第18章 支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

第五部分 图论

第十八章支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

- 主要内容
- 18.1支配集、点覆盖集与点独立集
- 18.2边覆盖与匹配
- 18.3二部图中的匹配
- 18.4点着色
- 18.5地图着色与平面图的点着色
- 18.6边着色

支配集与支配数

- **定义18.1** 设无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$，$V^*\subseteq V$.

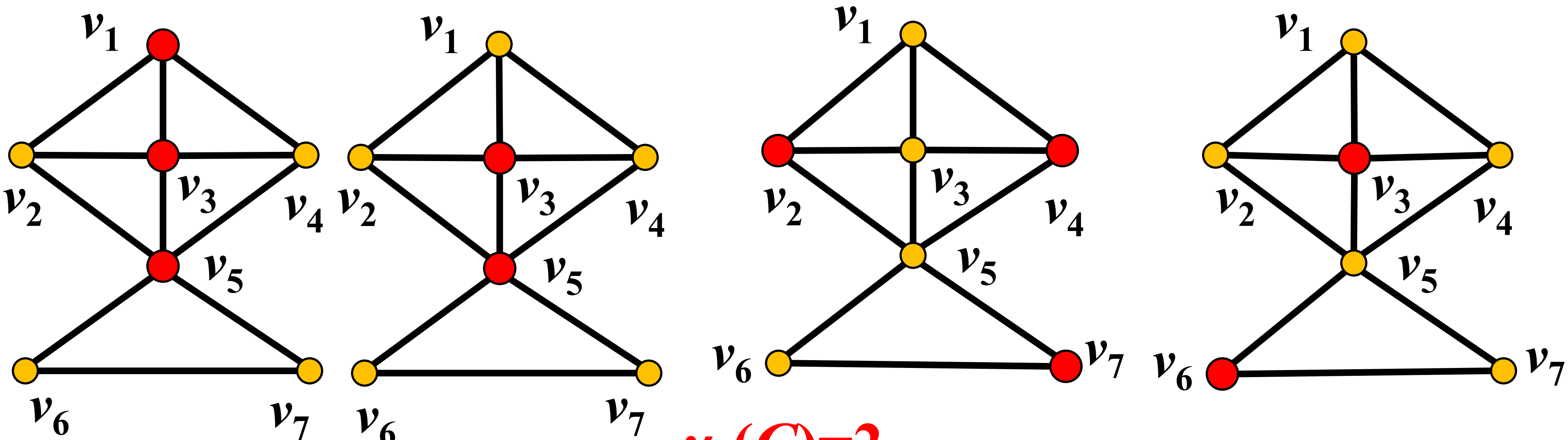
(1) V^*为支配集(Dominating Set)——$\forall v_i\in V-V^*,\exists v_j\in V^*$, 使得$(v_i,v_j)\in E$

(2) V^*为极小支配集——V^*的真子集不是支配集

(3) 最小支配集——元素最少的支配集

(4) 支配数$\gamma_0(G)$——最小支配集中的元素个数

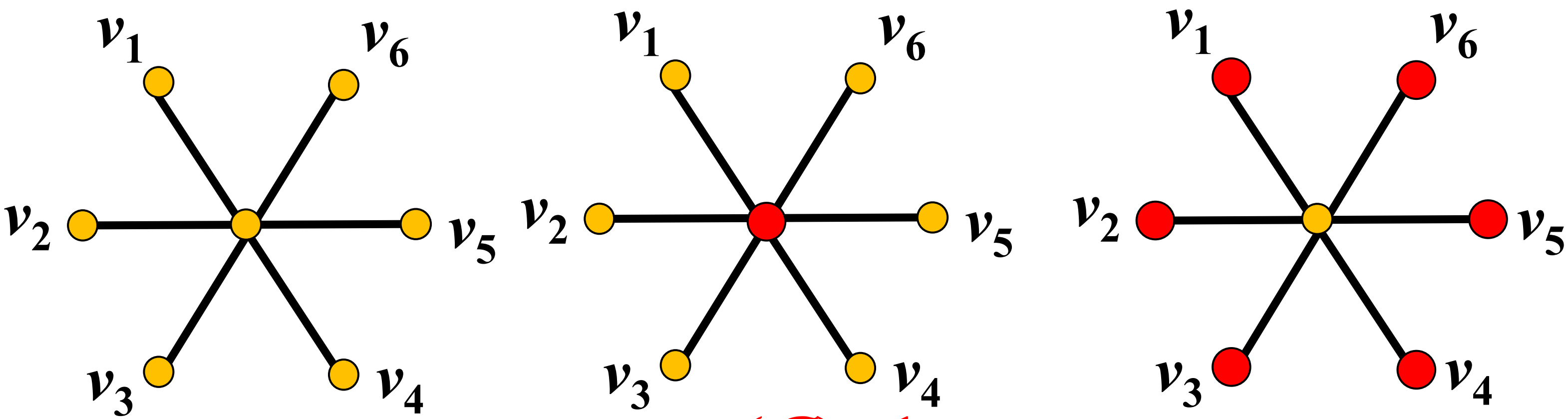
实例



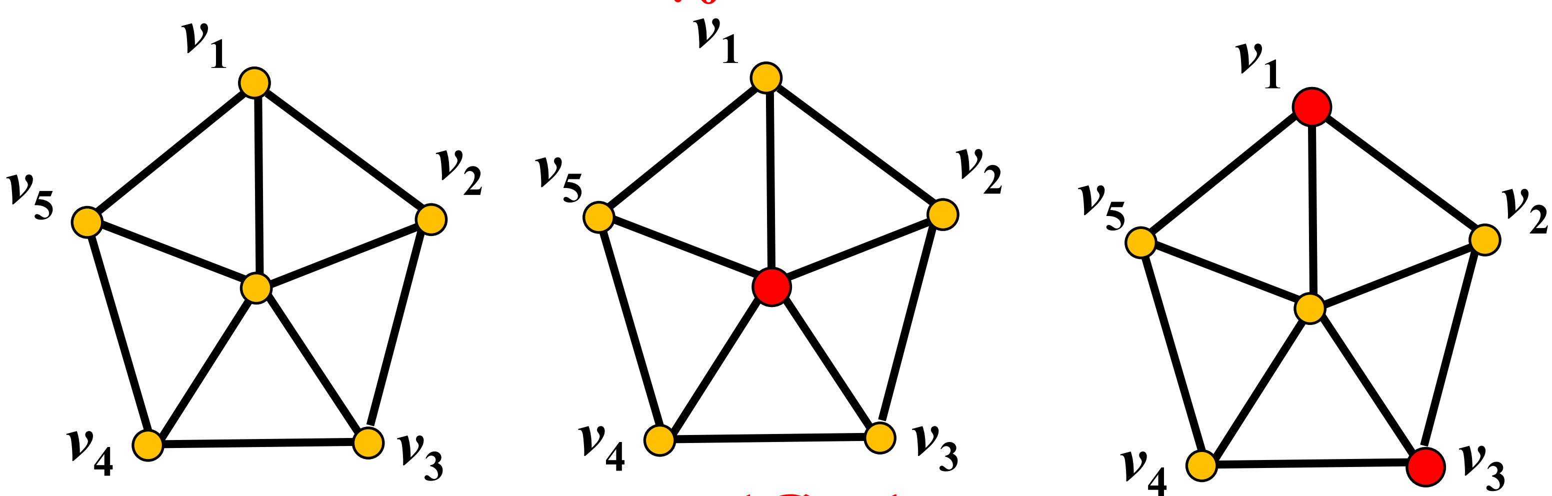
$\gamma_0(G)=2$

点集V^*能邻接(支配)到图中所有其它点

支配集与支配数



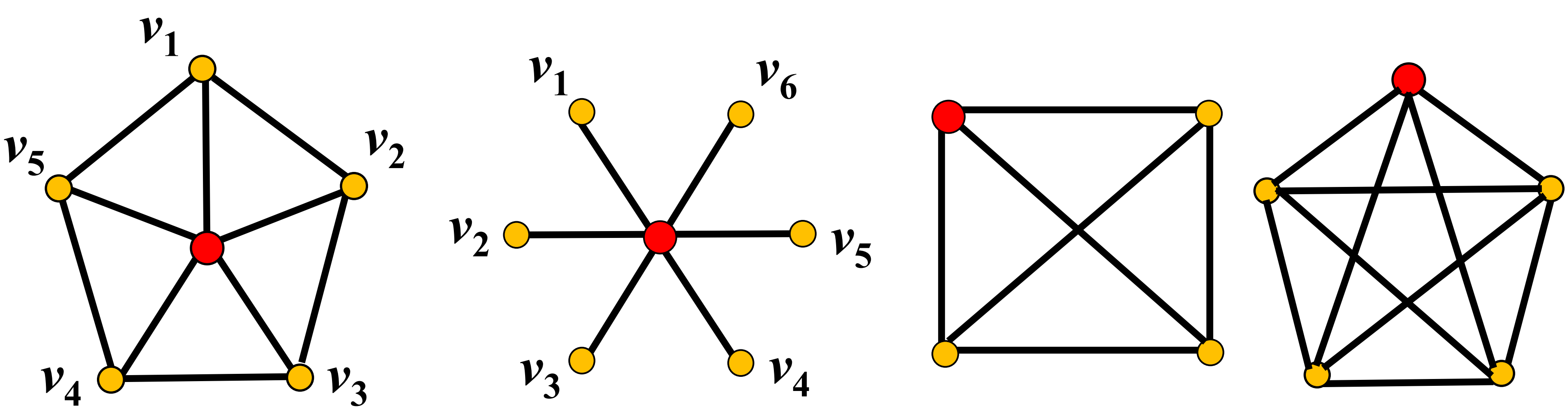
$\gamma_0(G)=1$



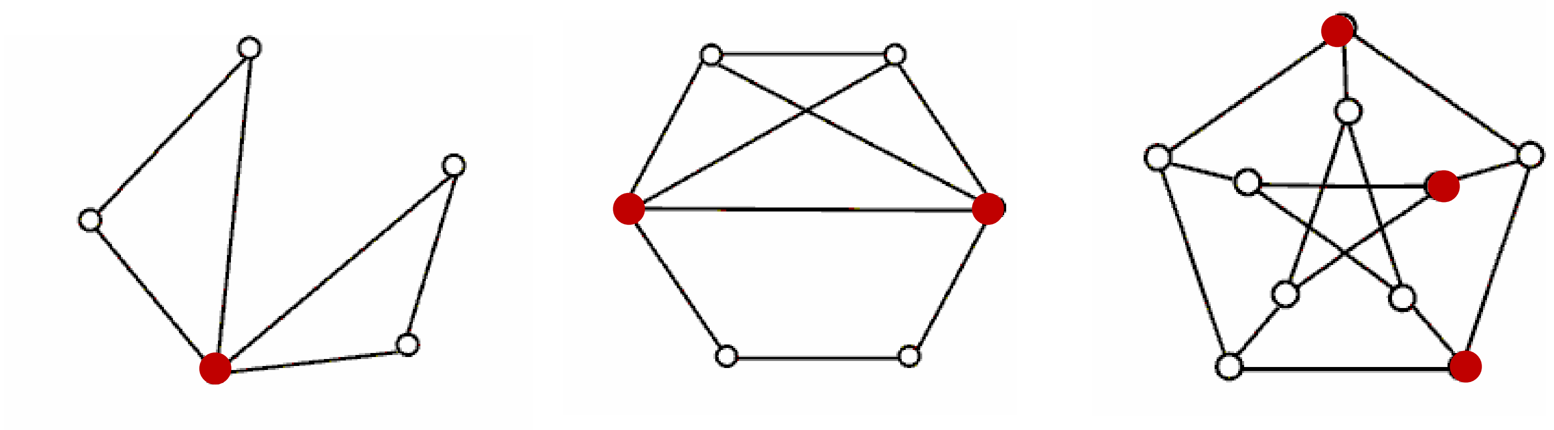
$\gamma_0(G)=1$

说明

- 最小支配集为极小支配集，但反之不真.
- 极小支配集与最小支配集都可能不惟一.
- 完全图、轮图、星形图的支配数均是1.



练习



(1)　　　(2)　　　(3)

- 求上图的支配数，并找出一个最小支配集。
- 答：(1),(2),(3)的支配数分别为1，2，3.

点独立集与点独立数

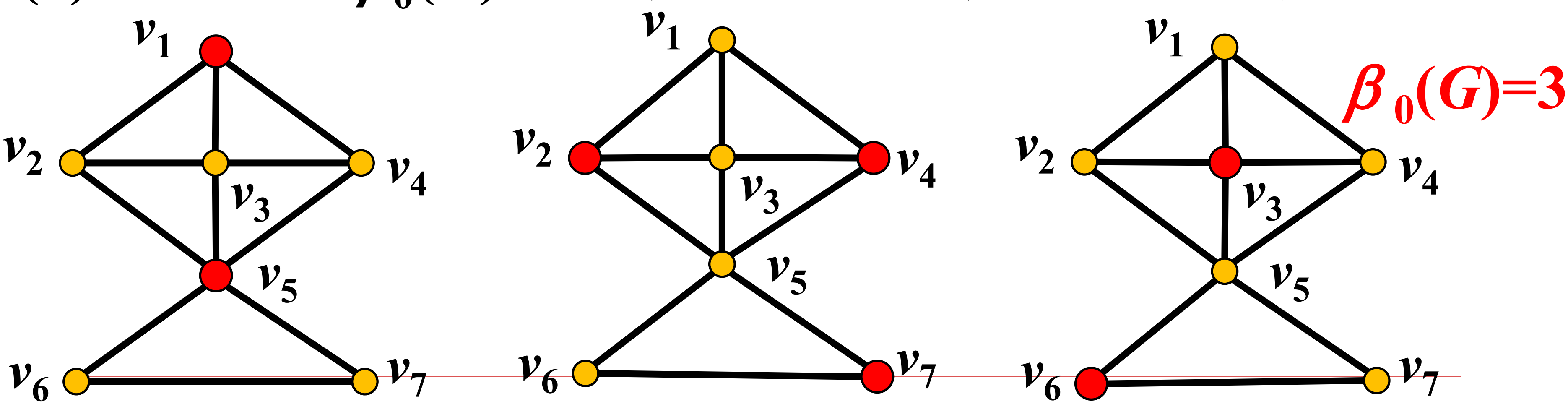
□ 定义18.2 设无向简单图 $G=<V,E>$，$V^*\subseteq V$.

(1) 点独立集V^*——V^*中顶点彼此不相邻

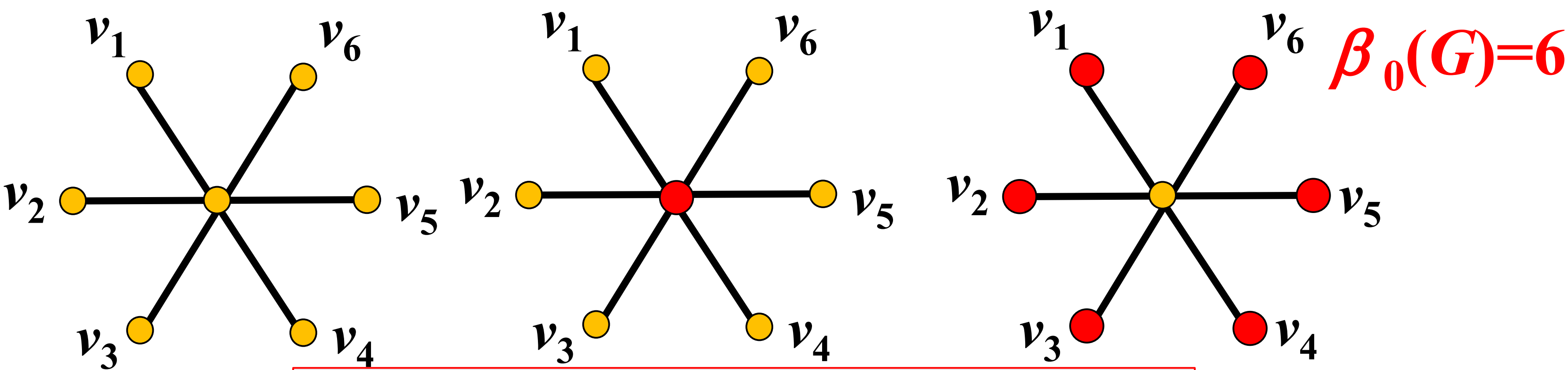
(2) V^*为极大点独立集——V^*中加入任何顶点就不是点独立集

(3) 最大点独立集——元素最多的点独立集

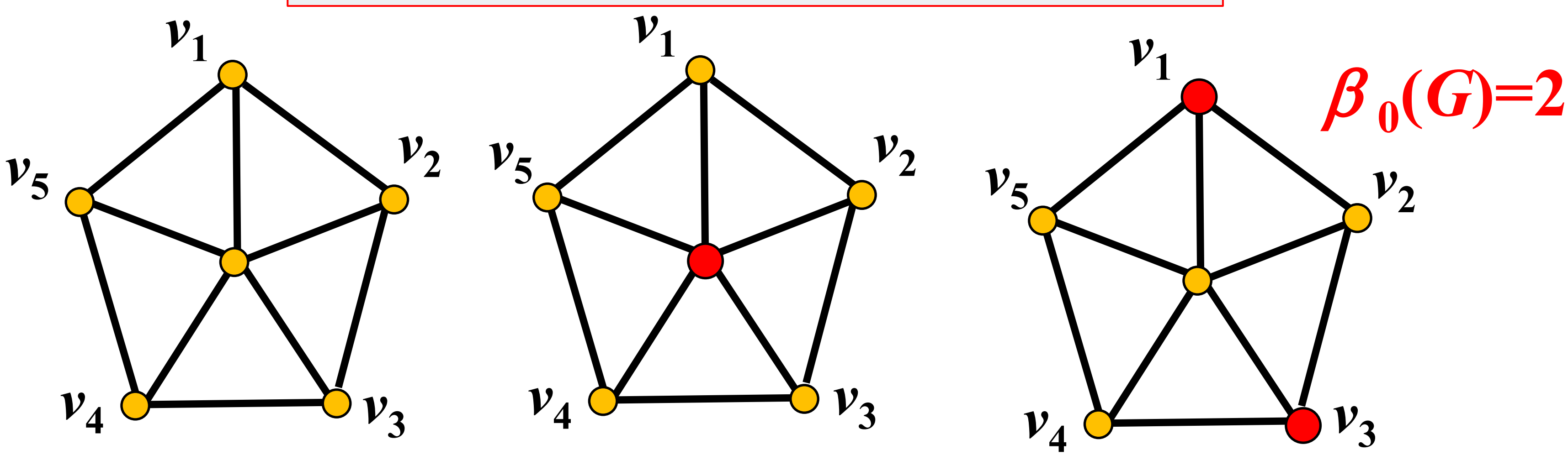
(4) 点独立数$\beta_0(G)$——最大点独立集中的元素个数.



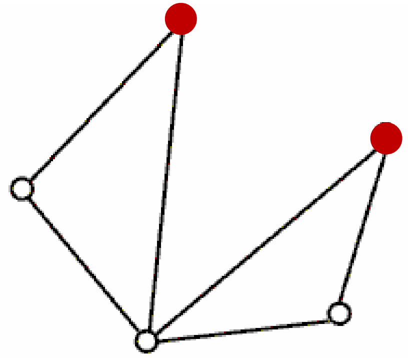
点独立集与点独立数



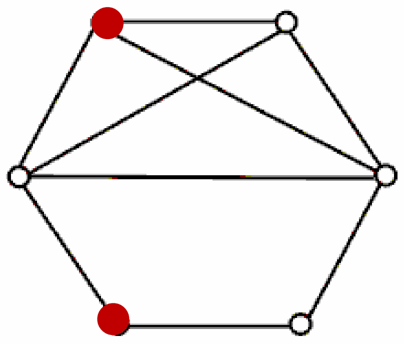
极大点独立集都是极小支配集



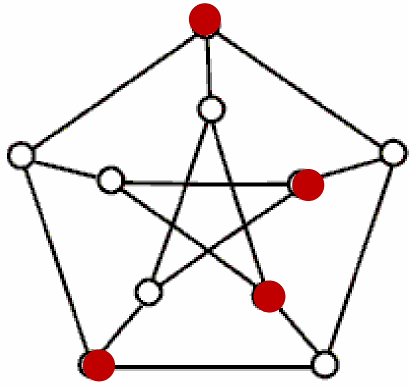
练习



(1)



(2)



(3)

- 求上图的点独立数。
- 答：点独立数依次为2, 2, 4.

极大独立集与极小支配集

- **定理18.1** 设无向简单图 $G=\langle V, E\rangle$中无孤立点，则 G的极大点独立集都是极小支配集.

证明：设V^*为G的一个极大点独立集. $\{v_2,v_4,v_7\}$

(1) 证明V^*是支配集.

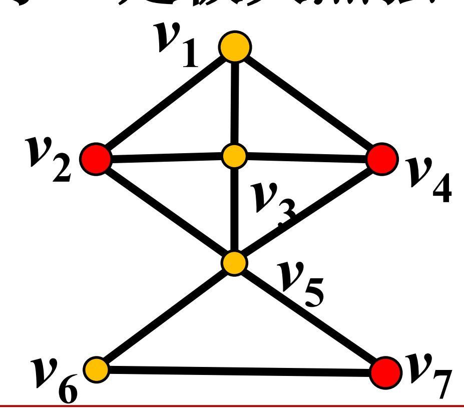
只需证$V-V^*$中的任何点都邻接到V^*中的一个点。反证法。

$\forall v\in V-V^*$，必$\exists v'\in V^*$，使$(v,v')\in E$，否则$\exists v_0\in V-V^*$不与V^*中任何顶点相邻，则$V^*\cup\{v_0\}$仍为点独立集，这与V^*是极大点独立集矛盾.

(2) 证V^*是极小支配集.

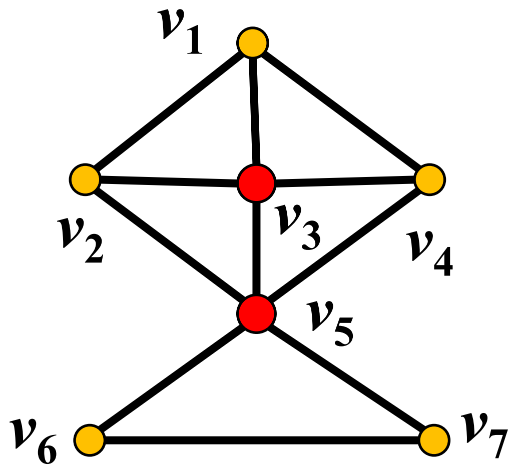
只需证V^*的真子集不是支配集.

由于V^*为点独立集, $\forall V_1\subset V^*$, $V^*- V_1$中的点都不受V_1支配。所以得结论.



极大独立集与极小支配集

极小支配集不一定是极大点独立集！！



不是极大独立集
极小支配集

点覆盖集与点覆盖数

- 设无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$, $V^*\subseteq V$.

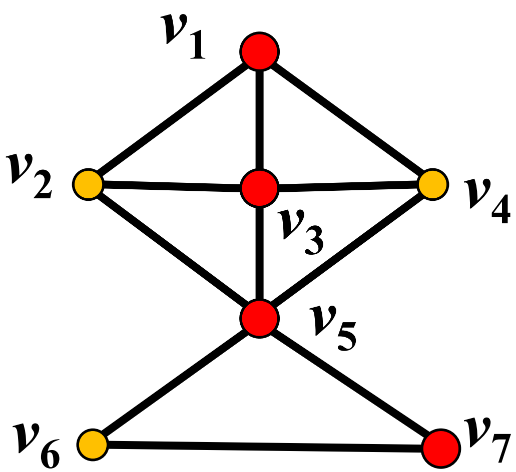
(1) V^*是点覆盖集——$\forall e\in E$，$\exists v\in V^*$，使e与v关联

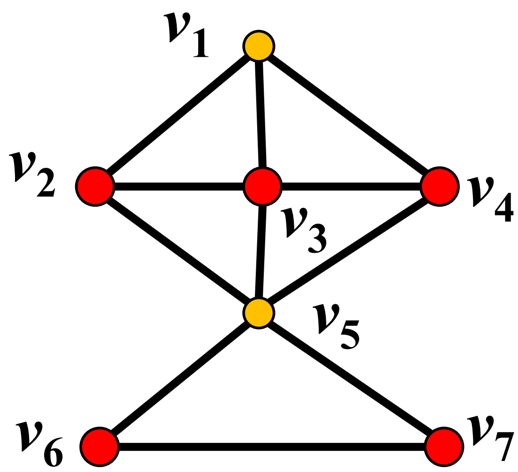
(2) V^*是极小点覆盖集——V^*的任何真子集都不是点覆盖集

(3) 最小点覆盖集(或最小点覆盖)——顶点数最少的点覆盖集

(4) 点覆盖数$\alpha_0(G)$——最小点覆盖的元素个数

实例

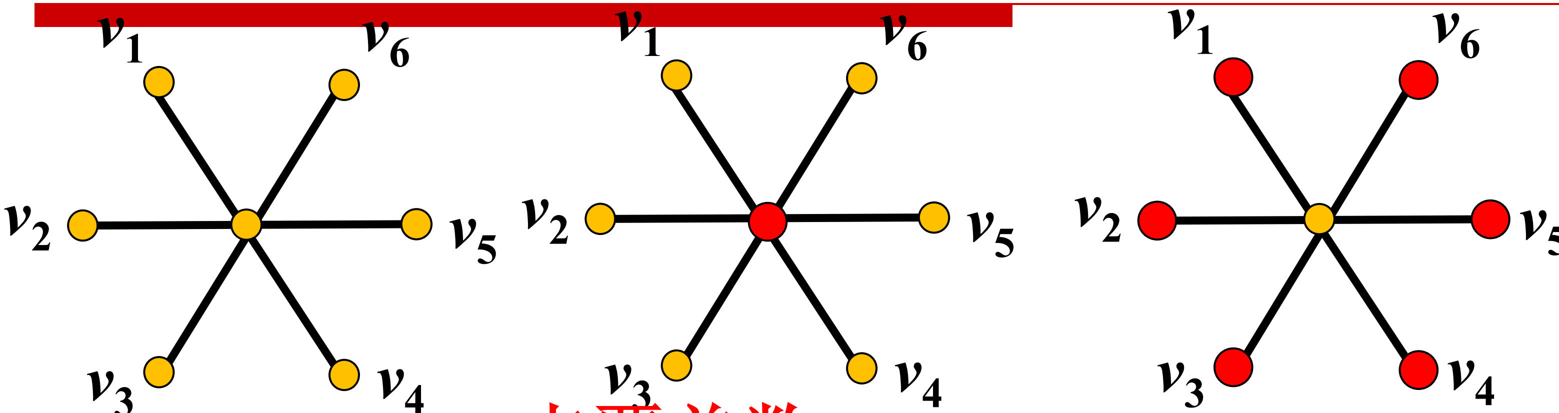




$\alpha_0(G)=4$

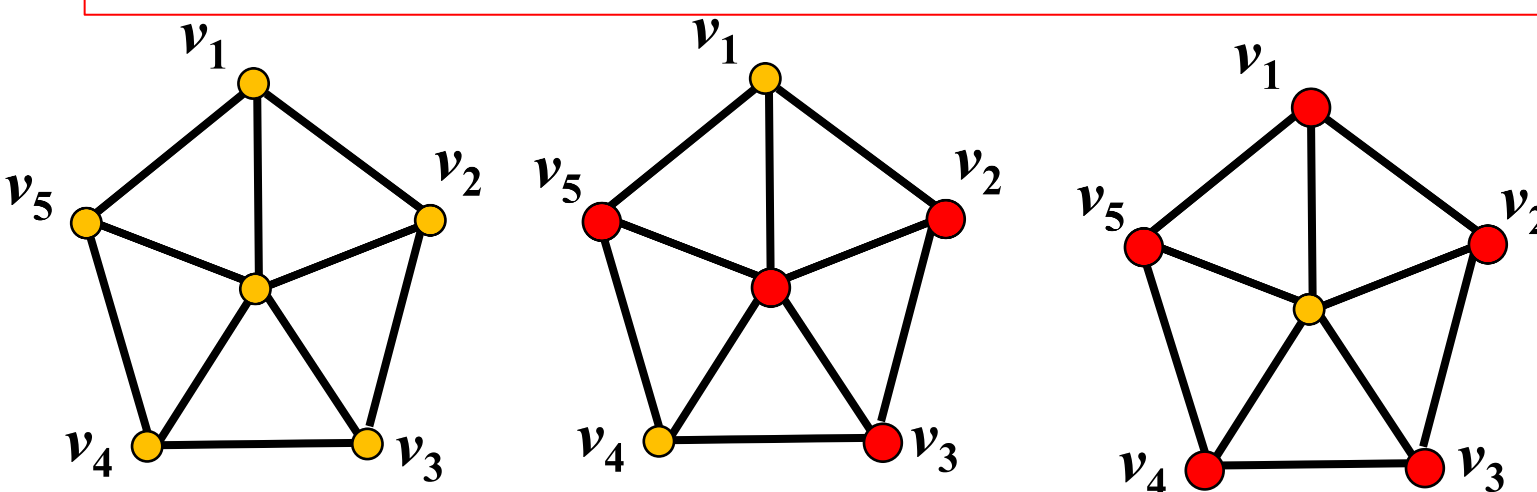
点集V^*能关联(覆盖)到图中所有其它边

点覆盖集与点覆盖数



点覆盖数$\alpha_0(G)=1$

V^*是点覆盖当且仅当$\overline{V^*}=V- V^*$为点独立集



点覆盖数$\alpha_0(G)=4$

点覆盖集与点独立集的关系

- **定理18.2** 设 无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$， $V^* \subseteq V$， 则 V^*是点覆盖当且仅当$\overline{V^*}=V-V^*$为点独立集.

证明：(1) 必要性.

反证法，假设$\overline{V^*}$不是独立集，则

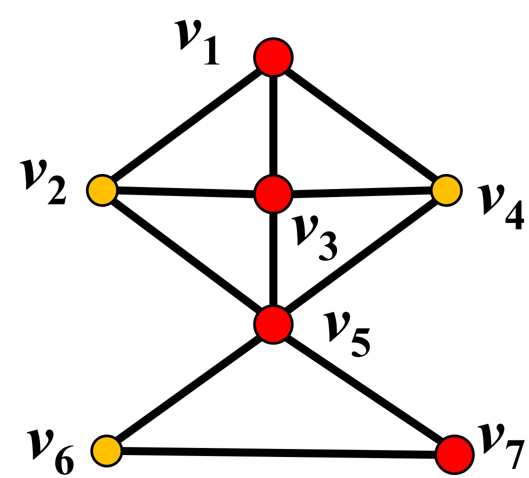
若$\exists v_i, v_j \in \overline{V^*}$相邻，即$(v_i,v_j)\in E$，则$V^*$中顶点不能覆盖边$(v_i,v_j)$。

这与V^*是点覆盖矛盾.

(2)充分性.

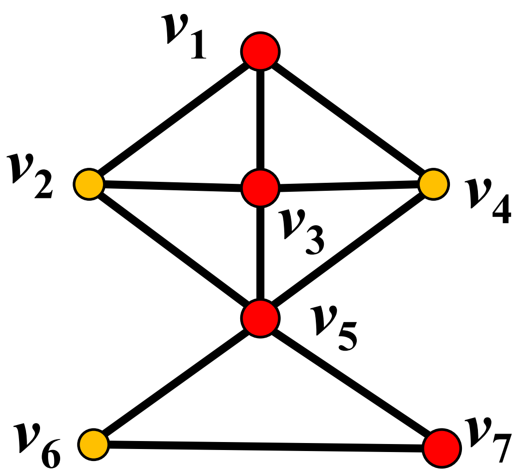
由于$V-V^*$是点独立集，因而$\forall e\in E$，e的两个端点至少一个在V^*中。

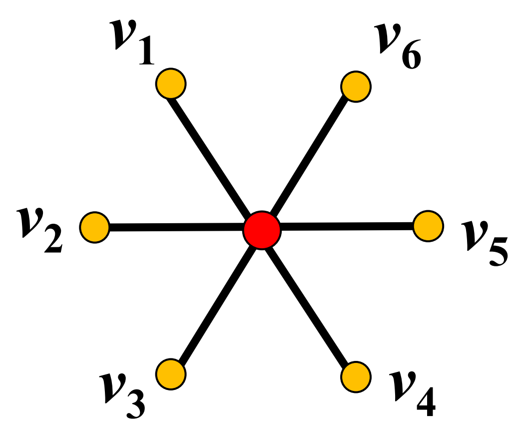
所以V^*是点覆盖.



点覆盖集与点独立集的关系

- 推论 设G为n阶无孤立顶点无向简单图，则 V^*是极小(最小)点覆盖当且仅当$\overline{V^*}=V-V^*$是极大（最大）点独立集，从而有$\alpha_0+\beta_0=n$





点覆盖数$\alpha_0(G)=4$
点独立数$\beta_0(G)=3$

点覆盖数$\alpha_0(G)=1$
点独立数$\beta_0(G)=6$

小结

$\alpha_0 + \beta_0 = n$

- 支配集
  - 点集V*能邻接到图中所有其它点
  - 支配数$\gamma_0(G)$——最小支配集中的元素个数
- 点独立集

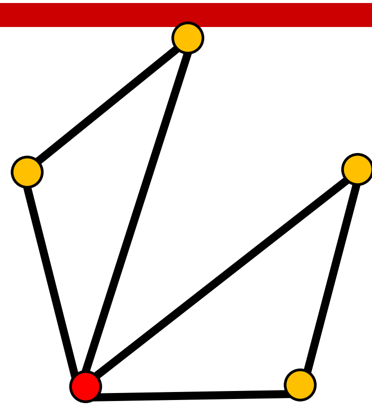
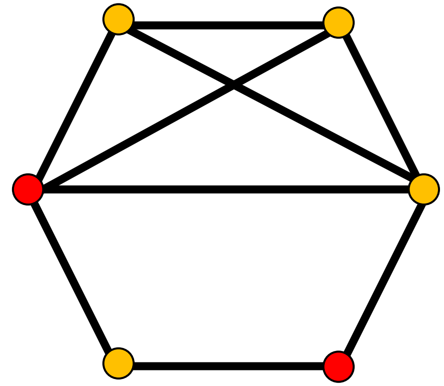
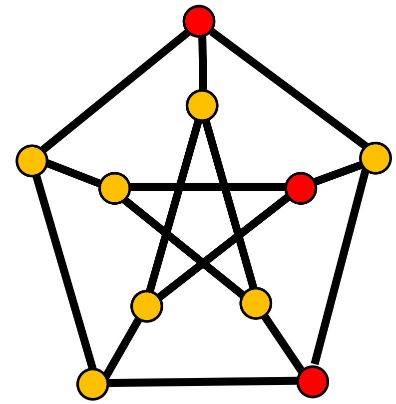
极大点独立集➔极小支配集

  - 点集V*中顶点彼此不相邻
  - 点独立数$\beta_0(G)$——最大点独立集中的元素个数

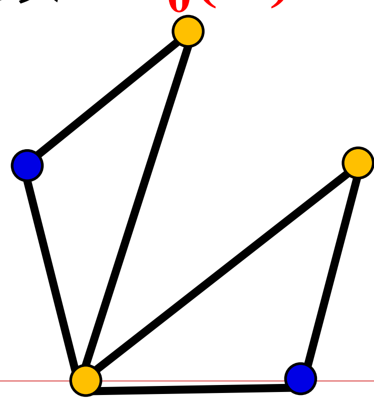
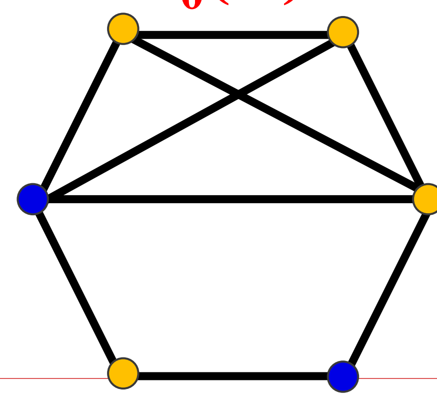
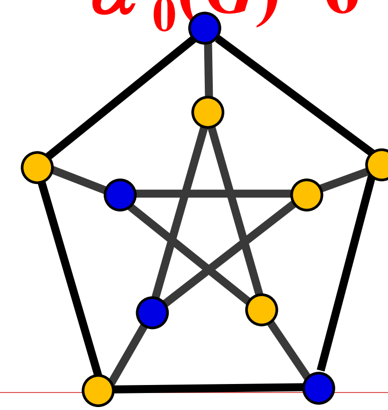
V^*是极小(最小)点覆盖⬅➔
$\overline{V^*}=V-V^*$是极大（最大）点独立集

- 点覆盖集
  - 点集V*能关联(覆盖)到图中所有其它边
  - 点覆盖数$\alpha_0(G)$——最小点覆盖的元素个数

练习题

支配数	$\gamma_0(G)=1$	$\gamma_0(G)=2$	$\gamma_0(G)=3$
点独立数	$\beta_0(G)=2$	$\beta_0(G)=2$	$\beta_0(G)=4$
点覆盖数	$\alpha_0(G)=3$	$\alpha_0(G)=4$	$\alpha_0(G)=6$

$\boxed{\alpha_0+\beta_0=n}$

第十八章支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

- 主要内容
- 18.1支配集、点覆盖集与点独立集
- 18.2边覆盖与匹配
- 18.3二部图中的匹配
- 18.4点着色
- 18.5地图着色与平面图的点着色
- 18.6边着色

边覆盖集与边覆盖数

□定义18.4 设无向简单图$G=<V,E>$，$E^* \subseteq E$，

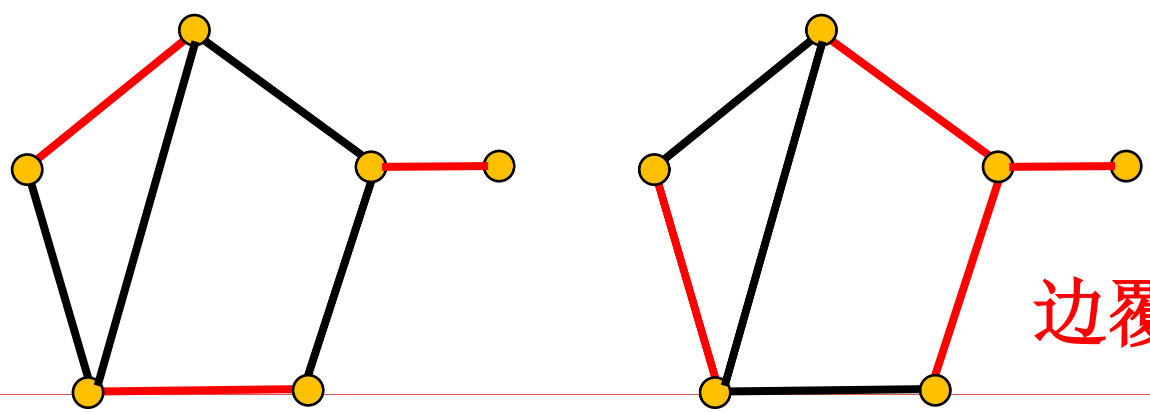
(1) 边覆盖顶点——顶点v与边e相关联.

(2) E^* 为边覆盖集——$\forall v \in V$，$\exists e \in E^*$，使得v与e关联.

(3) E^* 为极小边覆盖——E^* 的真子集不是边覆盖.

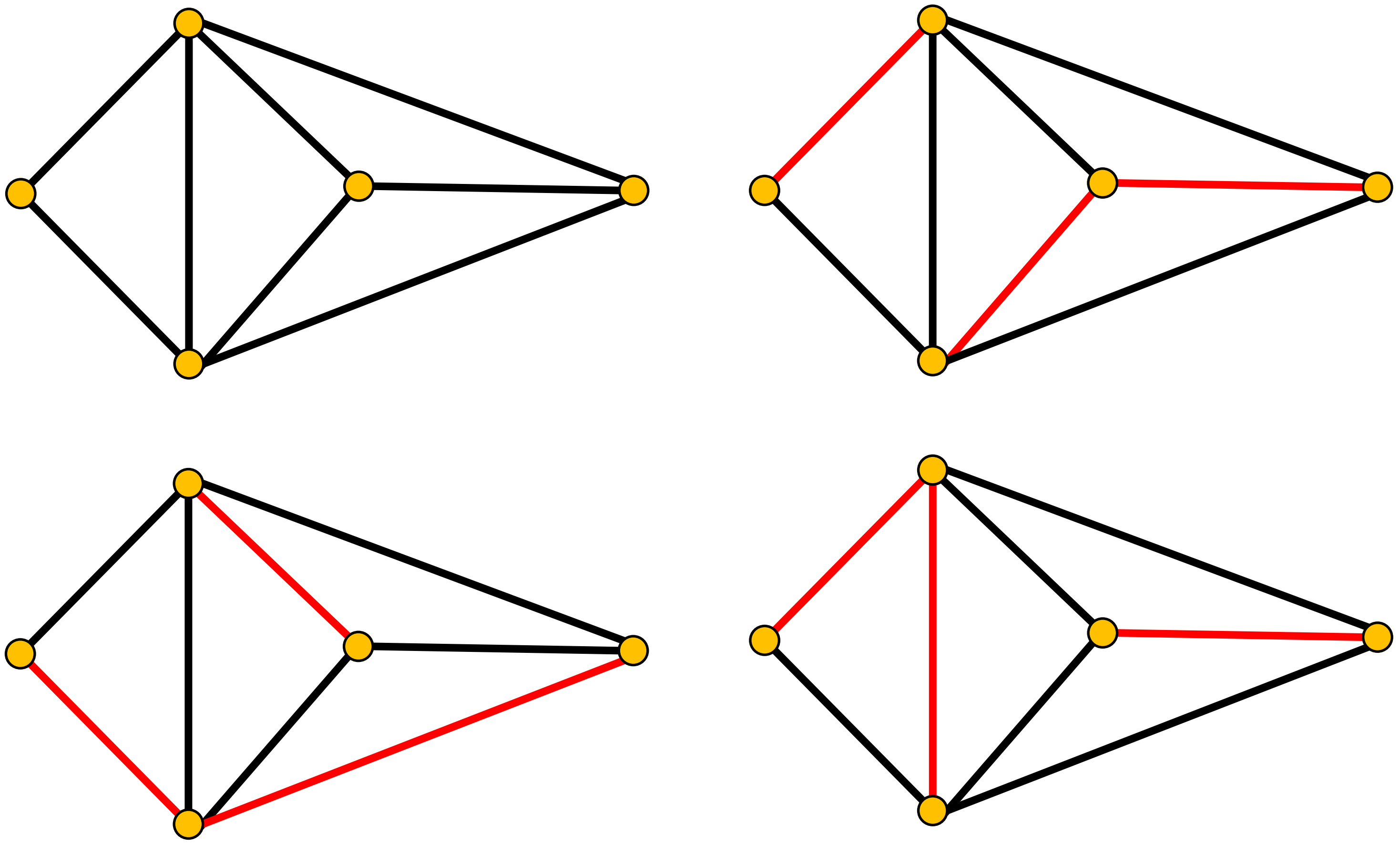
(4) 最小边覆盖——边数最少的边覆盖.

(5) 边覆盖数α_1——最小边覆盖中元素个数.



边覆盖数$\alpha_1=3$

边覆盖集与边覆盖数



边覆盖数α_1=3

匹配与匹配数

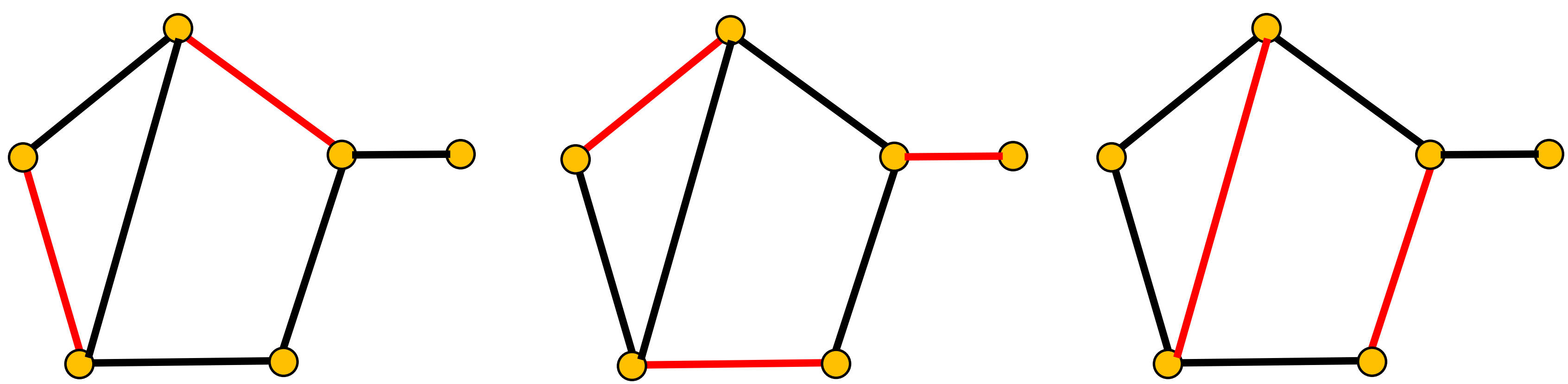
- **定义18.5** 设无向简单图 $G=<V,E>$, $E^*\subseteq E$,

(1) 匹配(边独立集)E^*——E^*中任意两条边均不相邻.

(2) 极大匹配E^*——E^*中再加任意一条边后都不是匹配.

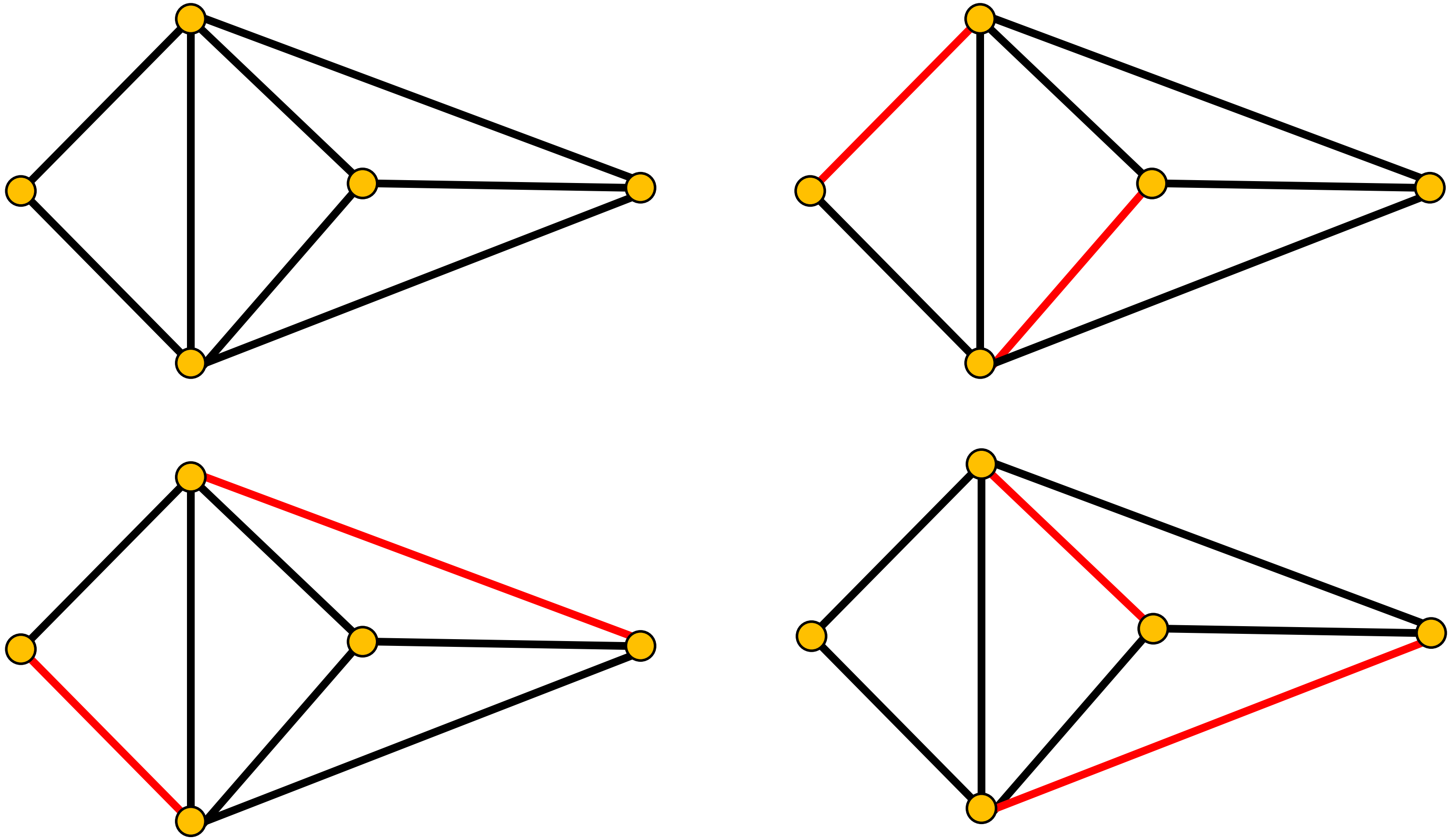
(3) 最大匹配——边数最多的匹配.

(4) 匹配数(边独立数)β_1 ——最大匹配中的边数或者匹配数.



匹配数$\beta_1=3$

匹配(边独立集)与匹配数(边独立数)



匹配数β_1=2

关于匹配中的其它概念

- **定义18.6** 设M为G中一个匹配.

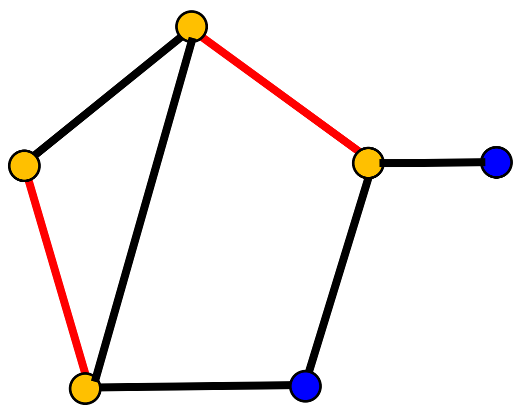
(1) 匹配边——M中的边.

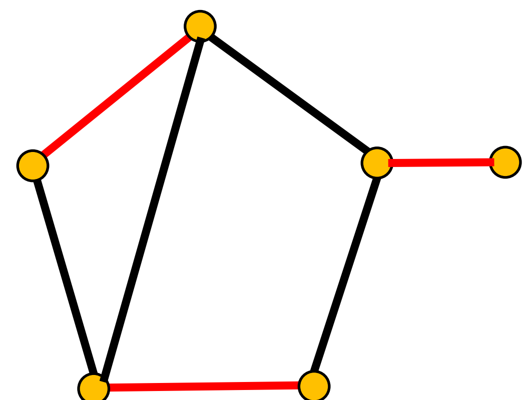
(2) 非匹配边——不在M中的边.

(3) 饱和点——与M中边与相关联的顶点.

(4) 非饱和点——不与M中边与相关联的顶点.

(5) 完美匹配——G中每个顶点都是饱和点.





完美匹配

最小边覆盖

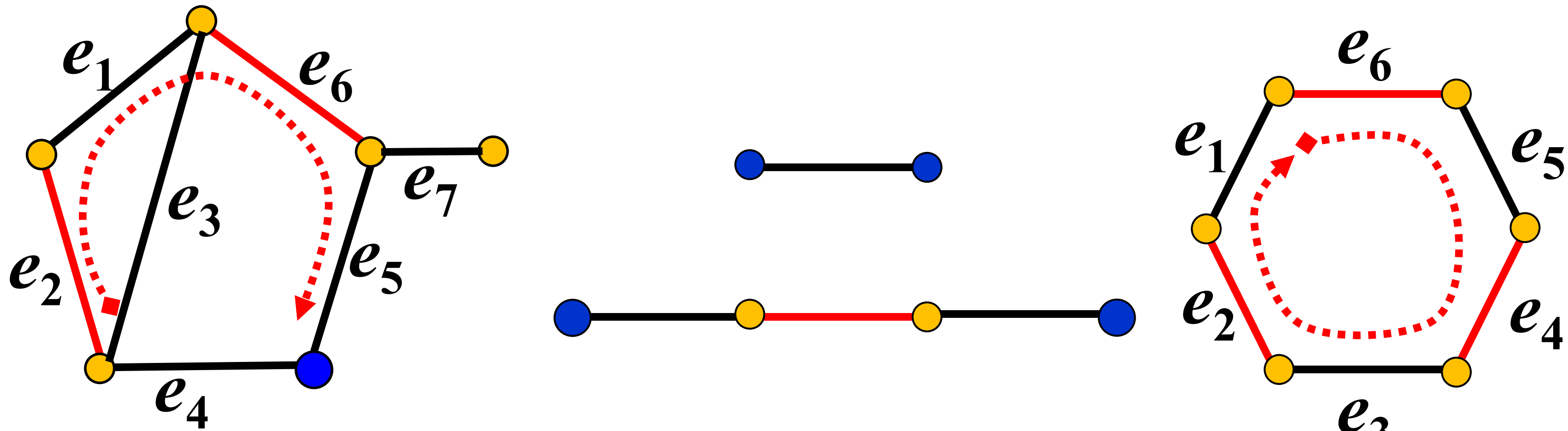
关于匹配中的其它概念

□ 定义18.6 设M为G中一个匹配.

(6) 交错路径——G中由匹配边和非匹配边交替构成的路径.

(7) 可增广交错路径——起点和终点都是非饱和点的交错路径.

(8) 交错圈——G中由匹配边和非匹配边交替构成的圈.

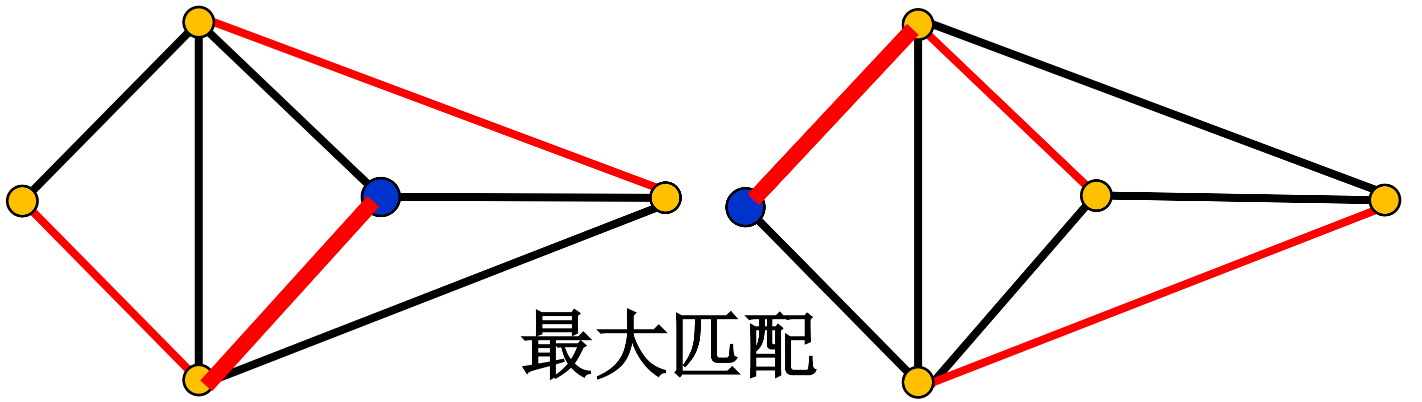


交错路径　　　　可增广交错路径　　　　交错圈

说明:(1)可增广交错路径中，不在M中的边比在M中的边多一条.

(2)交错圈一定为偶圈

最大匹配与最小边覆盖的关系



匹配数$\beta_1=2$

边覆盖数$\alpha_1=3$

$\alpha_1+\beta_1=n=5$

$\beta_1 \le \alpha_1$

最大匹配添加关联非饱和点的边，可以得到最小边覆盖

最大匹配与最小边覆盖的关系

- **定理18.3** 设n阶图G中无孤立顶点.

  (1) 设M为G中一个最大匹配，对于G中每个M非饱和点均取一条与其关联的边，组成边集N，则

  $$W=M\cup N$$ 为G中最小边覆盖.

  (2) 设W_1为G中一个最小边覆盖；若W_1中存在相邻的边就移去其中的一条，设移去的边集为N_1，则

  $$M_1=W_1-N_1$$ 为G中一个最大匹配.

  (3) G中边覆盖数α_1与匹配数β_1满足

  $$\alpha_1+\beta_1=n.$$

最大匹配与最小边覆盖的关系

- **定理18.3证明：**

(1) M为最大匹配, $|M|=\beta_1$，G有n-2β_1个非饱和点.

$W=M\cup N$是G中边覆盖，且

$$|W| = |M| + |N| = \beta_1 + n - 2\beta_1 = n - \beta_1$$

(2) W_1为最小边覆盖, $|W_1|=\alpha_1$,构造M_1,每次去掉相邻两条边中的一条，只产生一个非饱和点， $M_1=W_1-N_1$ ，显然为G中一个匹配.

所以 $|N_1| = |W_1| - |M_1| = M_1$的非饱和点数 $= n - 2|M_1|$

$$|W_1| = n - |M_1|$$

(3) M_1是匹配，W是边覆盖，有

$$|M_1| \le \beta_1，|W| \ge \alpha_1$$

于是$\alpha_1 = n - |M_1| \ge n - \beta_1 = |W| \ge \alpha_1$

所以：$|M_1| = \beta_1$，$|W| = \alpha_1$，$\alpha_1 + \beta_1 = n$

最大匹配与最小边覆盖的关系

- 定理18.3 推论 设G是n阶无孤立顶点的图. M为G中的匹配，W是G中的边覆盖，则

$$|M| \le |W|,$$

等号成立时，M为G中完美匹配，W为G中最小边覆盖.

- 证明：

(1)由定理18.3(1) $\beta_1 \le \alpha_1$. $|M| \le \beta_1 \le \alpha_1 \le |W|$

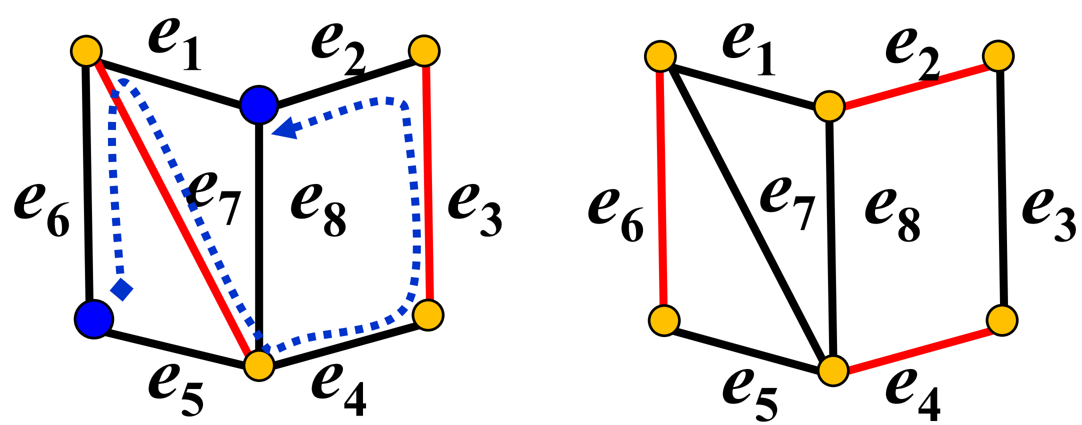
(2)等号成立时，M为G中最大匹配，W为G中最小边覆盖。

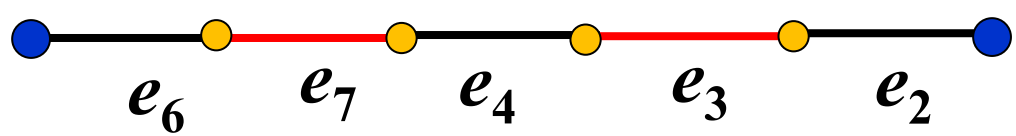
G的顶点数$n = \alpha_1+\beta_1=2\beta_1$, 即M中没有非饱和点.

所以M为G中完美匹配.

最大匹配判别定理

- **定理18.4** M为G中最大匹配当且仅当G中不含M的可增广交错路径.





可增广交错路径

最大匹配判别定理

- 定理18.4证明：
- (1)必要性。反证法
  - 若存在可增广交错路径Γ， Γ中匹配边比非匹配边少一条。
  - 将Γ中匹配边变成非匹配边，非匹配边变成匹配边，得到匹配M'.
  - 显然M'比M中多一条边，这与M是最大匹配矛盾.

最大匹配判别定理

- **定理18.4** M为G中最大匹配当且仅当G中不含M的可增广交错路径.

最大匹配判别定理

- 定理18.4证明(2) 充分性。
- 设M为不含可增广路径的匹配, M_1为最大匹配.
  只要证明 $|M|=|M_1|$ 即可.
  - 由必要性知，M_1不含可增广交错路径.
  - 设$H = G[M_1 \oplus M]$,
  - 若$H=\varnothing$，$M=M_1$，结论为真.
  - 若$H\neq\varnothing$. H中的交错圈(若存在)，其上M与M_1的边数相等，且所有交错路径上，M与M_1中的边数也相等（因为M与M_1均无可增广交错路径）
  - 所以M与M_1边数相同，M为最大匹配。

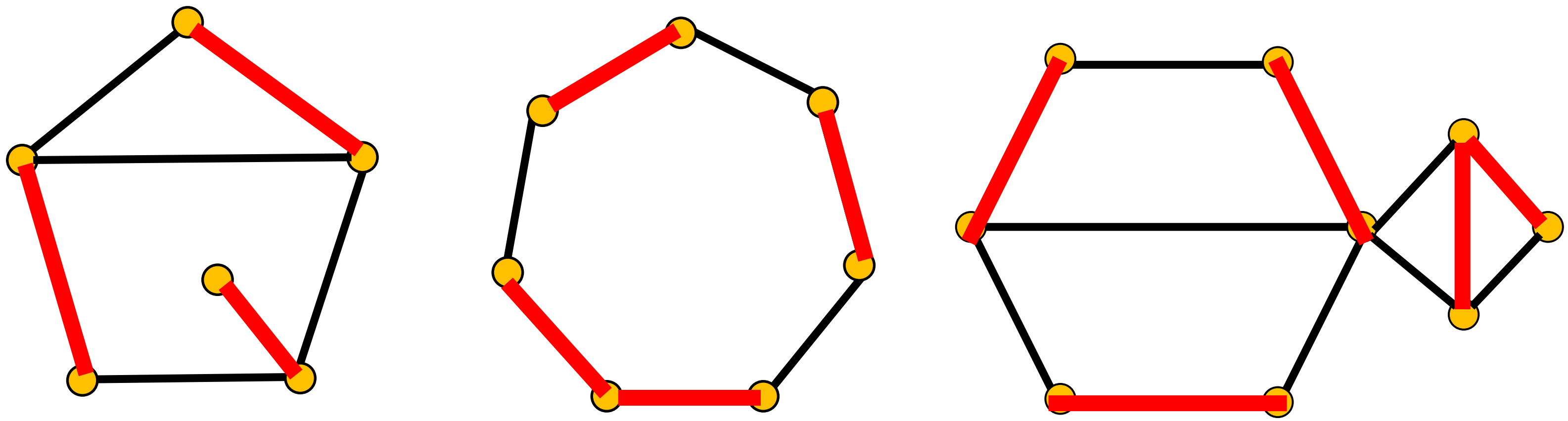
18.2 小结

- 边覆盖集
  - 边集E^*能关联(覆盖)到图中所有点
  - 边覆盖数α_1——最小边覆盖中元素个数
- 匹配(边独立集)
  - 边集E^*任意两条边均不相邻
  - 匹配数(边独立数)β_1——最大匹配中的边数或者匹配数

最小边覆盖中去掉相邻边中的一条，可以得到最大匹配。
最大匹配添加关联非饱和点的边，可以得到最小边覆盖。

$\alpha_1 \geq \beta_1 \qquad \alpha_1 + \beta_1 = n$

练习



边覆盖数	$\alpha_1=3$	$\alpha_1=4$	$\alpha_1=5$
匹配数	$\beta_1=3$	$\beta_1=3$	$\beta_1=4$
完美匹配	有	无	无

小结

	覆盖	独立	支配
点集	最小 点覆盖数 α_0	最大 点独立数 β_0	最小 支配数 γ_0
边集	最小 边覆盖数 α_1	最大 边独立数(匹配数) β_1	

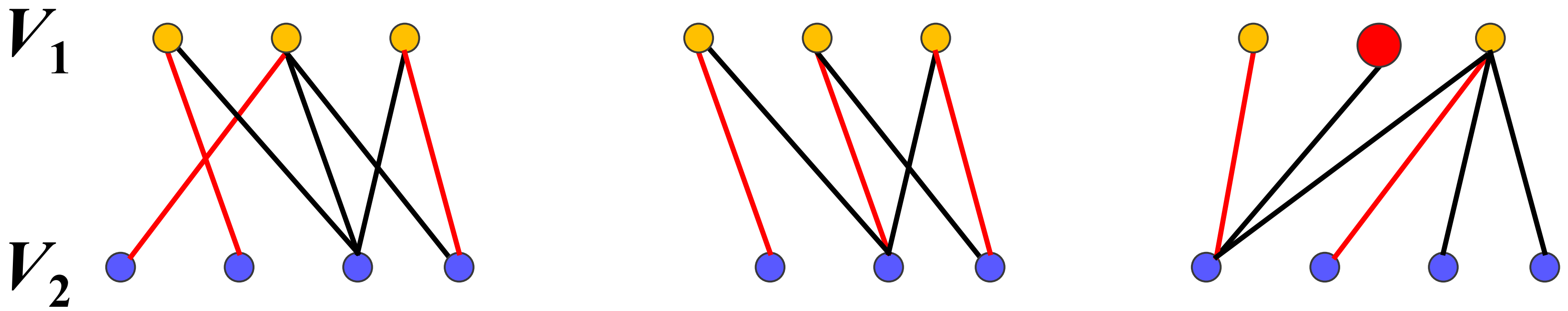
$\alpha_0+\beta_0=n \quad \alpha_1+\beta_1=n$

第十八章支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

- 主要内容
- 18.1支配集、点覆盖集与点独立集
- 18.2边覆盖与匹配
- 18.3二部图中的匹配
- 18.4点着色
- 18.5地图着色与平面图的点着色
- 18.6边着色

完备匹配

- **定义18.7** 设$G=<V_1,V_2,E>$为二部图，$|V_1|\le|V_2|$，M是G中最大匹配，若V_1中顶点全是M饱和点，则称M为G中完备匹配.
- $|V_1|=|V_2|$ 时完备匹配变成完美匹配.



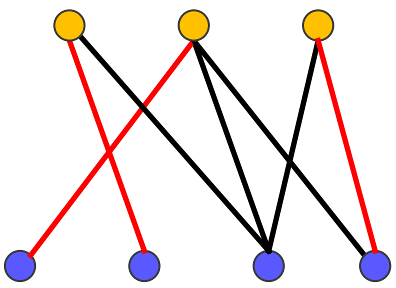
完备匹配

完备匹配
完美匹配

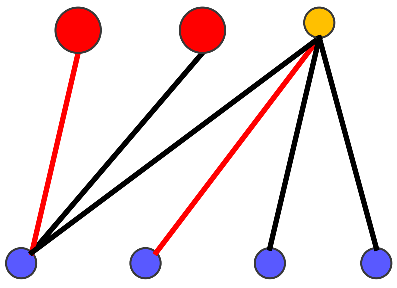
非完备匹配

Hall定理

- **定理18.5 （Hall定理）** 设二部图$G=<V_1,V_2,E>$中，$|V_1|\le|V_2|$. G中存在从V_1到V_2的完备匹配当且仅当V_1中任意$k(k=1,2,\ldots,|V_1|)$个顶点至少与V_2中的k个顶点相邻.
- 本定理中的条件常称为“相异性条件”.



满足相异性条件
有完备匹配



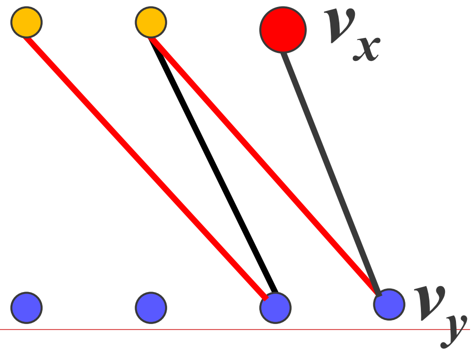
不满足相异性条件
没有完备匹配

Hall定理证明

- 证明:(1)必要性显然成立。
- (2) 充分性。反证法

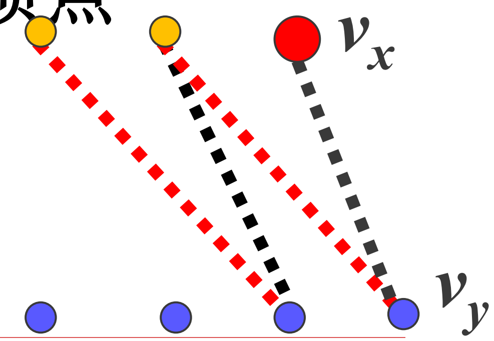
(2.1) 假设M是最大匹配但不是完备匹配，则

- V_1必存在不饱和点v_x, 且 v_x与V_2中一个饱和点v_y相邻.
- (若v_y不是饱和点，就与M是最大匹配矛盾了.)



Hall定理证明

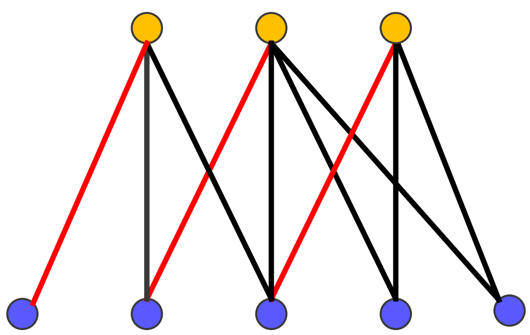
- (2.2)由于M是最大匹配，所以不存在可增广交错路径，则
  - 考虑以v_x为起点尽可能长的所有交错路径，则
  - 其终点必为饱和点，且在V_1中。
  - 令$S = \{v|\ v \in V_1 \wedge v \in \Gamma\}; T = \{v|\ v \in V_2 \wedge v \in \Gamma\}$
- (2.3)Γ中除v_x以外都是饱和点，$|S| = |T| + 1$，则
  - V_1中的$|T|+1$个顶点与V_2中的$|T|$个顶点
  - 这与相异性条件矛盾



t-条件

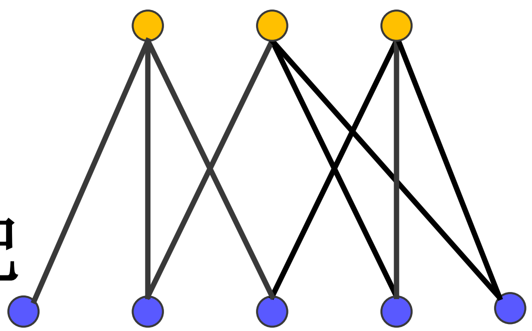
- **定理18.6** 设二部图$G=<V_1,V_2,E>$中，
  V_1中每个顶点至少关联t ($t\geq 1$)条边，而
  V_2中每个顶点至多关联 t 条边，则
  G 中存在V_1到V_2的完备匹配.

- 证明：思路：满足t-条件即满足定理18.5
- 由已知条件，
  - V_1中k个顶点至少关联kt条边，
  - V_2中每个顶点至多关联 t 条边
  - 所以kt条边至少关联V_2中k个顶点
  - G满足相异性条件



一个应用实例

- 3个毕业生应聘公司的5个部门，意愿如下表。假设每个部门只接收1人
  问：3个毕业生都能找到满意的工作吗？
- 解：V_1都关联3条边，
  V_2至多关联2条边，
  所以满足t-条件，t=3.存在完备匹配



	部门1	部门2	部门3	部门4	部门5
A	*	*	*		
B		*		*	*
C			*	*	*

实例

- 某课题组要从a, b, c, d, e 5人中派3人分别到上海、广州、香港去开会. 已知a只想去上海，b只想去广州，c, d, e都表示想去广州或香港. 问该课题组在满足个人要求的条件下，共有几种派遣方案?

解：用二部图中的匹配理论解本题.

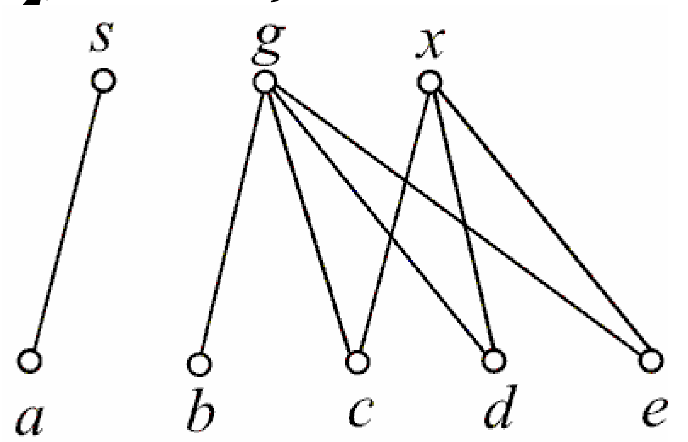
令$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，其中

$V_1=\{s, g, x\}$，s, g, x分别表示上海、广州和香港.

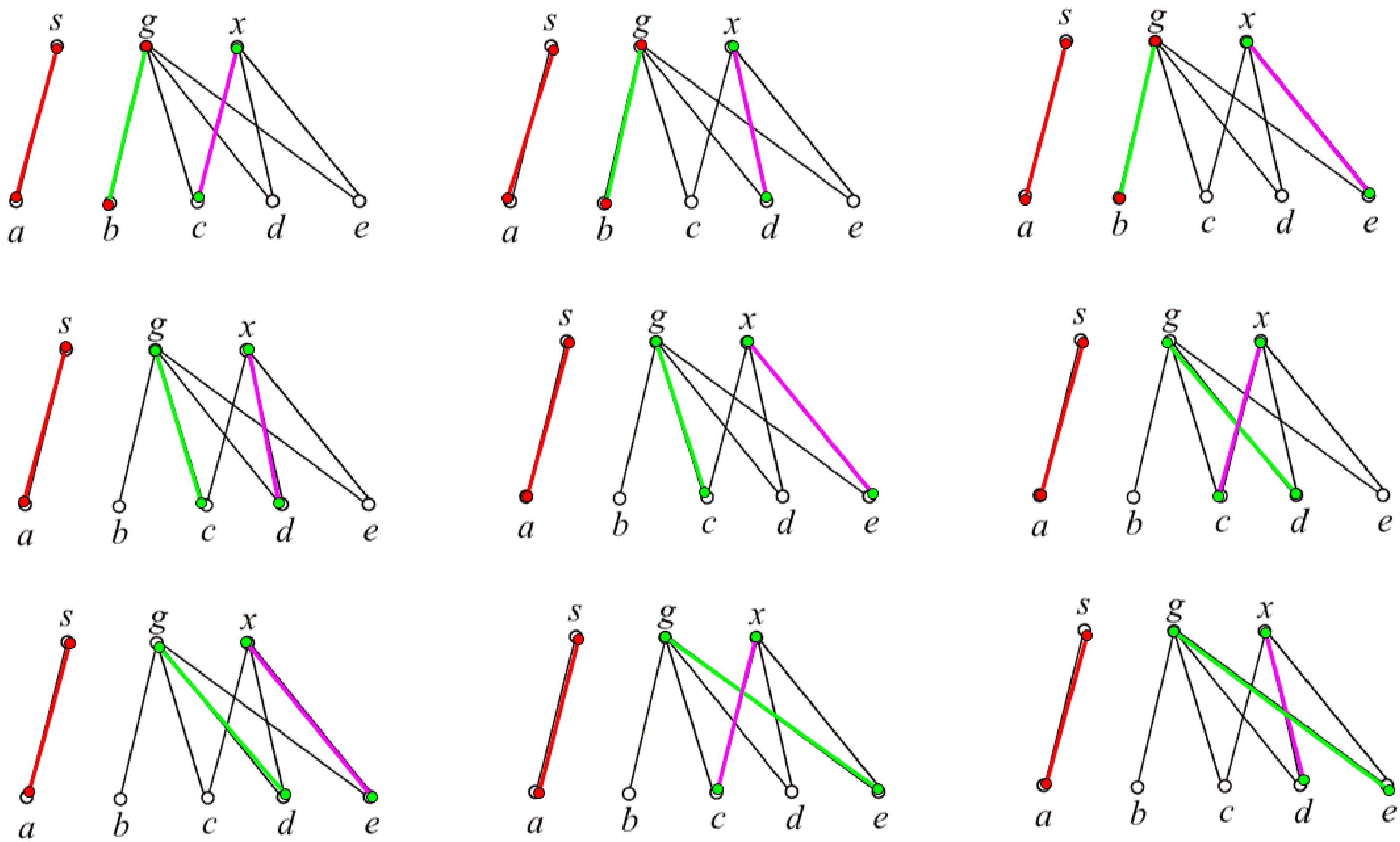
$V_2=\{a, b, c, d, e\}$, $E=\{(u,v) \mid u\in V_1, v\in V_2, v$想去$u\}$.

G满足相异性条件，有完备匹配，因而可派遣

共有$3\times1+3\times2=9$种派遣方案.



实例（续）


s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e

第十八章支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

- 主要内容
- **18.1支配集、点覆盖集与点独立集**
- **18.2边覆盖与匹配**
- **18.3二部图中的匹配**
- **18.4点着色**
- **18.5地图着色与平面图的点着色**
- **18.6边着色**

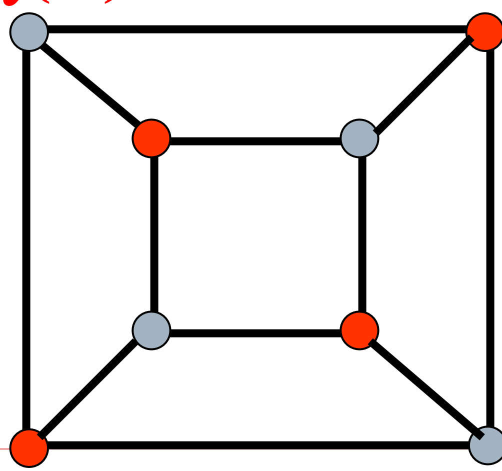
点着色与色度

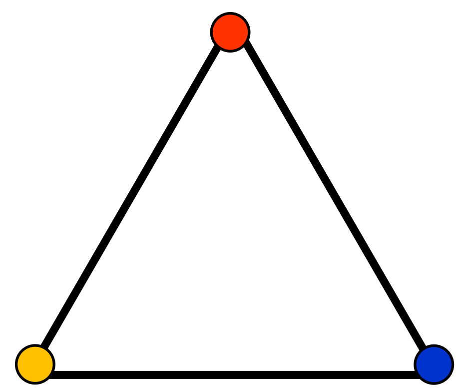
- 定义18.8 设无向图G中无环

(1) 图G的一种点着色——给图G的每个顶点涂一种颜色，使相邻顶点具有不同颜色.

(2) 对G进行k着色（G是k-可着色的）——能用k种颜色给G的顶点着色.

(3) G的色数$\chi(G)=k$——G是k-可着色的，但不是$(k-1)$-可着色的.





例18.3

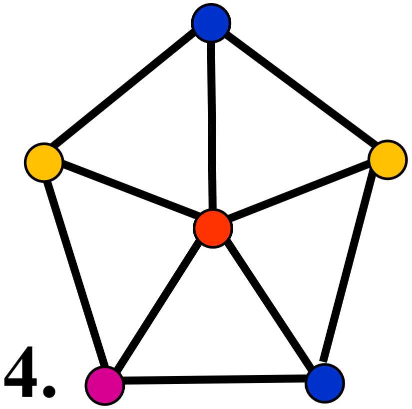
(1) $\chi(G)$=1当且仅当G是零图.

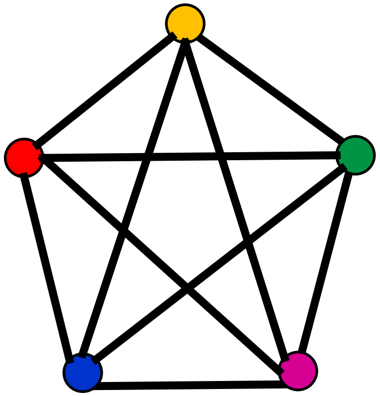
(2) $\chi(K_n)=n$.

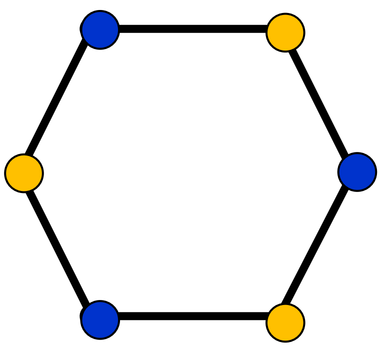
(3) 偶圈的色度为2，奇圈的色度为3.

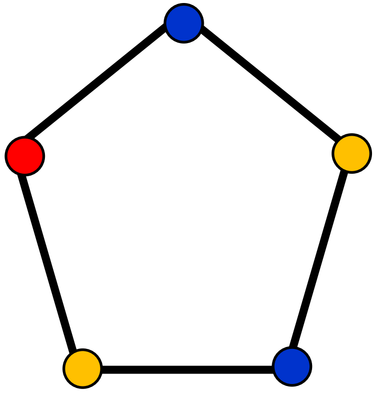
(4) 奇阶轮图的色度为3，偶阶轮图的色度为4.

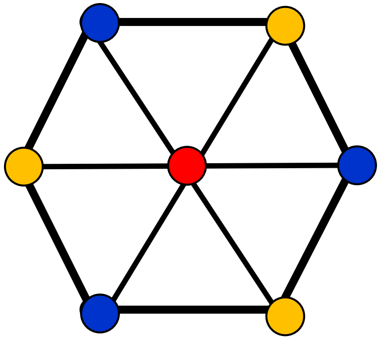
(5) $\chi(G)$=2当且仅当G是二部图(G至少有一条边).











色数的上界

- **定理18.7** 对于任意无向图G，均有

$$\chi(G) \le \Delta(G)+1$$

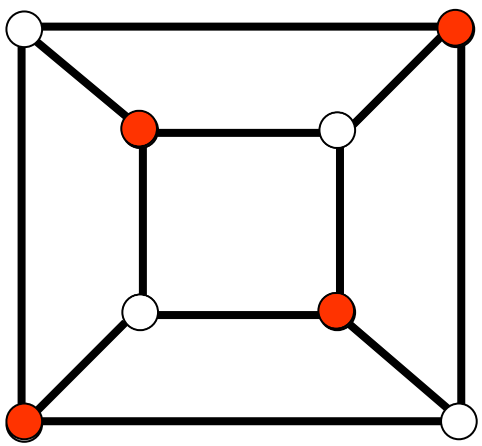
- 证明：对G的阶数n做归纳
- n=1时，结论成立.
- 假设$n=k(k\ge 1)$时结论成立. 下面证明$n=k+1$时结论成立
  - 令$G' = G-v$, 则$\Delta(G') \le \Delta(G)$.
  - 再根据归纳假设，给G'着色至多用$\Delta(G')+1$种颜色
  - 而在G中v至多与G'中的$\Delta(G)$个顶点相邻，
  - 所以$\Delta(G)+1$种颜色中至少还有一种给v着不同于其所有邻接点的颜色。
  - $\chi(G) \le \Delta(G)+1$

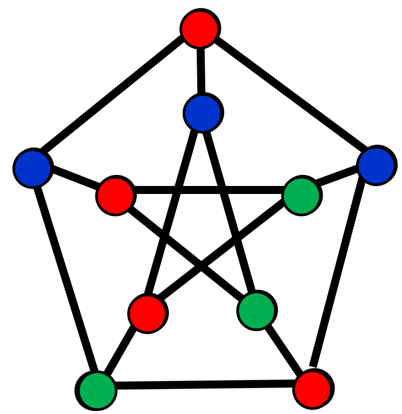
色数的上界

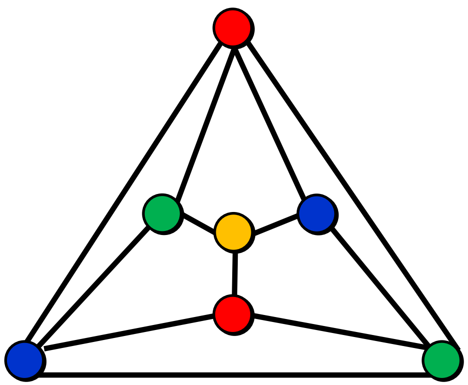
- **定理18.8 (Brooks 定理)** 若连通无向图G不是K_n，（$n \geq 3$），也不是奇数阶的圈，则

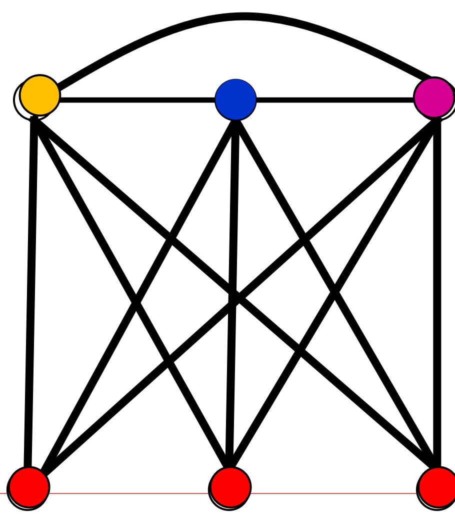
$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

□ 例18.4 求下面各图的色数









点着色算法简介

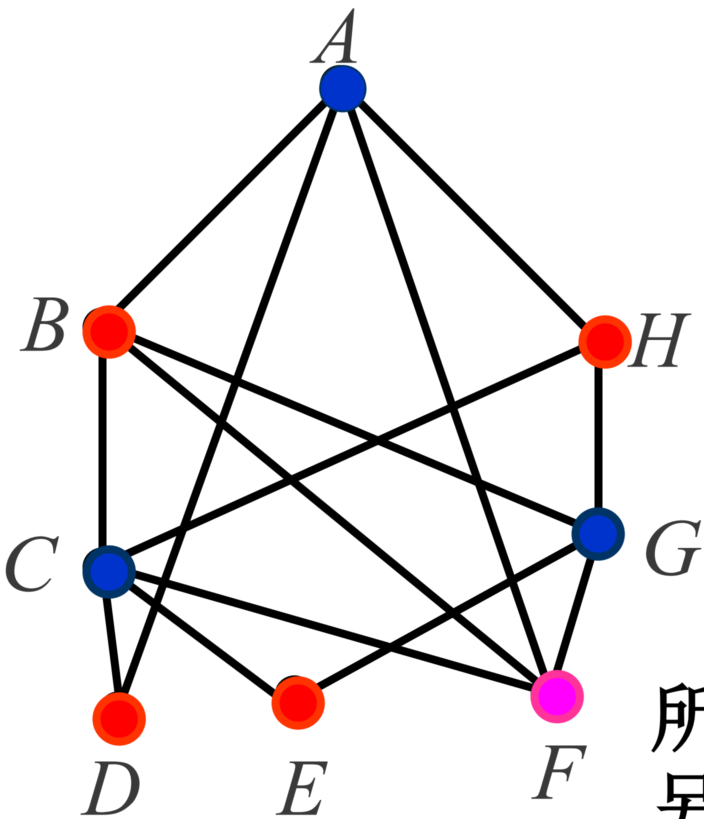
- 图着色问题即为将*V*分为*K*个颜色组，每个组形成一个独立集，即其中没有相邻的顶点。其优化版本是希望获得最小的*K*值。
- 图着色问题是最著名的NP-完全问题之一
  - 韦尔奇 · 鲍威尔法(Welch Powell) 贪心法。
  - 人工神经网络
  - 蚁群算法
  - 模拟退火

Welch Powell

- 韦尔奇 · 鲍威尔法(Welch Powell) 贪心法:
  - 1) 将图 *G* 中的结点按度数递减的次序进行排列(相同度数的结点的排列随意)。
  - 2) 用第一种颜色，对第一点着色，并安排列次序对与前面结点不相邻的每一点着同样的颜色。
  - 3) 用第二种颜色对尚未着色的点重复第 2 步, 直到所有的点都着上颜色为止。

Welch Powell算法不一定能得到最优解！

例 试用韦尔奇 · 鲍威尔法对图进行着色。



解：

- 按度数递减次序排列各点

$$\cancel{C}\ \cancel{A}\ \cancel{B}\ \cancel{F}\ \cancel{G}\ \cancel{H}\ \cancel{D}\ \cancel{E}$$

- 第一种颜色：　　***C, A, G***
- 第二种颜色：　　***B, H, D, E***
- 第三种颜色：　　***F***

所以图是3色的。
另外图不能是两色的,因为图中有***A,B,F***两两邻接,所以 $\chi(G)=3$

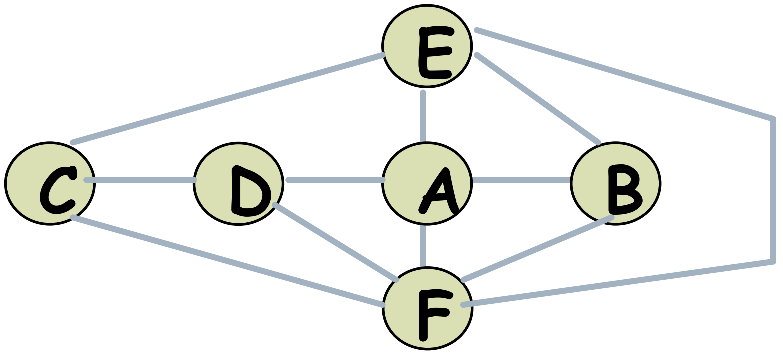
点着色的应用实例

例：已知选课情况，安排课程考试的日程

姓名	选修课1	选修课2	选修课3
杨一	算法分析（A）	形式语言（B）	计算机网络（E）
石二	计算机图形学（C）	模式识别 （D）	
魏三	计算机图形学（C）	计算机网络（E）	人工智能（F）
马四	模式识别（D）	人工智能（F）	算法分析（A）
齐五	形式语言（B）	人工智能（F）	

分析：

- ✓ 问题涉及对象：课程
- ✓ 课程之间的关系：同一个人选修的不能安排在同一时间内考试
- ✓ 课程间的关系图如右图



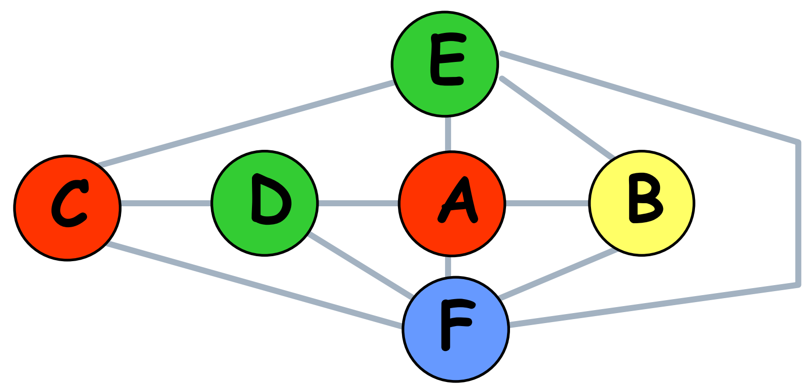
解：构造图G=<V,E>,其中顶点V：表示课程；边E：同一人选修的课程用边连接---有边连接的课程不能安排在同一时间考试；

点着色的应用实例（续）

课程考试安排问题转化为图的着色问题

- --- 用尽可能少的颜色该图的每个顶点着色，使相邻的顶点着上不同的颜色；
  --- 每一种颜色代表一个考试时间，着上相同颜色的顶点是可以安排在同一时间考试的课程；
- 按顶点度数从大到小排列：**F A E C B D**

F：蓝色；　**A, C**：红色；
E,D：绿色；**B**：黄色；
即 **A,C** 可安排在同一时间考试，**E,D**可安排在同一时间考试.



第十八章支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

- 主要内容
- 18.1支配集、点覆盖集与点独立集
- 18.2边覆盖与匹配
- 18.3二部图中的匹配
- 18.4点着色
- 18.5地图着色与平面图的点着色
- 18.6边着色


乌鲁木齐
哈尔滨
长春
沈阳
呼和浩特
北京
天津
石家庄
银川
太原
济南
西宁
兰州
郑州
西安
南京
上海
合肥
拉萨
成都
武汉
杭州
重庆
南昌
长沙
台北
福州
贵阳
昆明
广州
南宁
香港
澳门
海口

地图与地图着色

- 定义

(1) 地图——连通无桥平面图（嵌入）及其所有的面

(2) 国家——地图的面

(3) 两个国家相邻——它们的边界至少有一条公共边

- 定义18.9

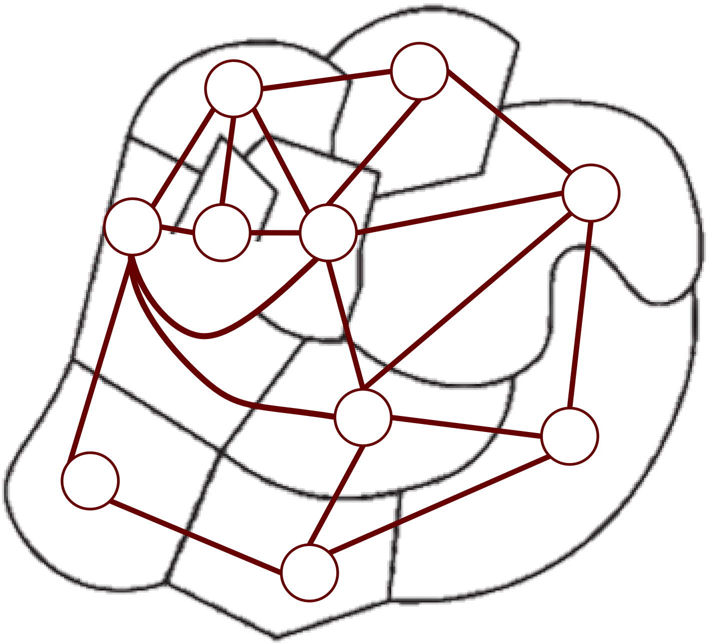
(1) 地图G的面着色——对G的每个国家涂上一种颜色，相邻国家涂不同颜色.

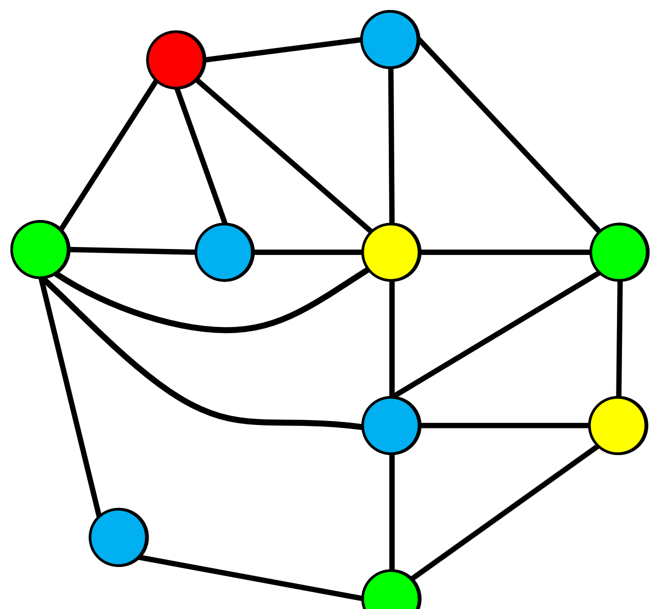
(2) G是k-面可着色的——能用k种颜色给G的面着色.

(3) G的面色数$\chi^*(G)=k$——最少用k种颜色给G的面着色

地图与地图着色

- 地图的面着色转化成对偶图的点着色.
- 定理18.9 地图*G*是*k*-面可着色的当且仅当它的对偶图*G**是*k*-点可着色的.

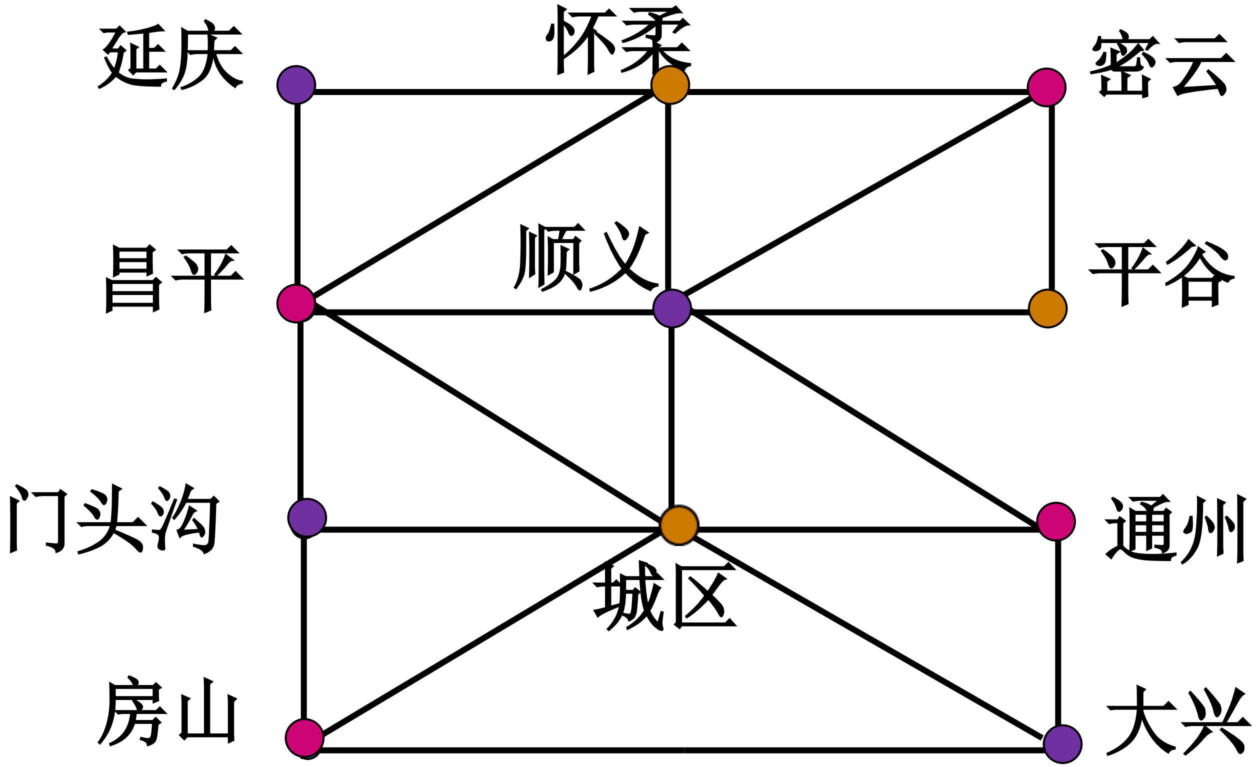




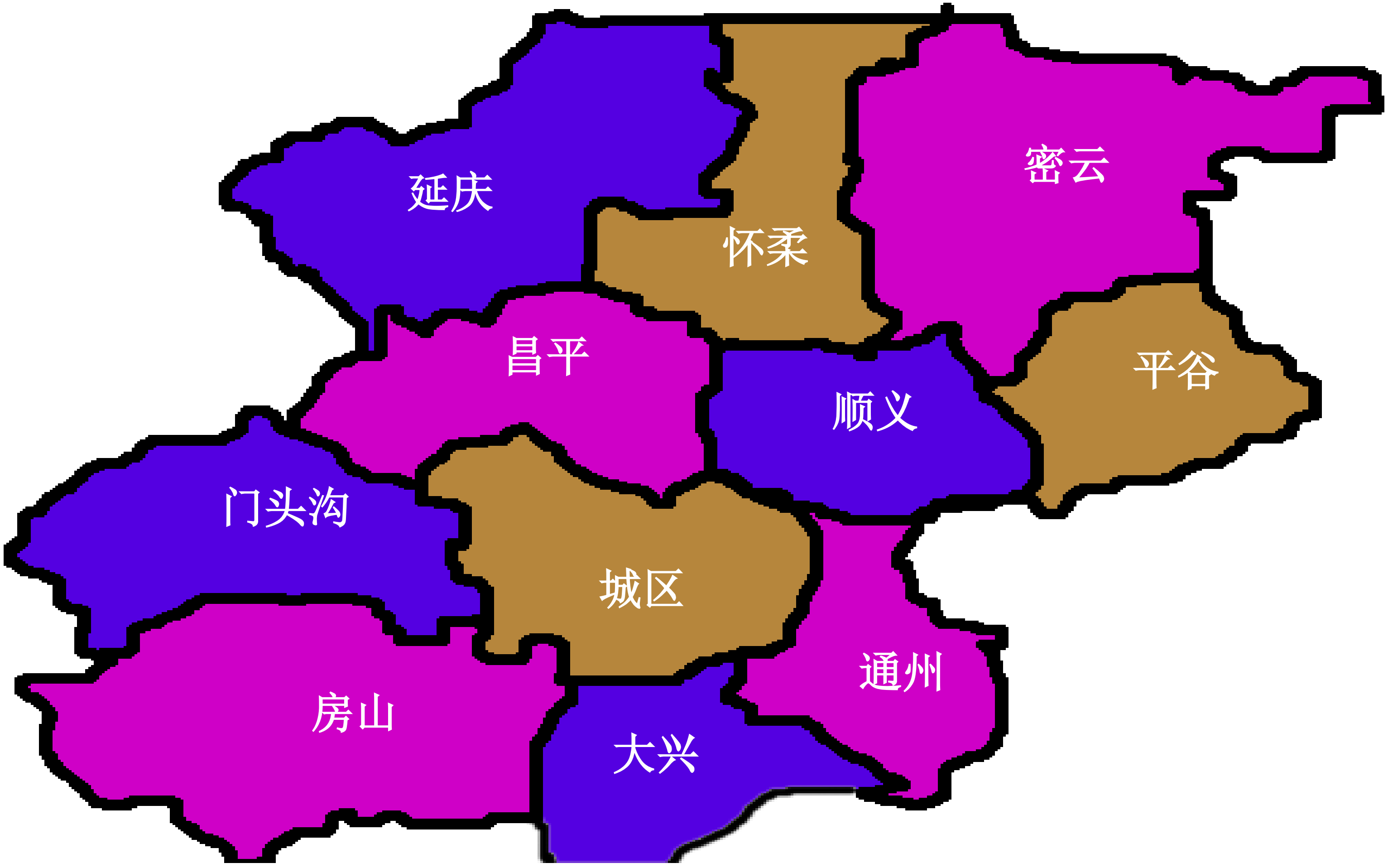
- 定理18.10 任何平面图都是4-可着色的.

用最少的颜色为北京地图着色

用最少的颜色为北京地图着色



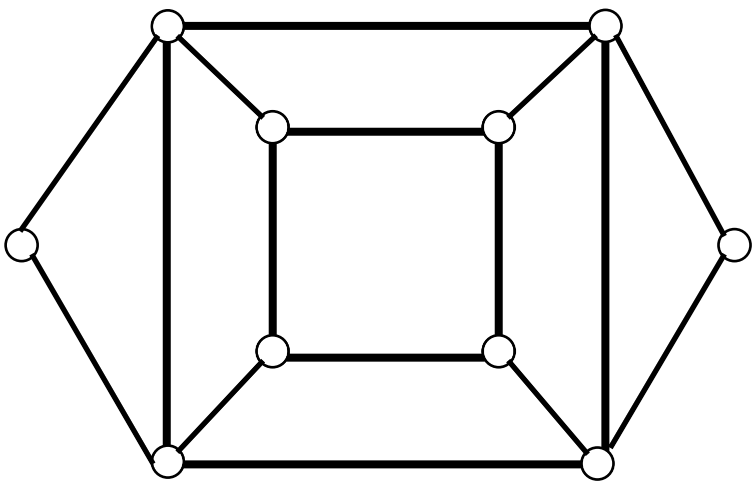
- 按度数递减次序排列各点
- 城区、顺义、昌平、怀柔、门头沟、房山、大兴、通州、密云、平谷、延庆

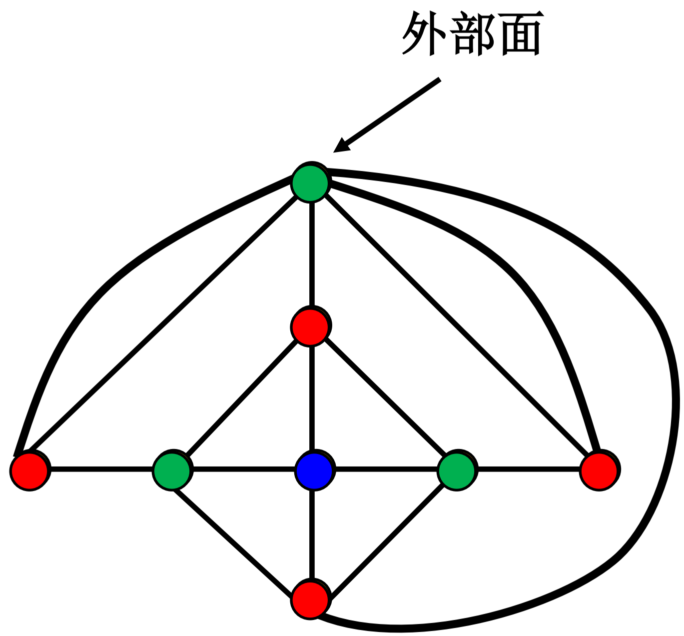


- 可以用三种颜色可以为该地图着色，因为图中有K_3（延庆、昌平、怀柔），所以图的面色数为3。

练习

- 求下图的面色数
- 面色数为3





第十八章支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

- 主要内容
- **18.1支配集、点覆盖集与点独立集**
- **18.2边覆盖与匹配**
- **18.3二部图中的匹配**
- **18.4点着色**
- **18.5地图着色与平面图的点着色**
- **18.6边着色**

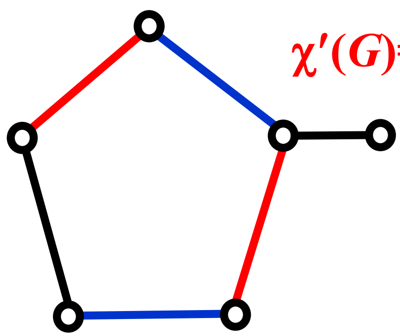
边着色

- **定义18.10** 无环无向图G

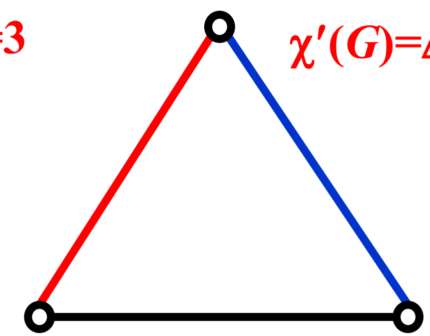
(1) 对G的边着色——每条边着一种颜色，相邻的边不同色.

(2) G是k-可边着色的——能用k种颜色给G的边着色.

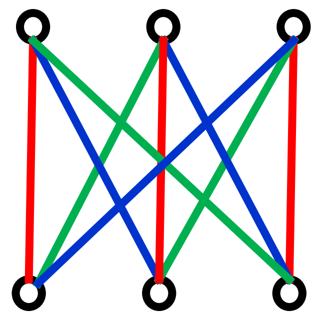
(3) G的边色数$\chi'(G)=k$——最少用k种颜色给G的边着色.



$\chi'(G)=\Delta(G)=3$



$\chi'(G)=\Delta(G)+1=3$



$\chi'(G)=\Delta(G)=3$

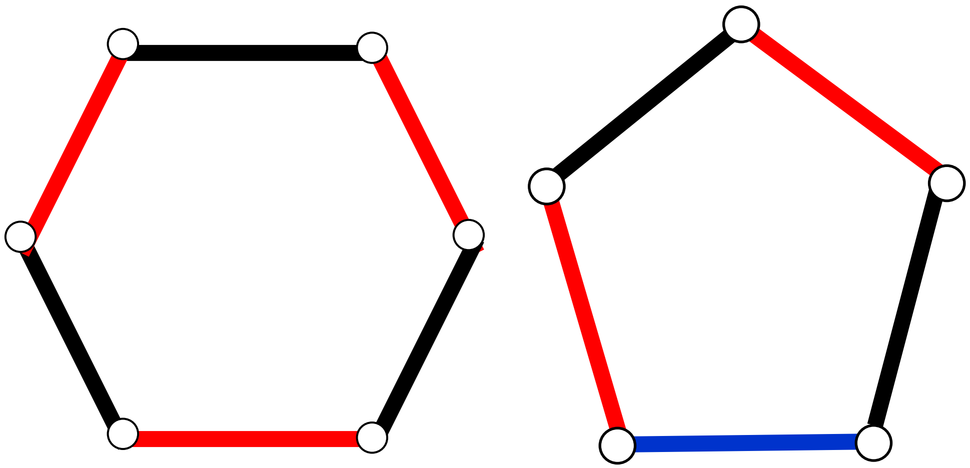
- **定理18.11 (Vizing定理)** 简单图的边色数只可能取两个值：

  $\Delta(G)$ 或者$\Delta(G)+1$.

- **定理18.12** 二部图的边色数$=\Delta(G)$.

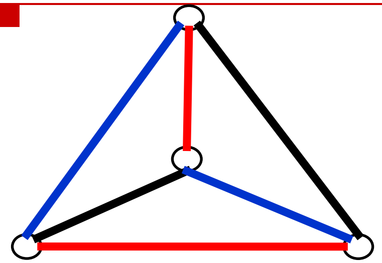
边着色

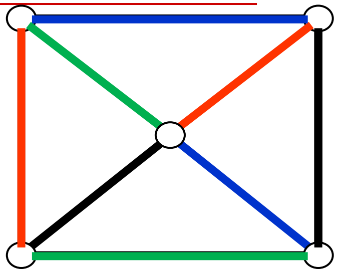
- 例18.5
- 长度大于等于2的偶圈的边色数等于2，
- 长度大于等于3的奇圈的边色数等于3.



边着色

- 例18.6 证明$\chi'(W_n)=n-1$，（n≥4).





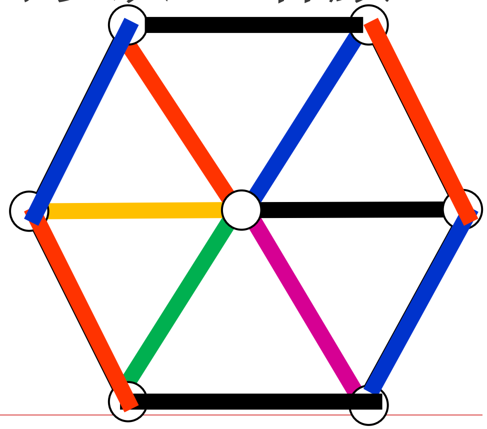
证明：

(1) 当$n=4$，$n=5$时成立。

$\chi'(W_4)=3=n-1=\Delta,\chi'(W_5)=4=n-1=\Delta$

(2) 当$n\geq 6$时，

- 中间顶点关联n-1条边，用n-1种颜色.
- 外圈的每条边都与只4条边相邻，总可以从n-1种颜色中找到一种颜色着色.
- →$\chi'(W_n)\leq n-1=\Delta(W_n)$,由Vizing定理，
- $\chi'(W_n)$为$\Delta(W_n)$或$\Delta(W_n)+1$
- 所以$\chi'(W_n)=\Delta(W_n)=n-1$

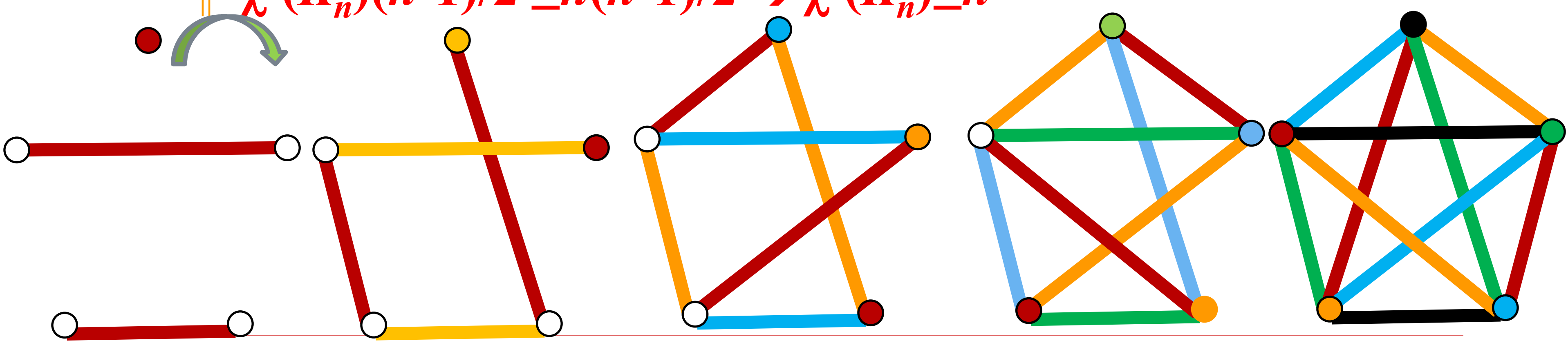


边着色

- 例18.7 证明：当$n(n\neq 1)$为奇数时$\chi'(K_n)=n$,

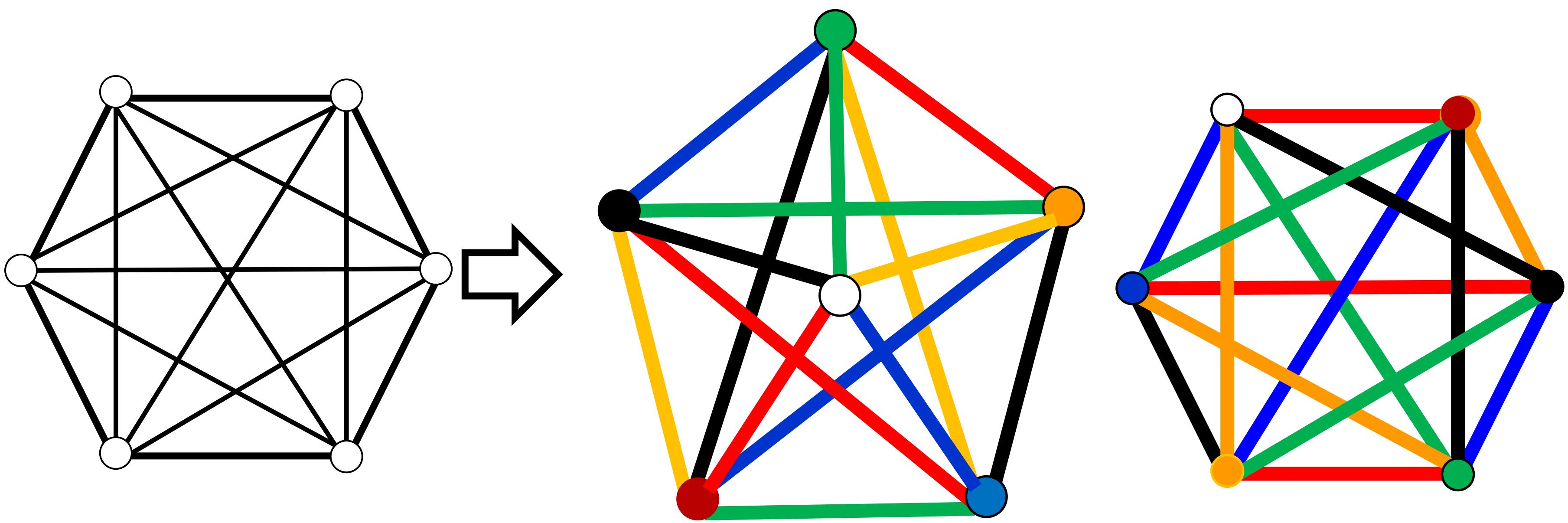
  当n为偶数时$\chi'(K_n)=n-1$.

- 证明: (1)当n为奇数时,先证$\chi'(K_n)\leq n$, 再证$\chi'(K_n)\geq n$
  - 由Vizing定理，$\chi'(K_n)\leq\Delta+1 = n$
  - K_n中有n组平行边，每组$(n-1)/2$条边，共关联$n-1$个点.
  - 所以K_n中至多有$(n-1)/2$条边同色。
  - $\chi'(K_n)(n-1)/2 \geq n(n-1)/2 \rightarrow \chi'(K_n)\geq n$



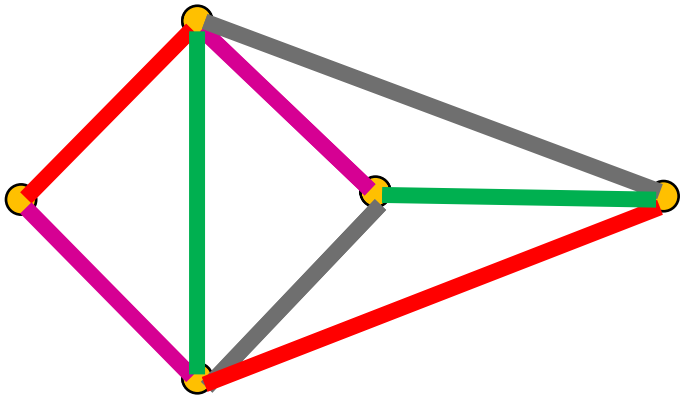
边着色

- 例18.7 证明：当$n(n\neq 1)$为奇数时$\chi'(K_n)=n$.
  当n为偶数时$\chi'(K_n)=n-1$.
- 证明: (2)当n为偶数时
  可以用n-1种颜色给新加的n-1条边着色

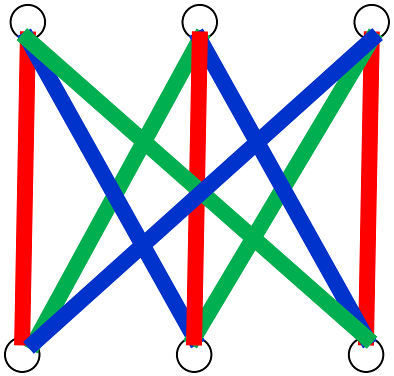


练习

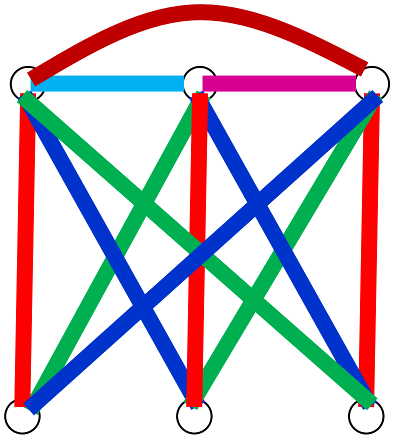
$\chi'(G)=?$



$\chi'(G)=\Delta(G)=4$



$\chi'(G)=\Delta(G)=3$



$\chi'(G)=\Delta(G)+1=6$