



第十一章 格与布尔代数

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

第十一章 格与布尔代数

□ 主要内容

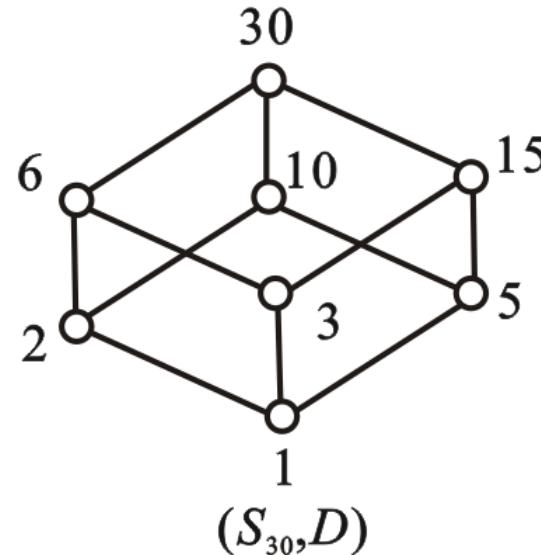
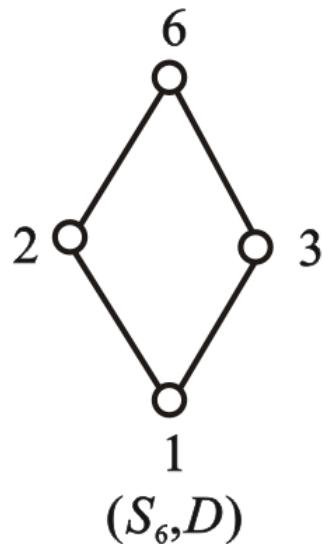
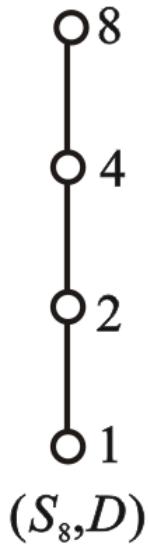
- 格的定义及性质
- 分配格、有补格
- 布尔代数

11.1 格的定义与性质

- 定义11.1 设 $\langle S, \leq \rangle$ 是偏序集，如果 $\forall x, y \in S$ ， $\{x, y\}$ 都有最小上界和最大下界，则称 S 关于偏序 \leq 作成一个格. 求 $\{x, y\}$ 最小上界和最大下界看成 x 与 y 的二元运算 \vee 和 \wedge ，称为保联和保交.
- 通常把在偏序关系的基础上定义的格称为偏序格.

实例

□ 例1 设 n 是正整数， S_n 是 n 的正因子的集合. D 为整除关系，则偏序集 $\langle S_n, D \rangle$ 构成格，称为**正因子格**.
 $\forall x, y \in S_n$, $x \vee y$ 是 $\text{lcm}(x, y)$ ，即 x 与 y 的最小公倍数.
 $x \wedge y$ 是 $\text{gcd}(x, y)$ ，即 x 与 y 的最大公约数.



实例

例2 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

(1) $\langle P(B), \subseteq \rangle$, 其中 $P(B)$ 是集合 B 的幂集.

(2) $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, 其中 \mathbb{Z} 是整数集, \leq 为小于或等于关系.

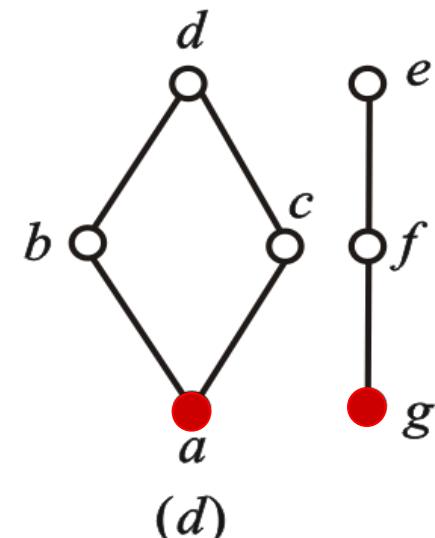
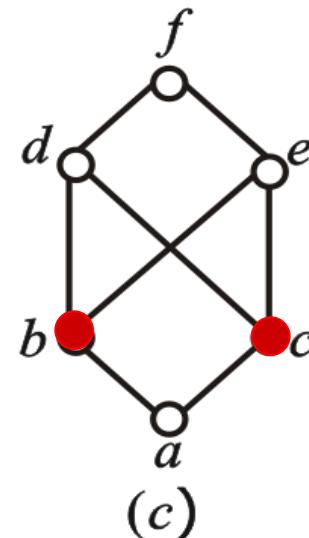
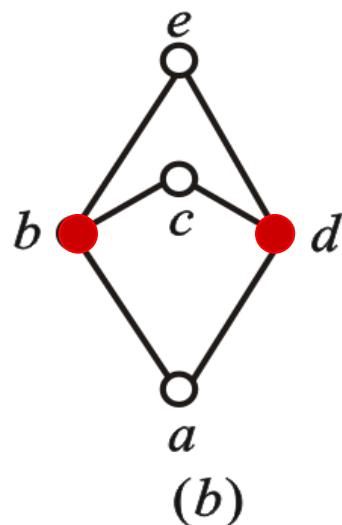
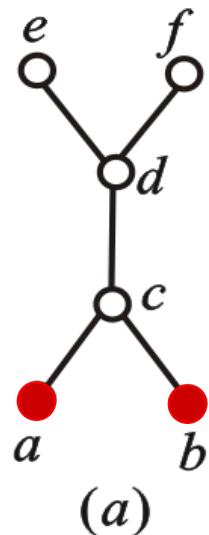
□ 解:

(1) 是格. $\forall x, y \in P(B)$, $x \vee y$ 就是 $x \cup y$, $x \wedge y$ 就是 $x \cap y$. 称为**幂集格**.

(2) 是格. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x \vee y = \max(x, y)$, $x \wedge y = \min(x, y)$.

实例

(3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出. 判断这些偏序集是否构成格，并说明理由



答：都不是格. 都可以找到两个结点缺少最大下界或最小上界。

热点钻取

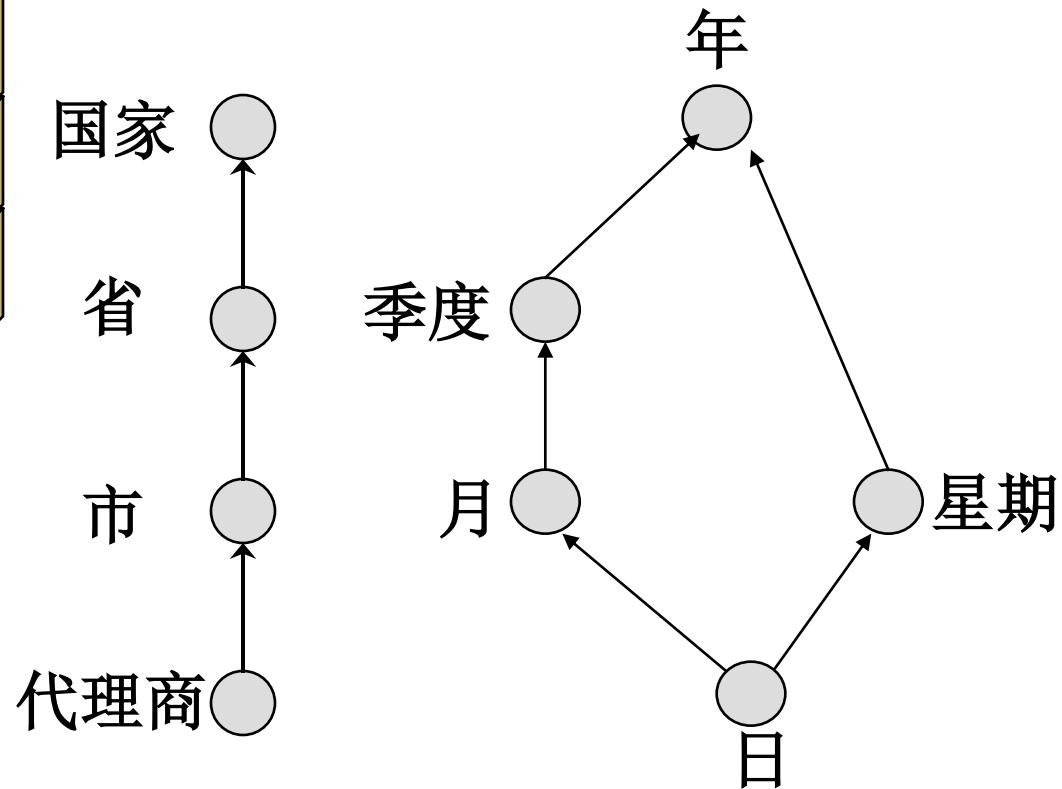
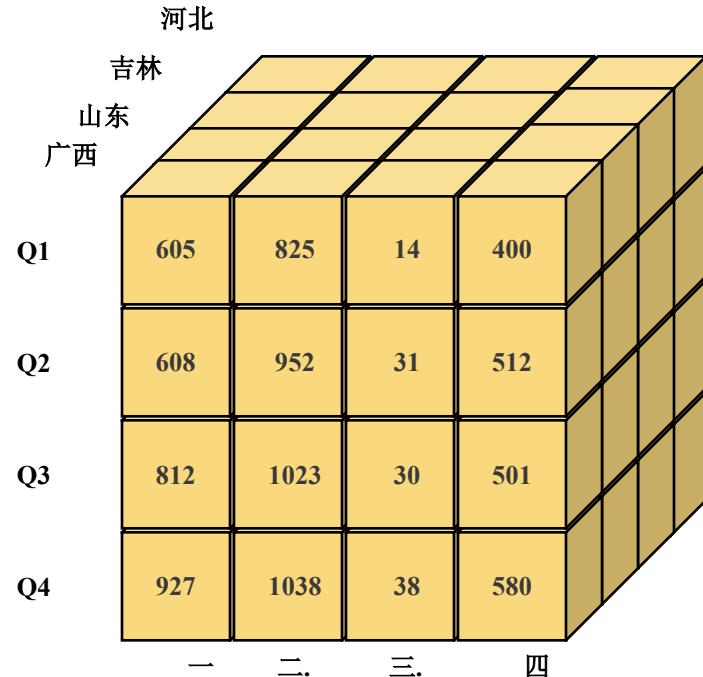


地区	总收入	总支出	排名
长春市	2,523,726.45	2,586,327.30	1
吉林市	1,215,863.28	1,160,203.29	2
四平市	386,951.64	376,209.75	7
辽源市	213,450.15	188,446.35	9
通化市	323,151.93	339,567.96	8
白山市	494,960.40	531,017.55	5
松原市	913,514.79	928,386.57	4
白城市	946,548.69	938,783.07	3
延边朝鲜族自治州	476,094.45	448,451.07	6

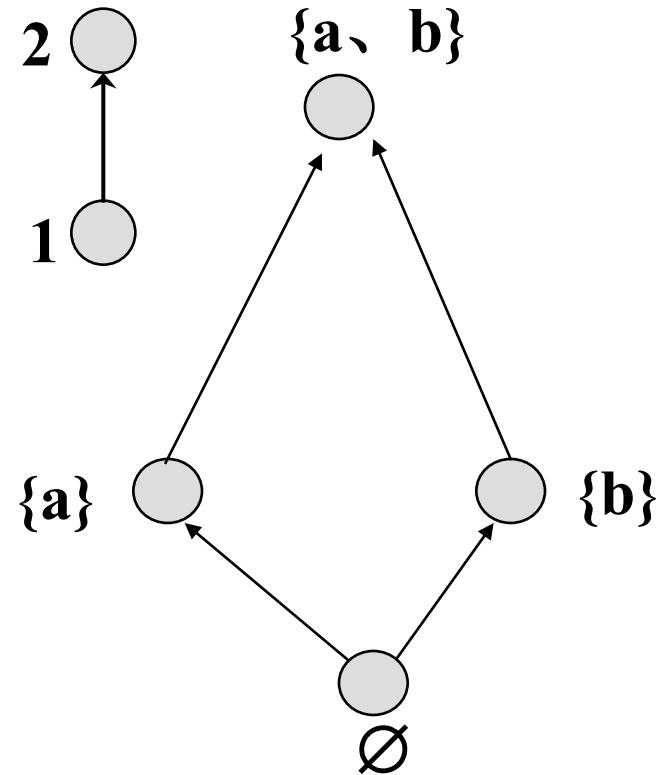
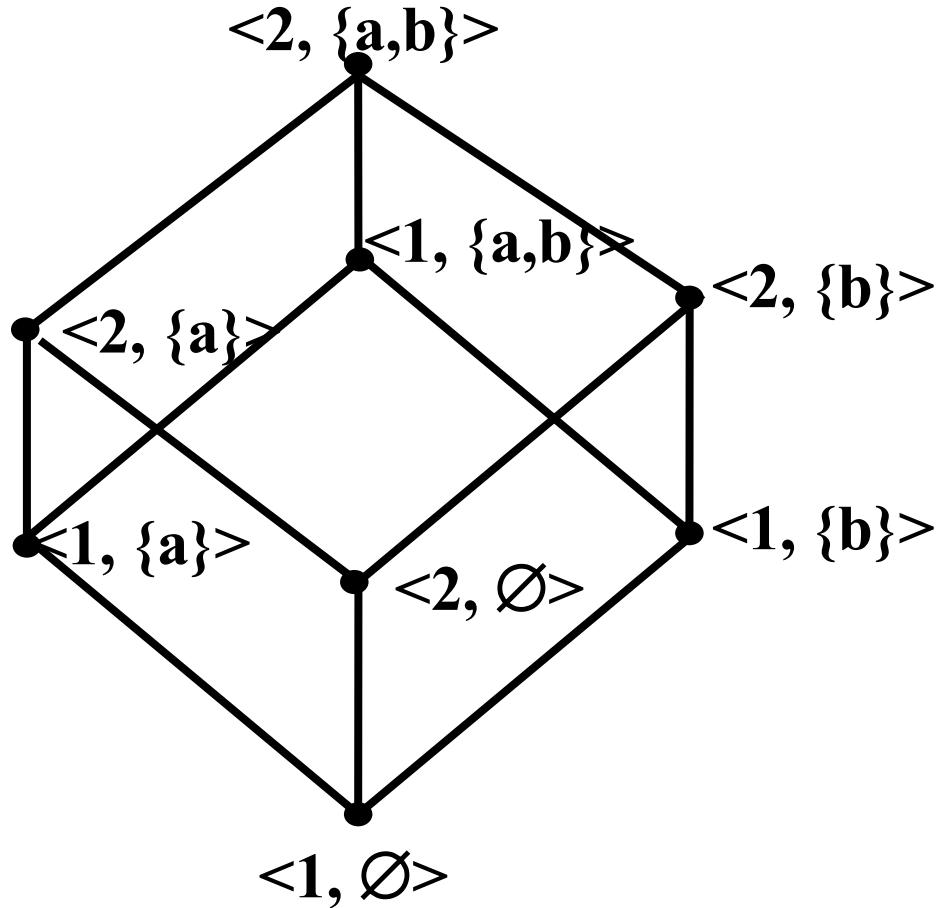
吉林省



数据立方体与视图格



信息流的格模型



实例：子群格

□ 例3 设 G 是群， $L(G)$ 是 G 的所有子群的集合.

即

$$L(G) = \{ H \mid H \leq G \},$$

对任意的 $H_1, H_2 \in L(G)$, $H_1 \cap H_2$ 是 G 的子群，
 $\langle H_1 \cup H_2 \rangle$ 是由 $H_1 \cup H_2$ 生成的子群（即包含着
 $H_1 \cup H_2$ 的最小子群）.

□ 在 $L(G)$ 上定义包含关系 \subseteq ，则 $L(G)$ 关于包含
关系构成一个格，称为 G 的子群格. 在 $L(G)$
中，

$H_1 \wedge H_2$ 就是 $H_1 \cap H_2$

$H_1 \vee H_2$ 就是 $\langle H_1 \cup H_2 \rangle$

补充：由 B 生成的子群

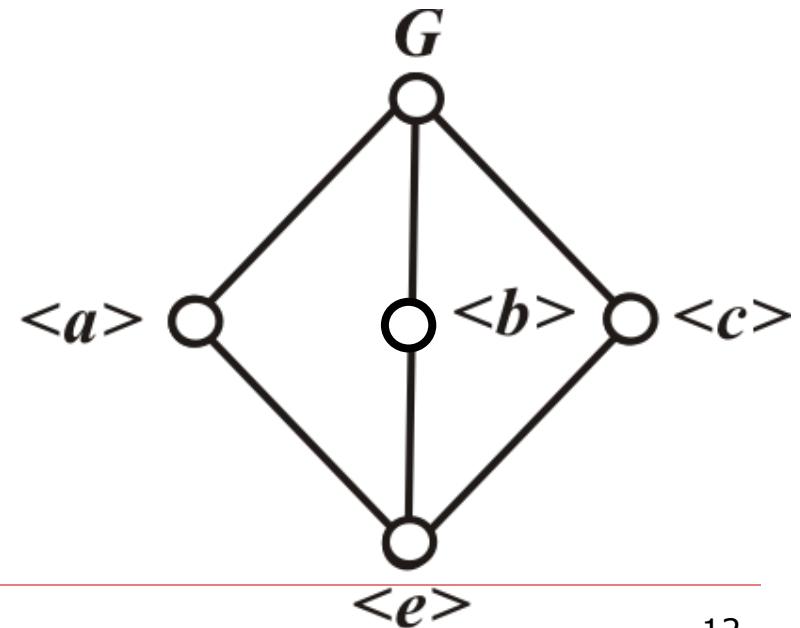
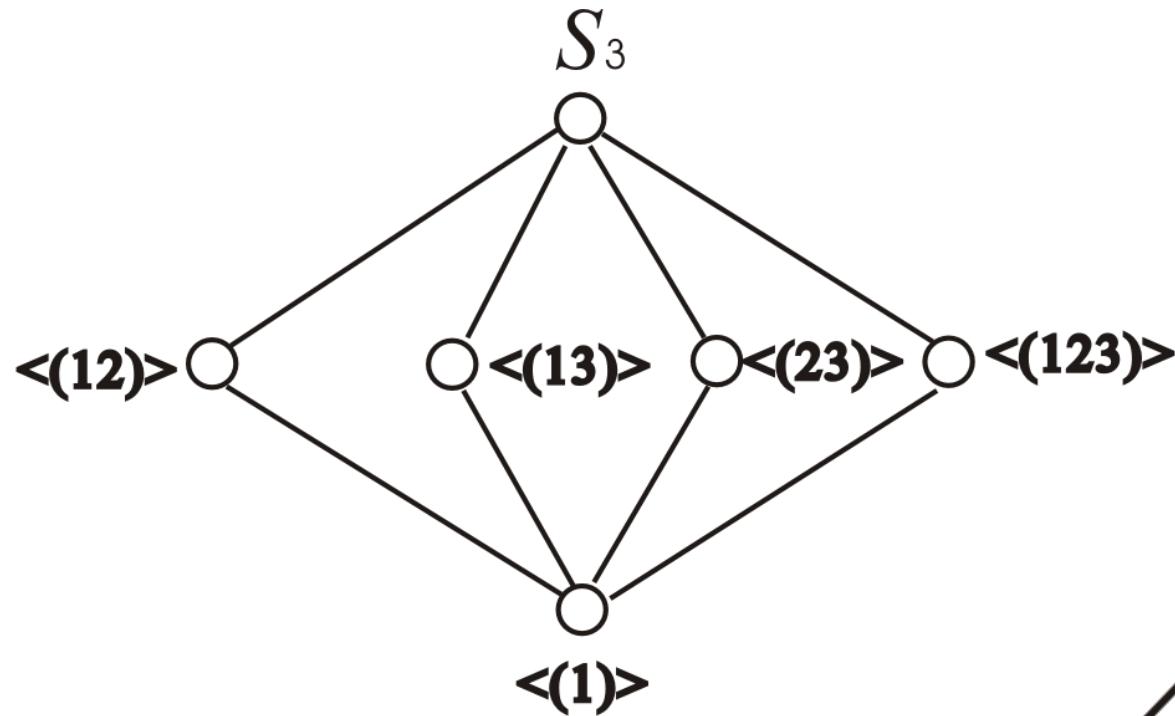
- 设 G 为群，任取两个子群 H_1 和 H_2 ，一般来说 $H_1 \cup H_2$ 不是 G 的子群，而只是 G 的子集。
- 设 B 是 G 的子集，将 G 的所有包含 B 的子群的交记作 $\langle B \rangle$ ，即：

$$\langle B \rangle = \bigcap \{ H \mid B \subseteq H \wedge H \leq G \}$$

易见 $\langle B \rangle$ 是 G 的子群，称为由 B 生成的子群

- 回看：设 G 是群， H, K 是 G 的子群。则
 - (1) $H \cap K$ 也是 G 的子群
 - (2) $H \cup K$ 是 G 的子群当且仅当 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$

实例：子群格



格的性质：对偶原理

- 定义11.2 设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \leq, \geq, \vee$ 和 \wedge 的命题. 令 f^* 是将 f 中的 \leq 替换成 \geq , \geq 替换成 \leq , \vee 替换成 \wedge , \wedge 替换成 \vee 所得到的命题. 称 f^* 为 f 的对偶命题.
- 例如, 在格中令 f 是 $(a \vee b) \wedge c \leq c$, f^* 是 $(a \wedge b) \vee c \geq c$.

格的性质：对偶原理

- 格的对偶原理：设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \leq, \geq, \vee$ 和 \wedge 等的命题。若 f 对一切格为真，则 f 的对偶命题 f^* 也对一切格为真。
- 例如，如果对一切格 L 都有 $\forall a, b \in L, a \wedge b \leq a$ ，那么对一切格 L 都有 $\forall a, b \in L, a \vee b \geq a$
- 注意：对偶是相互的，即 $(f^*)^* = f$

格中基本的不等式和等式

□ \leqslant 是偏序

- $a \leqslant a$ 自反性
- $a \leqslant a, b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ 传递性
- $a \leqslant b, b \leqslant a \Rightarrow a = b$ 反对称性

□ \wedge 最大下界, \vee 最小上界

- $(a \wedge b) \leqslant a, (a \wedge b) \leqslant b$ 下界
- $a \leqslant (a \vee b), a \leqslant (a \vee b)$ 上界
- $a \leqslant b, a \leqslant c \Rightarrow a \leqslant (b \wedge c)$ 最大下界
- $a \geqslant b, a \geqslant c \Rightarrow a \geqslant (b \vee c)$ 最小上界

代数格

- 定义11.3 设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是代数系统, \wedge 和 \vee 是二元运算, 如果 \wedge 和 \vee 满足交换律、结合律和吸收律, 则 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 构成格.
- 通常把由代数系统定义的格称为代数格.
- 定理11.1 偏序格和代数格是等价的。

以后不再区分偏序格和代数格, 统称为格.

引理

□ 引理 设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是一个代数系统,其中 \wedge 和 \vee 都是二元运算且满足吸收律, 则 \wedge 和 \vee 都满足幂等律。

□ 证明:

对任意 $a \in L$, 由吸收律有

$$a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge a)) = a$$

同理可证 $a \vee a = a$

定理11.1证明

- 定理11.1 偏序格和代数格是等价的。
- 证明：先证偏序格是代数格。

■ 交换律：

$a \vee b$ 是 $\{ a, b \}$ 的最小上界，

$b \vee a$ 是 $\{ b, a \}$ 的最小上界。

由于 $\{ a, b \} = \{ b, a \}$, 所以 $a \vee b = b \vee a$.

由对偶原理 $a \wedge b = b \wedge a$.

定理11.1证明（续）

■ 结合律：由最小上界的定义有

$$(a \vee b) \vee c \geq a \vee b \geq a \quad (1)$$

$$(a \vee b) \vee c \geq a \vee b \geq b \quad (2)$$

$$(a \vee b) \vee c \geq c \quad (3)$$

由式(2)和(3)有 $(a \vee b) \vee c \geq b \vee c \quad (4)$

由式(1)和(4)有 $(a \vee b) \vee c \geq a \vee (b \vee c)$

同理可证 $(a \vee b) \vee c \leq a \vee (b \vee c)$

根据反对称性 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

由对偶原理， $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

定理11.1证明（续）

■ 吸收律

显然

$$a \vee (a \wedge b) \geq a \quad (5)$$

由 $a \leq a, a \wedge b \leq a$ 可得

$$a \vee (a \wedge b) \leq a \quad (6)$$

由式(5)和(6)可得 $a \vee (a \wedge b) = a,$
根据对偶原理, $a \wedge (a \vee b) = a$

综上所述, 偏序格是代数格。

定理11.1证明（续）

□ 再证代数格是偏序格。

设代数系统 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 一个代数格，即二元运算 \wedge 和 \vee 满足交换律、结合律和吸收律，在 L 上定义一种关系“ \leq ”如下：对任意 $a, b \in L$ ，有

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \quad (1)$$

(1) 证明 \leq 是偏序关系。

对任意 $a \in L$ ，

由 \wedge 满足吸收律可知 \wedge 满足幂等律，即 $a \wedge a = a$
故 $a \leq a$ ，即关系 \leq 是自反的。

定理11.1证明（续）

对任意 $a, b \in L$, 若 $a \leq b, b \leq a$, 有:

$$a \wedge b = a, a \wedge b = b$$

所以 $a = b$, 即关系 \leq 是反对称的。

对任意 $a, b, c \in L$, 若 $a \leq b, b \leq c$, 有

$$a \wedge b = a, b \wedge c = b$$

由结合律知

$$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$$

所以 $a \leq c$, 即关系 \leq 是传递的。

故 \leq 是偏序关系, 即 $\langle L, \leq \rangle$ 是偏序集。

定理11.1证明（续）

(2) 可以证明：对任意 $a, b \in L$, 有

$$a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

事实上，若有 $a \wedge b = a$, 则由吸收律

$$a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$$

反之，若 $a \vee b = b$, 再由吸收律

$$a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$$

所以 $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$ 。

定理11.1证明（续）

(3) 证明：对任意 $a, b \in L$, $a \vee b$ 是最小上界，
 $a \wedge b$ 是最大下界。

先证 $a \vee b$ 是上界

由吸收律

$$a \wedge (a \vee b) = a \Rightarrow a \leq a \vee b$$

$$b \wedge (a \vee b) = b \Rightarrow b \leq a \vee b$$

因此， $a \vee b$ 是 $\{a, b\}$ 的一个上界。

定理11.1证明（续完）

再证 $a \vee b$ 是最小上界

设 $c \in L$ 是 $\{a, b\}$ 的任意一个上界，

即 $a \leq c, b \leq c$ ，于是有

$$a \vee c = c, b \vee c = c$$

由结合律知

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c$$

故有 $a \vee b \leq c$ ，即 $a \vee b$ 是 $\{a, b\}$ 的最小上界。

同理可证， $a \wedge b$ 是 $\{a, b\}$ 的最大下界。

故 $\langle L, \leq \rangle$ 是一个格。

格的性质：序关系与运算的联系

□ 定理11.2 设 L 是格，则 $\forall a,b \in L$ 有

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

□ 证 (1) 先证 $a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a$

由 $a \leq a$ 和 $a \leq b$ 可知 a 是 $\{a, b\}$ 的下界，故 $a \leq a \wedge b$. 显然有 $a \wedge b \leq a$. 由反对称性得 $a \wedge b = a$.

(2) 再证 $a \wedge b = a \Rightarrow a \vee b = b$

因为 $a \wedge b = a$ ，又根据吸收律有 $b = b \vee (b \wedge a)$

所以 $b = b \vee a$, 即 $a \vee b = b$.

(3) 最后证 $a \vee b = b \Rightarrow a \leq b$

由 $a \leq a \vee b$ 得 $a \leq a \vee b = b$

格的性质：保序

□ 定理11.3 设 L 是格, $\forall a,b,c,d \in L$, 若 $a \leq b$ 且 $c \leq d$, 则 $a \wedge c \leq b \wedge d$, $a \vee c \leq b \vee d$

□ 证明:

$$a \wedge c \leq a \leq b, \quad a \wedge c \leq c \leq d$$

因此 $a \wedge c \leq b \wedge d$.

同理可证 $a \vee c \leq b \vee d$

实例

□ 例4 设 L 是格, 证明 $\forall a,b,c \in L$ 有

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

□ 证明:

由 $a \leq a, b \wedge c \leq b$ 得 $a \vee (b \wedge c) \leq a \vee b$

由 $a \leq a, b \wedge c \leq c$ 得 $a \vee (b \wedge c) \leq a \vee c$

从而得到 $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

□ 注意: 一般说来, 格中的 \vee 和 \wedge 运算不满足分配律.

小结

□ 格中运算的性质

- 交换律
- 结合律
- 吸收律
- 幂等律
- $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$
- 若 $a \leq b$ 且 $c \leq d$,
则 $a \wedge c \leq b \wedge d, a \vee c \leq b \vee d$

子格

□ 定义11.4 设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是格, S 是 L 的非空子集, 若 S 关于 L 中的运算 \wedge 和 \vee 仍构成格, 则称 S 是 L 的子格。

■ 即对任意 $a, b \in S$,

$$a \wedge b \in S,$$

$$a \vee b \in S,$$

例

例5 设格 L 如图所示. 令

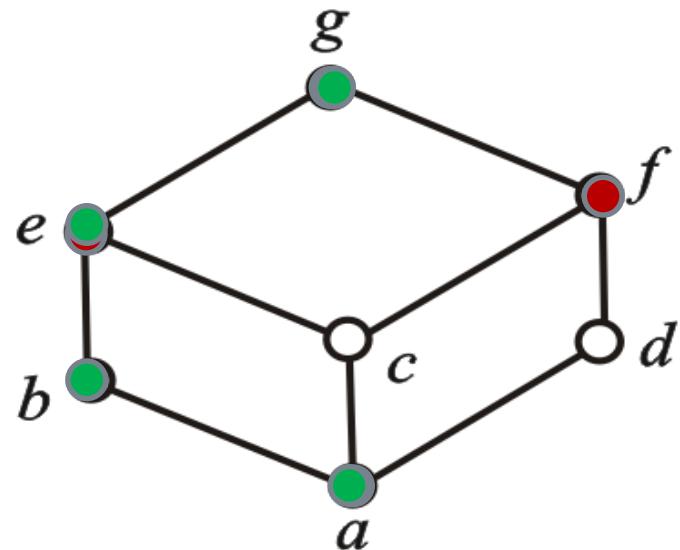
$$S_1 = \{a, e, f, g\},$$

$$S_2 = \{a, b, e, g\}$$

S_1 不是 L 的子格, 因为 $e, f \in S_1$

但 $e \wedge f = c \notin S_1$.

S_2 是 L 的子格.



11.2 分配格、有补格与布尔代数

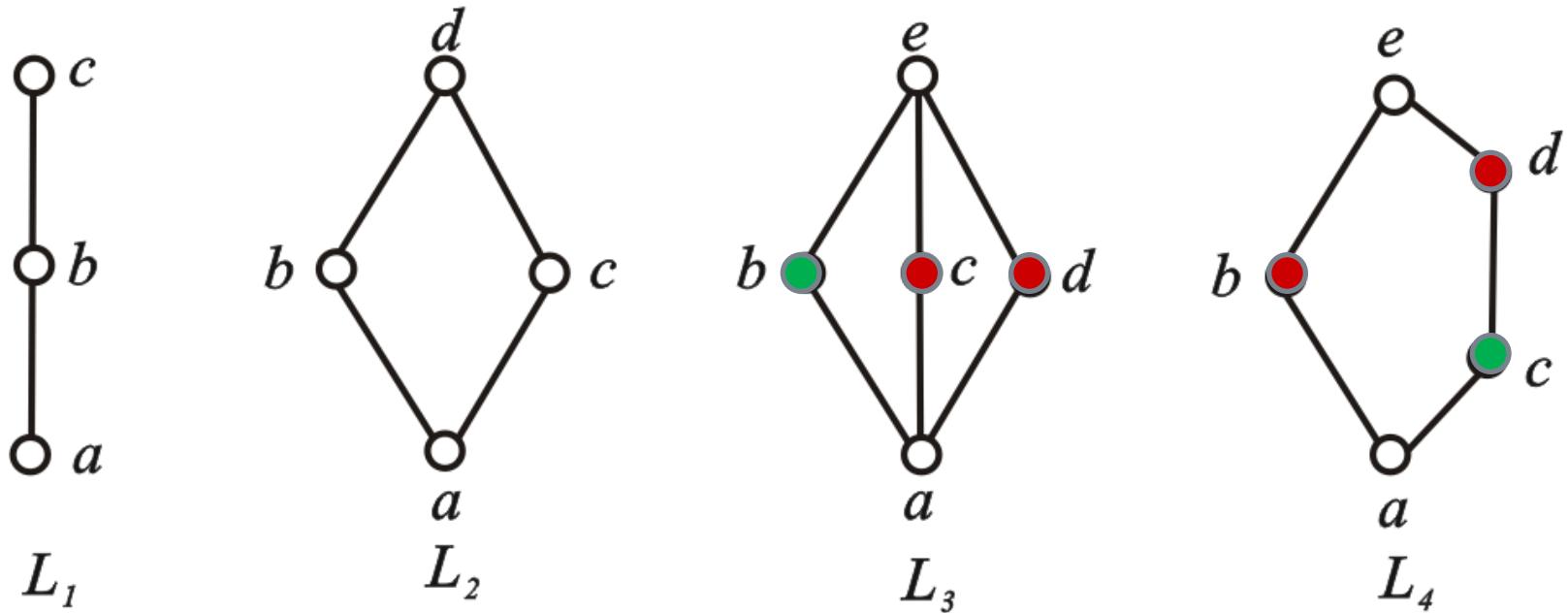
□ 定义11.5 设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是格, 若 $\forall a, b, c \in L$, 有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

则称 L 为分配格.

实例



- L_1 和 L_2 是分配格, L_3 和 L_4 不是分配格.
- 称 L_3 为钻石格, L_4 为五角格.

分配格的判别及性质

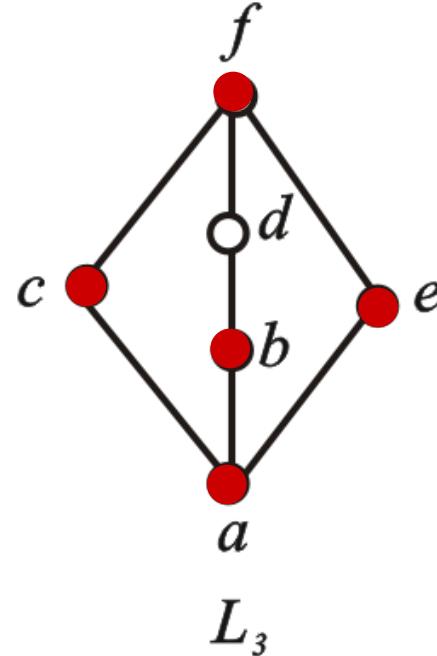
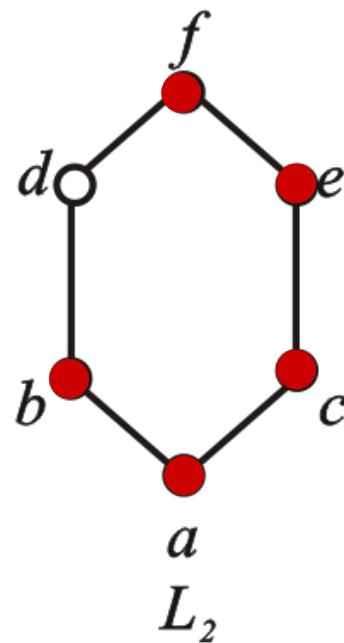
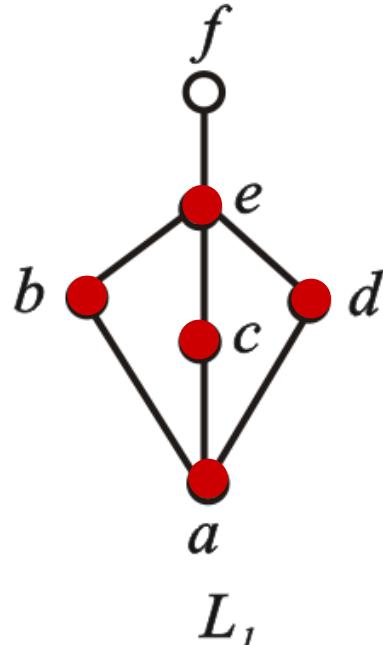
□ 定理11.5 设 L 是格, 则 L 是分配格当且仅当 L 不含有与钻石格或五角格同构的子格.
证明省略.

□ 推论

- (1) 小于五元的格都是分配格.
- (2) 任何一条链都是分配格.

实例

□ 例6 说明图中的格是否为分配格,为什么?



□ 解: 都不是分配格.

L_1 和 L_3 存在同构于钻石格的子格,

L_2 存在同构于五角格的子格

全上界、全下界

□ 定义11.6 设 L 是格,

- (1) 若存在 $a \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $a \leq x$, 则称 a 为 L 的全下界
- (2) 若存在 $b \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $x \leq b$, 则称 b 为 L 的全上界

□ 说明:

- 格 L 若存在全下界或全上界, 一定是惟一的.
- 一般将格 L 的全下界记为0, 全上界记为1.

有界格

- 定义11.7 设 L 是格,若 L 存在全下界和全上界,则称 L 为**有界格**,一般将有界格 L 记为 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$.
- 定理11.6 设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 是有界格, 则 $\forall a \in L$ 有 $a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$

注意

- 有限格 $L = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是有界格, $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ 是 L 的全下界, $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ 是 L 的全上界.
- 0 是关于 \wedge 运算的零元, \vee 运算的单位元; 1 是关于 \vee 运算的零元, \wedge 运算的单位元.
- 对于涉及到有界格的命题, 如果其中含有全下界 0 或全上界 1, 在求该命题的对偶命题时, 必须将 0 替换成 1, 而将 1 替换成 0.

有界格中的补元

□ 定义11.8 设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 是有界格, $a \in L$, 若存在 $b \in L$ 使得

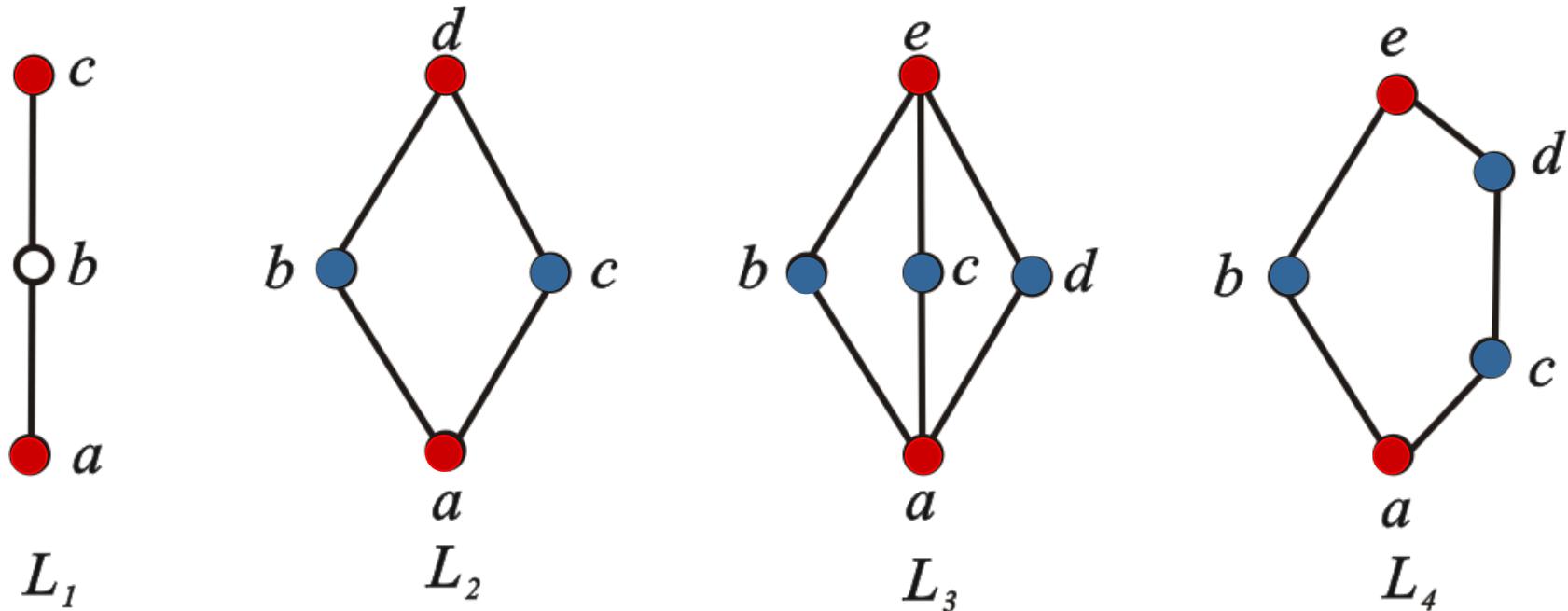
$$a \wedge b = 0 \text{ 和 } a \vee b = 1$$

成立, 则称 b 是 a 的**补元**.

□ 注意: 若 b 是 a 的补元, 那么 a 也是 b 的补元. a 和 b 互为补元.

实例

□ 例7 考虑下图中的格. 针对不同的元素, 求出所有的补元.



实例解答

- (1) L_1 中 a 与 c 互为补元, 其中 a 为全下界, c 为全上界, b 没有补元.
 - (2) L_2 中 a 与 d 互为补元, 其中 a 为全下界, d 为全上界, b 与 c 也互为补元.
 - (3) L_3 中 a 与 e 互为补元, 其中 a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d ; c 的补元是 b 和 d ; d 的补元是 b 和 c ; b, c, d 每个元素都有两个补元.
 - (4) L_4 中 a 与 e 互为补元, 其中 a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d ; c 的补元是 b ; d 的补元是 b .
-

有界分配格的补元惟一性

- 定理11.7 设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 是有界分配格. 若 L 中元素 a 存在补元, 则存在惟一的补元.
- 证 假设 c 是 a 的补元, 则有

$$a \vee c = 1, a \wedge c = 0,$$

又知 b 是 a 的补元, 故

$$a \vee b = 1, a \wedge b = 0$$

从而得到 $a \vee c = a \vee b, a \wedge c = a \wedge b,$

由于 L 是分配格,

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) = b \wedge c$$

同理可证 $c = c \wedge b$, 所以 $b = c$.

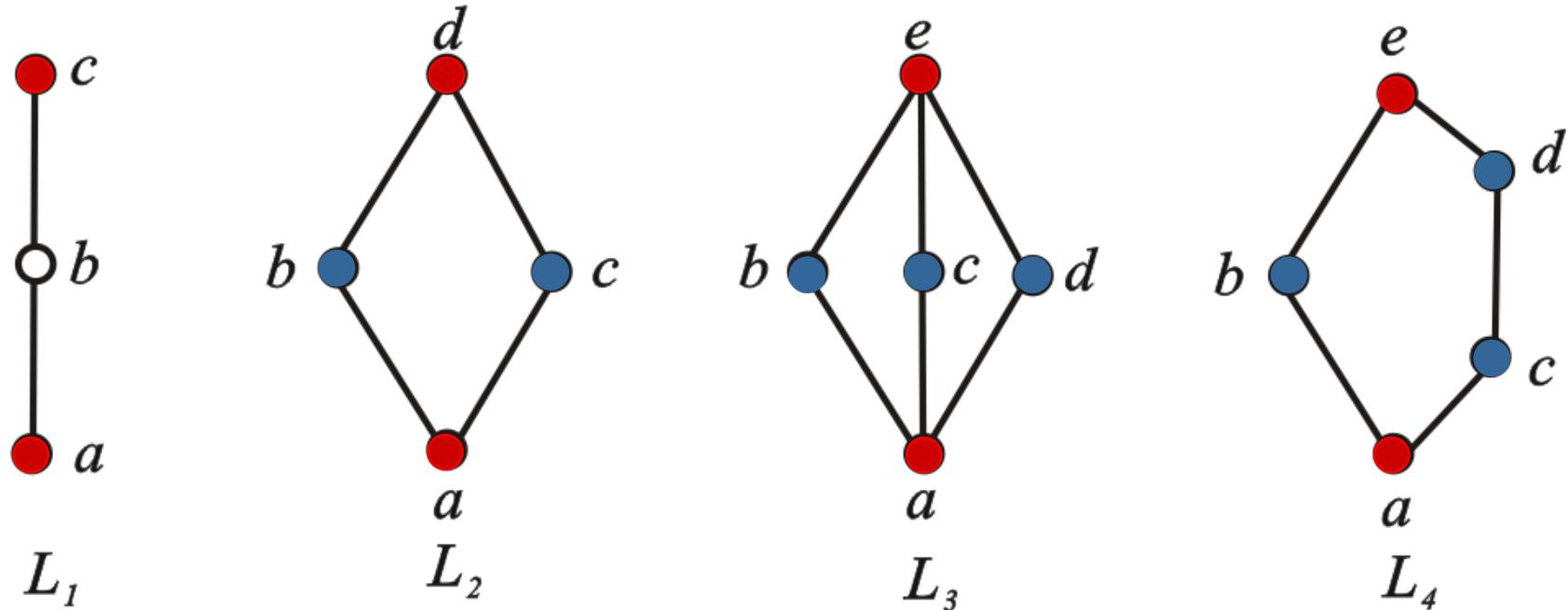
有界分配格的补元惟一性

□ 注意：

- 在任何有界格中, 全下界0与全上界1互补.
- 对于一般元素, 可能存在补元, 也可能不存在补元. 如果存在补元, 可能是惟一的, 也可能是多个补元. 对于有界分配格, 如果元素存在补元, 一定是惟一的.

有补格的定义

□ 定义11.9 设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 是有界格, 若 L 中所有元素都有补元存在, 则称 L 为**有补格**.



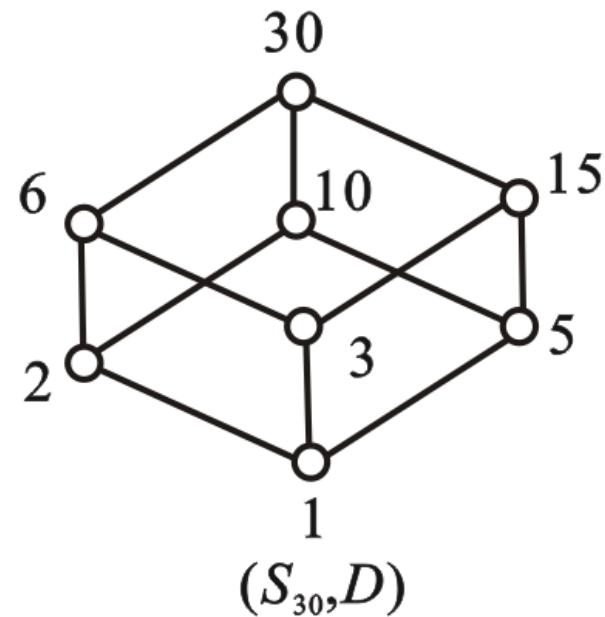
□ 图中的 L_2 , L_3 和 L_4 是有补格, L_1 不是有补格.

布尔代数的定义

□ 定义11.10 如果一个格是有补分配格, 则称它为布尔格或布尔代数. 布尔代数标记为 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$, '为求补运算.

例8 设 $S_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ 是 30 的正因子集合, gcd 表示求最大公约数的运算, lcm 表示求最小公倍数的运算.

问: $\langle S_{30}, \text{gcd}, \text{lcm} \rangle$ 是否构成布尔代数? 为什么?



实例解答

□ 解 (1) 不难验证 S_{30} 关于 gcd 和 lcm 运算构成格.

显然 gcd,lcm 运算满足交换律、结合律

$$\gcd(x, \text{lcm}(x, y)) = x$$

$$\text{lcm}(x, \gcd(x, y)) = x$$

满足吸收律

(2) 验证分配律 $\forall x, y, z \in S_{30}$ 有

$$\gcd(x, \text{lcm}(y, z)) = \text{lcm}(\gcd(x, y), \gcd(x, z))$$

$$\text{lcm}(x, \gcd(y, z)) = \gcd(\text{lcm}(x, y), \text{lcm}(x, z))$$

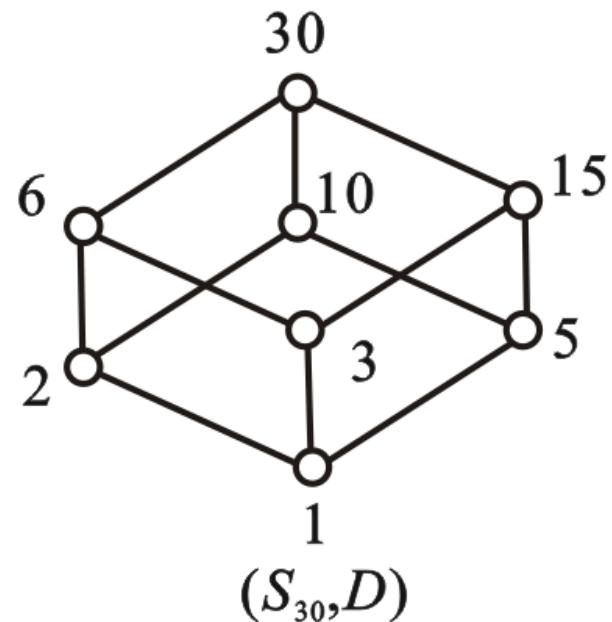
实例解答

(3) 验证它是有补格:

1为全下界, 30为全上界;

1和30、2和15、3和10、5
和6互为补元。

从而证明了 $\langle S_{30}, \gcd, \text{lcm} \rangle$ 为
布尔代数.



实例：集合代数

- **例9** 设 B 为任意集合, 证明 B 的幂集格 $\langle P(B), \cap, \cup, \sim, \emptyset, B \rangle$ 构成布尔代数, 称为集合代数.
- **证** (1) $P(B)$ 关于 \cap 和 \cup 构成格, 因为 \cap 和 \cup 运算满足交换律, 结合律和吸收律.
- (2) 由于 \cap 和 \cup 互相可分配, 因此 $P(B)$ 是分配格.
- (3) 全下界是空集 \emptyset , 全上界是 B .
- (4) 根据绝对补的定义, 取全集为 B , $\forall x \in P(B)$, $\sim x$ 是 x 的补元.
- 从而证明 $P(B)$ 是有补分配格, 即布尔代数.

布尔代数的性质

□ 定理11.8 设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ 是布尔代数, 则

(1) $\forall a \in B, (a')' = a$.

(2) $\forall a, b \in B, (a \wedge b)' = a' \vee b'$, $(a \vee b)' = a' \wedge b'$
(德·摩根律)

□ 证 (1) $(a')'$ 是 a' 的补元, a 也是 a' 的补元. 由补元惟一性得 $(a')' = a$.

证明 (续)

□ (2) 对任意 $a, b \in B$ 有

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a' \vee b') &= (a \vee a' \vee b') \wedge (b \vee a' \vee b') \\&= (1 \vee b') \wedge (a' \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \wedge (a' \vee b') &= (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge b') \\&= (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0\end{aligned}$$

$a' \vee b'$ 是 $a \wedge b$ 的补元, 根据补元惟一性有

$(a \wedge b)' = a' \vee b'$, 同理可证 $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.

□ 注意: 德摩根律对有限个元素也是正确的.

布尔代数作为代数系统的定义

□ 定义11.11 设 $\langle B, *, \circ \rangle$ 是代数系统, *和 \circ 是二元运算. 若*和 \circ 运算满足:

(1) 交换律, 即 $\forall a, b \in B$ 有 $a * b = b * a, a \circ b = b \circ a$

(2) 分配律, 即 $\forall a, b, c \in B$ 有

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c), a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$$

(3) 同一律, 即存在 $0, 1 \in B$, 使得 $\forall a \in B$ 有

$$a * 1 = a, a \circ 0 = a$$

(4) 补元律, 即 $\forall a \in B$, 存在 $a' \in B$ 使得

$$a * a' = 0, a \circ a' = 1$$

则称 $\langle B, *, \circ \rangle$ 是一个布尔代数.

实例：命题代数

□ **例10** 设 S 为命题集合, 证明 $\langle S, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ 构成布尔代数, 称为命题代数.

□ 证明:

(1) **交换律**: \wedge 和 \vee 满足交换律

(2) **分配律**: \wedge 和 \vee 互相可分配

(3) **同一律**: 存在 $0, 1 \in S$, 使得 $\forall a \in S$ 有

$$a \wedge 1 = a, a \vee 0 = a$$

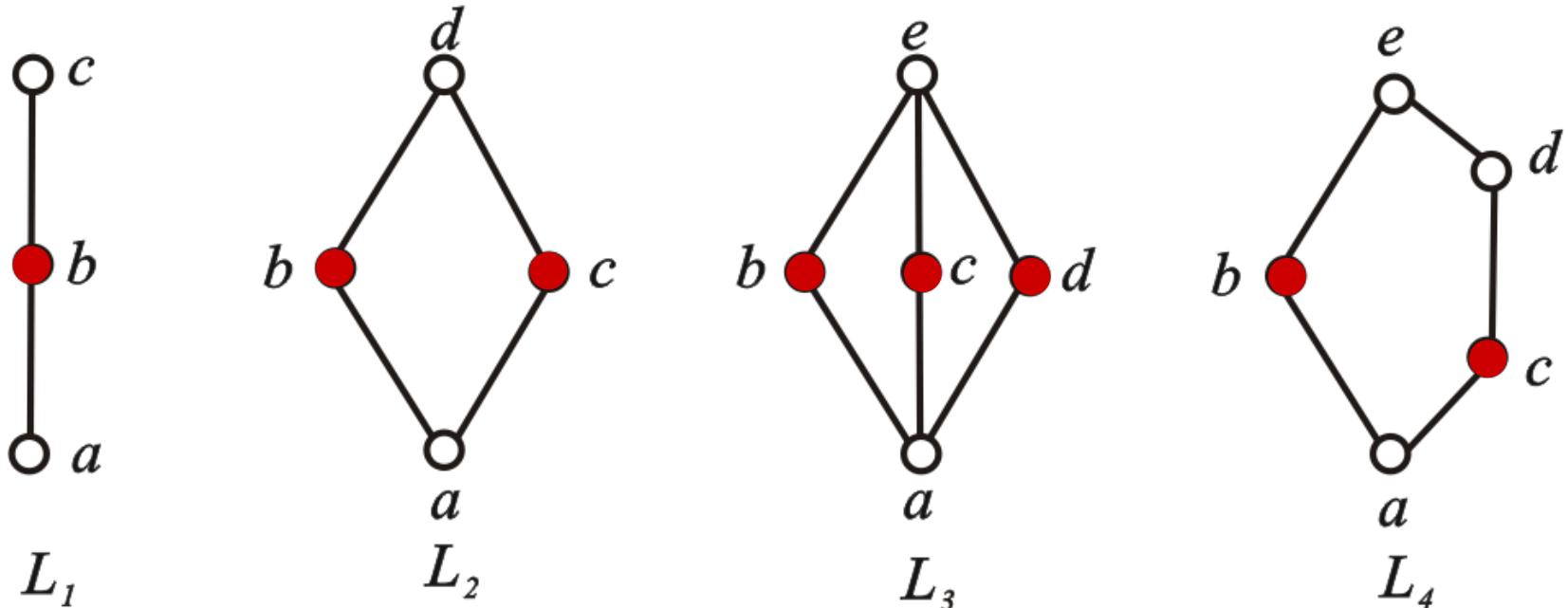
(4) **补元律**, $\forall a \in S$, 存在 $a' \in S$ 使得

$$a \wedge a' = 0, a \vee a' = 1$$

综上所述: $\langle S, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ 构成布尔代数

有限布尔代数的结构

□ 定义11.12 设 L 是格, $0 \in L$, 若 $\forall b \in L$ 有 $0 < b \leq a \Rightarrow b = a$, 则称 a 是 L 中的原子.



- (3) 图中 L_1 的原子是 b , L_2 的原子是 b, c , L_3 的原子是 b, c 和 d , L_4 的原子是 b, c .

实例

- (1) L 是正整数 n 的全体正因子关于整除关系构成的格：
 - L 的原子恰为 n 的全体素因子.
- (2) 若 L 是 B 的幂集
 - L 的原子就是 B 中元素构成的单元集

有限布尔代数的表示定理

□ 定理11.9 (有限布尔代数的表示定理)

设 B 是有限布尔代数, A 是 B 的全体原子构成的集合, 则 B 同构于 A 的幂集代数 $P(A)$.

□ 推论1 任何有限布尔代数的基数为 2^n , $n \in \mathbb{N}$.

证明 设 B 是有限布尔代数, A 是 B 的所有原子构成的集合, 且 $|A| = n$, $n \in \mathbb{N}$. 由定理得 $B \cong P(A)$, 而 $|P(A)| = 2^n$, 所以 $|B| = 2^n$.

□ 推论2 任何等势的有限布尔代数都是同构的.

有限布尔代数的表示定理

□ 结论：

- 有限布尔代数的基数都是2的幂，
- 对于任何自然数 n , 仅存在一个 2^n 元的布尔代数.

实例

□ 例12 $\langle S_{30}, \gcd, \text{lcm} \rangle$ 是布尔代数. 它的原子是 2, 3 和 5, 因此原子的集合 $A = \{2, 3, 5\}$.

幂集 $P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 3, 5\}\}$.
幂集代数是 $\langle P(A), \cap, \cup \rangle$.

■ 令 $f: S_{30} \rightarrow P(A)$,

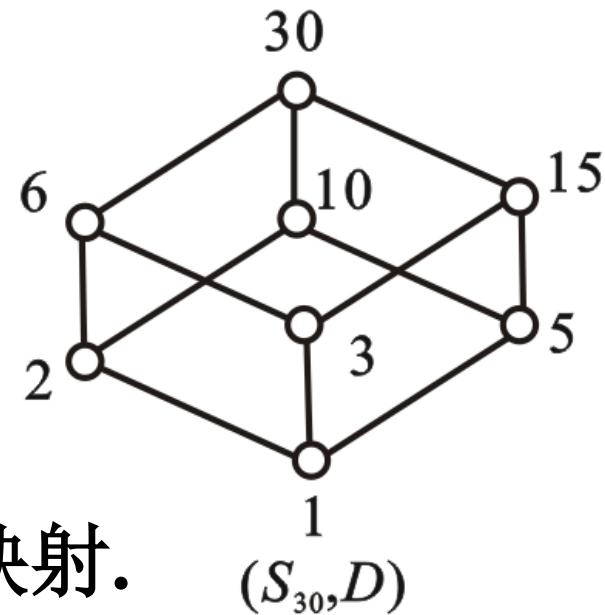
$$f(1) = \emptyset, \quad f(2) = \{2\},$$

$$f(3) = \{3\}, \quad f(5) = \{5\},$$

$$f(6) = \{2, 3\}, \quad f(10) = \{2, 5\},$$

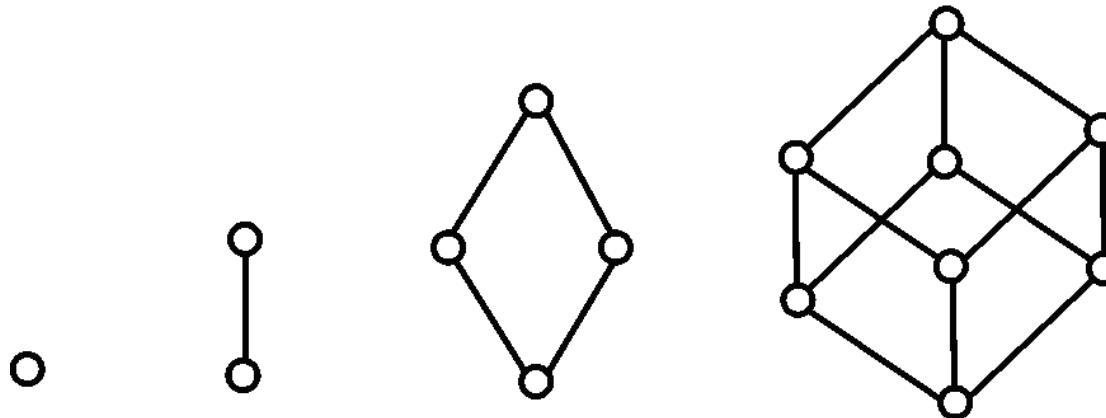
$$f(15) = \{3, 5\}, \quad f(30) = A,$$

f 就是从 S_{30} 到幂集 $P(A)$ 的同构映射.



实例

□ 下图给出了 1 元, 2 元, 4 元和 8 元的布尔代数.



第十一章 习题课

□ 主要内容

- 格的两个等价定义
- 格的性质
- 子格
- 特殊格：分配格、有界格、有补格、布尔代数

第十一章 习题课

□ 基本要求

- 能够判别给定偏序集或者代数系统是否构成格
- 能够确定一个命题的对偶命题
- 能够证明格中的等式和不等式
- 能判别格 L 的子集 S 是否构成子格
- 能够判别给定的格是否为分配格、有补格
- 能够判别布尔代数并证明布尔代数中的等式

练习1

- (1) 证明格中的命题, 即 $(a \wedge b) \vee b = b$
- (2) 证明 $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \leq (a \vee c) \wedge (b \vee d)$
- 证明:
 - (1) $(a \wedge b) \vee b$ 是 $a \wedge b$ 与 b 的最小上界, 根据最小上界的定义有 $(a \wedge b) \vee b \geq b$.
 b 是 $a \wedge b$ 的上界 $a \wedge b \leq b$, b 也是 b 的上界 $b \leq b$, 故有 $(a \wedge b) \vee b \leq b$.
由于偏序的反对称性, 等式得证.

练习1（续）

(2) $a \wedge b \leq a \leq a \vee c, a \wedge b \leq b \leq b \vee d$, 所以

$$(a \wedge b) \leq (a \vee c) \wedge (b \vee d),$$

同理 $(c \wedge d) \leq (a \vee c) \wedge (b \vee d)$. 从而得到

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \leq (a \vee c) \wedge (b \vee d)$$

练习2

□ 求图中格的所有子格.

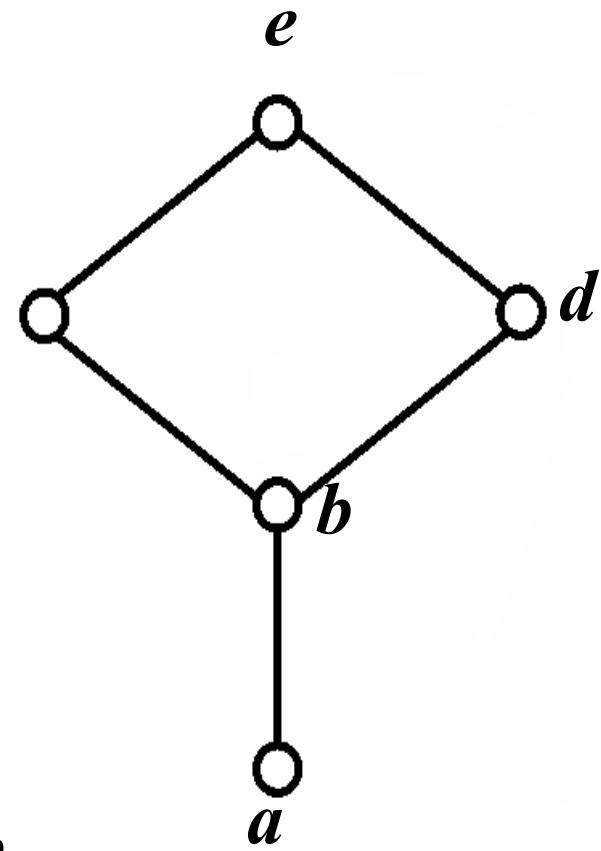
1元子格: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}$

2元子格: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\},$
 $\{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c$
 $\{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\};$

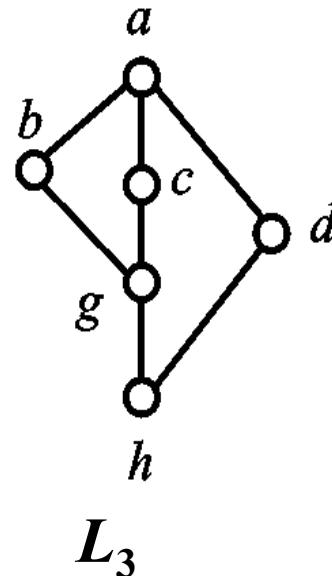
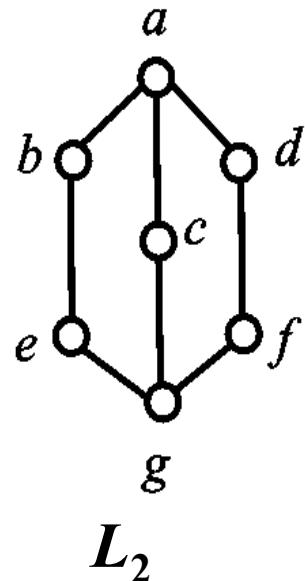
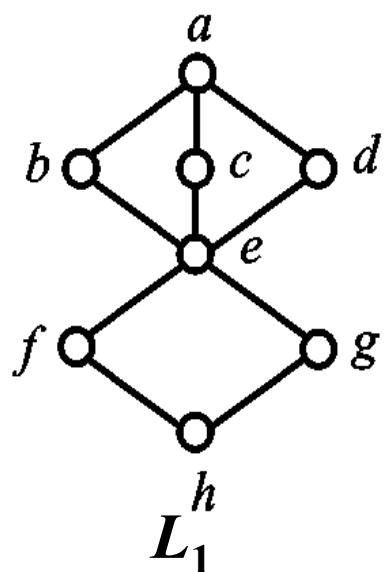
3元子格: $\{a, b, c\}, \{a, b, d\},$
 $\{a, b, e\}, \{a, c, e\},$
 $\{a, d, e\}, \{b, c, e\},$
 $\{b, d, e\};$

4元子格: $\{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\},$
 $\{b, c, d, e\};$

5元子格: $\{a, b, c, d, e\}$



练习3



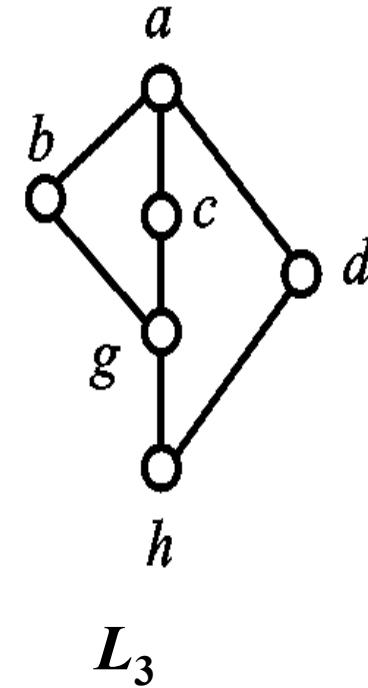
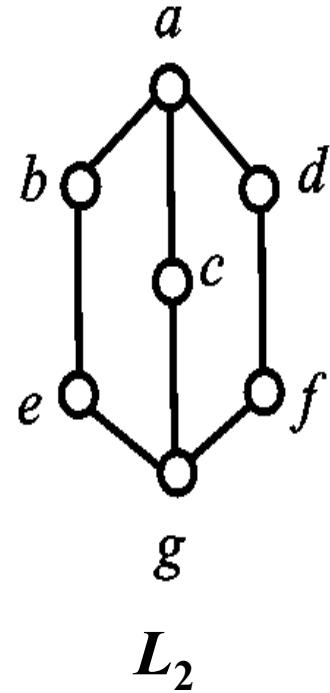
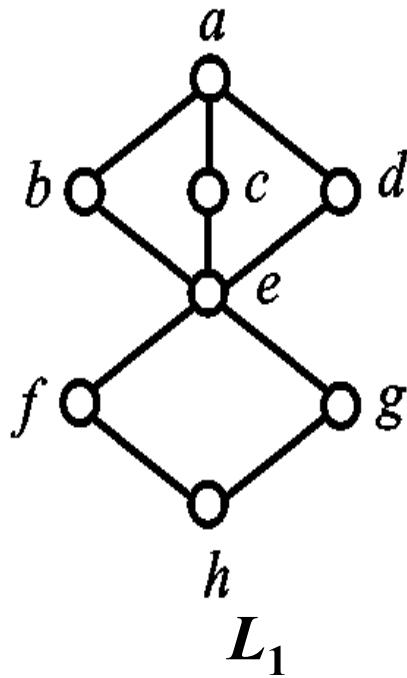
□ 判别上述格 L 是否为分配格.

L_1 不是分配格, 因为它含有与钻石格同构的子格.

L_2 和 L_3 不是分配格, 因为它们含有与五角格同构的子格.

练习4

□ 针对下图，求出每个格的补元并说明它们是否为有补格？



练习4解答

- L_1 中, a 与 h 互为补元, 其他元素没补元.
- L_2 中, a 与 g 互为补元. b 的补元为 c, d, f ; c 的补元为 b, d, e, f ; d 的补元为 b, c, e ; e 的补元为 c, d, f ; f 的补元为 b, c, e .
- L_3 中, a 与 h 互为补元, b 的补元为 d ; c 的补元为 d ; d 的补元为 b, c, g ; g 的补元为 d . L_2 与 L_3 是有补格.

练习5

□ 对于以下各题给定的集合和运算判断它们是哪一类代数系统（半群、独异点、群、环、域、格、布尔代数），并说明理由。

- (1) $S_1 = \{1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 4\}$, *为普通乘法.
- (2) $S_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $\forall a_i, a_j \in S_2, a_i \circ a_j = a_i$, 这里的 n 为给定正整数, $n > 1$.
- (3) $S_3 = \{0, 1\}$, *为普通乘法.
- (4) $S_4 = \{1, 2, 3, 6\}$, $\forall x, y \in S_4, x \circ y$ 与 $x * y$ 分别表示 x 与 y 的最小公倍数和最大公约数.
- (5) $S_5 = \{0, 1\}$, *为模2加法, \circ 为模2乘法.

练习5解答

- (1) 不是代数系统, 因为乘法不封闭, 例如 $4*4=16$.
 - (2) 是半群但不是独异点, 因为*运算满足结合律,但是没有单位元.
 - (3) 是独异点但不是群. 因为*运算满足结合律,单位元是1, 可是0没有乘法逆元.
 - (4) 是格, 也是布尔代数. 因为这两个运算满足交换律和分配律; 求最小公倍数运算的单位元是1,求最大公约数运算的单位元是6, 满足同一律;两个运算满足补元律.
 - (5) 是域. 对于模 n 的环 \mathbb{Z}_n , 当 n 为素数时构成域.
-

练习6

□ 判断下述代数系统是否为格？是不是布尔代数？

(1) $S = \{1, 3, 4, 12\}$; 任给 $x, y \in S$,

$x \circ y = \text{lcm}(x, y)$, $x * y = \text{gcd}(x, y)$, 其中
 lcm 是求最小公倍数, gcd 是求最大公约数.

(2) $S = \{0, 1, 2\}$; \circ 是模3加法, $*$ 是模3乘法

(3) $S = \{0, \dots, n\}$, 其中 $n > 2$; 任给 $x, y \in S$,

$x \circ y = \max(x, y)$, $x * y = \min(x, y)$

练习6解答

- (1) 是布尔代数.
- (2) 不是格.
- (3) 是格, 但不是布尔代数.

练习7

□ 设 $\langle B, \wedge, \vee, -, 0, 1 \rangle$ 是布尔代数, 证明对于 B 中任意元素 a, b

$$(1) \ a \vee (\bar{a} \wedge b) = \underline{a} \vee b$$

$$(2) \ a \wedge b = 0 \Leftrightarrow a \vee b = 1 \Leftrightarrow a \leq b$$

证明:

$$\begin{aligned}(1) \ a \vee (\bar{a} \wedge b) &= (a \vee \bar{a}) \wedge (a \vee b) \\&= 1 \wedge (a \vee b) = a \vee b\end{aligned}$$

练习7 (续)

(2)由 $a \wedge \bar{b} = 0$ 得 $\overline{a \wedge \bar{b}} = 1$, 即 $\bar{a} \vee b = 1$;
反之也对。

下面证明它们都等价于 $a \leq b$

由 $\bar{a} \vee b = 1$ 得

$$\begin{aligned} a &= a \wedge 1 = a \wedge (\bar{a} \vee b) = (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \\ &= 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b \end{aligned}$$

即 $a \leq b$, 由 $a \leq b$ 得

$$a \wedge \bar{b} = (a \wedge b) \wedge \bar{b} = a \wedge (b \wedge \bar{b}) = a \wedge 0 = 0$$