第15章 欧拉图与哈密顿图

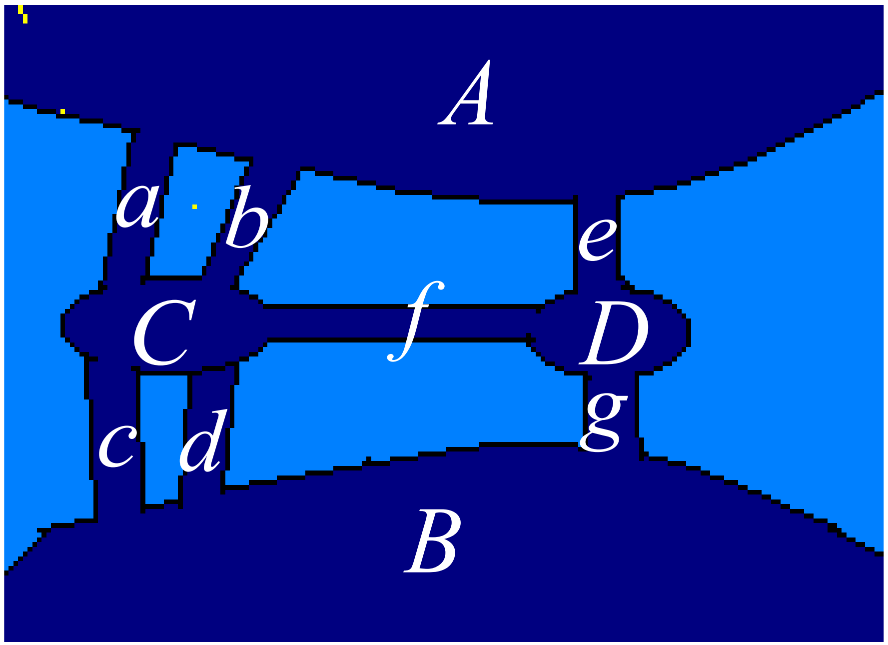
第五部分 图论

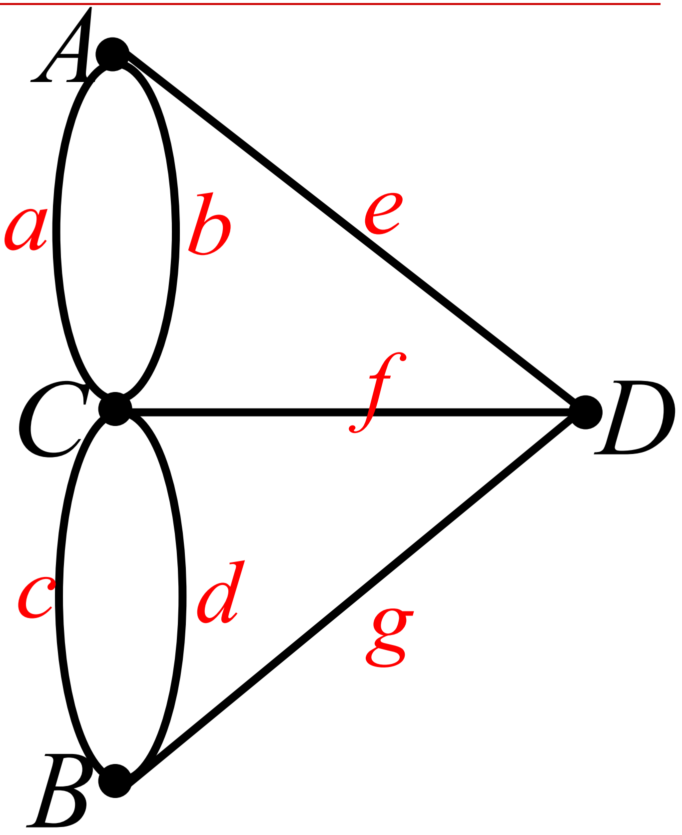
本章主要内容

- 15.1 欧拉图
- 15.2 哈密顿图
- 15.3 最短路、货郎担(TSP)问题

15.1 欧拉图
(Eulerian Graph)

历史背景





问题：能否从河岸或小岛出发，通过每一座桥，且仅通过一次回到原地？

欧拉图定义

定义15.1 有向图或无向图中，

(1) 欧拉通路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

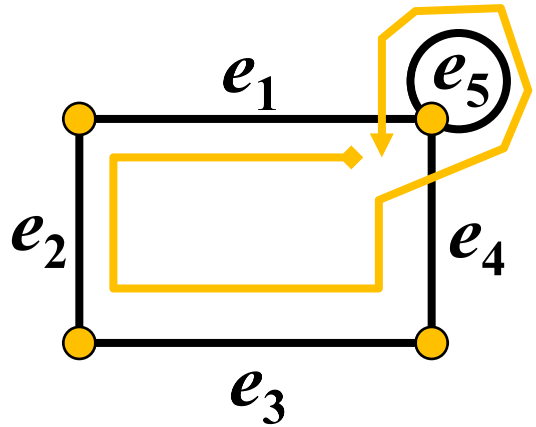
(2) 欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

(3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.

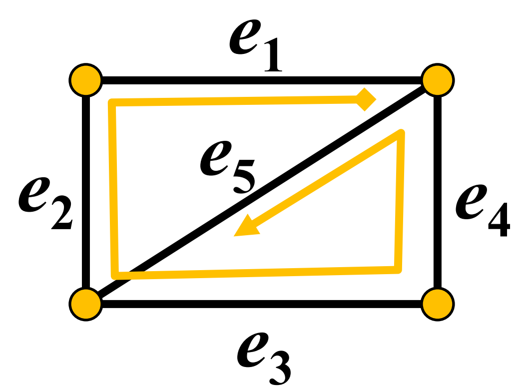
(4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

几点说明

平凡图
欧拉图



欧拉图



半欧拉图

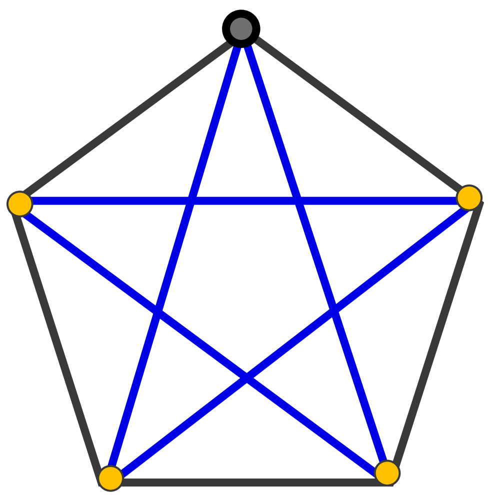
1、规定平凡图为欧拉图.

2、欧拉通路是生成的简单通路，欧拉回路是生成的简单回路.

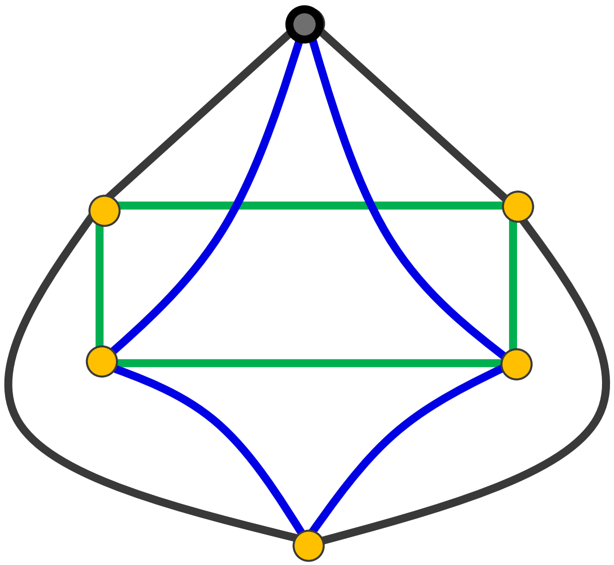
3、环不影响图的欧拉性.

注：通路Γ中所有边各异，则称为简单通路。

例：判断下列图是否是欧拉图

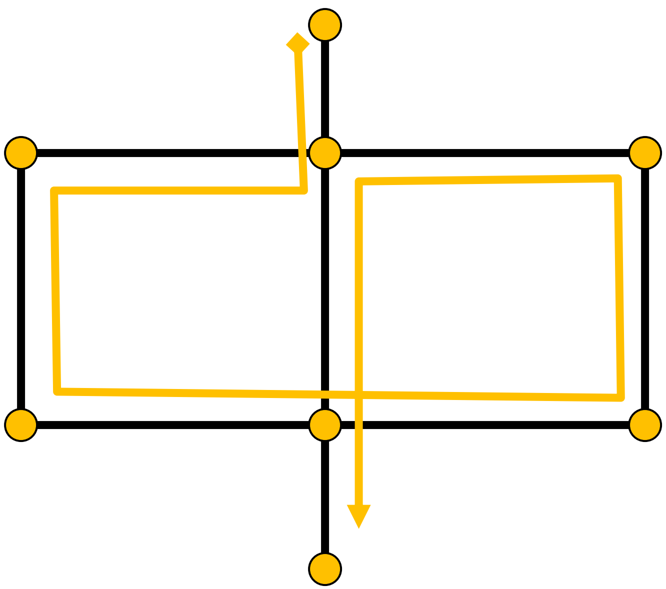


欧拉图

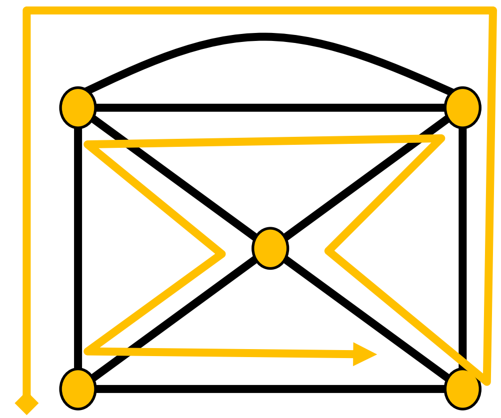


欧拉图

例：判断下列图是否是欧拉图



半欧拉图



半欧拉图

无向欧拉图的判别法

- **定理15.1** 无向图G是欧拉图当且仅当G连通且无奇度数顶点.
- 证 若G为平凡图结论显然成立. 下设G为非平凡图。设G为n阶 m条边的无向图.
  - 必要性：设C为G中一条欧拉回路.

(1) G中有欧拉回路，所以G连通是显然的.

(2) $\forall v_i \in V$，v_i在C上每出现一次获2度，所以v_i为偶度顶点.

由v_i的任意性，所以G中无奇度点.

无向欧拉图的判别法

充分性 对边数m做归纳法.

(1) m=1时，G为一个环，则G为欧拉图.

(2) 设$m \le k$（$k \ge 1$）时结论为真，证明$m=k+1$时结论也为真.

(2-1) 因为G连通且无奇度数顶点，可以证明G中必含圈.

(2-2)设C是G中的一个圈,删除C上的所有边,得G的生成子图G'.

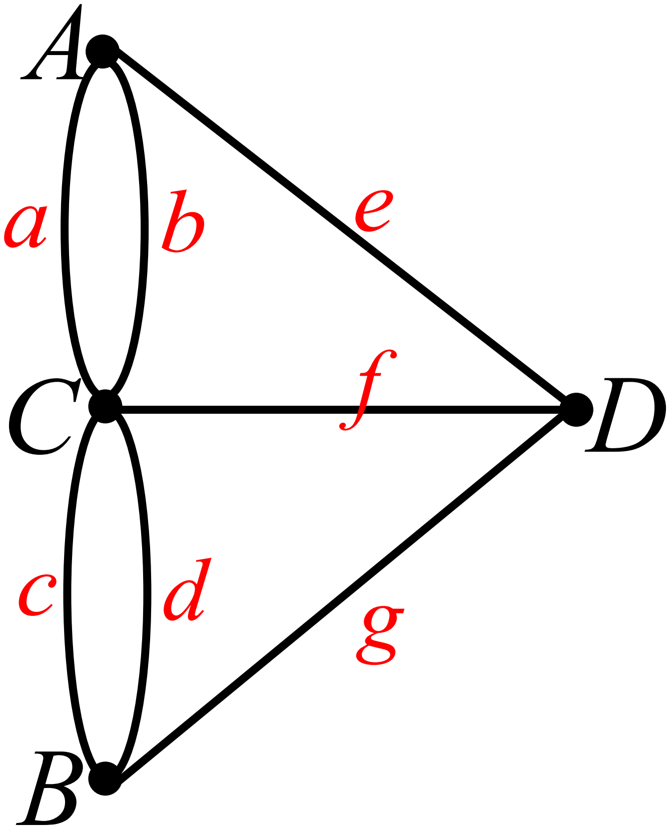
(2-3)设G'有s个连通分支G_1'，G_2'，…, G_s',

每个连通分支至多有k条边，且无奇度顶点。

由归纳假设知G_1'，G_2'，…, G_s'都是欧拉图。

(2-3)设G_i'与C的至少有一个公共顶点，设为v_{ji}^*, i=1,2,…,s.从某个节点v_r开始沿C行走, 最后回到v_r，每经过一个v_{ji}^*就行遍G_i'的欧拉回路,最终得到行遍所有顶点的欧拉回路。

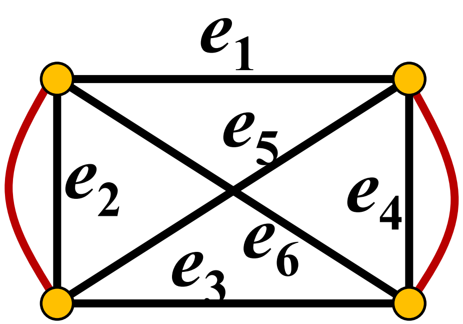
哥尼斯堡七桥问题

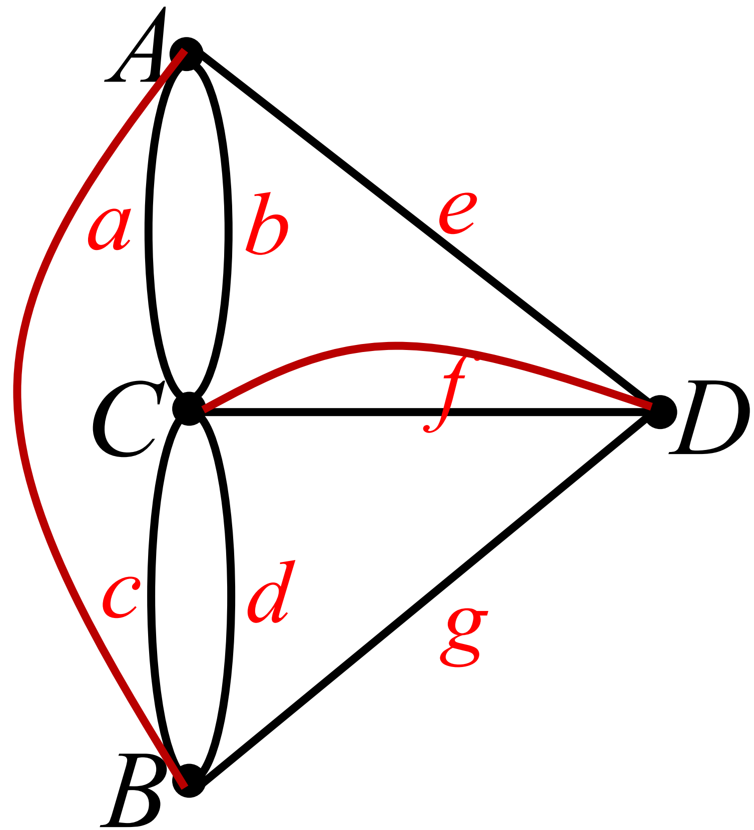


- 图中奇数度结点的个数是4个，所以不是欧拉图。

无向图的欧拉定理例题

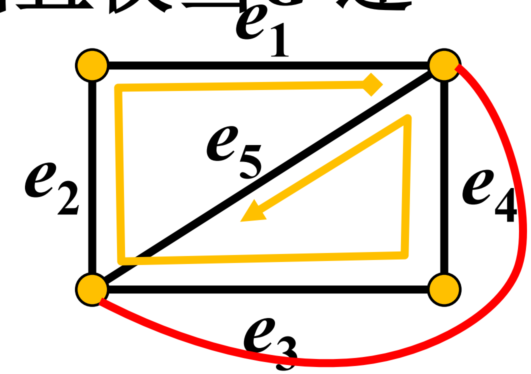
在下列图中各至少加几条边才能成为欧拉图?





无向半欧拉图的判别法

- **定理15.2** 无向图G是半欧拉图当且仅当G连通且恰有两个奇度顶点.



- 证 必要性（略）.
  - 充分性（利用定理15.1）

设u,v为G中的两个奇度顶点，令

$$G' = G \cup (u,v)$$

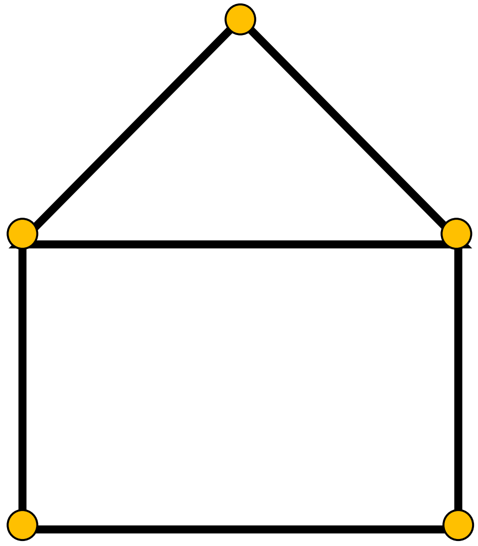
则G'连通且无奇度顶点，由定理15.1知G'为欧拉图，因而存在欧拉回路C, 令

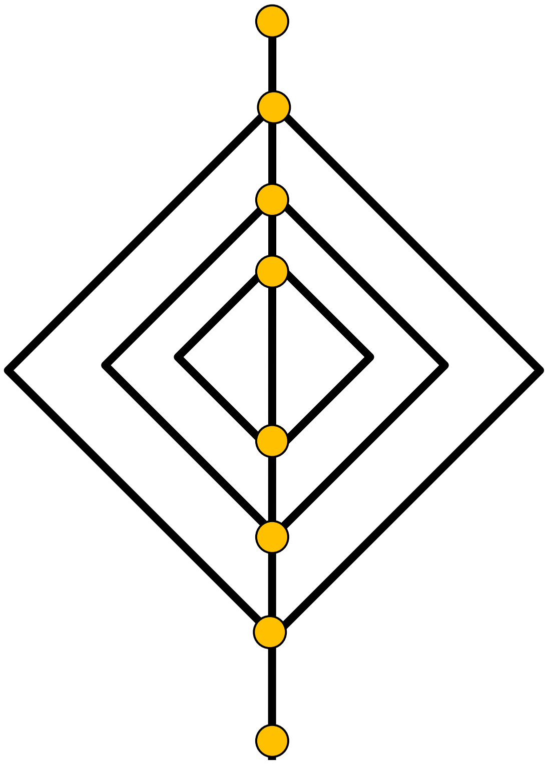
$$\Gamma = C-(u,v),$$

则Γ为G中欧拉通路.

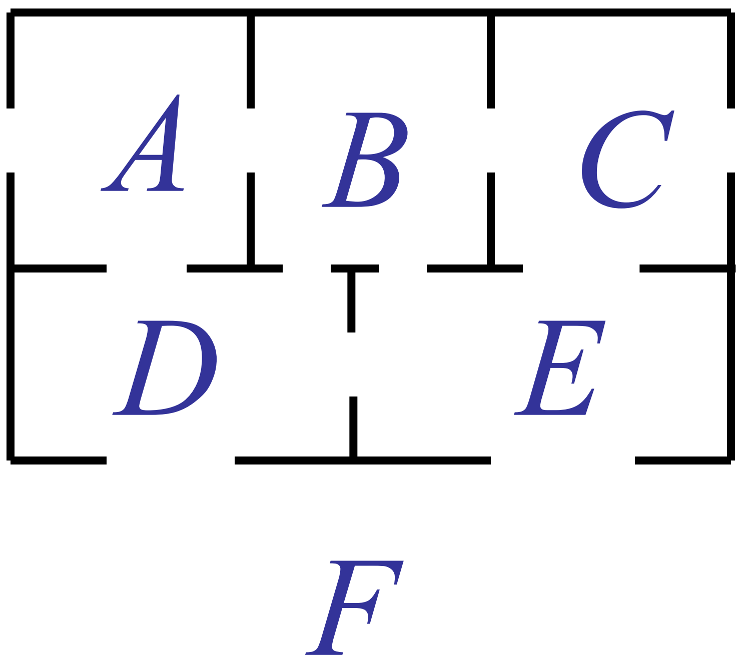
无向图的欧拉定理例题

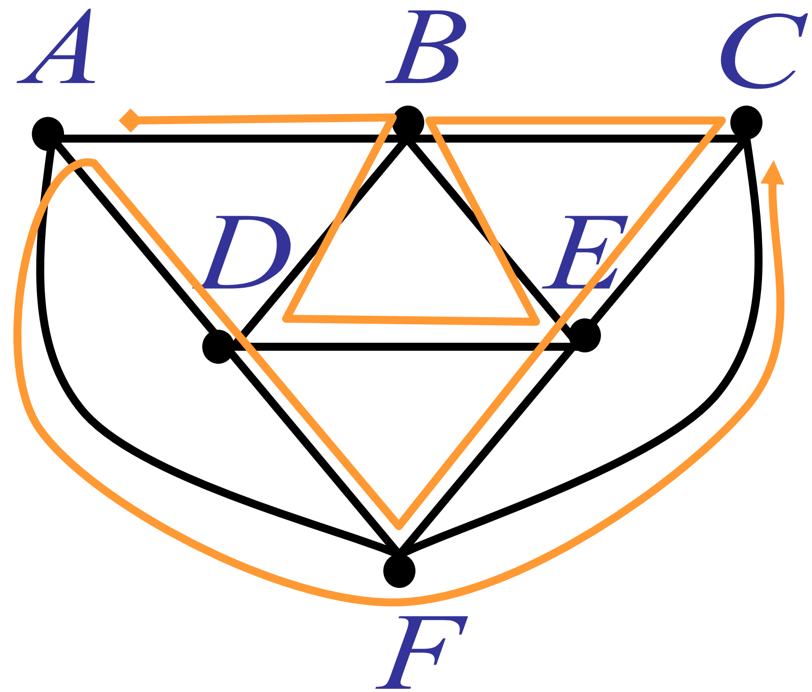
例：一笔画判定问题





无向图的欧拉定理例题





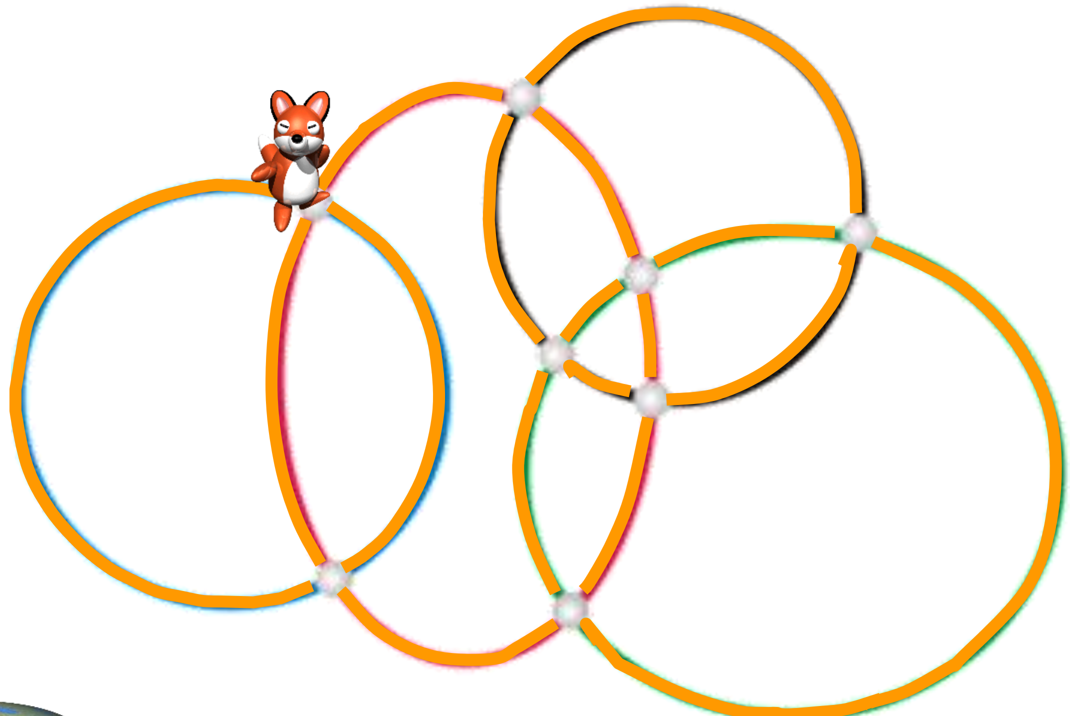
走遍房间问题

能否从任意一个房间或外面出发，不重复地通过每一个房门？

只能从**A**或者**C**出发

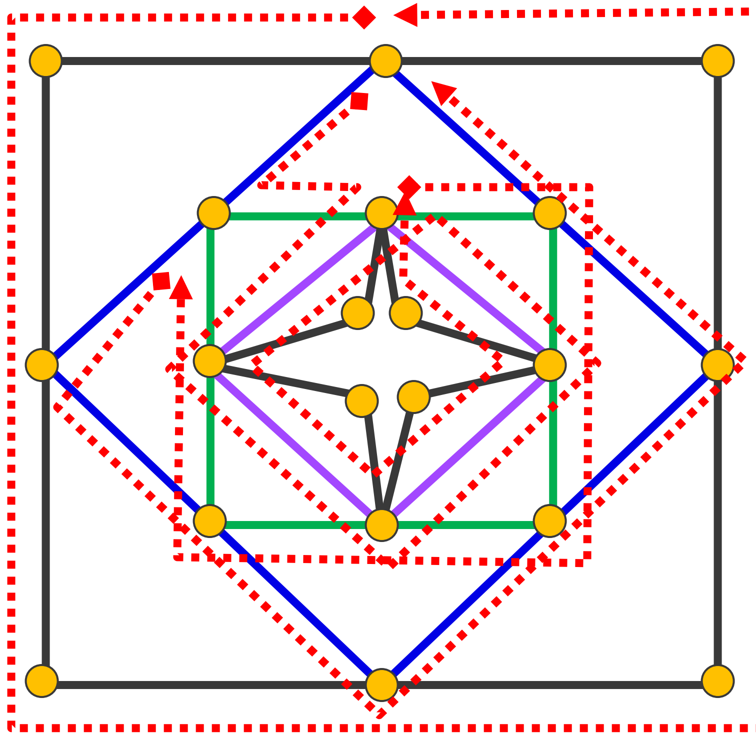
无向图的欧拉定理

- 定理15.5 *G*是非平凡的欧拉图当且仅当*G*是连通的且为若干个边不重的圈之并.

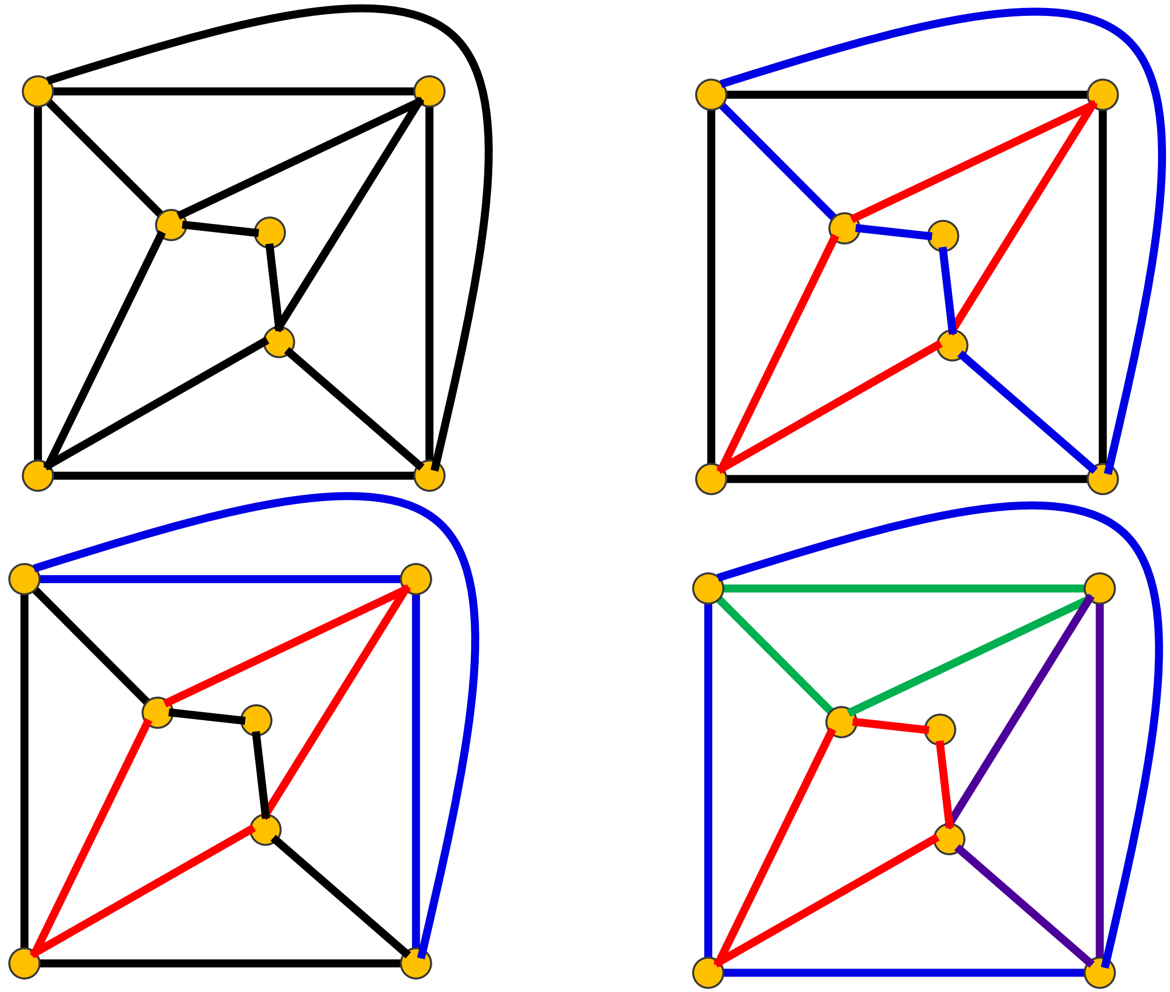


PLAY

无向图的欧拉定理例题



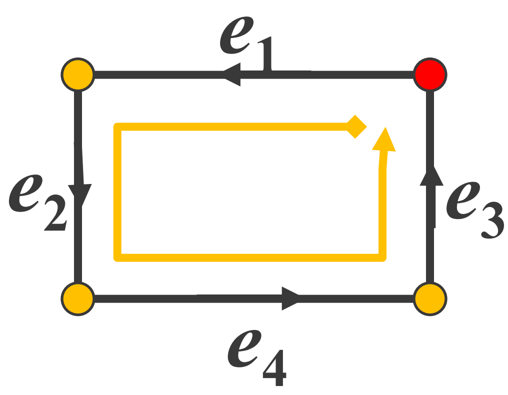
无向图的欧拉定理例题

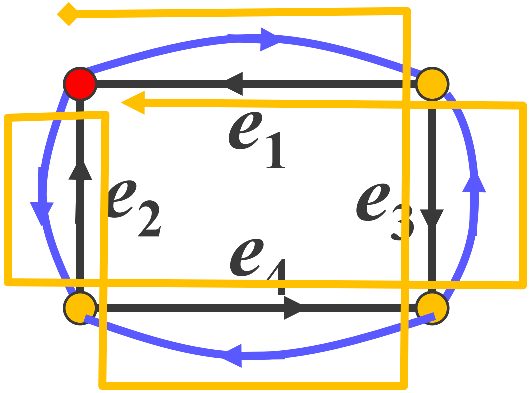


有向图中的欧拉定理

- 定理15.3 有向图*D*是<u>欧拉图</u>当且仅当*D*是强连通的且每个顶点的入度都等于出度。

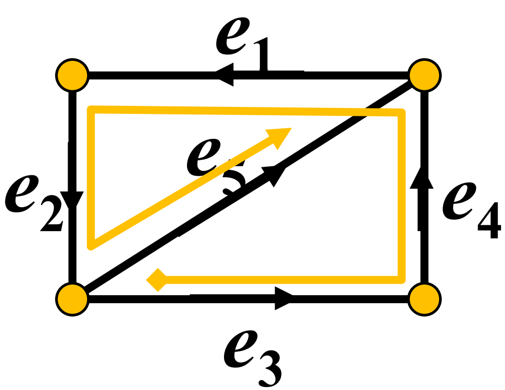
欧拉图



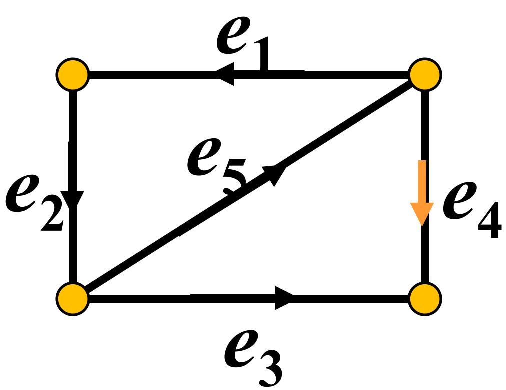


有向图中的欧拉定理

- 定理15.4 有向图D是半欧拉图 当且仅当 D是单向连通的，且D中恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度都等于出度。



半欧拉图



非欧拉图

例题

- 例1 设G是欧拉图，但G不是平凡图，也不是一个环，则$\lambda(G)\geq 2$.
- 证：

只需证明G中不可能有桥：

方法一：直接证明法.

证 设C为G中一条欧拉回路，因为任意的$e\in E(C)$，故：$p(G-e)= p(G)$，所以e不为桥.

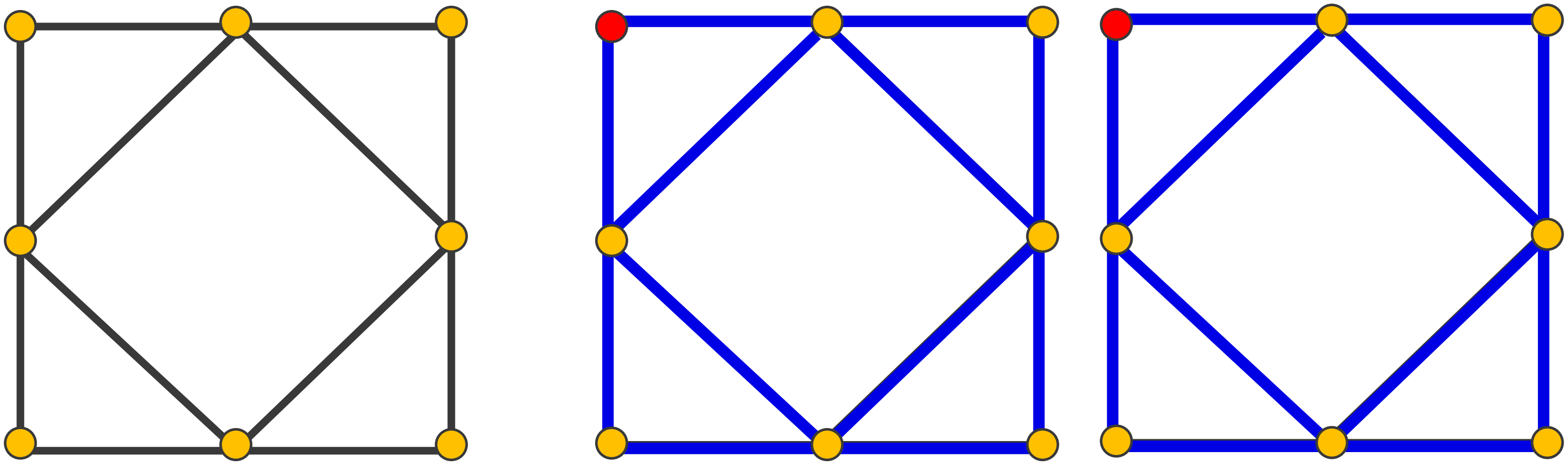
例题

- 方法二：反证法. 利用欧拉图无奇度顶点及握手定理的推论.

  否则，设$e=(u,v)$为G中桥，则$G-e$产生两个连通分支G_1, G_2，不妨设u在G_1中，v在G_2中.

  由于从G中删除e时，只改变u,v 的度数(各减1)，因而G_1与G_2中均只含一个奇度顶点，这与握手定理推论矛盾.

Fleury算法—求欧拉回路



已选边集的导出子图G_1；

未选边集的导出子图G_2；

将要选择的边不能成为G_2的桥，除非无边可选。

原则：能不走桥就不走桥！

Fleury算法

(1) 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0=v_0$.

(2) 设$P_i = v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$ 已经行遍，按下面方法从 $E(G)-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中选取$e_{i+1}$:

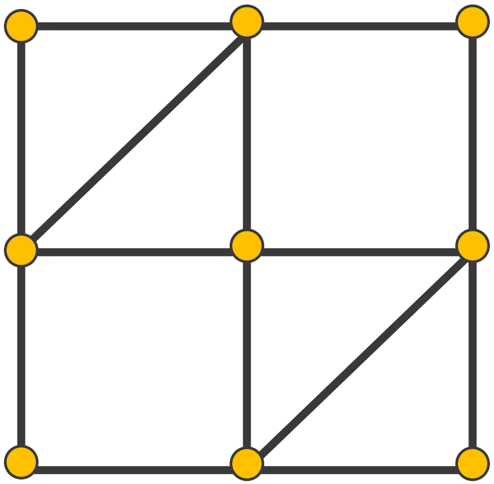
(a) e_{i+1}与v_i相关联;

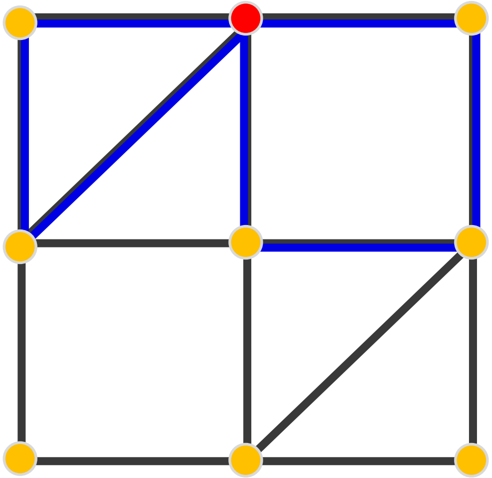
(b) 除非无别的边可供行遍，否则e_{i+1}不应该为 $G_i = G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中的桥.

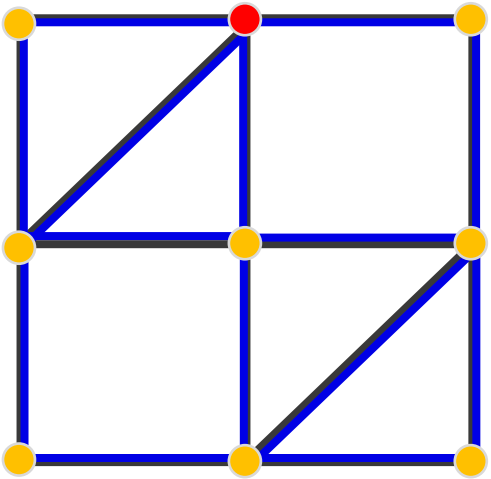
(3) 当 (2)不能再进行时，算法停止.

可以证明算法停止时所得简单通路 $P_m = v_0e_1v_1e_2\ldots e_mv_m(v_m=v_0)$为$G$ 中一条欧拉回路.

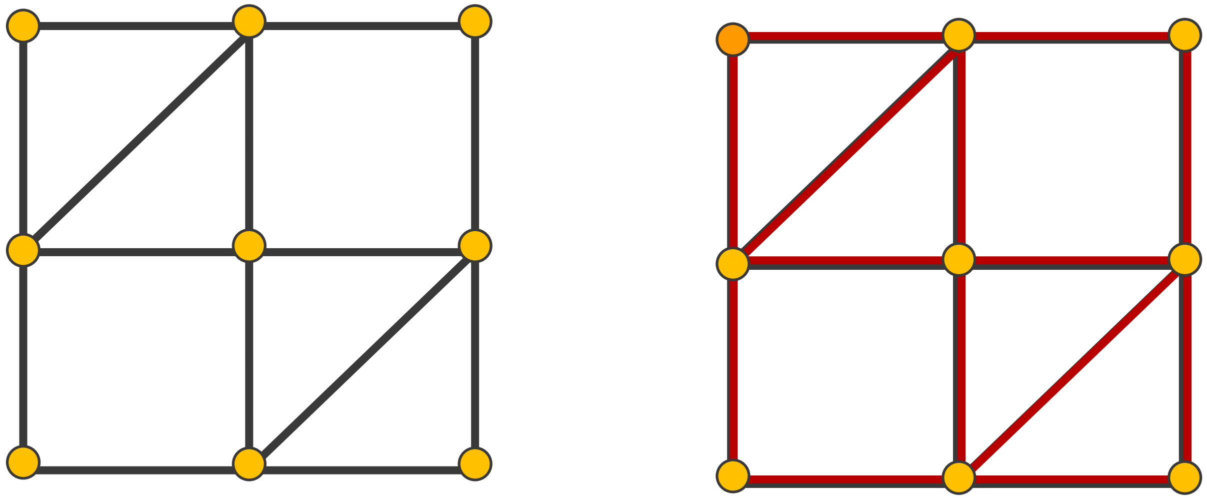
分析在哪步犯了错误?



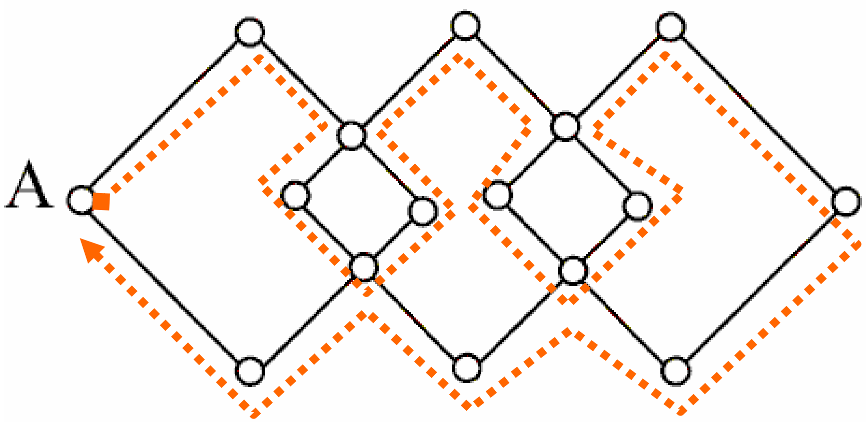




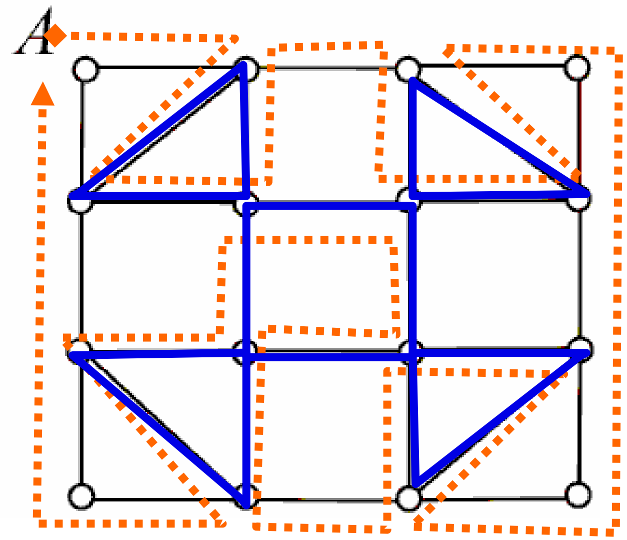
Fleury算法—求欧拉回路



例



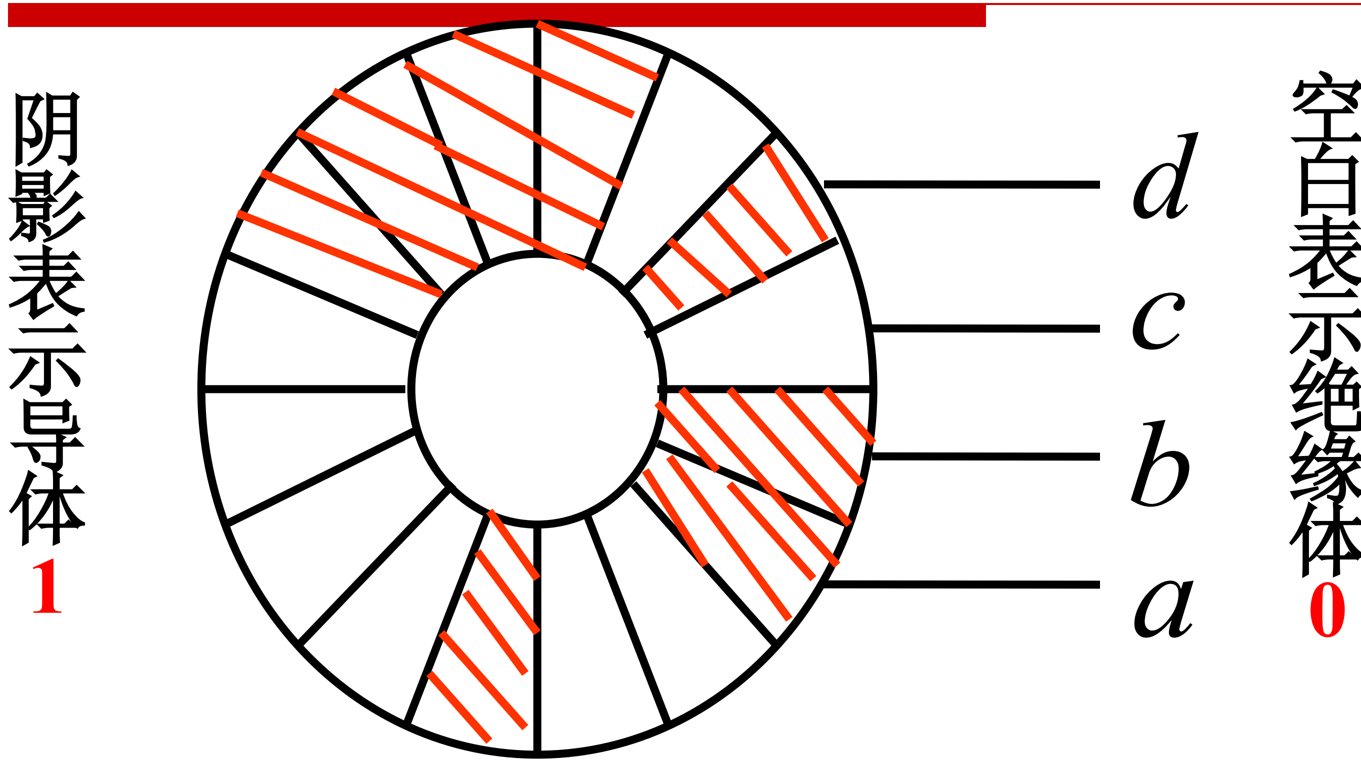
(1)



(2)

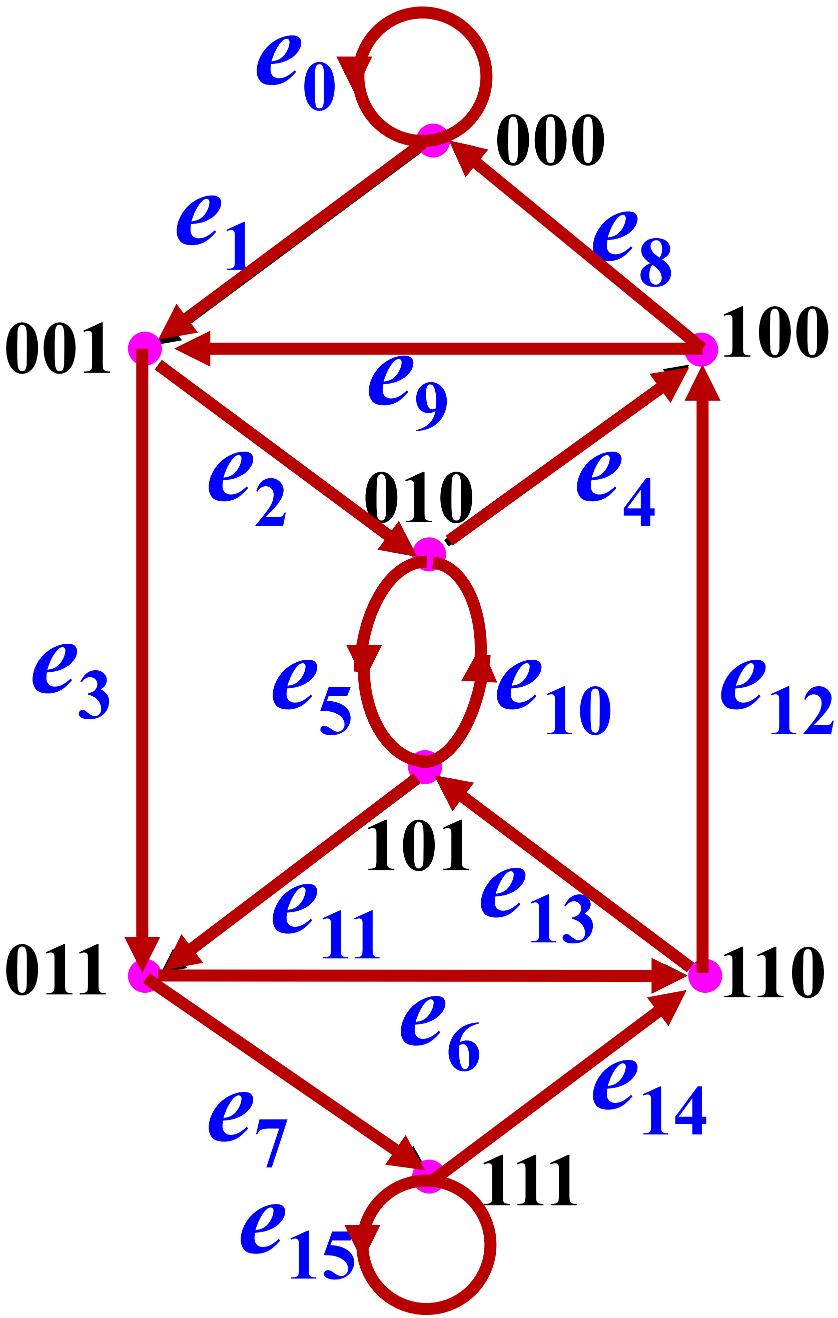
上图中，(1),(2)两图都是欧拉图，均从*A*点出发，如何一次成功地走出一条欧拉回路来？

例 计算机鼓轮的设计



问题

鼓轮上16个部分怎样安排导体和绝缘体,才能使鼓轮每转一部分,四个触点得到一组不同的四位二进制数? 例如 11010111



设有八个结点的有向图，其结点分别记为三位二进制数。

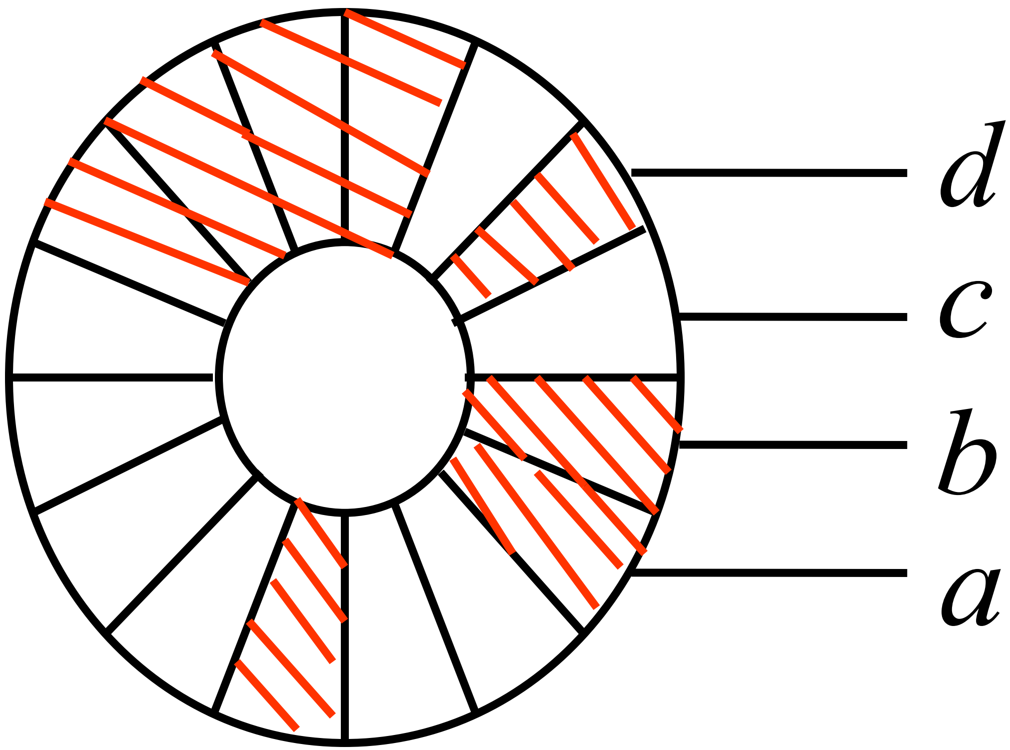
从结点$a_1a_2a_3$可以引出两条有向边，其终点分别是$a_2a_3 0$以及$a_2a_3 1$。该两条边分别记为$a_1a_2a_3 0$和$a_1a_2a_3 1$。

该图的任一条路中，其邻接的边必是$a_1a_2a_3a_4$和$a_2a_3a_4a_5$的形式。
上述问题可以看作是求该图中的一条欧拉回路。

$e_0e_1e_2e_4e_9e_3e_6e_{13}e_{10}e_5$ $e_{11}e_7e_{15}e_{14}e_{12}e_8$
0000100110101111

例（续完）

0000100110101111

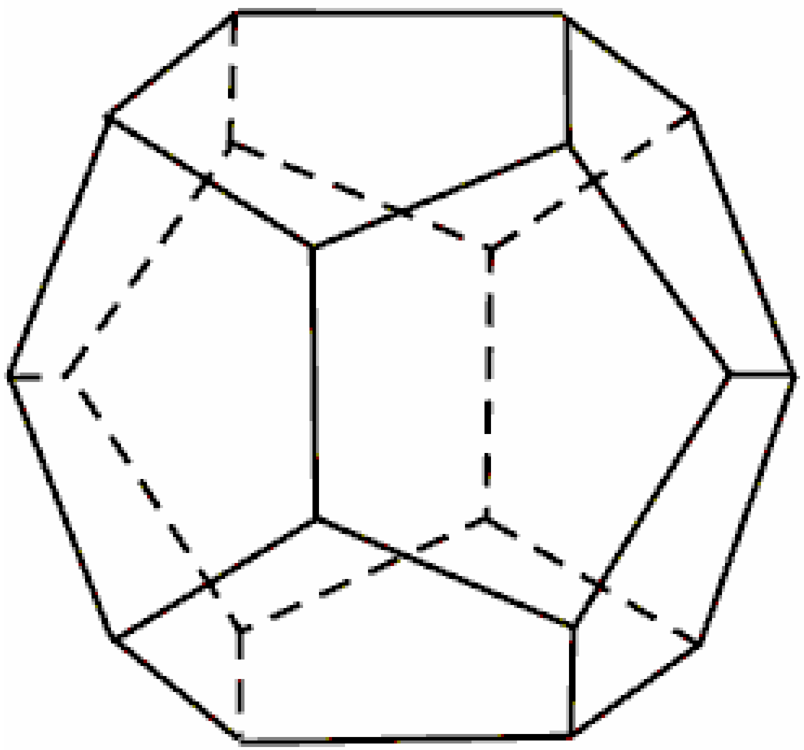


可以推广到鼓轮具有n个触点的情况

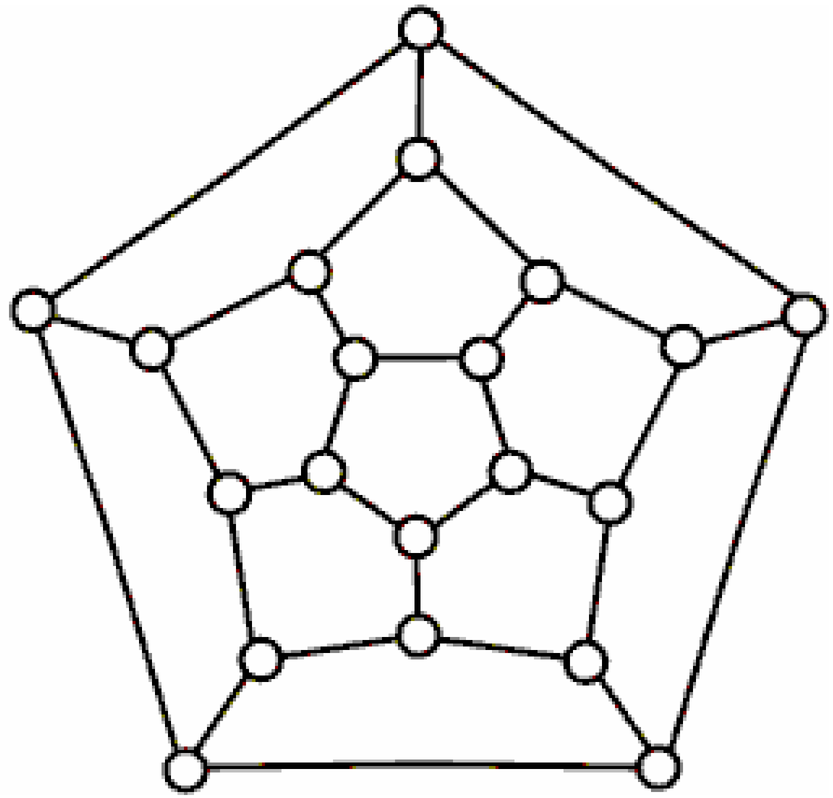
15.2 哈密顿图
(Hamiltonian Graph)

15.2 哈密顿图

历史背景：哈密顿周游世界问题与哈密顿图

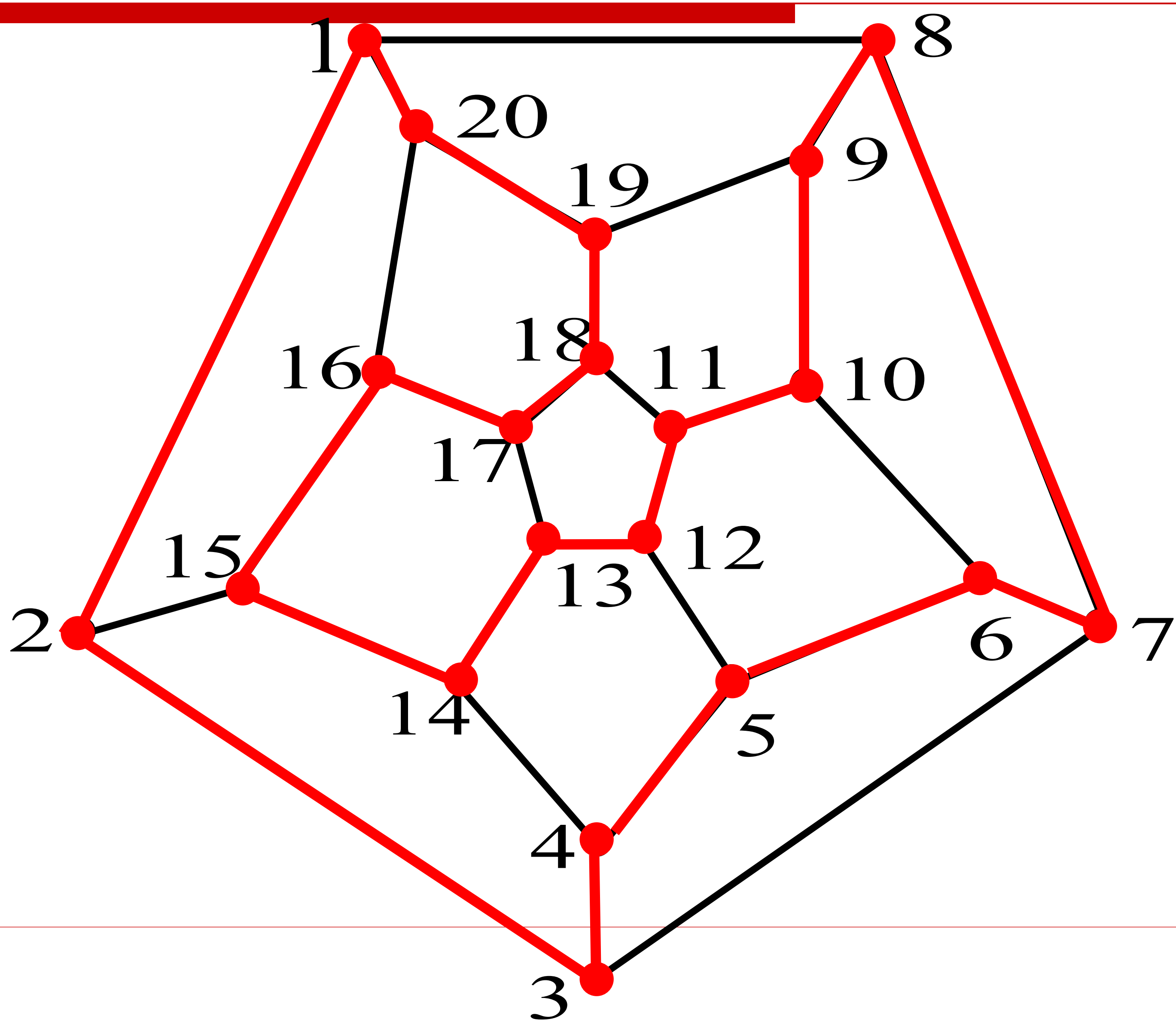


(1)



(2)

哈密顿的周游世界问题



哈密顿图与半哈密顿图

- 定义15.2

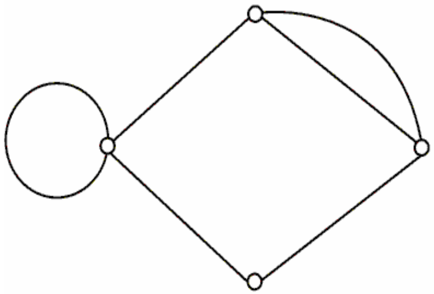
  (1) 哈密顿通路——经过图中所有顶点一次仅一次的通路.

  (2) 哈密顿回路——经过图中所有顶点一次仅一次的回路.

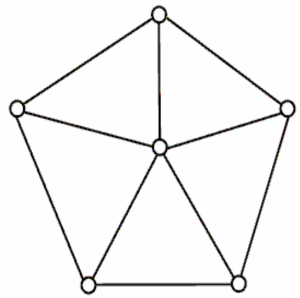
  (3) 哈密顿图——具有哈密顿回路的图.

  (4) 半哈密顿图——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

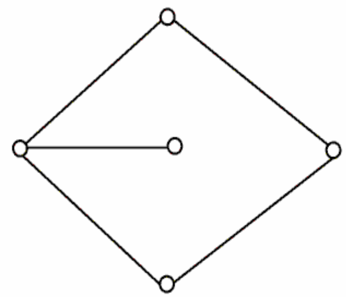
哈密顿图与半哈密顿图



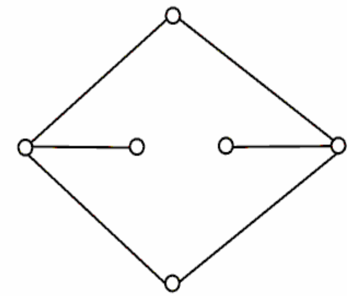
哈密顿图



哈密顿图



半哈密顿图

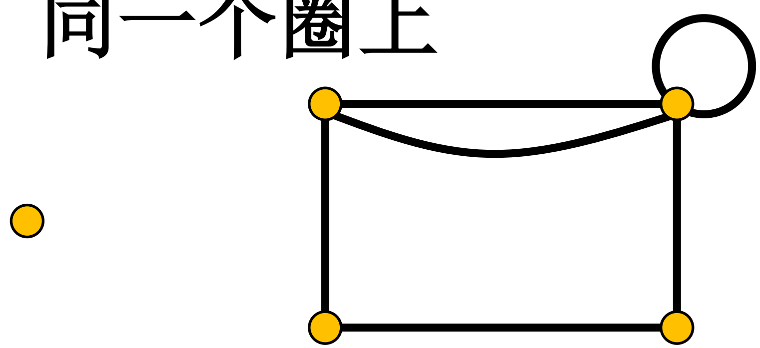


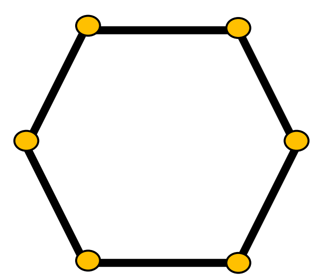
非哈密顿图

哈密顿图与半哈密顿图

- 几点说明：

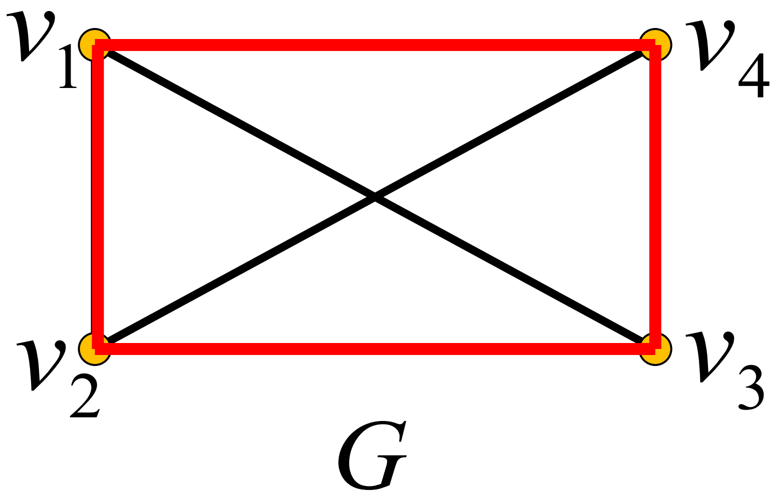
1. 平凡图是哈密顿图.
2. 哈密顿通路是**初级通路**，哈密顿回路是**初级回路**.
3. 环与平行边不影响哈密顿性.
4. 哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上

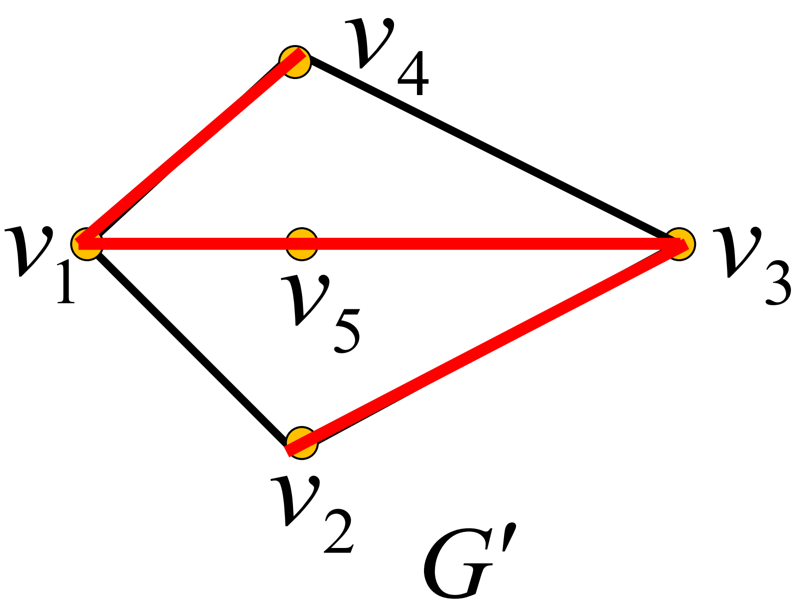




注：若通路Γ中所有**顶点各异**,所有**边各异**，称Γ为**初级通路**或**路径**.

哈密顿图与半哈密顿图例题

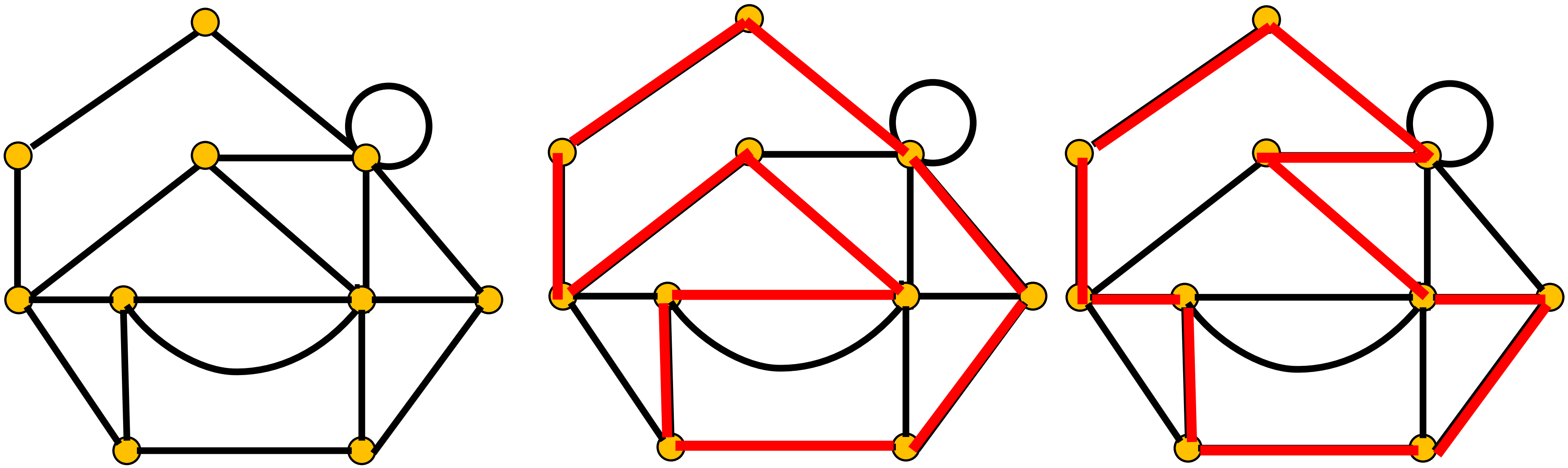




哈密顿图

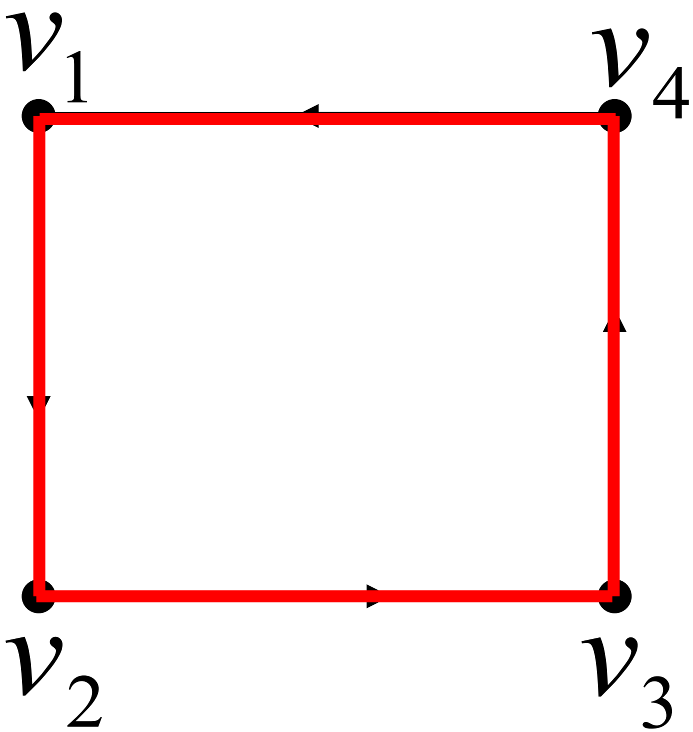
半哈密顿图

哈密顿图与半哈密顿图



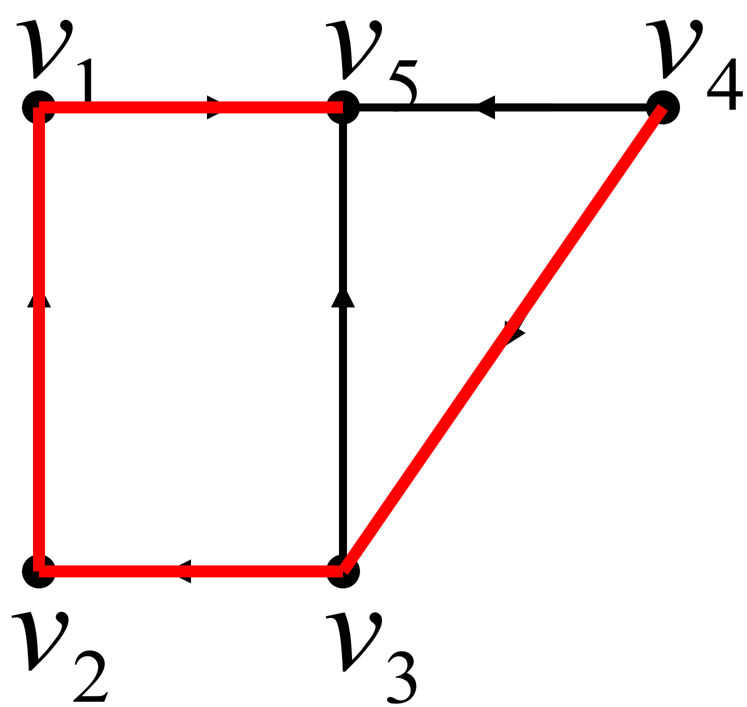
哈密顿图

哈密顿图与半哈密顿图例题



G

哈密顿图



G'

半哈密顿图

无向哈密顿图的一个必要条件

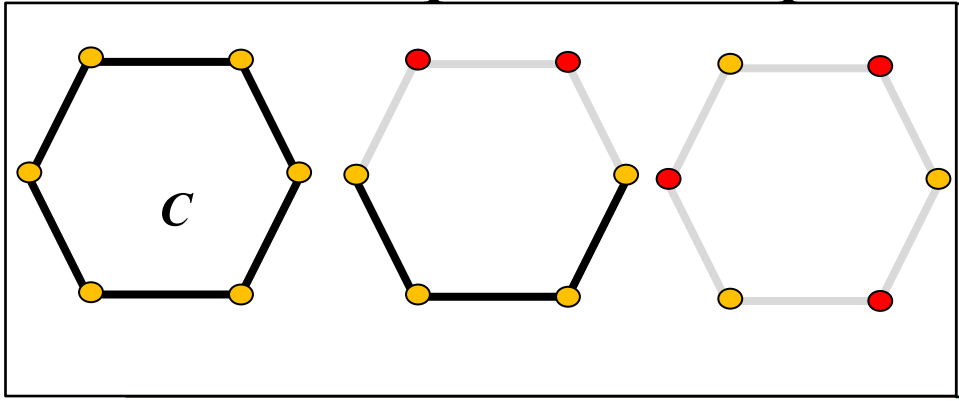
- **定理15.6** 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$，均有

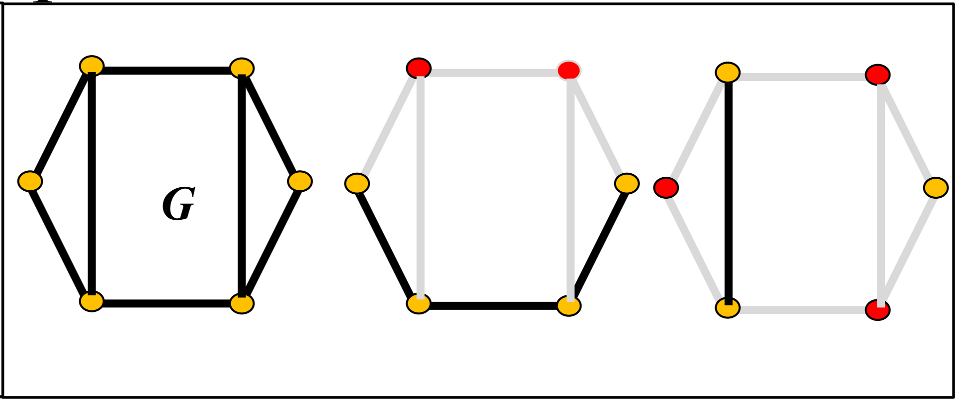
$$p(G-V_1) \leq |V_1|$$

- 证 设C为G中一条哈密顿回路

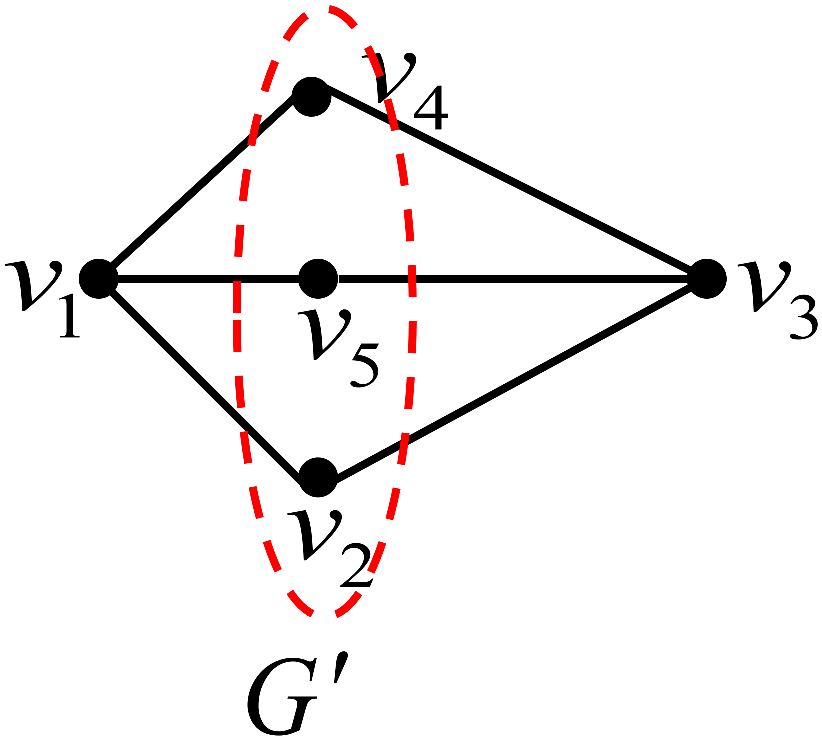
(1) $p(C-V_1) \leq |V_1|$

(2) $p(G-V_1) \leq p(C-V_1) \leq |V_1|$ （因为$C \subseteq G$）





例 判断下图是否为哈密顿图



在 G'中，取

$V_1=\{v_1,v_3\}$

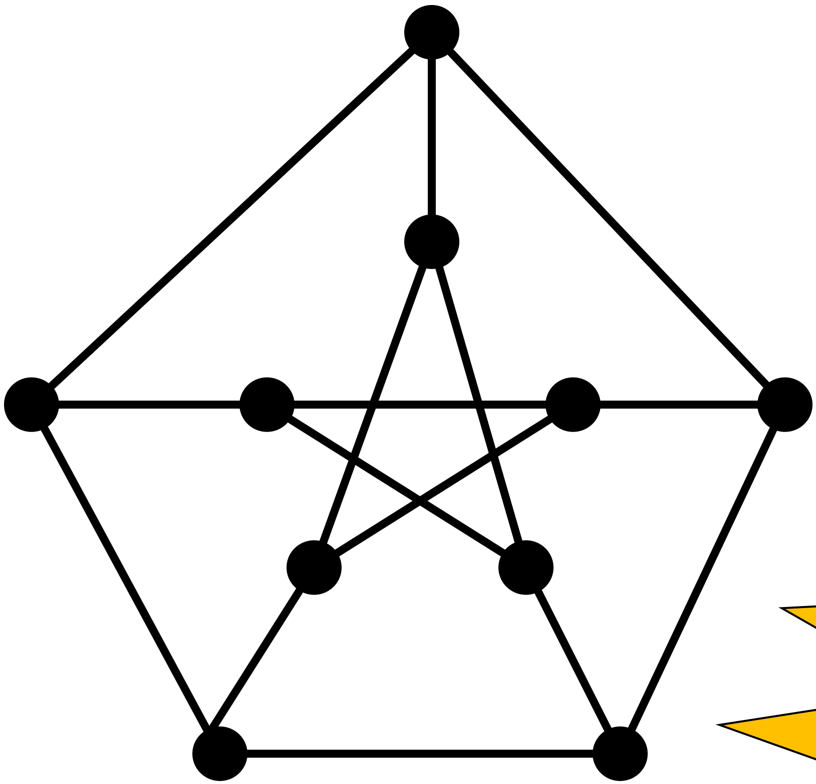
$|p(G-V_1)|=3$

$|V_1|=2$

$p(G-V_1) > |V_1|$

故 G' 不是哈密顿图

彼得森(Peterssen)图



彼得森图

彼得森图满足

$p(G - V_1) \leq |V_1|$

但它不是哈密顿图。

满足定理15.6条件的图
不一定是哈密顿图

无向半哈密顿图的一个必要条件

- 推论 设无向图$G=<V,E>$是半哈密顿图，对于任意的$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|+1$$

- 证 设Γ是G中起于顶点u终于顶点v的哈密顿通路，令$G'=G\cup(u,v)$(在G的顶点u,v之间加新边)，易知G'为哈密顿图，

由定理15.6可知，$p(G'-V_1) \leq |V_1|$

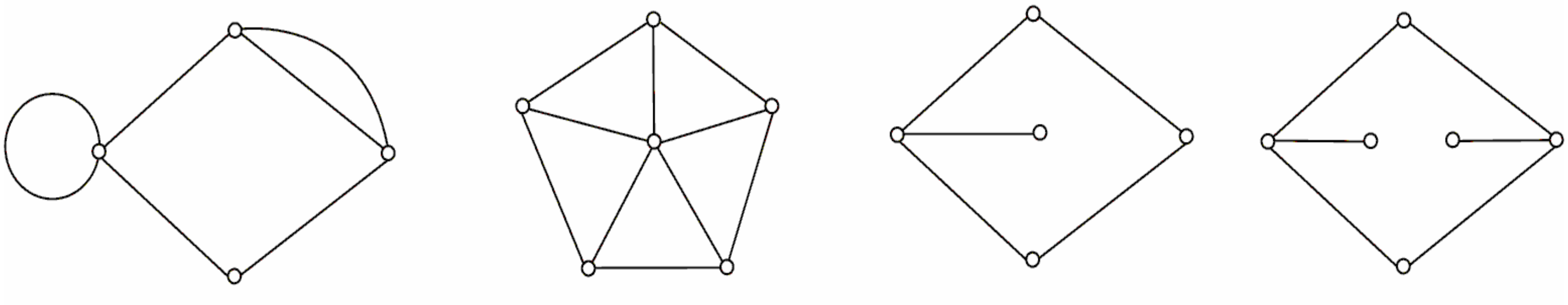
因此，$p(G-V_1) = p(G'-V_1-(u,v))$

$$\leq p(G'-V_1)+1$$

$$\leq |V_1|+1$$

实例

判断下面各图是否为哈密顿图或半哈密顿图？



(1) (2) (3) (4)

在上图中，

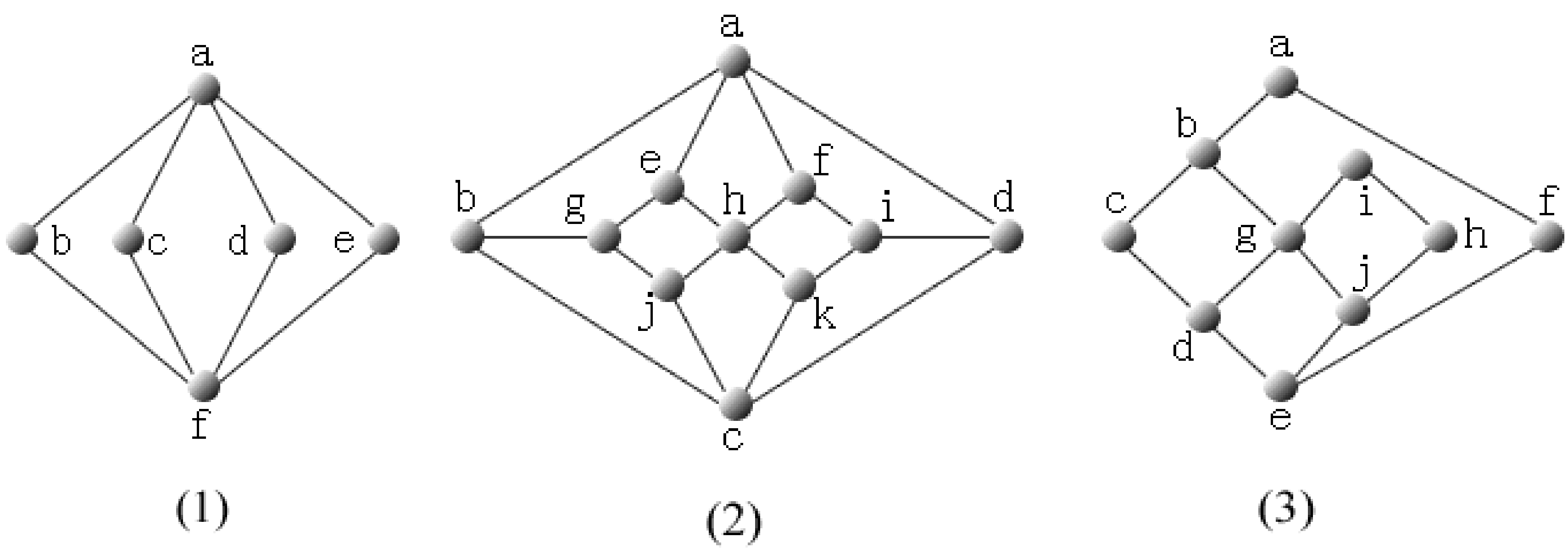
(1),(2) 是哈密顿图;

(3)是半哈密顿图;

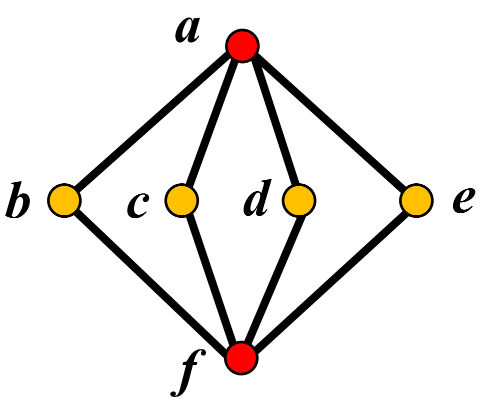
(4)既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图

实例

- 下图所示的3个图都是二部图，它们中的哪些是哈密顿图?哪些是半哈密顿图?为什么?

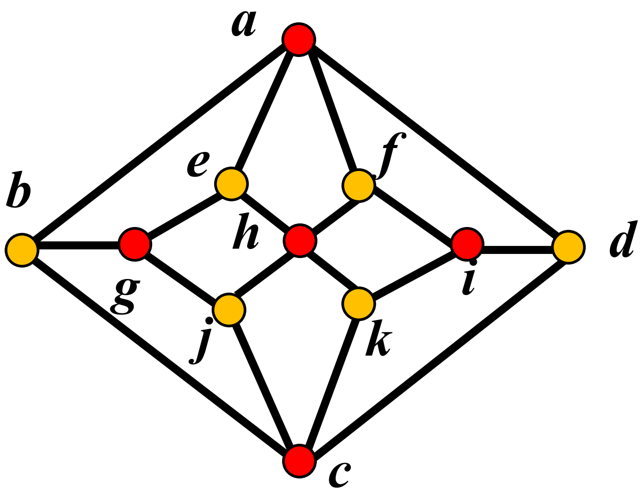


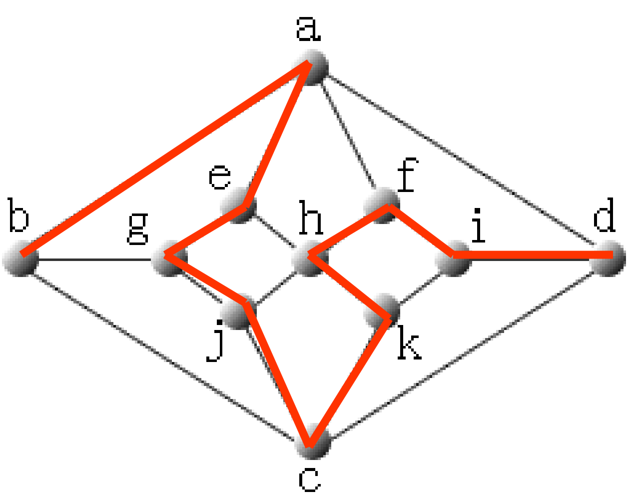
实例（续）



- 解:
  - 在图1中,互补顶点子集 $V_1=\{a,f\},V_2=\{b,c,d,e\}$.
  - 设此二部图为$G_1=<V_1,V_2,E>$. $p(G_1-V_1)=|V_2|=4>|V_1|=2$.
  - 由定理15.6及其推论可知,G_1不是哈密顿图，也不是半哈密顿图.

实例（续）

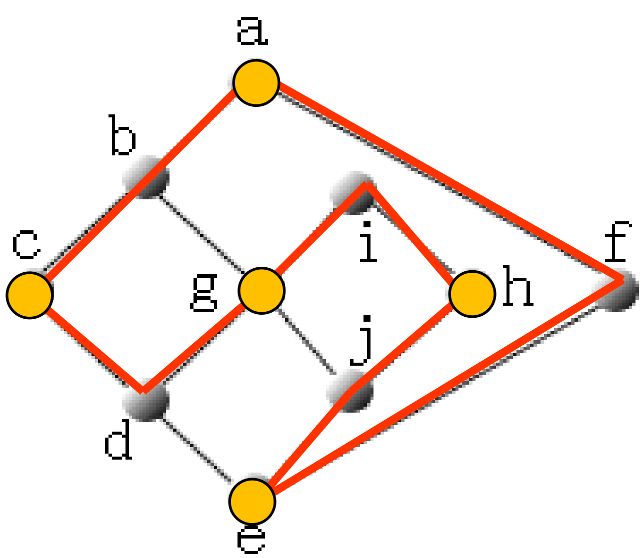




- 解:
  - 设图为G_2=<V_1,V_2,E>,其中V_1={a,g,h,i,c},V_2={b,e,f,j,k,d}.
  - $p(G_2-V_1)=|V_2|=6 > |V_1|=5$.
  - 由定理15.6可知,G_2不是哈密顿图.而$baegjckhfid$是条哈密顿通路,故G_2是半哈密顿图.

例（续）

- 解：
  - 在图中，*abcdgihjefa*是一条哈密顿回路，所以它是哈密顿图.
  - 设这个图为G_3=<V_1,V_2,E>，其中$V_1=\{a,c,g,h,e\}$，$V_2=\{b,i,f,d,j\}$.
  - 此处有$|V_1|=|V_2|$

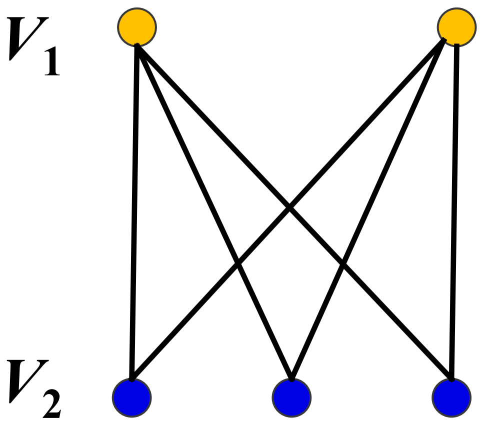


(3)

问题

证明：完全二部图$K_{r,s}$($r \geq 2$, $s \geq 2$, $r \neq s$, $r < s$) 不是哈密顿图。

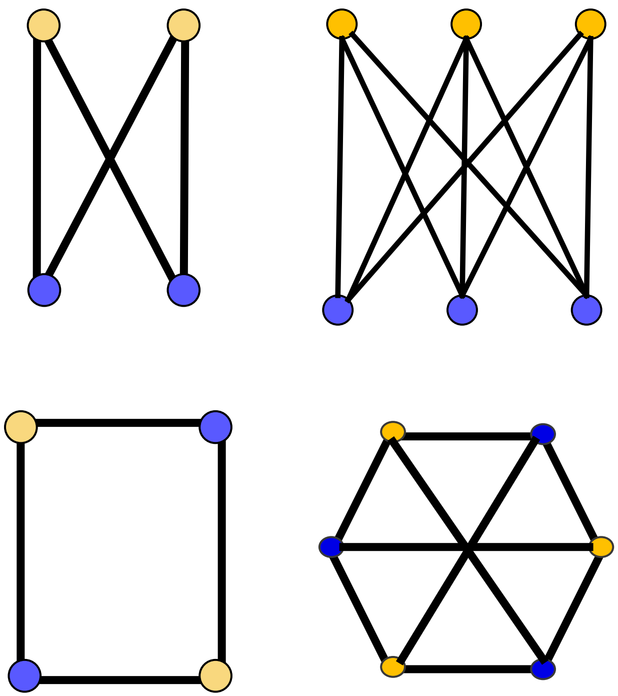
- 证明：设 $K_{r,s}$=<V_1,V_2,E >，
  - $p(K_{r,s}-V_1) = s > r$.
- 由定理15.6，$K_{r,s}$不是哈密顿图

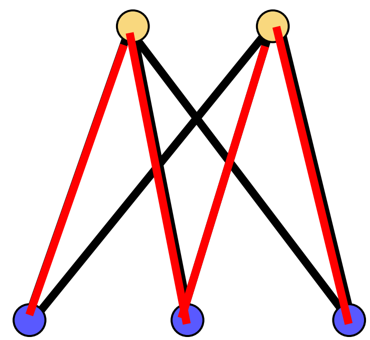


考察完全二部图

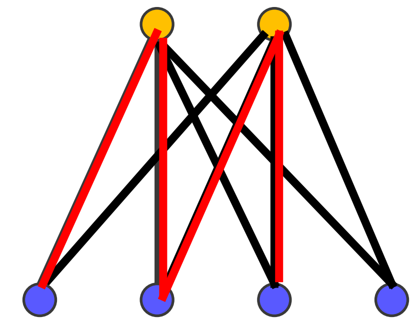
- 设完全二部图$G=<V_1, V_2, E>$，
  $|V_1| \le |V_2|$， $|V_1| \ge 2$， $|V_2| \ge 2$，则：
  - 若$|V_1| = |V_2|$都是哈密顿图
  - 若$|V_2| = |V_1|+1$都是半哈密顿图
  - 若$|V_2| \ge |V_1|+2$都不是哈密顿图，也不是半哈密顿图

考察完全二部图





半哈密顿图



非哈密顿图

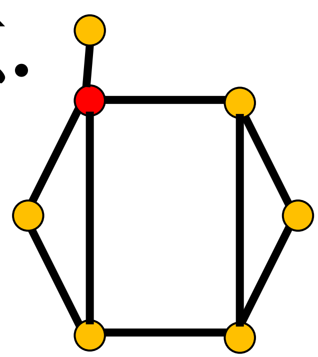
实例

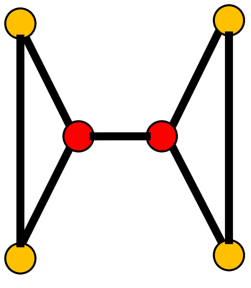
- **求证：**设G为n阶无向连通简单图，若G中有割点或桥，则G不是哈密顿图.
- 证明：方法一

（1）设G中有割点v，则 $p(G-v) \geq 2>|\{v\}|=1$.

（2）K_2有桥，它显然不是哈密顿图.

除K_2外，其它有桥的图（无向连通简单图）均有割点.





实例（续）

- 方法二：反证法
- 如果图G是哈密顿图，则必存在哈密顿回路，即所有结点均在一个回路中，此时删除任意一个结点或者一条边后的图仍是连通的，于是图G中没有割点和桥，产生矛盾。
- 即:有割点或者桥的图不是哈密顿图.

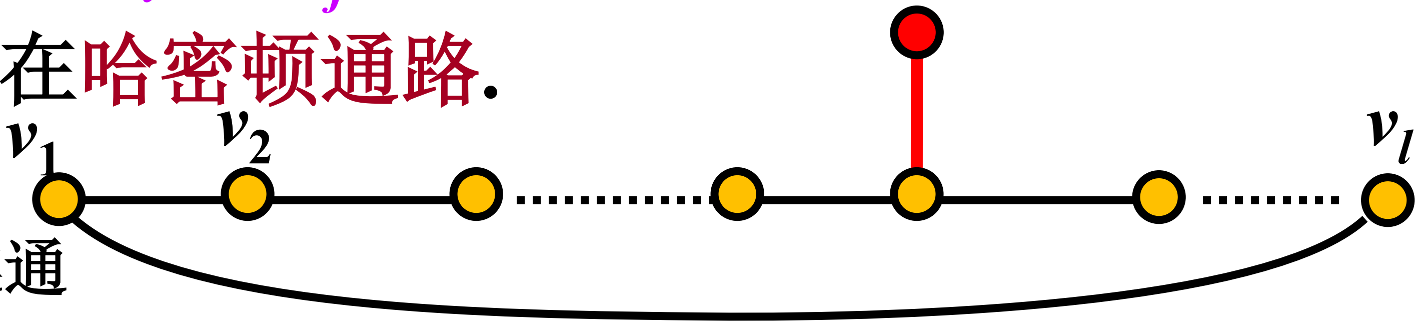
无向半哈密顿图的一个充分条件

- **定理15.7** 设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$

则G 中存在**哈密顿通路**.

- **思路:**



(1) 由(*)证G连通

(2) 证明G 中存在哈密顿通路。

2.1 $\Gamma = v_1v_2\ldots v_l$为$G$中极大路径. 若$l = n$, 证毕.

2.2 若$l < n$，证G 中存在过Γ上所有顶点的圈C

2.3由(1) 知C外存在与C上某顶点相邻顶点，从而得比Γ更长的路径，重复 (2.2) –(2.3) ，最后得G中哈密顿通路.

15.7证明

- 证明：

(1) 首先证明G是连通的。

反证法：

假设G不是连通的，则至少存在两个连通分支G_1和G_2，其阶数分别为n_1和n_2.

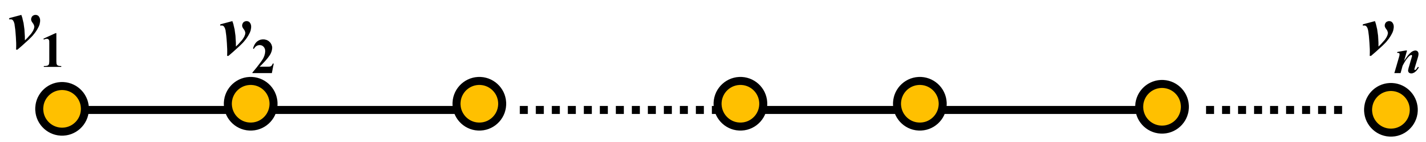
设u为G_1中的任一顶点，v为G_2中的任一顶点，则

$$d(u)+d(v) \le n_1-1 + n_2-1 = n - 2$$

这与已知条件矛盾，所以G是连通的。

15.7证明（续）

- **(2) 证明*G* 中存在哈密顿通路。**
- **(2.1) 若*G*中的一条极大路径$\Gamma = v_1v_2\ldots v_l$满足$l = n$, 则$\Gamma$为哈密顿通路，证毕.**



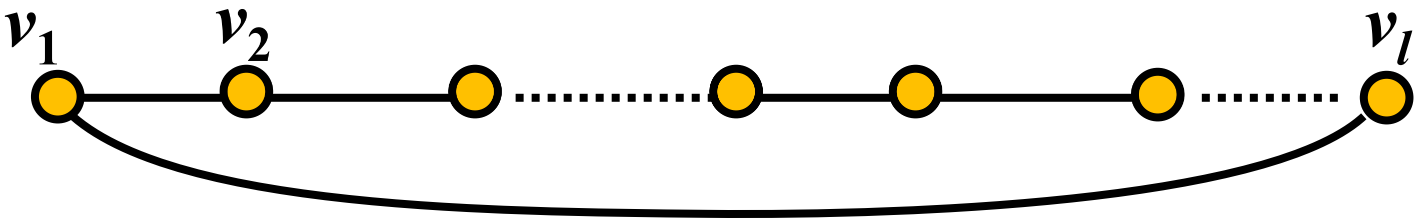
15.7证明（续）

- (2.2) 若极大路径Γ满足$l < n$，下面要证G中存在过Γ上所有顶点的圈C。

  (2.2.1) 如果v_1和v_l相邻

  则$\Gamma \cup (v_1, v_l)$即为需要的圈。

  (2.2.1) 如果v_1和v_l不相邻。

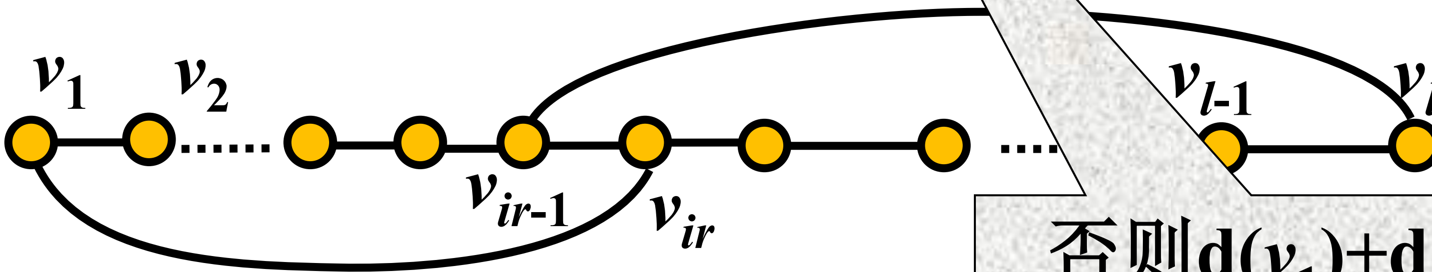


15.7证明（续）

否则$d(v_1)+d(v_l)\leq 1+(l-2)=l-1<n-1$

(2.2.2) 如果v_1和v_l不相邻。

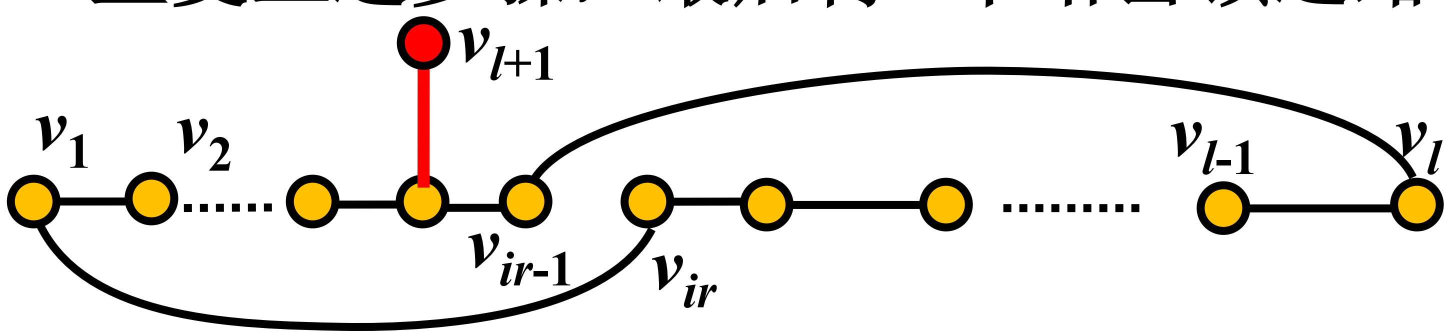
- v_1邻接于Γ上的$k(k\geq 2)$个顶点$v_2, v_{i2}, \ldots, v_{ik}$,
- 则v_l必邻接于$v_{i2-1}, \ldots, v_{ik-1}$中的一个.
- 设v_l邻接于v_{ir-1},则$C=(v_1, v_2, \ldots, v_{ir-1}, v_l, v_{l-1}, \ldots, v_{ir}, v_1)$是一个圈.



否则$d(v_1)+d(v_l)\leq k+(l-2)-(k-1)=l-1<n-1$

15.7证明（续）

- (2.3) 若极大路径Γ满足$l < n$，已证明G中存在过Γ上所有顶点的圈C。
  - 由G的连通性知圈C外顶点存在与C上某顶点相邻顶点v_{l+1}
  - 从而得比Γ更长的路径.
  - 重复上述步骤，最后得G中哈密顿通路.



无向哈密顿图的一个充分条件

- **推论** 设G为n ($n\geq3$) 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n \qquad (**)$$

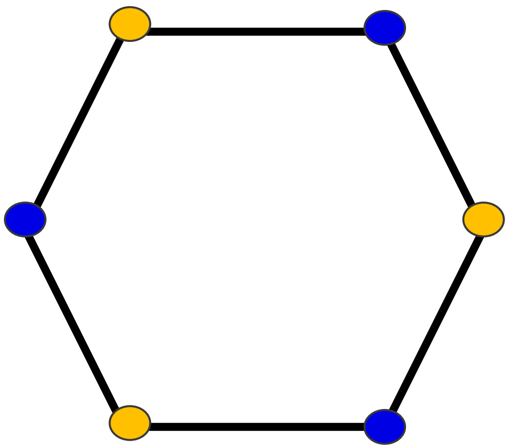
则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图.

- **证明思路:**

由定理15.7得$\Gamma= v_1v_2\ldots v_n$ 为G中哈密顿通路.
若$(v_1,v_n)\in E(G)$，得证.
否则利用（**）证明存在过$v_1, v_2,\ldots, v_n$的圈(哈密顿回路).

无向哈密顿图的一个充分条件

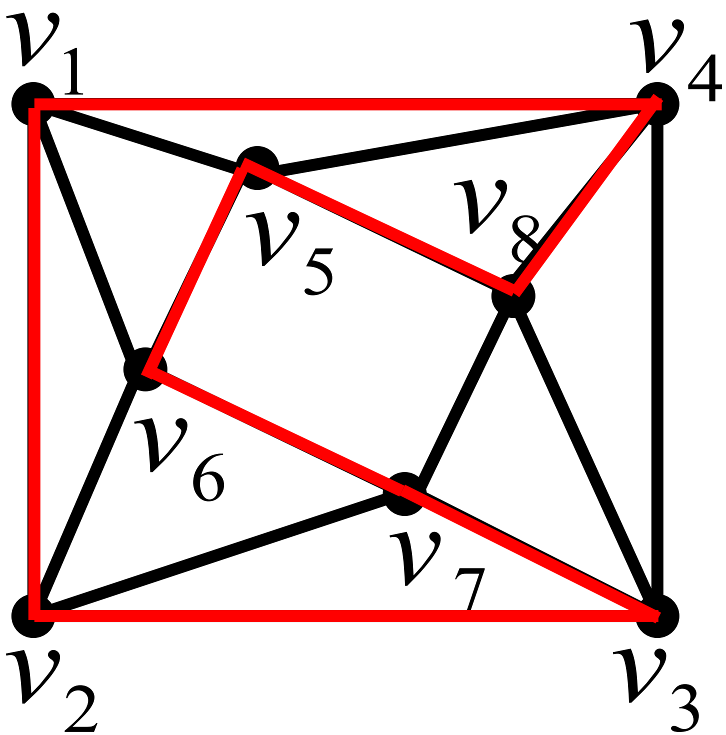
- **注意：定理15.7及推理是充分条件。**
- **不满足该定理的图也可能是哈密顿图！**

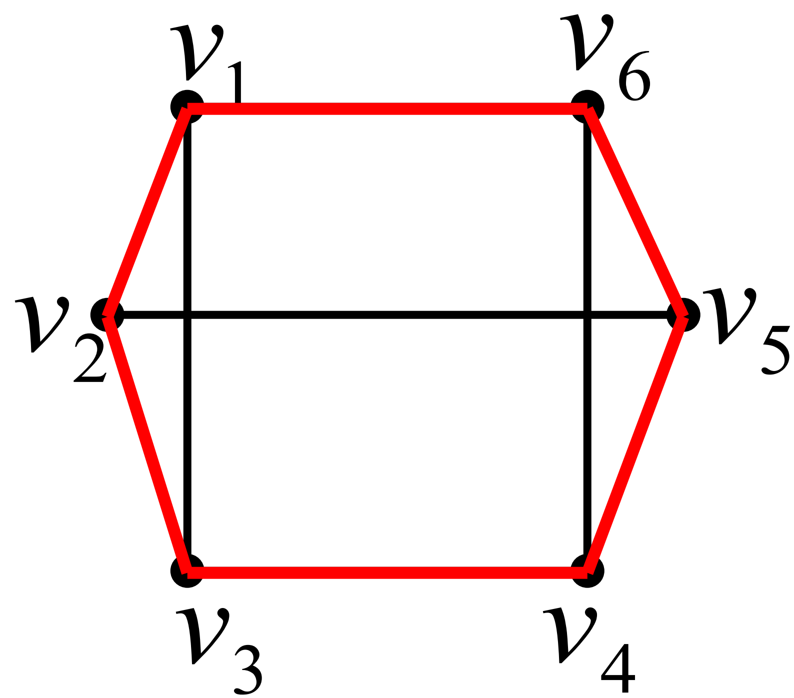


$d(u)+d(v) = 4 < 6$

G 是哈密顿图。

实例





$d(u)+d(v) = \mathbf{8} = \mathbf{n}$

G 是哈密顿图。

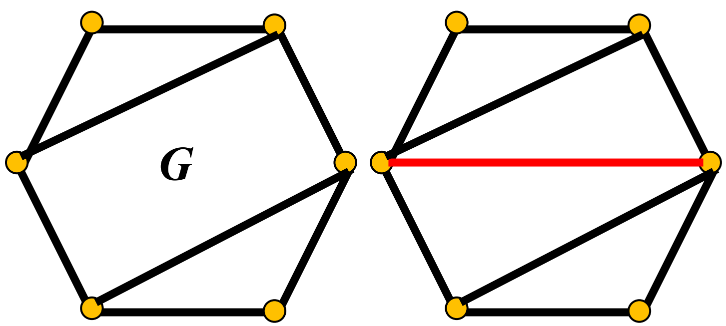
$d(u)+d(v) = \mathbf{6} = \mathbf{n}$

G 是哈密顿图。

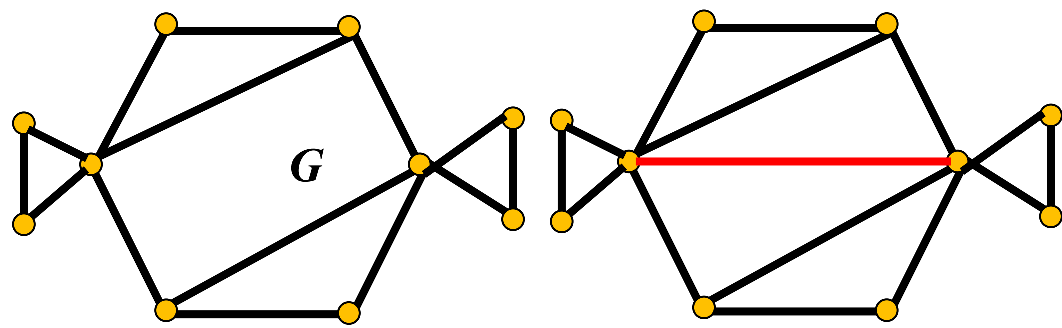
无向哈密顿图的一个充要条件

- **定理15.8** 设u,v为n阶无向简单图G中两个不相邻的顶点，且$d(u)+d(v)\geq n$，

则G为哈密顿图当且仅当$G\cup(u,v)$为哈密顿图。



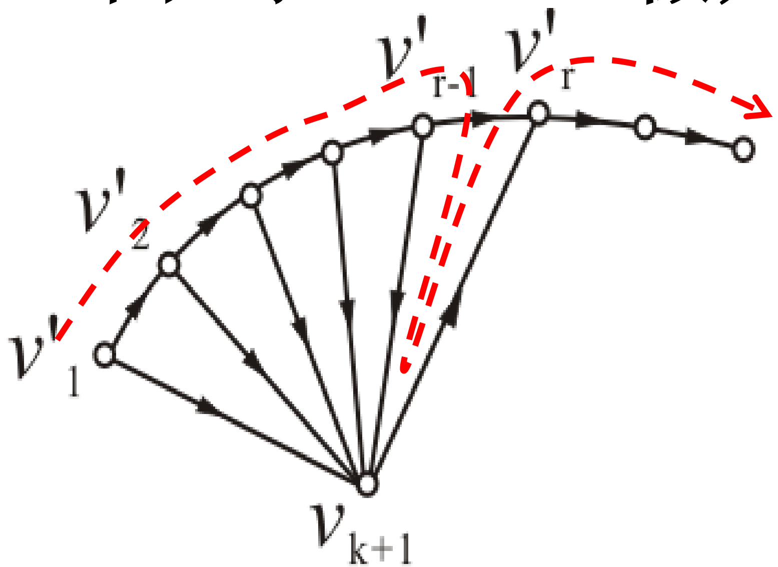
哈密顿图

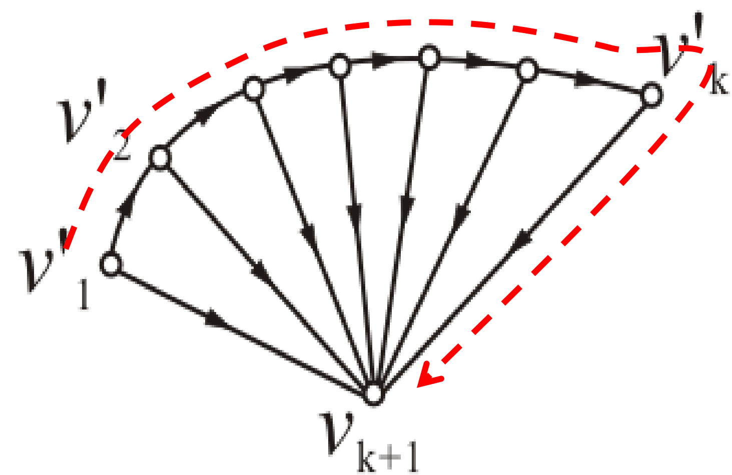


非哈密顿图

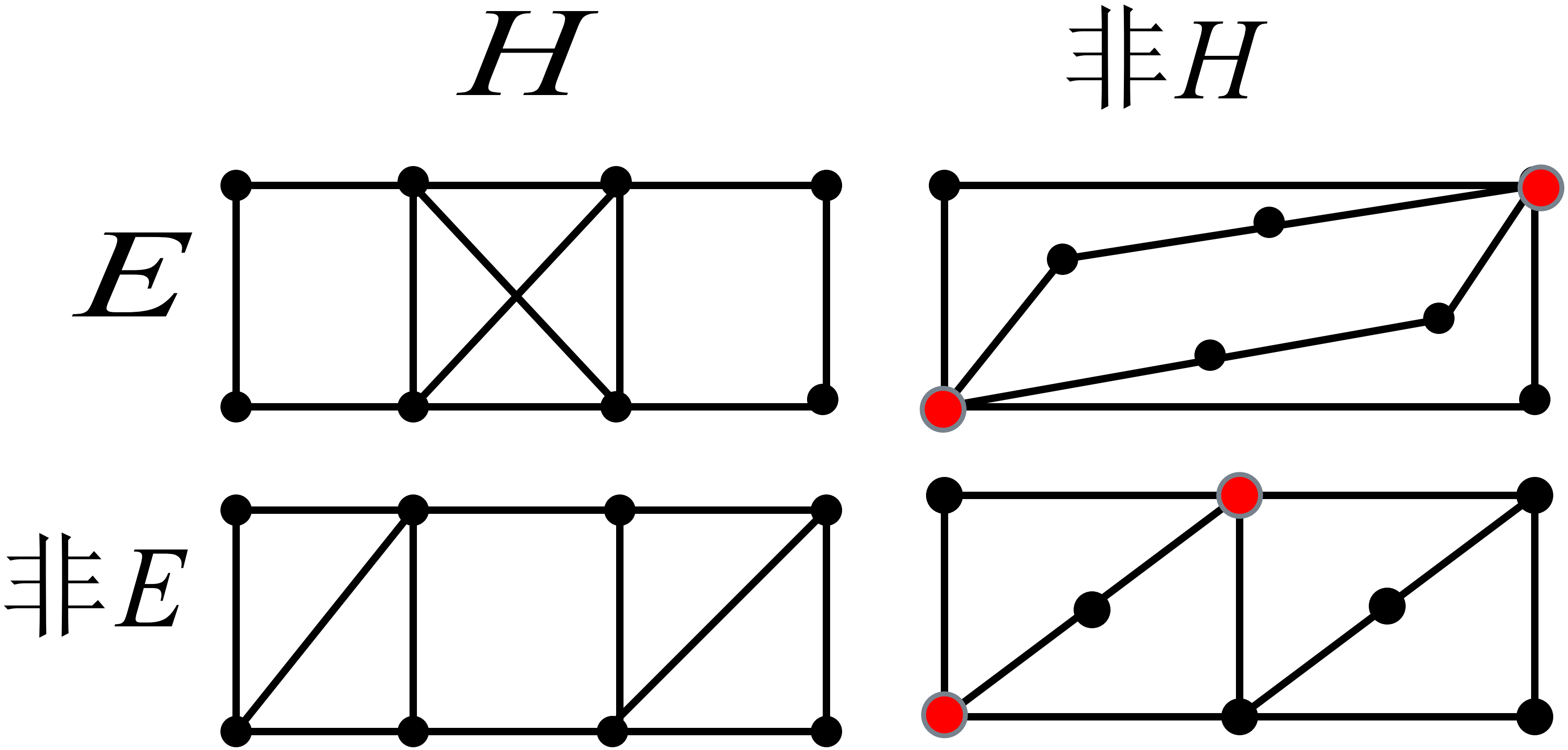
$n(n\geq 2)$阶竞赛图中存在哈密顿通路

- **定理15.9** 若D为n（$n\geq 2$）阶竞赛图，则D中具有哈密顿通路
- **证明思路：** 注意，竞赛图的基图是无向完全图. 对n（$n\geq 2$）做归纳. 只需观察下面两个图.





练习：判断下列图哪些是 E 图、H图？



实例

- 在某次国际会议的预备会议中，共有8人参加，他们来自不同的国家。已知他们中任何两个无共同语言的人中的每一个与其余有共同语言的人数之和大于或等于8，问能否将这8个人排在圆桌旁，使其任何人都能与两边的人交谈。

实例

解 设8个人分别为$v_1,v_2,\ldots,v_8$，作无向简单图$G=<V,E>$，中$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_8\}$，$\forall v_i,v_j \in V$，且$i\neq j$，

若v_i与v_j有共同语言，就在v_i,v_j之间连无向边(v_i,v_j)，

由此组成边集合E，则G为8阶无向简单图，

$\forall v_i \in V$，$d(v_i)$为与v_i有共同语言的人数。

由已知条件可知，$\forall v_i,v_j \in V$且$i\neq j$，均有$d(v_i)+d(v_j)\geq 8$。

由定理15.7的推论可知，G中存在哈密顿回路，

设$C=v_{i1}v_{i2}\ldots v_{i8}$为$G$中一条哈密顿回路，

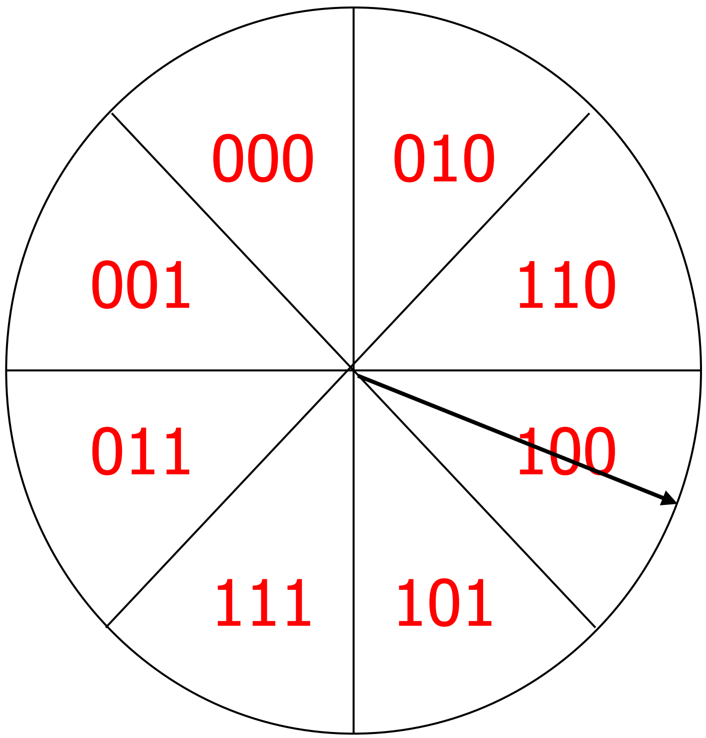
按这条回路的顺序安排座次即可。

练习

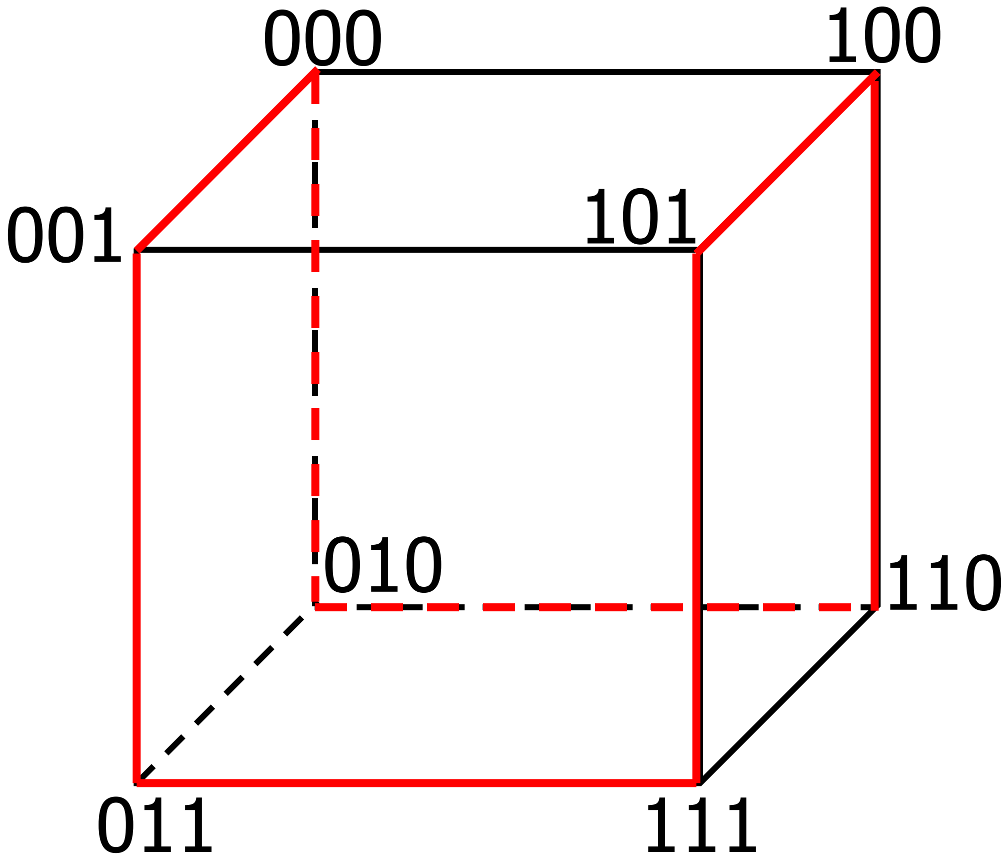
- 考虑在七天内安排七门课程的考试，使得同一位老师所担任得两门课程的考试不排在连续的两天中。试证明如果没有教师担任多于四门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。
- 解：设G为具有七个结点的图，每个结点对应于一门考试课程，如果这两个结点对应的课程考试是由不同教师担任的，那么这两个结点之间有一条边。
- 因为每个教师所担任的课程数不超过4，所以每个结点的度数至少是3，任两个结点的度数之和至少是6，所以G中包含一条汉密尔顿路，它对应着这七门考试的一个安排。

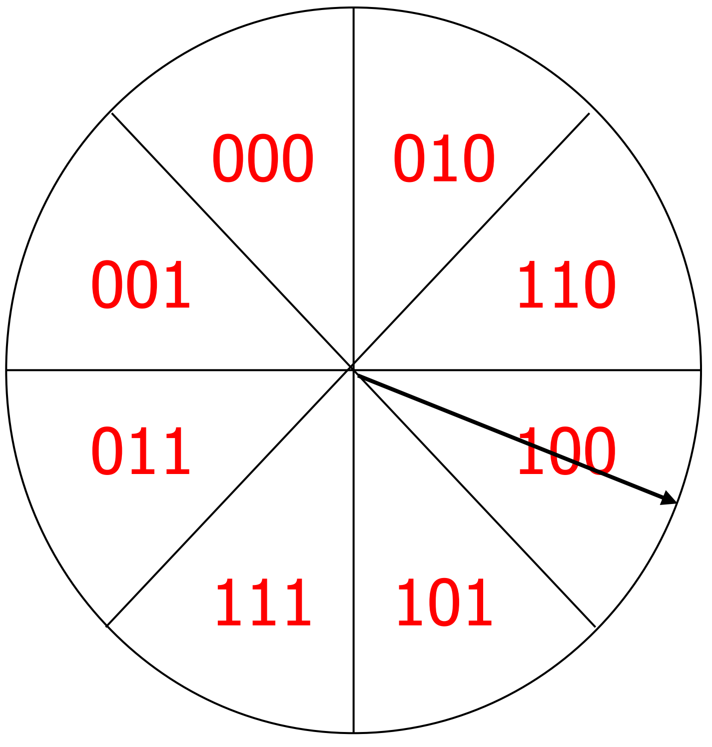
格雷码的设计

- 格雷码是圆周的弧的一种标记,使得相邻的弧具有恰好相差一位的位标记串.
- 格雷码是20世纪40年代AT&T贝尔实验室的弗兰克•格雷为了把传输数字信号过程中的错误影响降到最低而发明.



格雷码的设计





判断某图是否为哈密顿图方法

- 判断某图是否为哈密顿图至今还是一个难题.

总结判断某图是哈密顿图或不是哈密顿图的某些可行的方法.

- 1. 观察出哈密顿回路.

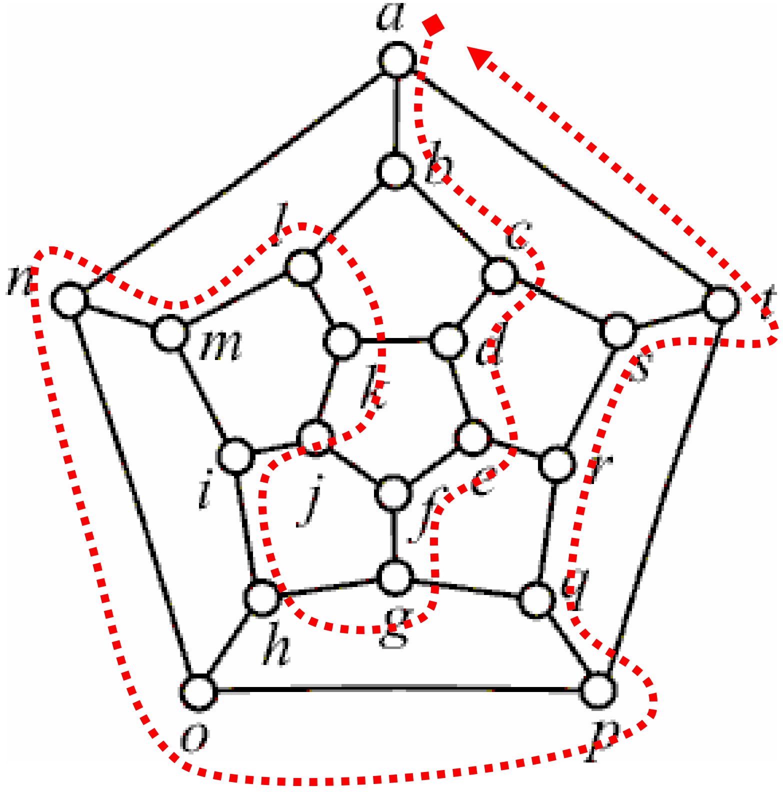
例3 右图(周游世界问题)是哈密顿图

a b c d e f g h i j k l m n p q r s t a

为图中的一条哈密顿回路.

注意:

此图不满足定理15.7的推论的条件.



判断某图是否为哈密顿图方法

- 2．满足定理15.7推论的条件（**）.

例4 完全图K_n ($n\geq 3$) 中任何两个顶点u,v，均有

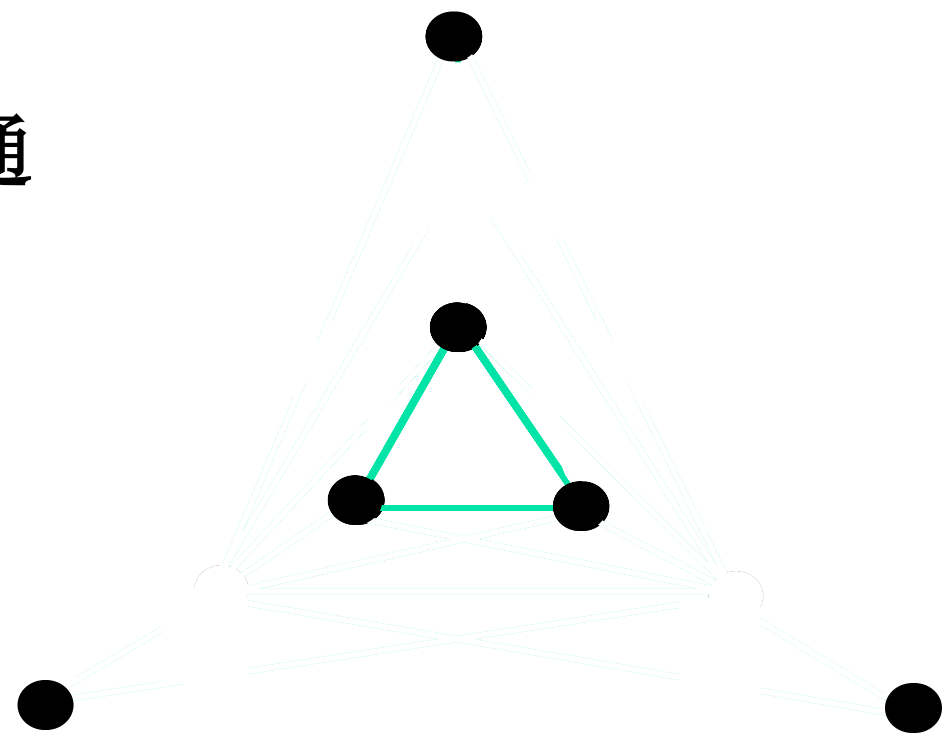
$$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n\ (n\geq 3),$$

所以K_n为哈密顿图.

判断某图是否为哈密顿图方法

- 3．破坏定理15.6的条件的图不是哈密顿图.

例5 取$S=\{A,B,C\}$，
从图中删除S得4个连通分支，
而$|S|=3$，
该图不是Hamilton图。

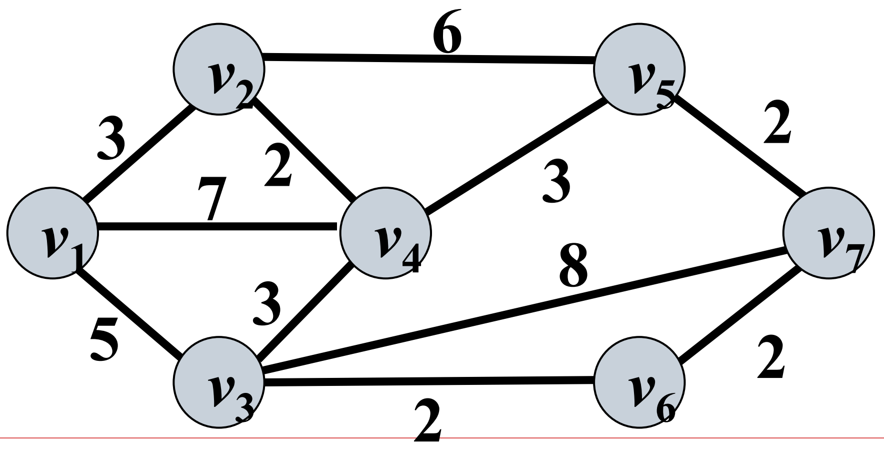


15.3 最短路问题、中国邮递员问题与货郎担问题

带权图

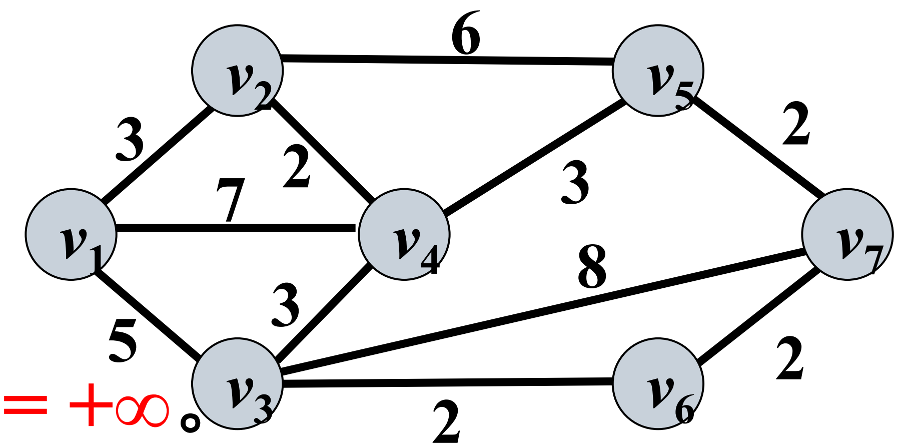
- 定义15.3带权图设图$G = <V,E>$，(无向图或有向图)，给定$W:E \to \mathrm{R}$ (R为实数集)，

对G中任意边$e = (v_i,v_j)$ (G为有向图时，$e = <v_i,v_j>$)，设$W(e) = w_{ij}$，称实数w_{ij}为边e上的权，并将w_{ij}标注在边e上，称G为带权图，此时常将带权图G记作$<V,E,W>$.



最短路径

- 设P是G中的一条通路，P中所有边的权之和称作**通路P的长度**，记为$W(P)$.
- 假设G中的所有权都为**非负实数**，对于任意顶点u,v， u和v连通时，称从u到v长度最短的路径为从u到v的**最短路径**，该路径的长度称为从u到v的**距离**，记为$d(u,v)$。
- 约定
  - $d(u,u) = 0$;
  - u和v不连通时$d(u,v) = +\infty$。



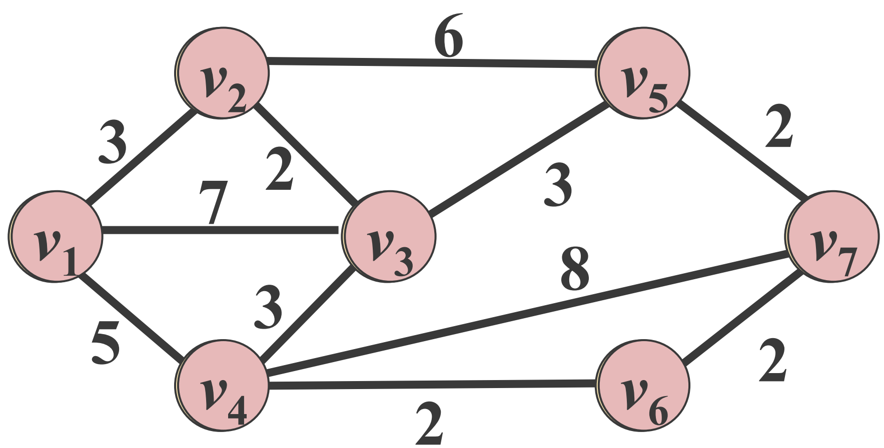
Dijkstra 算法

- 辅助集合S：
  - 当前已经得到最短路径的顶点集合
  - 初始时，S={V0}
- 辅助数组Dist
  - 求解过程中，Dist[k] 表示“当前”所求得的从源点到顶点 k 的最短路径
  - Dist[k] = <源点到顶点 k 的弧上的权值>
  - 或者Dist[k] = <源点到顶点j的路径长度> + <顶点j到顶点 k 的弧上的权值>

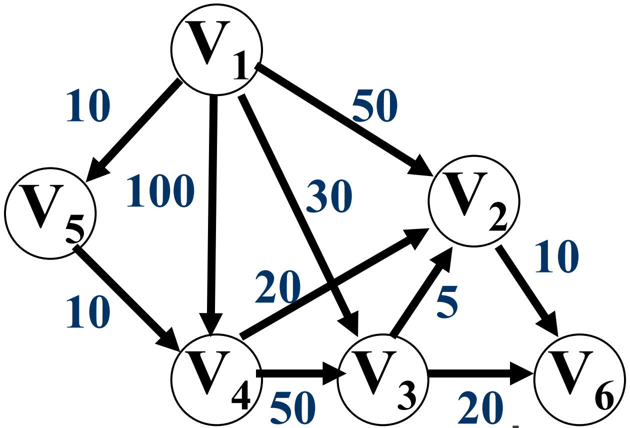
Dijkstra 算法

- 1）在所有从源点出发的弧中选取一条权值最小的弧，即为第一条最短路径。
  - V0和k之间存在弧： Dist[k]＝G.arcs[v0][k]
  - V0和k之间不存在弧： Dist[k]＝无穷
- 2）依次修改其它未得到最短路径顶点的Dist[k]值。
  - 假设最近求得最短路径的顶点为u，
  - 则 Dist[k] ＝min(Dist[k], Dist[u] + G.arcs[u][k])

步骤	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	1,0	1,+∞	1,+∞	1,+∞	1,+∞	1,+∞	1,+∞
2	1,0	1,3	1,7	1,5	1,+∞	1,+∞	1,+∞
3	1,0	1,3	2,5	1,5	2,9	1,+∞	1,+∞
4	1,0	1,3	2,5	1,5	3,8	1,+∞	1,+∞
5	1,0	1,3	2,5	1,5	3,8	4,7	4,13
6	1,0	1,3	2,5	1,5	3,8	4,7	6,9
7	1,0	1,3	2,5	1,5	3,8	4,7	6,9

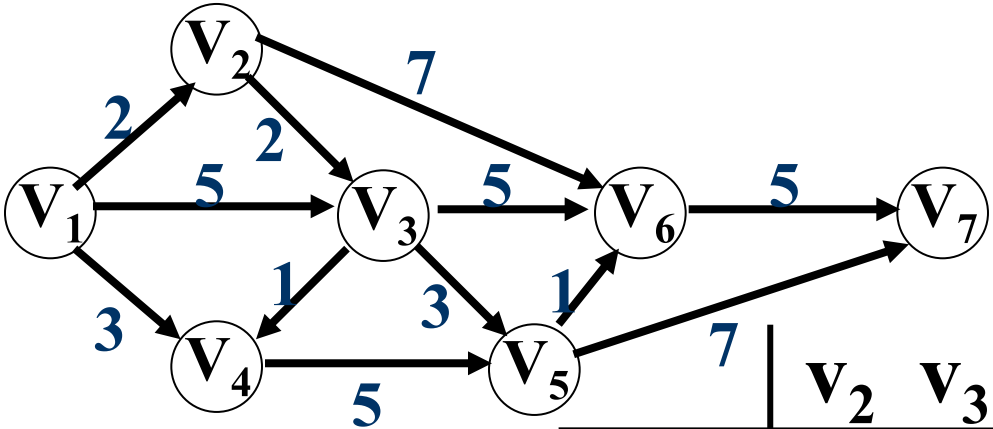


最短路例



	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	
step1	50	30	100	10/V_1	∞	10(v_5)第1短
step2	50	30	20/V_5		∞	20(v_4)第2短
step3	40	30/V_1			∞	30(v_3)第3短
step4	35/V_3				50	35(v_2)第4短
step5					45/V_2	45(v_6)第5短

最短路练习

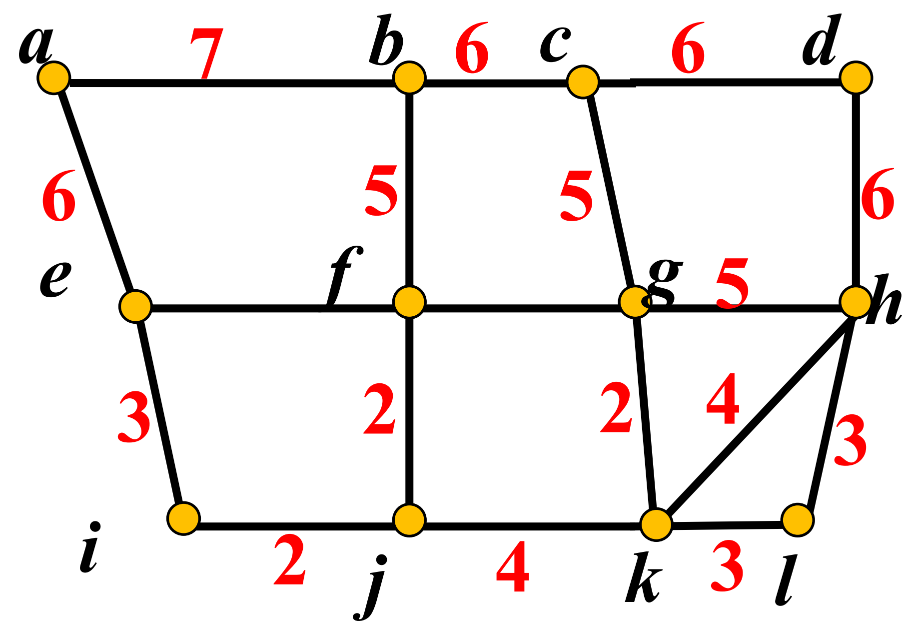


	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	
step1	2	5	3	∞	∞	∞	2(v_2)第1短
step2		4	3	∞	9	∞	3(v_4)第2短
step3		4		8	9	∞	4(v_3)第3短
step4				7	9	∞	7(v_5)第4短
step5					8	14	8(v_6)第5短
step6						13	13(v_7)第6短

中国邮递员问题

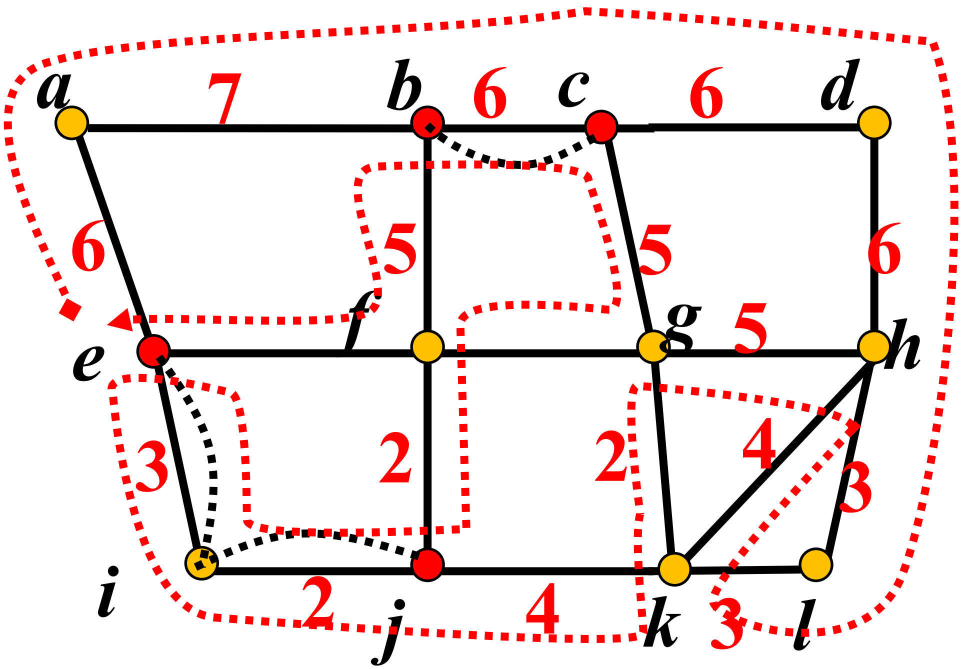
- 邮递员从邮局出发，走遍他负责的街区投递邮件，最后回到邮局，问：怎么走才能使他走的路最短。
- 给定一个带权无向图，其中每条边的权为非负实数。求每一条边至少经过一次的最短回路。

（管梅谷，1962）



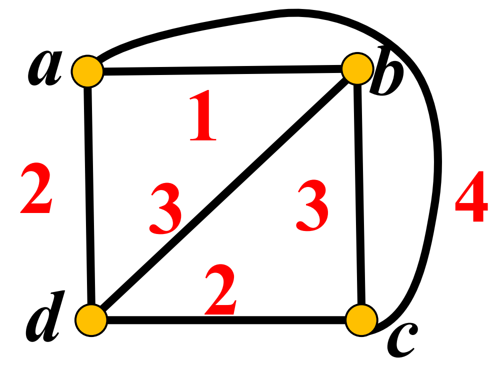
中国邮递员问题

- 求解：
- (1) 若是欧拉图，则欧拉回路是最短投递线。
- (2) 否则，图中有偶数个奇度顶点，只需要把每对奇度点之间沿着最短路径重复走一遍即可。

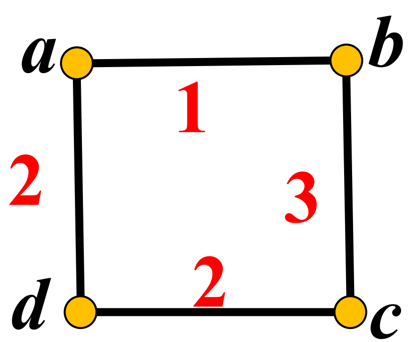


货郎担问题（旅行商问题）

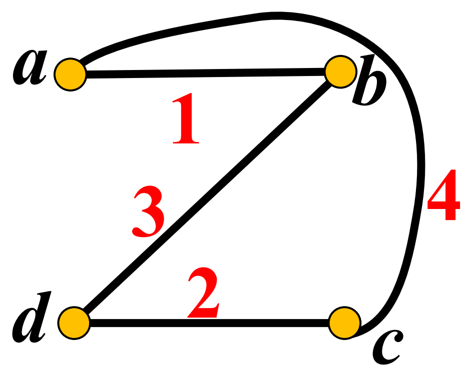
- **货郎担问题：**设$G=<V,E,W>$为一个n阶完全带权图K_n，各边的权非负，且有的边的权可能为∞，求G中的一条**最短的哈密顿回路**.



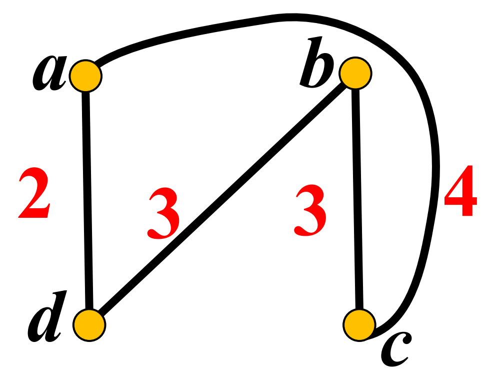
- 例：带权图K_4中的货郎担问题。



8



10



12

货郎担问题（旅行商问题）

- 说明：完全带权图K_n（$n\geq3$）中不同的哈密顿回路数

(1) K_n中有$(n-1)!$ 条不同的哈密顿回路（标定意义下）

(2) 完全带权图中有$(n-1)!$ 条不同的哈密顿回路

(3) 用穷举法解货郎担问题算法的复杂度为 $(n-1)!$，当n较大时，计算量极大.

(4) 至今没有找到解决TSP问题的有效算法，它是一个**NP难**问题。