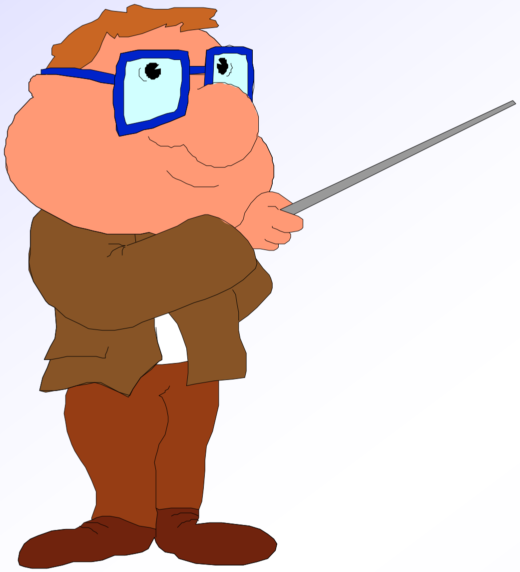
第八章　假设检验

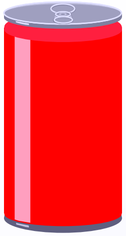
§ 1 假设检验

假设检验问题

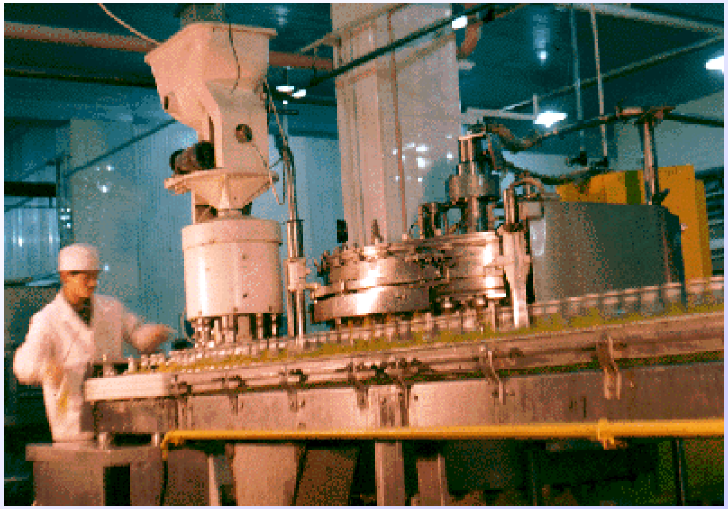


让我们先看一个例子.

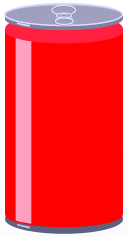
罐装可乐的容量按标准应为355毫升.



生产流水线上罐装可乐不断地封装，然后装箱外运. 怎么知道这批罐装可乐的容量是否合格呢？



通常的办法是进行抽样检查.



每隔一定时间，抽查若干罐．如每隔1小时，抽查5罐，得5个容量的值X_1，…，X_5，根据这些值来判断生产是否正常.

根据样本的信息检验关于总体的某个假设是否正确.

这类问题称作假设检验问题 .

假设检验 $\left\{ \begin{array}{l} \text{参数假设检验} \\ \text{非参数假设检验} \end{array} \right.$

总体分布已知，检验关于未知参数的某个假设

总体分布未知时的假设检验问题

假设：关于总体分布的某个命题。

检验：根据来自总体的样本，运用数理统计方法，给出一个判断上述 命题正确与否的准则。

假设检验步骤（三部曲）

- 根据实际问题所关心的内容,建立H_0与H_1

- 选择合适的统计量T, 确定拒绝域形式

  对给定显著性水平α, 求出其对应的拒绝域

- 根据样本值计算, 并作出相应的判断.

假设检验的基本思想和步骤

引例　罐装可乐的容量按标准应为355毫升. 一批可乐出厂前应进行抽样检查，现抽查了n罐，测得容量为$X_1,X_2,\ldots,X_n$，

我们可以认为$X_1,\ldots,X_n$是取自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中σ^2已知.

问这一批可乐的容量是否合格？

第一步：　提出原假设和备择假设

原假设：　需要检验的假设。

备择假设：原假设对立面的全体或一部分。

续引例

我们可以认为$X_1,\ldots,X_n$是取自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中σ^2已知.

现在要检验的假设是：

H_0：$\mu = \mu_0$（$\mu_0 = 355$）

它的对立假设是：

H_1：$\mu \neq \mu_0$

第二步：

取一**检验统计量**.

在H_0成立下, 求出检验统计量的分布,

能衡量差异，常常
由参数估计构造

续引例

$X_1,\ldots,X_n$是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中σ^2已知

H_0: $\mu = \mu_0$（$\mu_0 = 355$）　H_1: $\mu \neq \mu_0$

为计算方便

取$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$为检验统计量

当H_0成立时，$X_1,\ldots,X_n \sim N(\mu_0, \sigma^2)$，因此

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

第三步：

确定拒绝域的形状.

拒绝域：检验统计量取某个区域C中的值时，拒绝H_0，C称为拒绝域

续引例

当 $|U| > c$ 时

拒绝原假设，否则接受原假设.

拒绝域

$$W = \{(x_1, \cdots, x_n) : |u| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| > c\}$$

第四步:对给定的 α ，确定临界值,

求出拒绝域.

使当H_0为真时,

P(拒绝H_0) $=P\{(X_1,X_2,\cdots X_n)\in W\}\le\alpha$

临界点：拒绝域的边界点

α 为显著性水平

常取 $\alpha=0.1,\alpha=0.01,\alpha=0.05.$

续引例

对于一个事先给定的显著性水平 α ，即确定常数c,使得在H_0下

$$P\left(|U|=\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>c\right)=\alpha$$

H_0成立，

$U\sim N(0,1)$

$$c=z_{\alpha/2}$$

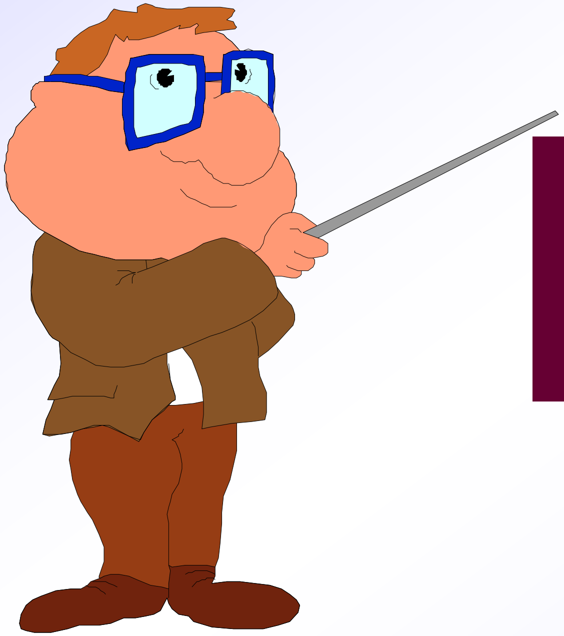
取拒绝域为：

$$W=\left\{(x_1,\cdots,x_n):|u|=\frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}>z_{\alpha/2}\right\}$$

第五步

如果由样本值算得该统计量的实测值落入区域W，则拒绝H_0；否则，不能拒绝H_0.

这里用到人们在实践中普遍采用的一个原则：



小概率事件在一次试验中基本上不会发生 .

两类错误

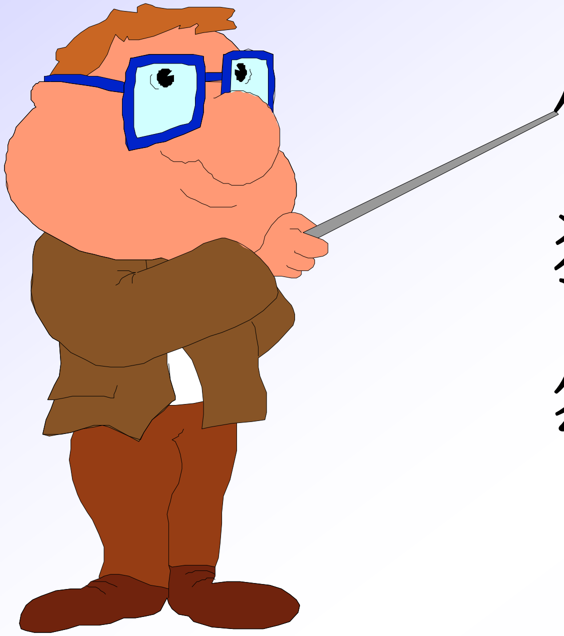
	实际情况	
	H_0为真	H_0不真
拒绝H_0	第一类错误	正确
接受H_0	正确	第二类错误

$$P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\} \le \alpha$$

显著性水平α为犯第一类错误的最大概率.

注1

当样本容量确定后, 犯两类错误的概率不可能同时减少.



假设检验的指导思想是控制犯第一类错误的概率不超过 α, 然后，减少第二类错误的发生 .

　　但具体实行这一原则还会有许多理论和实际上的困难，因而有时把这一原则简化成只对犯第一类错误的概率加以控制，而不考虑犯第二类错误的概率，称这种检验为显著性检验。

——控制第一类错误的原则

假设检验的显著性水平α实际上就是犯**第一类错误**的最大概率。

注2 关于零假设与备择假设的选取

一般 情况下, 原假设H_0应当处于受保护的地位.

案例：FDA药品认证

例 设总体X服从正态分布 $N(\mu,1)$ ，其中

$\mu \in R$未知 $X_1, X_2, \cdots, X_9$

为来自总体X的样本；考虑假设检验问题

$H_0: \mu = 0$; $H_1: \mu = 1$，若检验的拒绝域由

$$D = \{(X_1, \cdots, X_9): 3\left|\bar{X}\right| \geq 1.96\}$$

确定，则该检验犯第一类错误的概率为_____，犯第二类错误的概率为_______.

$$\mu = 0, X_1, \cdots, X_9 \quad i.i.d. \sim N(0,1)$$

$$\bar{X} \sim N(0,1/9), \quad 3\bar{X} \sim N(0,1)$$

犯第一类错误的概率为

$$\begin{aligned}
&P(3|\bar{X}| \geq 1.96 \mid \mu = 0) \\
&= P(3\bar{X} \geq 1.96 \mid \mu = 0) + P(3\bar{X} \leq -1.96 \mid \mu = 0) \\
&= 2P(3\bar{X} \geq 1.96 \mid \mu = 0) \\
&= 2(1 - \Phi(1.96)) = 0.05
\end{aligned}$$

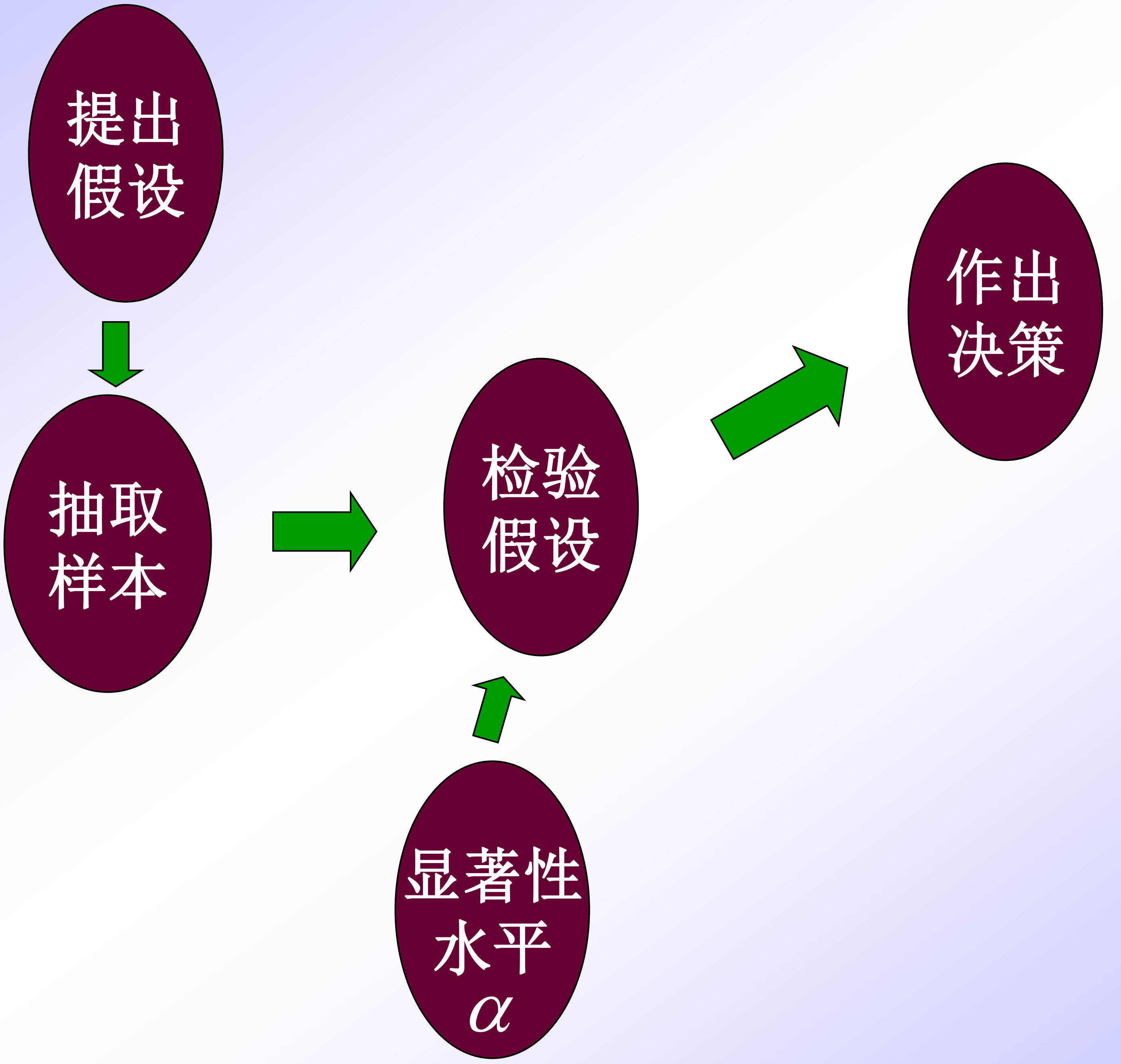
$$\mu = 1, X_1, \cdots, X_9 \quad i.i.d. \sim N(1,1)$$

$$\bar{X} \sim N(1, 1/9), \quad 3(\bar{X} - 1) \sim N(0,1)$$

犯第二类错误的概率为

$$P(3|\bar{X}| < 1.96 \mid \mu = 1)$$
$$= P(-1.96 < 3\bar{X} < 1.96 \mid \mu = 1)$$
$$= P(-4.96 < 3\bar{X} - 3 < -1.04 \mid \mu = 1)$$
$$= \Phi(-1.04) - \Phi(-4.96)$$
$$= \Phi(4.96) - \Phi(1.04) = 0.1492$$

总结



一般说来，按照检验所用的统计量的分布，分为

U 检验	用正态分布
t 检验	用 t 分布
χ^2 检验	用 χ^2 分布
F 检验	用 F分布

作业1：6，7