我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性有多大，

如何度量事件发生的可能性呢？

我们用$P(A)$表示事件A发生的概率，则

$$0 \le P(A) \le 1$$

事件发生的可能性最大是百分之百，此时概率为1.

事件发生的可能性最小是零，此时概率为0.

§2古典概率
几何概率

古典概型

若随机试验 E 满足：

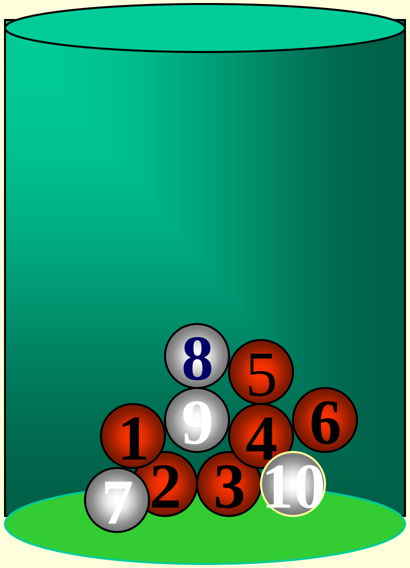
① S 中基本事件e 个数是有限的；

② 每个基本事件发生是等可能的.

则称 E 为古典概型。

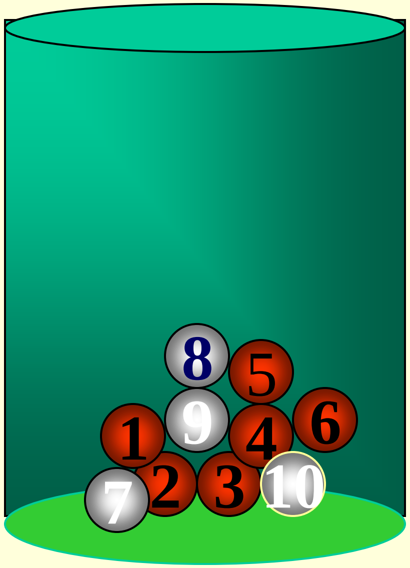
例如，一个袋子中装有10个大小、形状完全相同的球.将球编号为1—10 .把球搅匀，蒙上眼睛，从中任取一球.

摸球模型



记 B={摸到红球}

$P(B)=6/10$



这里实际上是从“比例”

转化为“概率”

计算公式

设随机试验E有n个基本事件，S中事件A包含k个基本事件，则A发生的概率为

$$P(A) = k/n$$

概率的古典定义

排列组合是计算古典概率的重要工具.

排列组合有关知识复习

加法原理：完成一件事情有n类方法，第i类方法中有m_i种具体的方法，则完成这件事情共有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i$$

种不同的方法

乘法原理：完成一件事情有n个步骤，第i个步骤中有m_i种具体的方法，则完成这件事情共有

$$\prod_{i=1}^{n} m_i$$

种不同的方法

选排列 从 n 个不同的元素中取出 r 个 (不放回地）按一定的次序排成一排不同的排法共有

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

全排列 $A_n^n = n!$

可重复排列 从 n 个不同的元素中可重复地取出 r 个排成一排, 不同的排法有

$$n^r$$

种

组合　从 n 个不同的元素中取出 r 个(不放回地）组成一组，不同的分法共有

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

二项式系数

多组组合　把 n 个元素分成 k 个不同的组（组编号），各组分别有 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 个元素，$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$，不同的分法共有

$$C_n^{r_1} C_{n-r_1}^{r_2} \cdots C_{r_k}^{r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$$

种

多项式系数

r_1 个元素

r_2 个元素

…

r_k 个元素

n 个元素

古典概型虽然比较简单,
但它有多方面的应用.

摸球模型　　分球入箱

随机取数　　分组分配

是常见的几种模型 .

摸球模型

例1

在一袋中有10 个相同的球，分别标有号码 $1, 2, \ldots, 10$. 从中任取一个球，求此球的号码为偶数的概率。

计算古典概率注意事项

在概率计算中，一般认为球都是可辨的，

可看作是有不同的编号。

例2 在一袋中有10 个相同的球，分别标有号码1, 2, ..., 10. 今任取两个球(不放回抽取). 求

(1)取得两球中一个球号码为奇数，一个球的号码为偶数的概率.

E:“不放回抽取’’有两种理解:

a 随机地取一个球不放回，再取第二个球,

两球有先后次序 (排列问题）.

S={（1 2）（2 1） … }

$$p = 2P_5^1 P_5^1 / P_{10}^2$$

(1)取得两球中一个球号码为奇数， 一个球的号码为偶数的概率.

b 一下取2个球,

两球没有先后次序 (组合问题）.

S={（1 2）（2 4） … }

$$p = C_5^1 C_5^1 / C_{10}^2$$

例2续 在一袋中有10 个相同的球，分别标有号码1, 2, ..., 10. 今任取两个球(不放回抽取). 求

(2)取得的第一个球号码为奇数，第二个球的号码为偶数的概率。

E: 随机地取一个球后，再取第二个球.

(排列 问题）

S={ (1 2) (2 1) … }

$$p = P_5^1 P_5^1 / P_{10}^2$$

(2)取得的第一个球号码为奇数，

第二个球的号码为偶数的概率。

E:　一下取2个球.（组合问题）

S={（1　2）（2　4）　…　}

不行!所求
事件与次序
有关

计算古典概率注意事项

1 对于不放回抽取

当所求事件与次序无关时,样本空间有两种取法 (排列和组合), 所得结果一样.

当所求事件与次序有关时,样本空间只能用排列记数.

2 对于同一问题,样本空间有不同取法,但要注意等可能性的条件,并且计算要对同一样本空间进行.

例3

在一袋中有10 个相同的球，分别标有号码1, 2, …, 10。每次任取一个球，记录其号码后放回袋中，再任取下一个。这种取法叫做“有放回抽取”. 今有放回抽取3个球，求这3个球的号码均为偶数的概率

E: 取一球 放回 → 再取一球 放回 → 再取一球 放回

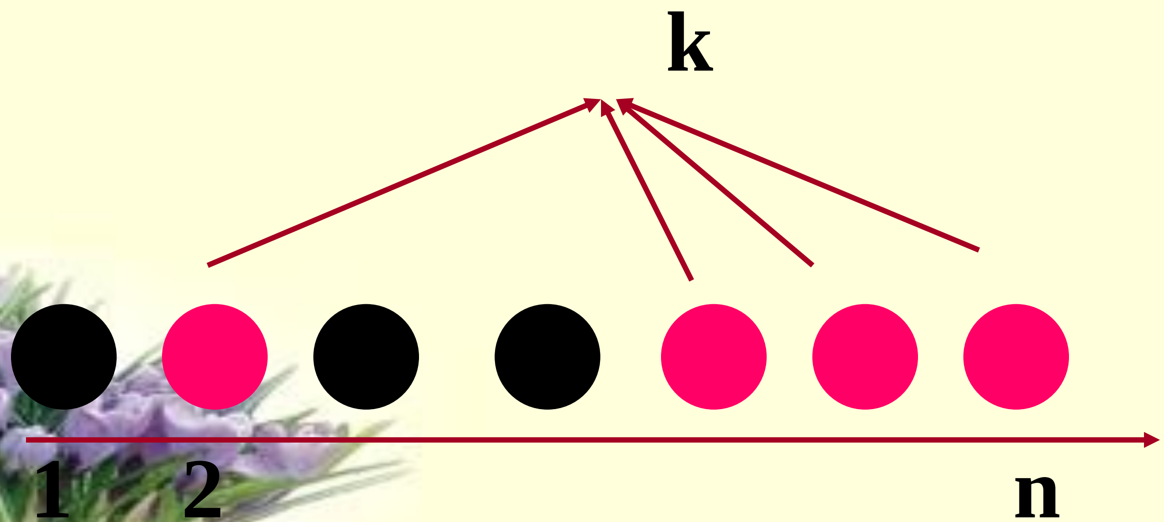
$$p = \frac{5^3}{10^3}$$

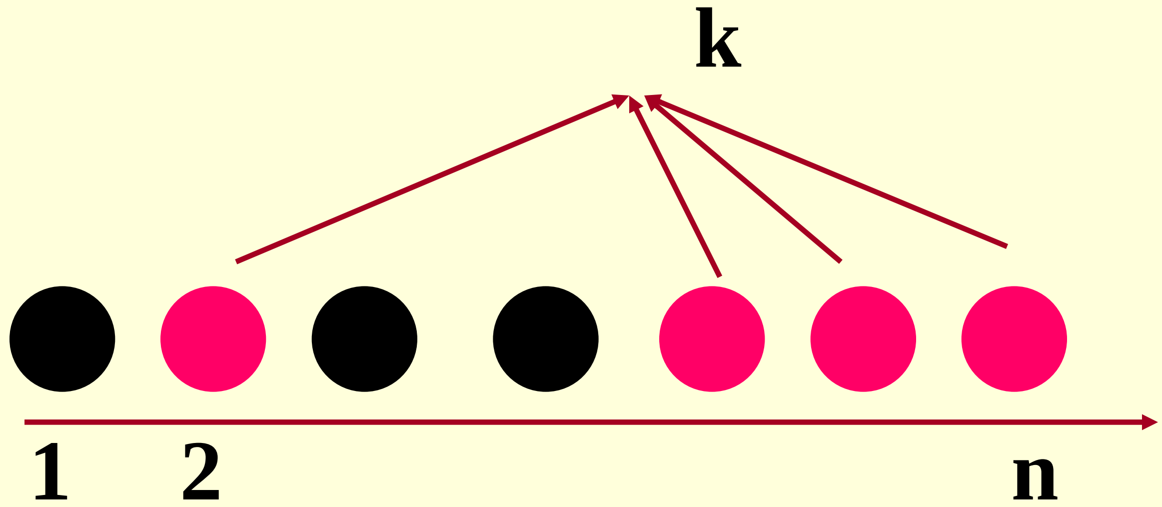
例4 袋中有a只红球，b只黑球,**不放回**取n只球（$n \le a+b$）,求其中恰有k只（$k \le a, k \le n$）红球的概率

解: E: 依次取出n只球

$$S: n_S = P_{a+b}^{n}$$

记事件A为n个球中有k个红球，





n_A： **n个位置中任取k个位置**

a个红球中任取k个排到取定的k个位置

b个黑球中任取n-k个排到剩下n-k个位置

则 $P(A)=\dfrac{C_n^k P_a^k P_b^{n-k}}{P_{a+b}^n}$ $\quad k\le a, k\le n$

又解 E_1: 一次取 n 个球

S: $n_S = C_{a+b}^{n}$

$$n_A = C_a^k C_b^{n-k}$$

$$P(A) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^{n}} \qquad k \le a, k \le n$$

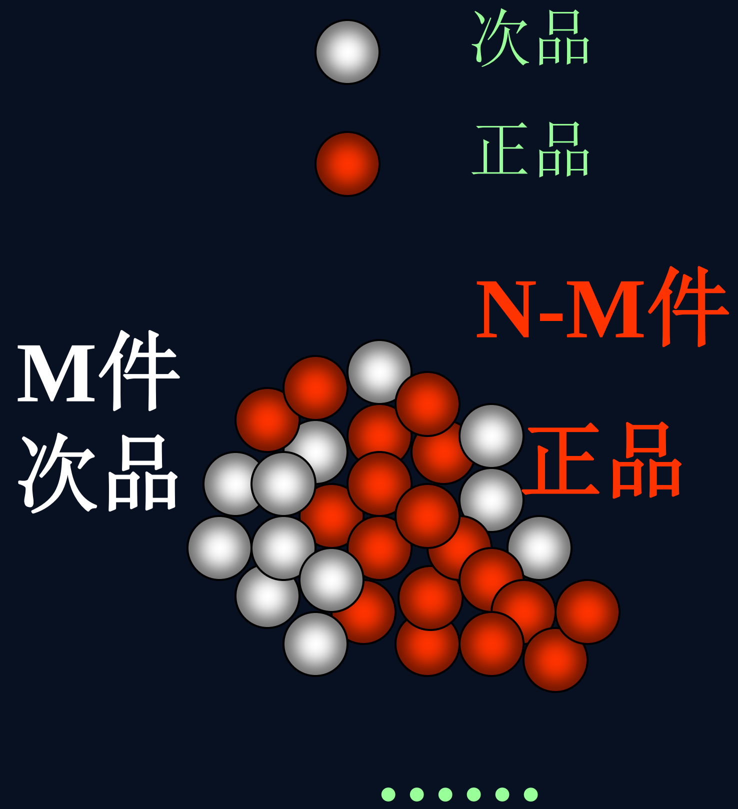
超几何分布

例4续

设一批同类型的产品共有N件，其中次品有M件。今从中任取n（假定$n \le N-M$)件，求次品恰有k件的概率$(0 \le k \le \min(M,n))$

解：令B={恰有k件次品}

$$P(B)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$



这是一种无放回抽样.

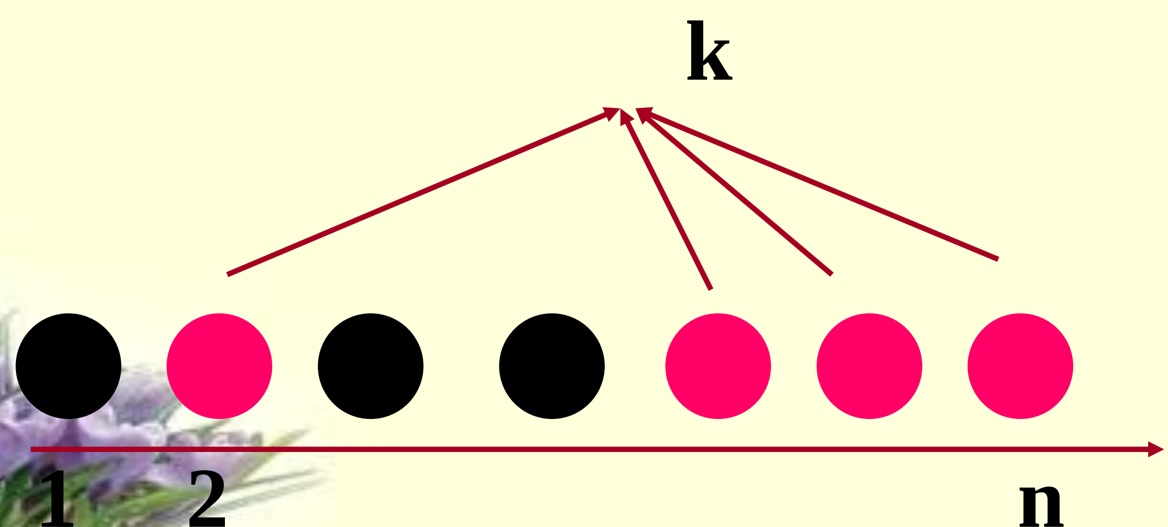
例5 袋中有a只红球，b只黑球,**有放回**取n只球（$n \le a+b$）,求其中恰有k只（$k \le a, k \le n$）红球的概率

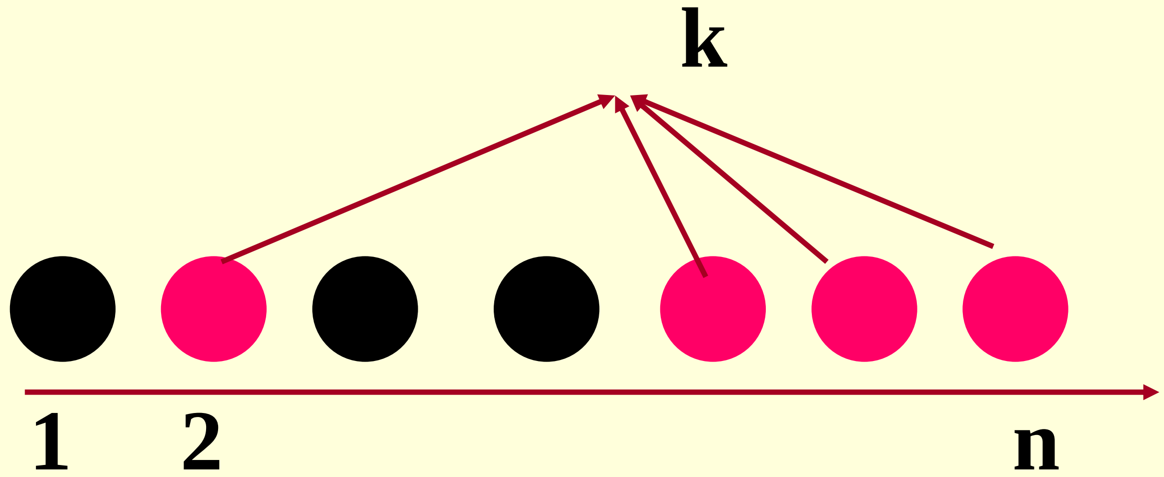
解:

E: 任取一球放回去,重复n次

S: $n_S = (a+b)^n$

记B为取出的n个球中有k个红球, 则





n_B：n个位置中任取k个位置

a个红球中可重复的任取k个排到取定的位置

b个黑球中可重复的任取n-k个排到剩下n-k个位置

$$P(B)=\frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}=C_n^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}$$

袋中有a只红球，b只黑球,有放回取n只球（$n \le a+b$）,求其中恰有k只（$k \le a, k \le n$）红球的概率

记 $p = \dfrac{a}{a+b}$

$$P(B) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. k = 0,1\ldots n$$

二项分布

复习：

随机试验　　样本空间　　随机事件

若随机试验 E 满足：

古典概型

① S中基本事件ω个数是有限的；

② 每个基本事件发生是等可能的.

则称 E 为古典概型。

$$P(A) = k/n$$

分球入箱

例6 设有n个球，每个球都以同样的概率落入到N个箱子$(N \geq n)$的每一个箱子，试求下列事件的概率 (设每箱装球数无限,且球可辨)

E: 将第一个球以同样的概率落入N个箱子中的一个,

将第二个球落入,

…

将第n个球落入.

$$n_S = N^n$$

设有n个球，每个球都以同样的概率落入到N个箱子($N \geq n$)的每一个箱子，试求下列事件的概率 **(设每箱装球数无限,且球可辨)**

(1). A_1:某指定的n个箱子中各有一球

(2). A_2:任何n个箱子中各有一球

解:

$$(1) \quad P(A_1) = \frac{n!}{N^n}$$

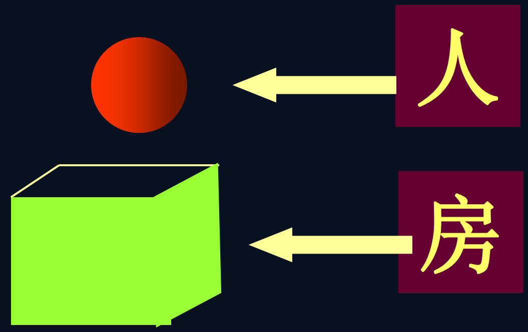
$$(2) \quad P(A_2) = \frac{P_N^n}{N^n} = \frac{N!}{N^n (N-n)!}$$

计算古典概率注意事项

许多表面上提法不同的问题实质上属于同一类型

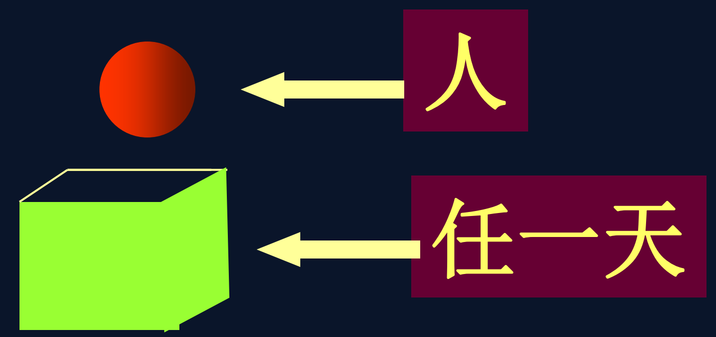
分房问题

有n个人，每个人都以相同的概率 1/N (N≥n)被分在 N 间房的每一间中，求指定的n间房中各有一人的概率.



生日问题

有n个人，设每个人的生日是任一天的概率为1/365.求这n ($n \le 365$)个人中至少两人生日相同(A)的概率?



解 在例6中取N=365,

$$P(\overline{A}) = \frac{P_{365}^{n}}{365^{n}} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{365}^{n} \cdot n!}{365^{n}}.$$

n	20	23	30	40	50	64
P	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997

随机取数

例7 **在0,1,2,3,   ,9中不重复地任取4个数，求它们能排成首位非零的四位偶数的概率.**

解　**设 A 为“能排成首位非零的四位偶数”**

$$n_S = P_{10}^{4} = 5040.$$

$$n_A = C_5^1 P_9^3 - C_4^1 P_8^2 = 2296$$

$$\therefore P(A) = \frac{2296}{5040} = \frac{41}{90}$$

分组分配

例8 ***n*双相异的鞋共2*n*只，随机地分成*n*堆，每堆2只．问:“各堆都自成一双鞋”(事件A)的概率是多少？**

解：把2*n*只鞋分成*n*堆,每堆2只的分法总数为

$$C_{2n}^{2}C_{2n-2}^{2}\cdots C_{2}^{2}=\frac{(2n)!}{2!2!\cdots 2!}=\frac{(2n)!}{2^{n}}$$

而出现事件*A*的分法数为*n*!,故

$$P(A)=\frac{n!}{(2n)!/2^{n}}=\frac{n!2^{n}}{(2n)!}$$

例9

将15 名同学(含3 名女同学), 平均分成三组. 求

(1) 每组有1 名女同学(设为事件A)的概率;

(2) 3 名女同学同组(设为事件B)的概率

解 $n_S = C_{15}^{5} C_{10}^{5} C_{5}^{5}$

(1) $n_A = C_{12}^{4} C_{8}^{4} C_{4}^{4} C_{3}^{1} C_{2}^{1} C_{1}^{1}$ $\qquad P(A) = \frac{25}{91}$

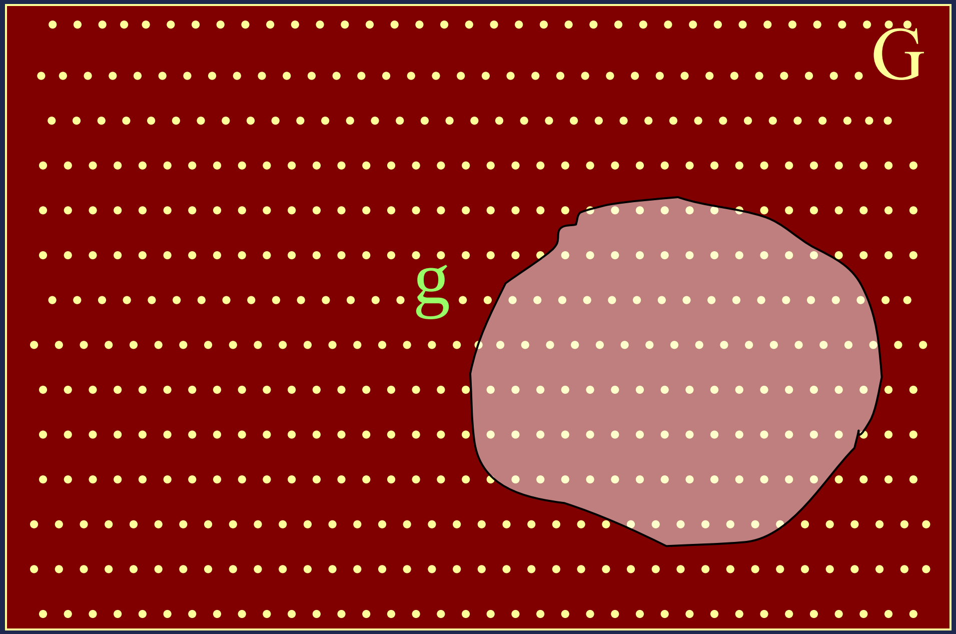
(2) $n_B = C_{3}^{1} C_{12}^{2} C_{10}^{5} C_{5}^{5}$ $\qquad P(B) = \frac{6}{91}$

几何概型

设样本空间为有限区域 Ω, 若**样本点落入 Ω 内任何区域 *G* 中的概率与区域*G* 的测度成正比**, 则样本点落入*G*内的概率为

$$P(A)=\frac{G\text{的测度}}{\Omega\text{的测度}}$$

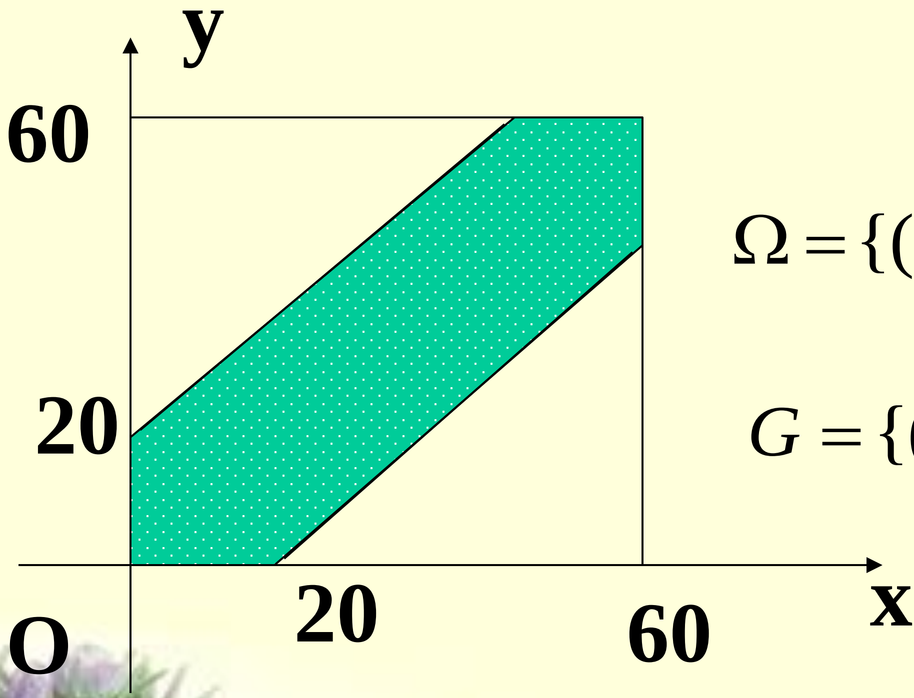
如



例10 会面问题

两人约定于8点到9点到某地会面，先到者等20分钟后离去，试求两人能会面的概率？

设(x,y)分别表示两人到达的时刻



$$\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 60,\quad 0\le y\le 60\}$$

$$G=\{(x,y)\,|\,|x-y|\le 20,(x,y)\in\Omega\}$$

$$P(A)=\frac{S_G}{S_\Omega}=\frac{5}{9}$$

第一章 作业2

6，7，9，10，11，13，14