

# 第八章 函数

## 主要内容

### 1、函数的定义与性质

- 函数定义
- 函数性质

### 2、函数运算

- 函数的逆
- 函数的合成

### 3、双射函数与集合的基数

# 8.1 函数的定义与性质

## 主要内容

### 函数定义与相关概念

- 函数定义
- 函数相等
- 从 $A$ 到 $B$ 的函数 $f:A\rightarrow B$
- $B^A$
- 函数的像与完全原像

### 函数的性质

- 单射、满射、双射函数的定义与实例
- 构造双射函数

### 某些重要的函数

# 函数定义

**定义8.1** 设  $F$  为二元关系, 若  $\forall x \in \text{dom}F$  都存在唯一的  $y \in \text{ran}F$  使  $xFy$  成立, 则称  $F$  为**函数**.

对于函数  $F$ , 如果有  $xFy$ , 则记作  $y=F(x)$ , 并称  $y$  为  $F$  在  $x$  的**值**.

例:  $F_1 = \{ \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \langle x_3, y_2 \rangle \}$

$F_2 = \{ \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_1, y_2 \rangle \}$

$F_1$  是函数,  $F_2$  不是函数.

# 函数定义

**定义8.2** 设 $F, G$ 为函数, 则

$$F=G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$$

如果两个函数 $F$ 和 $G$ 相等, 一定满足下面两个条件:

(1)  $\text{dom}F = \text{dom}G$

(2)  $\forall x \in \text{dom}F = \text{dom}G$  都有  $F(x) = G(x)$

函数 $F(x) = (x^2 - 1)/(x + 1)$ ,  $G(x) = x - 1$ 不相等,  
因为  $\text{dom}F \subset \text{dom}G$ .

# 从 $A$ 到 $B$ 的函数

**定义8.3** 设 $A, B$ 为集合, 如果

$f$ 为函数,  $\text{dom}f=A$ ,  $\text{ran}f\subseteq B$ ,

则称 $f$ 为**从 $A$ 到 $B$ 的函数**, 记作  $f: A\rightarrow B$ .

例:  $f: \mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ ,  $f(x)=2^x$  是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的函数,

$g: \mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ ,  $g(x)=2$  也是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的函数.

**定义8.4** 所有从 $A$ 到 $B$ 的函数的集合记作 $B^A$ , 符号化表示为  $B^A = \{f \mid f: A\rightarrow B\}$ .

$|A|=m$ ,  $|B|=n$ , 且 $m, n>0$ ,  $|B^A|=n^m$ .

$A=\emptyset$ , 则 $B^A=B^\emptyset=\{\emptyset\}$ .

$A\neq\emptyset$ 且 $B=\emptyset$ , 则 $B^A=\emptyset^A=\emptyset$ .

# 实例

**例1** 设 $A=\{1,2,3\}$ ,  $B=\{a,b\}$ , 求 $B^A$ .

**解**  $B^A=\{f_0, f_1, \dots, f_7\}$ , 其中

$$f_0 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle \}$$

$$f_1 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle \}$$

$$f_2 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle \}$$

$$f_3 = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle \}$$

$$f_4 = \{ \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle \}$$

$$f_5 = \{ \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle \}$$

$$f_6 = \{ \langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle \}$$

$$f_7 = \{ \langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle \}$$

# 函数的像和完全原像

**定义8.5** 设函数  $f: A \rightarrow B, A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$

(1)  $A_1$  在  $f$  下的像  $f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$ , 当  $A_1 = A$  时称  $f(A)$  为函数的像

(2)  $B_1$  在  $f$  下的完全原像  $f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$

注意:

- 函数值与像的区别: 函数值  $f(x) \in B$ , 像  $f(A_1) \subseteq B$ ;
- 一般说来  $f^{-1}(f(A_1)) \neq A_1$ , 但是  $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$ .

例: 设  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , 且  $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{若 } x \text{ 为偶数} \\ x+1 & \text{若 } x \text{ 为奇数} \end{cases}$

令  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{2\}$ , 那么有

$$f(A) = f(\{0, 1\}) = \{f(0), f(1)\} = \{0, 2\}$$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{2\}) = \{1, 4\}$$

# 函数的性质

**定义8.6** 设  $f: A \rightarrow B$ ,

(1) 若  $\text{ran} f = B$ , 则称  $f: A \rightarrow B$  是**满射**的;

(2) 若  $\forall y \in \text{ran} f$  都存在唯一的  $x \in A$  使得  $f(x) = y$ , 则称  $f: A \rightarrow B$  是**单射**的;

(3) 若  $f: A \rightarrow B$  既是满射又是单射的, 则称  $f: A \rightarrow B$  是**双射**的

**例2** 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 1$

(2)  $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ ,  $\mathbb{Z}^+$  为正整数集

(3)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

(4)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$

(5)  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = (x^2 + 1)/x$ , 其中  $\mathbb{R}^+$  为正实数集.

# 例题解答

解:

(1)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 1$

在 $x=1$ 取得极大值0. 既不是单射也不是满射的.

(2)  $f: \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln x$

是单调上升的, 是单射的. 但不满射,  $\text{ran } f = \{\ln 1, \ln 2, \dots\}$ .

(3)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

是满射的, 但不是单射的, 例如 $f(1.5) = f(1.2) = 1$ .

(4)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$

是满射、单射、双射的, 因为它是单调函数并且 $\text{ran } f = \mathbf{R}$ .

(5)  $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = (x^2 + 1)/x$

有极小值 $f(1) = 2$ . 该函数既不是单射的也不是满射的.

# 实例

**例3** 对于给定的集合 $A$ 和 $B$ 构造双射函数  $f:A\rightarrow B$

(1)  $A=P(\{1,2,3\}), B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

(2)  $A=\mathbb{Z}, B=\mathbb{N}$

(3)  $A=[0,1], B=[1/4,1/2]$

(4)  $A=[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  ,  $B=[-1,1]$

# 解答

$$(1) A=P(\{1,2,3\}), B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$$

解:

$$A=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

$$B=\{f_0, f_1, \dots, f_7\}, \text{ 其中}$$

$$f_0=\{\langle 1,0 \rangle, \langle 2,0 \rangle, \langle 3,0 \rangle\}, \quad f_1=\{\langle 1,0 \rangle, \langle 2,0 \rangle, \langle 3,1 \rangle\},$$

$$f_2=\{\langle 1,0 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,0 \rangle\}, \quad f_3=\{\langle 1,0 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle\},$$

$$f_4=\{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,0 \rangle, \langle 3,0 \rangle\}, \quad f_5=\{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,0 \rangle, \langle 3,1 \rangle\},$$

$$f_6=\{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,0 \rangle\}, \quad f_7=\{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}.$$

$$\text{令 } f:A \rightarrow B,$$

$$f(\emptyset)=f_0, \quad f(\{1\})=f_1, \quad f(\{2\})=f_2, \quad f(\{3\})=f_3,$$

$$f(\{1,2\})=f_4, \quad f(\{1,3\})=f_5, \quad f(\{2,3\})=f_6, \quad f(\{1,2,3\})=f_7$$

# 解答

(2)  $A=\mathbb{Z}, B=\mathbb{N}$

将 $\mathbb{Z}$ 中元素以下列顺序排列并与 $\mathbb{N}$ 中元素对应：

$\mathbb{Z}$ : 0 -1 1 -2 2 -3 3 ...

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$\mathbb{N}$ : 0 1 2 3 4 5 6 ...

这种对应所表示的函数是：

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

# 解答

$$(3) A=[0, 1], B=[1/4, 1/2]$$

$$\text{令 } f:[0,1] \rightarrow [1/4, 1/2],$$

$$f(x)=(x+1)/4$$

$$(4) A = \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right], B = [-1, 1]$$

$$\text{令 } f: [\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow [-1, 1]$$

$$f(x) = \sin x$$

# 某些重要函数

## 定义8.7

- (1) 设  $f:A \rightarrow B$ , 如果存在  $c \in B$  使得对所有的  $x \in A$  都有  $f(x)=c$ , 则称  $f:A \rightarrow B$  是常函数.
  - (2) 称  $A$  上的恒等关系  $I_A$  为  $A$  上的恒等函数, 对所有的  $x \in A$  都有  $I_A(x)=x$ .
  - (3) 设  $\langle A, \leq \rangle, \langle B, \leq \rangle$  为偏序集,  $f:A \rightarrow B$ , 如果对任意的  $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$ , 就有  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , 则称  $f$  为单调递增的;  
如果对任意的  $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$ , 就有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称  $f$  为严格单调递增的.
- 类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数.

# 某些重要函数

(4) 设 $A$ 为集合, 对于任意的 $A' \subseteq A$ ,  
 $A'$ 的**特征函数**  $\chi_{A'} : A \rightarrow \{0,1\}$  定义为

$$\chi_{A'}(a)=1, \text{ 当 } a \in A'$$

$$\chi_{A'}(a)=0, \text{ 当 } a \in A - A'$$

(5) 设 $R$ 是 $A$ 上的等价关系, 令

$$g: A \rightarrow A/R$$

$$g(a)=[a], \forall a \in A$$

称  $g$  是从  $A$  到商集  $A/R$  的**自然映射**.

## 实例4

(1) 偏序集  $\langle P(\{a,b\}), R_{\subseteq} \rangle, \langle \{0,1\}, \leq \rangle,$

$R_{\subseteq}$  为包含关系,

$\leq$  为一般的小于等于关系,

令

$$f: P(\{a,b\}) \rightarrow \{0,1\},$$

$$f(\emptyset)=f(\{a\})=f(\{b\})=0, f(\{a,b\})=1,$$

则  $f$  是单调递增的, 但不是严格单调递增的.

## 实例4

(2)  $A$ 的每一个子集  $A'$ 都对应于一个特征函数,  
不同的子集对应于不同的特征函数.

例如 $A=\{a,b,c\}$ , 则有

$$\chi_{\emptyset}=\{<a,0>,<b,0>,<c,0>\},$$

$$\chi_{\{a,b\}}=\{<a,1>,<b,1>,<c,0>\}.$$

## 实例4

(3) 不同的等价关系确定不同的自然映射,  
恒等关系确定的自然映射是双射,  
其他自然映射一般来说只是满射.

例如

$$A=\{1,2,3\}, \quad R=\{<1,2>, <2,1>\} \cup I_A$$

$$g: A \rightarrow A/R,$$

$$g(1)=g(2)=\{1,2\}, \quad g(3)=\{3\}.$$

## 8.2 函数的复合与反函数

### 主要内容

- 复合函数基本定理
- 函数的复合运算与函数性质
- 反函数的存在条件
- 反函数的性质

# 复合函数基本定理

**定理8.1** 设 $F, G$ 是函数, 则 $F \circ G$ 也是函数, 且满足

$$(1) \text{ dom}(F \circ G) = \{x \mid x \in \text{dom} F \wedge F(x) \in \text{dom} G\}$$

$$(2) \forall x \in \text{dom}(F \circ G), \text{ 有 } F \circ G(x) = G(F(x))$$

证明: 先证明 $F \circ G$ 是函数.

因为 $F, G$ 是关系, 所以 $F \circ G$ 也是关系. 若对某个 $x \in \text{dom}(F \circ G)$ 有 $x F \circ G y_1$ 和 $x F \circ G y_2$ , 则

$$\langle x, y_1 \rangle \in F \circ G \wedge \langle x, y_2 \rangle \in F \circ G$$

$$\Rightarrow \exists t_1 (\langle x, t_1 \rangle \in F \wedge \langle t_1, y_1 \rangle \in G) \wedge \exists t_2 (\langle x, t_2 \rangle \in F \wedge \langle t_2, y_2 \rangle \in G)$$

$$\Rightarrow \exists t_1 \exists t_2 (t_1 = t_2 \wedge \langle t_1, y_1 \rangle \in G \wedge \langle t_2, y_2 \rangle \in G) \quad (F \text{ 为函数})$$

$$\Rightarrow y_1 = y_2 \quad (G \text{ 为函数})$$

所以  $F \circ G$  为函数

# 证明

任取 $x$ ,

$$x \in \text{dom}(F \circ G)$$

$$\Rightarrow \exists t \exists y (<x, t> \in F \wedge <t, y> \in G)$$

$$\Rightarrow \exists t (x \in \text{dom} F \wedge t = F(x) \wedge t \in \text{dom} G)$$

$$\Rightarrow x \in \{ x \mid x \in \text{dom} F \wedge F(x) \in \text{dom} G \}$$

任取 $x$ ,

$$x \in \text{dom} F \wedge F(x) \in \text{dom} G$$

$$\Rightarrow <x, F(x)> \in F \wedge <F(x), G(F(x))> \in G$$

$$\Rightarrow <x, G(F(x))> \in F \circ G$$

$$\Rightarrow x \in \text{dom}(F \circ G) \wedge F \circ G(x) = G(F(x))$$

所以(1) 和(2) 得证

# 推论

**推论1** 设 $F, G, H$ 为函数, 则 $(F \circ G) \circ H$ 和 $F \circ (G \circ H)$ 都是函数,  
且
$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

证明: 由上述定理和运算满足结合律得证.

**推论2** 设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ , 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ , 且 $\forall x \in A$ 都有
$$f \circ g(x) = g(f(x)).$$

证明: 由上述定理知 $f \circ g$ 是函数, 且

$$\begin{aligned}\text{dom}(f \circ g) &= \{x \mid x \in \text{dom} f \wedge f(x) \in \text{dom} g\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B\} = A\end{aligned}$$

$$\text{ran}(f \circ g) \subseteq \text{rang} \subseteq C$$

因此 $f \circ g: A \rightarrow C$ , 且 $\forall x \in A$ 有 $f \circ g(x) = g(f(x))$ .

# 函数复合与函数性质

**定理8.2** 设  $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$

- (1) 如果  $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$  是满射的, 则  $f \circ g:A \rightarrow C$  也是满射的
- (2) 如果  $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$  是单射的, 则  $f \circ g:A \rightarrow C$  也是单射的
- (3) 如果  $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$  是双射的, 则  $f \circ g:A \rightarrow C$  也是双射的

证明:

- (1) 任取  $c \in C$ , 由  $g:B \rightarrow C$  的满射性,  $\exists b \in B$  使得  $g(b)=c$ .  
对于这个  $b$ , 由  $f:A \rightarrow B$  的满射性,  $\exists a \in A$  使得  $f(a)=b$ .  
由合成定理有

$$f \circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c,$$

从而证明了  $f \circ g:A \rightarrow C$  是满射的.

# 证明

(2) 假设存在  $x_1, x_2 \in A$  使得

$$f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$$

由合成定理有

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

因为  $g: B \rightarrow C$  是单射的, 故  $f(x_1) = f(x_2)$ . 又由于  $f: A \rightarrow B$  是单射的, 所以  $x_1 = x_2$ . 从而证明  $f \circ g: A \rightarrow C$  是单射的.

(3) 由(1)和(2)得证.

**注意:** 定理逆命题不为真, 即如果  $f \circ g: A \rightarrow C$  是单射(或满射、双射)的, 不一定有  $f: A \rightarrow B$  和  $g: B \rightarrow C$  都是单射(或满射、双射)的.

# 实例

考虑集合  $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ ,  $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ ,  $C=\{c_1,c_2,c_3\}$ .

令

$$f=\{<a_1,b_1>, <a_2,b_2>, <a_3,b_3>\}$$

$$g=\{<b_1,c_1>, <b_2,c_2>, <b_3,c_3>, <b_4,c_3>\}$$

$$f \circ g=\{<a_1,c_1>, <a_2,c_2>, <a_3,c_3>\}$$

那么  $f \circ g: A \rightarrow C$  是单射的、满射的

$f: A \rightarrow B$  是单射的,  $g: B \rightarrow C$  不是单射的

$g: B \rightarrow C$  是满射的,  $f: A \rightarrow B$  不是满射的

**定理8.3** 设  $f: A \rightarrow B$ , 则  $f = f \circ I_B = I_A \circ f$

# 反函数

## 反函数存在的条件

- (1) 任给函数 $f$ , 它的逆 $f^{-1}$ 不一定是函数, 只是一个二元关系.
- (2) 任给单射函数  $f:A\rightarrow B$ , 则 $f^{-1}$ 是函数, 且是从 $\text{ran}f$ 到 $A$ 的双射函数, 但不一定是从 $B$ 到 $A$ 的双射函数
- (3) 对于双射函数  $f:A\rightarrow B$ ,  $f^{-1}:B\rightarrow A$ 是从 $B$ 到 $A$ 的双射函数.

**定理8.4** 设  $f:A\rightarrow B$ 是双射的, 则 $f^{-1}:B\rightarrow A$ 也是双射的.

证明思路:

先证明  $f^{-1}:B\rightarrow A$ , 即 $f^{-1}$ 是函数, 且 $\text{dom}f^{-1}=B$ ,  $\text{ran}f^{-1}=A$ .  
再证明 $f^{-1}:B\rightarrow A$ 的双射性质.

对于双射函数 $f:A\rightarrow B$ , 称  $f^{-1}:B\rightarrow A$ 是它的**反函数**.

# 证明

证明：因为  $f$  是函数, 所以  $f^{-1}$  是关系, 且

$$\text{dom } f^{-1} = \text{ran } f = B, \quad \text{ran } f^{-1} = \text{dom } f = A$$

对于任意的  $x \in B = \text{dom } f^{-1}$ , 假设有  $y_1, y_2 \in A$  使得

$$\langle x, y_1 \rangle \in f^{-1} \wedge \langle x, y_2 \rangle \in f^{-1}$$

成立, 则由逆的定义有

$$\langle y_1, x \rangle \in f \wedge \langle y_2, x \rangle \in f$$

根据  $f$  的单射性可得  $y_1 = y_2$ , 从而证明了  $f^{-1}$  是函数, 且是满射的.

若存在  $x_1, x_2 \in B$  使得  $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) = y$ , 从而有

$$\langle x_1, y \rangle \in f^{-1} \wedge \langle x_2, y \rangle \in f^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle y, x_1 \rangle \in f \wedge \langle y, x_2 \rangle \in f \Rightarrow x_1 = x_2$$

从而证明了  $f^{-1}$  是单射的.

# 反函数的性质

## 定理8.5

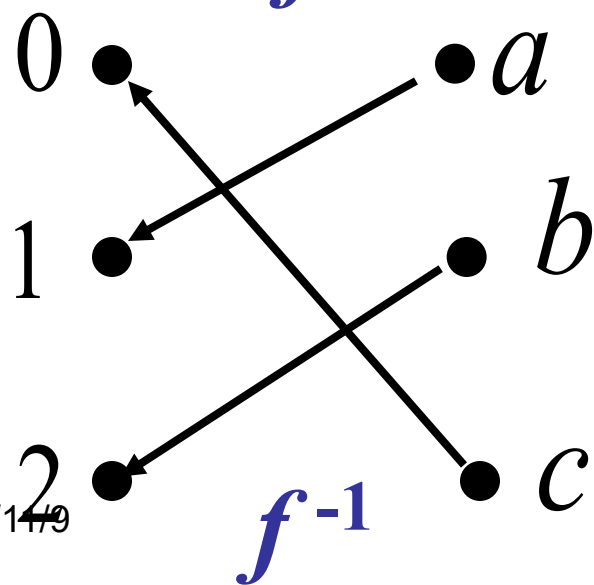
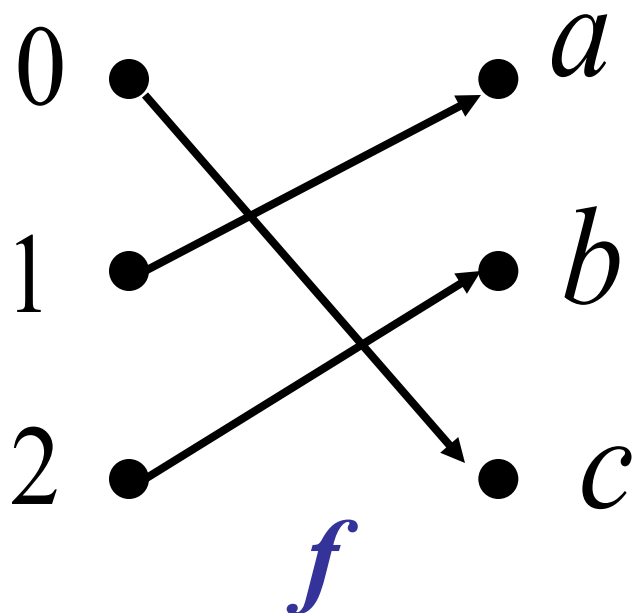
(1) 设  $f:A \rightarrow B$  是双射的, 则  $f^{-1} \circ f = I_B$ ,  $f \circ f^{-1} = I_A$

(2) 对于双射函数  $f:A \rightarrow A$ , 有  $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_A$

证明思路:

根据定理可知  $f^{-1}:B \rightarrow A$  也是双射的, 由合成基本定理可知  $f^{-1} \circ f:B \rightarrow B$ ,  $f \circ f^{-1}:A \rightarrow A$ , 且它们都是恒等函数.

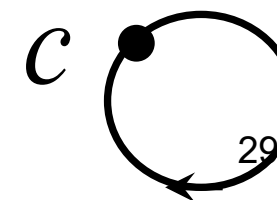
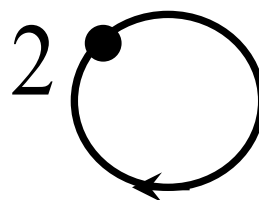
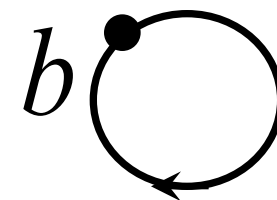
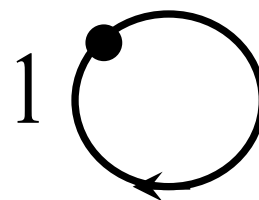
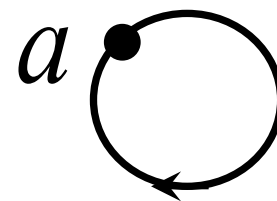
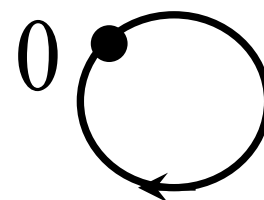
# 实例



求:  $f \circ f^{-1}$  及  $f^{-1} \circ f$

解:

$$f \circ f^{-1} = I_A \quad f^{-1} \circ f = I_B$$



# 求解

**例5** 设  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = x + 2$$

求  $f \circ g, g \circ f$ . 如果  $f$  和  $g$  存在反函数, 求出它们的反函数.

解:  $f \circ g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

$g \circ f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (x + 2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

# 求解

**例5** 设  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = x + 2$$

求  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ . 如果  $f$  和  $g$  存在反函数, 求出它们的反函数.

解:

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  不是双射的, 不存在反函数.

$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  是双射的, 它的反函数是  $g^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  
 $g^{-1}(x) = x - 2$ .

## 8.3 双射函数与集合的基数

### 主要内容

- 集合的等势及其性质
- 重要的等势或不等势的结果
- 集合的优势及其性质
- 集合的基数
- 可数集

# 集合的等势

**定义8.8** 设 $A, B$ 是集合, 如果存在着从 $A$ 到 $B$ 的双射函数, 就称 $A$ 和 $B$ 是**等势**的, 记作 $A \approx B$ . 如果 $A$ 不与 $B$ 等势, 则记作 $A \not\approx B$ .

集合等势的实例:

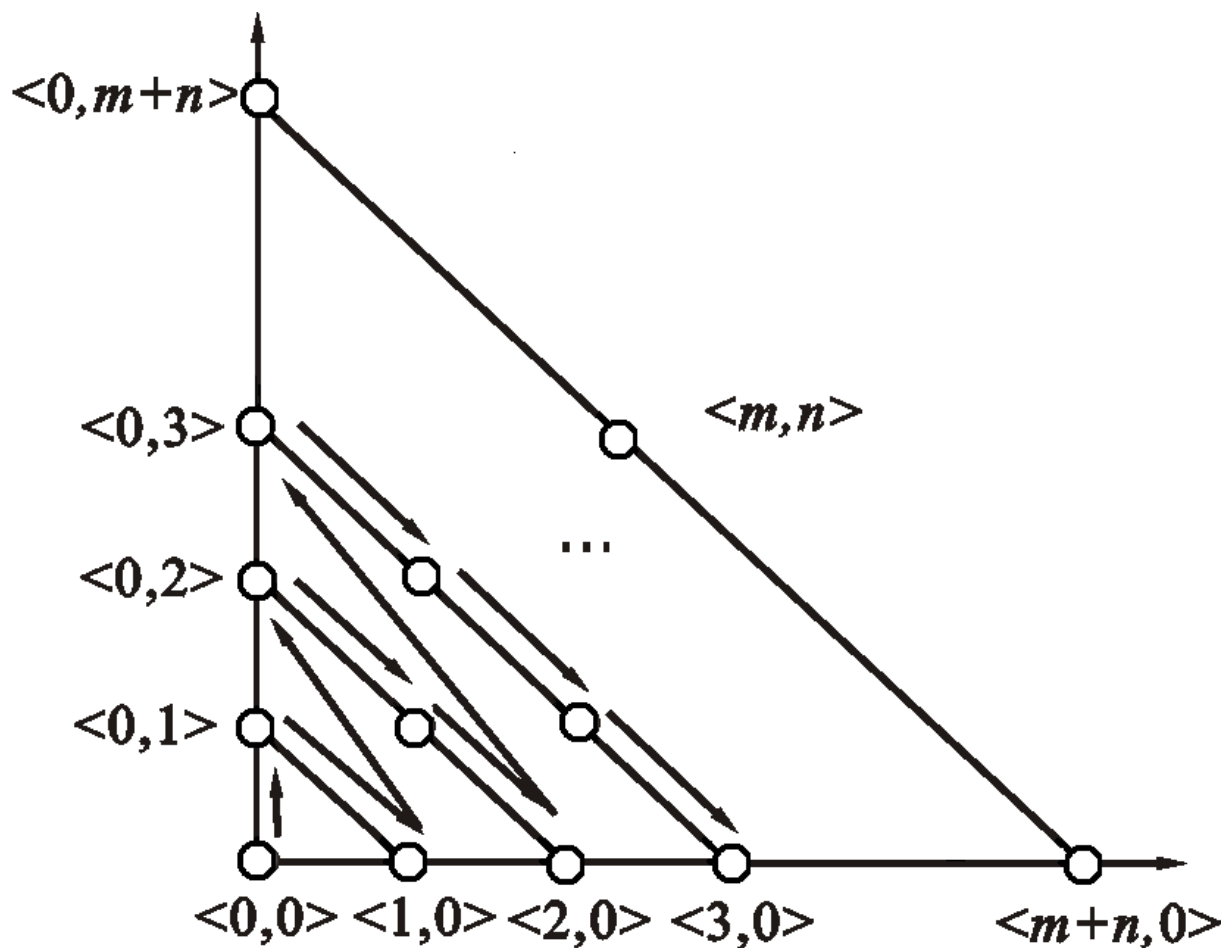
**例6** (1)  $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$ .

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

则 $f$ 是 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{N}$ 的双射函数. 从而证明了 $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$ .

# 集合等势的实例: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

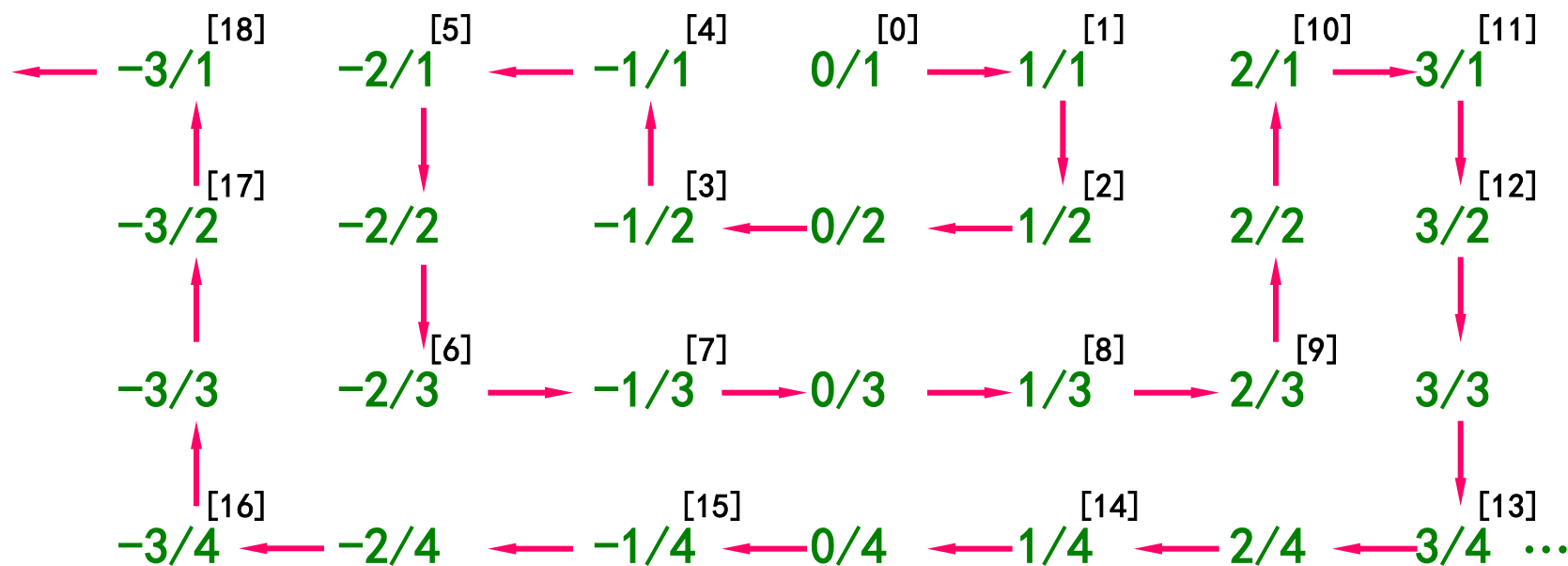
$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ .  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 中所有的元素排成有序图形



$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(\langle m, n \rangle) = \frac{(m+n+1)(m+n)}{2} + m$$

# 集合等势的实例: $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ . 双射函数  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ , 其中  $f(n)$  是  $[n]$  下方的有理数.



# 实数集合的等势

(4)  $(0,1) \approx \mathbf{R}$ . 其中实数区间  $(0,1) = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 0 < x < 1\}$ .

令

$$f : (0,1) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \tan \frac{2x-1}{2} \pi$$

# 实数集合的等势

(5)  $[0,1] \approx (0,1)$ .

其中 $(0,1)$ 和 $[0,1]$ 分别为实数开区间和闭区间.

令  $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & x = 0 \\ 1/2^2 & x = 1 \\ 1/2^{n+2} & x = 1/2^n, n = 1, 2, \dots \\ x & \text{其它 } x \end{cases}$$

# 实数集合的等势

(6) 对任何  $a, b \in \mathbb{R}, a < b, [0,1] \approx [a,b]$ ,

定义双射函数  $f:[0,1] \rightarrow [a,b]$ ,

构造通过点  $(0,a)$  到  $(1,b)$  的直线，得直线方程

$$f(x) = (b-a)x + a$$

或者，构造通过点  $(0,b)$  到  $(1,a)$  的直线，得直线方程

$$f(x) = (a-b)x + b$$

类似地可以证明：

对任何  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ , 有  $(0,1) \approx (a,b)$ .

# 实例

**例7** 设 $A$ 为任意集合, 则 $P(A) \approx \{0,1\}^A$ .

证明: 如下构造从 $P(A)$  到  $\{0,1\}^A$  的函数

$$f: P(A) \rightarrow \{0,1\}^A, \quad f(A') = \chi_{A'}, \quad \forall A' \in P(A).$$

其中 $\chi_{A'}$ 是集合 $A'$ 的特征函数. 易证  $f$  是单射的.

对于任意的  $g \in \{0,1\}^A$ , 那么有  $g: A \rightarrow \{0,1\}$ . 令

$$B = \{ x \mid x \in A \wedge g(x) = 1 \}$$

则 $B \subseteq A$ , 且 $\chi_B = g$ , 即 $\exists B \in P(A), f(B) = g$ .

从而证明了 $f$  是满射的.

由等势定义得  $P(A) \approx \{0,1\}^A$ .

# 等势的性质

**定理8.6** 设 $A, B, C$ 是任意集合,

(1)  $A \approx A$ .

(2) 若 $A \approx B$ , 则 $B \approx A$ .

(3) 若 $A \approx B$ ,  $B \approx C$ , 则 $A \approx C$ .

即在集合族上, 等势关系是一个等价关系。

证明思路: 利用等势的定义.

(1)  $I_A$ 是从 $A$ 到 $A$ 的双射.

(2) 若 $f:A \rightarrow B$ 是双射, 则 $f^{-1}:B \rightarrow A$ 是从 $B$ 到 $A$ 的双射.

(3) 若 $f:A \rightarrow B$ ,  $g:B \rightarrow C$ 是双射, 则 $f \circ g:A \rightarrow C$ 是从 $A$ 到 $C$ 的双射.

# 有关势的重要结果

## 等势结果

- $\mathbf{N} \approx \mathbf{Z} \approx \mathbf{Q} \approx \mathbf{N} \times \mathbf{N}$
- 任何实数区间都与实数集合 $\mathbf{R}$ 等势

# 有关势的重要结果

不等势的结果:

**定理8.7** (康托定理)

- (1)  $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$ ;
- (2) 对任意集合  $A$  都有  $A \not\approx P(A)$ .

证明思路:

- (1) 只需证明任何函数  $f: \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$  都不是满射的.

任取函数  $f: \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$ , 列出  $f$  的所有函数值, 然后构造一个  $[0,1]$  区间的小数  $b$ , 使得  $b$  与所有的函数值都不相等.

- (2) 任取函数  $f: A \rightarrow P(A)$ , 构造  $B \in P(A)$ , 使得  $B$  与  $f$  的任何函数值都不相等.

## Cantor定理的证明: (1) $\mathbf{N} \not\approx \mathbf{R}$ ;

证明: (1) 规定 $[0,1]$ 中数的表示. 对任意的 $x \in [0,1]$ , 令

$$x = 0.x_1x_2\ldots, \quad 0 \leq x_i \leq 9$$

规定在  $x$  的表示式中不允许在某位后有无数个9的情况.

设  $f: \mathbf{N} \rightarrow [0,1]$  是任何一个函数, 列出  $f$  的所有函数值:

$$f(0) = 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}\ldots$$

$$f(1) = 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}\ldots$$

...

$$f(n-1) = 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}\ldots$$

...

令  $y$  的表示式为  $0.b_1b_2\ldots$ , 并且满足  $b_i \neq a_i^{(i)}, i=1,2,\ldots$ , 那么  $y \in [0,1]$ , 且  $y$  与上面列出的任何函数值都不相等. 这就推出  $y \notin \text{ran}f$ , 即  $f$  不是满射的.

**Cantor定理的证明: (2) 对任意集合 $A$ 都有 $A \neq P(A)$ .**

(2) 我们将证明任何函数  $g:A \rightarrow P(A)$  都不是满射的.

设  $g:A \rightarrow P(A)$  是从  $A$  到  $P(A)$  的函数, 如下构造集合  $B$ :

$$B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$$

则  $B \in P(A)$ , 但对任意  $x \in A$  都有

$$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$$

从而证明了对任意的  $x \in A$  都有  $B \neq g(x)$ . 即  $B \notin \text{rang.}$

**注意:** 根据Cantor定理可以知道  $\mathbb{N} \neq P(\mathbb{N})$ ,  $\mathbb{N} \neq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ .

# 集合的优势

**定义8.9** (1) 设 $A, B$ 是集合, 如果存在从 $A$ 到 $B$ 的单射函数, 就称 $B$  **优势于**  $A$ , 记作 $A \leqslant B$ . 如果 $B$ 不是优势于 $A$ , 则记作 $A \not\leqslant B$ .

(2) 设 $A, B$ 是集合, 若 $A \leqslant B$  且  $A \not\approx B$ , 则称  $B$  **真优势于**  $A$ , 记作 $A < B$ . 如果  $B$  不是真优势于 $A$ , 则记作 $A \nless B$ .

实例:  $\mathbb{N} \leqslant \mathbb{N}, \mathbb{N} \leqslant \mathbb{R}, \mathbb{A} \leqslant P(\mathbb{A}),$

$\mathbb{R} \not\leqslant \mathbb{N}$

$\mathbb{N} < \mathbb{R}, \mathbb{A} < P(\mathbb{A}),$  但  $\mathbb{N} \nless \mathbb{N}$

**定理8.8** 设  $A, B, C$  是任意的集合, 则

(1)  $A \leqslant A$

(2) 若 $A \leqslant B$  且  $B \leqslant A$ , 则 $A \approx B$

(3) 若 $A \leqslant B$  且  $B \leqslant C$ , 则 $A \leqslant C$

# 应用：证明等势

**例8** 证明  $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx [0,1)$ .

证明：设  $x \in [0,1)$ ,  $0.x_1x_2\dots$  是  $x$  的二进制表示. 规定表示式中不允许出现连续无数个1. 对于  $x$ , 如下定义

$$f: [0,1) \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}},$$

$$f(x) = t_x, \text{ 且 } t_x: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\},$$

$$t_x(n) = x_{n+1}, n = 0,1,2,\dots$$

例如  $x = 0.1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\dots$ , 则对应于  $x$  的函数  $t_x$  是:

$$n \quad 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\dots$$

$$t_x(n) \quad 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\dots$$

$t_x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ , 且对于  $x, y \in [0,1)$ ,  $x \neq y$ , 必有  $t_x \neq t_y$ , 即  $f(x) \neq f(y)$ .

这就证明了  $f: [0,1) \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$  是单射的.

考虑  $t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ , 其中

$$t(0)=0, t(n)=1, n=1, 2, \dots$$

按照  $f$  的定义, 只有  $x = 0.011\dots$  才能满足  $f(x)=t$ . 但根据规定, 这个数  $x$  记为  $0.100\dots$ , 所以根本不存在  $x \in [0,1)$ , 满足  $f(x)=t$ . 因此  $f$  不是满射的.

# 构造另一个单射

定义函数  $g:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\rightarrow[0,1)$ .  $g$ 的映射法则恰好与  $f$  相反. 即  $\forall t\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ,

$t: \mathbb{N}\rightarrow\{0,1\}$ ,  $g(t)=0.x_1x_2\dots$ , 其中  $x_{n+1}=t(n)$ .

将  $0.x_1x_2\dots$  看作数  $x$  的十进制表示. 这样就避免了形如  $0.0111\dots$  和  $0.1000\dots$  在二进制表示中对应了同一个数的情况, 从而保证了  $g$  的单射性.

根据定理有  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\approx[0,1)$ . 再使用等势的传递性得  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\approx\mathbb{R}$ .

# 自然数的集合定义

**定义8.10** 设 $a$ 为集合, 称 $a \cup \{a\}$ 为 $a$ 的**后继**, 记作 $a^+$ , 即  $a^+ = a \cup \{a\}$ .

如下定义自然数:

$$0 = \emptyset$$

$$1 = 0^+ = \emptyset^+ = \{\emptyset\} = \{0\}$$

$$2 = 1^+ = \{\emptyset\}^+ = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$$

$$3 = 2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$$

...

$$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

...

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \dots \quad 0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3 \subseteq \dots$$

自然数的相等与大小, 即对任何自然数  $n$  和  $m$ , 有

$$m = n \Leftrightarrow m \approx n, \quad m < n \Leftrightarrow m \in n$$

# 有穷集和无穷集

## 定义8.11

- (1) 一个集合是**有穷**的当且仅当它与某个自然数等势；
- (2) 如果一个集合不是有穷的, 就称作**无穷集**.

实例:

- (1)  $\{a,b,c\}$ 是有穷集, 因为 $3=\{0,1,2\}$ , 且 $\{a,b,c\}\approx\{0,1,2\}=3$

- (2)  $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{R}$ 都是无穷集, 因为没有自然数与 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{R}$ 等势

利用自然数的性质可以证明: 任何有穷集只与惟一的自然数等势.

# 集合基数的定义

## 定义8.12

- (1) 对于有穷集合 $A$ , 称与 $A$ 等势的那个惟一的自然数为 $A$ 的**基数**, 记作 $\text{card}A$  (也可以记作 $|A|$ 或 $K(A)$ )

$$\text{card}A = n \Leftrightarrow A \approx n$$

- (2) 自然数集合 $\mathbf{N}$ 的基数记作 $\aleph_0$ , 即

$$\text{card}\mathbf{N} = \aleph_0$$

- (3) 实数集 $\mathbf{R}$ 的基数记作 $\aleph$ , 即

$$\text{card}\mathbf{R} = \aleph_1 = \aleph$$

# 基数的相等和大小

**定义8.13** 设 $A, B$ 为集合, 则

(1)  $\text{card} A = \text{card} B \Leftrightarrow A \approx B$

(2)  $\text{card} A \leq \text{card} B \Leftrightarrow A \preceq B$

(3)  $\text{card} A < \text{card} B \Leftrightarrow \text{card} A \leq \text{card} B \wedge \text{card} A \neq \text{card} B$

根据上一节关于势的讨论不难得到:

$$\text{card } \mathbb{Z} = \text{card } \mathbb{Q} = \text{card } \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \aleph_0$$

$$\text{card } P(\mathbb{N}) = \text{card } 2^{\mathbb{N}} = \text{card } [a, b] = \text{card } (c, d) = \aleph$$

$$\text{其中 } 2^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

$$\aleph_0 < \aleph$$

$$\text{card } A < \text{card } P(A)$$

# 基数的大小

不存在最大的基数. 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0, 1, 2, \dots, n, \dots, \aleph_0, \aleph, \dots$$

其中:

$0, 1, 2, \dots, n, \dots$  是全体自然数, 是有穷基数.

$\aleph_0, \aleph, \dots$  是无穷基数,

$\aleph_0$ 是最小的无穷基数,

$\aleph$ 后面还有更大的基数, 如 $\text{card}P(R)$ 等.

**连续统假设:** 不存在介于 $\aleph_0$ 和 $\aleph$ 之间的基数, 即  $\aleph$ 是大于 $\aleph_0$ 的最小基数.

# 可数集

**定义8.14** 设 $A$ 为集合, 若 $\text{card}A \leq \aleph_0$ , 则称 $A$ 为**可数集**或**可列集**.

实例:

$\{a, b, c\}$ ,  $5$ , 整数集 $\mathbb{Z}$ , 有理数集 $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 等都是可数集,

实数集  $\mathbb{R}$ 不是可数集, 与 $\mathbb{R}$ 等势的集合也不是可数集.

对于任何的可数集, 它的元素都可以排列成一个有序图形. 换句话说, 都可以找到一个“数遍”集合中全体元素的顺序.

# 可数集

可数集的性质：

- 可数集的任何子集都是可数集.
- 两个可数集的并是可数集.
- 两个可数集的笛卡儿积是可数集.
- 可数个可数集的并仍是可数集.
- 无穷集 $A$ 的幂集 $P(A)$ 不是可数集

# 实例

**例9** 求下列集合的基数

(1)  $T = \{x \mid x \text{ 是单词 “BASEBALL” 中的字母}\}$

(2)  $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 9 \wedge 2x = 8\}$

(3)  $C = P(A), A = \{1, 3, 7, 11\}$

解:

(1) 由  $T = \{B, A, S, E, L\}$  知  $\text{card} T = 5$

(2) 由  $B = \emptyset$ , 可知  $\text{card} B = 0$ .

(3) 由  $|A| = 4$  可知  $\text{card} C = \text{card} P(A) = |P(A)| = 2^4 = 16$ .

# 实例

**例10** 设 $A, B$ 为集合, 且  $\text{card}A=\aleph_0$ ,  $\text{card}B=n$ ,  $n$ 是自然数,  $n \neq 0$ . 求  $\text{card } A \times B$ .

解: 方法一, 构造双射函数

由  $\text{card}A=\aleph_0$ ,  $\text{card}B=n$ , 可知  $A, B$  都是可数集. 令

$$A=\{a_0, a_1, a_2, \dots\}, \quad B=\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$$

对任意的  $\langle a_i, b_j \rangle, \langle a_k, b_l \rangle \in A \times B$  有

$$\langle a_i, b_j \rangle = \langle a_k, b_l \rangle \Leftrightarrow i=k \wedge j=l$$

定义函数

$$f: A \times B \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(\langle a_i, b_j \rangle) = in + j, \quad i=0, 1, \dots, \quad j=0, 1, \dots, n-1$$

易见  $f$  是  $A \times B$  到  $\mathbb{N}$  的双射函数, 所以

$$\text{card } A \times B = \text{card } \mathbb{N} = \aleph_0$$

# 实例

**方法二 直接使用可数集的性质求解.**

因为  $\text{card } A = \aleph_0$ ,  $\text{card } B = n$ , 所以  $A, B$  都是可数集.

根据性质(3) 可知  $A \times B$  也是可数集, 所以

$$\text{card } A \times B \leq \aleph_0$$

显然当  $B \neq \emptyset$  时,

$$\text{card } A \leq \text{card } A \times B,$$

这就推出

$$\aleph_0 \leq \text{card } A \times B$$

综合上述得到

$$\text{card } A \times B = \aleph_0.$$