引例

从同一型号同一批次的反坦克弹中任抽一发反坦克弹射击目标，观测命中情况。设A代表"命中"这一事件，求$P(A)$?

频率的定义

在相同条件下，进行了**n**次试验，

在这**n**次试验中，事件**A**发生的次数 n_A 称为事件**A**发生的**频数**.

比值 n_A/n 称为事件**A**发生的**频率**，
记为 $f_n(A)$

频率的性质

- $0 \le f_n(A) \le 1$ —————— 非负性
- $f_n(S) = 1$ —————— 规范性
- 事件 A, B 互斥，则

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$ —————— 可加性

可推广到有限个两两互斥事件的和事件

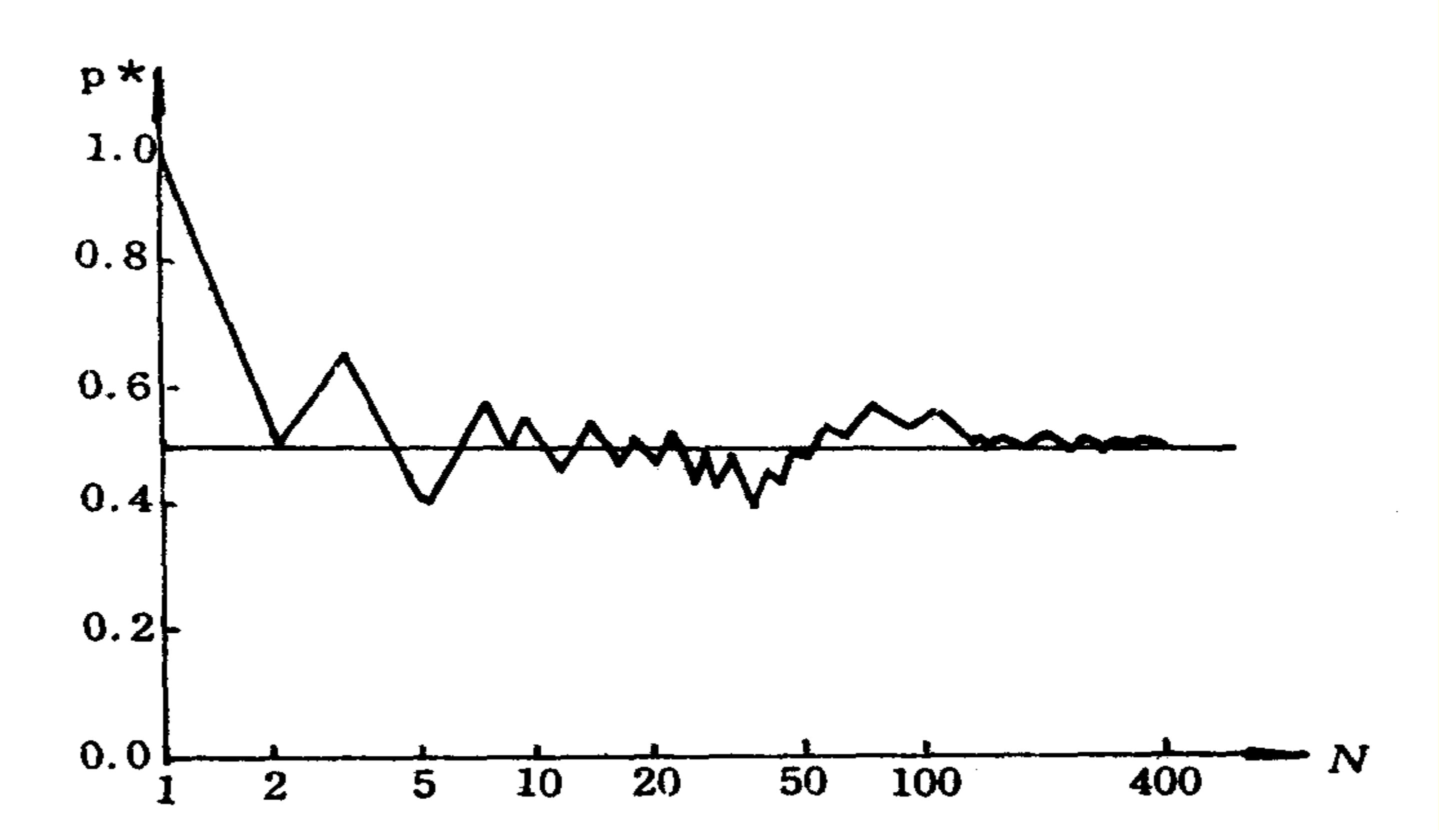
下面我们从几个试验入手，揭示随机事件一个极其重要的特征：

频率稳定性

例1 **<u>掷硬币试验</u>**

掷一枚均匀硬币，记录前400次掷硬币试 验 中 频 率 P* 的 波 动 情 况 。

掷一枚硬币，正面出现频率的趋势（横轴为对数尺度）



例2

Dewey G. 统计了约438023个英语单词中各字母出现的频率, 发现各字母出现的频率不同:

A: 0.0788	B: 0.0156	C: 0.0268	D: 0.0389
E: 0.1268	F: 0.0256	G: 0.0187	H: 0.0573
I: 0.0707	J: 0.0010	K: 0.0060	L: 0.0394
M: 0.0244	N: 0.0706	O: 0.0776	P: 0.0186
Q: 0.0009	R: 0.0594	S: 0.0634	T: 0.0987
U: 0.0280	V: 0.0102	W: 0.0214	X: 0.0016
Y: 0.0202	Z: 0.0006		

频率稳定性

在充分多次试验中，事件的频率总在一个定值附近摆动，而且，试验次数越多，一般来说摆动越小．这个性质叫做频率的稳定性.

概率的频率定义

在一组不变的条件下，重复作n次试验，记m是n次试验中事件A发生的次数。

当试验次数n很大时，如果**频率m/n稳定地在某数值*p*附近摆动**，而且一般地说，随着试验次数的增加，这种摆动的幅度越来越小，

称数值*p*为事件A在这一组不变的条件

下发生的概率，记作**P(A)=*p***.

对概率的频率定义评价

缺点

- 不可能对每一个事件都做大量试验，以求得频率
- 无法给出确切的概率值

意义

- 提供了估计事件发生可能性大小的方法;
- 提 供 了 一 种 检 验 理 论 正 确 与 否 的准则.

频率的性质

- $0 \le f_n(A) \le 1$ ———— 非负性
- $f_n(S) = 1$ ———— 规范性
- 事件 A, B互斥，则

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$ ———— 可加性

可推广到有限个两两互斥事件的和事件

由频率稳定性和频率性质得到启发

概率的公理化定义

设试验E的**样本空间**为Ω，**事件域**为$\mathfrak{I}$，P为定义在事件域$\mathfrak{I}$上的**一维实函数**

$$\mathbf{P}: \ \mathfrak{I} \to \mathbf{R}^1$$

$$\mathbf{A} \to \mathbf{P(A)}$$

该一维实函数满足下面条件

非负性：对任一事件A，有$P(A) \geq 0$；

规范性：对必然事件Ω，有$P(\Omega)=1$；

可列可加性：若事件$A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$互不相容，则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

那么称P(A)为事件A的概率,

称$(\Omega, \mathfrak{I}, P)$为一概率空间

概率的公理化理论由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(А.Н.Колмогоров)1933年建立.

思考

概率的公理化定义是否给出了概率的计算方法?

- 数学严谨性
- 确保了概率计算的一致性和可扩展性

概率的性质

（1） $P(\phi)=0$

（2） 有限可加性:

若A_1，A_2，…，A_n互不相容，

则

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$$

证明

1. $P(\phi)=0$

证明： 令 $A_n=\phi\ (n=1, 2, \ldots)$ 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\phi$

$$A_iA_j=\phi\cap\phi=\phi, i\neq j, i, j=1,2,\ldots$$

由可列可加性知： $P(\phi)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(\phi)$

$$\therefore P(\phi)=0$$

证明

2. 有限可加性　若$A_1, A_2, \ldots, A_n$互不相容，则　$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

证明： 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \phi$

则有　$A_i A_j = \phi, i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots$

由可列可加性知：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

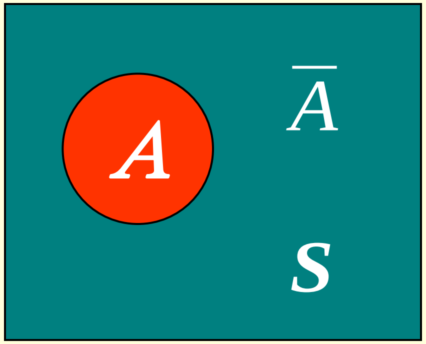
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 0 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

（3）逆事件的概率

对事件A，有

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

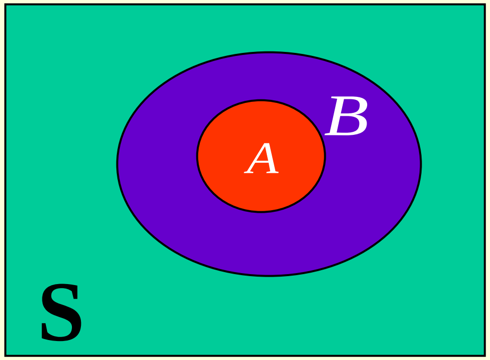


(4) 若$A \subset B$, 则有

$$P(B-A) = P(B)-P(A)$$

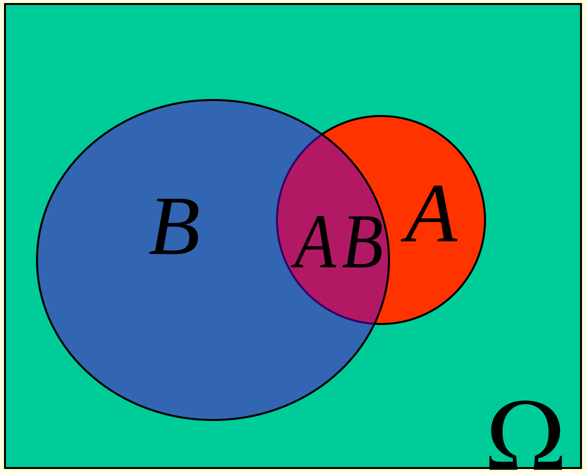
$$P(A) \le P(B)$$

特别地，对任何事件A，都有$P(A) \le 1$;



(5) (**加法公式**)对任何两个事件A, B，都有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - AB)) = P(A) + P(B - AB)$$

$$A \cap (B - AB) = \phi$$

又因 $AB \subset B$

再由性质 3便得

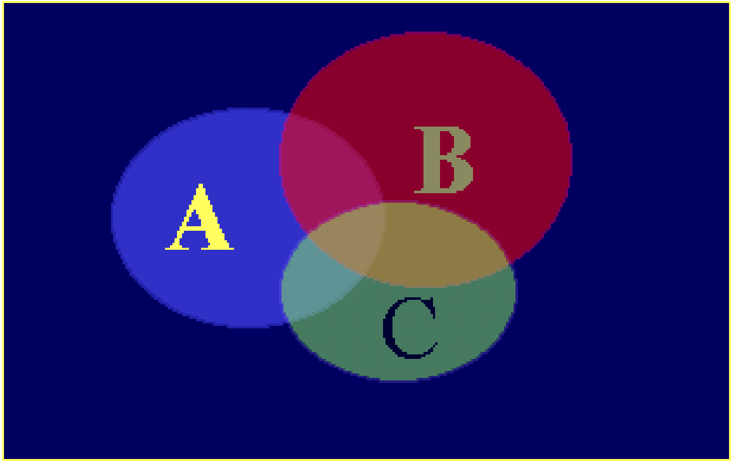
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

推广到多个事件

三个事件和的概率为

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)$$

$$-P(AC)+P(ABC)$$



(6) 对任何n个事件A_1，A_2，…，A_n, 都有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)-\sum_{1\le k_1<k_2\le n} P(A_{k_1}A_{k_2})+\cdots+$$

$$+(-1)^{m-1}\sum_{1\le k_1\le\cdots\le k_m\le n} P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_m})+$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

例1

设P(A)=1/3, P(B)=1/2

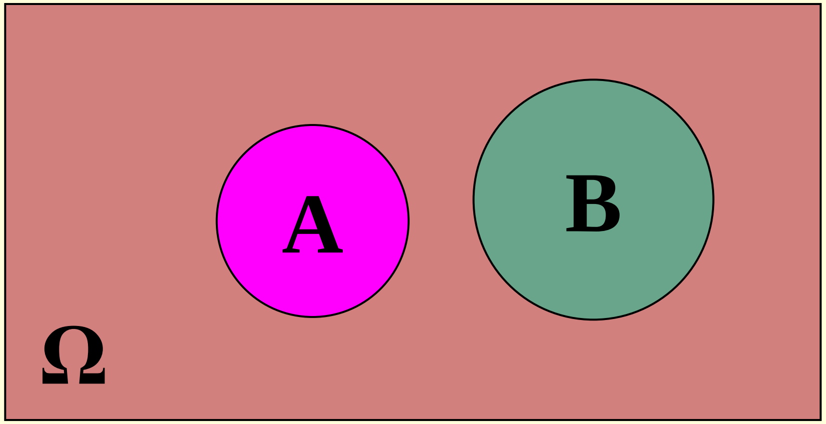
(1) 若事件A与B互不相容，求 $P(B\overline{A})$

（2）若A$\subset$B,求 $P(B\overline{A})$

（3）若$P(AB)$=1/8，求 $P(B\overline{A})$

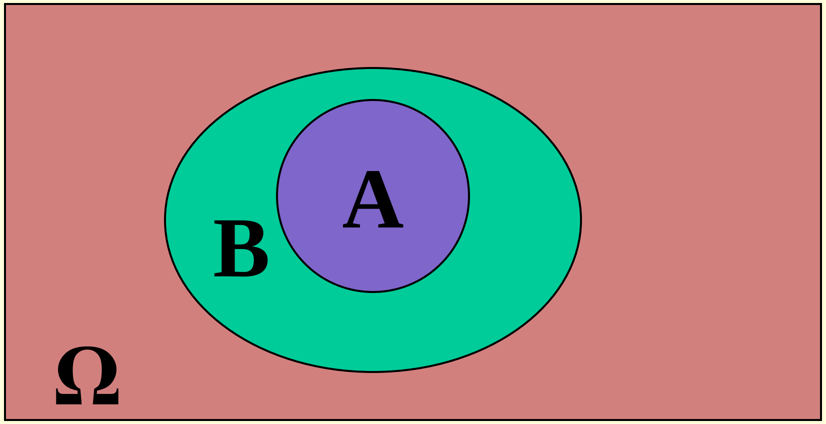
设P(A)=1/3, P(B)=1/2

(1) 若事件A与B互不相容，求 $P(B\overline{A})$



$$B\overline{A} = B$$

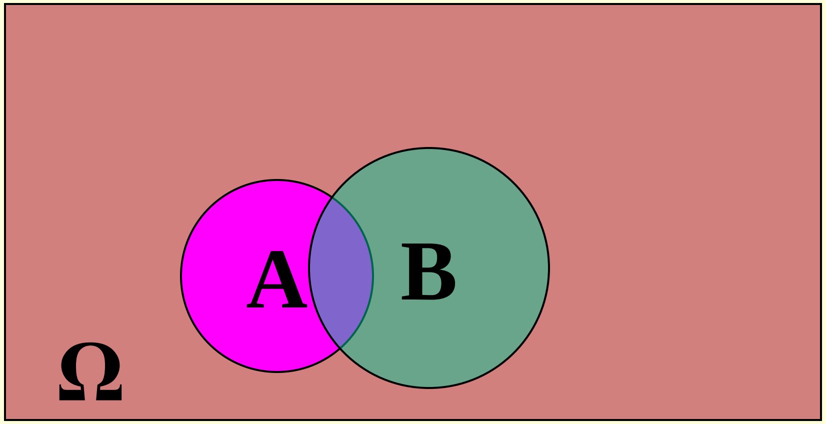
（2）若A⊂B,求 $P(B\overline{A})$



$$B\overline{A} = B - A$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

（3）若$P(AB)$=1/8，求 $P(B\overline{A})$



$$B\overline{A} = B - AB$$

$$P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB)$$

例2 设元件盒中装有50个电阻，20个电感，30个电容，从盒中任取30个元件，求所取元件中**至少有一个电阻同时至少有一个电感**的概率.

解：设A={所取元件中至少有一电阻}

B={所取元件中至少有一电感}

所求概率为$P(AB)$

$$\because P(AB) = 1 - P(\overline{AB})$$

$$= 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})$$

$$= 1 - [P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}\,\overline{B})]$$

$$P(AB) = 1 - [P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}\,\overline{B})]$$

$$= 1 - \frac{\binom{50}{30} + \binom{80}{30} - 1}{\binom{100}{30}}$$

例3 甲、乙两人先后从52张牌中各抽取13张，求甲或乙拿到4张A的概率.

1） 甲抽后不放回，乙再抽；

2） 甲抽后将牌放回，乙再抽.

解：设A={甲拿到4张A}， B={乙拿到4张A}

所求为$P(A\cup B)$

1) A、B互斥

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

计算$P(A)$和$P(B)$时用古典概型

$$=\frac{C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}+\frac{C_{48}^{13}C_{35}^{9}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}}$$

解：设A={甲拿到4张A}， B={乙拿到4张A}

所求为$P(A\cup B)$

2) A、B相容

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=\frac{2C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}-\frac{C_{48}^{9}C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}C_{52}^{13}}$$

休息片刻继续

例4

配对问题

某人将三封写好的信随机装入三个写好地址的信封中，问没有一封信装对地址的概率是多少？

设A={没有一封信装对地址}

则 $\overline{A}$={至少有一封信装对地址}

设A_i={第i封信装入第i个信封}，$i=1,2,3$

$$\overline{A}=A_1\cup A_2\cup A_3$$

$$\overline{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

应用加法公式

$$P(\overline{A}) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_2) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_3) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)$$

$$- \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3)$$

其中 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_2) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_3) = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

代入计算 $\boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}})$ 的公式中

$$P(\overline{A}) = P(A_1 + A_2 + A_3)$$

$$= 3 \cdot \frac{2!}{3!} - 3 \cdot \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3}$$

于是

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}$$

推广到n封信,用类似的方法可得:
把n 封信随机地装入n个写好地址的信封中, 没有一封信配对的概率为:

$$1-\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right)$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{n!}$$

实际中的各种配对问题

学生和学习证配对;

人和自己的帽子配对;

两副扑克牌配对;

球箱号码配对…

你还可以举出其它配对问题，并提出其中要回答的概率问题，留作课下练习.