

复习

二维随机变量 (X,Y)

离散型
联合分布律
边缘分布律

连续型
联合密度函数
边缘密度函数

联合分布函数 $F(x,y)$
边缘分布函数 $F_X(x)$ $F_Y(y)$

3.3 随机变量的独立性

两事件 A, B 独立的定义是：

若 $P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件 A, B 独立。



对一切集合 B_1, B_2

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2)$$

随机变量的独立性

若二维随机变量 (X, Y) 对任意实数 x, y , 均有

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

成立, 则称随机变量是相互独立的.

即设 X, Y 是两个 $r.v$, 若对任意的 x, y , 有

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称 X, Y 相互独立.

性质 若 X, Y 相互独立

对一切集合 B_1, B_2

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2)$$

例如 若 X, Y 相互独立,

$$\begin{aligned} &P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) \\ &= P(x_1 < X \leq x_2)P(y_1 < Y \leq y_2) \end{aligned}$$

$$P(X > x, Y > y) = P(X > x)P(Y > y)$$

例1 一电子元件由两个部件构成，以 X, Y 分别表示两个部件的寿命(单位：千小时). 已知 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求 X 与 Y 的边缘分布函数，并判断 X 与 Y 是否相互独立？

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

解

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

同理

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \forall x, y \in R.$$

所以 X 与 Y 相互独立.

X 与 Y 相互独立. 此时, 若再求两个部件的寿命都超过100小时的概率, 则

$$\begin{aligned} & P(X > 0.1, Y > 0.1) \\ &= P(X > 0.1)P(Y > 0.1) \\ &= [1 - P(X \leq 0.1)][1 - P(Y \leq 0.1)] \\ &= [1 - F_X(0.1)][1 - F_Y(0.1)] \\ &= e^{-0.1} \cdot e^{-0.1} \\ &= e^{-0.2}. \end{aligned}$$

定理1 若 (X, Y) 是离散型随机变量，则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j),$$

若 (X, Y) 是离散型随机变量，则 X 与 Y 不相互独立的充分必要条件是

存在 x_i, y_j ,使得

$$P(X = x_i, Y = y_j) \neq P(X = x_i)P(Y = y_j),$$

例2 (2002-2003试题)

设 X 的分布律为

X	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
P	0.2	0.5	0.3

$$Y = \cos X, Z = \sin X$$

(1) Y 与 Z 是否相互独立 (2) $Y+Z$ 的分布律

解: (1)

X	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$Y=\cos X$	0	1	0
$Z=\sin X$	-1	0	1

X	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$Y=\cos X$	0	1	0
$Z=\sin X$	-1	0	1

$$P(Y = 0, Z = -1) = P(X = -\pi / 2) = 0.2$$

$$P(Y = 1, Z = 0) = P(X = 0) = 0.5$$

$$P(Y = 0, Z = 1) = P(X = \pi / 2) = 0.3$$

Z \ Y	0	1
-1	0.2	
0		0.5
1	0.3	

$Z \backslash Y$	0	1	$P(Z=j)$
-1	0.2		0.2
0		0.5	0.5
1	0.3		0.3
$P(Y=i)$	0.5	0.5	

由于

$$P(Y = 0, Z = -1) \neq P(Y = 0)P(Z = -1)$$

所以Y与Z不独立

(2)

X	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$Y=\cos X$	0	1	0
$Z=\sin X$	-1	0	1
$Y+Z$	-1	1	1

$$P(Y + Z = -1) = P(X = -\pi / 2) = 0.2$$

$$P(Y + Z = 1) = P(X = 0) + P(X = \pi / 2) = 0.8$$

$Y+Z$	-1	1
P	0.2	0.8

定理2 若 (X, Y) 是连续性随机变量, 则 X 与 Y
独立充分必要条件是

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), a.e.$$

若 (X, Y) 是连续性随机变量, 则 X 与 Y 不独立充分必要条件是

存在面积大于0的区域 D , 使得
 $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y), \forall (x, y) \in D$

证明独立性的步骤

1求联合分布律(联合密度)

2求边缘分布律(边缘密度)

3 验证联合分布律(联合密度)等于边缘分布律
(边缘密度)的乘积

证明不独立的步骤

1求联合分布律(联合密度)

2求边缘分布律(边缘密度)

3 离散型 找到 x_i, y_j , 使得

$$P(X = x_i, Y = y_j) \neq P(X = x_i)P(Y = y_j),$$

连续型

找到面积大于0的区域 D , 使得

$$f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y), \forall (x, y) \in D$$

例3 若二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布

$N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$ 试证 X 与 Y 相互独立的充

必要条件是 $\rho = 0$

证 \longrightarrow 对任何 x, y 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \end{aligned}$$

取 $x = \mu_1, y = \mu_2$

上页

下页

返回

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

故

$$\rho = 0$$

← 将 $\rho = 0$ 代入 $f(x, y)$ 即得

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

对于正态分布 独立与不相关等价

例4已知 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

讨论 X, Y 是否独立?

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由图可知边缘密度函数为

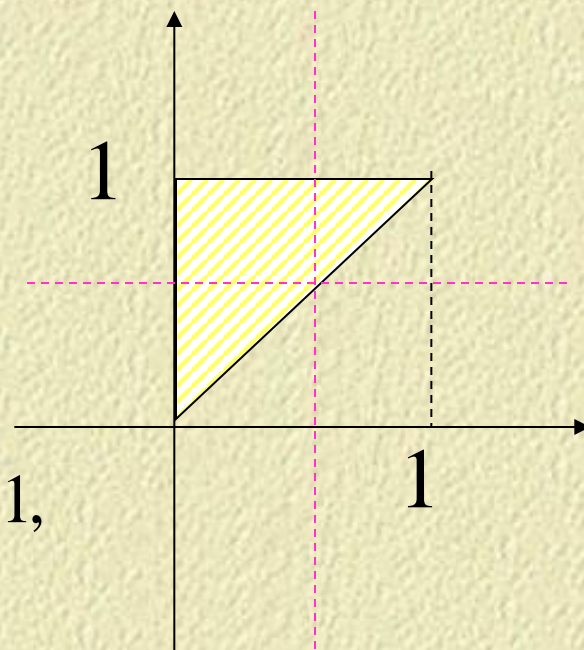
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$= \begin{cases} \int_x^1 8xy dy = 4x(1 - x^2), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^y 8xy dx = 4y^3, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 16x(1 - x^2)y^3, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

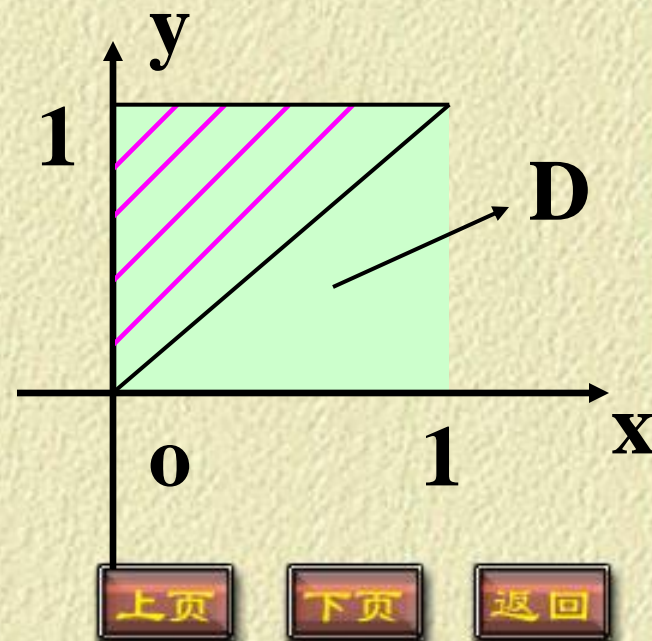
$$f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 16x(1-x^2)y^3, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{记 } D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

显然,

$$f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y), \quad (x, y) \in D$$

故 X, Y 不独立



上页

下页

返回

例5 设 X, Y 相互独立且同分布, 有

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $P(X + Y \leq 1)$

解: (X, Y) 的联合密度函数为

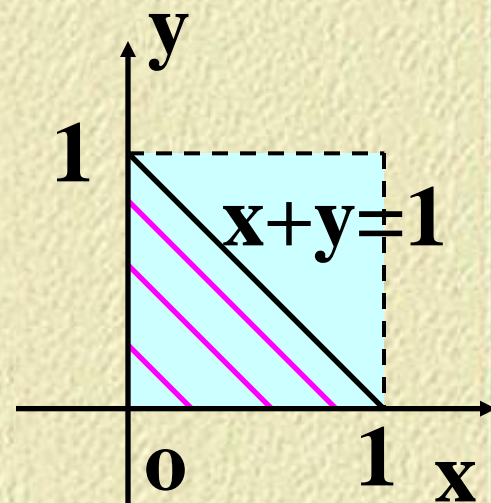
$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$= \begin{cases} 4xy & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$P(X + Y \leq 1)$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} 4xy \, dy \right] dx$$

$$= \frac{1}{6}$$



上页

下页

返回

n 维随机变量

设 n 维随机变量为 (X_1, \dots, X_n) 的分布函数定义为

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

若任意实数 x_1, \dots, x_n 有若任意实数 x_1, \dots, x_n 有

$$\begin{aligned} &P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) \cdots P(X_n \leq x_n), \end{aligned}$$

则称随机变量 (X_1, \dots, X_n) 是相互独立的。

定理 若 X_1, \dots, X_n 相互独立,而

$$Y_1 = g_1(X_1, \dots, X_m), Y_2 = g_2(X_{m+1}, \dots, X_n)$$

则 Y_1 与 Y_2 独立. 这里 g_1, g_2 为连续函数.

例如, 若 X, Y 为相互独立的随机变量

则 $aX + b, cY + d$ 也相互独立;

X^2, Y^2 也相互独立;