

2021 级概率与数理统计试题 (A 卷)

(本试卷共八大题, 满分 100 分; 将每道题的答案写在答题卡对应的位置上, 答题卡共 8 页, 需要分别在第 1 页和第 5 页上方填写座号、姓名、学号、班级等信息, 并用 2B 铅笔在相应的位置填涂学号; 本试卷最后一页空白纸为草稿纸, 可撕下; 考试结束后试卷及草稿纸不用上交, 答案写在草稿纸及试卷上无效)

附表: $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(2.33)=0.99$, $\Phi(-2.33)=0.01$,
 $t_{0.05}(8)=1.8595$, $t_{0.05}(9)=1.8331$, $t_{0.025}(8)=2.3060$, $t_{0.025}(9)=2.2622$, $\chi_{0.05}^2(8)=15.507$,
 $\chi_{0.05}^2(9)=16.919$, $\chi_{0.95}^2(8)=2.733$, $\chi_{0.95}^2(9)=3.325$, $\chi_{0.025}^2(8)=17.535$, $\chi_{0.025}^2(9)=19.023$,
 $\chi_{0.975}^2(8)=2.180$, $\chi_{0.975}^2(9)=2.700$

一、填空题 (16 分, 每小题 2 分)

1. 设随机事件 A 和 B 满足 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.6$, $P(B|\bar{A})=0.8$, 则 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 若随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - bx, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 a, b 为常数, 且 $E(X)=1$, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$.

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(1, 1)$, $Y \sim N(2, 2)$, 则 $X - Y$ 服从的分布为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设矩形的长为 X , 宽为 Y , 且 $X \sim U(0, 2)$, 已知该矩形的周长为 20, 则该矩形的面积的数学期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立都服从 $\chi^2(2)$ 分布, 则 $X + Y$ 服从的分布为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. 设 X_1, X_2, \dots 是独立同分布的随机变量序列, 且都服从泊松分布 $P(\lambda)$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时,
 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛到 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. 若 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自正态总体 $N(0, 1)$ 的样本, 令 $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 则 $DT = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 已知儿童每 100ml 血中含钙量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 今抽取 9 名儿童进行含钙量的测试, 经计算得均值为 59.14, 标准差为 8.61. 则儿童的平均含钙量 μ 的置信水平为 90% 的置信区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



二、(12 分)

设某地区成年居民中肥胖者占 10%，不胖不瘦者占 82%，瘦者占 8%，又知肥胖者患高血压病的概率为 20%，不胖不瘦者患高血压病的概率为 10%，瘦者患高血压病的概率为 5%。求

(1) 该地区居民患高血压病的概率。

(2) 若已知某人患高血压，求他属于肥胖者的概率。

三、(12 分)

设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta-1)x^{-\theta}, & x > 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 1$ 为常数。随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立，且都与 X 有相同的密度函数。令

$Y = 2(\theta-1)\ln X$, $Z = 2(\theta-1)\sum_{i=1}^n \ln X_i$ 。1. 求随机变量 Y 的密度函数。2. 证明: $Z \sim \chi^2(2n)$ 。

$$(\chi^2(n) \text{ 分布的密度函数为 } f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx)$$

四、(12 分)

若二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} ae^{-x-y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 $a > 0$ 为常数，令 $Z = X + Y$ 。(1) 求常数 a 的值；(2) 求 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ ；

(3) 判断 X 与 Y 是否相互独立？说明理由；(4) 求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$ 。

五、(8 分)

一公寓楼有 100 户住户，设一户住户拥有汽车辆数为随机变量 X ，其分布律为

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

利用中心极限定理求解需要多少车位，才能使车位充足的概率至少为 0.95？

六、(12 分)

1. 某企业每天生产线上产品的合格品率为 0.96。已知每件合格品可获利 80 元，每件不合格亏损 20 元。为保证该企业每天平均利润不低于 1 万元，问该企业每天至少应生产多少件产品？

2. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2-x-y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求 1. $E(X), E(Y), D(X), D(Y)$; 2. $E(XY), \text{Cov}(X, Y), \rho_{XY}$ 。



七、(14 分)

1. 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数。 X_1, X_2, \dots, X_n 为取自总体 X 的样本, x_1, x_2, \dots, x_n 为相应的样本观测值.

(1) 求参数 θ 的矩估计量; (2) 求参数 θ 的最大似然估计量。

2. 设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, 总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, 且两总体相互独立。今从总体 X 和 Y 中分别抽取容量为 n_1, n_2 的两组样本, 样本方差分别记为 S_1^2 和 S_2^2 . 令 $Z = aS_1^2 + bS_2^2$, 其中 a, b 为常数且 $a+b=1$ 。(1) 证明: Z 是 σ^2 的无偏估计; (2) 确定 a, b 的值, 使得对应的 Z 最有效。

八、(14 分)

1. 叙述假设检验两类错误的定义。

2. 某炼钢厂的铁水含碳量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 已知在生产正常的情况下平均含碳量应为 4.55. 现抽测了 9 炉铁水, 测得含碳量的均值为 4.46, 标准差为 0.12. 问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下, 铁水含碳量是否正常。

