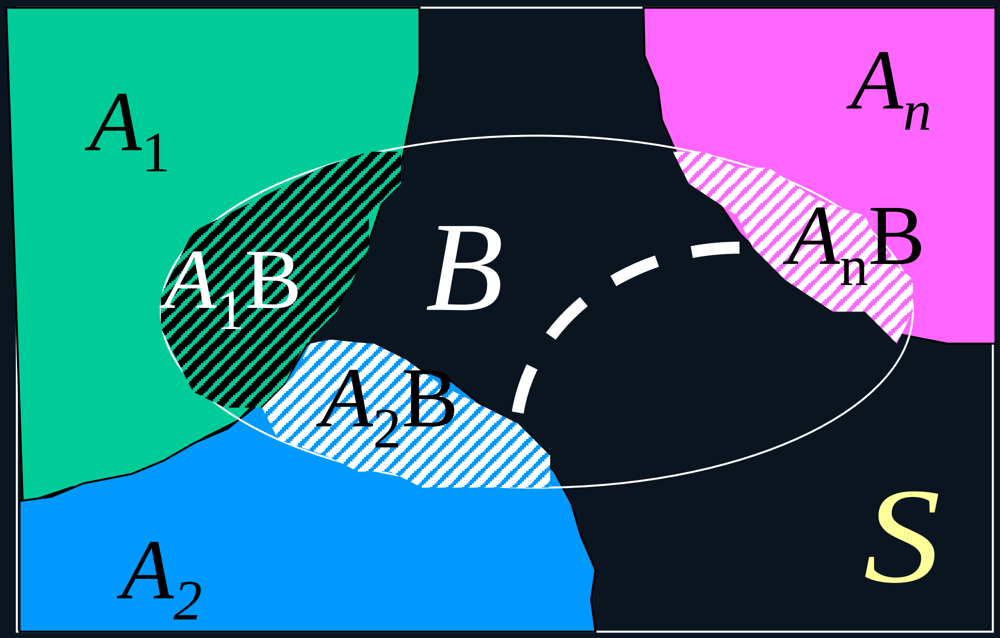
复杂事件的概率如何求？

引例 有三个箱子，分别编号为1,2,3，1号箱装有1个红球4个白球，2号箱装有2红3白球，3号箱装有3红球. 某人从三箱中任取一箱，**从中任意摸出一球，求取得红球的概率.**

已知原因求结果

全概率公式　　Bays公式

- 全概率公式
- **Bays**公式



首先构造完备事件组，将一个复杂事件分解为若干个互斥简单事件的并

若A_1，$A_2, \cdots A_n$满足

(1)A_1，$A_2, \cdots A_n$互不相容，$P(A_i) > 0, i = 1, \cdots n$

(2) $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

A_1，$A_2, \cdots A_n$称为完备事件组

$$B = BS = \bigcup_{i=1}^{n} BA_i$$

然后利用加法公式及乘法公式

$$B=\bigcup_{i=1}^{n} BA_i$$

又由

$$(A_iB)(A_jB)=\Phi, i\neq j, i, j=1,2\cdots n$$

知

$$P(B)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n} BA_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(BA_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

全概率公式

若事件组$A_1,\ldots A_n$,满足:

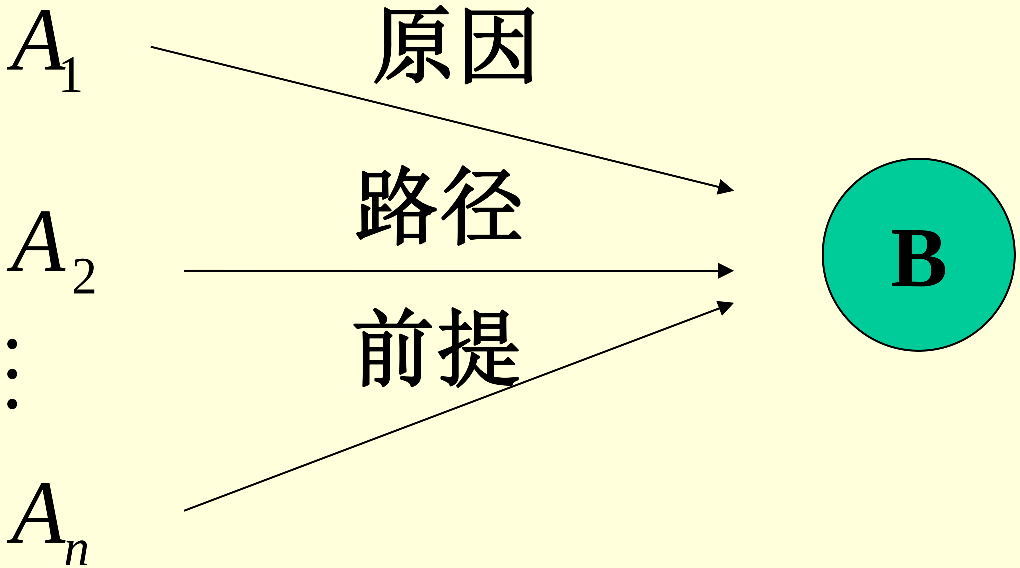
（1） $A_1,\ldots A_n$互不相容,$P(A_i)>0, i=1,\ldots,n$

（2） $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

则对任何事件B，均有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B\mid A_i)$$

称满足(1)、(2)的事件组为完备事件组。上式称为全概率公式



全概率公式应用条件：

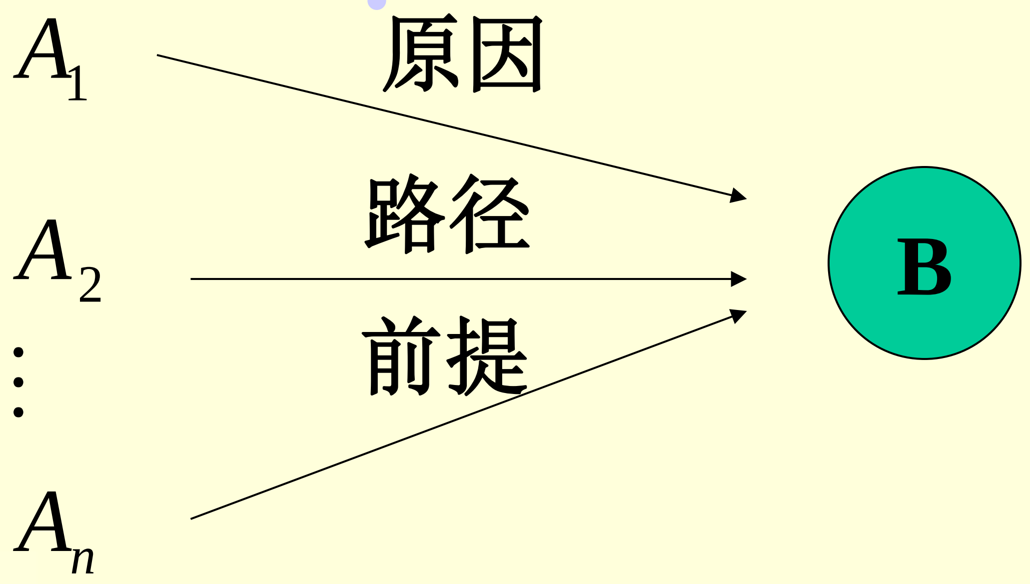
（1）问题是求一个复杂事件（如设为B）的概率P(B)；

（2）B 的发生可能有“多种原因(A_k)”或“多种条件”或“多种情况下发生”.

（3）由题中条件易求出 $P(A_k)$，$P(B|A_k)$.

关键

如何寻找完备事件组



用全概率公式求解问题步骤

（1） 判断问题是否满足应用全概率公式的条件

（2） 由题目找出 B 发生的各种“可能的原因(A_K)”或“可能的前提条件”，且检查 A_1，A_2，…，A_n 是否为完备事件组，

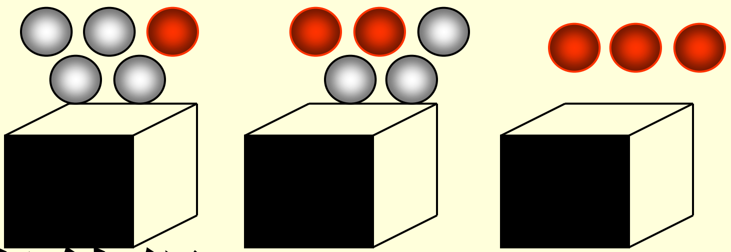
（3） $$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B\mid A_k)$$

续引例

解：记 A_i={球取自i号箱}，

$i=1,2,3$;

B ={取得红球}



则A_1、A_2、 A_3 构成完备事件组

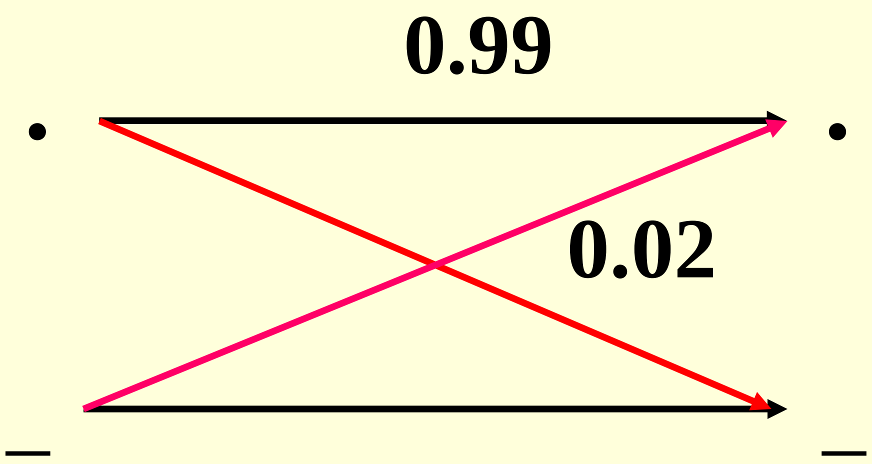
由全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+1\right)=8/15$$

例1 发报机发出“.”的概率是0.6,发出“_”的概率是0.4,将“.”收为“.”的概率是0.99,将“_”收为“.”的概率是0.02,

(1)求**发报机将任一信号收为**“.”的概率.



记 A_1={发报机发出信号“.”},

A_2={发报机发出信号“_”},

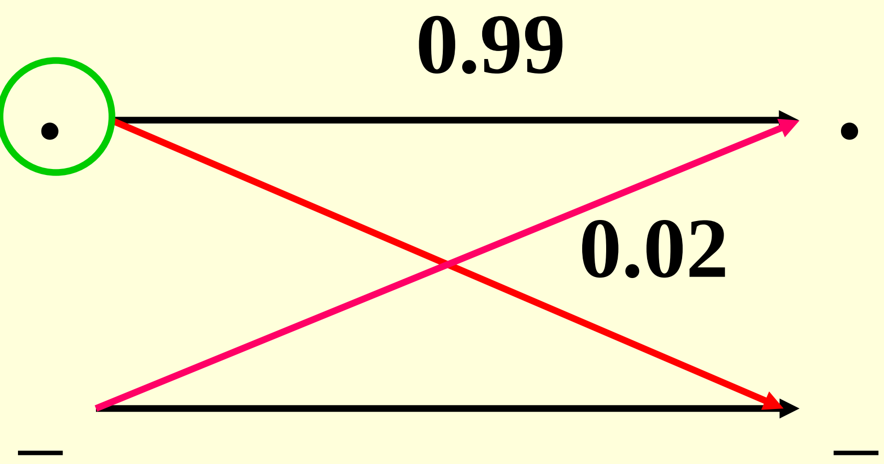
B ={发报机将一信号收“.”}

则A_1、A_2构成完备事件组

由全概率公式

$$P(B)=\sum_{k=1}^{2}P(A_k)P(B\mid A_k)$$

(2)求发报机将一信号收为 “.”时，发报机发出的信号是 “.”的概率



记 A_1={发报机发出信号“.”},

A_2={发报机发出信号“_”},

B ={发报机将一信号收“.”}

求$P(A_1|B)$

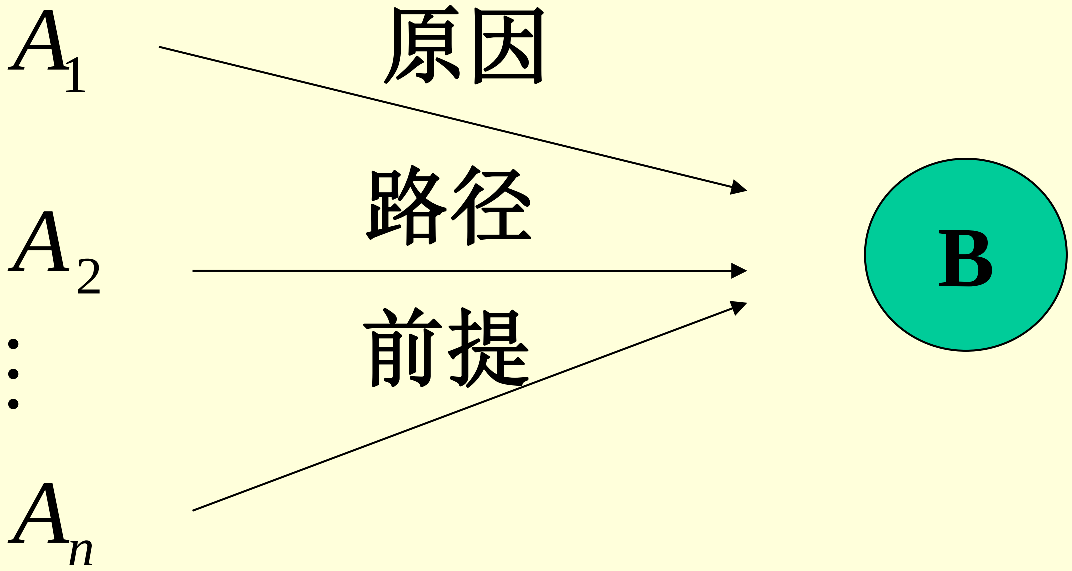
已知结果求原因

贝叶斯公式

若$A_1,\ldots A_n$是一完备事件组，则对任意的事件B ($P(B)>0$，$P(A_i)>0, i=1,\cdots n$), 均有

$$P(A_j \mid B)=\frac{P(A_j B)}{P(B)}=\frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)},$$

$$j=1,2,\cdots,n$$



Bays公式应用条件

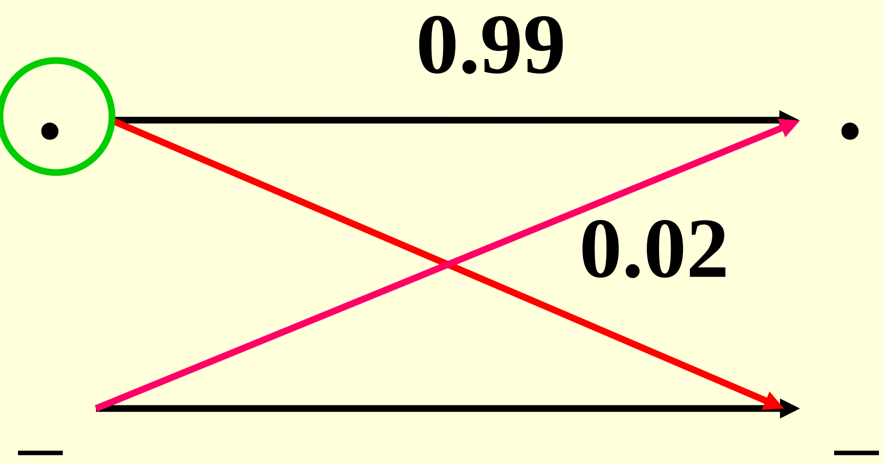
（1） 复杂事件 B 的发生可能有“多种原因(A_K)”.

（2）由题中条件易求出 $P(A_k)$，$P(B|A_k)$.

（3）问题是已知B发生的条件下，求某个原因A_k发生的概率$P(A_k|B)$.

贝叶斯公式在实际中有很多应用，它可以帮助人们确定某结果（事件 *B*）发生的最可能原因.

例1　(2)求发报机将一信号收为“.”时，
发报机发出的信号是“.”的概率



记 A_1={发报机发出信号“.”}，
A_2={发报机发出信号“_”}，
B ={发报机将一信号收“.”}

求$P(A_1|B)$

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{\sum_{k=1}^{2} P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

运用全概率公式计算$P(B)$

例2 **某厂产品96%是（真）合格品。有一验收方法，把（真）合格品判为“合格品”的概率为0.98，把非合格品判为“合格品”的概率为0.05。求此验收方法判为“合格品”的一产品为（真）合格品的概率**

解：设$A=\{$产品为合格品$\}$, $\overline{A}=\{$产品为不合格品$\}$

$B=\{$产品判为合格品$\}$ 求$P(A|B)$

由$Bays$公式

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$$

$$=\frac{0.96\cdot 0.98}{0.96\cdot 0.98+0.04\cdot 0.05}$$

例3 据调查某地区居民的肝癌发病率为0.0004，若记“该地区一居民患肝癌”为事件B_1,并记$B_2=\overline{B}_1$

有$P(B_1)=0.0004$, $P(B_2)=0.9996$。现用甲胎蛋白法检查肝癌，若呈阴性，表明不患肝癌；若呈阳性，表明患肝癌。由于技术和操作不完善等原因，是肝癌者未必检出阳性，不是肝癌者也有可能呈阳性反应。设事件A表示“一居民检验出阳性”，根据经验，已知肝癌患者检出阳性的概率为$P(A|B_1)=0.99$，非肝癌患者错检为阳性的概率为$P(A|B_2)=0.05$。现设某人已检出阳性，问他患肝癌的概率是多少？

$$P(B_1)=0.0004, P(B_2)=0.9996$$

$$P(A|B_1)=0.99, P(A|B_2)=0.05,$$

求$P(B_1|A)$

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1A)}{P(A)}=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)}$$

$$=\frac{0.99*0.0004}{0.99*0.0004+0.05*0.9996}$$

$$=0.00786$$

现在来分析一下结果的意义.

1. 这种试验对于诊断一个人是否患有癌症有无意义？

2. 检出阳性是否一定患有癌症?

先验信息+样本信息=后验信息

统计

贝叶斯公式

贝叶斯风险

贝叶斯决策

贝叶斯统计

贝叶斯估计

人工智能

朴素贝叶斯

贝叶斯网

贝叶斯神经网络

真的吗？

第一章作业4：

37, 43, 46, 47, 49, 53, 56