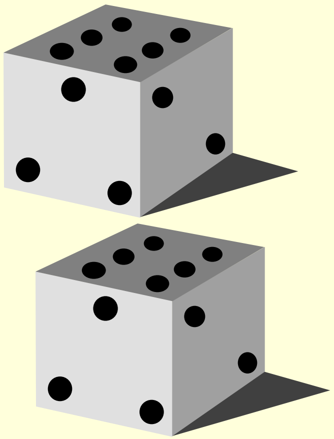
我们说，在事件B发生的条件下事件A的条件概率一般地不等于A的无条件概率.
但是，会不会出现$P(A)=P(A|B)$的情形呢？

先看一个例子：

将一颗均匀骰子连掷两次，



设 A={第二次掷出6点},
B={第一次掷出6点},

显然 $P(A|B)=P(A)$

这就是说，已知事件B发生，并不影响事件A发生的概率，这时称事件A、B独立.

§1.4 独立性

- 两个事件独立性
- 多个事件独立性

不难证明，当P(B)>0时，有

$$P(A|B)=P(A)\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$$

两个事件的独立性

对任意的事件A，B，若$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A，B是相互独立的。

注意

★ 必然事件与任何事件独立

★ 不可能事件与任何事件独立

例1 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记 A={抽到K}, B={抽到的牌是黑色的}

问事件A、B是否独立？

解: 由于 $P(A)=4/52=1/13$, $P(B)=26/52=1/2$

$P(AB)=2/52=1/26$

可见, $P(AB)=P(A)P(B)$

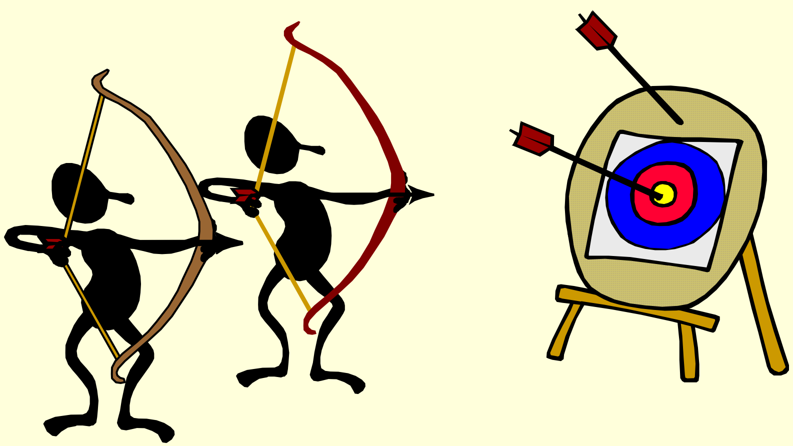
或　由于 $P(A)=1/13$, $P(A|B)=2/26=1/13$

$P(A)= P(A|B)$, 说明事件A、B独立.

在实际应用中,往往根据问题的<u>实际意义</u>去判断两事件是否独立.

例如

甲、乙两人向同一目标射击，记 A={甲命中}, B={乙命中}，A与B是否独立？



再如　一批产品共n件，其中合格品a件，

从中抽取2件，设 A_i={第i件是合格品}　$i=1,2$

若抽取是有放回的

则A_1与A_2独立.

若抽取是无放回的

则A_1与A_2不独立.

性质

若事件A与B相互独立，则下列各对事件也相互独立

A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$

证明：仅证A与$\overline{B}$独立

A、B独立

$$P(A\overline{B}) = P(A - AB)$$

概率的性质

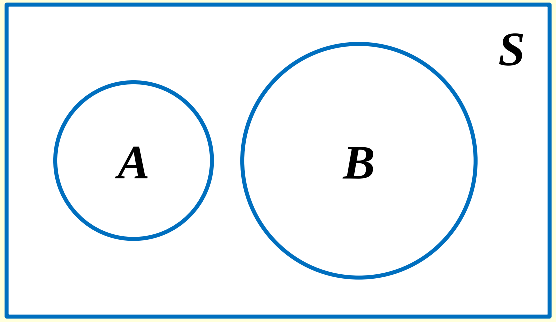
$$= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(\mathrm{B})$$

$$= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\overline{B})$$

故A与$\overline{B}$独立.

思考：如图的两个事件是独立的吗？

若A、B互斥，且$P(A)>0$，$P(B)>0$，



由互斥性得：$P(AB)=0$；

由于$P(A)>0$，$P(B)>0$，所以$P(A)P(B)\neq 0$，

即：A与B不独立。

反之，若A与B独立，且$P(A)>0$，$P(B)>0$，

易知：$P(AB)=P(A)P(B)>0$，故$AB\neq\phi$，

即A、B不互斥。

$P(A)>0$，$P(B)>0$
独立与互斥不能同时成立

独立性与互斥

若A与B互斥，且$P(A)$和$P(B)$至少有一个为0时

由于$P(AB)=P(\phi)=0$，且$P(A)P(B)=0$，所以A与B独立。

若A、B独立，且$P(A)$和$P(B)$至少一个为0时

虽然$P(AB)=P(A)P(B)=0$，但AB不一定为ϕ，所以A、B不一定互斥。

多个事件的独立性

对任意三个事件A，B，C，若

$$\left.\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}\right\}$$

则称事件A，B，C相互独立，简称A，B，C 独立

对任意n个事件$A_1 \ldots A_n$，若

（1） $P(A_i A_j) = P(A_i) P(A_j)$ $\quad 1 \le i < j \le n$

（2） $P(A_i A_j A_k) = P(A_i) P(A_j) P(A_k)$

$1 \le i < j < k \le n$

（3）
$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = \bigcap_{i=1}^{n} P(A_i)$$

则称事件$A_1, \ldots, A_n$相互独立，简称$A_1, \ldots, A_n$独立

请注意多个事件两两独立与相互独立的区别与联系

对$n(n>2)$个事件

相互独立 $\longrightarrow$ 两两独立

$\xleftarrow{\;?\;}$

反例 有一均匀的四面体，各面涂有颜色如下

1	2	3	4
R			R
	W		W
		Y	Y

将四面体向上抛掷一次，观察向下一面出现的颜色。

设事件 $\begin{cases} R \text{ —— } \text{红色} \\ W \text{ —— } \text{白色} \\ Y \text{ —— } \text{黄色} \end{cases}$

则

$$P(R)=P(W)=P(Y)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(RW)=P(WY)=P(RY)=\frac{1}{4}$$

$$P(RW)=P(R)P(W)$$

$$P(WY)=P(W)P(Y)$$

$$P(RY)=P(R)P(Y)$$

$$P(RWY)=\frac{1}{4}\quad\neq P(R)P(W)P(Y)=\frac{1}{8}$$

性质1　　若$A_1,\ldots,A_n$相互独立，则

其中任意k（$k \le n$）个事件也是相互独立的

性质2

若 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立,将这 n 个事件任意分成 k 组,同一个事件不能同时属于两个不同的组,则对每组的事件进行求和、积、差、对立等运算所得到的 k 个事件也相互独立.

例如

事件 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 相互独立

$\overline{A_1A_2}-A_3A_4$ 　　　　　 A_5

$A_1\cup A_2A_3$ 　　　　　 $\overline{A_4}-A_5$

也相互独立

性质3　　若$A_1,\ldots,A_n$相互独立，则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n}\left(1 - P(A_k)\right)$$

设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n)$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) \cdots P(\overline{A}_n)$$

$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_n$

也相互独立

也就是说，n个独立事件至少有一个发生的概率等于1减去各自对立事件概率的乘积.

例2

甲，乙，丙三人**同时独立**向同一目标射击，他们射中目标的概率分别为0.4,0.5,0.7。求

(1)　至少有一人射中目标的概率

(2)　恰有一人射中目标的概率

解: 设$A=\{\text{甲射中}\},B=\{\text{乙射中}\},C=\{\text{丙射中}\}$

(1)　$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=0.91$

$$(2)P(A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)$$

$$=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$$

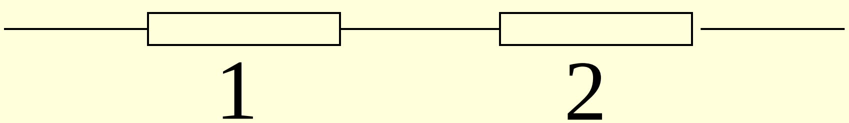
$$=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)$$

例3 系统的可靠性问题

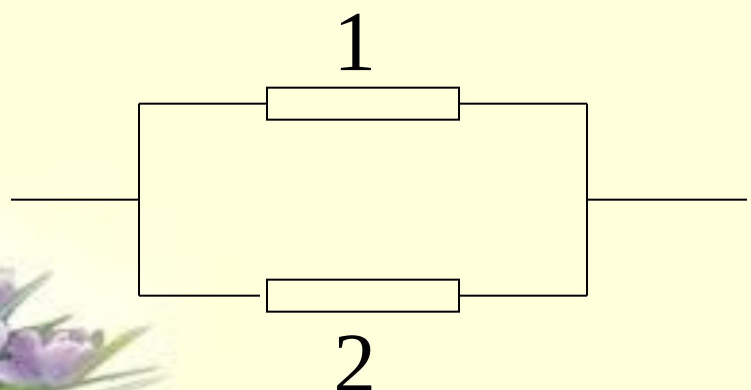
一个元件(或系统)能正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠性

系统由元件组成, 常见的元件连接方式:

串联

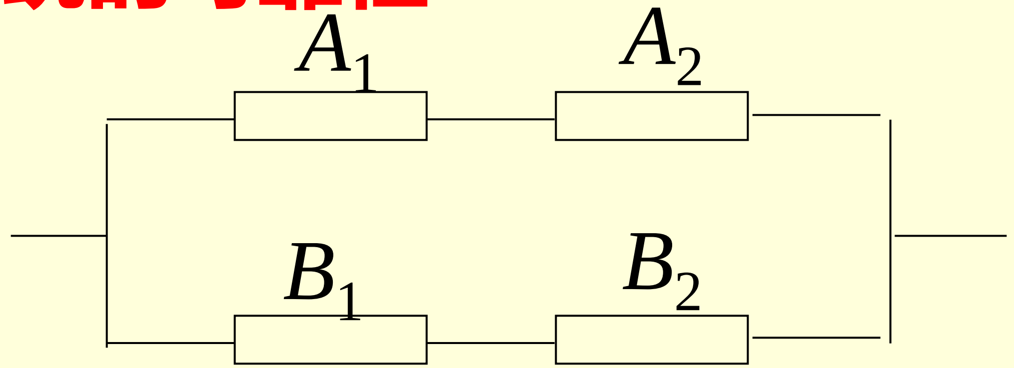


并联



(1)　两系统都是由 4 个元件组成,每个元件正常工作的概率为 p , 每个元件是否正常工作相互独立.两系统的连接方式如下图所示, 比较两系统的可靠性.

S_1:



解: 设A_1, A_2, B_1, B_2分别表示四个元件正常 工作,

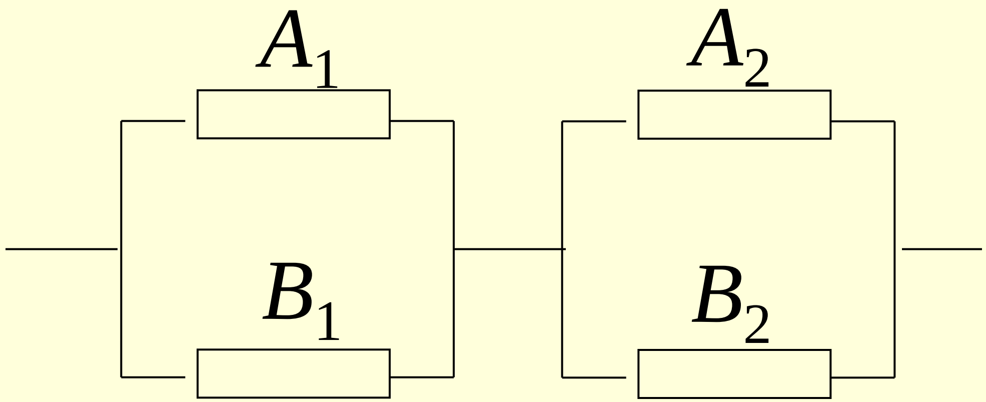
S_1为第一个系统正常工作

由题意　$S_1 = A_1A_2 \cup B_1B_2$

$$P(S_1) = P(A_1A_2) + P(B_1B_2) - P(A_1A_2B_1B_2)$$

$$= 2p^2 - p^4 = p^2(2 - p^2)$$

S_2:



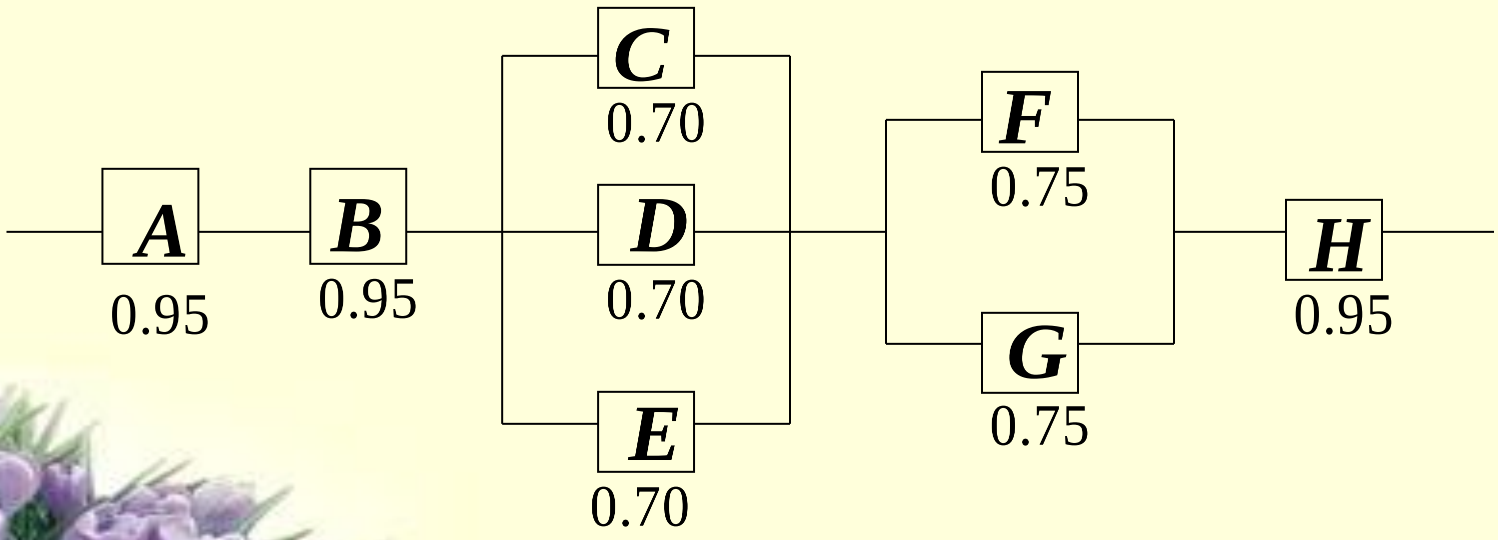
$$S_2 = (A_1 \cup B_1)(A_2 \cup B_2)$$

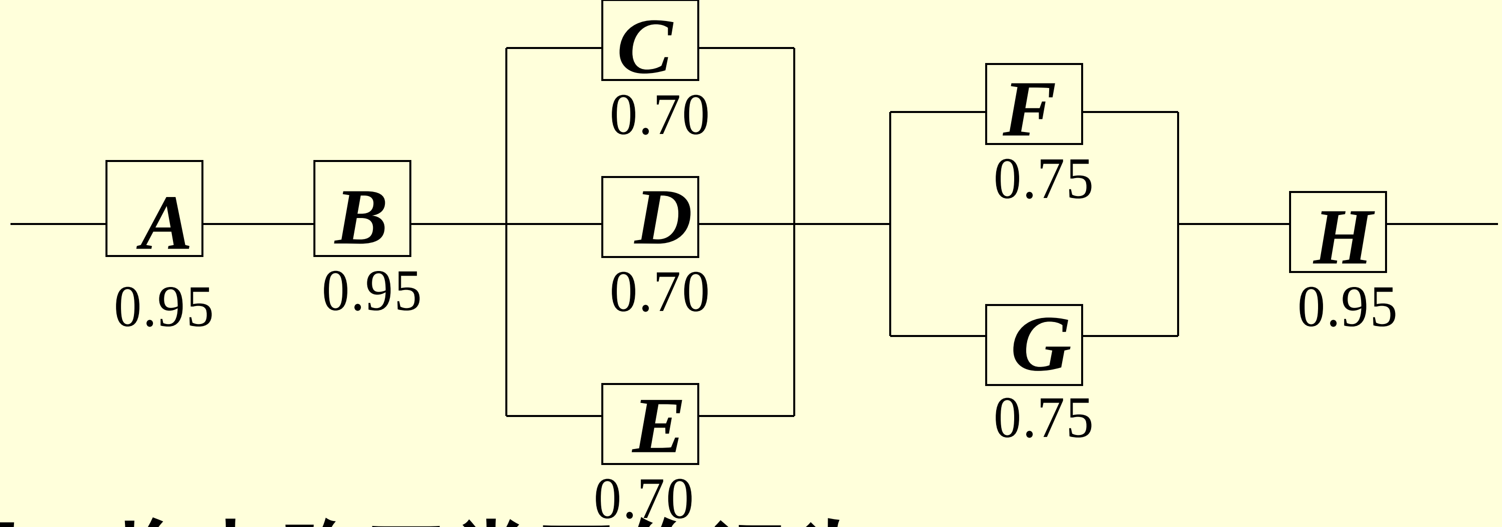
$$P(S_2) = \prod_{i=1}^{2} P(A_i \cup B_i) = \left(2p - p^2\right)^2$$

$$= p^2(2-p)^2 \geq p^2(2-p^2)$$

$$P(S_2) \geq P(S_1)$$

(2) 下面是一个串并联电路示意图． A、B、C、D、E、F、G、H都是电路中的元件．它们下方的数是它们各自正常工作的概率．求电路正常工作的概率．





解：将电路正常工作记为 W，

由题意 $W = AB(C \cup D \cup E)(F \cup G)H$

由于各元件独立工作，有

$$P(W)=P(A)P(B)P(C\cup D\cup E)P(F\cup G)P(H)$$

其中

$$P(C\cup D\cup E)=1-P(\overline{C})P(\overline{D})P(\overline{E})=0.973$$

$$P(F\cup G)=1-P(\overline{F})P(\overline{G})=0.9375$$

代入得 $P(W)\approx 0.782$