

一定条件 随机试验 $P(A)$

事件B已经发生

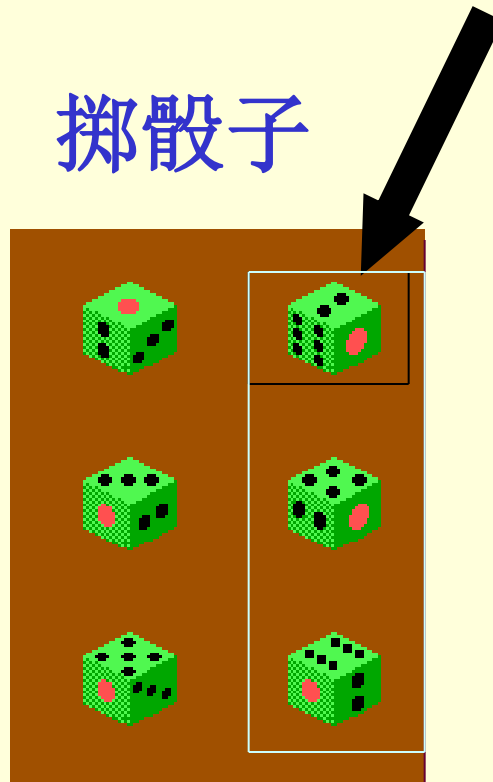
条件概率 $P(A|B)$



引例，掷一颗均匀骰子， $A=\{\text{掷出2点}\}$ ，

$B=\{\text{掷出偶数点}\}$ ， $P(A)=1/6$ ， $P(A|B)=?$

掷骰子



§ 1.3 条件概率和乘法定理



条件概率 (定义 性质 计算)



乘法定理

古典概型中的条件概率的计算

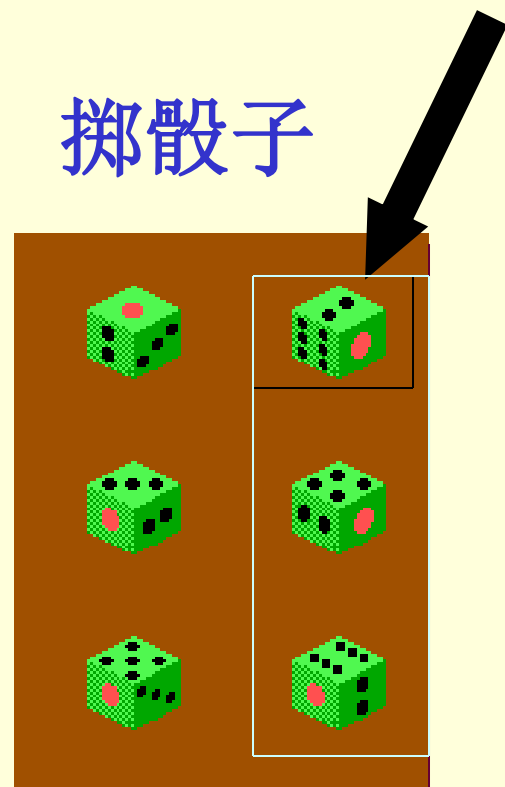
例如，掷一颗均匀骰子， $A=\{\text{掷出2点}\}$ ，

$B=\{\text{掷出偶数点}\}$ ， $P(A)=1/6$ ， $P(A|B)=?$

样本空间 $S_B = \{2, 4, 6\}$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{k_{A|B}}{n_{S|B}} = \frac{1}{3} \\ &= \frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{k_{AB} / n_S}{k_B / n_S} \\ &= \frac{P(AB)}{P(B)} \end{aligned}$$

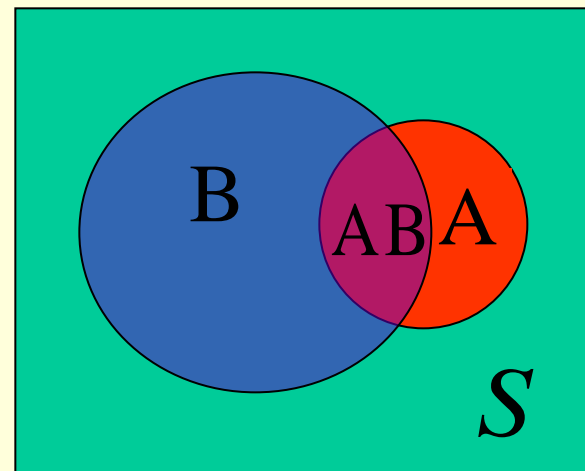
掷骰子



对于一般的古典概型问题

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

仍然成立



条件概率的定义

设 A 、 B 是两个事件，且 $P(B)>0$ ，则称

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率。

同样若 $P(A)>0$ ，则

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$



条件概率的性质

设 B 是一事件，且 $P(B)>0$ ，则

(1) 对任一事件 A ， $P(A|B) \geq 0$;

(2) $P(S|B) = 1$;


(3) 设 A_1, A_2, \dots 互不相容，则


$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B)$$

注意

条件概率也是概率!




$$P(B_1 \cup B_2 \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A) - P(B_1 B_2 \mid A)$$


$$P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A)$$



条件概率的计算

(1) 用定义计算:

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

(2) 在缩减的样本空间上计算



例1

一盒子装有5只产品，其中3只一等品，2只二等品。从中取产品2次，每次任取一件，做不放回抽样。设事件 A 为“第一次取到的是一等品”，事件 B 为“第二次取到的是一等品”，试求 $P(B|A)$ 。

应用定义

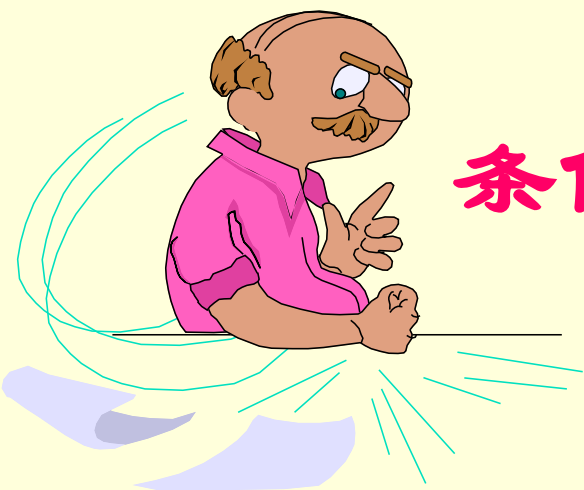
解法1:

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P_3^2 / P_5^2}{3/5} = \frac{1}{2}$$

解法2:

$$P(B | A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

在A发生后的
缩减样本空间
中计算

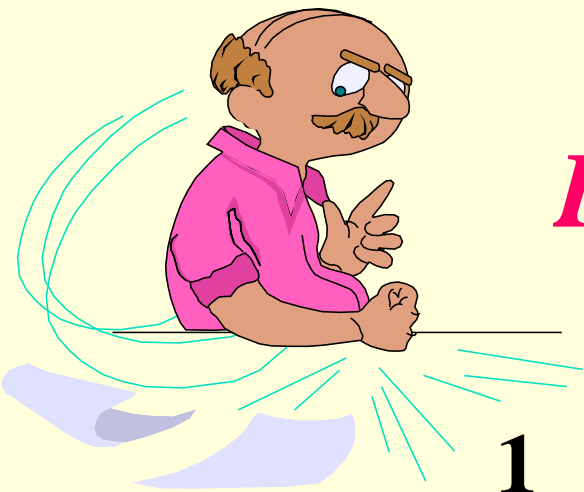


条件概率 $P(A|B)$ 与 $P(A)$ 的区别

$P(A)$ 与 $P(A|B)$ 的区别在于两者
发生的条件不同,它们是两个
不同的概念,在数值上一般也不同.

一般 $P(A|B) \neq P(A)$





$P(A|B)$ 与 $P(AB)$ 的区别

1 发生条件不同

B 发生,
在 $P(AB)$ 中作为结果;
在 $P(A|B)$ 中作为条件

2 数值不同



例如 甲、乙两厂共同生产1000个零件，其中300件是乙厂生产的. 而在这300个零件中，有189个是标准件，现从这1000个零件中任取一个，问

(1)这个零件是乙厂生产的标准件的概率是多少？

(2)发现它是乙厂生产的,问它是标准件的概率是多少？”

设 $B=\{\text{零件是乙厂生产}\}$ 300个
乙厂生产

$A=\{\text{是标准件}\}$

(1)所求为 $P(AB)$.

(2) $P(A|B)$.



乘法公式

定义 设有两个事件 A , B , 如果 $P(B)>0$,
由条件概率公式得

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \quad (1)$$

如果 $P(A)>0$, 由条件概率公式得

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \quad (2)$$

公式（1）和（2）均称为概率的乘法公式
或称为概率的乘法定理



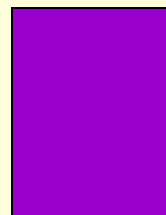
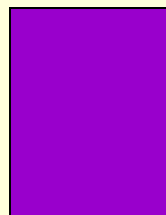
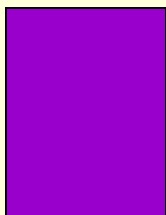
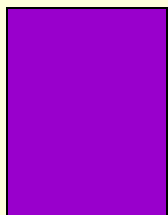
推广

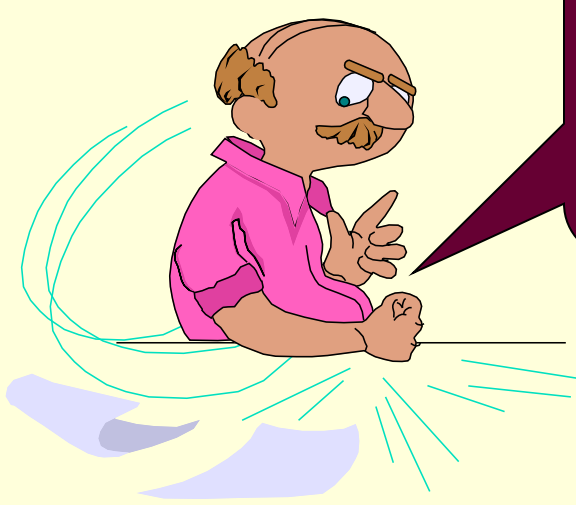
$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \\ (P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0)$$



例3

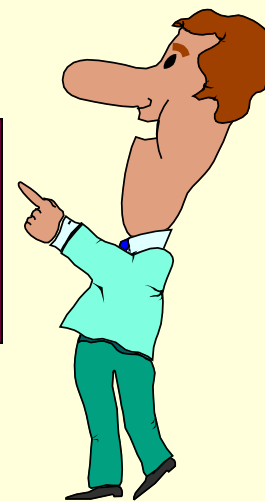
一场精彩的足球赛将要举行，5个球迷好不容易才搞到一张入场券.大家都想去,只好用抽签的方法来解决.





“大家不必争先恐后，你们一个一个按次序来，谁抽到‘入场券’的机会都一样大。”

“先抽的人当然要比后抽的人抽到的机会大。”



我们用 A_i 表示“第 i 个人抽到入场券”
 $i=1,2,3,4,5.$

显然, $P(A_1)=1/5$, $P(\bar{A}_1)=4/5$

由于 $A_2 = \bar{A}_1 A_2$

由乘法公式

$$P(A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1)$$

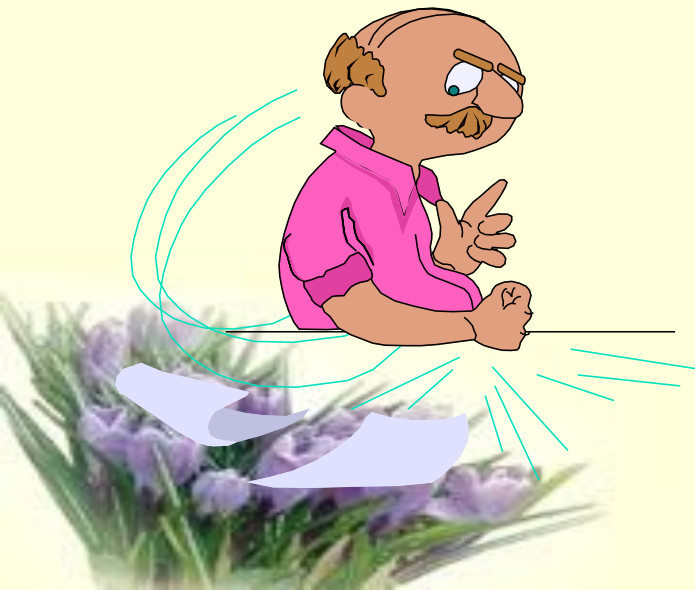
计算得:

$$P(A_2) = (4/5)(1/4) = 1/5$$



$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) \\ &= (4/5)(3/4)(1/3) = 1/5 \end{aligned}$$

继续做下去就会发现，每个人抽到“入场券”的概率都是1/5.



直觉不一定可靠呦

抽签问题更为一般的模型是

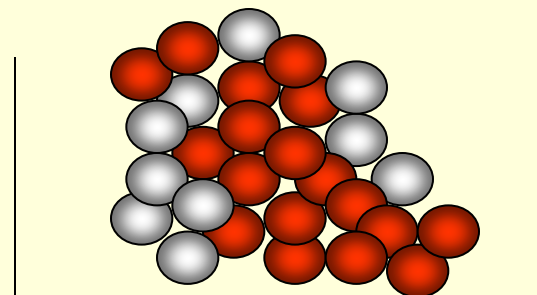
袋中有 a 只黑球， b 只白球，现把球随机一只只摸出来，求第 k 次摸到的一只球是黑球的概率
($1 \leq k \leq a + b$)

$$p = \frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}$$

抽签与次序无关!



例4 波里亚罐子模型

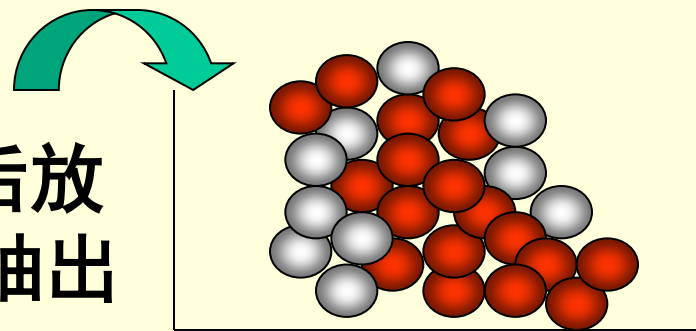


b 个白球, r 个红球

一个罐子中包含 b 个白球和 r 个红球.
随机地抽取一个球, 观看颜色后放回罐中,
并且再加进 c 个与所抽出的球具有相同颜色
的球。这种手续进行四次, 试求第一、
二次取到白球且第三、四次取到红球的概
率.



随机取一个球，观看颜色后放回罐中，并且再加进 c 个与所抽出的球具有相同颜色的球.

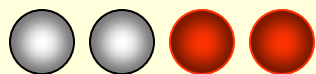


b 个白球, r 个红球

解：设 $W_i = \{\text{第} i \text{次取出是白球}\}$, $i = 1, 2, 3, 4$

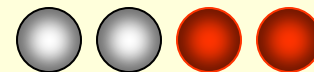
$R_j = \{\text{第} j \text{次取出是红球}\}$, $j = 1, 2, 3, 4$

于是 $W_1 W_2 R_3 R_4$ 表示事件 “连续取四个球，第一、第二个是白球，第三、四个是红球.”



用乘法公式容易求出

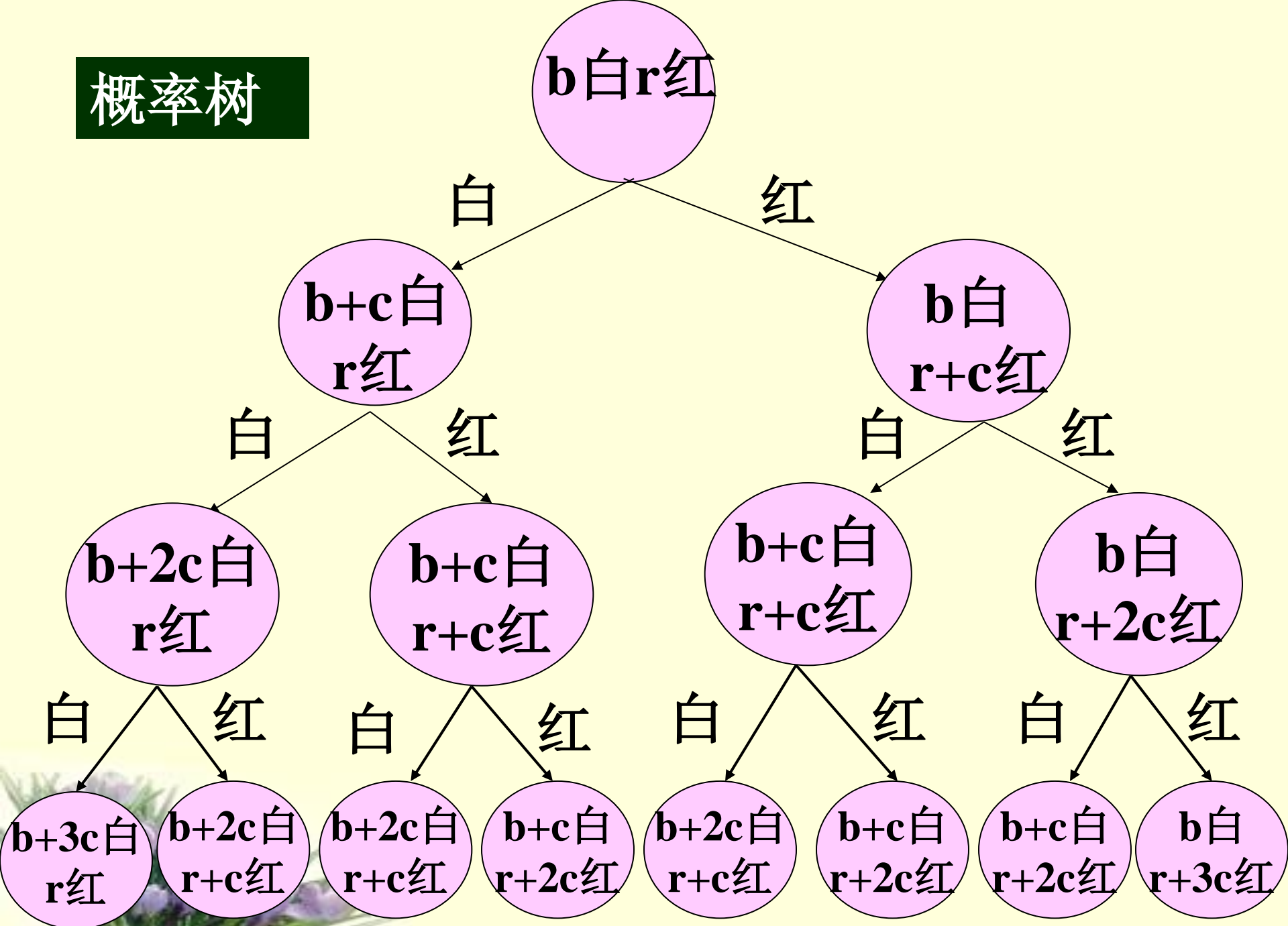
$$\begin{aligned} & P(W_1 W_2 R_3 R_4) \\ &= P(W_1) P(W_2 | W_1) P(R_3 | W_1 W_2) P(R_4 | W_1 W_2 R_3) \\ &= \frac{b}{b+r} \frac{b+c}{b+r+c} \frac{r}{b+r+2c} \frac{r+c}{b+r+3c} \end{aligned}$$



当 $c > 0$ 时，由于每次取出球后会增加下一次也取到同色球的概率。这是一个**传染病模型**。每次发现一个传染病患者，都会增加再传染的概率。



概率树



第一章作业3：

17, 23, 25, 26, 29, 30

