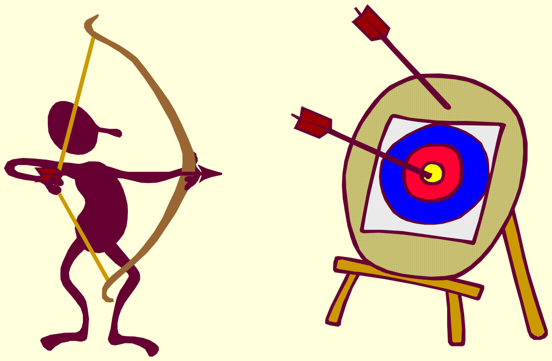
例：在打靶试验中，已知弹着点的位置坐标（X，Y）的分布，我们关心的是弹着点与目标 的距离 Z的分布，

而$Z^2 = X^2 + Y^2$



§ 3.4 随机变量函数的分布

设(X, Y)是二维随机变量, $z=\varphi(x, y)$是一个已知的二元函数,如果当(X, Y)取值为(x, y)时,随机变Z量取值为$z=\varphi(x, y)$,则Z称是**二维随机变量的函数**,记作$Z=\varphi(X, Y)$

问题: 已知(X, Y)的分布, 求$Z=\varphi(X, Y)$的分布.

一．离散型随机变量（X，Y）的函数的概率分布

例1　设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1) $X+Y$, (2) $\left|X-Y\right|$ 的分布律.

解

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

等价于

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$
$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
$\lvert X-Y\rvert$	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3

所以 $X+Y, |X-Y|$ 的分布律分别为

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y\rvert$	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

例2 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

得

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

可得

P	(X,Y)	$Z=X+Y$
0.18	(1,2)	3
0.12	(1,4)	5
0.42	(3,2)	5
0.28	(3,4)	7

所以

$Z=X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

例3 若X和Y相互独立,它们分别服从参数为λ_1, λ_2的泊松分布，证明$Z=X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.

解：依题意

$$P(X=i)=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!} \qquad i=0,1,2,\ldots$$

$$P(Y=j)=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^j}{j!} \qquad j=0,1,2,\ldots$$

由于

$$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)$$

所以

$$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{r}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{\mathrm{r-i}}}{(\mathrm{r}-\mathrm{i})!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\sum_{i=0}^{r}\frac{\mathrm{r}!}{\mathrm{i}!(\mathrm{r}-\mathrm{i})!}\lambda_1^{\mathrm{i}}\lambda_2^{\mathrm{r-i}}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}(\lambda_1+\lambda_2)^r,\quad r=0,1,\ \ldots$$

即Z服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.

再生性 可加性

例4 设X和Y相互独立，$X\sim B(n_1,p),Y\sim B(n_2,p)$,求

$Z=X+Y$ 的分布.

法1：直接计算

$$P(X=i)=C_{n_1}^{i}p^{i}(1-p)^{n_1-i}$$

$i=0, 1, 2, \ldots, n_1,$

$$P(Y=j)=C_{n_2}^{j}p^{j}(1-p)^{n_2-j}$$

$j=0, 1, 2, \ldots, n_2,$

$$\{X+Y=r\}=\bigcup_{(i,j)\in G}\{X=i,Y=j\}$$

其中 $G=\{(i,j):i=0,\cdots n_1,j=0,\cdots n_2,i+j=r\}$

$$r=0,1,\cdots n_1+n_2$$

$$G=\{(i,j): i=0,\cdots n_1,\ j=0,\cdots n_2, i+j=r\}$$

$$\text{所以} P(X+Y=r)=\sum_{(i,j)\in G} P(X=i, Y=j)$$

$$=\sum_{(i,j)\in G}\binom{n_1}{i}p^i(1-p)^{n_1-i}\binom{n_2}{j}p^j(1-p)^{n_2-j}$$

$$=p^r(1-p)^{n_1+n_2-r}\sum_{(i,j)\in G}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{j}$$

$$=\binom{n_1+n_2}{r}p^r(1-p)^{n_1+n_2-r}$$

$$r=0,1,\cdots n_1+n_2$$

法2：无需计算

若$X\sim B(n_1,p)$,则X是在n_1次独立重复试验中事件A出现的次数,每次试验中A出现的概率都为p.

Y是在n_2次独立重复试验中事件A出现的次数,每次试验中A出现的概率为p.

故$Z=X+Y$是在n_1+n_2次独立重复试验中事件A出现的次数，每次试验中A出现的概率为p，$Z\sim B(n_1+n_2,p)$.

二　连续型随机变量（*X*，*Y*）的函数的概率分布

已知（X，Y）$\sim f(x,y)$，求 $Z=\varphi$（X，Y）的概率分布

(1) $F_Z(z)=P(Z\le z)=P\{\varphi(X,Y)\le z\}$

$$=\iint\limits_{\varphi(x,y)\le z} f(x,y)\,dx\,dy$$

(2) 若Z为连续型随机变量，则有

$$f(z)=F'(z)$$

例5： 已知X, Y 相互独立且均服从$N(0, \sigma^2)$，求

$$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$$

的概率密度。

由X 和Y的独立性,得到(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty$$

Z的分布函数 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\sqrt{X^2+Y^2}\le z)$

当$z\le 0$时 $F_Z(z)=0;$

当$z>0$时 $F_Z(z)=P(X^2+Y^2\le z^2)=\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} f(x,y)dxdy$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy$$

对积分进行**极坐标变换**

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\quad J=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

$$F_Z(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{\sigma^2}re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

所以Z的密度函数为

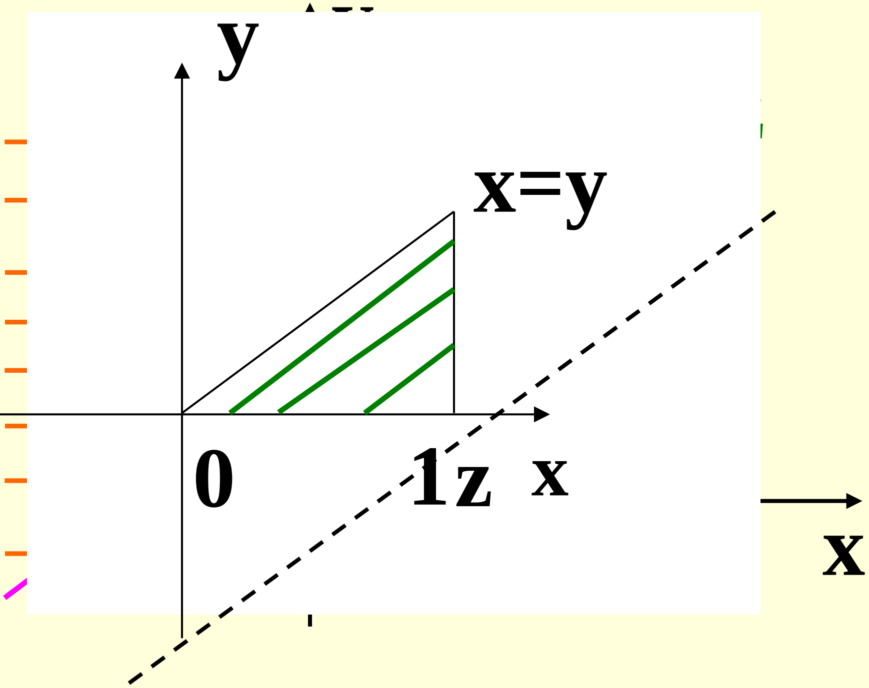
$$f_Z(z) = F_Z^{'}(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

瑞利（Rayleigh）分布

例6： 设（X, Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x,\ 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $Z = X - Y$ 的概率密度



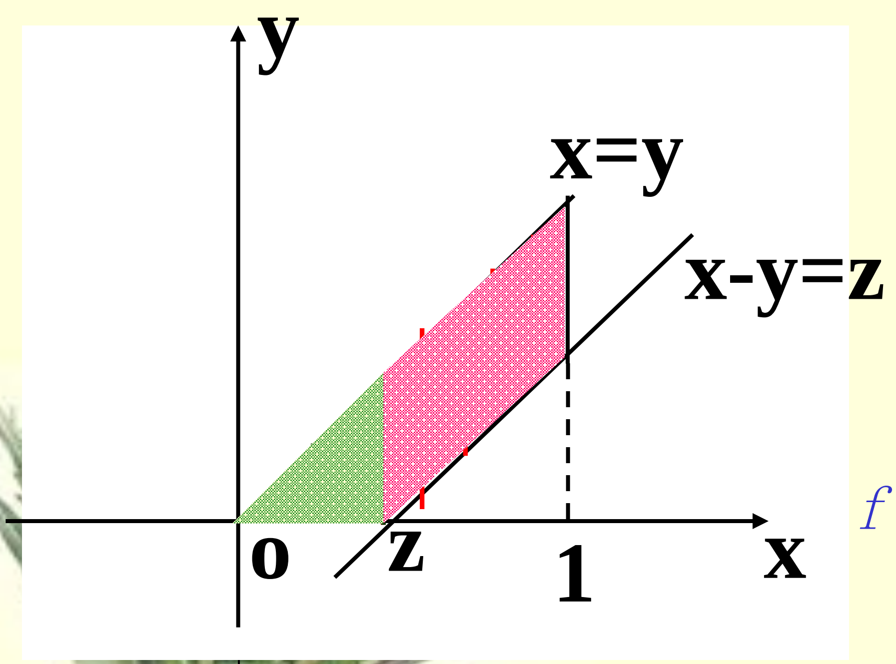
$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$
$$= \iint_{x-y\le z} f(x,y)dxdy$$

若 $z \le 0 \qquad F_Z(z) = 0$

若 $0 < z < 1$

$$F_Z(z) = \int_0^z [\int_0^x 3xdy]dx$$
$$+ \int_z^1 [\int_{x-z}^x 3xdy]dx$$
$$= -\frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{2}z$$

若 $z \ge 1 \qquad F_Z(z) = 1$



$$f_Z(z) = \begin{cases} -z + 3/2 & 0 < z < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

和的分布： $Z = X + Y$

定理：若(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)$，则

$Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx$$

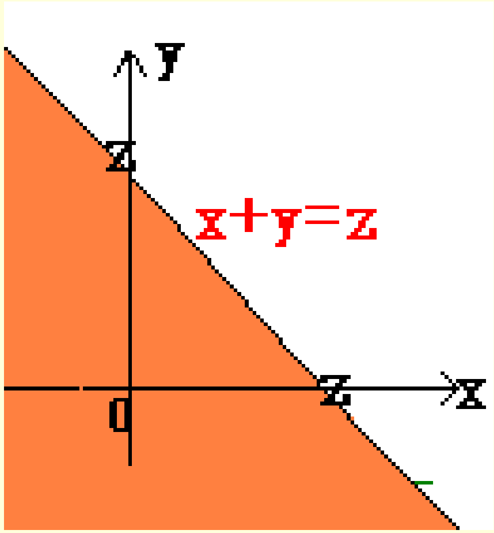
或

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)dy$$

证明: $Z=X+Y$的分布函数是:

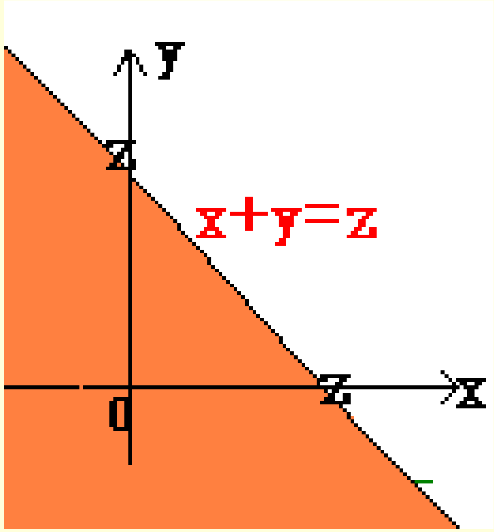
$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$

$$=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$



$$D=\{(x,y):\ x+y\le z\}$$

$$F_Z(z) = \iint\limits_{x+y \le z} f(x, y)\,dxdy$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\,dx \right] dy$$

令$u=x+y,\ y=y$得

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y, y)\,du \right] dy$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y, y)\,dy \right] du$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,dy$$

当X和Y独立，设(X,Y)关于X,Y的边缘密度分别为$f_X(x)$, $f_Y(y)$，则上述两式化为:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\,dx$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)\, f_Y(y)\,dy$$

$$f_Z(z)=f_X(z) * f_Y(z)$$

称之为函数 $f_X(z)$ 与 $f_Y(z)$的卷积

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx$$

步骤

1 在xoz 平面画出f(x,z-x) 非零区域

2 找出非零区域中z的范围

3 上述范围内固定z,找出x的积分限

4 计算

例7：若X, Y相互独立，其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$

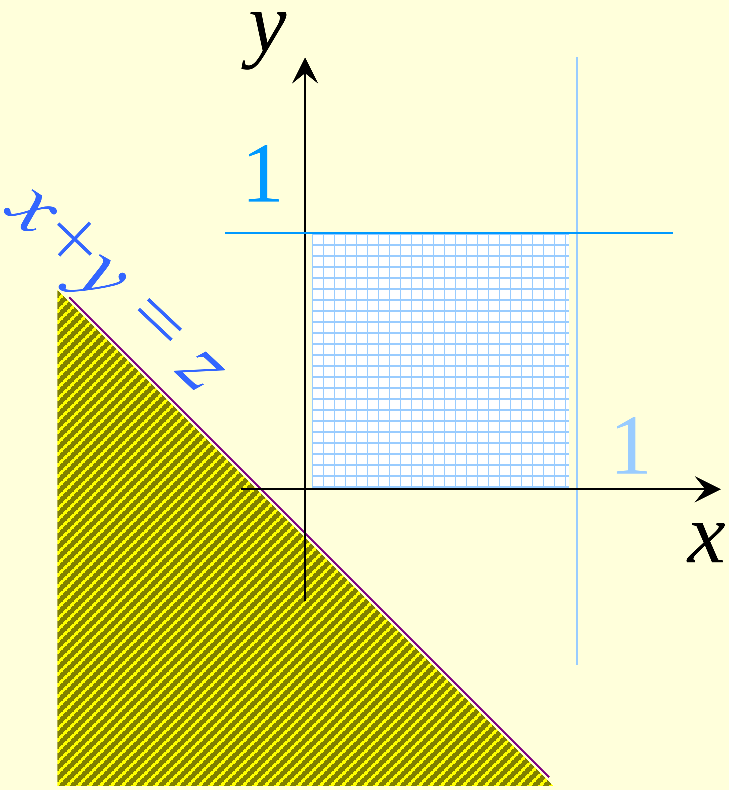
解法一 从分布函数出发

$$F_Z(z) = P(X + Y \le z)$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x, y)dxdy$$

当$z < 0$时,

$$F_Z(z) = 0$$



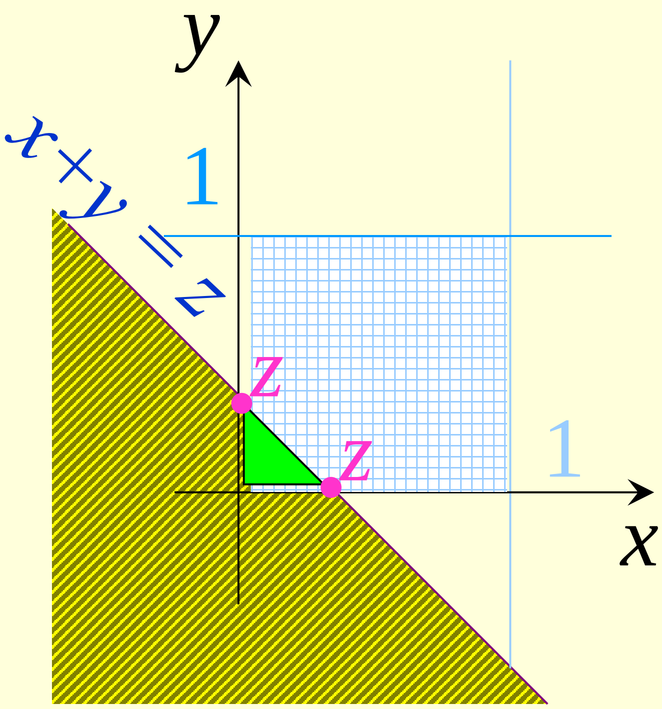
当$0 \le z < 1$时，

$$F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 2y\,dy$$

$$= \int_0^z (z-x)^2\,dx$$

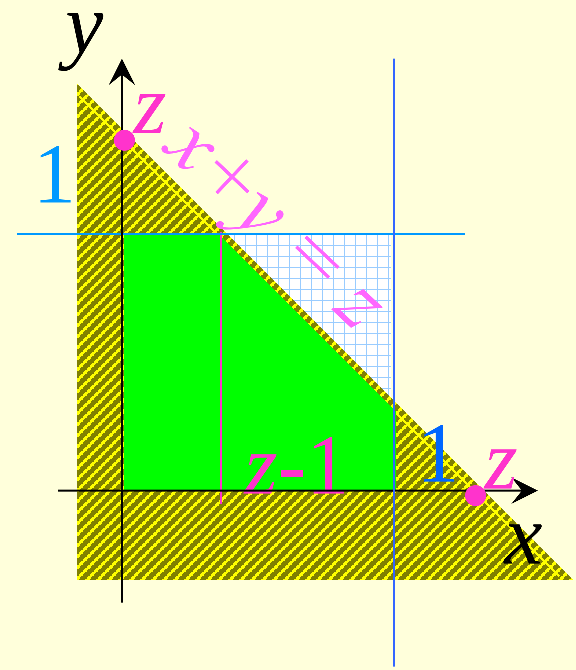
$$= \frac{z^3}{3}$$

$$f_Z(z) = z^2$$



当$1 \le z < 2$时,

$$F_Z(z) = \int_0^{z-1} dx \int_0^1 2y\,dy + \int_{z-1}^1 dx \int_0^{z-x} 2y\,dy$$



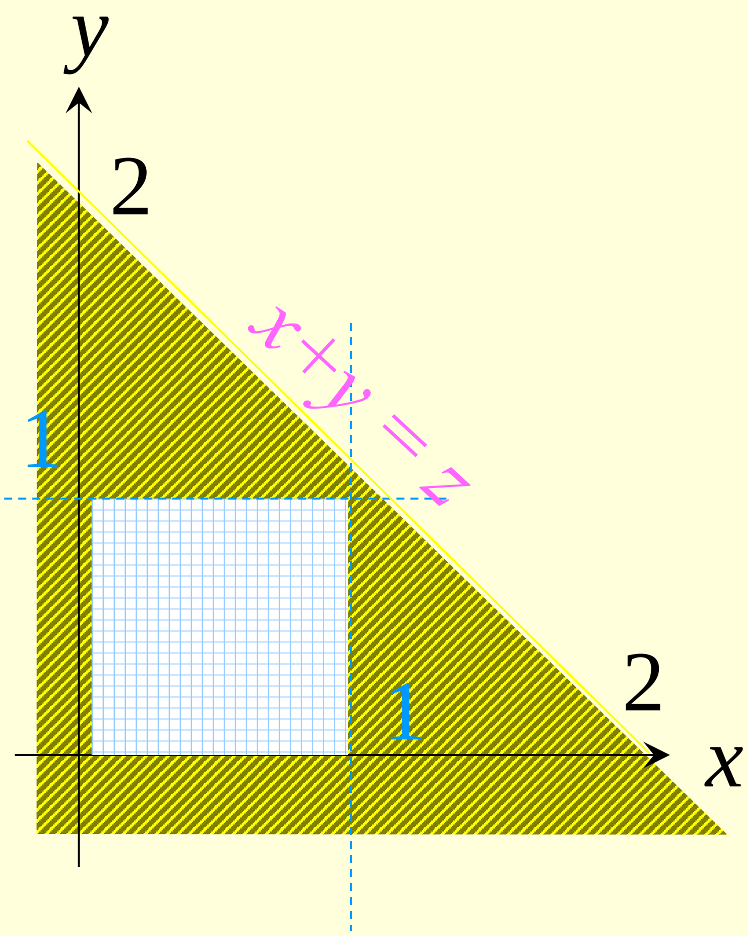
$$= z - \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{2}{3}$$

$$f_Z(z) = 2z - z^2$$

当$2 \le z$时,

$$F_Z(z) = 1$$

$$f_Z(z) = 0$$



$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \text{或} z > 2 \\ z^2, & 0 < z < 1 \\ 2z - z^2, & 1 < z < 2 \end{cases}$$

解法二

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(z-x) = \begin{cases} 2(z-x), & 0 \le z-x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

被积函数不为0的区域

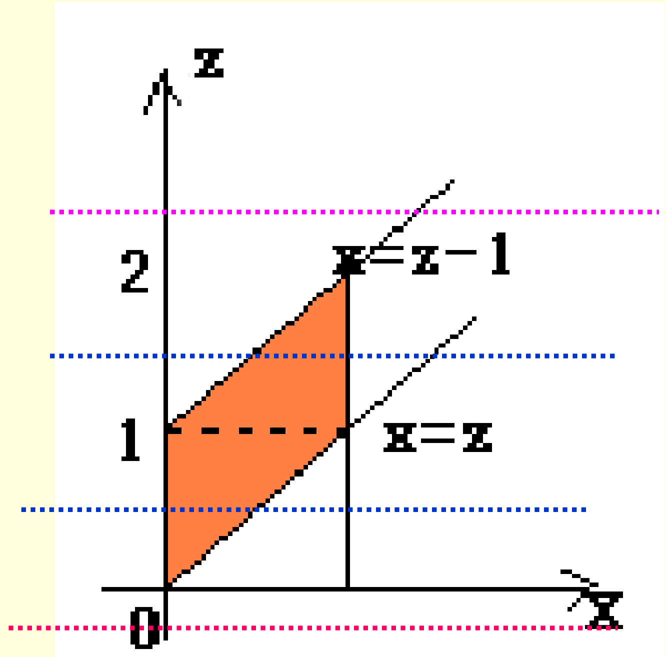
$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z-x \le 1 \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(z-x)=\begin{cases}2(z-x), & 0\le z-x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

被积函数不为0的区域

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}$$



若z<0或z>2 $\quad f_Z(z)=0$

若0<z<1 $\quad f_Z(z)=\int_0^z 2(z-x)dx=z^2$

若1<z<2 $\quad f_Z(z)=\int_{z-1}^1 2(z-x)dx=2z-z^2$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z 2(z-x)dx = z^2, & 0\le z<1\\ \int_{z-1}^1 2(z-x)dx = 2z-z^2, & 1\le z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例8 已知X, Y相互独立且均服从$N(0, 1)$，求

求 $X+Y$ 的 分 布

由X 和Y的独立性,得到(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty$$

配方

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+(x-z)^2}{2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{2(x-z/2)^2+z^2/2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-z/2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$

正态随机变量的性质

若X, Y**相互独立**, $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

则 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **相互独立**, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \cdots, n$

则 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$

★ **有限个独立正态变量的线性组合仍然服从正态分布.**

第三章 作业2：

34,35,37,39,41

休息片刻再继续

3.5 $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

离散型随机变量

例9 X, Y 相互独立, $X, Y \sim$ 参数为0.5的0-1分布

求 $M=\max\{X,Y\}$ 的概率分布

解

$Y \backslash p_{ij} \backslash X$	1	0
1	0.25	0.25
0	0.25	0.25

$\max\{X,Y\}$	1	0
P	0.75	0.25

例10 设随机变量X_1, X_2相互独立,并且有相同的几何分布 $P(X_1=k)=p(1-p)^{k-1}$, $k=1,2,\ldots$, 求$Y=\max(X_1,X_2)$的分布律.

解: $P(Y=n)= P(\max(X_1,X_2)=n)$

$$=P(X_1=n,\ X_2\le n)+P(X_2=n,\ X_1<n)$$

$$=pq^{n-1}\sum_{k=1}^{n}pq^{k-1}+pq^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}pq^{k-1}$$

$$=p^2q^{n-1}\frac{1-q^n}{1-q}+p^2q^{n-1}\frac{1-q^{n-1}}{1-q} \qquad n=1,2,\ldots$$

$$=pq^{n-1}(2-q^n-q^{n-1})$$

连续型随机变量

设X，Y是两个**相互独立**的随机变量，它们的**分布函数**分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$,求$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布函数.

$$F_M(z)=P(M\le z)=P(max(X,Y)\le z)$$

$$=P(X\le z,Y\le z)$$

$$=P(X\le z)P(Y\le z)$$

即有 $\boxed{F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)}$

设X，Y是两个**相互独立**的随机变量，它们的**分布函数**分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，求$N=\min(X,Y)$的**分布函数**.

$$F_N(z)=P(N\le z)\quad =1-P(N>z)$$

$$=1-P(X>z,Y>z)$$

$$=1-P(X>z)P(Y>z)$$

即有

$$\boxed{F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]}$$

设$X_1,\ldots,X_n$是n个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为

$$F_{X_i}(x) \quad (i=0,1, \ldots, n)$$

求 $M=\max(X_1,\ldots,X_n)$

和$N=\min(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数.

$M=\max(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数为:

$$F_M(z)=F_{X_1}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$N=\min(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数是

$$F_N(z)=1-[1-F_{X_1}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

特别，当$X_1,\ldots,X_n$相互独立且具有相同分布函数$F(x)$时，有

$$F_M(z)=[F(z)]^n$$

$$F_N(z)=1-[1-F(z)]^n$$

例11 设X , Y相互独立且都服从[0,1]上均匀分布

求 $Z=\max(X , Y)$的密度函数

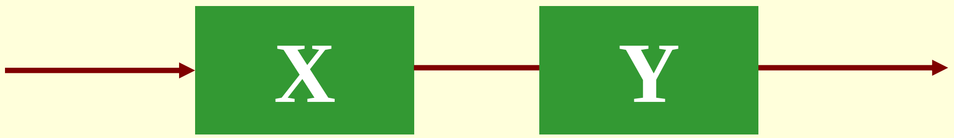
例12系统 L 由两个相互独立的子系统L_1, L_2联结而成。已知L_1, L_2的使用寿命X，Y 分别服从参数为α，β（$\alpha>0$，$\beta>0$, $\alpha\neq\beta$）的指数分布。分别在下列三种情况下，求系统 L 的使用寿命Z的分布.

(1) 子系统L_1, L_2 串联;

(2) 子系统L_1, L_2 并联;

(3) 子系统L_2 冷备.

(1)子系统L_1, L_2**串联****;**



$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(x)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad F_Y(x)=\begin{cases}1-e^{-\beta x}, & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

由题意 $Z=\min(X,Y)$

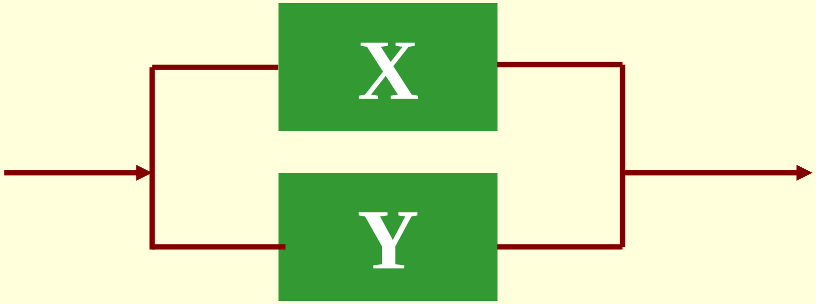
z的分布函数

$$F_z(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

Z的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（2）子系统L_1, L_2并联;



$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, x>0\\ 0 \qquad \text{其他}\end{cases} \qquad F_Y(x)=\begin{cases}1-e^{-\beta x}, x>0\\ 0 \qquad \text{其他}\end{cases}$$

由题意 $Z=\max(X,Y)$

z的分布函数

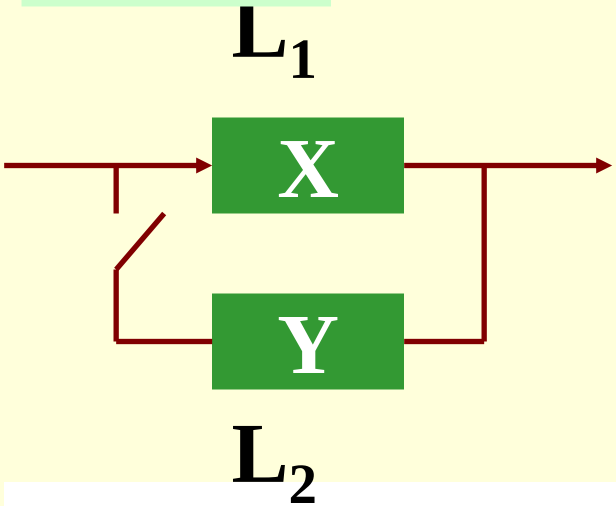
$$F_z(z)=F_X(z)F_Y(z) \quad =\begin{cases}(1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}) & z>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

Z的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}(1-e^{-\beta z})+\beta e^{-\beta z}(1-e^{-\alpha z}) & z>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \qquad f_Y(x)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(3)冷备



由题意 $Z=X+Y$

Z的密度函数

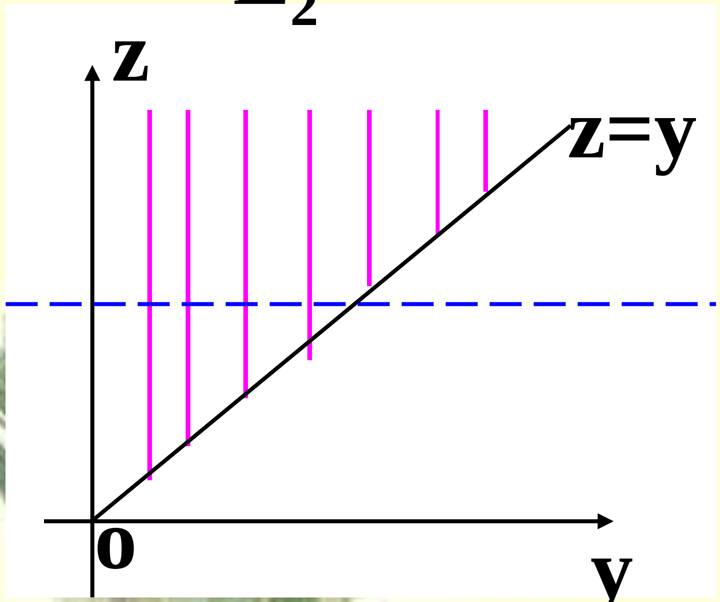
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$z\le 0$时 $\quad f_Z(z)=0$

$z>0$时

$$f_Z(z)=\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\beta e^{-\beta y}dy$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z})$$



例13.设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim U(0,1)$, $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=1/2$，令 $Z=X+Y$，求 Z 的分布。

解：首先易知X的密度函数和分布函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \quad \text{和} \quad F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

则Z的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$

$$=P\{X+Y\le z, Y=0\}+P\{X+Y\le z, Y=1\}$$

$$=P\{X\le z\}P\{Y=0\}+P\{X\le z-1\}P\{Y=1\}$$

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}[P\{X\le z\}+P\{X\le z-1\}]$$
$$=\frac{1}{2}[F_X(z)+F_X(z-1)]$$

当$0<z<1$时 $F_X(z)=z,\ \ F_X(z-1)=0 \qquad \therefore F_Z(z)=z/2$

当$1\le z<2$时 $F_X(z)=1,\ \ F_X(z-1)=z-1 \qquad \therefore F_Z(z)=z/2$

当$z\le 0$ $F_X(z)=0,\ \ F_X(z-1)=0 \qquad \therefore F_Z(z)=0$

$z\ge 2$时 $F_X(z)=1,\ \ F_X(z-1)=1 \qquad \therefore F_Z(z)=1$

所以Z的密度函数为 $f_Z(z)=F_Z'(z)$

三. 最大值和最小值的分布

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

即 $Z \sim U(0,2)$

例14. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/2, & 0\le x\le 1, 0<y<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

令$Z=min\{X,Y\}$. 求Z的密度函数。

解：联合密度函数的非0区域

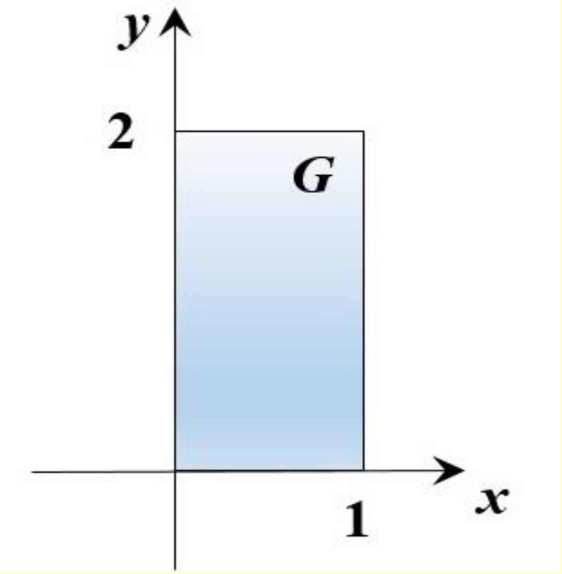
$$G=\{0\le x\le 1, 0<y<2\}$$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\min(X,Y)\le z)$$

$$=1-P(\min(X,Y)>z)$$

$$=1-P(X>z,Y>z)$$

$$=1-\iint\limits_{x>z,y>z} f(x,y)dxdy$$



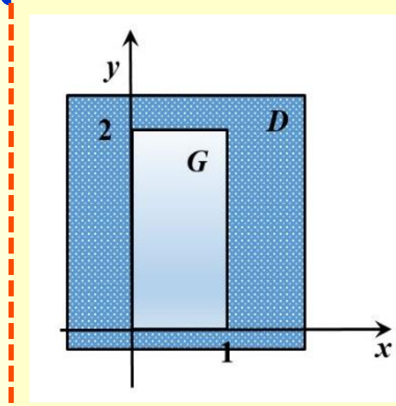
积分区域为

$D=\{(x,y):x>z, y>z\}$

当$z<0$时

积分区域$D=\{(x,y):x>z,\ y>z\}$包含了整个非零区域

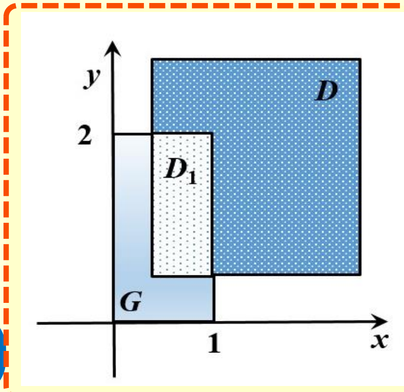
$$F_Z(z)=1-\iint\limits_{x>z,\,y>z} f(x,y)dxdy=1-1=0$$



当$0\le z<1$时

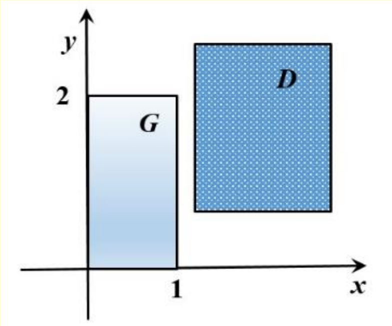
积分区域$D=\{(x,y):x>z,\ y>z\}$与非零区域G相交的区域为D_1，可表示为$D_1=\{(x,y):\ z\le x<1,\ z\le y<2\}$

$$F_Z(z)=1-\int_z^1 dx\int_z^2 \frac{1}{2}dy=1-\frac{1}{2}(2-z)(1-z)$$



当$z\geq 1$时

积分区域 $D=\{(x,y):x>z, y>z\}$ 与非零区域G不相交。



所以 $$F_Z(z)=1-0=1$$

所以 Z 的分布函数为 $$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-\dfrac{1}{2}(2-z)(1-z), & 0\leq z<1\\ 1, & z\geq 1\end{cases}$$

密度函数为 $$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-z, & 0\leq z<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

第三章 作业3：

31, 45,46


休息一会儿