多维随机变量及其分布

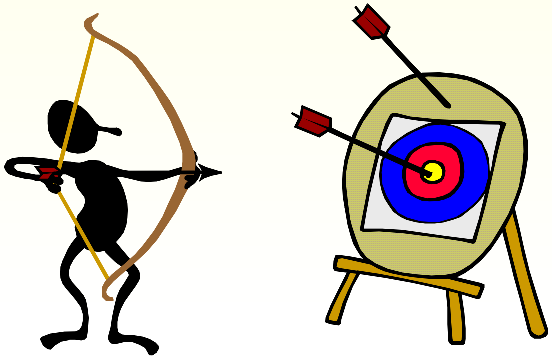
第三章

§ 3.1 二维随机变量及其分布

到现在为止，我们只讨论了一维随机变量及其分布. 但有些随机现象用一个随机变量来描述还不够，而需要用几个随机变量来描述.

例：在研究四岁至六岁儿童的生长发育中，每个儿童的身高X_1，体重X_2是两个重要的指标，此时(X_1, X_2) 为二维随机变量。

例：在打靶试验中，我们要考察弹着点是上下偏离目标还是左右偏离目标，这时需要考虑弹着点的位置坐标（X, Y）.



例

在三维空间中，飞机的重心在空中的位置是由三个随机变量(三个坐标X,Y,Z ）来确定的.

X,Y ,Z 都是随机变量，则称(X,Y ,Z)是三维随机向量.

说明

二维随机变量 (X, Y) 的性质不仅与 X 、Y 有关,而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.

定义

给定概率空间（S, $\mathfrak{I}$, P）,若$X_1,\ldots,X_n$是定义在样本空间S上的n个随机变量，则称

$$X=(X_1,\ldots,X_n)$$

为 n 维随机变量，或称 n 维随机向量

本章主要研究下列问题

(1) (X, Y)的联合分布与边缘分布

(2) (X,Y)的分量X与Y的关系

(3) (X,Y)的一些简单函数的分布

本节主要内容

二维随机变量 (X,Y)

离散型

联合分布律

边缘分布律

连续型

联合密度函数

边缘密度函数

联合分布函数　　$F(x,y)$

边缘分布函数　　$F_X(x)$　$F_Y(x)$

联合分布函数

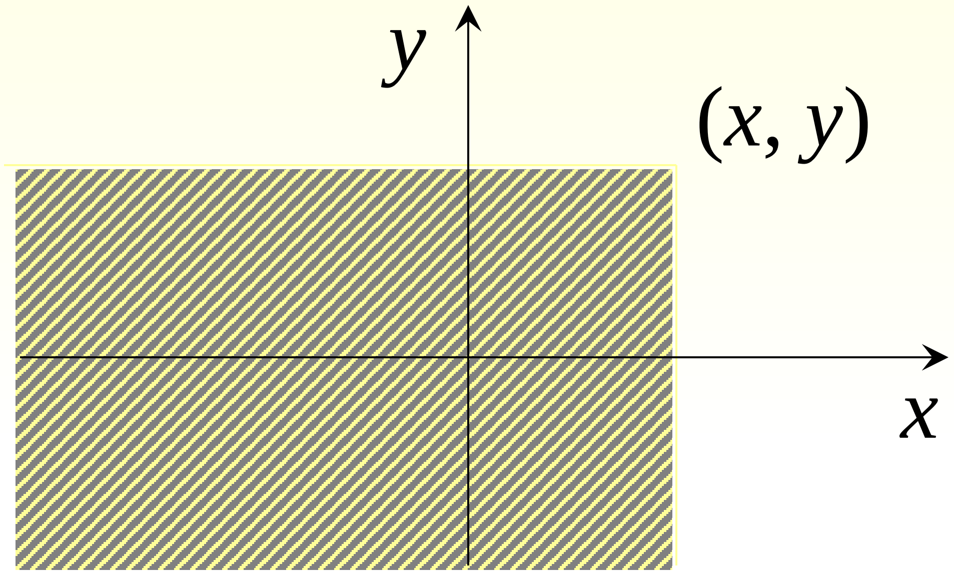
设（X,Y)是二维随机变量，对任意的实数x, y 令

$$F(x, y)=P\{X\leq x, Y\leq y\}$$

则称 $F(x, y)$为（X,Y）的联合分布函数。

分布函数的几何意义

如果用平面上的点(x, y)表示二维随机变量(X, Y)的一组可能的取值，则$F(x, y)$表示(X, Y)的取值落入下图所示的角形区域的概率



$F(x, y)$的性质

性质1(单调性)

对于x 和y, $F(x, y)$都是**单调不减**函数，

即若$x_1 < x_2$,对任意的实数y，则有

$$F(x_1,y) \le F(x_2, y);$$

若$y_1 < y_2$,对任意的实数x，则有

$$F(x,y_1) \le F(x,y_2)$$

性质2 (规范性)

对于任意x 和y,有

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y)=0$$

$$\lim_{y\to-\infty} F(x,y)=0$$

$$\lim_{x,y\to+\infty} F(x,y)=1$$

性质3 (右连续性)

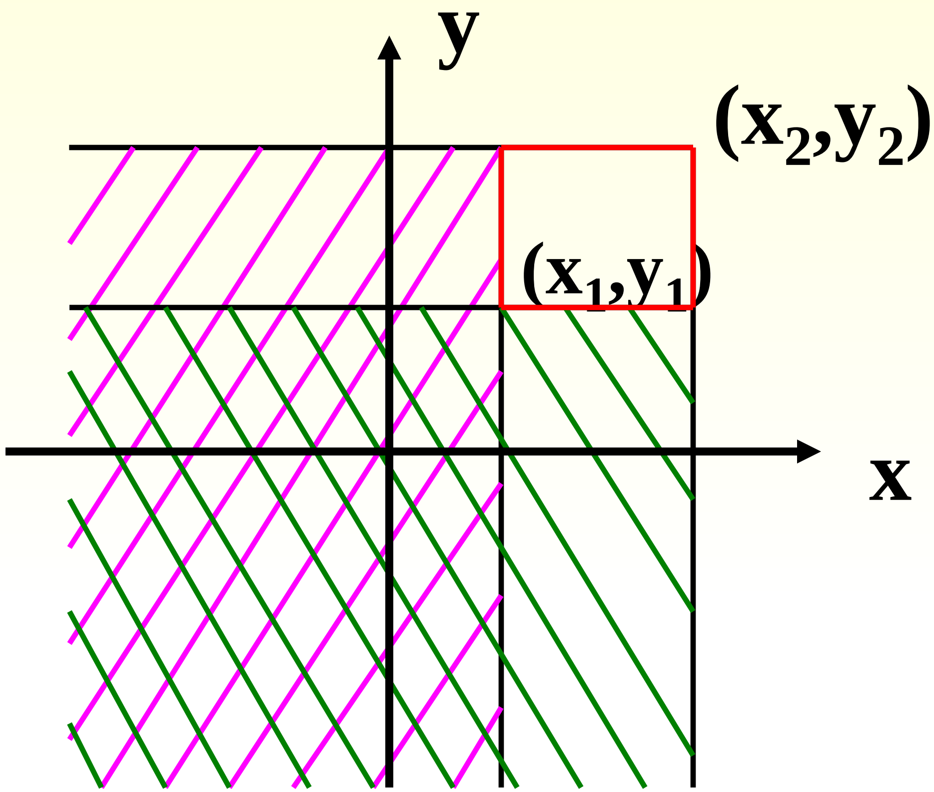
对于x 和y，$F(x, y)$都是右连续的，即对任意的实数x_0和y_0，均有

$$\lim_{x\to x_0^+} F(x, y)=F(x_0, y),$$

$$\lim_{y\to y_0^+} F(x, y)=F(x, y_0)$$

性质4(单调性)

若$x_1< x_2, y_1<y_2$，则 $P\{x_1<X\leq x_2, y_1<Y\leq y_2\}=$
$F(x_2, y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1, y_1)\geq 0$



说 明

上述四条性质是二维随机变量分布函数的最基本的性质，即任何二维随机变量的分布函数都具有这四条性质；

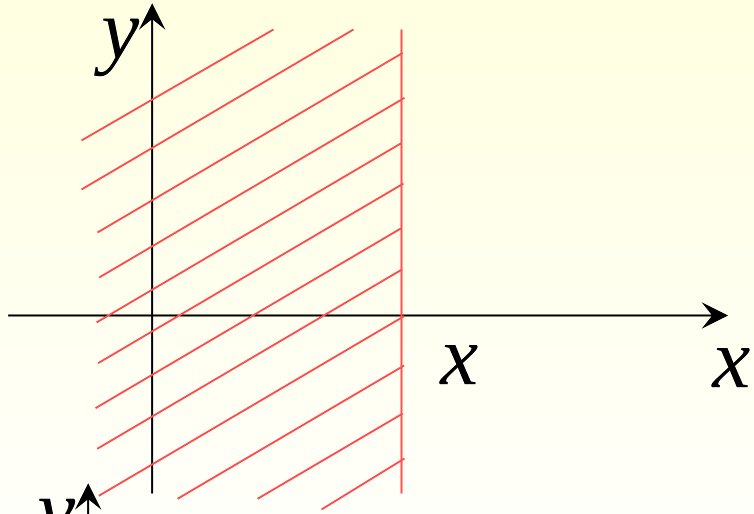
更进一步地，我们还可以证明：如果某一二元函数具有这四条性质，那么，它一定是某一二维随机变量的分布函数（证明略）.

边缘分布函数

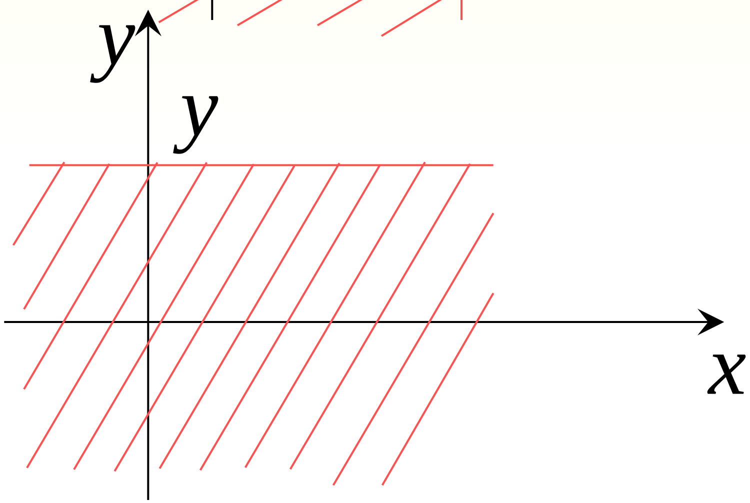
记(X,Y)的分量X，Y的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$称它们为$(X，Y)$的边缘分布函数

联合分布函数与边缘分布

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty) = F(x, +\infty)$$



$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X < +\infty, Y \le y) = F(+\infty, y)$$



例1： **设**

$$(X,Y)\sim F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y-\lambda xy} & x\geq 0,y\geq 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中$\lambda>0$

求 (X,Y)的边缘分布函数。

例2 设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{2}\right)$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

其中A,B,C为常数.

(1) 确定A,B,C；

(2) 求(X,Y)的边缘分布函数;

(3) 求$P(X>2)$

解 (1) $F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1$

$$F(-\infty,+\infty)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$F(+\infty,-\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad B=\frac{\pi}{2},C=\frac{\pi}{2},A=\frac{1}{\pi^2}$$

(2) $F_X(x)=F(x,+\infty)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2}, \qquad -\infty<x<+\infty,$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{2}, \qquad -\infty < y < +\infty,$$

(3)

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

3.2.1 离散型随机向量及其分布

定义: 若二维随机变量(X, Y)可能取的值(向量)是有限多个或可列无穷多个, 则称(X, Y) 为二维离散型随机变量。

联合分布律

设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能的取值为

$$(x_i, y_j), \qquad i，j=1,2,...,$$

取这些值的概率为

$$p_{ij} = P\{X=x_i,Y=y_i\} \qquad i, \quad j=1,2,\ldots\ldots \qquad (1)$$

称 (1)式为(X,Y)的联合分布律.

(X, Y)的联合分布律可以用表格的形式表示如下

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

性质

(1) $p_{ij} \geq 0$，$i, j=1,2,\ldots$

(2) $$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

边缘分布律

若(X,Y)为离散型随机变量，则X,Y均为离散型随机变量 。记分量X 和Y 的分布律分别为

$$p_{i.} = P\{X = x_i\}, \quad i=1, 2, \ldots \qquad (2)$$

$$p_{.j} = P\{Y = y_j\}, \quad j=1, 2, \ldots \qquad (3)$$

称(2)和(3)分别为(X,Y)关于X 和Y 的边缘分布律，

简称为(X,Y)的边缘分布律。

联合分布律与边缘分布律的关系

设二维离散型随机变量(X,Y) 的联合分布律为

$$p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\} \quad i, j=1,2,\ldots$$

则

$$p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}$$

$$p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$$

例3 (二维两点分布)

袋中有2只白球与3只黑球,现进行无放回的摸球,定义下列随机变量

$$X=\begin{cases}1 & \text{第一次摸白球}\\ 0 & \text{第一次摸黑球}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1 & \text{第二次摸白球}\\ 0 & \text{第二次摸黑球}\end{cases}$$

求（*X*, *Y*）的联合分布律与边缘分布律。

Y \ X	0	1	P(Y=i)
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
P(X=i)	3/5	2/5	

例4.设随机变量X在1、2、3、4四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量Y在$1\sim X$中等可能地取一个整数值。

试求（1）(X,Y)的分布律；（2）$P\{X\le 2, Y\le 3\}$。

解：（1）X, Y所有可能的取值为：1，2，3，4

易知，当$j>i$时，$P\{X=i,Y=j\}=0$

当$j\le i$时，$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\mid X=i\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i}$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ 4, j\le i$$

于是(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	0	1/8	1/12	1/16
3	0	0	1/12	1/16
4	0	0	0	1/16

（2）$P\{X\le 2, Y\le 3\}$

$$=P\{X=1, Y=1\}+P\{X=1, Y=2\}+P\{X=1, Y=3\}$$
$$+P\{X=2, Y=1\}+P\{X=2, Y=2\}+ P\{X=2, Y=3\}$$

$$=1/4+0+0+1/8+1/8+0=1/2$$

例5. 设试验E只有3种可能的结果A_1,A_2,A_3，对试验E进行n次独立重复试验，用X_i表示这n次试验中事件A_i发生的次数，$P(A_i)=p_i$, $i=1,2,3$. 求(X_1,X_2)的联合分布律和边缘分布律。

$$P\{X_1=k_1, X_2=k_2\}$$

$$=C_n^{k_1}\cdot C_{n-k_1}^{k_2}\, p_1^{\,k_1} p_2^{\,k_2} p_3^{\,n-k_1-k_2}$$

$$=\frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!} p_1^{\,k_1} p_2^{\,k_2} p_3^{\,n-k_1-k_2}$$

$$=\frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!} p_1^{\,k_1} p_2^{\,k_2}(1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2}$$

$$k_1,k_2=0,1,2,\cdots,n,\quad k_1+k_2\le n.$$

上式即为(X_1, X_2)的联合分布律。

$$P\{X_1=k_1\}=\sum_{k_2=0}^{n-k_1}P\{X_1=k_1,X_2=k_2\}$$

$$=\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}(1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2}$$

$$=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}p_1^{k_1}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}p_2^{k_2}(1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2}$$

$$=C_n^{k_1}p_1^{k_1}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}C_{n-k_1}^{k_2}p_2^{k_2}(1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2}=C_n^{k_1}p_1^{k_1}[p_2+(1-p_1-p_2)]^{n-k_1}$$

$$=C_n^{k_1}p_1^{k_1}(1-p_1)^{n-k_1}$$

即$X_1 \sim b(n,p_1)$　　同样的方法可以求得$X_2 \sim b(n,p_2)$

3.2.2 连续型随机向量及其联合密度

定义 设二维随机变量(X, Y)的分布函数为$F(x, y)$。若存在非负可积函数$f(x, y)$, 对任意实数x, y有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu$$

则称(X, Y)为连续型二维随机变量，且称函数$f(x, y)$为二维随机变量(X, Y)的联合密度函数，简称为联合密度或概率密度。

性质:

(1) $$f(x,y)\geq 0;$$

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx=1$$

充要条件

(3) 若$f(x,y)$在点(x,y)处连续，则

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

性质:

(4) 设G是xOy平面上的一个区域，则有

$$P((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)dxdy.$$

步骤:

1 在坐标系中画出f(x,y)非零区域

2 画出区域G

3 找到f(x,y)非零区域和G相交区域

4 找到积分限 5计算积分

例6 设二维连续型随机变量 (X, Y) 具有**密度函数**

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求分布函数 $F(x, y)$.

解: $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$

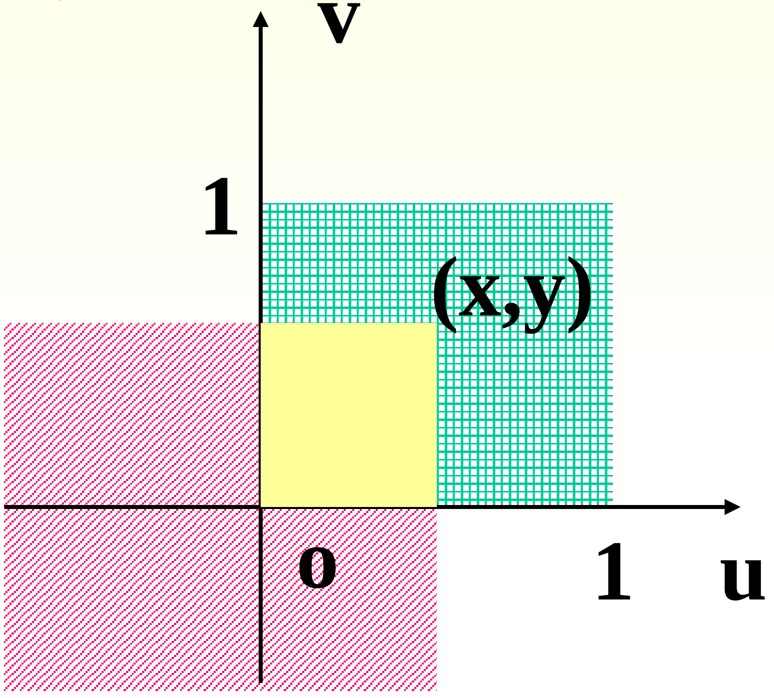
若x>0，y<0或x<0，y>0

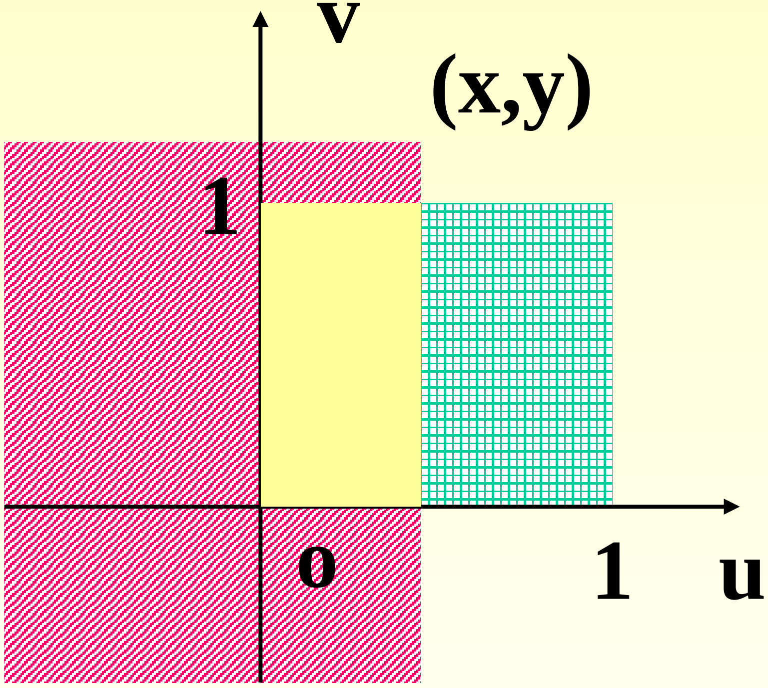
或x<0，y<0

$$F(x,y)=0$$

若0<x<1，0<y<1

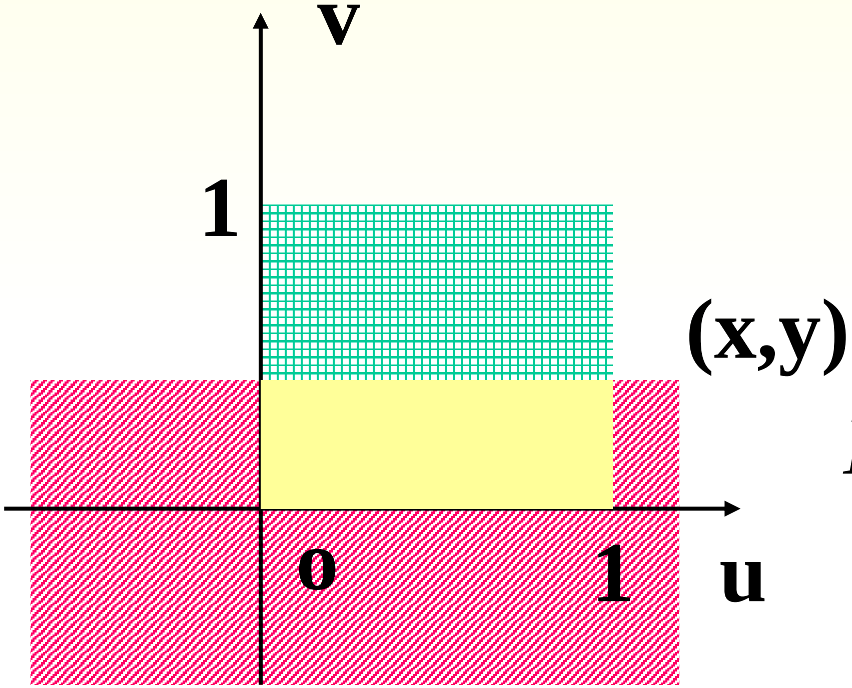
$$F(x,y)=\int_0^y[\int_0^x 4uvdu]dv=x^2y^2$$





若$0<x<1$， $y>1$

$$F(x,y)=\int_0^1[\int_0^x 4uvdu]dv = x^2$$

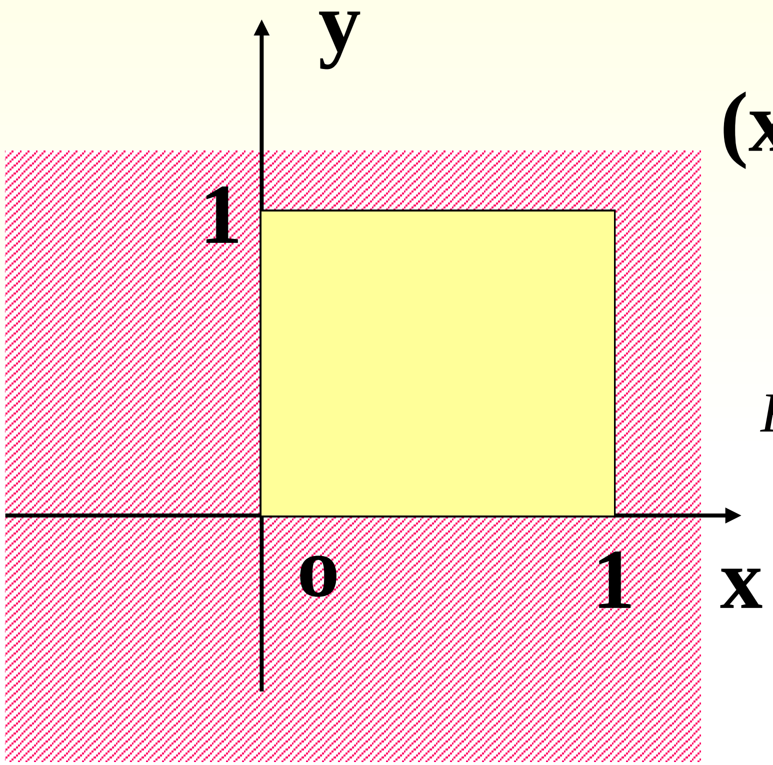


若$x>1$， $0<y<1$

$$F(x,y)=\int_0^y[\int_0^1 4uvdu]dv = y^2$$

若x>1, y>1

$$F(x,y)=\int_0^1[\int_0^1 4uv\,du]dv=1$$



$$F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{其他}\\ x^2y^2 & 0\le x\le 1\quad 0\le y\le 1\\ x^2 & 0<x<1\quad y>1\\ y^2 & x>1\quad 0<y<1\\ 1 & x\ge 1, y\ge 1\end{cases},$$

例7 设(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x\geq 0, y\geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求(1) (X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$;

(2) $P(X>1)$;

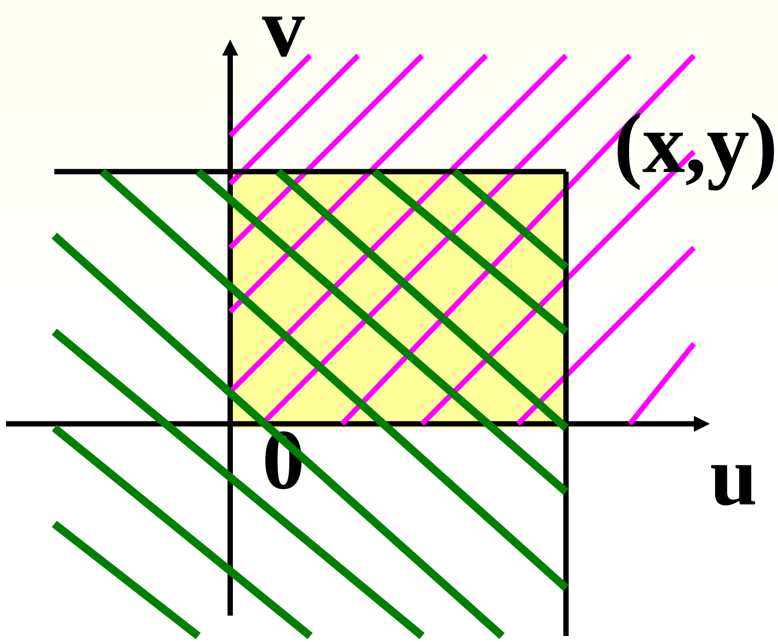
(3) $P\{(X,Y)\in D\}$, 其中$D=\{(x,y): x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$;

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x\ge 0, y\ge 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) $F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$

若$x>0, y>0$ $\quad F(x,y)=\int_0^x\left[\int_0^y e^{-(u+v)}dv\right]du$

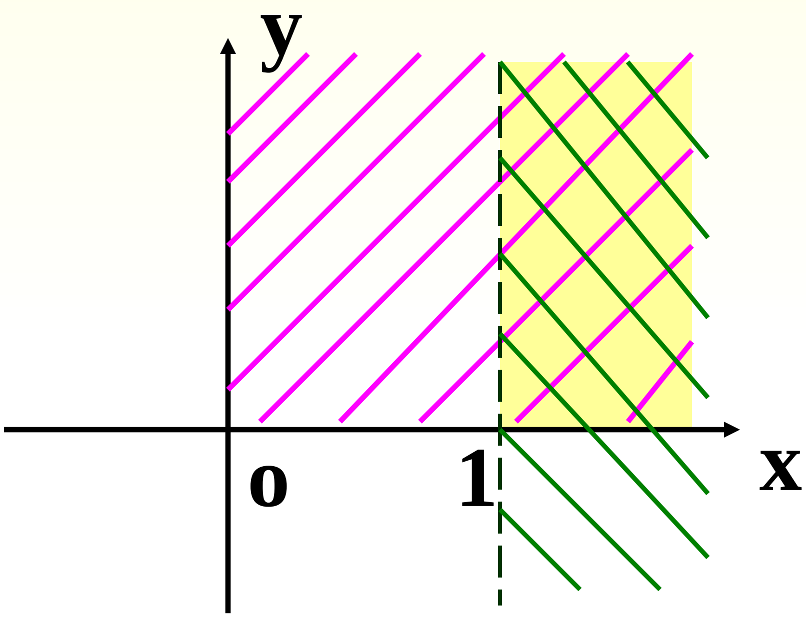
$$=(1-e^{-x})(1-e^{-y})$$



$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}) & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(2) $P(X > 1)$

$$P(X > 1) = \iint\limits_{x>1} f(x, y)dydx$$



$$= \int_1^{\infty}[\int_0^{\infty} e^{-(x+y)}dy]dx$$

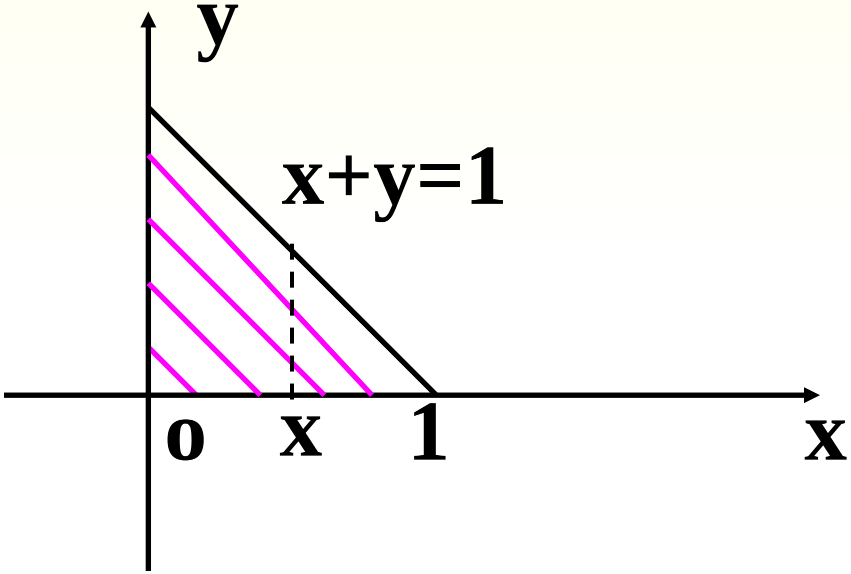
$$= e^{-1}$$

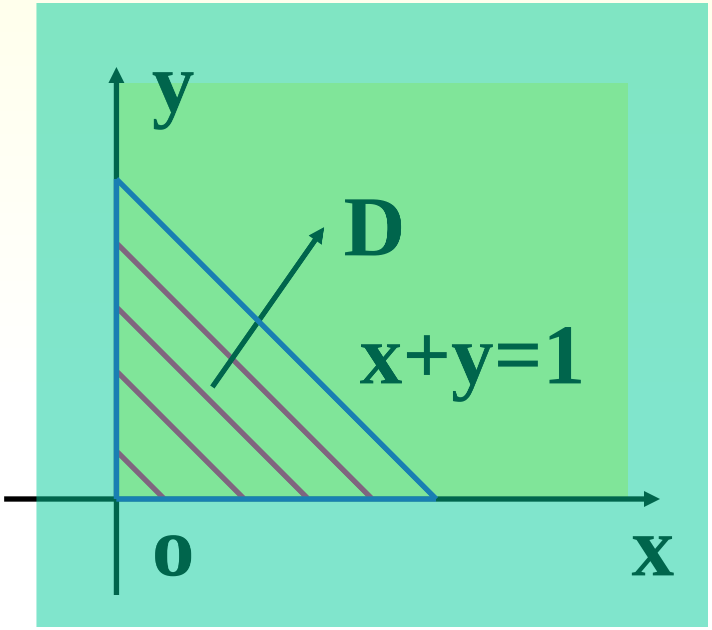
$P\{(X,Y)\in D\}$, 其中$D=\{(x,y)$: $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 1\}$;

(3) $$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^{1-x} e^{-(x+y)}\,dy\right]dx$$

$$=1-2e^{-1}$$





边缘密度函数

若(X,Y)为连续型随机变量， 则X,Y均为连续型随机变量,称X 和Y 的概率密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$为(X,Y)关于X和Y的边缘密度函数， 简称为边缘密度.

。

$f(x,y)$与 $f_X(x)$, $f_Y(y)$之间的关系

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$$

步骤

1 画出f(x,y)非零区域

2 在非零区域内找到x的范围

3 在上述范围内固定x,找到y的积分限

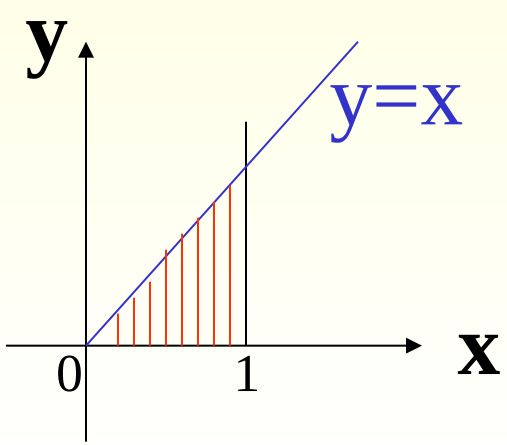
4 计算积分

例8 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) c的值；（2）两个边缘密度。

解：(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$



$$=\int_0^1\left[\int_0^x cy(2-x)dy\right]dx$$

$$=c\int_0^1[x^2(2-x)/2]dx \quad =5c/24=1,$$

$\Longrightarrow$ $c=24/5$

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\quad , & \text{其它} \end{cases}$$

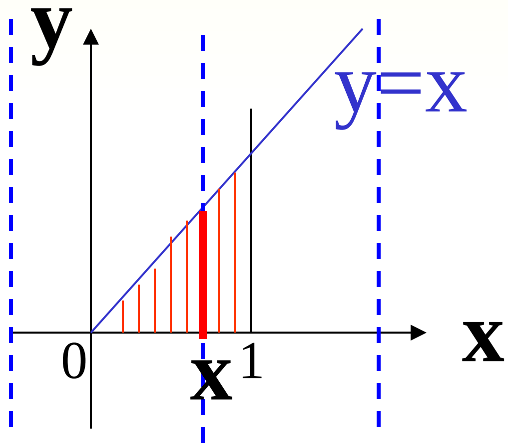
求 (2) 两个边缘密度 .

解: (2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

若x<0或x>1 $f_X(x)=0$

若 $0\le x\le 1$ $f_X(x)=\int_0^x \frac{24}{5}y(2-x)dy$

$$=\frac{12}{5}x^2(2-x),$$



即

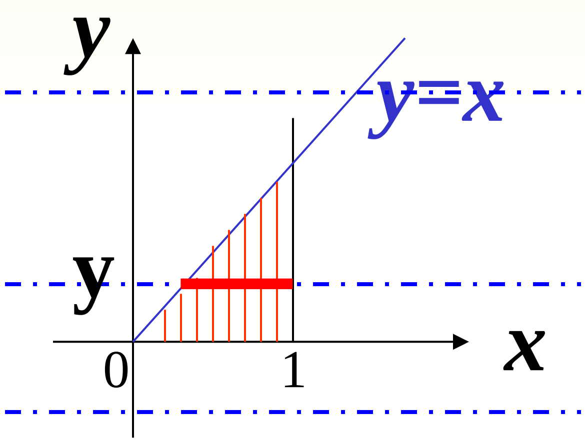
$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{12}{5}x^2(2-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\quad, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (2) 两个边缘密度 .

解: (2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

若 $0\le y\le 1$ $\quad f_Y(y)=\int_y^1 \frac{24}{5}y(2-x)dx$



$$=\frac{24}{5}y(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2}),$$

即

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{24}{5}y\left(\dfrac{3}{2}-2y+\dfrac{y^2}{2}\right), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例9 设随机变量X和Y具有联合分布

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求X和Y边缘密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

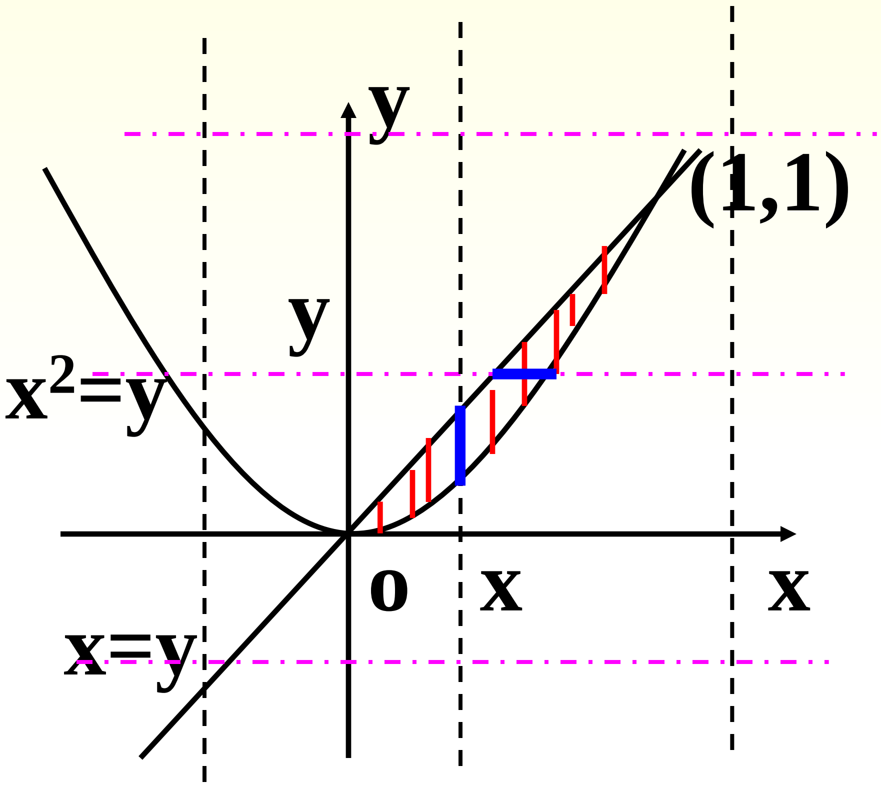
$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

若$0<x<1$

$$f_X(x)=\int_{x^2}^{x} 6dy$$

$$=6(x-x^2)$$

$$f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

若$0<y<1$

$$f_Y(y)=\int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx$$

$$=6(\sqrt{y}-y)$$

二维均匀分布

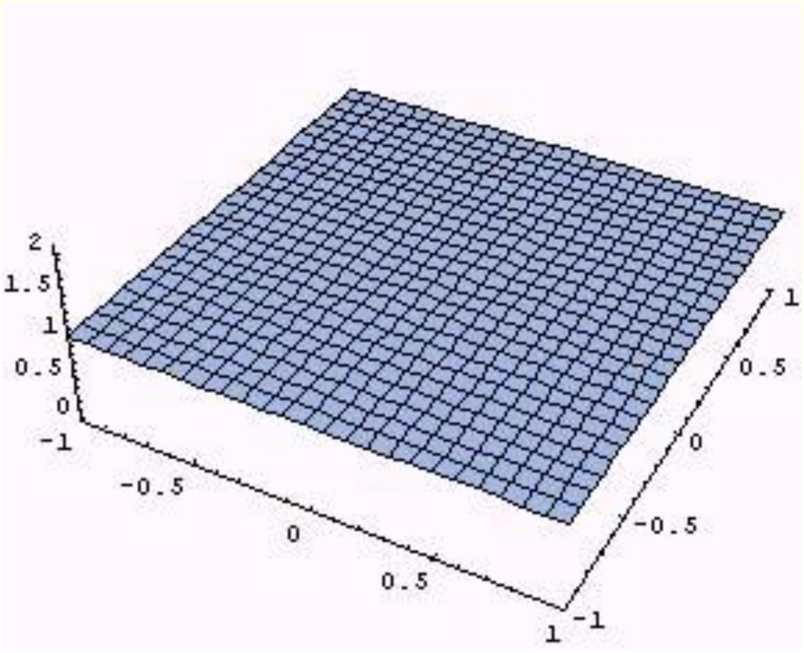
设D为平面上的有界区域, D的面积大于零.

若二维随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 1/D\text{的面积}, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases}$$

则称(X,Y)在上服从**均匀分布**

向平面上有界区域D上任投一质点，若质点落在D内任一小区域B的概率与小区域的面积成正比，而与B的形状及位置无关. 则质点的坐标（ X,Y）在D上服从均匀分布.



例10 设$(X,Y)\sim G$ 上的均匀分布，其中

$$G=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le y\le x,0\le x\le 1\right\}$$

(1) 求$f(x,y)$;

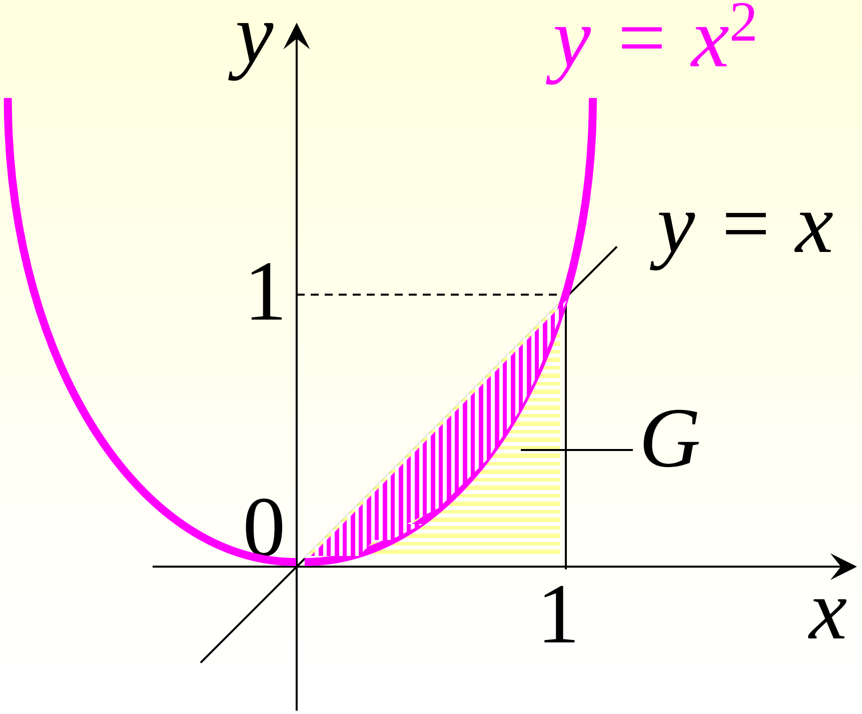
(2) 求$P(Y>X^2)$;

$$G=\{(x,y)\mid 0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$$

解 (1) $$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le y\le x, 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $P(Y>X^2)$

$$=\iint\limits_{y>x^2} f(x,y)dxdy$$



$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} 2dy$$

$$=\frac{1}{3}$$

二维正态分布

若二维随机变量（*X*,*Y*）具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2$$

$$-2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]\}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数,且

$\sigma_1>0,\sigma_2>0,\ |\rho|<1$

则称（*X*,*Y*）服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布.

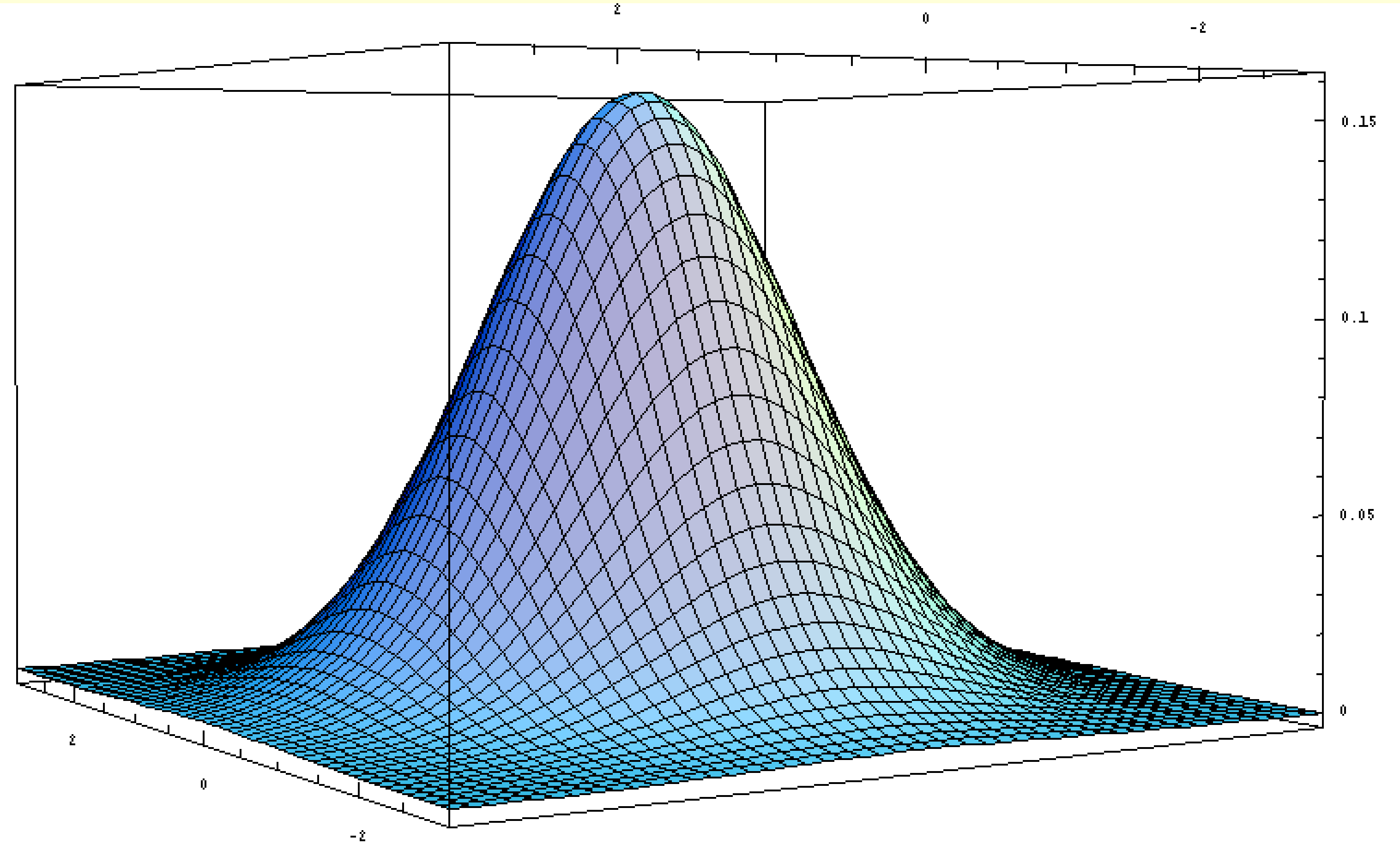
记作（*X*,*Y*）～$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho\ )$

令

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad , \qquad u = \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix}$$

则二维正态联合密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2 \, |B|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}u^T B^{-1} u}$$


2
0
-2
0.15
0.1
0.05
0
2
0
-2

性质:二维正态分布的两个边缘密度仍是正态分布.即

$$若(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$$

$$则\ X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\underline{(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2}$$

$$\underline{-2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2}]\} \; dy$$

令$u = \dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v = \dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot$$

$$(u^2 - 2\rho uv + v^2)\}dv$$

$$u^2 - 2\rho uv + v^2$$

$$= (v - \rho u)^2 + (1-\rho^2)u^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(v-\rho u)^2 + (1-\rho^2)u^2]\}$$

$$dv$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}$$

$$[(v-\rho u)^2 + (1-\rho^2)u^2]\}dv$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp(-\frac{u^2}{2})\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v-\rho u)^2\}dv$$

令 $t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(v-\rho u)$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1}\exp(-\frac{1}{2}u^2)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{1}{2}t^2)dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp(-\frac{1}{2}u^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\}$$

第三章　作业1：

1,4,5,7,8,9