前面我们介绍了随机变量的数学期望和方差，对于多维随机变量，反映分量之间关系的数字特征中，最重要的，就是本讲要讨论的

**协方差和相关系数**

若$Var(X)$, $Var\ Y$ 存在，则

$$Var(X\pm Y)= Var(X)+ Var(Y) \pm 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

若随机变量$X, Y$相互独立，它们的方差都存在，则$X\pm Y$的方差也存在，且

$$Var(X\pm Y)= Var(X)+ Var(Y)$$

# §3　协方差、相关系数

# 协方差

设二维随机变量$(X,Y)$,它的分量的数学期望为$E(X)$, $E(Y)$, 若$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$存在，则称它为$X,Y$的协方差，记为

$Cov\,(X,Y)$, 即

$$Cov(X, Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

# 计算

(1) 若二维**离散型**随机变量($X$, $Y$)的联合分布律为

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i, j = 1,2,\ldots$$

且$Cov(X,Y)$存在，则

$$Cov(X,Y) = \sum_{i,j} (x_i - E(X))(y_j - E(Y)) p_{ij}$$

若二维连续型随机变量$(X,Y)$的联合概率密度为 $f(x, y)$, 且$Cov(X, Y)$存在，则

$$Cov(X,Y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - E(X))(y - E(Y))f(x,y)dxdy$$

**(2)** $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E\{XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)\}$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)-E(Y)E(X)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

即

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

可见，若$X$与$Y$独立， $Cov(X,Y)=0$ .

**例1** 已知 $X, Y$ 的联合分布为

| $Y \backslash X$ ($p_{ij}$) | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | $p$ | 0 |
| 0 | 0 | $q$ |

$0 < p < 1$

$p + q = 1$

求 $\operatorname{cov}(X, Y)$

**解**

| $X$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $P$ | $p$ | $q$ |

| $Y$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $P$ | $p$ | $q$ |

| $XY$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $P$ | $p$ | $q$ |

**例2**　设$(X,Y)$的联合分布律为

$$P(X=n,Y=m)=\frac{\lambda^{n}p^{m}(1-p)^{n-m}}{m!\ (n\text{-}m)!}e^{-\lambda}$$

其中

$$\lambda>0,0<p<1,n=0,1,2\cdots,m=0,1,2,\cdots,n$$

求 $Cov(X,Y)$.

$$P(X=n,Y=m)=\frac{\lambda^{n}}{n!}e^{-\lambda}\cdot\binom{n}{m}p^{m}(1-p)^{n-m}$$

$$E(g(X,Y)) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

解： $$P(X = n, Y = m) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

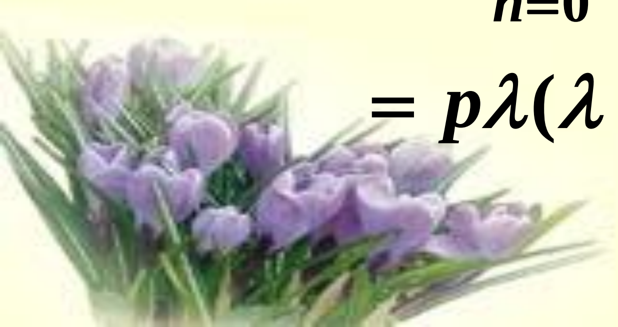
$$E(XY) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} mn \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \underline{\sum_{m=0}^{n} m \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}}$$

$$= p \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

二项分布
B(n, p)期望

$$= p\lambda(\lambda + 1)$$



$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij}$$

$$E(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}n\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\underline{\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}}=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\lambda$$

$$E(Y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}m\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\underline{\sum_{m=0}^{n}m\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}}=p\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=p\lambda$$

$$E(XY)=p\lambda(\lambda+1),\quad Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$=p\lambda(\lambda+1)-p\lambda^2=p\lambda$$

## 简单性质

(1) $Cov(X, a) = 0$

(2) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

(3) $Cov(X, X) = Var(X)$

(4) $Cov(aX, bY) = ab\,Cov(X, Y)$ $a,b$是常数

(5) $Cov(X_1+X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$

## （6） 随机变量和的方差与协方差的关系

$$Var(X+Y)= Var(X)+ Var(Y)+ 2Cov(X,Y)$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i<j}\sum Cov(X_i,X_j)$$

若$X_1$, $X_2$, …, $X_n$两两独立,，上式化为

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)$$

**性质7.** 设随机变量$X$和$Y$的期望和方差都存在，且$DX>0$，$DY>0$，则

$$[Cov(X,Y)]^2 \le D(X)D(Y)$$

其中等号成立当且仅当$X$与$Y$有严格的线性关系（即存在常数$a$和$b$，使得$P\{Y=aX+b\}=1$成立）

证明：对任意的实数$t$，有

$$D(tX+Y)=t^2D(X)+D(Y)+2tCov(X,Y)$$

令 $g(t)=t^2D(X)+2Cov(X,Y)t+D(Y)$ 为关于$t$的二次三项式。

由方差的性质知$g(t)\ge 0$，故判别式小于或等于零，即有

$$\Delta=[2Cov(X,Y)]^2-4D(X)D(Y)\le 0$$

$$\therefore [Cov(X,Y)]^2 \le D(X)D(Y)$$

若 $[Cov(X,Y)]^2 = D(X)D(Y)$

此时 $t^2 D(X) + 2Cov(X,Y)t + D(Y) = 0$

有唯一的根，记为$t_0$，即 $g(t_0)=0$

所以有 $D(t_0 X + Y) = 0$

所以有 $P\{t_0 X + Y = E(t_0 X + Y)\} = 1$ 即 $P\{Y = -t_0 X + E(t_0 X + Y)\} = 1$

取 $a = -t_0, b = E(t_0 X + Y)$ 有 $P\{Y = aX + b\} = 1$ 成立。

$$g(t)=D(tX+Y)=t^2D(X)+D(Y)+2tCov(X,Y)$$

反之，若存在常数$a$和$b$，使得$P\{Y=aX+b\}=1$ 成立

则有 $P\{-aX+Y=b\}=1$

由方差的性质知 $D(-aX+Y)=0$ 即 $g(-a)=0$

所以有 $\Delta=[2Cov(X,Y)]^2-4D(X)D(Y)=0$

即 $[Cov(X,Y)]^2=D(X)D(Y)$

**例3** 设$(X,Y)$的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2\sigma^2}}$$

求$Cov(X+Y, X-Y)$

**解：** 由已知条件有

$X\sim N(0,\sigma^2)$, $Y\sim N(0,\sigma^2)$ 且$(X,Y)$相互独立

$Cov(X+Y, X-Y)= Cov(X,X)- Cov(X,Y) + Cov(Y,X)- Cov(Y,Y)$

$= Var(X)- Var(Y) =0$

**例4（配对问题）。将$n$只球(编号为1~$n$号)随机放进$n$个盒子(编号为1~$n$号)中去，一个盒子只装一只球。若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对。记$X$为总配对数，求$EX$，$DX$。**

**解：设** $X_i=\begin{cases}1, & 第\,i\,号球放入第\,i\,号盒子\\ 0, & 第\,i\,号球未放入第\,i\,号盒子\end{cases}, i=1,2,\cdots,n$

**则配对总数** $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$

**且对任意$i$有** $P\{X_i=1\}=\dfrac{1\times(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n}$ $\quad P\{X_i=0\}=1-\dfrac{1}{n}$

**所以由0—1分布的性质得**$EX_i=\dfrac{1}{n}$, $\quad DX_i=\dfrac{1}{n}(1-\dfrac{1}{n})=\dfrac{n-1}{n^2}$

于是有 $EX = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n = n \cdot \dfrac{1}{n} = 1$

另外，当$i \neq j$时，$P\{X_i X_j = 1\} = P\{X_i = 1，X_j = 1\} = \dfrac{1 \times (n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$

$$P\{X_i X_j = 0\} = 1 - P\{X_i X_j = 1\} = 1 - \frac{1}{n(n-1)}$$

所以 $E(X_i X_j) = 1 \times P\{X_i X_j = 1\} = \dfrac{1}{n(n-1)}$

从而可得

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - EX_i EX_j = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

所以 $DX = D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} DX_i + 2\sum_{1 \le i < j \le n} Cov(X_i, X_j)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{n^2} + 2\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{n^2(n-1)} = n\frac{n-1}{n^2} + 2C_n^2 \frac{1}{n^2(n-1)} = 1$$

**例5**设随机变量$X_1, X_2,\ldots, X_n(n>1)$独立同分布，且它们共同的方差为$\sigma^2>0$，令 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, Y_1=X_1-\bar{X}, Y_n=X_n-\bar{X}$. 求$D(Y_1)$以及$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n)$。

**解：由方差的性质可得：**

$$D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

**又易知**

$$Cov(X_1,\bar{X})=Cov\left(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=Cov\left(X_1,\frac{1}{n}X_1\right)=\frac{1}{n}D(X_1)=\frac{\sigma^2}{n}$$

同理有 $Cov(X_n,\bar{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

所以

$$D(Y_1)=D(X_1-\bar{X})$$

$$=D(X_1)+D(\bar{X})-2Cov(X_1,\bar{X})$$

$$=\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}-\frac{2\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

由协方差的性质可得

$$Cov(Y_1,Y_n)=Cov(X_1-\bar{X},X_n-\bar{X})=Cov(X_1,X_n)-Cov(X_1,\bar{X})-Cov(X_n,\bar{X})+Cov(\bar{X},\bar{X})$$

$$=0-Cov(X_1,\bar{X})-Cov(X_n,\bar{X})+D(\bar{X})=0-\frac{\sigma^2}{n}-\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{n}=-\frac{\sigma^2}{n}$$

协方差的大小在一定程度上反映了*X*和*Y*相互间的关系，但它还受*X*与*Y*本身**度量单位**的影响.例如：

$$Cov(kX, kY)=k^2Cov(X,Y)$$

为了克服这一缺点，对协方差进行标准化，这就引入了相关系数.

休息片刻继续下一讲

## 相关系数

若二维随机变量$(X, Y)$的分量的方差

$Var(X)$, $Var(Y)$都存在，且$Var(X)>0$, $Var(Y)>0$,

则称

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

为随机变量$X$和$Y$的相关系数 .

在不致引起混淆时，记$\rho_{XY}$为 $\rho$ .

若$\rho_{XY}=0$ 则称$X, Y$不相关；

若$\rho_{XY}>0$ 称$X, Y$ 正相关；

若$\rho_{XY}<0$ 则称$X, Y$负相关

**例6** 设 $X\sim N(0,4)$, $Y\sim\pi$（2），$\rho_{XY}=1/2$, $E(X+Y)^2$

**解：** 由已知条件有

$$E(X)=0, D(X)=4, \quad E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=4$$

$$E(Y)=D(Y)=2, \quad E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=6$$

$$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{Var(X)Var(Y)}=\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{2}$$

$$E(XY)=Cov(X,Y)+E(X)E(Y)=\sqrt{2}$$

所以 $$E[(X+Y)^2]=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)$$

$$=4+2\sqrt{2}+6=10+2\sqrt{2}$$

**例7** 设$X \sim U[0,2\pi]$, $Y=cos(X)$, 求$\rho_{XY}$

**例8** 设$(X,Y)$在圆域

$$D=\{(x,y);x^2+y^2\le r^2\}\ (r>0)$$

上服从均匀分布，**判断$X,Y$是否不相关,是否独立。**

**解：** 由题意 $(X,Y)$的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}x\frac{1}{\pi r^2}dxdy=0$$

同理$E(Y)=0$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}xy\frac{1}{\pi r^2}dxdy=0$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

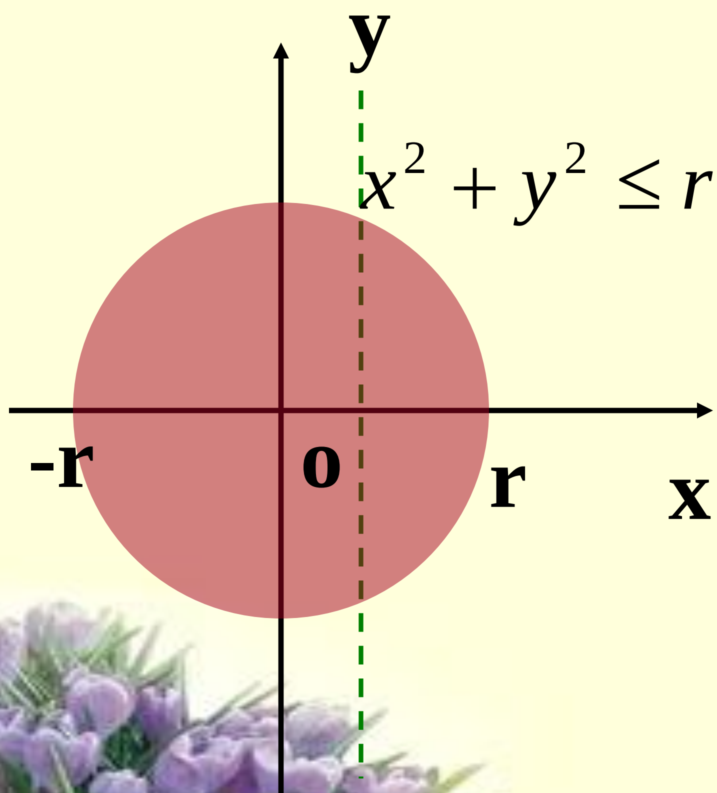
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

若 $|x|\le r$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$f_X(x)=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}\,dy$$

$$=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}$$




$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2} & |x|\le r\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2} & |y|\le r\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$D = \{(x, y): x^2 + y^2 \le r^2\}$$

$$f(x, y) \ne f_X(x) f_Y(y), \qquad (x, y) \in D$$

$X, Y$不独立

**例9** 设$(X, Y)$服从二维正态分布

$$N(\mu_{1,}\sigma_1^2;\mu_{2,},\sigma_2^2,\rho)$$

求$X$和$Y$的相关系数

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}$$

$$[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]\}dxdy$$

令$u = \dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v = \dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}uv\cdot\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho uv+v^2)\}dv\,du$$

$$u^2-2\rho uv+v^2$$

$$=(v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}uv\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot$$

$$[(v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2]\}dv\,du$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}uv\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2]\}dvdu$$

$$\text{令}\,t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(v-\rho u),\quad u=u$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(\rho u+\sqrt{1-\rho^2}t)\exp(-\frac{1}{2}t^2)\exp(-\frac{1}{2}u^2)dtdu$$

$$=\rho\sigma_1\sigma_2(\int_{-\infty}^{\infty}u^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}u^2)du)(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}t^2)dt)$$

$$+\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2(\int_{-\infty}^{\infty}u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}u^2)du)(\int_{-\infty}^{\infty}t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}t^2)dt)$$

$$=\rho\sigma_1\sigma_2$$

# 独立与相关的关系

(1) $X,Y$ **相互独立** $\Longrightarrow$ $X,Y$ **不相关**

$\not\Longleftarrow$

$X,Y$ **不相关** $\Longleftrightarrow$ $\rho_{XY}=0$

$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{cov}(X,Y)=0$

$\Longleftrightarrow$ $E(XY)=E(X)E(Y)$

$\Longleftrightarrow$ $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)$

(2) **若** $X,Y$ **服从二维正态分布，**

$X,Y$ **相互独立** $\Longleftrightarrow$ $X,Y$ **不相关**

## 相关系数的性质

$$\boxed{(1)\ |\rho| \le 1}$$

$$\boxed{(2)\ |\rho| = 1 \Longleftrightarrow \text{存在常数}a,\ b(b\neq 0)\text{，使}P\{Y=a+bX\}=1.}$$

$\rho_{XY} = 1$ 的充要条件是，$P(Y=a+bX)=1(b>0)$

这时称$X$与$Y$完全正相关；

$\rho_{XY} = -1$的充要条件是，$P(Y= a+bX)=1(b<0)$

这时称$X$与$Y$完全负相关。

# 相关系数的意义

它是用来刻画$X$, $Y$线性相关程度的一个量。

若$|\rho|$的值越接近于1, X与Y的线性相关程度越高。

若$|\rho|$的值越接近于0, $X$与$Y$的线性相关程度越弱。

## 矩

设二维随机变量$(X,Y)$, $k$ , $l$ 为非负整数。

若$E(X^k)$存在，则称它为$X$的$k$阶原点矩,记作$m_k$, 即

$$m_k = E(X^k)$$

若$E(X-E(X))^k$存在,则称它为$X$的$k$阶中心矩,记作$c_k$,

即 $c_k = E(X-E(X))^k$

若$E(X^kY^l)$存在，则称它为$X$和$Y$的$(k,l)$阶混合矩,

记作$m_{kl}$, 即$m_k=E(X^kY^l)$

若$E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l]$存在，

则称它为$X$和$Y$的$(k,l)$阶混合中心矩，记作$c_{kl}$, 即

$$c_{kl} = E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l]。$$

关于矩有下述结论：设$k$为正整数。

(1)　若$E(X^k)$存在，则对小于$k$的一切非负整数$l$，$E(X^l)$存在.

(2)　原点矩与中心矩可相互表示。

**例10** 求标准正态分布的各阶矩.

设X~N(0,1), $m_k = c_k = E(X^k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$

若$k$为奇数, $c_k = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0 \\ \Gamma(n+1) = n! \\ \Gamma(\frac{n}{2}) = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2) \quad 2^{-(n-1)/2}\sqrt{\pi}\end{array}}$$

若$k$为偶数,

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\frac{x^2}{2}=t}{=} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{k-1}{2}} \int_0^{\infty} t^{\frac{k-1}{2}} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(\frac{k+1}{2})$$

$$= 1\cdot 3\cdot 5\cdots(k-1)$$

第四章

作业3： **36,40,42,44,45**


稍事休息