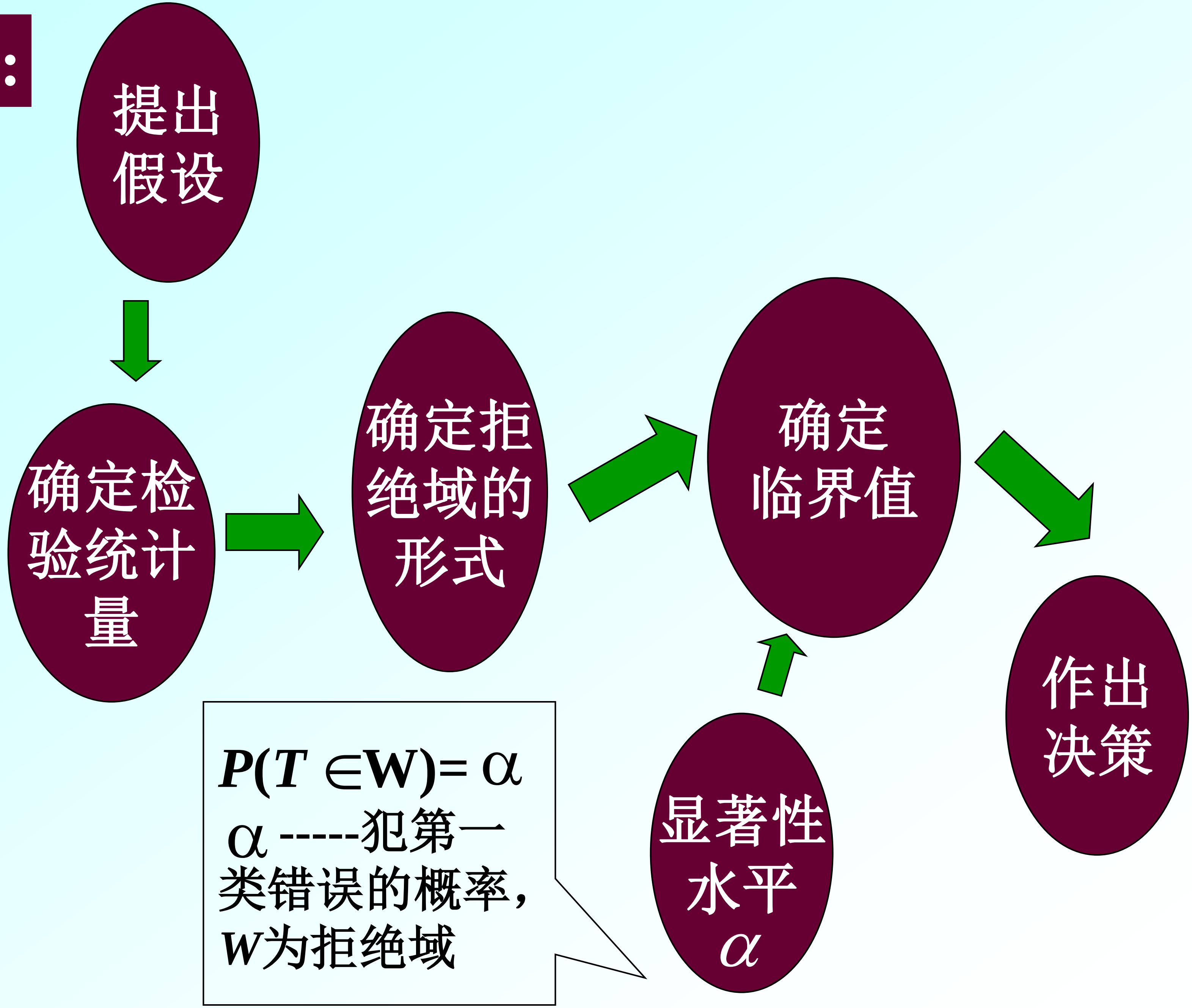
复习:



提出假设
确定检验统计量
确定拒绝域的形式
确定临界值
作出决策
显著性水平α
$P(T \in W)=\alpha$
α ------犯第一类错误的概率，
W为拒绝域

§ 2 一个正态总体下参数的假设检验

一个正态总体

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

样本 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$,

样本值 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

显著性水平α

关于μ的假设检验，σ^2已知

$$H_0: \mu = \mu_0 \Leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

检验统计量取为

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

拒绝域为

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n): |z| = \frac{|\overline{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}} > c\}$$

H_0成立时

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

按照控制第一类错误的原则，有

H_0成立时 $P\{|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}|>c\}=\alpha$

$$c = z_{\alpha/2}$$

拒绝域为

$$W=\{(x_1,\dots,x_n):|z|=\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}>z_{\alpha/2}\}$$

查表$\boldsymbol{u}_{\alpha/2}$, 计算 $\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}$

若其大于$\boldsymbol{u}_{\alpha/2}$，拒绝原假设。否则，接受原假设。

例1 生产流水线上的袋装糖果的重量服从正态分布 $N(\mu, 0.015^2)$. 按规定袋装糖果的重量的均值应为**0.5**（克）。一批袋装糖果出厂前进行抽样检查，抽查了**9**袋，重量分别为，

0.497 0.506 0.518 0.498 0.511 0.520

0.515 0.512

问这一批袋装糖果是否合格？

(显著水平α=**0.05**）

待检验假设可设为

$$H_0: \mu = \mu_0 = 0.5 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0 = 0.5$$

检验统计量取为 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

拒绝域为

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n): |z| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}} > z_{\alpha/2}\}$$

这里$n = 9, \alpha = 0.05,$ **查表得$z_{0.025}$=1.96,**

计算得 $|z| = \dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}} = 2.2 > 1.96$

拒绝原假设，认为这批袋装糖果不合格

前面一例的检验，拒绝域取在两侧，称为双侧检验.

下面看关于均值的单侧检验.

back

原假设 $H_0: \mu \le \mu_0$

备择假设 $H_1: \mu > \mu_0$

检验统计量取为

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

拒绝域为

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) : z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > c\}$$

若原假设H_0正确，要求

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > c\right) = \alpha$$

当H_0成立时，$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$，因此

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

原假设下, Z的分布未知, 无法直接求c的值

虽然不知 μ的真值，但知 $\mu \le \mu_0$。由于

$$\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > c\right\} \subset \left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > c\right\}$$

$$\longrightarrow \quad P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \mathrm{c}\right) \le P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > c\right)$$

且

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

所以，只要取$c = z_\alpha$，可得 $P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\right) = \alpha$

于是

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\right) \le \alpha$$

故取拒绝域为

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$$

此时，犯第一类错误的概率α。

例2 某织物强力指标X的均值μ_0 =21公斤. 改进工艺后生产一批织物，今从中取30件，测得 $\overline{X}$ =21.55公斤. 假设强力指标服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 且已知σ=1.2公斤， 问在显著性水平 α=0.01下，新生产织物比过去的织物强力是否有提高?

解: $H_0:\mu \le \mu_0 = 21 \Leftrightarrow H_1:\mu > \mu_0 = 21$

检验统计量为

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

拒绝域为

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) : z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_\alpha\}$$

这里$n = 30, \alpha = 0.01,$

查表得，z_α=**2.33**，由样本值计算

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{30}}}=2.55>2.33$$

落入否定域

故拒绝原假设H_0.

back

关于 μ 的检验(σ^2 已知)

Z检验法

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$\lvert Z \rvert \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$Z \leq -z_{\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$Z \geq z_{\alpha}$

关于μ的假设检验，σ^2未知

$$H_0: \mu = \mu_0 \Leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

检验统计量取为

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

拒绝域为

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n): |t| = \frac{|\overline{x} - \mu_0|}{S/\sqrt{n}} > c\}$$

H_0为真时

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad \sim t(n-1)$$

按照控制第一类错误的原则，有

$$H_0\text{成立时，}\quad P\{|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}|>c\}=\alpha$$

由此

$$c=t_{\alpha/2}(n-1)$$

拒绝域为

$$W=\{(x_1,\ldots,x_n):|t|=\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}}>t_{\alpha/2}(n-1)\}$$

查表$t_{\alpha/2}(n\text{-}1)$, 计算 $t=\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}}$

若其大于$t_{\alpha/2}(n\text{-}1)$，拒绝原假设。

否则，接受原假设。

关于 μ 的检验(σ^2 未知)

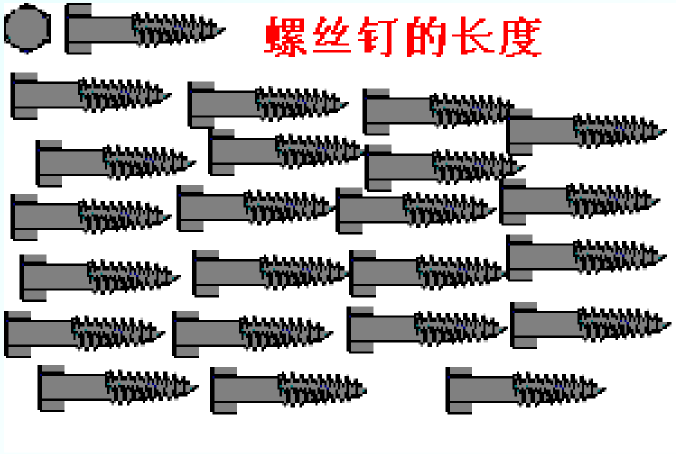
T 检验法

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$	$\lvert t \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$t \leq -t_{\alpha}(n-1)$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$t \geq t_{\alpha}(n-1)$

例3 某工厂生产的一种螺钉，**标准要求长度是32.5毫米**. 实际生产的产品，其长度X假定服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2),\sigma^2$ 未知，现从该厂生产的一批产品中抽取6件, 得尺寸数据如下:

32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 31.03

问这批产品是否合格?



…

显著性水平为0.01

$$H_0: \mu = \mu_0 = 32.5 \Leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0 = 32.5$$

检验统计量取为

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{6}}$$

拒绝域为

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n): |t| = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{S/\sqrt{6}} > t_{\alpha/2}(5)\}$$

对给定的显著性水平α =0.01，查表确定临界值

$$t_{\alpha/2}(5) = t_{0.005}(5) = 4.0322$$

将样本值代入算出

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{6}}} \right| = 2.997 < 4.0322$$

没有落入拒绝域

故不能拒绝H_0.

关于σ^2的假设检验，μ未知

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \Leftrightarrow H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$$

取**检验统计量**为

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

确定**拒绝域的形式**

$$W=\{(x_1,\ldots,x_n):\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}<c_1 \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}>c_2\ \}$$

当H_0成立时， $X_1,\ldots,X_n\sim N(\mu,\ \sigma_0^2)$，因此

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

按照控制第一类错误的原则，有

当H_0成立时

$$P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<c_1\}+P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>c_2\}$$

$$=\alpha$$

为了计算方便，习惯上取

$$P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<c_1\}=\alpha/2$$

$$P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>c_2\}=\alpha/2$$

因此有

$$c_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$$

$$c_2 = \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$$

拒绝域为

$$W = \{(x_1,\ldots,x_n) : \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^{\ 2}} < \chi^2_{1-\alpha/2} \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^{\ 2}} > \chi^2_{\alpha/2}\}$$

关于 σ^2 的检验, μ 未知 　χ^2检验法

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\le\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{\alpha}(n-1)$

例4

某汽车配件厂在新工艺下对加工好的25个活塞的直径进行测量,得样本方差$s^2=0.00066$.已知老工艺生产的活塞直径的方差为0.00040.问新工艺下活塞直径的稳定性是否有显著提高?

$$(\alpha = 0.05)$$

设测量值 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

解：待检验假设可设为：

$$H_0 : \sigma^2 \le 0.00040\text{；}\quad H_1 : \sigma^2 > 0.00040.$$

取统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$,

拒绝域 **：**$W = \{(x_1,\ldots,x_n) : \chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)\}$

n=25, $\alpha = 0.05$ $\chi_{0.05}^2(24) = 36.415$

计算得 $\chi^2 = \dfrac{24 \times 0.00066}{0.00040} = 39.6 > 36.415$

落在W内，故拒绝H_0. 即改革后的方差显著大于改革前的方差

两个正态总体

设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

两样本 X, Y 相互独立,

样本 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$

样本值 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$,

显著性水平 α

1. 关于均值差的假设检验，σ_1^2与σ_2^2已知

(1) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta \Leftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta \Leftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

从 $\mu_1-\mu_2$ 的一个无偏估计出发 $\bar{X} - \bar{Y}$，确定拒绝域的形式

$$W = \{|(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta| > C \quad \}$$

并控制第一类错误，

$$P\{|(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta| > C \mid H_0\text{成立}\} = \alpha$$

由于当H_0成立时，

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}} \sim N(0,1)$$

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta \Leftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$$

并控制第一类错误，$P\{|(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta| > C \mid H_0\text{成立时}\} = \alpha$

由于 $$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}} \sim N(0,1)$$

所以

$$P\{|(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta| > C\} = P\left\{\frac{|(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta|}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}} > \frac{C}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}}\right\} = \alpha$$

$$\longrightarrow \boxed{C = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\, z_{\alpha/2}}$$

所以拒绝域为

$$W=\{|(\bar{X}-\bar{Y})-\delta|>\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}\ z_{\alpha/2}\ \}$$

等价地，该拒绝域可写为

$$W=\{\frac{|(\bar{X}-\bar{Y})-\delta|}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}}>z_{\alpha/2}\ \}$$

检验统计量

关于均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验(σ_1^2, σ_2^2 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\mu_1-\mu_2=0$	$\mu_1-\mu_2\neq 0$	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}$	$\lvert Z\rvert \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_1-\mu_2\geq 0$	$\mu_1-\mu_2<0$		$Z\leq -z_{\alpha}$
$\mu_1-\mu_2\leq 0$	$\mu_1-\mu_2>0$		$Z\geq z_{\alpha}$

σ_1^2, σ_2^2未知，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\mu_1 - \mu_2 = 0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}}$	$\lvert T \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)$
$\mu_1 - \mu_2 \geq 0$	$\mu_1 - \mu_2 < 0$		$T \leq -t_{\alpha}(n+m-2)$
$\mu_1 - \mu_2 \leq 0$	$\mu_1 - \mu_2 > 0$		$T \geq t_{\alpha}(n+m-2)$

其中 $$S_w = \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}}$$

关于方差比的检验

(1) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \Leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

依据 σ_1^2/σ_2^2 的一个点估计 S_1^2/S_2^2，确定拒绝域的形式

$$W = \{S_1^2/S_2^2 < C_1 \quad or \quad S_1^2/S_2^2 > C_2 \quad\}$$

并控制第一类错误，

$$P\{S_1^2/S_2^2 < C_1 \quad or \quad S_1^2/S_2^2 > C_2 \quad\} = \alpha$$

由于当H_0成立时，

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \Leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

并控制第一类错误，$P\{S_1^2/S_2^2<C_1 \quad or \quad S_1^2/S_2^2>C_2 \quad\}=\alpha$

由于 $S_1^2/S_2^2 \sim F(n-1,m-1)$

按照控制第一类错误的原则，为了计算方便，取

$$\boxed{P\{S_1^2/S_2^2<C_1)=\alpha/2 \quad ,P\{S_1^2/S_2^2>C_2 \quad\}=\alpha/2}$$

$$\longrightarrow$$

$$C_1=F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1),C_2=F_{\alpha/2}(n-1,m-1),$$

拒绝域为

$$W=\{S_1^2/S_2^2<C_1 \quad or \quad S_1^2/S_2^2>C_2\}$$

$$C_1=F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1),C_2=F_{\alpha/2}(n-1,m-1),$$

所以**拒绝域为**

$$W=\{S_1^2/S_2^2<F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1)\ or\ \ S_1^2/S_2^2>F_{\alpha/2}(n-1,m-1)\}$$

(2) $H_0:\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \Leftrightarrow H_1:\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

检验统计量 S_1^2 / S_2^2

确定拒绝域的形式 $W=\{S_1^2 / S_2^2 < C\}$

并控制第一类错误，

$$P\{S_1^2 / S_2^2 < C\} \le \alpha$$

由于当H_0成立时，

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} / \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

$$H_0:\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \Leftrightarrow H_1:\sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

控制第一类错误， $P\{S_1^2/S_2^2 < C \mid H_0\text{成立}\} \le \alpha$

当H_0成立时，
$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \Big/ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1)$$

且
$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

所以
$$\left\{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < C\right\} \supset \left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} < C\right\}$$

故而 $$P\{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}<C\}\geq P\{\frac{S_1^2}{S_2^2}<C\}$$

要使 $$\alpha\geq P\{\frac{S_1^2}{S_2^2}<C\}$$

只要 $$\alpha=P\{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}<C\}$$

$$\longrightarrow \boxed{C=F_{1-\alpha}(n-1,m-1)}$$

拒绝域为 $$W=\{S_1^2/S_2^2<C\}$$

$$C=F_{1-\alpha}(n-1,m-1)$$

所以**拒绝域为**

$$W=\{S_1^2/S_2^2<F_{1-\alpha}(n-1,m-1)\}$$

关于方差比σ_1^2/σ_2^2的检验,μ_1, μ_2均未知

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)$ 或 $F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)$
$\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$F\le F_{1-\alpha}(n-1,m-1)$
$\sigma_1^2\le\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$		$F\ge F_{\alpha}(n-1,m-1)$

例5

假设机器 A 和机器 B 都生产钢管，要检验 A 和 B 生产的钢管的内径的稳定程度. 设它们生产的钢管内径分别为 X 和 Y，都服从正态分布

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

现从A生产的钢管中抽出18 根，测得 $s_1^2 = 0.34$，

从B生产的钢管中抽出13 根，测得 $s_2^2 = 0.29$，

设两样本相互独立. 问是否能认为两台机器生产的钢管内径的稳定程度相同?（取$\alpha = 0.1$）

解 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$； $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)$

或 $F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)$

取检验统计量 $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

拒绝域为:

$$F \le F_{0.95}(17, 12) \quad 或 \quad F \ge F_{0.05}(17, 12)$$

n=18, m=13, $\alpha = 0.1$ $F_{0.05}(17, 12) = 2.59$,

由给定值算得: $F_{0.95}(17, 12) = \dfrac{1}{F_{0.05}(12,17)} = \dfrac{1}{2.38} = 0.42$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.34}{0.29} = 1.17$$

落在拒绝域外,

故接受原假设, 即认为内径的稳定程度相同.

作业2：第八章

1,2,8,11