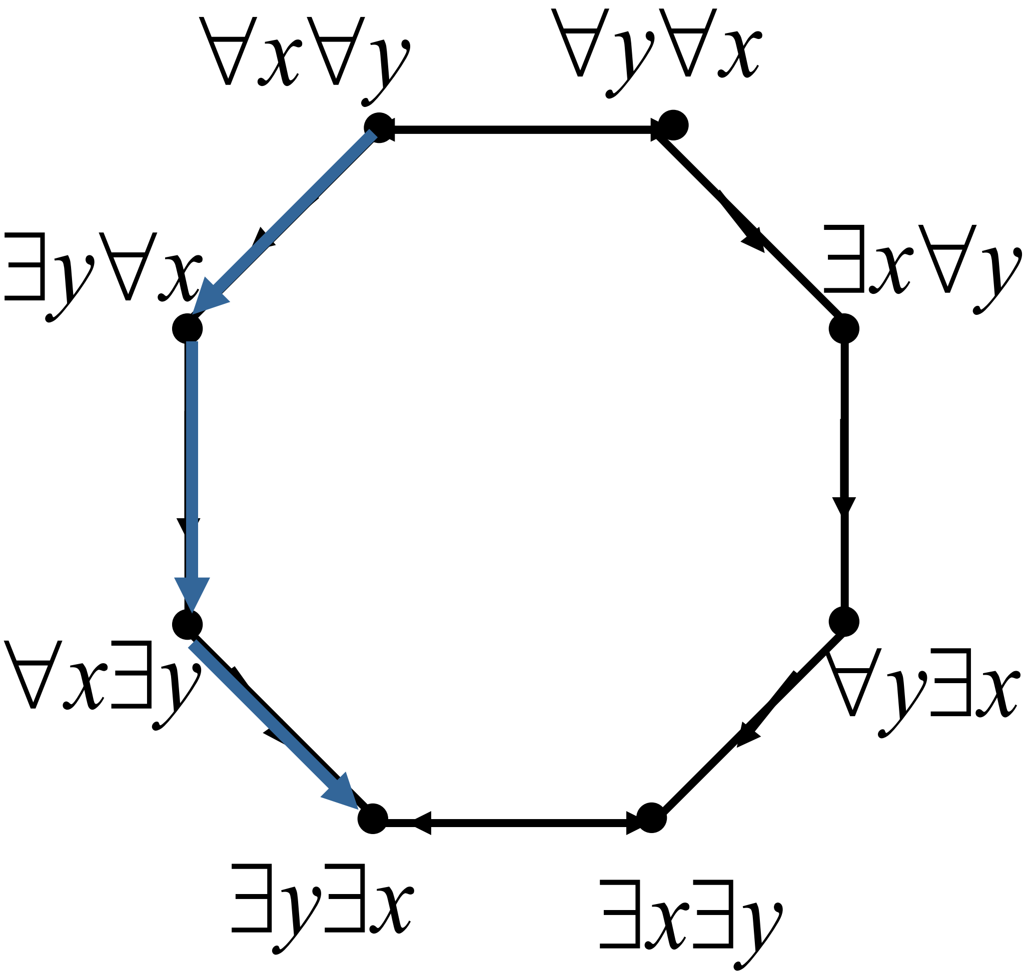
  (1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

  (2) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

  (3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

  (4) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

# 含有多个变元的等价式和蕴含式




**$\forall x\forall yA(x,y)$:甲村与乙村所有人同姓.**

**$\exists y\forall xA(x,y)$:乙村有一个人，甲村的人都和他同姓.**

**$\forall x\exists yA(x,y)$:甲村所有人，乙村都有人和他同姓.**

**$\exists y\exists xA(x,y)$:乙村与甲村有人同姓.**

# 含有多个变元的等价式和蕴含式

$$\forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x P(x,y)$$

$$\forall x \forall y P(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$$

$$\forall y \forall x P(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$$

$$\exists y \forall x P(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x,y)$$

$$\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$$

$$\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x,y)$$

$$\forall y \exists x P(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y P(x,y)$$

$$\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x P(x,y)$$

# 全称量词消去规则

设前提$\Gamma=\{A_1,A_2,\ldots A_k\}$

1. 全称量词消去规则(∀-)

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)} \quad 或 \quad \frac{\forall x A(x)}{\therefore A(c)}$$

其中$x,y$是个体变项符号, $c$是个体常项符号, 且在$A$中$x$不在$\forall y$和$\exists y$的辖域内自由出现。

# 重要提示

- 反例1：设个体域为R, $F(x,y)$:$x>y$，$\forall x\exists yF(x,y)$为真命题。
- "证明"

  ① $\forall x\exists yF(x,y)$ 前提引入

  ② $\exists yF(y,y)$ ①$\forall$-
- 结论为假命题。
- 原因：在$\exists yF(x,y)$中$x$自由出现在$\exists y$的辖域$F(x,y)$内

# 全称量词引入规则

**2.** 全称量词引入规则($\forall +$)

$$\frac{A(x)}{\therefore \forall x A(x)}$$

其中$x$是个体变项符号, 且不在前提的任何公式中自由出现

# 重要提示

- 反例2：设个体域为整数集合Z， $P(x)$:$x$是偶数，$Q(x)$:$x$能被2整除，则$P(x)\to Q(x)$为真命题， $P(x)$真值不定， $\forall xQ(x)$为假命题。
- “证明”：

① $P(x)\to Q(x)$ 前提引入

② $P(x)$ 前提引入

③ $Q(x)$ ①②假言推理

④ $\forall xQ(x)$ ③$\forall$+

- 错误原因: 在④使用$\forall$+规则, 而$x$在前提的公式中自由出现.

# 存在量词消去规则

**3. 存在量词消去规则(∃-)**

$$\frac{A(x)\to B}{\therefore \exists x A(x)\to B} \quad \text{或} \quad \frac{A(c)\to B}{\therefore \exists x A(x)\to B}$$

其中$x$是个体变项符号, 且不在前提的任何公式和$B$中自由出现，$c$是个体常项符号, 且不在前提的任何公式和$A$、$B$中出现

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x A(x)\\ A(x)\to B\end{array}}{\therefore B} \quad \text{或} \quad \frac{\begin{array}{c}\exists x A(x)\\ A(c)\to B\end{array}}{\therefore B}$$

# 重要提示

- 反例3：取个体域为整数集合Z，$A(y)$：$y>5$， 显然$A(y)\to A(y)$为真命题。
- “证明”

  ① $A(y)\to A(y)$　　前提引入

  ② $\exists yA(y)\to A(y)$　　①∃-

  ③ $\exists xA(x)\to A(y)$　　②换名
- 产生错误的原因是$y$在蕴涵式的后件中自由出现。

# 存在量词引入规则

**4. 存在量词引入规则(∃+)**

$$\frac{A(y)}{\therefore \exists x A(x)} \quad \text{或} \quad \frac{B \to A(y)}{\therefore B \to \exists x A(x)}$$

$$\frac{A(c)}{\therefore \exists x A(x)} \quad \text{或} \quad \frac{B \to A(c)}{\therefore B \to \exists x A(x)}$$

其中$x,y$是个体变项符号, $c$是个体常项符号, 且在$A$中$y$和$c$不在$\forall x$和$\exists x$的辖域内自由出现.

# 重要提示

- **反例4：** 取个体域为整数集合Z，$B(x,y)$:$x>y$，$\forall y\exists xB(x,y)$为真命题。

  “证明”：

  ① $\forall y\exists xB(x,y)$ 前提引入

  ② $\exists xB(x,y)$ ①$\forall$-

  ③ $\exists x\exists xB(x,x)$ ②$\exists$+

  ④ $\exists xB(x,x)$ ③置换

- 得到一个假命题，原因是$y$在$\exists x$的辖域内自由出现。

# 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

- **定义5.3 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$**定义如下:

1. 字母表. 同一阶语言$\mathscr{L}$ 的字母表
2. 合式公式. 同$\mathscr{L}$的合式公式
3. 推理规则:
   (1) 前提引入规则
   (2) 结论引入规则
   (3) 置换规则
   (4) 假言推理规则
   (5) 附加规则
   (6) 化简规则
   (7) 拒取式规则

# 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

**(8)** 假言三段论规则

**(9)** 析取三段论规则

**(10)** 构造性二难推理规则

**(11)** 合取引入规则

**(12)** ∀-规则

**(13)** ∀+规则

**(14)** ∃-规则

**(15)** ∃+规则

推理的证明

# 构造推理证明的实例

- **例5** 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中构造下面推理的证明, 取个体域R: 任何自然数都是整数. 存在自然数. 所以, 存在整数.
- 解　设$F(x)$:$x$是自然数, $G(x)$:$x$是整数.

  前提: $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$, $\exists xF(x)$

  结论: $\exists xG(x)$

# 构造推理证明的实例

证明:

| | |
|---|---|
| ① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ | 前提引入 |
| ② $F(x)\rightarrow G(x)$ | ①∀- |
| ③ $F(x)\rightarrow \exists x G(x)$ | ②∃+ |
| ④ $\exists x F(x)$ | 前提引入 |
| ⑤ $\exists x G(x)$ | ③④∃- |

# 构造推理证明的实例

- **例6** 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中构造下面推理的证明, 取个体域R:不存在能表示成分数的无理数. 有理数都能表示成分数.

  所以, 有理数都不是无理数.
- 解:设$F(x)$:$x$是无理数, $G(x)$:$x$是有理数, $H(x)$:$x$能表示成分数.

  前提: $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$, $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

  结论: $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

# 构造推理证明的实例

证明:

| | |
|---|---|
| ① $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$ | 前提引入 |
| ② $\forall x(\neg F(x)\vee\neg H(x))$ | ①置换 |
| ③ $\forall x(F(x)\to\neg H(x))$ | ②置换 |
| ④ $F(x)\to\neg H(x)$ | ③$\forall$- |
| ⑤ $\forall x(G(x)\to H(x))$ | 前提引入 |
| ⑥ $G(x)\to H(x)$ | ⑤$\forall$- |
| ⑦ $H(x)\to\neg F(x)$ | ④置换 |
| ⑧ $G(x)\to\neg F(x)$ | ⑥⑦假言三段论 |
| ⑨ $\forall x(G(x)\to\neg F(x))$ | ⑧$\forall$+ |

# 构造推理证明的实例

- **例7** 前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)), \exists x(F(x)\wedge H(x))$
  结论：$\exists x(G(x)\wedge H(x))$
- 证法一：

1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 前提引入
2) $F(x)\rightarrow G(x)$ 1)$\forall$-
3) $F(x)\wedge H(x)\rightarrow F(x)$ 化简
4) $F(x)\wedge H(x)\rightarrow H(x)$ 化简
5) $F(x)\wedge H(x)\rightarrow G(x)$ 2)3)假言三段论
6) $(F(x)\wedge H(x)\rightarrow H(x)) \wedge (F(x)\wedge H(x)\rightarrow G(x))$ 4)5)合取

# 构造推理证明的实例

7) $(F(x)\wedge H(x)) \rightarrow (H(x)\wedge G(x))$ 6)置换

8) $(F(x)\wedge H(x)) \rightarrow \exists x(H(x)\wedge G(x))$ 7)$\exists$+

9) $\exists x(F(x)\wedge H(x))$ 前提

10) $\exists x(H(x)\wedge G(x))$ 8)9) $\exists$-

# 构造推理证明的实例

- **例7** 前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)), \exists x(F(x)\wedge H(x))$
  结论：$\exists x(G(x)\wedge H(x))$
- 证法二：

1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 前提引入
2) $F(x)\rightarrow G(x)$ 1)$\forall$-
3) $\neg F(x)\vee G(x)$ 2)置换
4) $\neg F(x)\vee G(x)\vee\neg H(x)$ 3)附加
5) $(\neg F(x)\vee G(x)\vee\neg H(x)) \wedge (\neg F(x)\vee\neg H(x)\vee H(x))$ 4)置换
6) $(F(x)\wedge H(x)) \rightarrow (H(x)\wedge G(x))$ 5)置换

# 构造推理证明的实例

7) $(F(x) \wedge H(x)) \rightarrow \exists x(H(x) \wedge G(x))$ 7)∃+

8) $\exists x(F(x) \wedge H(x))$ 前提

9) $\exists x(H(x) \wedge G(x))$ 7)8)∃-