第七章 二元关系

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

第七章 二元关系

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

7.1 有序对与笛卡儿积

- 定义7.1 由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为有序对，记作 $\langle x, y\rangle$.

- 有序对性质:

(1) 有序性 $\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$（当$x\neq y$时）

(2) $\langle x, y\rangle$与$\langle u, v\rangle$相等的充分必要条件是

$$\langle x, y\rangle=\langle u, v\rangle \Leftrightarrow x=u \wedge y=v.$$

笛卡儿积

定义7.2 设A,B为集合，A与B的笛卡儿积记作$A\times B$，且 $A\times B=\{<x,y>\mid x\in A\wedge y\in B\}$.

例1 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<a,3>,<b,3>,<c,3>\}$

$A=\{\varnothing\}$, $B=\varnothing$

$P(A)\times A=\{<\varnothing,\varnothing>,<\{\varnothing\},\varnothing>\}$

$P(A)\times B=\varnothing$

实例

- 做一个市场调查，被调查的人群按照如下规则分类：
  性别S：男(m); 女(f)
  学历L：初中(e); 高中(h); 大学(c) ;大学以上(g)
  即 $S=\{m,f\}$ $L=\{e,h,c,g\}$
  则$S\times L$包含了所有人群的分类(8类）。
- 一个软件厂商为其所开发的软件提供了三个属性：
  开发语言：$L=\{c,j,b\}$
  内存：$M=\{4G,8G,16G\}$
  操作系统： $O=\{u,w\}$
  则 $L\times M\times O$包括了该软件的所有分类（18类）。

笛卡儿积的性质

(1)若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 就是空集.

$$A\times\varnothing = \varnothing\times B = \varnothing$$

(2)不适合交换律

$$A\times B \neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

(3)若 $|A| = m$, $|B| = n$, 则 $|A\times B| = mn$

(4)不适合结合律

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing,\ C\neq\varnothing)$$

笛卡儿积的性质

(5)对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$$

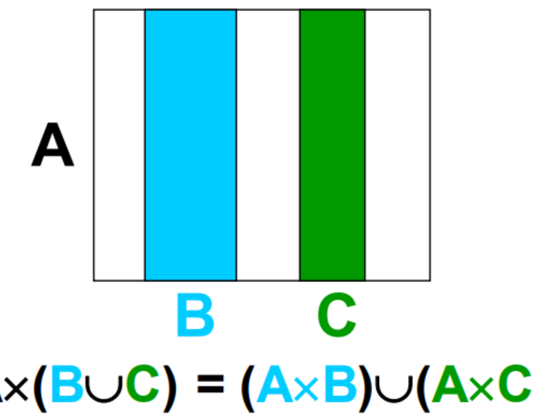
$$(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

性质证明

证明： $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$



证明： 任取$<x,y>$，

$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee<x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

实例

(1) 证明$A=B, C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$是否推出 $A=B,C=D$? 为什么？

解： (1) 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in A\times C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C$$

$$\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in D$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in B\times D$$

(2) 不一定. 反例如下：

$A=\{1\}$， $B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则$A\times C = B\times D$但是$A \neq B$.

7.2 二元关系

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

7.2 二元关系

定义7.3 如果一个集合满足以下条件之一：

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序对

(2) 集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系，记作R.

如果$<x, y>\in R$, 可记作xRy;

如果$<x, y>\notin R$, 则记作 $x \not R y$

实例：$R=\{<1,2>,<a,b>\}$, $S=\{<1,2>,a, b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系

根据上面的记法，可以写$1R2$, aRb, $a \not R c$.

A到B的关系与A上的关系

- 定义7.4设A,B为集合, $A\times B$的任何子集所定义的二元关系称为从A到B的二元关系,当A=B时则称为A上的二元关系.

- 例3 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, 那么

  $R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$

  R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系,

  R_3 和 R_4 也是A上的二元关系.

A到B的关系与A上的关系

- 计数: $|A|=n$, $|A\times A|=n^2$,

问：1. $A\times A$的子集有多少个？

2. A上有多少个不同的二元关系？ 2^{n^2}

- 例如 $|A| = 3$,

则 A上有=512个不同的二元关系.

A上重要关系的实例

定义7.5 设 A 为集合,

(1) $\varnothing$是A上的关系，称为空关系

(2) 几个常见关系：

全域关系 $E_A = \{\langle x,y\rangle \mid x\in A \land y\in A\} = A\times A$

恒等关系 $I_A = \{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$

小于等于关系 $L_A = \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \land x\le y\}$, A为实数子集

整除关系 $D_B = \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in B \land x$整除$y\}$, B为非0整数子集

包含关系 $R_\subseteq = \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \land x\subseteq y\}$, A是集合族.

实例

例如, A={1, 2}, 则

$$E_A = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$$

$$I_A = \{<1,1>,<2,2>\}$$

例如，$A = \{1, 2, 3\}$, 则

$$L_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$$

$$D_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$$

实例

例如 $B=\{a, b\}$, $A = P(B) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,
则 A上的包含关系是

$$R_{\subseteq} = \{ \langle\varnothing,\varnothing\rangle,\langle\varnothing,\{a\}\rangle,\langle\varnothing,\{b\}\rangle,\langle\varnothing,\{a,b\}\rangle,$$
$$\langle\{a\},\{a\}\rangle, \langle\{a\},\{a,b\}\rangle,$$
$$\langle\{b\},\{b\}\rangle, \langle\{b\},\{a,b\}\rangle,$$
$$\langle\{a,b\},\{a,b\}\rangle \}$$

类似的还可以定义：

小于关系，　　　　大于关系，

大于等于关系，　　真包含关系等.

实例

已知有五个城市的航班服务，下表是从c_i到c_j的航线的票价，

From \ To	*C1*	*C2*	*C3*	*C4*	*C5*
C1		**1400**	**1000**	**1500**	**2000**
C2	**1900**		**2000**	**1600**	**2200**
C3	**1100**	**1800**		**1900**	**2500**
C4	**1900**	**2000**	**1200**		**1500**
C5	**2000**	**1000**	**2000**	**1500**	

R是定义在城市的集合 $A=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5\}$上的关系，$c_i$ R c_j当且仅当从c_i到c_j的票价小于1500.

解： R =

{<c1,c2>,
<c1,c3>,
<c3,c1>,
<c4,c3>,
<c5,c2>}

关系的表示

1. **集合表达式**

2. **关系矩阵**

   若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\ r_{ij}\ ]_{m\times n}$，其中 $r_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, y_j\rangle \in R$.

3. **关系图**

   若$A= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=\langle A, R\rangle$, 其中$A$为结点集，$R$为边集. 如果$\langle x_i,x_j\rangle$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

关系的表示

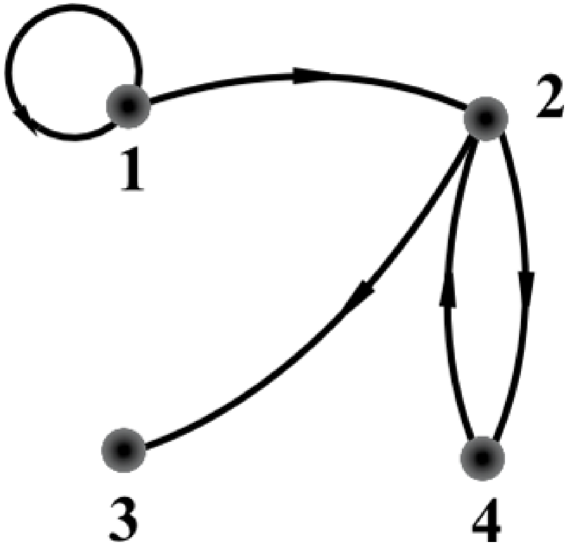
注意：

- 关系矩阵适合表示从A到B的关系或A上的关系（A,B为有穷集）
- 关系图适合表示有穷集A上的关系

实例

- $A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$, R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



关系的集合运算

- 若R和S是从集合X到集合Y的两个关系，则R、S的并、交、补、差、对称差仍是X到Y的关系。
- 例： A 是一所学校所有学生的集合，B是该校所有课程的集合。

R_1: 包含所有的有序对<a,b>, 其中学生a学习了课程b;

R_2: 包含所有的有序对<a,b>, 其中学生a需要学习课程b。

求：$R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \oplus R_2$?

例（续）

解：

- $R_1 \cup R_2$包含所有的有序对<a,b>, 其中学生a学习了课程b， 或a需要学习b.
- $R_1 \cap R_2$包含所有的有序对<a,b>, 其中学生a学习了课程b，并且他需要学习b.
- $R_1 \oplus R_2$包含所有的有序对<a,b>, 其中学生a学习了课程b，但是他并不需要学习b;或者a需要学习课程b，但是他没有学习.

关系R

Sname	Sex
李敬	女
高全英	女
吴秋娟	女
穆金华	男
张欣欣	女
王婷	女

关系S

Sname	Sex
赵成刚	男
张峰	男
吴秋娟	女
穆金华	男
孙政先	男
王婷	女
吕文昆	男
孙炜	女

关系RUS

Sname	Sex
李敬	女
高全英	女
吴秋娟	女
穆金华	男
张欣欣	女
王婷	女
赵成刚	男
张峰	男
孙政先	男
吕文昆	男
孙炜	女

关系R

Sname	Sex
李敬	女
高全英	女
吴秋娟	女
穆金华	男
张欣欣	女
王婷	女

关系S

Sname	Sex
赵成刚	男
张峰	男
吴秋娟	女
穆金华	男
孙政先	男
王婷	女
吕文昆	男
孙炜	女

关系R∩S

Sname	Sex
吴秋娟	女
穆金华	男
王婷	女

关系R

Sname	Sex
李敬	女
高全英	女
吴秋娟	女
穆金华	男
张欣欣	女
王婷	女

关系S

Sname	Sex
赵成刚	男
张峰	男
吴秋娟	女
穆金华	男
孙政先	男
王婷	女
吕文昆	男
孙炜	女

关系R-S

Sname	Sex
李敬	女
高全英	女
张欣欣	女

关系R

Sname	Sex
李敬	女
高全英	女
吴秋娟	女
穆金华	男
张欣欣	女
王婷	女

关系S

Sname	Sex
赵成刚	男
张峰	男
吴秋娟	女
穆金华	男
孙政先	男
王婷	女
吕文昆	男
孙炜	女

R⊕S

Sname	Sex
李敬	女
高全英	女
张欣欣	女
赵成刚	男
张峰	男
孙政先	男
吕文昆	男
孙炜	女

7.3 关系的运算

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

7.3 关系的运算

关系的基本运算

定义7.6 关系的**定义域**、**值域**与**域**分别定义为

$$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y\, (\langle x,y\rangle \in R) \}$$

$$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x\, (\langle x,y\rangle \in R) \}$$

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例5 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$$

$$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$$

$$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$$

关系运算(逆与合成)

定义7.7 关系的**逆运算**

$$R^{-1} = \{ <y, x> \mid <x, y> \in R \}$$

定义7.8 关系的**合成**运算

$$R \circ S = \{ <x, z> \mid \exists y\, (<x, y> \in R \wedge <y, z> \in S) \}$$

例6 $R = \{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$S = \{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^{-1} = \{<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>\}$

$R \circ S = \{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

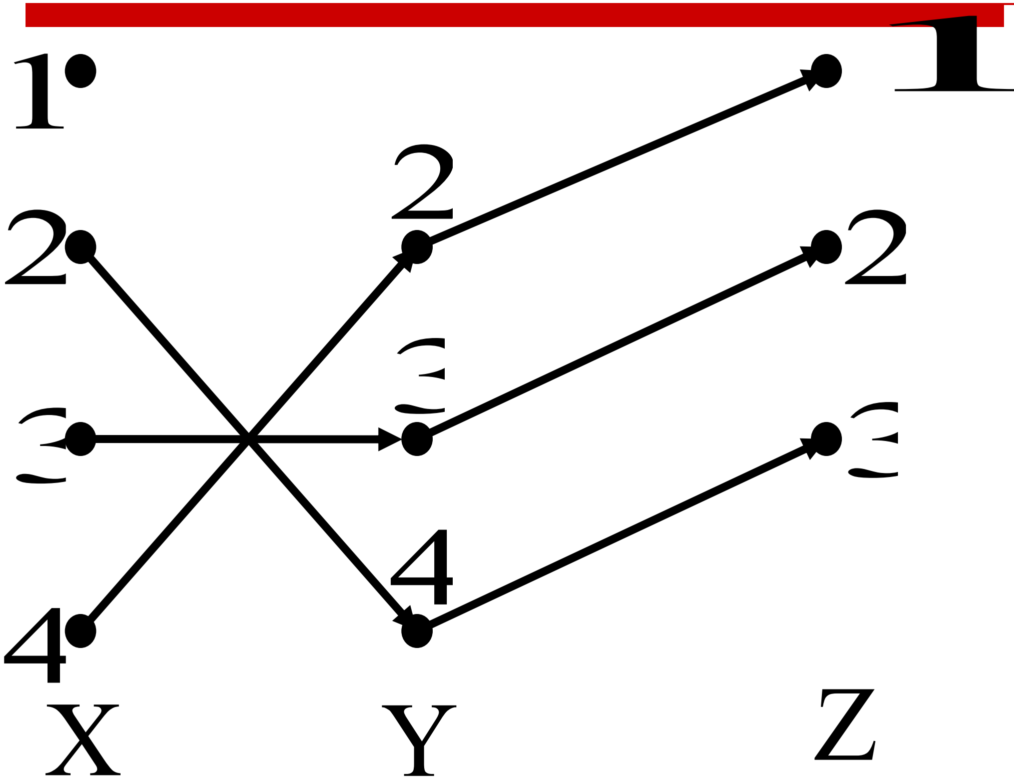
$S \circ R = \{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$

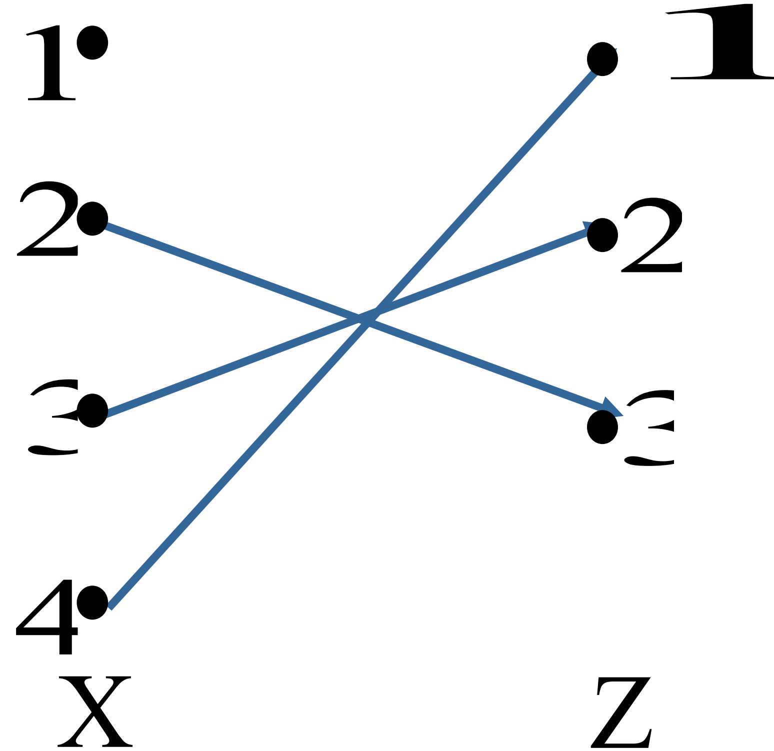
实例

- 已知$X=\{1,2,3,4\}$， $Y=\{2,3,4\}$, $Z=\{1,2,3\}$
  $R=\{<x,y>|x\in X\wedge y\in Y\wedge x+y=6\}$
  $S=\{<y,z>|y\in Y\wedge z\in Z\wedge y-z=1\}$
  求$R\circ S$, $S\circ R$
- 解:

  $R=\{<2,4>,<3,3>,<4,2>\}$
  $S=\{<2,1>,<3,2>,<4,3>\}$
  $R\circ S=\{<2,3>,<3,2>,<4,1>\}$
  $S\circ R=\{<3,4>,<4,3>\}$
  $R\circ S\neq S\circ R$

实例（示意图）





$$X \xrightarrow{\quad R \quad} Y \xrightarrow{\quad S \quad} Z, \qquad X \xrightarrow{\quad R \circ S \quad} Z$$

例

- F:父子关系
- F = {<老李, 大李>,
  <老李, 大李'>,
  <大李, 小李>}
- $F \circ F$ = {<老李, 小李>}
  祖孙关系

父	子
老李	大李
老李	大李'
大李	小李

- B : 兄弟关系
- B={<大李, 大李'>,
  <大李', 大李>}
- $B \circ F$ ={<大李', 小李>}
  叔侄关系

兄弟	兄弟
大李	大李'
大李'	大李

学生表

Sname	SID
吴秋娟	2005216111
穆金华	2005216112
张欣欣	2005216115

选课表

SID	CID
2005216111	16020010
2005216111	16020013
2005216112	16020014
2005216112	16020010
2005216115	16020011
2005216115	16020014

课程表

CID	Cname
16020010	C语言程序设计
16020011	图像处理
16020012	网页设计
16020013	数据结构
16020014	数据库原理与应用
16020015	专业英语
16020016	软件文档的编写
16020017	美工基础
16020018	面向对象程序设计

学生的选课情况

SID	Sname	CID	Cname
2005216111	吴秋娟	16020010	C语言程序设计
2005216111	吴秋娟	16020013	数据结构
2005216112	穆金华	16020014	数据库原理与应用
2005216112	穆金华	16020010	C语言程序设计
2005216115	张欣欣	16020011	图像处理
2005216115	张欣欣	16020014	数据库原理与应用

关系运算(限制与像)

定义7.9 设R为二元关系, A是集合

(1) R在A上的**限制**记作 $R\restriction A$, 其中

$$R\restriction A = \{ <x,y> \mid xRy \land x \in A \}$$

(2) A在R下的**像**记作$R[A]$, 其中

$$R[A]=\mathrm{ran}(R\restriction A)$$

说明:

- $R[A]=\mathrm{ran}(R\restriction A) = \{ y \mid \exists x\ (x \in A \land <x,y> \in F) \}$
- R在A上的限制 $R\restriction A$是 R 的子关系，即 $R\restriction A \subseteq R$
- A在R下的像 $R[A]$ 是 $\mathrm{ran}R$ 的子集，即 $R[A] \subseteq \mathrm{ran}R$

实例

设$R=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$, 则

$R\restriction\{1\} = \{<1,2>,<1,3>\}$

$R\restriction\varnothing = \varnothing$

$R\restriction\{2,3\} = \{<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$

$R[\{1\}] = \{2,3\}$

$R[\varnothing] = \varnothing$

$R[\{3\}] = \{2\}$

关系运算的性质

定理7.1 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证明:

(1) 任取$<x,y>$, 由逆的定义有

$$<x,y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in F.$$

所以有$(F^{-1})^{-1}=F$.

(2) 任取x,

$$x\in\mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in F^{-1}) \Leftrightarrow \exists y(<y,x>\in F) \Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$$

所以有 $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

关系运算的性质

定理7.2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证明： (1) 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in(F\circ G)\circ H$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\circ G\wedge<t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(\exists s\,(<x,s>\in F\wedge<s,t>\in G)\wedge<t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,s>\in F\wedge<s,t>\in G\wedge<t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(<x,s>\in F\wedge\exists t\,(<s,t>\in G\wedge<t,y>\in H))$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(<x,s>\in F\wedge<s,y>\in G\circ H)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ(G\circ H)$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

证明

(2) $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

证明： 任取$\langle x,y\rangle$,

$$\langle x,y\rangle \in (F \circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in F \circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(\langle y,t\rangle \in F \wedge \langle t,x\rangle \in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(\langle x,t\rangle \in G^{-1} \wedge \langle t,y\rangle \in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in G^{-1} \circ F^{-1}$$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

关系运算的性质

定理7.3 设R为A上的关系, 则

$$R\circ I_A = I_A\circ R = R$$

证明： 任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y> \in R\circ I_A \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\ (<x,t> \in R \wedge <t,y> \in I_A) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\ (<x,t> \in R \wedge t=y \wedge y \in A) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y> \in R
\end{aligned}
$$

因此，$R\circ I_A = R$

同理可证，$I_A\circ R = R$

关系运算的性质

定理7.4

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G\cup F\circ H$　　(2) $(G\cup H)\circ F = G\circ F\cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$　　(4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

只证 (3) 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in F\circ(G\cap H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\wedge<t,y>\in G\cap H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\wedge<t,y>\in G\wedge<t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,((<x,t>\in F\wedge<t,y>\in G)\wedge(<x,t>\in F\wedge<t,y>\in H))$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\wedge<t,y>\in G)\wedge\exists t\,(<x,t>\in F\wedge<t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ G\wedge<x,y>\in F\circ H$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ G\cap F\circ H$$

所以有 $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$

推广

定理7.4 的结论可以推广到有限多个关系

$$R\circ(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n) = R\circ R_1\cup R\circ R_2\cup\ldots\cup R\circ R_n$$

$$(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)\circ R = R_1\circ R\cup R_2\circ R\cup\ldots\cup R_n\circ R$$

$$R\circ(R_1\cap R_2\cap \ldots \cap R_n) \subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap \ldots \cap R\circ R_n$$

$$(R_1\cap R_2\cap \ldots \cap R_n)\circ R \subseteq R_1\circ R\cap R_2\circ R\cap \ldots \cap R_n\circ R$$

关系运算的性质

定理7.5 设F 为关系, A, B为集合, 则

(1) $F\restriction(A\cup B) = F\restriction A\cup F\restriction B$

(2) $F[A\cup B] = F[A]\cup F[B]$

(3) $F\restriction(A\cap B) = F\restriction A\cap F\restriction B$

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

证明

(1) $F\upharpoonright(A\cup B) = F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$

$F\upharpoonright A = \{ <x,y> \mid <x,y>\in F\land x\in A \}$

证明： 任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in F\upharpoonright(A\cup B) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\land x\in A\cup B \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\land(x\in A\lor x\in B) \\
\Leftrightarrow\ & (<x,y>\in F\land x\in A)\lor(<x,y>\in F\land x\in B) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\upharpoonright A\lor <x,y>\in F\upharpoonright B \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B
\end{aligned}
$$

所以有$F\upharpoonright(A\cup B) = F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$.

证明

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

$F[A]=\text{ran}(F\restriction A)$ $\quad$ $\text{ran}F = \{\, y \mid \exists x(\langle x,y\rangle\in F) \,\}$

$= \{\, y \mid \exists x\,(x\in A \wedge \langle x,y\rangle\in F) \,\}$

证明: 对于任意的y, $y\in F[A\cap B]$

$\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in A\cap B)$

$\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in A\wedge x\in B)$

$\Leftrightarrow \exists x\,((\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in A)\wedge(\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in B))$

$\Rightarrow \exists x\,(\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in A)\wedge\exists x\,(\langle x,y\rangle\in F\wedge x\in B)$

$\Leftrightarrow y\in F[A]\wedge y\in F[B]$

$\Leftrightarrow y\in F[A]\cap F[B]$

关系的幂运算

定义7.10

设 R 为 A 上的关系, n为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为:

(1) $R^0 = \{ <x,x> \mid x \in A \} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

- 对于A上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1{}^0 = R_2{}^0 = I_A$
- 对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$
- 在关系图中，xRy 表示从结点 x 到 y 有一条长度为 1 的有向路径，$xR^{(n)}y$ 则表示从结点 x 到结点 y 有一条长度为 n 的有向路径。

实例

- 已知$X=\{a,b,c\}$ 且有$R_2=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$,求$R_2$的幂运算.

$$R_2^{(2)}=\{<a,c>,<b,a>,<c,b>\}$$

$$R_2^{(3)}=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\} \quad =R_2^{(0)}$$

$$R_2^{(4)}=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\} \quad =R_2$$

$$R_2^{(5)}=R_2^{(2)}, \quad R_2^{(6)}=R_2^{(3)},\ldots\ldots$$

即

$$R_2^{(3k+1)}=R_2^{(1)}=R_2, k=0,1,\ldots \qquad R_2^{(3k+2)}=R_2^{(2)}, k=0,1,\ldots$$

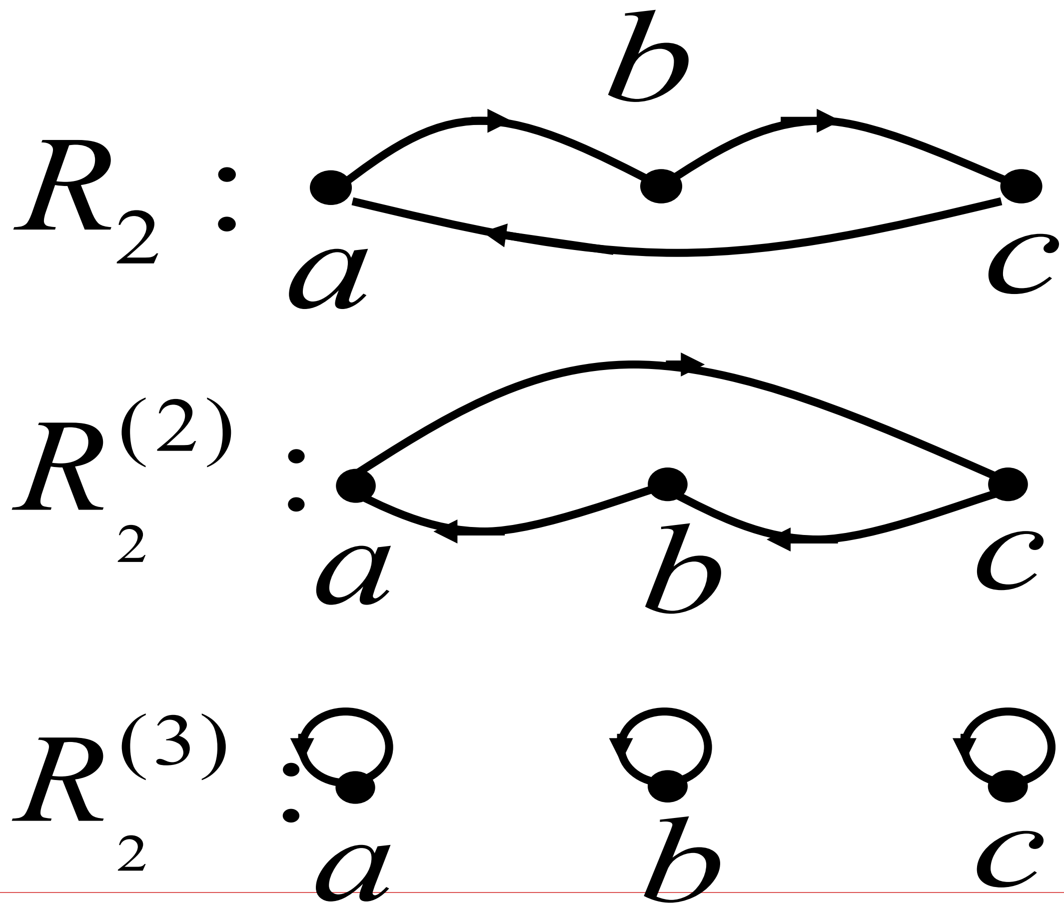
$$R_2^{(3k+3)}=R_2^{(3)}, k=0,1,\ldots$$

$$R_2^{(3k+i)}=R_2^{(i)}, k=0,1,\ldots, i=1,2,3$$

例 用关系图求关系的幂运算

$$R_2=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$$

解：



关系合成运算的矩阵表示

$$X=\{x_1,x_2,\cdots x_m\},\ Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\},$$

$$Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_p\}\quad X\xrightarrow{R}Y\xrightarrow{S}Z,$$

$$M_R=(a_{ij})_{m\times n}\qquad M_S=(b_{ij})_{n\times p}$$

$$M_{R\circ S}=M_R\circ M_S=(c_{ij})_{m\times p},$$

其中 $c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})$

逻辑加

逻辑乘

逻辑加($\vee$)

$0\vee 0=0$

$0\vee 1=1$

$1\vee 0=1$

$1\vee 1=1$

逻辑乘($\wedge$)

$0\wedge 0=0$

$0\wedge 1=0$

$1\wedge 0=0$

$1\wedge 1=1$

幂的求法

例 设$A = \{a,b,c,d\}$, $R = \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$,
求R的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R 与 R^2的关系矩阵分别是:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

幂的求法

R^3和R^4的矩阵是：

$$M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$.

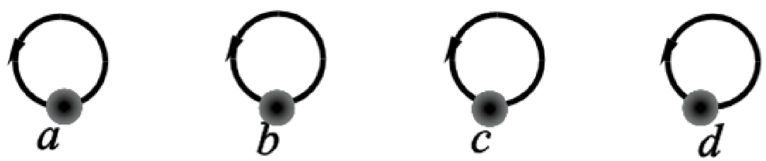
可以得到

$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\qquad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

R^0的关系矩阵是 $$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

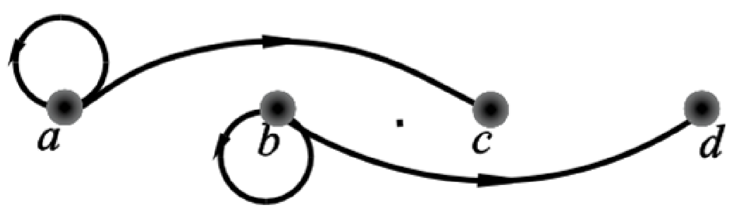
关系图

R^0, R^1, R^2, R^3,…的关系图如下图所示.

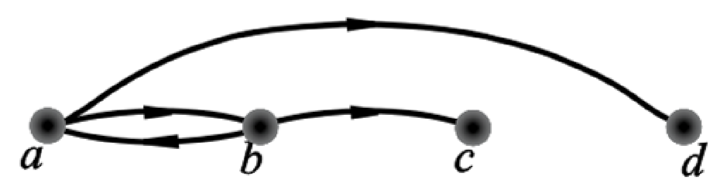


R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$



$R^3=R^5=\ldots$

幂运算的性质

定理7.6 设 A 为 n 元集, R 是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证明： R 为A上的关系,

由于$|A|=n$, A上的不同关系只有 2^{n^2} 个.

列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^{2^{n^2}}, \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$

幂运算的性质

定理7.7 设 R 是 A上的关系， $m, n \in \mathrm{N}$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证明： 用数学归纳法

(1) 对于任意给定的$m \in \mathrm{N}$, 施归纳于n.

若$n=0$, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1} \,,$$

所以对一切$m,n \in \mathrm{N}$ 有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

证明

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

对于任意给定的m∈N, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^m$$

$$= R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切m,n∈N 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

幂运算的性质

定理7.8 设R 是A上的关系,

若存在自然数 s, t $(s<t)$ 使得 $R^s=R^t$, 则

(1) 对任何 $k\in N$有 $R^{s+k} = R^{t+k}$

(2) 对任何 $k, i\in N$有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中 $p = t-s$

(3) 令$S = \{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q\in N$ 有$R^q\in S$

证明： (1) $R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$

(2) 对k归纳．若k=0, 则有 $R^{s+0p+i} = R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$p = t-s$, 则

$$R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i} \circ R^p$$

$$= R^{s+i} \circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$$

由归纳法命题得证.

证明

(3)令$S = \{R^0, R^1, \ldots, R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q \in \mathrm{N}$ 有$R^q \in \mathrm{S}$

证明：任取 $q \in \mathrm{N}$,

若 $q < t$, 显然有 $R^q \in S$,

若$q \geq t$, 则存在自然数 k 和 i 使得

$$q = s+kp+i, \text{其中} 0 \leq i \leq p-1.$$

于是

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

而

$$s+i \leq s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$$

从而证明了 $R^q \in S$.

7.4 关系的性质

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

7.4 关系的性质

定义7.11 设 R 为A上的关系,

(1) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow <x, x>\in R)$, 则称 R 在 A 上是自反的.

(2) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow <x, x>\notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的.

实例:

自反：全域关系E_A, 恒等关系I_A,幂集上的包含关系

实数集上小于等于关系L_A,

整数集合上的整除关系D_A

反自反：实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

实例

$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1 = \{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2 = \{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$

$R_3 = \{<1,3>\}$

则

R_1既不是自反的也不是反自反的,

R_2 自反 ,

R_3 反自反.

例: 已知$X=\{a,b,c\}$, 下面关系哪些是自反的?

√ $R_1 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, c>\}$

$R_2 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, a>\}$

$R_3 = \{<a, c>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

$R_4 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

√ $R_5 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>\}$

$R_6 = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$

$R_7 = \{<a, b>, <b, c>, <c, a>\}$

$R_8 = \{<a, b>, <a, c>\}$

例: 已知$X=\{a,b,c\}$, 下面关系哪些是反自反的?

$R_1 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, c>\}$

$R_2 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, a>\}$

$R_3 = \{<a, c>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

$R_4 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

$R_5 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>\}$

√ $R_6 = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$

√ $R_7 = \{<a, b>, <b, c>, <c, a>\}$

√ $R_8 = \{<a, b>, <a, c>\}$

问题

一个关系不是自反的，就一定是反自反的吗？

不一定。

如： $A=\{1,2,3\}$,

$$S=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,3>\}$$

则 S 既不是自反的也不是反自反的。

对称性与反对称性

定义7.12 设 R 为 A上的关系,

(1) 若$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$, 则称 R 为 A 上对称的关系.

(2) 若$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \rightarrow x=y)$, 则称 R 为A上的反对称关系.

实例:

对称关系: A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系$\varnothing$.

反对称关系: 恒等关系I_A和空关系.

实例

设A＝{1,2,3}, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$$R_1 = \{<1,1>,<2,2>\}, \qquad R_2 = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$$

$$R_3 = \{<1,2>,<1,3>\}, \qquad R_4 = \{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$$

则

R_1：对称和反对称；

R_2：只有对称；

R_3：只有反对称；

R_4：不对称、不反对称

例: 已知$X=\{a,b,c\}$, 下面关系哪些是对称的?

$R_1 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, c>\}$

$R_2 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, a>\}$

$R_3 = \{<a, c>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

√ $R_4 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

√ $R_5 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>\}$

$R_6 = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$

$R_7 = \{<a, b>, <b, c>, <c, a>\}$

$R_8 = \{<a, b>, <a, c>\}$

例: 已知$X=\{a,b,c\}$, 下面关系哪些是反对称的?

√ $R_1 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, c>\}$

√ $R_2 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, a>\}$

$R_3 = \{<a, c>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

$R_4 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

$R_5 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>\}$

√ $R_6 = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$

√ $R_7 = \{<a, b>, <b, c>, <c, a>\}$

√ $R_8 = \{<a, b>, <a, c>\}$

问题：

一个关系不是对称的，就一定是反对称的吗？

不一定。

如： $A=\{1,2,3\}$,

$S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

则 S 既不是对称的也不是反对称的。

$N=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

N即是对称的，也是反对称的。

传递性

- 定义7.13 设R为A上的关系, 若
  $\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\land <x, y>\in R\land <y, z>\in R\rightarrow <x, z>\in R)$,
  则称 R 是A上的传递关系.

实例:

A上的全域关系 E_A, 恒等关系 I_A和空关系 $\varnothing$,

小于等于和小于关系,

整除关系,

包含与真包含关系.

例

设 $A=\{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{<1, 1>,<2, 2>\}$$

$$R_2=\{<1, 2>,<2, 3>\}$$

$$R_3=\{<1, 3>\}$$

则

R_1和R_3是A上的传递关系,

R_2不是A上的传递关系.

例: 已知$X=\{a,b,c\}$, 下面关系哪些是传递的?

√ $R_1 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, c>\}$

$R_2 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, a>\}$

$R_3 = \{<a, c>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

$R_4 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

√ $R_5 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>\}$

√ $R_6 = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$

$R_7 = \{<a, b>, <b, c>, <c, a>\}$

√ $R_8 = \{<a, b>, <a, c>\}$

自反性

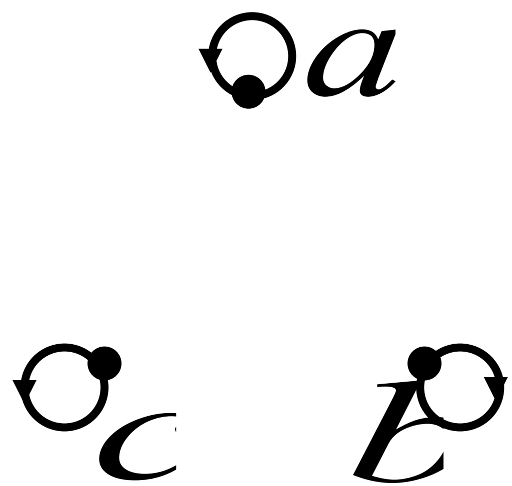
$\forall x(x\in A\rightarrow \langle x, x\rangle\in R)$

在 M_R 中, $r_{ii}=1$.

即关系矩阵中对角线上的所有元素都是1.

在关系图中每个结点都有自回路.

$$M=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \\ & 1 & \\ & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$



反自反性

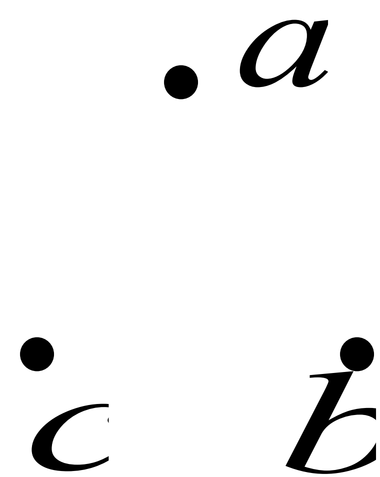
$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$

在 M_R 中, $r_{ii} = 0$.

即关系矩阵中对角线上的所有元素都是0.

在关系图中任一结点均无自回路.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \\ & 0 & \\ & \dots & 0 \end{bmatrix}$$



对称性

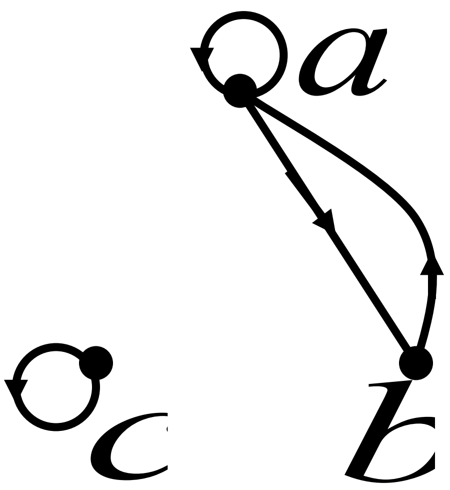
$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$

在 M_R 中,若 $r_{ij} = 1$, 则必有 $r_{ji} = 1$.

即关系矩阵是对称的.

在关系图中结点间若有边,必是往返两条.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



反对称性

$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x=y)$

$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge x \neq y \rightarrow \langle y, x \rangle \notin R)$

在 M_R 中,若 $i \neq j$, 且 $r_{ij} = 1$, 则 $r_{ji} = 0$.

即关系矩阵中以主对角线对称的元素不能同时为1.

在关系图中若两点间有边,只会是一条,没有返回边.

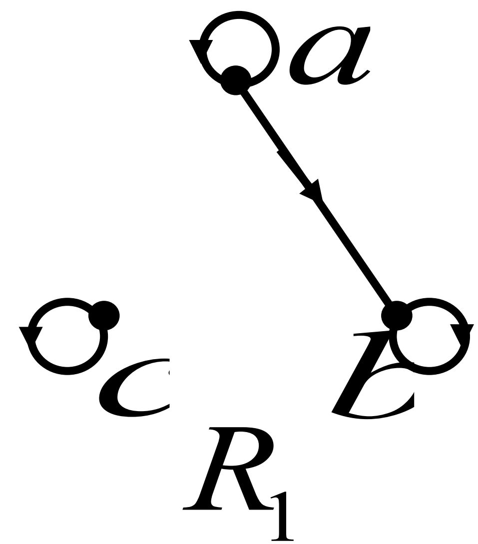
传递性

- $\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \wedge <x, y> \in R \wedge <y, z> \in R \rightarrow <x, z> \in R)$
- 在 M_R 中,若 $r_{ij} = 1$, $r_{jk} = 1$则 $r_{ik} = 1$.
- 在关系图中, 若从结点 a 到结点 b 有长度大于 1 的路,则从 a 到 b 必有长度为 1 的路存在.

R1

$$R_1 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, c>\}$$

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

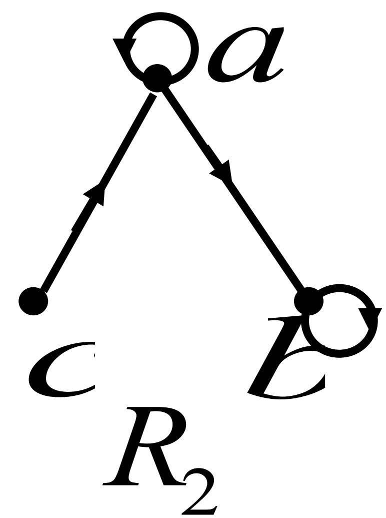


R_1 是自反的、反对称、传递的。

R2

$R_2 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, a>\}$

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

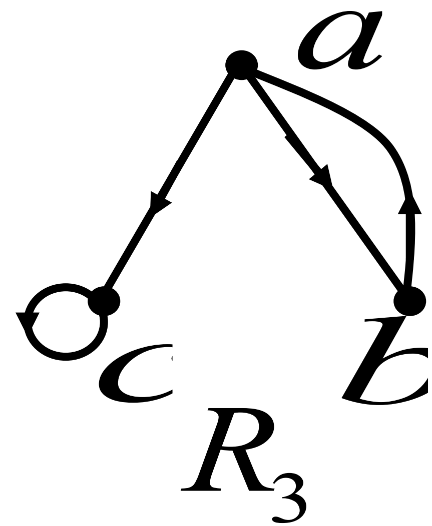


R_2 是反对称的。

R3

$R_3 = \{<a, c>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

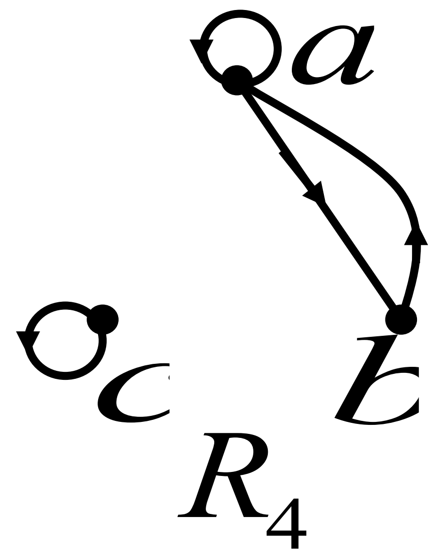
$$M_{R_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



R4

$R_4 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

$$M_{R_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

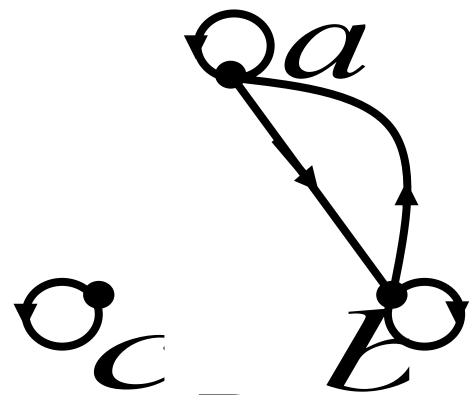


R_4是对称的。

R5

$R_5 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>\}$

$$M_{R_5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



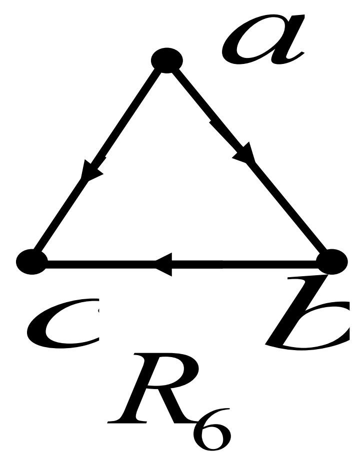
R_5

R_5 是自反的、对称的、传递的。

R6

$R_6 = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$

$$M_{R_6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

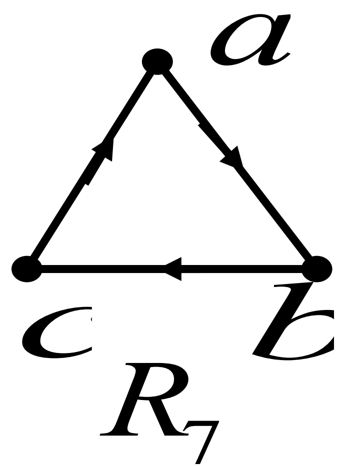


R_6 是反自反的、反对称、传递的。

R7

$\boldsymbol{R_7 = \{<a, b>, <b, c>, <c, a>\}}$

$$M_{R_7} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

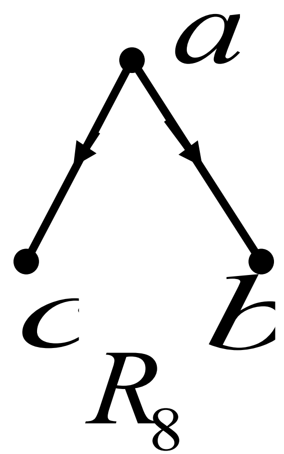


R_7 是反自反、反对称的。

R8

$R_8 = \{<a, b>, <a, c>\}$

$$M_{R_8} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



R_8是反自反、反对称、传递的。

表 1

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R1	√			√	√
R2				√	
R3					
R4			√		
R5	√		√		√
R6		√		√	√
R7		√		√	
R8		√		√	√

序关系

等价关系

问题：

n 个元素的集合上，可以有多少个自反的关系？ $(2^{n(n-1)})$

因为一个集合 X 上的关系是 $X \times X$ 的子集,

$X \times X$ 共有 n^2 个元素.

R 如果是自反的, 则对于任意 $x \in X$, $<x,x> \in R$, 而另外 $n(n\text{-}1)$ 个元素可能在或不在 R 中，所以共有 $2^{n(n\text{-}1)}$ 个关系.

关系性质成立的充要条件

定理7.9 设R为A上的关系, 则

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R 在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

(4) R 在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

证明

证明：只证(1)、(3)、(4)、(5)

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

必要性: R 在A上自反 $\Rightarrow$ $I_A \subseteq R$

任取$<x,y>$, 由于R 在A上自反必有

$$<x,y> \in I_A \Rightarrow x,y \in A \land x=y \Rightarrow <x,y> \in R$$

从而证明了$I_A \subseteq R$

充分性: $I_A \subseteq R \Rightarrow R$ 在A上自反

任取x, 有

$$x \in A \Rightarrow <x,x> \in I_A \Rightarrow <x,x> \in R$$

因此 R 在A上是自反的.

证明

(3) R 在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

必要性: R 在A上对称 $\Rightarrow R=R^{-1}$

任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R \Leftrightarrow <x,y>\in R^{-1}$$

所以 $R = R^{-1}$

充分性: $R=R^{-1} \Rightarrow R$ 在A上对称

任取$<x,y>$, 由$R = R^{-1}$得

$$<x,y>\in R \Rightarrow <y,x>\in R^{-1} \Rightarrow <y,x>\in R$$

所以R在A上是对称的

证明(4)R 在A上反对称当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

必要性. 任取$<x,y>$, 有

$$<x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow \quad <x,y>\in R\wedge <x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge <y,x>\in R \Rightarrow \quad x=y$$

$$\Rightarrow <x,y>\in I_A$$

这就证明了$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

充分性.

任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in R\wedge <y,x>\in R \Rightarrow \quad <x,y>\in R\wedge <x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow \quad <x,y>\in I_A$$

$$\Rightarrow x=y$$

从而证明了R在A上是反对称的.

证明: (5) R是传递当且仅当 $R\circ R \subseteq R$

- （⇒）任取 $<x, z>\in R\circ R$，

  则存在 y 使得$<x, y>\in R$ 且 $<y, z>\in R$。因为 R 是传递的，所以 $<x, z>\in R$，因此$R\circ R\subseteq R$。

- （⇐） 若 $<x, y>\in R$ 且 $<y, z>\in R$，则 $<x, z>\in R\circ R$。因为 $R\circ R\subseteq R$，所以 $<x, z>\in R$。这就证明了R 是传递的。

R是传递的：

在关系矩阵中对M^2中1所在位置，

M中相应的位置都是1.

关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	M^2中1的位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边, 是一对方向相反的边	两点之间有边,是一条有向边	点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边, 则x_i到x_k也有边

关系的性质和运算之间的联系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

其中√表示“**能保持**”

×表示“**不一定能保持**”

7.5 关系的闭包

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

关系的闭包运算

- 对给定的关系,用扩充一些有序对的办法得到具有某些特性的新关系，这就是闭包运算。
- 闭包运算是一种一元运算。

闭包的定义

定义7.14 设R是非空集合A上的关系, R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

(1) R'是自反的(对称的或传递的)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R'' 有 $R' \subseteq R''$

R的自反闭包记作$r(R)$,

对称闭包记作$s(R)$,

传递闭包记作$t(R)$.

闭包的求法

定理7.10 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R\cup R^0$

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

说明：对有穷集$A(|A|=n)$上的关系, (3)中的并最多不超过R^n

证明

证 只证(1)和(3).

(1) $r(R)=R\cup R^0$

由$I_A=R^0\subseteq R\cup R^0$ 得到 $R\cup R^0$是自反的, 且满足$R\subseteq R\cup R^0$

设R''是A上包含R的自反关系, 则有$R\subseteq R''$和$I_A\subseteq R''$.
从而有 $R\cup R^0\subseteq R''$.

$R\cup R^0$满足自反闭包定义, 所以$r(R)=R\cup R^0$.

证明

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

证明： 先证 $R\cup R^2\cup\ldots\subseteq t(R)$成立.

用归纳法证明对任意正整数n 有$R^n\subseteq t(R)$.

$n=1$时有$R^1=R\subseteq t(R)$.

假设$R^n\subseteq t(R)$成立, 那么对任意的$<x,y>$

$<x,y>\in R^{n+1}=R^n\circ R \Rightarrow \exists t\ (<x,t>\in R^n\wedge<t,y>\in R)$

$\Rightarrow \exists t\ (<x,t>\in t(R)\wedge<t,y>\in t(R)) \Rightarrow <x,y>\in t(R)$

这就证明了$R^{n+1}\subseteq t(R)$.

由归纳法命题得证.

证明

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

再证 $t(R)\subseteq R\cup R^2\cup\ldots$成立, 为此只须证明$R\cup R^2\cup\ldots$传递.

任取$<x,y>$,$<y,z>$, 则

$$(<x,y>\in R\cup R^2\cup\ldots)\wedge(<y,z>\in R\cup R^2\cup\ldots)$$

$$\Rightarrow \exists t\ (<x,y>\in R^t)\wedge\exists s(<y,z>\in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\ \exists s\ (<x,z>\in R^t\circ R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\ \exists s\ (<x,z>\in R^{t+s})$$

$$\Rightarrow <x,z>\in R\cup R^2\cup\ldots$$

从而证明了$R\cup R^2\cup\ldots$是传递的.

例1 已知集合X与关系R，试求$r(R)$ $s(R)$ $t(R)$.

$$X=\{a,b,c\},\qquad R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$$

解：

$$r(R)=R\cup I_X$$

$$=R\cup\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

$$=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

$$s(R)=R\cup R^{-1}$$

$$=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$$

例1（续）

$$X = \{a, b, c\}, \quad R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$$

$$R^{(2)} = \{\langle a, c \rangle\} \qquad R^{(3)} = \phi$$

$$t(R) = R \cup R^{(2)} \cup R^{(3)}$$

$$= \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle\} \cup \{\langle a, c \rangle\} \cup \phi$$

$$= \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$$

闭包的矩阵表示和图表示

- 设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s 和 M_t

则

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \dots$$

- 其中E 是单位矩阵, M'是 转置矩阵，相加时使用逻辑加.

闭包的矩阵表示和图表示

- 设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t, 则G_r, G_s, G_t的顶点集与G的顶点集相等. 除了G的边以外, 以下述方法添加新的边：

(1) 考察G的每个顶点, 若没环就加一个环，得到G_r

(2) 考察G的每条边, 若有一条x_i到x_j的单向边, $i\neq j$, 则在G中加一条x_j到x_i的反向边，得到G_s

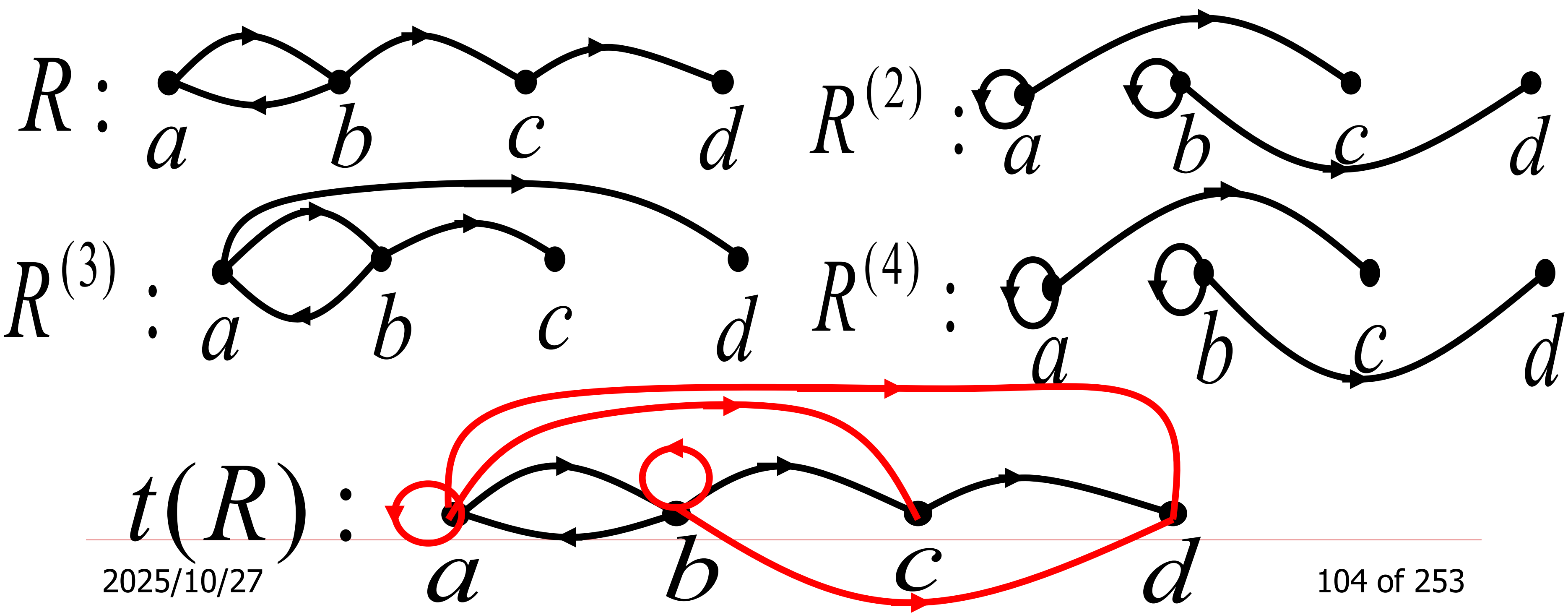
(3) 考察G的每个顶点x_i, 找x_i可达的所有顶点x_j(允许$i=j$)，如果没有从x_i到x_j的边, 就加上这条边, 得到图G_t

例2 已知集合 *X* 和关系 *R*, 试求 *t*(*R*).

$$X = \{a, b, c, d\},$$

$$R = \{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>\}$$

解：



例2（续）

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R^{(2)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^{(3)}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{R^{(4)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{t(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

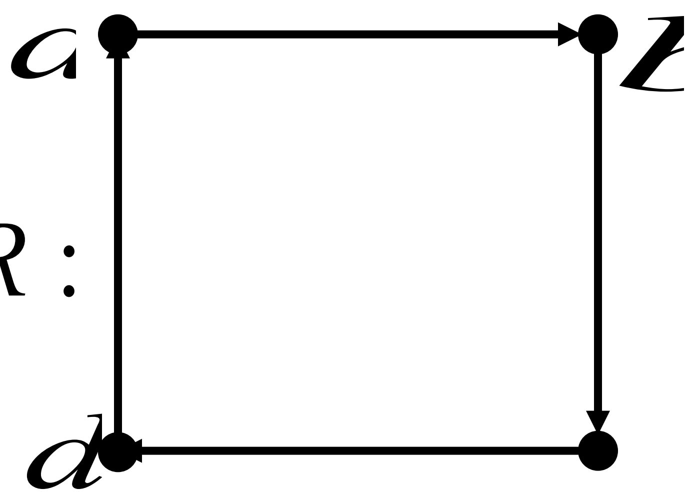
例3 已知集合 *X* 与关系 *R*,试求 *r*(*R*) *s*(*R*) *t*(*R*).

$$X = \{a, b, c, d\},$$

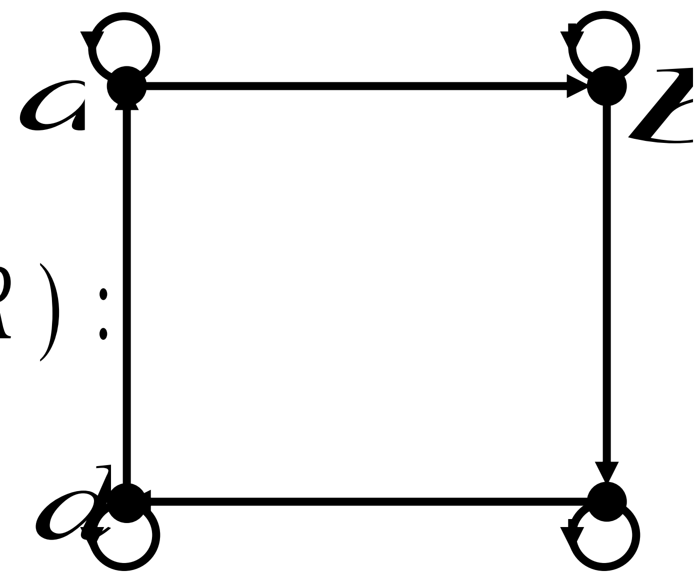
$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, a\rangle\}$$

解：

$R:$



$r(R):$

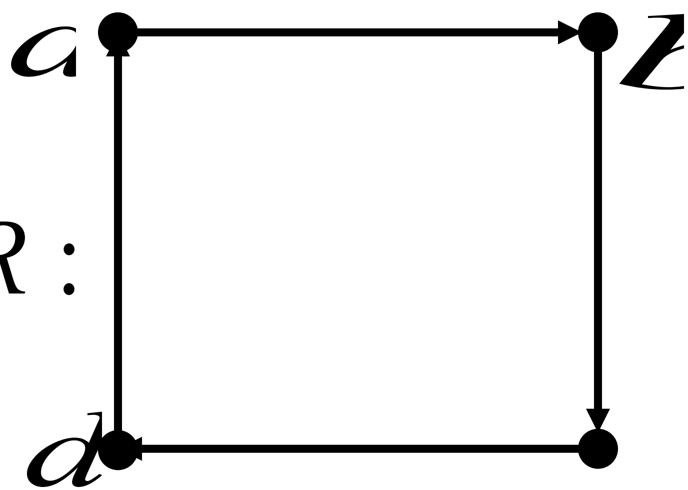


例3（续）

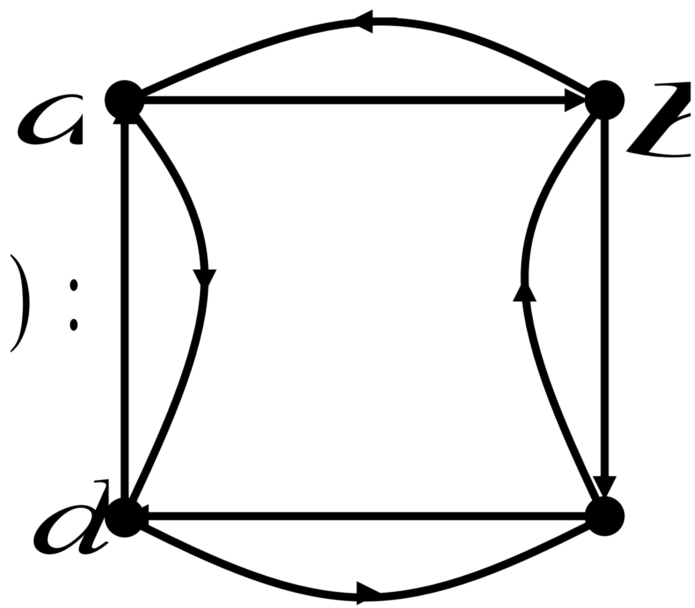
$X = \{a, b, c, d\}$,

$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, a\rangle\}$

$R:$

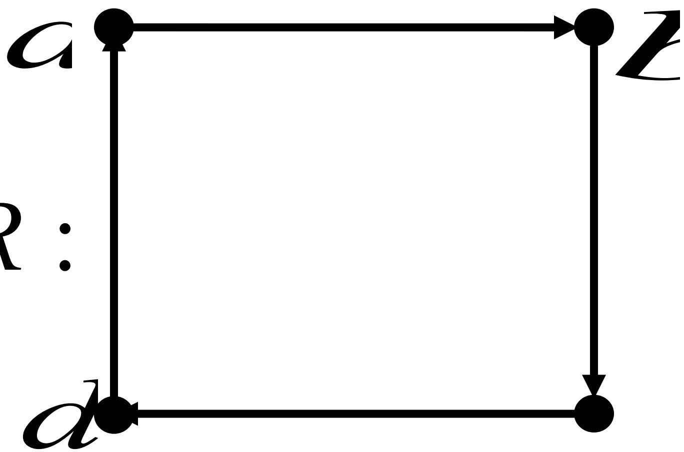


$s(R):$

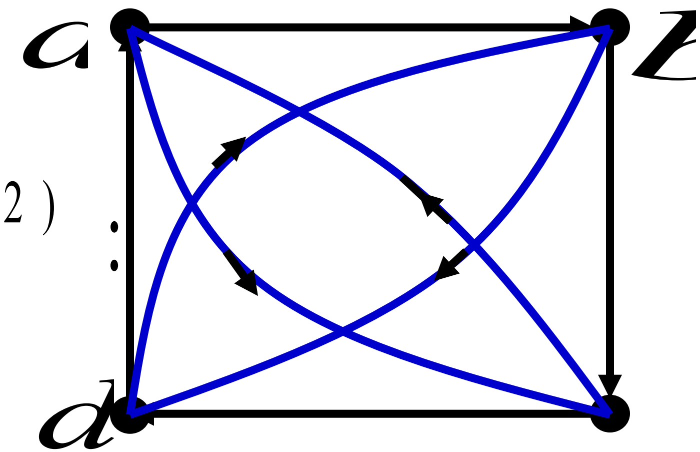


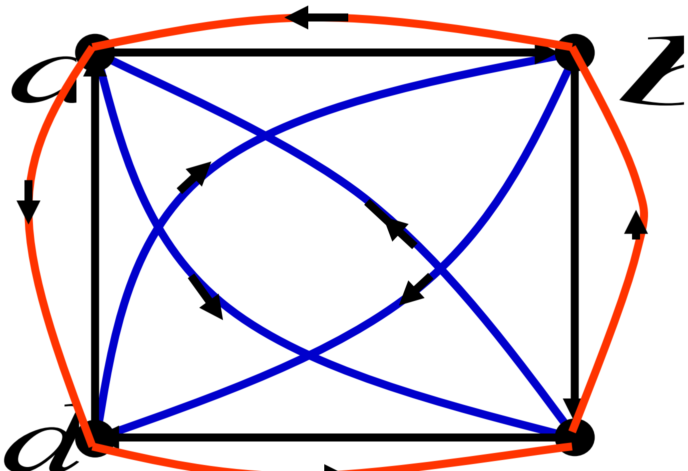
例3（续）

$R:$

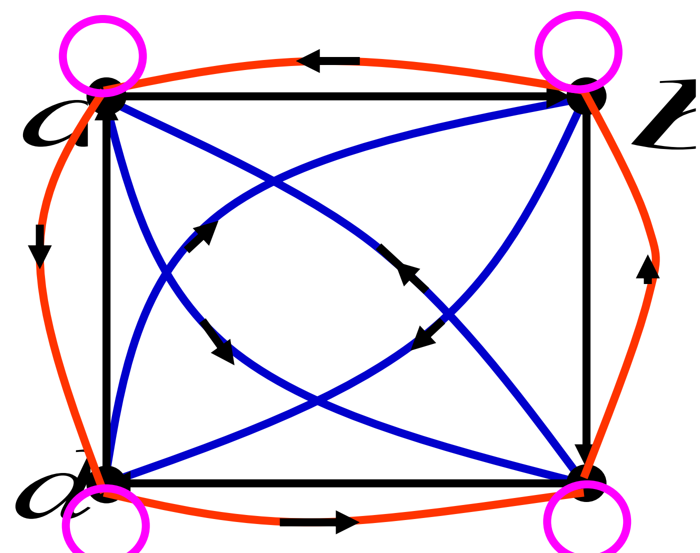


$R \cup R^{(2)}:$





$R \cup R^{(2)} \cup R^{(3)}:$



$R \cup R^{(2)} \cup R^{(3)} \cup R^{(4)}:$

Warshall 算法

$A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$，R为A上的二元关系，R的关系矩阵为M。

$t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

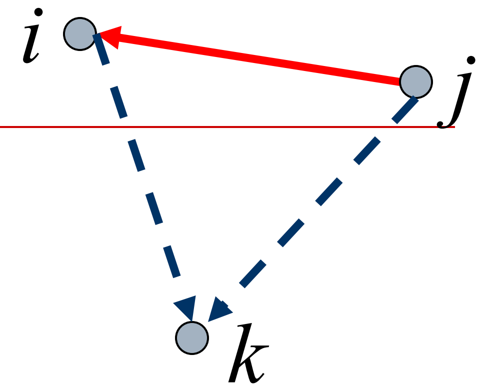
$M_t=M+M^2+M^3+\ldots$

在R的关系图中，从顶点x_i到x_j不含回路的路径最大长度不超过n。

$t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$

$M_t=M+M^2+M^3+\ldots+M^n$

Warshall算法



1) 置新矩阵 $A := M$；

2) $i := 1$；

3) 对所有 j ,若 $A[j,i] = 1$，则对

$k=1,2,\ldots\ldots,n$

$A[j,k]:=A[j,k]+A[i,k]$

(j行$\leftarrow$ j行+ i行)

4) $i:= i+1$;

5)若 $i \le n$，则转3)，否则停止。

Warshall 算法

构造n+1个矩阵：$M_0,M_1,\ldots,M_n$

$M_k[i,j]=1 \Leftrightarrow$ 在R的关系图中，从x_i到x_j存在一条中间只经过$\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$中结点的路径。

$M_0=M_R$ $M_n=M_t$

Warshall算法从M_0开始，依次计算$M_1,M_2,\ldots,M_n$

Warshall 算法

由M_k计算M_{k+1}：

$M_{k+1}[i,j]=1 \Leftrightarrow$ 在R的关系图中，从x_i到x_j存在一条中间只经过$\{x_1,x_2,\ldots,x_k,x_{k+1}\}$中结点的路径。

这种路径可分为两种情况：

1）只经过$\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$中结点的路径；

2）经过x_{k+1}的路径， $x_i \to x_{k+1} \to x_j$

$x_i \to x_{k+1}$ 与$x_{k+1} \to x_j$都只经过$\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$中的结点

第1种路径： $M_k[i,j]=1$ ；

第2种路径： $M_k[i,k+1]=1 \wedge M_k[k+1,j]=1$

例4 用Warshall算法求传递闭包

$X = \{a, b, c, d\},$

$R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, a \rangle\}$

$$A = M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i=1时，j=4

例4 用Warshall算法求传递闭包

$$X = \{a, b, c, d\},$$

$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, a\rangle\}$$

$$A = M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i=1时，j=4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例4（续）

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i=2时，j=1,4

例4（续）

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

i=2时，j=1,4

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

例4（续）

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i=3时，j=1,2,4

例4（续）

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

i=3时，j=1,2,4

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

例4（续）

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i=4时，j=1,2,3,4

例4（续）

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i=4时，j=1,2,3,4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

闭包的性质

定理7.11 设R是非空集合A上的关系, 则

(1) R是自反的当且仅当 $r(R)=R$.

(2) R是对称的当且仅当 $s(R)=R$.

(3) R是传递的当且仅当 $t(R)=R$.

定理7.12 设R_1和R_2是非空集合A上的关系, 且 $R_1 \subseteq R_2$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明 (2)若 $R_2 \subseteq R_1$, 则 $s(R_2) \subseteq s(R_1)$

证明：

因为$s(R_1)$ 对称且$R_1 \subseteq s(R_1)$,

但$R_2 \subseteq R_1$, 所以$R_2 \subseteq s(R_1)$;

由$s(R_2)$的定义，$s(R_2)$是包含R_2的最小的对称关系;

所以$s(R_2) \subseteq s(R_1)$。

闭包的性质

定理7.13 设R是非空集合A上的关系,

(1) 若R是自反的, 则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的

(2) 若R是对称的, 则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的

(3) 若R是传递的, 则 $r(R)$ 是传递的.

R的性质	r(R)	s(R)	t(R)
自反	√	√	√
对称	√	√	√
传递	√	×	√

如果需要进行多个闭包运算，比如求R的自反、对称、传递的闭包，运算顺序如下：

$$tsr(R) = rts(R) = trs(R)$$

证明若 R 是对称的, 则 $t(R)$ 是对称的

证明:

若 $<a,b> \in t(R)$, 则有 i, 使得 $<a,b>\in R^{(i)}$,

即存在 $c_1,c_2,\ldots,c_{i-1} \in X$,

$<a,c_1> \in R, <c_1,c_2> \in R, \ldots , <c_{i-1},b> \in R$

因为 R 是对称的，有

$<b,c_{i-1}> \in R, \ldots , <c_1,a> \in R$,

得到 $<b,a> \in R^{(i)}$, 即 $<b,a> \in t(R)$. 得证.

例5

- 传递关系的对称闭包也是传递的吗？
- 答：不一定。

如：A={1,2,3}

R={<1,2>}

$S(R)=R\cup R^{-1}$

$=\{<1,2>, <2,1>\}$

$S(R)$不是传递的。

例6 反对称关系的传递闭包总是反对称关系吗?

答：不一定，例如：

$$X=\{a,b,c,d\},$$

$$R=\{<a,b>,<b,c>,<c,d>,<d,a>\}$$

$$\begin{aligned}t(R)=\{&<a,b>,<b,c>,<c,d>,<d,a>,\\&<a,c>,<b,d>,<c,a>,<d,b>,\\&<a,d>,<b,a>,<c,b>,<d,c>,\\&<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>\}\end{aligned}$$

是对称的.

7.6 等价关系与划分

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

主要内容

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应

等价关系

- 定义7.15 设R为非空集合上的关系. 如果R是自反的、对称的和传递的, 则称R为A上的等价关系.
  设 R 是一个等价关系, 若$<x, y>\in R$, 称 x等价于y, 记做$x\sim y$.
- 实例：
  - 在学生的集合中，属于同一个班级的关系；
  - 三角形中的相似关系；
  - 在扑克牌中同花色的关系、同点数的关系等。

例1

设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系R:

$$R=\{<x,y>|\ x,y\in A \wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)\}$$

其中$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$叫做 x与 y 模3相等, 即x除以3的余数与y除以3的余数相等.

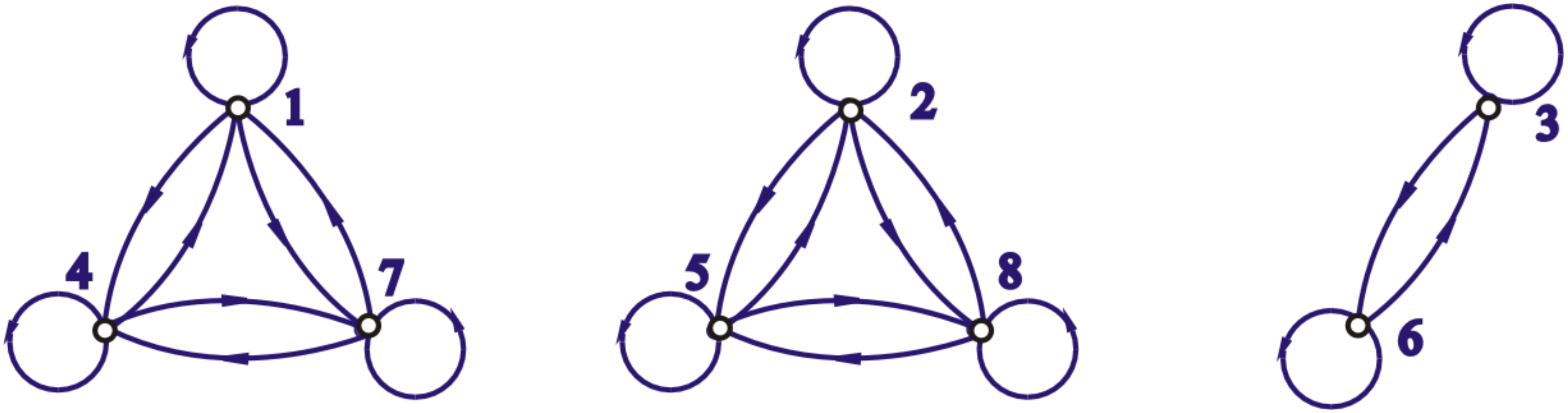
不难验证 R 为A上的等价关系, 因为

(1) $\forall x\in A$, 有 $x\equiv x\ (\mathrm{mod}\ 3)$

(2) $\forall x,y\in A$, 若$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有$y\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$

(3) $\forall x,y,z\in A$, 若$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, $y\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有$x\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$

例1（续）



模 3 等价关系的关系图

等价类

定义7.16 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类, 简称为x的**等价类**, 简记为$[x]$或$\bar{x}$

实例：$A=\{1, 2, \ldots, 8\}$上模3等价关系的等价类：

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

等价类的性质

定理7.14 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$是A的非空子集

(2) $\forall x,y \in A$, 如果 xRy, 则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x,y \in A$, 如果$x \not R y$, 则 $[x]$与$[y]$不交

(4) $\cup\{[x] \mid x \in A\}=A$

证明:

(1) 由定义, $\forall x \in A$有$[x] \subseteq A$. 又$x \in [x]$, 即$[x]$非空.

(2) 任取 z, 则有

$$z \in [x] \Rightarrow \langle x,z \rangle \in R \Rightarrow \langle z,x \rangle \in R$$

$$\langle z,x \rangle \in R \wedge \langle x,y \rangle \in R \Rightarrow \langle z,y \rangle \in R \Rightarrow \langle y,z \rangle \in R$$

从而证明了$z \in [y]$. 综上所述必有 $[x] \subseteq [y]$.

同理可证 $[y] \subseteq [x]$. 这就得到了$[x] = [y]$.

证明

(3) $\forall x,y\in A$, 如果$x \not R y$, 则 $[x]$与$[y]$不交

证明：假设 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$, 则存在 $z\in[x]\cap[y]$,

从而有$z\in[x]\wedge z\in[y]$, 即$<x,z>\in R\wedge<y,z>\in R$成立.

根据R的对称性和传递性必有$<x,y>\in R$,

与$x \not R y$矛盾

证明

(4) $\cup\{[x] \mid x\in A\}=A$

先证$\cup\{[x] \mid x\in A\} \subseteq A$. 任取$y$,

$$y\in\cup\{[x] \mid x\in A\} \Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge y\in[x])$$

$$\Rightarrow y\in[x]\wedge[x] \subseteq A \Rightarrow y\in A$$

从而有$\cup\{[x] \mid x\in A\} \subseteq A$.

再证$A \subseteq \cup\{[x] \mid x\in A\}$. 任取$y$,

$$y\in A \Rightarrow y\in[y]\wedge y\in A \Rightarrow y\in\cup\{[x] \mid x\in A\}$$

从而有$A \subseteq \cup\{[x] \mid x\in A\}$ 成立.

综上所述得$\cup\{[x] \mid x\in A\} = A$.

商集

定义7.17 设 R 为非空集合A上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的商集, 记做A/R,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

实例： 设 A={1,2,…,8}，A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为：

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{8\}\},$$

$$A/E_A = \{\{1,2,\ldots,8\}\}$$

覆盖与划分

定义7.18 设A为非空集合, 若A的子集族$\pi(\pi \subseteq P(A))$满足

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\cup\pi = A$

则称π是A的一个**覆盖**;

若π还同时满足下面条件:

(3) $\forall x \forall y(x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

则称π是A的一个**划分**, 称π中的元素为A的**划分块**.

划分是覆盖的特殊情形.

例2

- 令 Z=所有整数的集合

  A1=所有偶数的集合

  A2=所有奇数的集合
- 则 {A1,A2}是 Z 的一个划分。

例3：已知A={a,b,c}

下面哪些集合是 A 的覆盖或划分？

$S_1=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$， 是覆盖

$S_2=\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$， 是覆盖

$S_3=\{\{a\},\{a,b\}\}$， 不是覆盖

$S_4=\{\{a,b,c\}\}$， 是划分

$S_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$， 是划分

$S_6=\{\{a,b\},\{c\}\}$， 是划分

两个特殊的划分

最小划分：　是由作为类的集合本身构成.

最大划分：　是由包含单个元素的类组成.

$S_4 = \{\{a,b,c\}\}$,　　最小划分

$S_5 = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$,　　最大划分

等价关系与划分

定理7.15 集合A上的一个等价关系R，决定了A的一个划分，该划分就是商集 A/R 。

定理7.16 集合A的一个划分,确定A的元素间的一个等价关系.

（$a\,R\,b$ 当且仅当 a 和 b 在同一个分块中）.

划分和等价关系在本质上是相同的.

例4

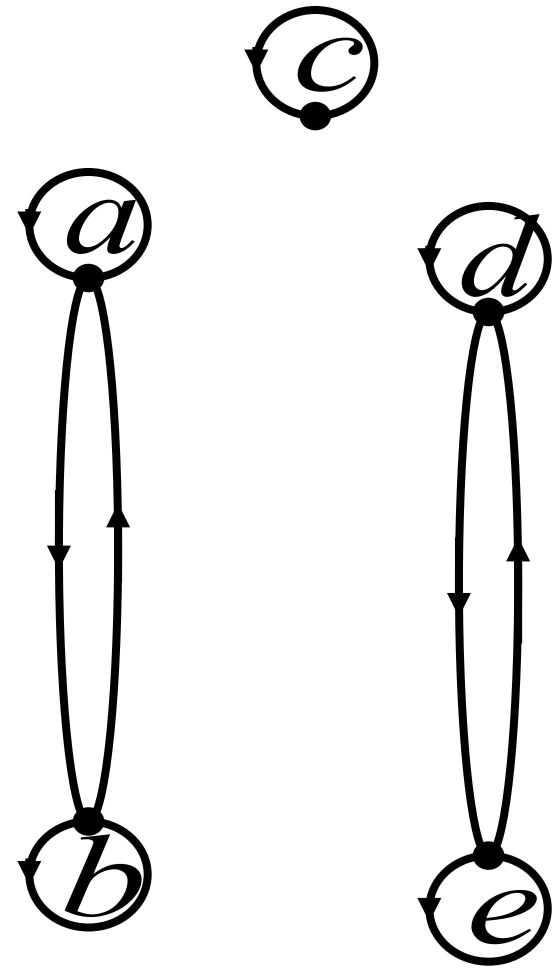
已知$X=\{a,b,c,d,e\}$, $C=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$
试写出由 C 导出的 X 中的等价关系 R ,并给出关系矩阵和关系图.

解:

$$
\begin{aligned}
R &= \{a,b\}\times\{a,b\}\cup\{c\}\times\{c\} \\
&\quad \cup \{d,e\}\times\{d,e\} \\
&= \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle, \\
&\qquad \langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle, \\
&\qquad \langle d,e\rangle,\langle e,d\rangle,\langle e,e\rangle\}
\end{aligned}
$$

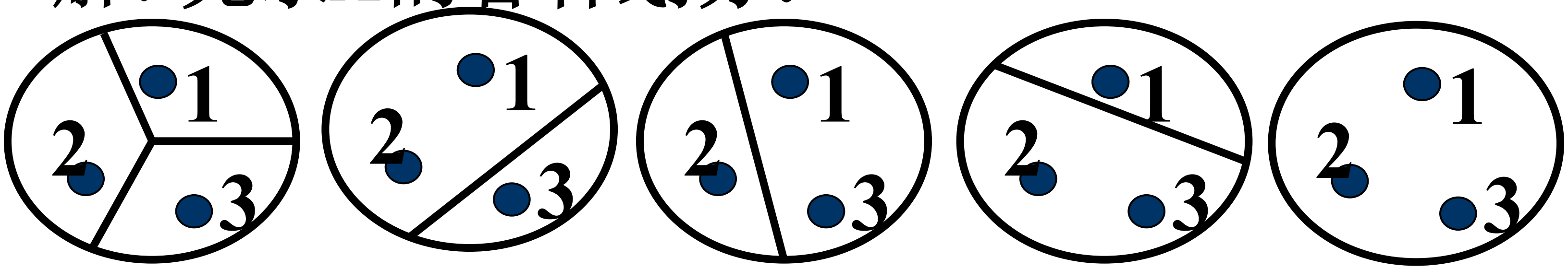
例4（续）

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



例5 设A={1,2,3}, 求出A上所有的等价关系

解：先求A的各种划分：



π_1 π_2 π_3 π_4 π_5

设对应于 π_i 的等价关系为R_i ,则：

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\} = I_A$

$R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\} \cup I_A$

$R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\} \cup I_A$

$R_4=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\} \cup I_A$

$R_5=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle\} \cup I_A$

小结

- 等价关系：自反、对称、传递的关系。
- 等价类：设 R 为集合 A 上的等价关系,对任何 $a\in A$, $[a]_R = \{x \mid x\in A \land aRx\}$

(1) $\forall x\in A$, $[x]$是A的非空子集

(2) $\forall x,y\in A$, 如果 xRy, 则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x,y\in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$与$[y]$不交

(4) $\cup\{[x] \mid x\in A\}=A$

- 商集：等价类的集合。
- 等价关系与划分：集合 A 上的等价关系与其划分是一一对应的。

7.7 偏序关系

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

主要内容

- 偏序关系

  偏序关系的定义

  偏序关系的实例
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特殊元素及其性质

  极大元、极小元、最大元、最小元

  上界、下界、最小上界、最大下界

定义

- 定义7.19 偏序关系：

  非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，记作$\preccurlyeq$.

  设$\preccurlyeq$为偏序关系, 如果 $<x, y> \in \preccurlyeq$, 则记作 $x \preccurlyeq y$, 读作 x“小于或等于” y.

实例：

- 集合A上的恒等关系 I_A是 A上的偏序关系.
- 小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

相关概念

定义7.20 设 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $x, y \in A$, x与y可比 $\Leftrightarrow$ $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

(2) 任取元素 x 和 y, 可能有下述几种情况发生:

$x \prec y$ (或 $y \prec x$), $x = y$, x与y不是可比的

相关概念

定义7.21 R 为非空集合A上的偏序关系，

$\forall x,y\in A$, x与y都是可比的，则称R为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系，

整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义7.22 $x,y\in A$, 如果 $x\prec y$ 且不存在 $z\in A$ 使得 $x\prec z\prec y$, 则称 y覆盖x.并且记 $COVA=\{\langle x,y\rangle \mid x, y \in A; y$ 覆盖 $x\}$

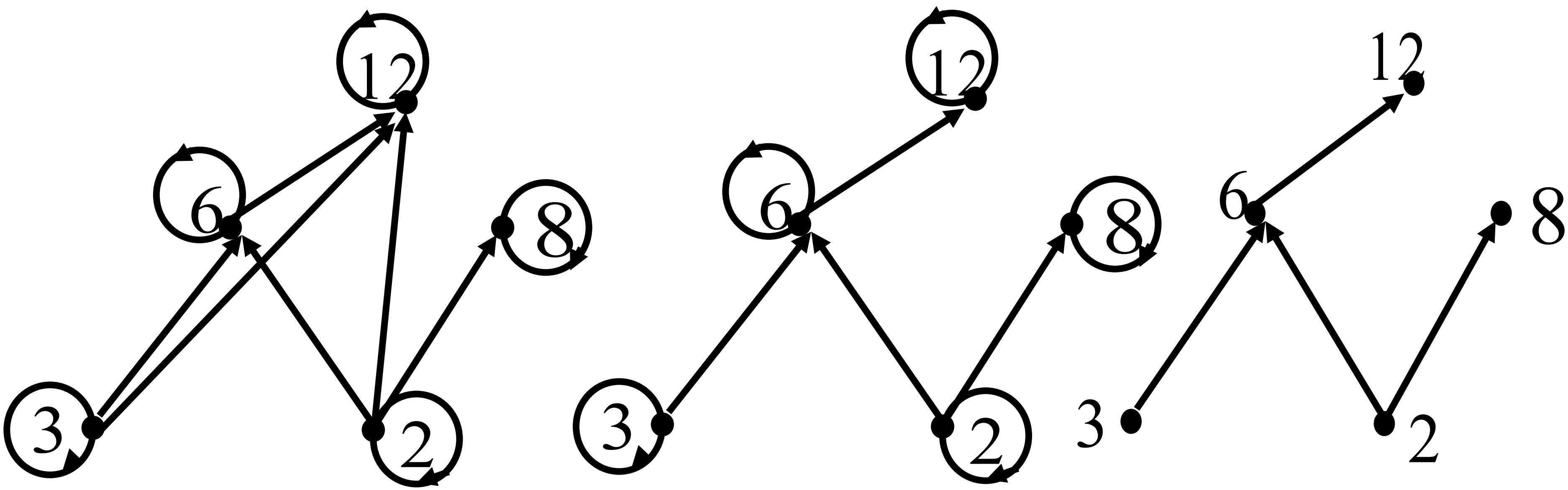
对于给定偏序集合 $\langle A, \le\rangle$，它的覆盖关系是唯一的。

例1 已知 $A=\{2,3,6,8,12\}$, $\leq=\{\langle x,y\rangle \mid x$整除$y\}$

求$\langle A,\leq\rangle$ 的覆盖关系。

解：$\leq=\{\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\underline{\langle 2,12\rangle},\langle 3,6\rangle,$

$\underline{\langle 3,12\rangle},\langle 6,12\rangle\}\cup I_A$



偏序关系与哈斯图

定义7.23 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做**偏序集**, 记作$<A, \preccurlyeq>$.

实例：$<Z, \leq>$, $<P(A), R_{\subseteq}>$.

哈斯图：利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图.

特点：

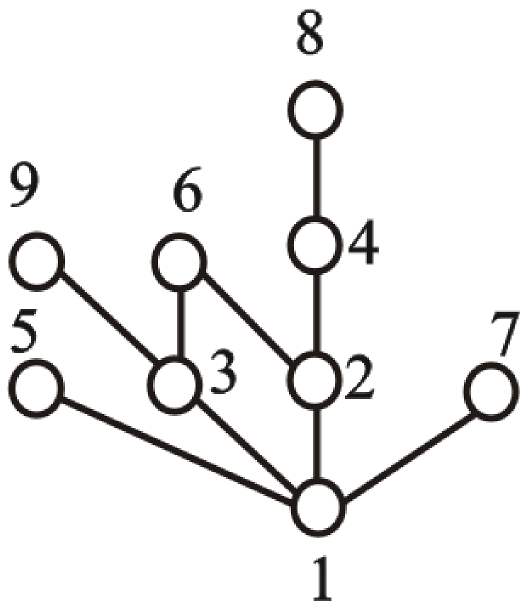
(1) 每个结点都没有环;

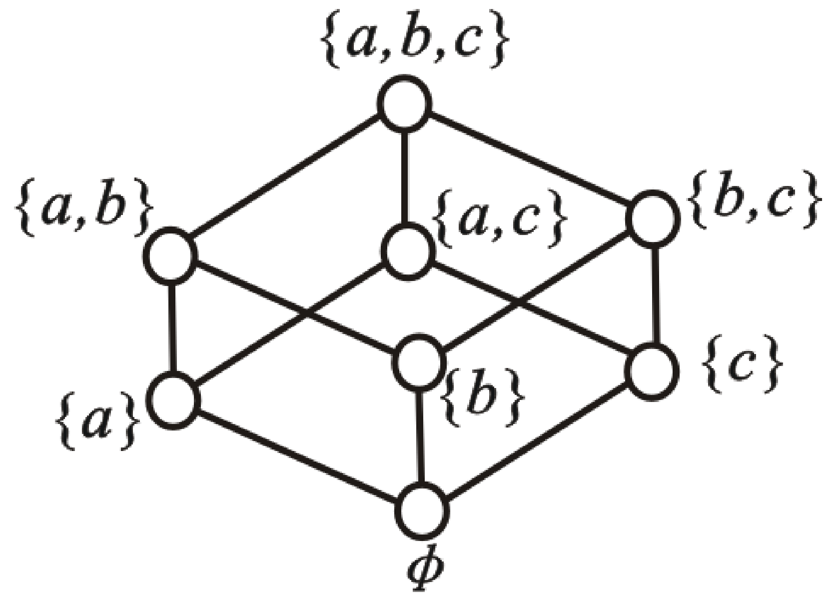
(2) 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前;

(3) 具有覆盖关系的两个结点之间连边.

实例

例2 偏序集$<\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{整除}>$和 $<P(\{a,b,c\}),R_{\subseteq}>$ 的哈斯图.





哈斯图与关系图

哈斯图是简化的关系图

(1)自反性：每个顶点都有自回路，省去自回路.

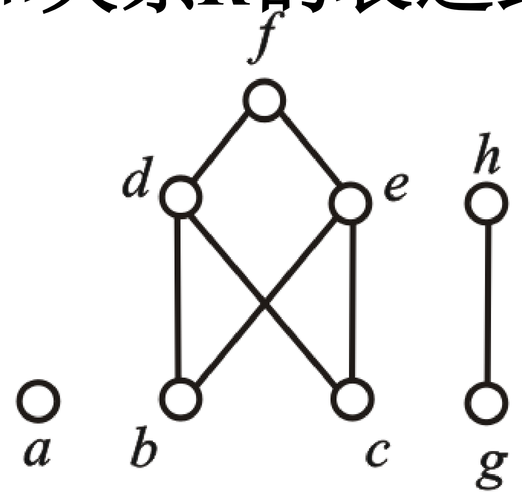
(2)反对称性：从小到大安置顶点，可省略箭头.

(3)传递性：由于有$\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle \in R$

则 $\langle a, c\rangle \in R$，故只画$\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle$对应的边，省略边$\langle a, c\rangle$.

实例

例3 已知偏序集$<A,R>$的哈斯图如下图所示, 试求出集合A和关系R的表达式.



解: $A=\{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$

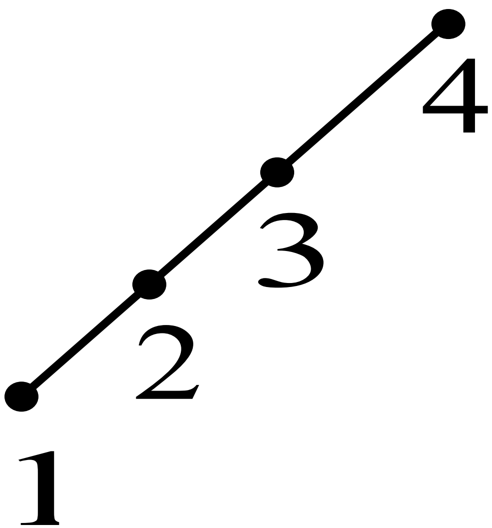
$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,$

$<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

实例

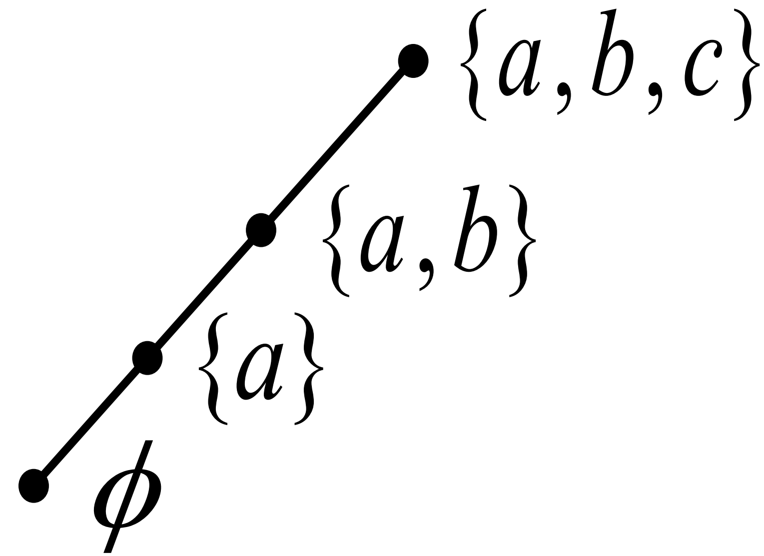
A1={1,2,3,4}

≤为小于等于关系



A2={ ϕ,{a},{a,b},{a,b,c}}

≤为包含关系



不同的偏序集，哈斯图可以有同样的结构

偏序集中的特殊元素

定义7.24 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$

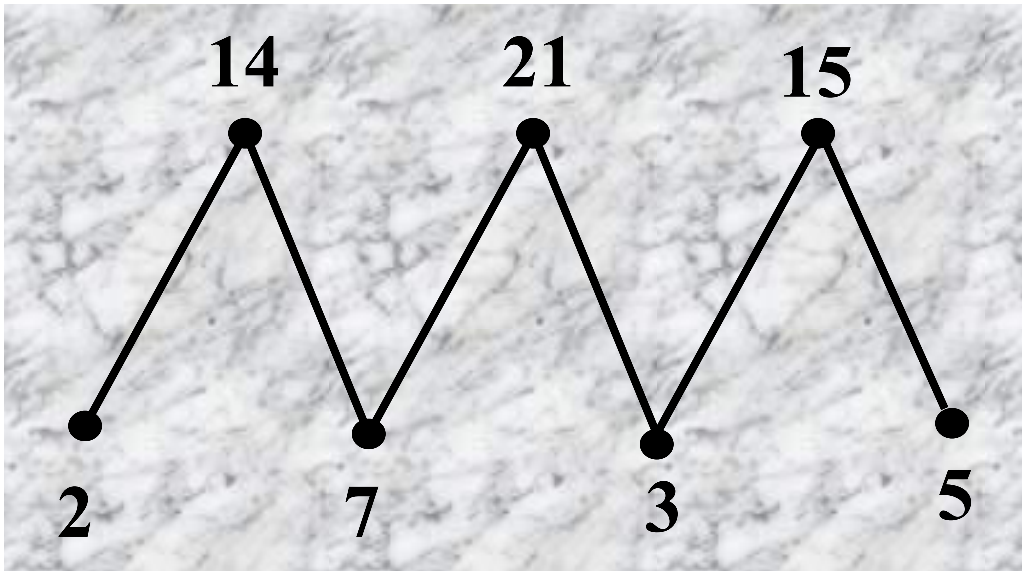
(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为B的最小元

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为B的最大元

(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极小元

(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极大元

例4 已知A={2,3,5,7,14,15,21}的哈斯图



当 $B=\{2,7,3,21,14\}$ 时，

极大元集是{14,21}，

极小元集是{2,7,3}

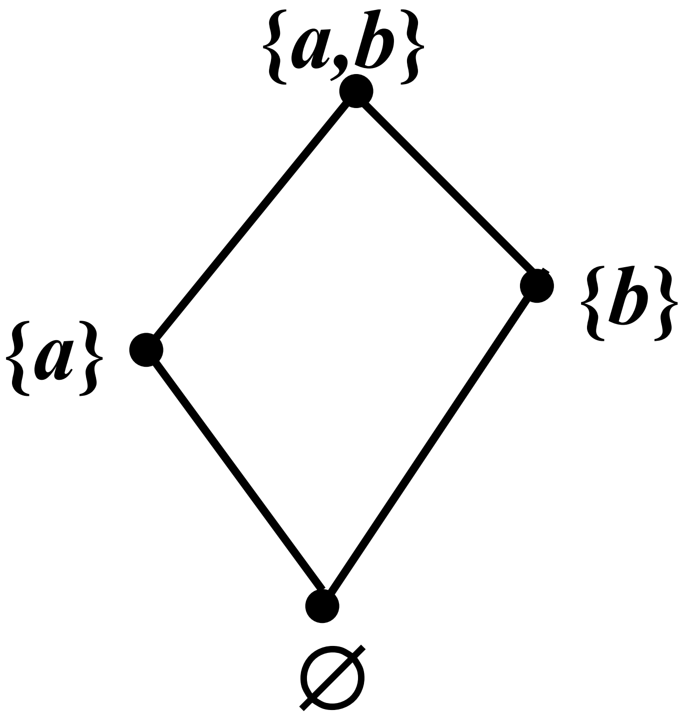
当 $B=A$ 时，

极大元集是{14,21,15}

极小元集是{2,7,3,5}

极大元与极小元不唯一

例5 $<P(\{a,b\}),R_{\subseteq}>$



- $B=\{\{a\},\varnothing\}$，
  最大元：$\{a\}$
  最小元：$\varnothing$
- $B'=\{\{a\},\{b\}\}$，
  最大元：无
  最小元：无

极大(小)元、最大(小)元的性质

(1) 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，可能存在多个.

(2) 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.

(3) 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.

(4) 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集中的特殊元素

定义7.25 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$

(1) 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$成立, 则称$y$为$B$的上界

(2) 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$成立, 则称$y$为$B$的下界

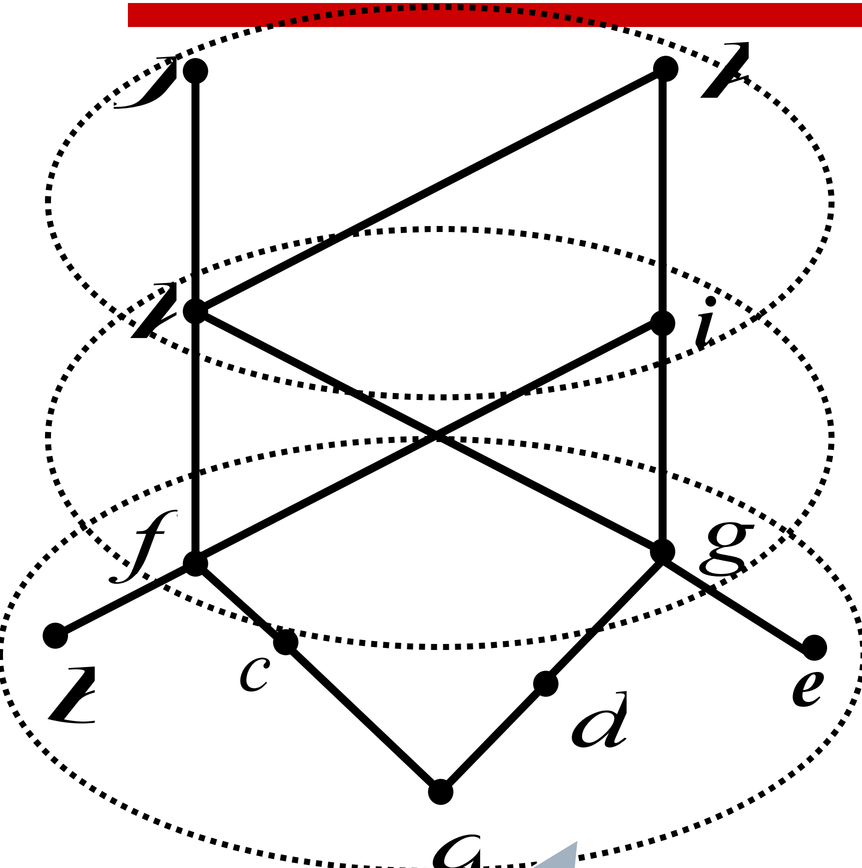
(3) 令$C = \{y \mid y$为B的上界$\}$,

C的最小元为B的最小上界或上确界

(4) 令$D = \{y \mid y$为B的下界$\}$,

D的最大元为B的最大下界或下确界

例6



$B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

无上（下）确界

$B'=\{h,i,j,k\}$

无上（下）确界

$B''=\{h,i,f,g\}$

上确界：k

下确界：a

上界、下界不唯一

上(下)界、上(下)确界的性质

(1) 下界、上界、下确界、上确界不一定存在

(2) 下界、上界存在不一定惟一

(3) 下确界、上确界如果存在，则惟一

(4) 集合的最小元是其下确界，最大元是其上确界；反之不对.

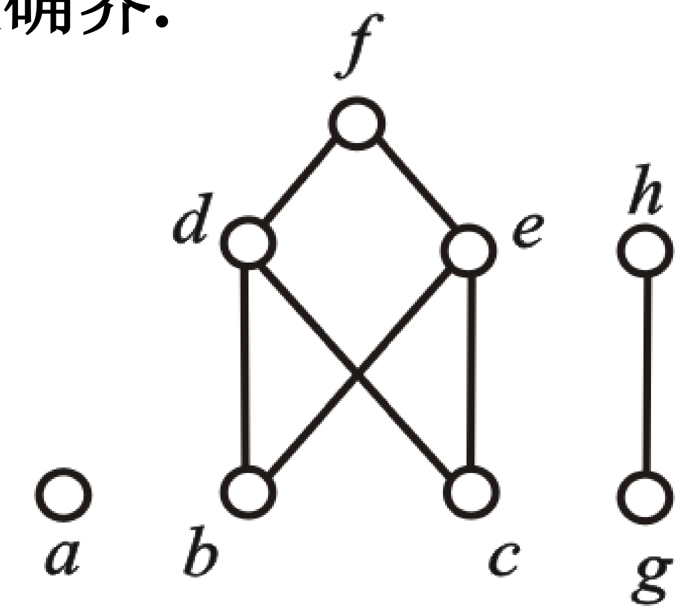
实例

例8　设偏序集$<A,\preccurlyeq>$，　$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$，

求A的极小元、最小元、极大元、最大元；

设$B=\{b, c, d\}$，

求B的下界、上界、下确界、上确界.



解：A的极小元：a, b, c, g；

A的极大元：a, f, h；

没有最小元与最大元.

B的下界和最大下界都不存在；

上界有 d 和 f，

最小上界为 d.

实例

例9 设X为集合, $A = P(X) - \{\varnothing\} - \{X\}$, 且$A \neq \varnothing$. 若$|X|=n$, $n \geq 2$. 问：

(1) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最大元和最小元？

(2) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 中极小元的一般形式是什么？

(3) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 中极大元的一般形式是什么？

解：

(1) $<A, R_{\subseteq}>$ 不存在最小元和最大元.

(2) $<A, R_{\subseteq}>$ 的极小元就是 X 的所有单元集, 即$\{x\}$, $x \in X$.

(3) $<A, R_{\subseteq}>$ 的极大元恰好比 X 少一个元素, 即$X - \{x\}$, $x \in X$.