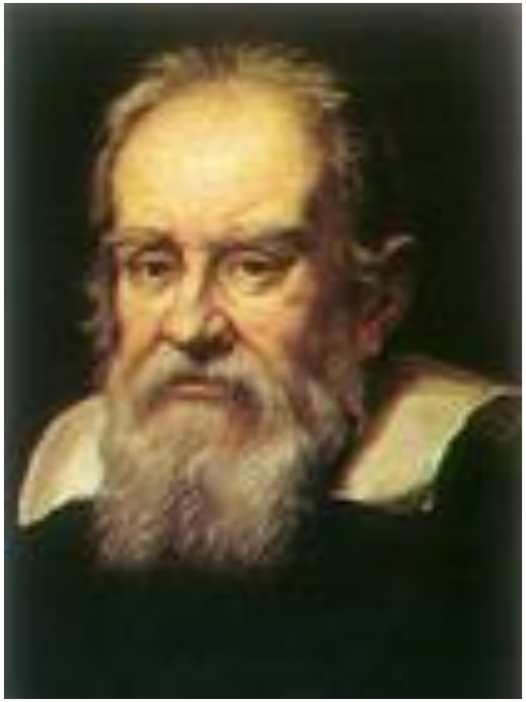
第二部分 集合论

北京理工大学 计算机学院
刘琼昕

集合论溯源

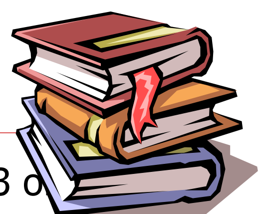
十六世纪末 起源
伽利略怪论
十九世纪 德国数学家康托尔创立古典集合论
1900年前后 出现各种悖论
1908年 策莫罗建立集合论的公理系统
目前 集合论公理系统有两种形式:
策莫罗-弗兰克尔形式（ZFC）
贝尔内斯-诺伊曼-葛德尔形式（BNG）
在计算机领域得到广泛应用

伽利略怪论



伽利略（意大利）
Galileo Galilei
(1564～1642)

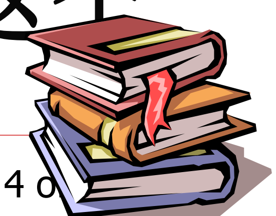
- 1636年《关于新科学的对话》中提出：
- 正整数集合与正整数的平方的集合中的元素一样多。
- 短线段与长线段上的点一样多。



古典集合论

康托尔（德国）
Georg Cantor
1845～1918

- **1874年《关于全体实代数数的特征》**
- 康托尔称集合是“一些确定的、不同的东西的总体，这些东西，人们能够意识到，并且能够判断一个给定的东西是否属于这个总体”。



罗素悖论

- 令集合S为包含所有不以自身为元素的那些集合，即$S=\{x|\ x\notin x\}$，
  请问：$S\in S$吗？

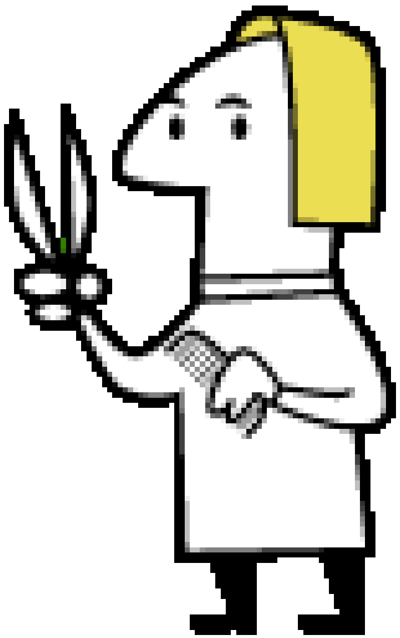
假定$S \in S$，**那么**S **应满足条件**$x \notin x$，**因此**$S \notin S$。

自相矛盾

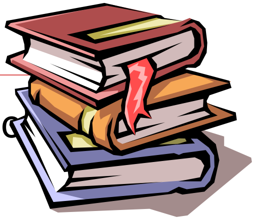
假定$S \notin S$，**那么**S **已经满足条件**$x \notin x$，**因此**$S \in S$。

又自相矛盾

理发师悖论

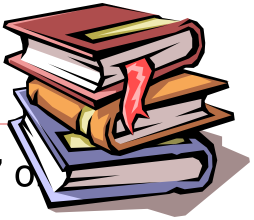


- 在一个小岛上有唯一的一位理发师。他宣称：我给岛上所有不为自己理发的人理发，而不给那些为自己理发的人理发。”
- 请问：理发师的头发由谁来理呢？



ZFC公理（策莫罗-弗兰克尔-选择公理）

- 外延公理
- 空集公理
- 配对公理
- 并集公理
- 幂集公理
- 无穷公理
- 替换公理
- 正则公理
- 选择公理



集合论在计算机领域应用

- 集合论是学习计算机科学必备的基础知识，计算机领域的大多数基本概念和理论都可以采用集合论的有关术语来描述和论证。
- 集合论被广泛地应用于数据结构、数据库、编译理论、程序设计、形式语言、信息检索、算法分析、人工智能等领域 。

第六章 集合代数

- 集合的基本概念

  属于、包含

  幂集、空集

  文氏图等

- 集合的基本运算

  并、交、补、差等

- 集合恒等式

  集合运算的算律、恒等式的证明方法

6.1 集合的基本概念

1. 集合定义

集合没有精确的数学定义

把一些事物汇集到一起组成一个整体就称为集合，称这些个体为集合的元素

常见的数集：

N：自然数集合；　　Z：整数集合；

Q：有理数集合；　　R：实数集合；

C：复数集合

元素与集合

1. 集合的元素具有的性质

无序性：元素列出的顺序无关

相异性：集合的每个元素只计数一次

确定性：对任何元素和集合都能确定这个元素是否为该集合的元素

任意性：集合的元素也可以是集合

6.1 集合的基本概念

2. 集合表示法

枚举法：通过列出全体元素来表示集合

谓词表示法：通过谓词概括集合元素的性质

实例：

枚举法：自然数集合 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$

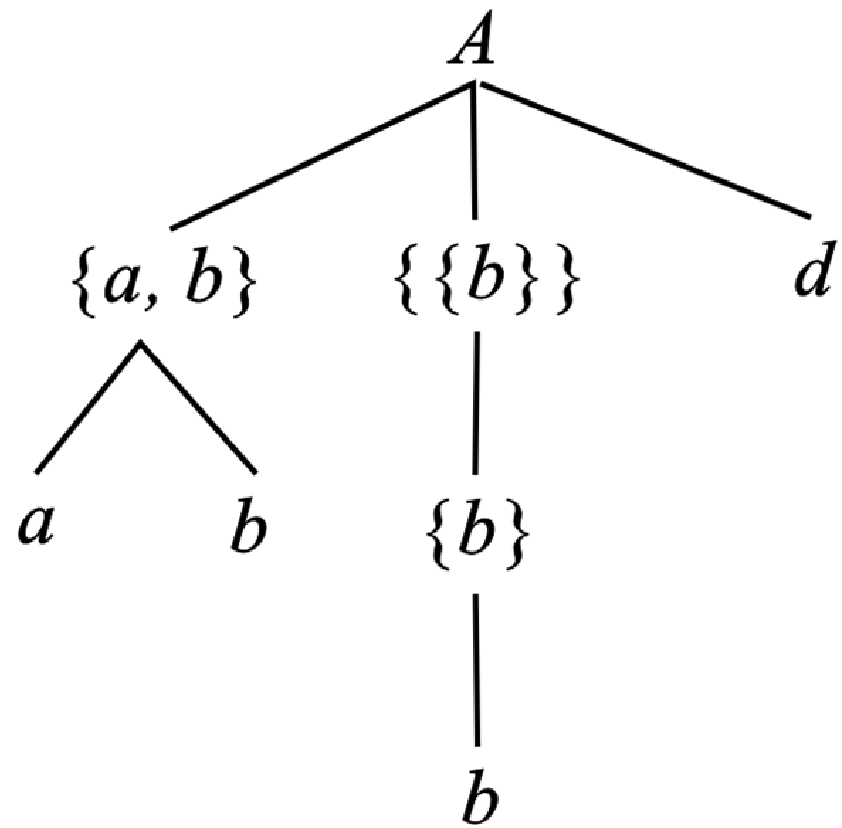
谓词法：$S=\{\, x \mid x$是实数，$x^2-1=0\}$

元素与集合

2．元素与集合的关系

隶属关系：$\in$或者$\notin$

3．集合的树型层次结构



$\boldsymbol{d \in A\ ,\ a \notin A}$

基数（势）

集合 S 中不同元素的数目称为 S 的基数或势记为 $|S|$ 或 $\#S$.

$|S|$ 是有限的集合为有穷集合（无限为无穷集合）。

集合与集合

集合与集合之间的关系：$\subseteq, =, \nsubseteq, \neq, \subset, \not\subset$

定义6.1 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

定义6.2 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

定义6.3 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

思考：$\neq$ 和 $\not\subset$ 的定义

注意 $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题

实例

$\{a,b\} \subseteq \{a,b,c\}$

$\{a,b\} \subset \{a,b,c\}$

$\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c\}$

$\{a,b,c\} \not\subset \{a,b,c\}$

$\{a,b\} \nsubseteq \{a,c,d,e\}$

考虑集合{a, {a}}与{a}的关系

空集、全集和幂集

1． 定义6.4 空集 $\varnothing$：不含有任何元素的集合

实例： $\{ x \mid x \in R \wedge x^2+1=0 \}$

定理6.1 空集是任何集合的子集。

证明： 对于任意集合A，

$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$ (恒真命题)

推论 $\varnothing$是惟一的

证明

- 推论：空集是惟一的.
- 证 不妨假设至少有两个空集$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，那么由定理6.1，$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$并且 $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$ 则由集合相等的定义，有$\varnothing_1 = \varnothing_2$.

空集、全集和幂集

2. **定义6.5 幂集**：$P(A)=\{\, x \mid x \subseteq A \,\}$

实例：$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$,

$P(P(\varnothing))=P(\{\varnothing\})= \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$P(P(P(\varnothing)))=P(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})=\{\varnothing, \{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

计数：如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$.

3. **定义6.6 全集** E：在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集。

全集具有相对性：与问题有关，不存在绝对的全集

6.2 集合的运算

集合的基本运算有

定义6.7 并 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

交 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

相对补 $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

定义6.8 对称差 $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

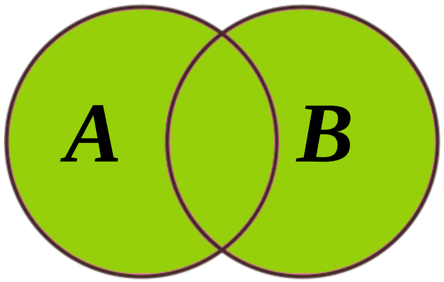
$=(A \cup B)-(A \cap B)$

定义6.9 绝对补 $\sim A = E - A$

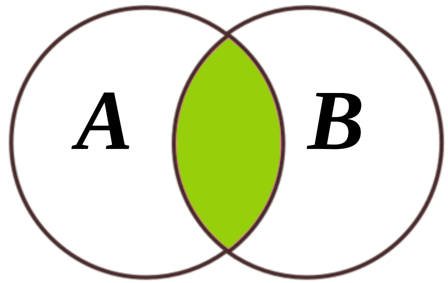
$=\{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$

文氏图

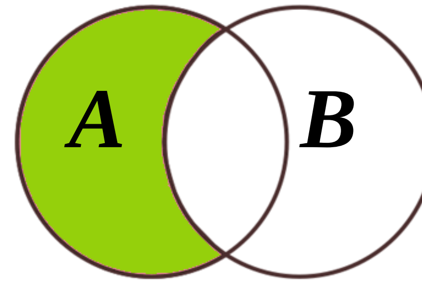
- 集合运算的表示



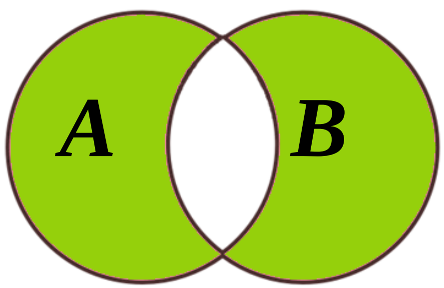
$A \cup B$



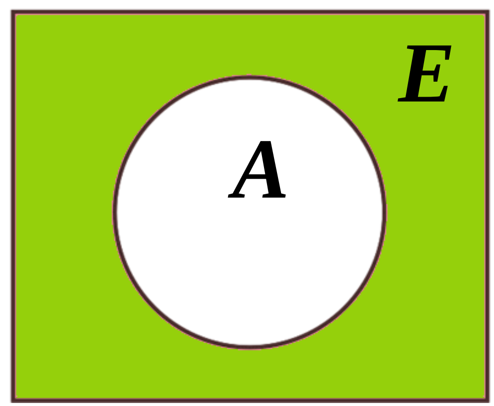
$A \cap B$



$A - B$



$A \oplus B$



$\sim A$

几点说明

- $A\cap B\subseteq A$　　$A\cap B\subseteq B$
- $A\subseteq A\cup B$　　$B\subseteq A\cup B$
- $A-B\subseteq A$　　$A-B=A\cap\sim B$
- $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$
- $A\cap B = \varnothing \Leftrightarrow A-B = A$
- $A\oplus B = (A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)=(A\cup B)-(A\cap B)$
- $A\oplus\varnothing = A$
- $A\oplus A = \varnothing$

几点说明

- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即
  - ✓ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
    $= \{ x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n \}$
  - ✓ $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$
    $= \{ x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n \}$

广义运算

1. 集合的广义并与广义交

定义6.10 广义并 $\cup A = \{ x \mid \exists z (z \in A \wedge x \in z)\}$

广义交 $\cap A = \{ x \mid \forall z (z \in A \rightarrow x \in z)\}$

实例：

$$\cup\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$$

$$\cap\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1\}$$

$$\cup\{\{a\}\}=\{a\}, \quad \cap\{\{a\}\}=\{a\}$$

$$\cup\{a\}=a, \quad \cap\{a\}=a$$

关于广义运算的说明

2. 广义运算的性质

(1) $\cup\varnothing=\varnothing$，$\cap\varnothing$无意义

(2) 单元集$\{x\}$的广义并和广义交都等于x

(3) 广义运算减少集合的层次（括弧减少一层）

(4) 广义运算的计算：一般情况下可以转变成初级运算

$$\cup\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$$

$$\cap\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$$

关于广义运算的说明

3. 引入广义运算的意义

可以表示无数个集合的并、交运算

例如

$$\cup\{\{x\}\mid x\in \mathbf{R}\}=\mathbf{R}$$

这里的 **R** 代表实数集合.

运算的优先权规定

一类运算：广义并，广义交，幂集，绝对补，运算由右 向左进行

二类运算：初级运算$\cup$，$\cap$，$-$，$\oplus$，优先顺序由括号确定

混合运算：一类运算优先于二类运算

运算的优先权规定

例 $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$，计算$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$.

解：

$$
\begin{aligned}
&\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)\\
&=\cap\{a,b\}\cup(\cup\{a,b\}-\cup\{a\})\\
&=(a\cap b)\cup((a\cup b)-a)\\
&=(a\cap b)\cup(b-a)\\
&=b
\end{aligned}
$$

6.3 集合恒等式

设E是全集，A,B,C为E的任意子集。

① 幂等律 $A\cup A=A,\ A\cap A=A$

② 交换律 $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$

③ 结合律 $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

④ 分配律 $A\cup(B\cap C) = (A\cap B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

6.3 集合恒等式

⑤ 德●摩根律

- 绝对形式

$$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$$

$$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$$

- 相对形式

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

⑥ 吸收律　$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$

6.3 集合恒等式

⑦ 零律 $A \cup E = E$， $A \cap \varnothing = \varnothing$

⑧ 同一律 $A \cup \varnothing = A$，$A \cap E = A$

⑨ 排中律 $A \cup \sim A = E$

⑩ 矛盾律 $A \cap \sim A = \varnothing$

⑪ 余补律 $\sim\varnothing = E$，$\sim E = \varnothing$

⑫ 双重否定律 $\sim\sim A = A$

⑬ 补交转换律 $A - B = A \cap \sim B$

6.3 集合恒等式

- 集合算律

1. 只涉及一个运算的算律：
   交换律、结合律、幂等律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C$ $=A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

集合算律

2．涉及两个不同运算的算律：
分配律、吸收律

	∪与∩	∩与⊕
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=$ $(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合算律

3．涉及补运算的算律：

DM律，双重否定律

	$-$	$\sim$
*D.M*律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

集合算律

4. 涉及全集和空集的算律：

补元律、零律、同一律、否定律

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

集合证明题

证明方法：命题演算法、等式置换法

命题演算证明法的书写规范 (以下的X和Y代表集合公式)

(1) 证$X \subseteq Y$

任取x， $x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$

(2) 证$X=Y$

方法一 分别证明 $X \subseteq Y$ 和 $Y \subseteq X$

方法二 任取x，$x \in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in Y$

注意：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要的

集合等式的证明：命题演算法

例 证明$A\cup(A\cap B) = A$ （吸收律）

证明：

任取x,

$$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A\vee x\in A\cap B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A$$

因此得 $A\cup(A\cap B) = A$.

集合等式的证明：命题演算法

例　证明 $A-B = A\cap\sim B$

证明：

任取x,

$$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B \Leftrightarrow x\in A\cap\sim B$$

因此得 $A-B = A\cap\sim B$

集合等式的证明：等式置换法

例　假设交换律、分配律、同一律、零律已经成立，证明吸收律.

证明：　$A\cup(A\cap B)$

$= (A\cap E)\cup(A\cap B)$　（同一律）

$= A\cap(E\cup B)$　（分配律）

$= A\cap(B\cup E)$　（交换律）

$= A\cap E$　（零律）

$= A$　（同一律）

包含等价条件的证明

- 证明 $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

  ①　②　③　④

证明思路：

- 确定问题中含有的命题：本题含有命题 ①, ②, ③, ④
- 确定命题间的关系（哪些命题是已知条件、哪些命题是要证明的结论）：本题中每个命题都可以作为已知条件，每个命题都是要证明的结论
- 确定证明顺序：①⇒②，②⇒③，③⇒④，④⇒①
- 按照顺序依次完成每个证明（证明集合相等或者包含）

包含等价条件的证明

- 证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

  ① ② ③ ④

- 证明：

  ①⇒②

  显然$B \subseteq A \cup B$，下面证明$A \cup B \subseteq B$.

  任取x，

  $$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$$

  因此有$A \cup B \subseteq B$. 综合上述②得证.

包含等价条件的证明

- 证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

  ① ② ③ ④

- 证明：

  ②⇒③

  $A = A \cap (A \cup B) \Rightarrow A = A \cap B$

  (由②知$A \cup B = B$，将$A \cup B$用B代入)

包含等价条件的证明

- 证明 $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

  ① ② ③ ④

- 证明：

  ③⇒④

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，则$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

包含等价条件的证明

- 证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

  ① ② ③ ④

- 证明：

  ④⇒①

假设$A \subseteq B$不成立，那么

$$\exists x (x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in A - B \Rightarrow A - B \neq \varnothing$$

与条件④矛盾.

几点说明

- $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$
- 证明：

充分性： 由$A-B=A$得

$$A \cap B = (A-B) \cap B = A \cap \sim B \cap B = \varnothing.$$

从而得到必要条件$A \cap B=\varnothing$.

必要性: 如果$A \cap B=\varnothing$成立，则

$$A-B= A-(A \cap B)= A- \varnothing =A.$$

从而得到充分条件$A-B= A$.

6.4 有穷集合元素的计数

1. 文氏图法

2. 包含排斥原理

定理6.2 设集合S上定义了n条性质，其中具有第 i 条性质的元素构成子集A_i, 那么集合中不具有任何性质的元素数为

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}|=|S|-\sum_{1\le i\le n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

推论

- **推论** S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

实例

- 设在20名学生中, 有12人是足球队员, 10人是篮球队员, 兼是两队球员的人数为5名, 请问既不是足球队员也不是篮球队员的学生有几人?

- 解: 设足球队员的集合为A, 篮球队员的集合

  为B, 则 $|A|=12$, $|B|=10$, $|A\cap B| =5$. 又因为

  $|{\sim}A\cap{\sim}B |+|A \cup B |=20$,

  则$|{\sim}A\cap{\sim}B | = 20 - (|A|+|B|)+|A\cap B|$

  $=20 - (12+10)+5 = 3$

实例

- 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个？

解：$|S| = 1000$，　$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$

$|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$,　$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$

$|A\cap B| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5,6) \rfloor = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$

$|A\cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5,8) \rfloor = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$

$|B\cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$

$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5,6,8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$

$|{\sim}A\cap{\sim}B\cap{\sim}C| =$

$1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600$

有穷集合元素的计数：欧拉函数$\phi(n)$

- $\phi(n)$是$1\sim n$中与n互素的数的个数.

例$\phi(3)=2$, $\phi(6)=2$.

- 设n的素分解为$p_1^{r1}\ p_2^{r2}\ \ldots p_k^{rk}$，设$A_i$为$1\sim n$中$p_i$的倍数的集合, $i, j=1,\ldots,k$

$|A_i|=n/p_i$, $|A_i\cap A_j|=n/(p_ip_j)$,   ……

$$\phi(n) = |\sim A_1\cap\sim A_2\cap\ldots\sim\cap A_k|$$

$$= n - \sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i} + \sum_{i\neq j}\frac{n}{p_ip_j} - \cdots \pm \frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}$$

$$= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$