

第八章 函数

主要内容

1、函数的定义与性质

- 函数定义
- 函数性质

2、函数运算

- 函数的逆
- 函数的合成

3、双射函数与集合的基数

8.1 函数的定义与性质

主要内容

函数定义与相关概念

- 函数定义
- 函数相等
- 从 A 到 B 的函数 $f:A \rightarrow B$
- B^A
- 函数的像与完全原像

函数的性质

- 单射、满射、双射函数的定义与实例
- 构造双射函数

某些重要的函数

函数定义

定义8.1 设 F 为二元关系, 若 $\forall x \in \text{dom } F$ 都存在唯一的 $y \in \text{ran } F$ 使 $x F y$ 成立, 则称 F 为**函数**.

对于函数 F , 如果有 $x F y$, 则记作 $y = F(x)$, 并称 y 为 F 在 x 的**值**.

例: $F_1 = \{<x_1, y_1>, <x_2, y_2>, <x_3, y_2>\}$

$F_2 = \{<x_1, y_1>, <x_1, y_2>\}$

F_1 是函数, F_2 不是函数.

函数定义

定义8.2 设 F, G 为函数, 则

$$F=G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$$

如果两个函数 F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

- (1) $\text{dom } F = \text{dom } G$
- (2) $\forall x \in \text{dom } F = \text{dom } G$ 都有 $F(x) = G(x)$

函数 $F(x) = (x^2 - 1)/(x + 1)$, $G(x) = x - 1$ 不相等,

因为 $\text{dom } F \subset \text{dom } G$.

从A到B的函数

定义8.3 设 A, B 为集合, 如果

f 为函数, $\text{dom}f=A$, $\text{ran}f\subseteq B$,

则称 f 为**从A到B的函数**, 记作 $f: A \rightarrow B$.

例: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x)=2^x$ 是从 \mathbb{N} 到 \mathbb{N} 的函数,

$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(x)=2$ 也是从 \mathbb{N} 到 \mathbb{N} 的函数.

定义8.4 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A , 符号化表示
为 $B^A = \{f | f: A \rightarrow B\}$.

$|A|=m$, $|B|=n$, 且 $m, n > 0$, $|B^A|=n^m$.

$A=\emptyset$, 则 $B^A=B^\emptyset=\{\emptyset\}$.

$A \neq \emptyset$ 且 $B=\emptyset$, 则 $B^A=\emptyset^A=\emptyset$.

实例

例1 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 求 B^A .

解 $B^A=\{f_0, f_1, \dots, f_7\}$, 其中

$$f_0 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\}$$

$$f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}$$

$$f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_4 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\}$$

$$f_5 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_6 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}$$

$$f_7 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

函数的像和完全原像

定义8.5 设函数 $f: A \rightarrow B, A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$

(1) A_1 在 f 下的像 $f(A_1) = \{f(x) | x \in A_1\}$, 当 $A_1 = A$ 时称 $f(A)$ 为
函数的像

(2) B_1 在 f 下的完全原像 $f^{-1}(B_1) = \{x | x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$

注意:

- 函数值与像的区别: 函数值 $f(x) \in B$, 像 $f(A_1) \subseteq B$;
- 一般说来 $f^{-1}(f(A_1)) \neq A_1$, 但是 $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$.

例: 设 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, 且 $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{若 } x \text{ 为偶数} \\ x+1 & \text{若 } x \text{ 为奇数} \end{cases}$

令 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2\}$, 那么有

$$f(A) = f(\{0, 1\}) = \{f(0), f(1)\} = \{0, 2\}$$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{2\}) = \{1, 4\}$$

函数的性质

定义8.6 设 $f: A \rightarrow B$,

- (1) 若 $\text{ran } f = B$, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是**满射**的;
- (2) 若 $\forall y \in \text{ran } f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是**单射**的;
- (3) 若 $f: A \rightarrow B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是**双射**的

例2 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

- (1) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 1$
- (2) $f: \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln x$, \mathbf{Z}^+ 为正整数集
- (3) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$
- (4) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$
- (5) $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = (x^2 + 1)/x$, 其中 \mathbf{R}^+ 为正实数集.

例题解答

解：

(1) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 1$

在 $x=1$ 取得极大值 0. 既不是单射也不是满射的.

(2) $f: \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln x$

是单调上升的, 是单射的. 但不满射, $\text{ran } f = \{\ln 1, \ln 2, \dots\}$.

(3) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

是满射的, 但不是单射的, 例如 $f(1.5) = f(1.2) = 1$.

(4) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$

是满射、单射、双射的, 因为它是单调函数并且 $\text{ran } f = \mathbf{R}$.

(5) $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = (x^2 + 1)/x$

有极小值 $f(1) = 2$. 该函数既不是单射的也不是满射的.

实例

例3 对于给定的集合 A 和 B 构造双射函数 $f:A\rightarrow B$

(1) $A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

(2) $A=\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{N}$

(3) $A=[0,1]$, $B=[1/4,1/2]$

(4) $A = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $B=[-1,1]$

解答

(1) $A = P(\{1, 2, 3\})$, $B = \{0, 1\}^{\{1, 2, 3\}}$

解：

$$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

$B = \{f_0, f_1, \dots, f_7\}$, 其中

$$f_0 = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 3, 0 \rangle\}, \quad f_1 = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\},$$

$$f_2 = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle\}, \quad f_3 = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\},$$

$$f_4 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 3, 0 \rangle\}, \quad f_5 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\},$$

$$f_6 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle\}, \quad f_7 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}.$$

令 $f: A \rightarrow B$,

$$f(\emptyset) = f_0, \quad f(\{1\}) = f_1, \quad f(\{2\}) = f_2, \quad f(\{3\}) = f_3,$$

$$f(\{1, 2\}) = f_4, \quad f(\{1, 3\}) = f_5, \quad f(\{2, 3\}) = f_6, \quad f(\{1, 2, 3\}) = f_7$$

解答

(2) $A=\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{N}$

将 \mathbb{Z} 中元素以下列顺序排列并与 \mathbb{N} 中元素对应：

$$\mathbb{Z}: \quad 0 \ -1 \ 1 \ -2 \ 2 \ -3 \ 3 \dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\mathbb{N}: \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \dots$$

这种对应所表示的函数是：

$$f: \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

解答

$$(3) A = [0, 1], B = [1/4, 1/2]$$

令 $f: [0, 1] \rightarrow [1/4, 1/2]$,

$$f(x) = (x+1)/4$$

$$(4) A = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], B = [-1, 1]$$

令 $f: [\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow [-1, 1]$

$$f(x) = \sin x$$

某些重要函数

定义8.7

- (1) 设 $f:A \rightarrow B$, 如果存在 $c \in B$ 使得对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x)=c$, 则称 $f:A \rightarrow B$ 是常函数.
- (2) 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的恒等函数, 对所有的 $x \in A$ 都有 $I_A(x)=x$.
- (3) 设 $\langle A, \leq \rangle, \langle B, \leq \rangle$ 为偏序集, $f:A \rightarrow B$, 如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \leq x_2$, 就有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的; 如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 f 为严格单调递增的.
- 类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数.

某些重要函数

(4) 设 A 为集合, 对于任意的 $A' \subseteq A$,

A' 的特征函数 $\chi_{A'} : A \rightarrow \{0,1\}$ 定义为

$$\chi_{A'}(a) = 1, \text{ 当 } a \in A'$$

$$\chi_{A'}(a) = 0, \text{ 当 } a \in A - A'$$

(5) 设 R 是 A 上的等价关系, 令

$$g: A \rightarrow A/R$$

$$g(a) = [a], \forall a \in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射.

实例4

(1) 偏序集 $\langle P(\{a,b\}), R_{\subseteq} \rangle$, $\langle \{0,1\}, \leq \rangle$,

R_{\subseteq} 为包含关系,

\leq 为一般的小于等于关系,

令

$$f: P(\{a,b\}) \rightarrow \{0,1\},$$

$$f(\emptyset) = f(\{a\}) = f(\{b\}) = 0, \quad f(\{a,b\}) = 1,$$

则 f 是单调递增的, 但不是严格单调递增的.

实例4

(2) A 的每一个子集 A' 都对应于一个特征函数,
不同的子集对应于不同的特征函数.

例如 $A=\{a,b,c\}$, 则有

$$\chi_{\emptyset} = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 0 \rangle\},$$

$$\chi_{\{a,b\}} = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 0 \rangle\}.$$

实例4

(3) 不同的等价关系确定不同的自然映射，
恒等关系确定的自然映射是双射，
其他自然映射一般来说只是满射.

例如

$$A=\{1,2,3\}, \quad R=\{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\} \cup I_A$$

$$g: A \rightarrow A/R,$$

$$g(1)=g(2)=\{1,2\}, \quad g(3)=\{3\}.$$

8.2 函数的复合与反函数

主要内容

- 复合函数基本定理
- 函数的复合运算与函数性质
- 反函数的存在条件
- 反函数的性质

复合函数基本定理

定理8.1 设 F, G 是函数, 则 $F \circ G$ 也是函数, 且满足

(1) $\text{dom}(F \circ G) = \{x | x \in \text{dom} F \wedge F(x) \in \text{dom} G\}$

(2) $\forall x \in \text{dom}(F \circ G), \text{ 有 } F \circ G(x) = G(F(x))$

证明: 先证明 $F \circ G$ 是函数.

因为 F, G 是关系, 所以 $F \circ G$ 也是关系. 若对某个 $x \in \text{dom}(F \circ G)$ 有 $xF \circ Gy_1$ 和 $xF \circ Gy_2$, 则

$$\langle x, y_1 \rangle \in F \circ G \wedge \langle x, y_2 \rangle \in F \circ G$$

$$\Rightarrow \exists t_1 (\langle x, t_1 \rangle \in F \wedge \langle t_1, y_1 \rangle \in G) \wedge \exists t_2 (\langle x, t_2 \rangle \in F \wedge \langle t_2, y_2 \rangle \in G)$$

$$\Rightarrow \exists t_1 \exists t_2 (t_1 = t_2 \wedge \langle t_1, y_1 \rangle \in G \wedge \langle t_2, y_2 \rangle \in G) \quad (F \text{ 为函数})$$

$$\Rightarrow y_1 = y_2 \quad (G \text{ 为函数})$$

所以 $F \circ G$ 为函数

证明

任取 x ,

$$\begin{aligned} & x \in \text{dom}(F \circ G) \\ \Rightarrow & \exists t \exists y (<x, t> \in F \wedge <t, y> \in G) \\ \Rightarrow & \exists t (x \in \text{dom } F \wedge t = F(x) \wedge t \in \text{dom } G) \\ \Rightarrow & x \in \{ x \mid x \in \text{dom } F \wedge F(x) \in \text{dom } G \} \end{aligned}$$

任取 x ,

$$\begin{aligned} & x \in \text{dom } F \wedge F(x) \in \text{dom } G \\ \Rightarrow & <x, F(x)> \in F \wedge <F(x), G(F(x))> \in G \\ \Rightarrow & <x, G(F(x))> \in F \circ G \\ \Rightarrow & x \in \text{dom}(F \circ G) \wedge F \circ G(x) = G(F(x)) \end{aligned}$$

所以(1) 和(2) 得证

推论

推论1 设 F, G, H 为函数, 则 $(F \circ G) \circ H$ 和 $F \circ (G \circ H)$ 都是函数,
且
$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

证明: 由上述定理和运算满足结合律得证.

推论2 设 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$, 则 $f \circ g:A \rightarrow C$, 且 $\forall x \in A$ 都有
$$f \circ g(x) = g(f(x)).$$

证明: 由上述定理知 $f \circ g$ 是函数, 且

$$\begin{aligned}\text{dom}(f \circ g) &= \{x | x \in \text{dom} f \wedge f(x) \in \text{dom} g\} \\ &= \{x | x \in A \wedge f(x) \in B\} = A\end{aligned}$$

$$\text{ran}(f \circ g) \subseteq \text{rang} \subseteq C$$

因此 $f \circ g:A \rightarrow C$, 且 $\forall x \in A$ 有 $f \circ g(x) = g(f(x))$.

函数复合与函数性质

定理8.2 设 $f:A\rightarrow B, g:B\rightarrow C$

- (1) 如果 $f:A\rightarrow B, g:B\rightarrow C$ 是满射的, 则 $f\circ g:A\rightarrow C$ 也是满射的
- (2) 如果 $f:A\rightarrow B, g:B\rightarrow C$ 是单射的, 则 $f\circ g:A\rightarrow C$ 也是单射的
- (3) 如果 $f:A\rightarrow B, g:B\rightarrow C$ 是双射的, 则 $f\circ g:A\rightarrow C$ 也是双射的

证明:

(1) 任取 $c\in C$, 由 $g:B\rightarrow C$ 的满射性, $\exists b\in B$ 使得 $g(b)=c$.

对于这个 b , 由 $f:A\rightarrow B$ 的满射性, $\exists a\in A$ 使得 $f(a)=b$.

由合成定理有

$$f\circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c,$$

从而证明了 $f\circ g:A\rightarrow C$ 是满射的.

证明

(2) 假设存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得

$$f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$$

由合成定理有

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

因为 $g:B \rightarrow C$ 是单射的, 故 $f(x_1) = f(x_2)$. 又由于 $f:A \rightarrow B$ 是单射的, 所以 $x_1 = x_2$. 从而证明 $f \circ g:A \rightarrow C$ 是单射的.

(3)由(1)和(2)得证.

注意: 定理逆命题不为真, 即如果 $f \circ g:A \rightarrow C$ 是单射(或满射、双射)的, 不一定有 $f:A \rightarrow B$ 和 $g:B \rightarrow C$ 都是单射(或满射、双射)的.

实例

考虑集合 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$.
令

$$f = \{<a_1, b_1>, <a_2, b_2>, <a_3, b_3>\}$$

$$g = \{<b_1, c_1>, <b_2, c_2>, <b_3, c_3>, <b_4, c_3>\}$$

$$f \circ g = \{<a_1, c_1>, <a_2, c_2>, <a_3, c_3>\}$$

那么 $f \circ g: A \rightarrow C$ 是单射的、满射的

$f: A \rightarrow B$ 是单射的, $g: B \rightarrow C$ 不是单射的

$g: B \rightarrow C$ 是满射的, $f: A \rightarrow B$ 不是满射的

定理8.3 设 $f: A \rightarrow B$, 则 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$

反函数

反函数存在的条件

- (1) 任给函数 f , 它的逆 f^{-1} 不一定是函数, 只是一个二元关系.
- (2) 任给单射函数 $f:A \rightarrow B$, 则 f^{-1} 是函数, 且是从 $\text{ran } f$ 到 A 的双射函数, 但不一定是从 B 到 A 的双射函数
- (3) 对于双射函数 $f:A \rightarrow B$, $f^{-1}:B \rightarrow A$ 是从 B 到 A 的双射函数.

定理8.4 设 $f:A \rightarrow B$ 是双射的, 则 $f^{-1}:B \rightarrow A$ 也是双射的.

证明思路:

先证明 $f^{-1}:B \rightarrow A$, 即 f^{-1} 是函数, 且 $\text{dom } f^{-1} = B$, $\text{ran } f^{-1} = A$.
再证明 $f^{-1}:B \rightarrow A$ 的双射性质.

对于双射函数 $f:A \rightarrow B$, 称 $f^{-1}:B \rightarrow A$ 是它的**反函数**.

证明

证明：因为 f 是函数，所以 f^{-1} 是关系，且

$$\text{dom } f^{-1} = \text{ran } f = B, \quad \text{ran } f^{-1} = \text{dom } f = A$$

对于任意的 $x \in B = \text{dom } f^{-1}$ ，假设有 $y_1, y_2 \in A$ 使得

$$\langle x, y_1 \rangle \in f^{-1} \wedge \langle x, y_2 \rangle \in f^{-1}$$

成立，则由逆的定义有

$$\langle y_1, x \rangle \in f \wedge \langle y_2, x \rangle \in f$$

根据 f 的单射性可得 $y_1 = y_2$ ，从而证明了 f^{-1} 是函数，且是满射的。

若存在 $x_1, x_2 \in B$ 使得 $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) = y$ ，从而有

$$\langle x_1, y \rangle \in f^{-1} \wedge \langle x_2, y \rangle \in f^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle y, x_1 \rangle \in f \wedge \langle y, x_2 \rangle \in f \Rightarrow x_1 = x_2$$

从而证明了 f^{-1} 是单射的。

反函数的性质

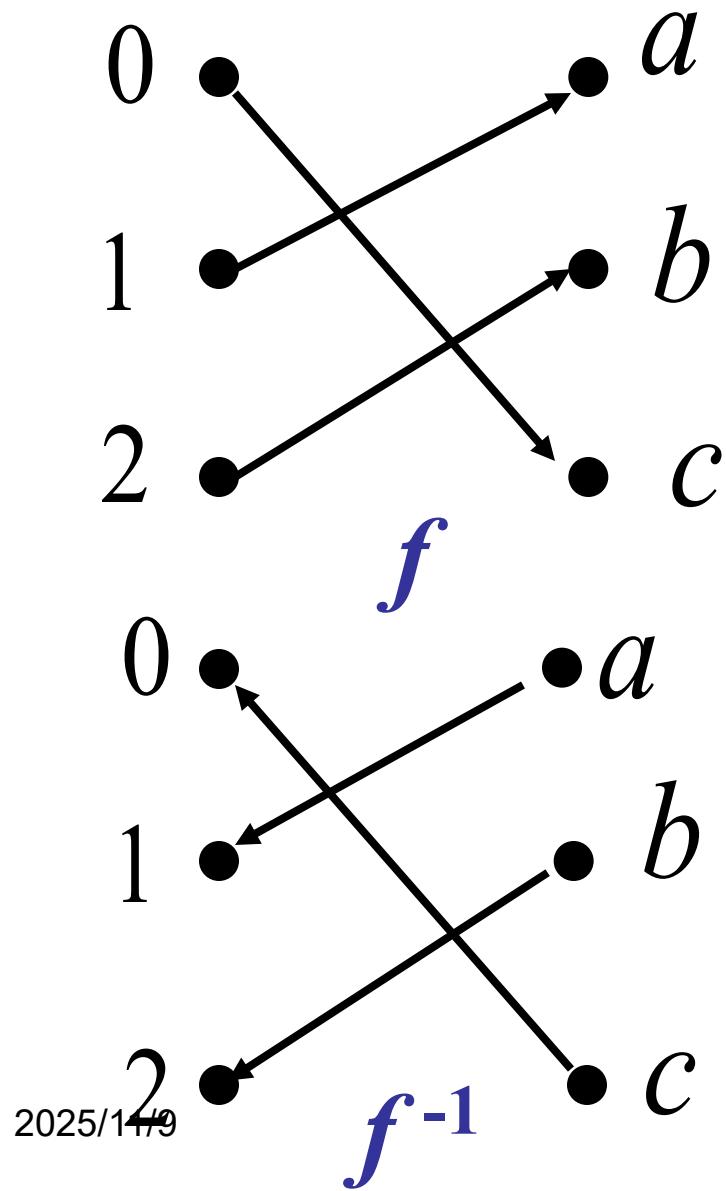
定理8.5

- (1) 设 $f:A \rightarrow B$ 是双射的, 则 $f^{-1} \circ f = I_B$, $f \circ f^{-1} = I_A$
- (2) 对于双射函数 $f:A \rightarrow A$, 有 $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_A$

证明思路:

根据定理可知 $f^{-1}:B \rightarrow A$ 也是双射的, 由合成基本定理可知
 $f^{-1} \circ f:B \rightarrow B$, $f \circ f^{-1}:A \rightarrow A$, 且它们都是恒等函数.

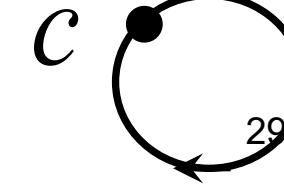
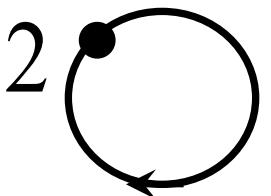
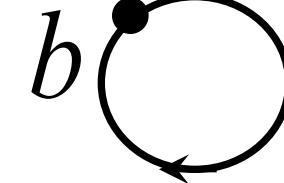
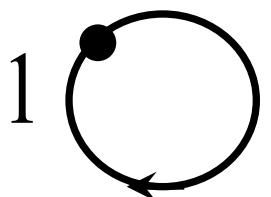
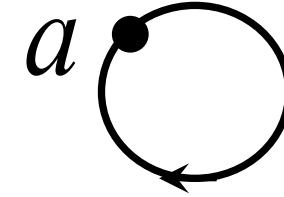
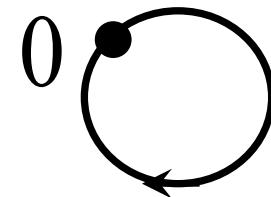
实例



求: $f \circ f^{-1}$ 及 $f^{-1} \circ f$

解:

$$f \circ f^{-1} = I_A \quad f^{-1} \circ f = I_B$$



求解

例5 设 $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = x + 2$$

求 $f \circ g, g \circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

解: $f \circ g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

$$g \circ f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

求解

例5 设 $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = x + 2$$

求 $f \circ g$, $g \circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

解:

$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 不是双射的, 不存在反函数.

$g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是双射的, 它的反函数是 $g^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,
$$g^{-1}(x) = x - 2.$$

8.3 双射函数与集合的基数

主要内容

- 集合的等势及其性质
- 重要的等势或不等势的结果
- 集合的优势及其性质
- 集合的基数
- 可数集

集合的等势

定义8.8 设 A, B 是集合, 如果存在着从 A 到 B 的双射函数, 就称 A 和 B 是**等势**的, 记作 $A \approx B$. 如果 A 不与 B 等势, 则记作 $A \not\approx B$.

集合等势的实例:

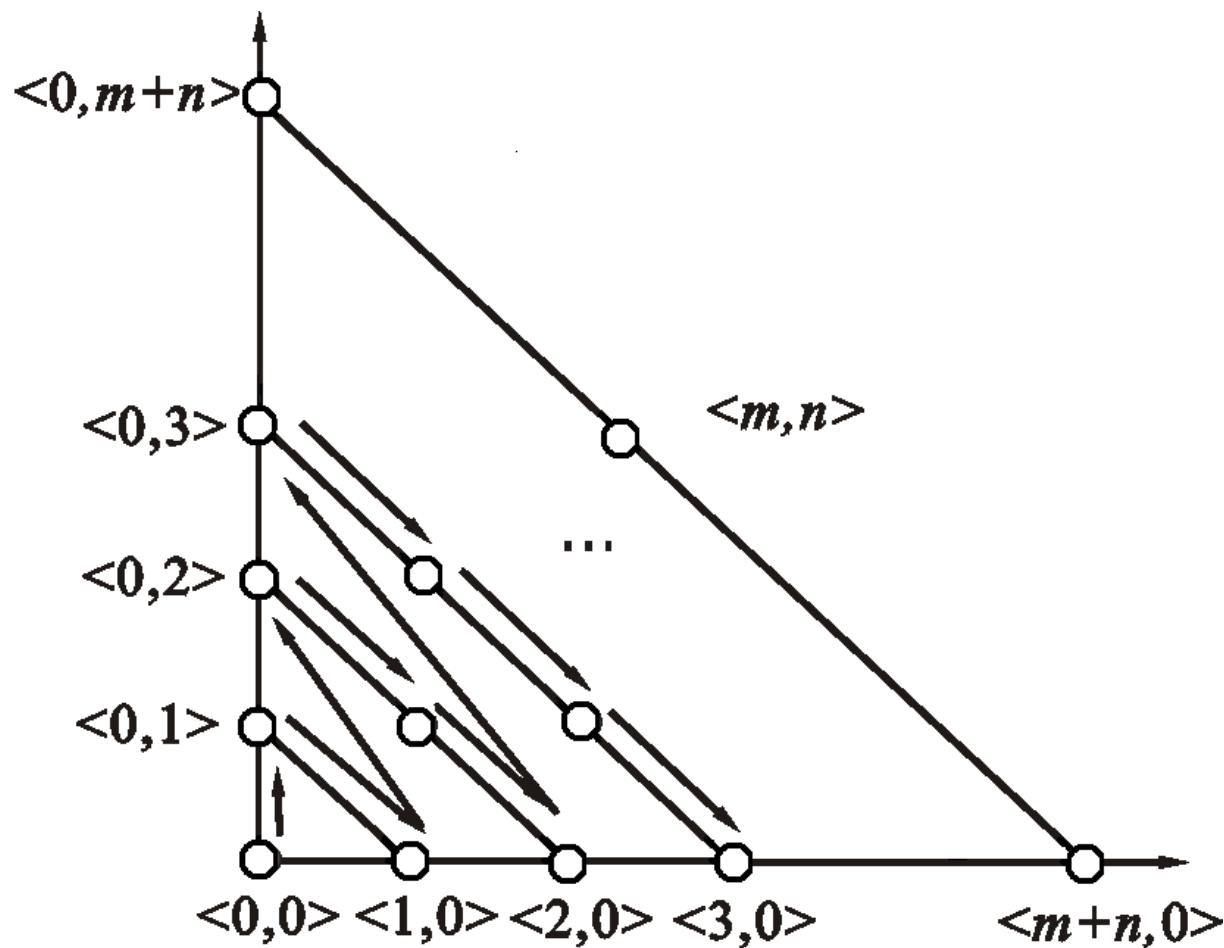
例6 (1) $\mathbf{Z} \approx \mathbf{N}$.

$$f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

则 f 是 \mathbf{Z} 到 \mathbf{N} 的双射函数. 从而证明了 $\mathbf{Z} \approx \mathbf{N}$.

集合等势的实例: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

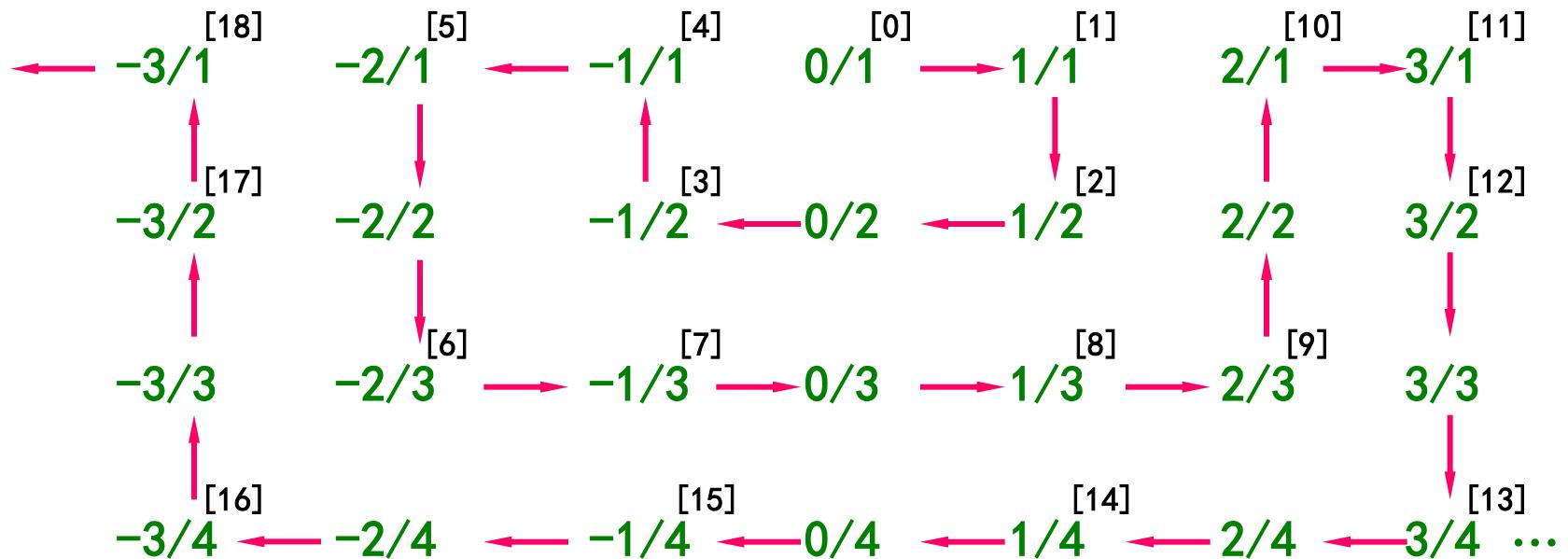
$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 中所有的元素排成有序图形



$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(\langle m, n \rangle) = \frac{(m+n+1)(m+n)}{2} + m$$

集合等势的实例: $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$. 双射函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, 其中 $f(n)$ 是 $[n]$ 下方的有理数.



实数集合的等势

(4) $(0,1) \approx \mathbb{R}$. 其中实数区间 $(0,1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 1\}$.
令

$$f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan \frac{2x-1}{2}\pi$$

实数集合的等势

(5) $[0,1] \approx (0,1)$.

其中 $(0,1)$ 和 $[0,1]$ 分别为实数开区间和闭区间.

令 $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & x = 0 \\ 1/2^2 & x = 1 \\ 1/2^{n+2} & x = 1/2^n, n = 1, 2, \dots \\ x & \text{其它 } x \end{cases}$$

实数集合的等势

(6) 对任何 $a, b \in R, a < b, [0,1] \approx [a,b]$,

定义双射函数 $f: [0,1] \rightarrow [a,b]$,

构造通过点(0,a)到(1,b)的直线，得直线方程

$$f(x) = (b-a)x + a$$

或者，构造通过点(0,b)到(1,a)的直线，得直线方程

$$f(x) = (a-b)x + b$$

类似地可以证明：

对任何 $a, b \in R, a < b$, 有 $(0,1) \approx (a,b)$.

实例

例7 设 A 为任意集合, 则 $P(A) \approx \{0,1\}^A$.

证明: 如下构造从 $P(A)$ 到 $\{0,1\}^A$ 的函数

$$f: P(A) \rightarrow \{0,1\}^A, \quad f(A') = \chi_{A'}, \quad \forall A' \in P(A).$$

其中 $\chi_{A'}$ 是集合 A' 的特征函数. 易证 f 是单射的.

对于任意的 $g \in \{0,1\}^A$, 那么有 $g: A \rightarrow \{0,1\}$. 令

$$B = \{x \mid x \in A \wedge g(x) = 1\}$$

则 $B \subseteq A$, 且 $\chi_B = g$, 即 $\exists B \in P(A), f(B) = g$.

从而证明了 f 是满射的.

由等势定义得 $P(A) \approx \{0,1\}^A$.

等势的性质

定理8.6 设 A, B, C 是任意集合，

- (1) $A \approx A$.
- (2) 若 $A \approx B$ ， 则 $B \approx A$.
- (3) 若 $A \approx B, B \approx C$ ， 则 $A \approx C$.

即在集合族上， 等势关系是一个等价关系。

证明思路：利用等势的定义。

- (1) I_A 是从 A 到 A 的双射.
- (2) 若 $f:A \rightarrow B$ 是双射，则 $f^{-1}:B \rightarrow A$ 是从 B 到 A 的双射.
- (3) 若 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$ 是双射，则 $f \circ g:A \rightarrow C$ 是从 A 到 C 的双射.

有关势的重要结果

等势结果

- $N \approx Z \approx Q \approx N \times N$
- 任何实数区间都与实数集合 R 等势

有关势的重要结果

不等势的结果：

定理8.7 (康托定理)

- (1) $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$;
- (2) 对任意集合 A 都有 $A \not\approx P(A)$.

证明思路：

- (1) 只需证明任何函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$ 都不是满射的.

任取函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$, 列出 f 的所有函数值, 然后构造一个 $[0,1]$ 区间的小数 b , 使得 b 与所有的函数值都不相等.

- (2) 任取函数 $f: A \rightarrow P(A)$, 构造 $B \in P(A)$, 使得 B 与 f 的任何函数值都不相等.

Cantor定理的证明: (1) $\mathbf{N} \not\approx \mathbf{R}$;

证明: (1) 规定 $[0,1]$ 中数的表示. 对任意的 $x \in [0,1]$, 令

$$x = 0.x_1x_2\dots, \quad 0 \leq x_i \leq 9$$

规定在 x 的表示式中不允许在某位后有无数个9的情况.

设 $f: \mathbf{N} \rightarrow [0,1]$ 是任何一个函数, 列出 f 的所有函数值:

$$f(0) = 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}\dots$$

$$f(1) = 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}\dots$$

...

$$f(n-1) = 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}\dots$$

...

令 y 的表示式为 $0.b_1b_2\dots$, 并且满足 $b_i \neq a_i^{(i)}$, $i=1,2,\dots$, 那么 $y \in [0,1]$, 且 y 与上面列出的任何函数值都不相等. 这就推出 $y \notin \text{ran } f$, 即 f 不是满射的.

Cantor定理的证明: (2) 对任意集合 A 都有 $A \not\approx P(A)$.

(2) 我们将证明任何函数 $g:A \rightarrow P(A)$ 都不是满射的.

设 $g:A \rightarrow P(A)$ 是从 A 到 $P(A)$ 的函数, 如下构造集合 B :

$$B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$$

则 $B \in P(A)$, 但对任意 $x \in A$ 都有

$$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$$

从而证明了对任意的 $x \in A$ 都有 $B \neq g(x)$. 即 $B \notin \text{rang.}$

注意: 根据Cantor定理可以知道 $\mathbb{N} \not\approx P(\mathbb{N})$, $\mathbb{N} \not\approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

集合的优势

定义8.9 (1) 设 A, B 是集合, 如果存在从 A 到 B 的单射函数, 就称 B 优势于 A , 记作 $A \leq \cdot B$. 如果 B 不是优势于 A , 则记作 $A \not\leq \cdot B$.

(2) 设 A, B 是集合, 若 $A \leq \cdot B$ 且 $A \not\approx B$, 则称 B 真优势于 A , 记作 $A < \cdot B$. 如果 B 不是真优势于 A , 则记作 $A \not< \cdot B$.

实例: $\mathbb{N} \leq \cdot \mathbb{N}, \mathbb{N} \leq \cdot \mathbb{R}, A \leq \cdot P(A),$

$\mathbb{R} \not\leq \cdot \mathbb{N}$

$\mathbb{N} < \cdot \mathbb{R}, A < \cdot P(A)$, 但 $\mathbb{N} \not< \cdot \mathbb{N}$

定理8.8 设 A, B, C 是任意的集合, 则

(1) $A \leq \cdot A$

(2) 若 $A \leq \cdot B$ 且 $B \leq \cdot A$, 则 $A \approx B$

(3) 若 $A \leq \cdot B$ 且 $B \leq \cdot C$, 则 $A \leq \cdot C$

应用：证明等势

例8 证明 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \approx [0,1)$.

证明：设 $x \in [0,1)$, $0.x_1x_2\dots$ 是 x 的二进制表示. 规定表示式中不允许出现连续无数个1. 对于 x , 如下定义

$$f: [0,1) \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}},$$

$$f(x) = t_x, \text{ 且 } t_x: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\},$$

$$t_x(n) = x_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$$

例如 $x = 0.10110100\dots$, 则对于 x 的函数 t_x 是:

$$n \quad 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \dots$$

$$t_x(n) \quad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \dots$$

$t_x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, 且对于 $x, y \in [0,1)$, $x \neq y$, 必有 $t_x \neq t_y$, 即 $f(x) \neq f(y)$.

这就证明了 $f: [0,1) \rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 是单射的.

考慮 $t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, 其中

$$t(0)=0, t(n)=1, n=1, 2, \dots$$

按照 f 的定义, 只有 $x = 0.011\dots$ 才能满足 $f(x)=t$. 但根据规定, 这个数 x 记为 $0.100\dots$, 所以根本不存在 $x \in [0,1)$, 满足 $f(x)=t$. 因此 f 不是满射的.

构造另一个单射

定义函数 $g: \{0,1\}^N \rightarrow [0,1)$. g 的映射法则恰好与 f 相反. 即
 $\forall t \in \{0,1\}^N$,

$$t: N \rightarrow \{0,1\}, g(t) = 0.x_1x_2\dots, \text{其中 } x_{n+1} = t(n).$$

将 $0.x_1x_2\dots$ 看作数 x 的十进制表示. 这样就避免了形如 $0.0111\dots$ 和 $0.1000\dots$ 在二进制表示中对应了同一个数的情况，从而保证了 g 的单射性.

根据定理有 $\{0,1\}^N \approx [0,1)$. 再使用等势的传递性得 $\{0,1\}^N \approx \mathbb{R}$.

自然数的集合定义

定义8.10 设 a 为集合, 称 $a \cup \{a\}$ 为 a 的后继, 记作 a^+ , 即 $a^+ = a \cup \{a\}$.

如下定义自然数:

$$0 = \emptyset$$

$$1 = 0^+ = \emptyset^+ = \{\emptyset\} = \{0\}$$

$$2 = 1^+ = \{\emptyset\}^+ = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$$

$$3 = 2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$$

...

$$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

...

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \dots \quad 0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset \dots$$

自然数的相等与大小, 即对任何自然数 n 和 m , 有

$$m = n \Leftrightarrow m \approx n, \quad m < n \Leftrightarrow m \in n$$

有穷集和无穷集

定义8.11

- (1) 一个集合是**有穷**的当且仅当它与某个自然数等势；
- (2) 如果一个集合不是有穷的，就称作**无穷集**.

实例：

- (1) $\{a,b,c\}$ 是有穷集，因为 $3=\{0,1,2\}$ ，且
$$\{a,b,c\} \approx \{0,1,2\} = 3$$

- (2) N 和 R 都是无穷集，因为没有自然数与 N 和 R 等势

利用自然数的性质可以证明：任何有穷集只与惟一的自然数等势。

集合基数的定义

定义8.12

(1) 对于有穷集合 A , 称与 A 等势的那个惟一的自然数为 A 的**基数**, 记作 $\text{card}A$ (也可以记作 $|A|$ 或 $K(A)$)

$$\text{card}A = n \Leftrightarrow A \approx n$$

(2) 自然数集合 N 的基数记作 \aleph_0 , 即

$$\text{card}N = \aleph_0$$

(3) 实数集 R 的基数记作 \aleph , 即

$$\text{card}R = \aleph_1 = \aleph$$

基数的相等和大小

定义8.13 设 A, B 为集合, 则

- (1) $\text{card } A = \text{card } B \Leftrightarrow A \approx B$
- (2) $\text{card } A \leq \text{card } B \Leftrightarrow A \leqslant B$
- (3) $\text{card } A < \text{card } B \Leftrightarrow \text{card } A \leq \text{card } B \wedge \text{card } A \neq \text{card } B$

根据上一节关于势的讨论不难得出:

$$\text{card } Z = \text{card } Q = \text{card } N \times N = \aleph_0$$

$$\text{card } P(N) = \text{card } 2^N = \text{card } [a,b] = \text{card } (c,d) = \aleph$$

其中 $2^N = \{0,1\}^N$

$$\aleph_0 < \aleph$$

$$\text{card } A < \text{card } P(A)$$

基数的大小

不存在最大的基数. 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0, 1, 2, \dots, n, \dots, \aleph_0, \aleph, \dots$$

其中:

$0, 1, 2, \dots, n, \dots$ 是全体自然数, 是有穷基数.

\aleph_0, \aleph, \dots 是无穷基数,

\aleph_0 是最小的无穷基数,

\aleph 后面还有更大的基数, 如 $\text{card } P(\mathbb{R})$ 等.

连续统假设: 不存在介于 \aleph_0 和 \aleph 之间的基数, 即 \aleph 是大于 \aleph_0 的最小基数.

可数集

定义8.14 设 A 为集合, 若 $\text{card}A \leq \aleph_0$, 则称 A 为**可数集或可列集**.

实例:

$\{a,b,c\}$, 5, 整数集 Z , 有理数集 Q , $N \times N$ 等都是可数集,

实数集 R 不是可数集, 与 R 等势的集合也不是可数集.

对于任何的可数集, 它的元素都可以排列成一个有序图形. 换句话说, 都可以找到一个“数遍”集合中全体元素的顺序.

可数集的性质：

- 可数集的任何子集都是可数集.
- 两个可数集的并是可数集.
- 两个可数集的笛卡儿积是可数集.
- 可数个可数集的并仍是可数集.
- 无穷集 A 的幂集 $P(A)$ 不是可数集

实例

例9 求下列集合的基数

- (1) $T=\{x \mid x\text{是单词 “}BASEBALL\text{”中的字母}\}$
- (2) $B=\{x \mid x \in R \wedge x^2=9 \wedge 2x=8\}$
- (3) $C=P(A), A=\{1, 3, 7, 11\}$

解：

- (1) 由 $T=\{B, A, S, E, L\}$ 知 $\text{card } T=5$
- (2) 由 $B=\emptyset$, 可知 $\text{card } B=0$.
- (3) 由 $|A|=4$ 可知 $\text{card } C=\text{card } P(A)=|P(A)|=2^4=16$.

实例

例10 设 A, B 为集合, 且 $\text{card}A=\aleph_0$, $\text{card}B=n$, n 是自然数,
 $n\neq 0$. 求 $\text{card } A \times B$.

解: 方法一, 构造双射函数

由 $\text{card}A=\aleph_0$, $\text{card}B=n$, 可知 A, B 都是可数集. 令

$$A=\{a_0, a_1, a_2, \dots\}, \quad B=\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$$

对任意的 $\langle a_i, b_j \rangle, \langle a_k, b_l \rangle \in A \times B$ 有

$$\langle a_i, b_j \rangle = \langle a_k, b_l \rangle \Leftrightarrow i=k \wedge j=l$$

定义函数

$$f: A \times B \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(\langle a_i, b_j \rangle) = in + j, \quad i=0, 1, \dots, \quad j=0, 1, \dots, n-1$$

易见 f 是 $A \times B$ 到 \mathbb{N} 的双射函数, 所以

$$\text{card } A \times B = \text{card } \mathbb{N} = \aleph_0$$

实例

方法二 直接使用可数集的性质求解.

因为 $\text{card } A = \aleph_0$, $\text{card } B = n$, 所以 A, B 都是可数集.

根据性质(3) 可知 $A \times B$ 也是可数集, 所以

$$\text{card } A \times B \leq \aleph_0$$

显然当 $B \neq \emptyset$ 时,

$$\text{card } A \leq \text{card } A \times B,$$

这就推出

$$\aleph_0 \leq \text{card } A \times B$$

综合上述得到

$$\text{card } A \times B = \aleph_0.$$