复习

随机变量 $X: S \to R^1$

$$\omega \to X(\omega)$$

离散型随机变量 分布列

$$P(X=x_i)=p_i,\ i=1, 2, \ldots$$

几种重要的离散型随机变量

§3　随机变量的分布函数

一　分布函数的概念与性质

对于随机变量 X，我们不仅要知道 X 取哪些值，还要知道 X 取这些值的概率；而且更重要的是想知道 X 在任意有限区间内取值的概率

无论是离散型还是连续型，以至其它类型的随机变量

对事件 $\{X \in (a, b]\}$ 的概率，都有

$$P(X \in (a,b]) = P(a < X \le b)$$
$$= P(X \le b) - P(X \le a)$$

为了对不同类型的随机变量给出一种统一的描述方法，我们引进**分布函数**的概念

事实上，如果我们定义

$$F(x) = P(X \leq x)$$

则上述概率

$$P(X \in (a,b]) = P(a < X \leq b)$$

$$= \underbrace{P(X \leq b)}_{F(b)} - \underbrace{P(X \leq a)}_{F(a)}$$

分布函数

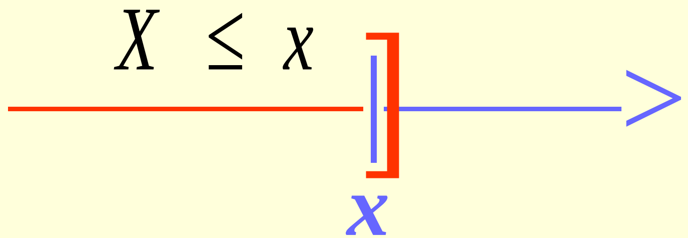
即 $P(X \in (a,b]) = F(b) - F(a)$

分布函数

设X是一随机变量，对任意的实数x,令

$$F(x)=P(X\le x)$$

则称$F(x)$为X的分布函数。



$$F(x) = P(X \le x), \quad -\infty < x < \infty$$

a 在上 式中,X是随机变量, x是自变量.

$F(x)$ 是r.v X取值不大于 x 的概率.

b 对任意实数 $x_1<x_2$,

$$P\{x_1<X \le x_2\} = P\{X \le x_2\} - P\{X \le x_1\}$$

$$= F(x_2)-F(x_1)$$

因此，只要知道了随机变量X的分布函数，它的统计特性就可以得到全面的描述.

$$F(x) = P(X \le x), \quad -\infty < x < \infty$$

c 分布函数是一个普通的函数，正是通过它，我们可以用数学分析的工具来研究 随机变量.

离散型随机变量的分布函数

设 $P(X=x_i)=p_i$, $i=1, 2, \ldots$

$$F(x)=P(X\le x)=P\Big(\bigcup_{x_k\le x}(X=x_k)\Big)$$

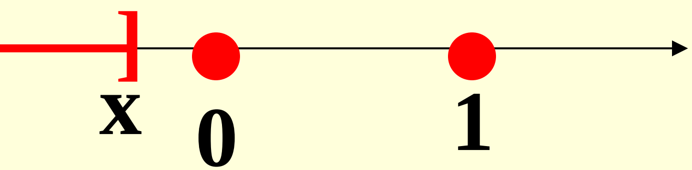
$$=\sum_{x_k\le x}P(X=x_k)=\sum_{x_k\le x}p_k$$

例1: 设 X 服从参数为p的二点分布，即：

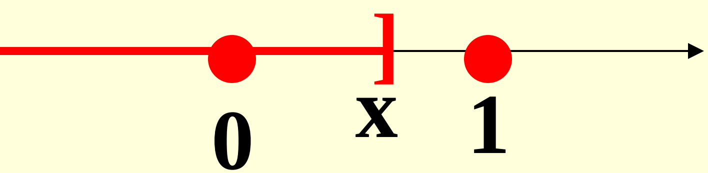
$$P(X=k)=p^{k}q^{1-k} \qquad k=0,1$$

其中$0<p<1,q=1-p$。求X 的分布函数$F(x)$。

解: $F(x)=P(X\le x)$



当 $x<0$ 时， $F(x)=0$



当 $0\le x<1$ 时，

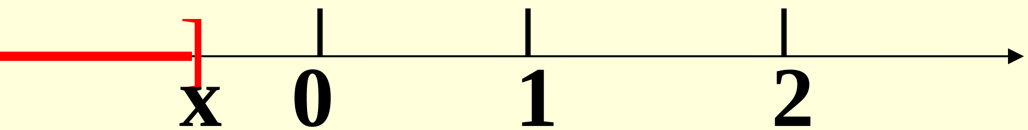
$$F(x)=P(X=0)=q$$

当 $x\ge 1$ 时，

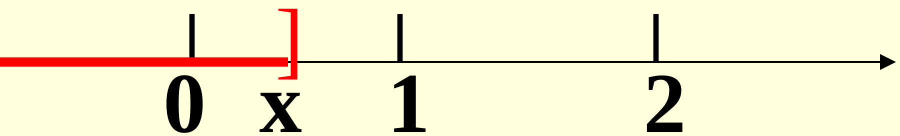
$$F(x)=P(X=0)+P(X=1)=1$$

例2 $X \sim \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$，求 $F(x)$.

解: $F(x) = P(X \le x)$



当 $x < 0$ 时， $F(x) = 0$

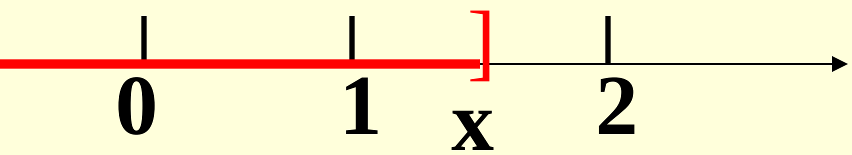


当 $0 \le x < 1$ 时，

$F(x) = P(X=0) = 1/3$

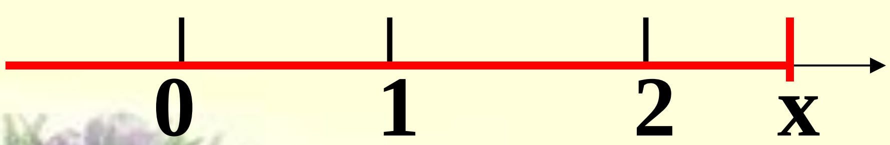
例2 $X \sim \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$，求 $F(x)$.

解: $F(x) = P(X \le x)$



当 $1 \le x < 2$ 时，

$$F(x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$



当 $x \ge 2$ 时，

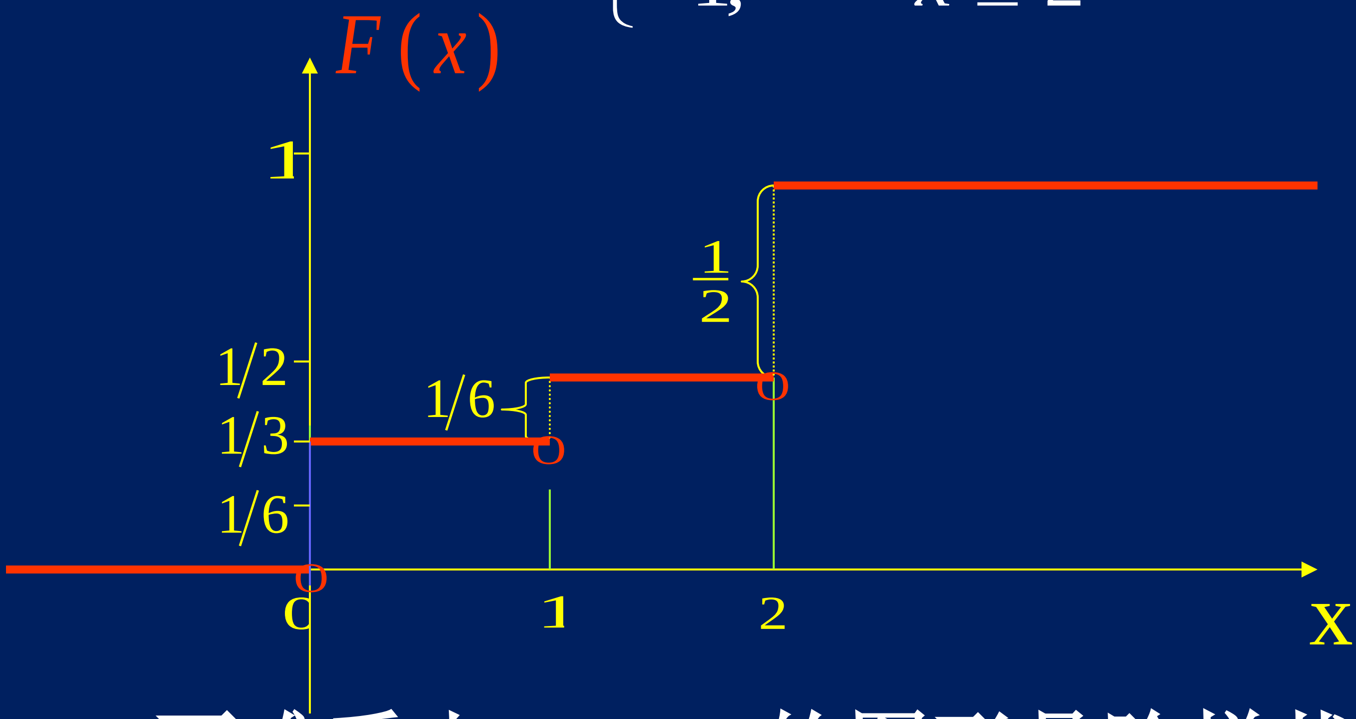
$$F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$$

故

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{1}{3}, & 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{2}, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

下面我们从图形上来看一下.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1/3, & 0\le x<1\\ 1/2, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$



不难看出，***F*(*x*)** 的图形是阶梯状的图形，

在 ***x*=0，1，2** 处有跳跃，其跃度分别等于

***P*(*X*=0) , *P*(*X*=1) , *P*(*X*=2).**

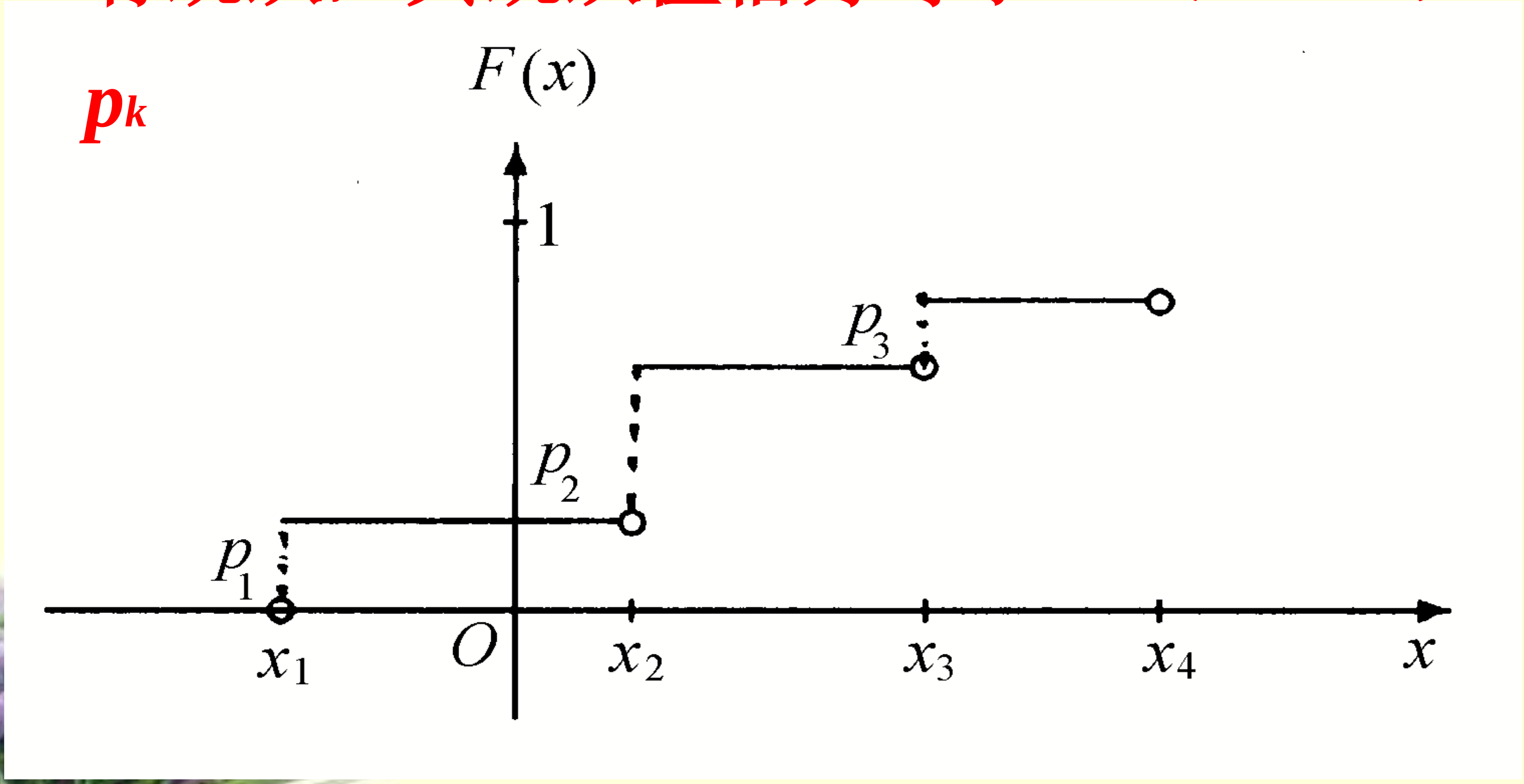
分布律与分布函数的关系图示如下

分布律 $$P\left(X=x_k\right)=p_k$$

$$\Updownarrow$$

分布函数 $$F(x)=P\left(X\le x\right)=\sum_{x_k\le x}p_k$$

分布函数$F(x)$ 的图形是阶梯形、右连续的曲线；在 $X = x_k$ ，$k = 1, 2, 3, \dots$ 处，有跳跃，其跳跃值恰好等于 $P（X = x_k）= p_k$



随机变量分布函数$F(x)$的性质

(1) 单调性　若$x_1<x_2$，则$F(x_1)\le F(x_2)$

(2) 规范性　对任意的实数x，均有

$$\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = 1$$

(3) 右连续性　对任意的实数x_0,有

$$\lim_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

例3 设

$$F(x)=\begin{cases}\sin x\,, & 0\le x\le \pi\\ 0\,, & \text{其它}\end{cases}$$

试说明 $F(x)$ 能否是某个随机变量的分布函数

解: 注意到函数 $F(x)$ 在 $[\pi/2,\pi]$ 上下降

不满足性质(1)，故$F(x)$不能是分布函数

或者 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$

不满足性质(2)， 可见 $F(x)$ 也不能是分布函数.

例4 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = A + B\operatorname{arctg} x, \quad -\infty < x < +\infty$$

试求：

（1）常数 A 与 B

（2）$P(-1 < X^3 \le 8)$

§4　连续型随机变量

连续型随机变量及其概率密度

设随机变量 X 的分布函数为$F(x)$，如果存在一个**非负可积**函数 $f(x)$，使对任意的实数x，均有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

则称X是**连续型随机变量**，称$f(x)$是X的**概率密度**或密度函数，简称密度。

连续型随机变量X的分布函数$F(x)$和密度函数$f(x)$统称为X的**概率分布**，简称X的分布。

概率密度的意义

若x是 $f(x)$ 的连续点，则

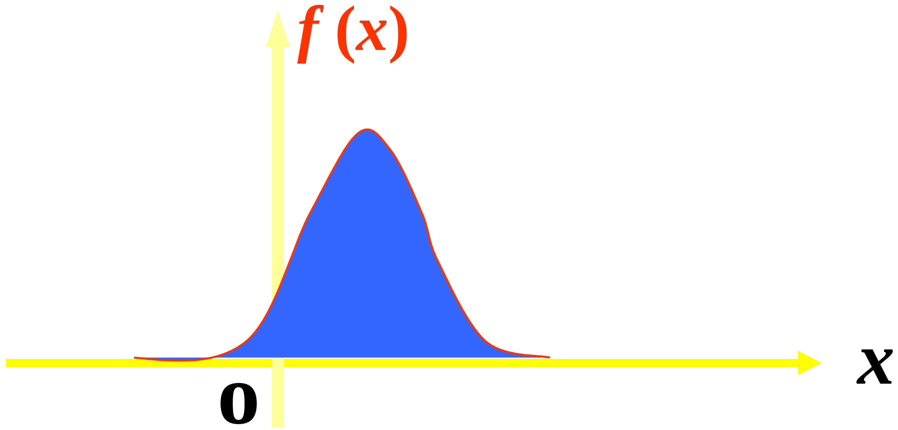
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X \le x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\theta\Delta x)\Delta x}{\Delta x}$$

$$= f(x)$$

$$\boxed{f(x) \approx \frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}}$$

f(x)反映了*X*在*x*附近取值的概率。



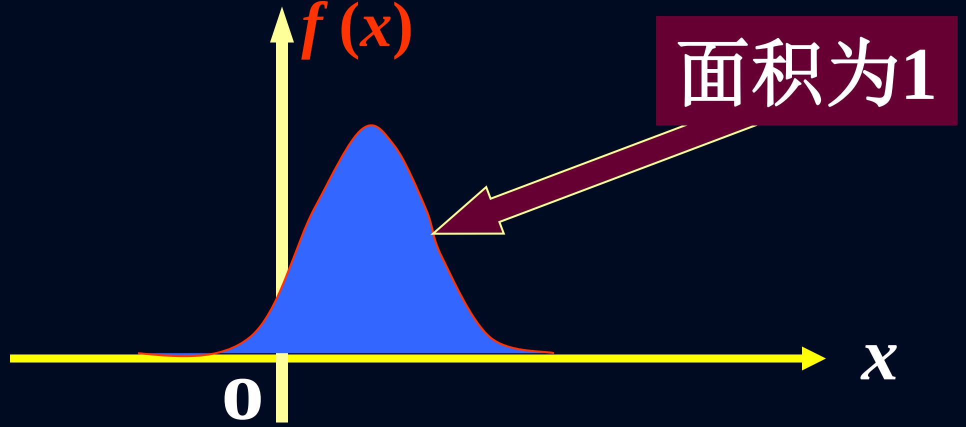
要注意的是，密度函数 $f(x)$在某点处a的高度，并不反映X取值的概率. 但是，这个高度越大，则X取a附近的值的概率就越大. 也可以说，在某点密度曲线的高度反映了概率在该点的密集程度.

概率密度函数的性质

（1） $f(x) \geq 0$

（2） $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

这两条性质是判定一个函数 $f(x)$是否为某$r.vX$的概率密度函数的充要条件.



(3)对于连续型随机变量X

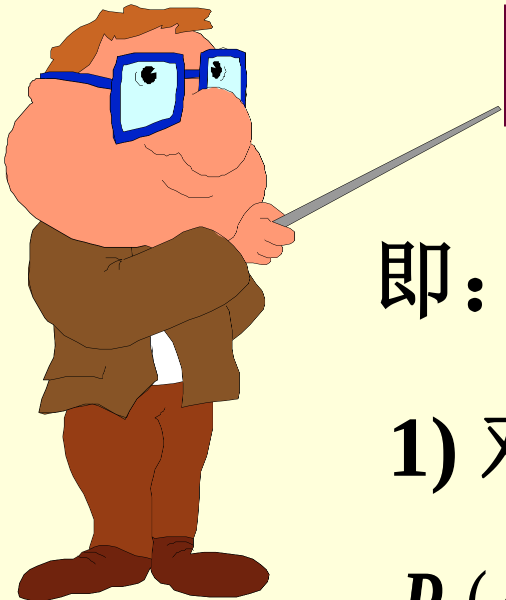
$$P\{X \in G\} = \int_G f(x)dx$$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$P(X \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x)dx$$

$$P(X > a) = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

需要指出的是:



连续型*r.v*取任一指定值的概率为0.

即: $P(X=a)=0$, a为任一指定值

1) 对连续型 $r.v\ X$,有

$$P(a \le X \le b)=P(a<X \le b)$$

$$=P(a \le X<b)$$

$$=P(a<X<b)$$

需要指出的是:

连续型*r.v*取任一指定值的概率为0.

即: $P(X=a)=0$, *a*为任一指定值

2) 由$P(A)=0$, 不能推出$A=\phi$

真的吗

例1 某汽车加油站每周补充汽油一次，已知此加油站每周销售量*X*（单位：*kL*）是以

$$f(x)=\begin{cases} C(1-x^2), & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

为概率密度的随机变量，其中*C*为待定常数。如果要求在一周内加油站的油售完的概率不得大于0.01，那么此加油站储油库的容油体积应至少为多少升。

$$f(x)=\begin{cases} C(1-x^2), & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

解： **由密度函数的性质得**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 C(1-x^2) = 1$$

$$c = 3/2$$

设此加油站储油库的容油体积为*l*千升(0<*l*<1)

***l*应满足** $P(X \geq l) \leq 0.01$

又有 $P(X \geq l) = \int_l^{\infty} f(x)dx = \int_l^1 \frac{3}{2}(1-x^2)dx = \frac{3}{2}[1-l-\frac{1}{3}(1-l)^3]$

$$l \geq 0.92$$

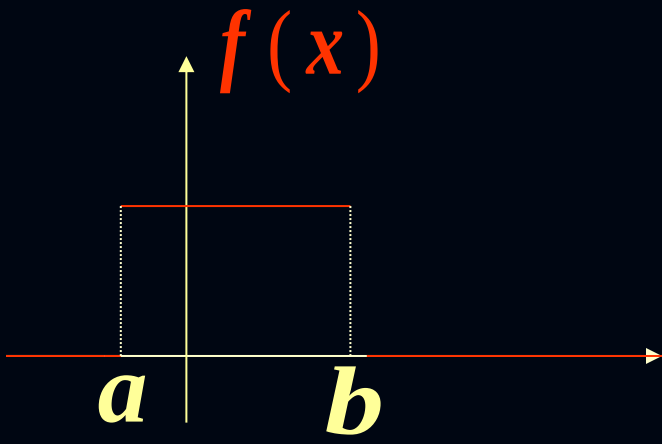
几种常见的分布

- 均匀分布
- 指数分布
- ★ 正态分布

均匀分布（Uniform）

若随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



则称 X 在$[a, b]$上服从均匀分布，记为

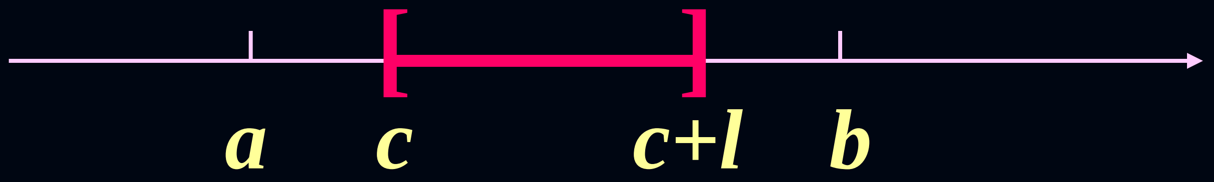
$X \sim U[a, b]$

一个性质

$$\forall (c, c+l) \subset (a, b)$$

$$P(c < X < c+l) = \int_{c}^{c+l} \frac{1}{b-a} \mathrm{d}\, x = \frac{l}{b-a}$$

若 *X* 取值在区间[*a*, *b*] 上，并且它在 [*a*, *b*]中任意小区间内取值的概率与这个小 区间的长度成正比. 则 *X* ～U[*a*, *b*]



应用场合

均匀分布常见于下列情形：

如在数值计算中，由于四舍五 入，小数点后某一位小数引入的误差；

公交线路上两辆公共汽车前后通过某汽车停车站的时间，即乘客的候车时间等.

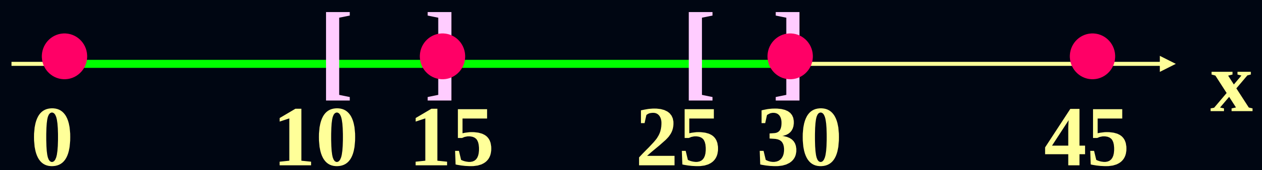
例2 某公共汽车站从上午7时起，每15分钟来一班车，即 7:00，7:15，7:30，7:45 等时刻有汽车到达此站，如果乘客到达此站时间 X 是7:00 到 7:30 之间的均匀随机变量，试求他候车时间少于5 分钟的概率.

解：以7:00为起点0，以分为单位

依题意，$X \sim U(0, 30)$
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 0<x<30\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$P\{10<X<15\}+P\{25<X<30\}$$

$$=\int_{10}^{15}\frac{1}{30}dx+\int_{25}^{30}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{3}$$



一般地，设D是轴上一些不相交的区间之和，若X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{D\text{的长度}} & , x\in D\\ 0 & , x\notin D\end{cases}$$

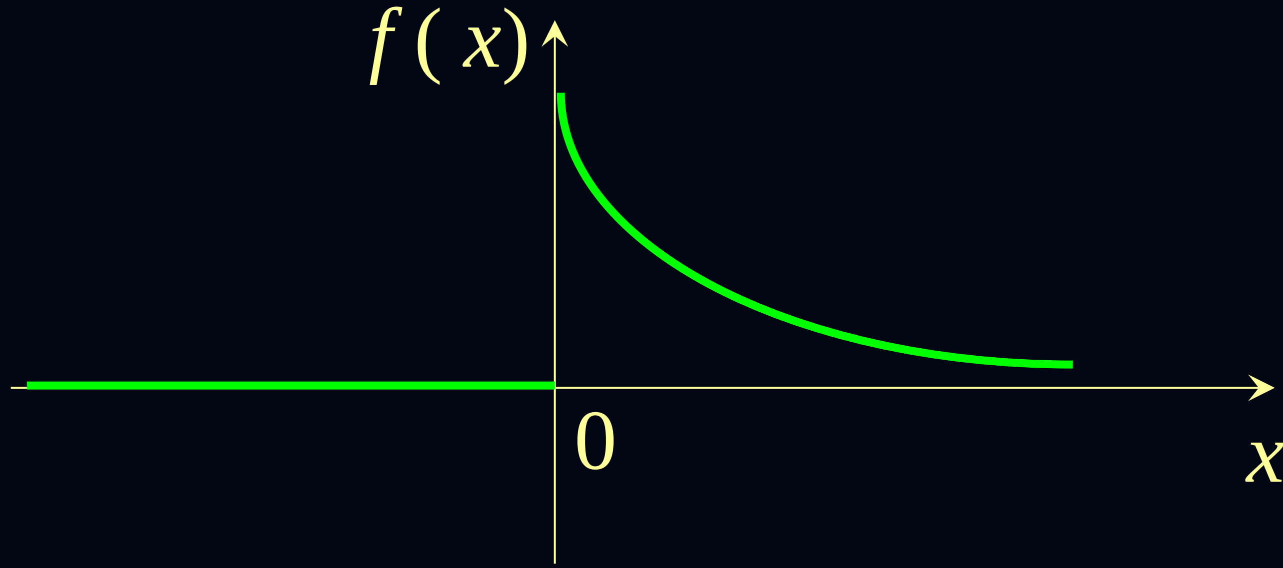
则称X在D上服从均匀分布。

指数分布

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中常数$\lambda>0$，则称X 服从参数为λ的指数分布，记为 $X\sim E(\lambda)$.



$f(x)$
0
x

分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

一个性质

无 记 忆 性

$$\forall \quad s > 0, \quad t > 0$$

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

$$P\{X>s+t \mid X>s\}=\frac{P\{X>s+t, X>s\}}{P\{X>s\}}$$

$$=\frac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}$$

$$=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=1-F(t)=P\{X>t\}$$

如果X表示某仪器的工作寿命，无后效性的解释是：当仪器工作了s小时后再能继续工作t小时的概率等于该仪器刚开始就能工作t小时的概率。

应用场合

用指数分布描述的实例有：

随机服务系统中的服务时间

电话问题中的通话时间

无线电元件的寿命

动物的寿命

指数分布常作为各种“寿命”分布的近似

例 3

设打一次电话所用的时间X（单位：分钟）是以$\lambda=1/10$为参数的指数随机变量．如果某人刚好在你前面走进公用电话间，求你需等待10分钟到20分钟之间的概率．

解：

X的密度函数为
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$P\{10\le X\le 20\}$$

$$=\int_{10}^{20} f(x)dx=\int_{10}^{20}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx=-\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}\Big|_{10}^{20}$$

$$\mathbf{=(e^{-1}-e^{-2})/10=0.02325}$$

★ 正态分布

1　定义

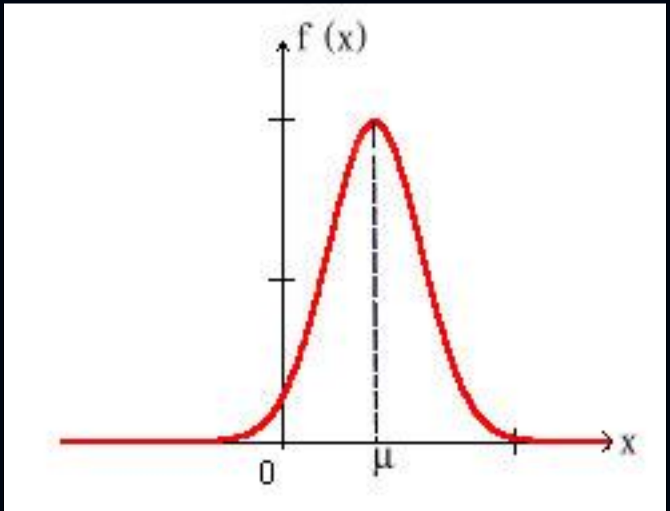
若r.v X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

其中 μ 和 σ^2 都是常数，μ 任意，$\sigma>0$，则称X服从参数为μ和 σ^2 的正态分布.

记作 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

2　密度函数f(x)的性质

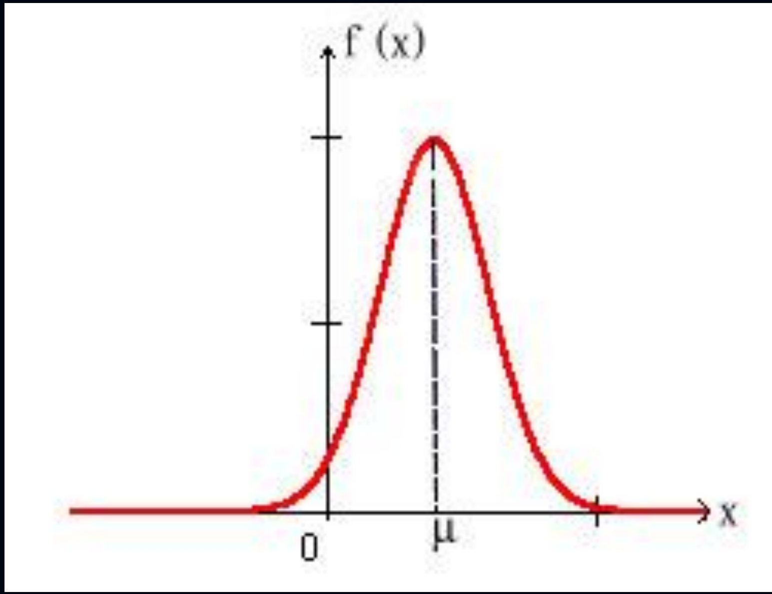


a. 正态分布的密度曲线是一条关于μ对称的钟形曲线. $f(\mu+c)=f(\mu-c)$

特点是“两头小，中间大，左右对称”.

在$x=\mu$处达到最大值：$f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

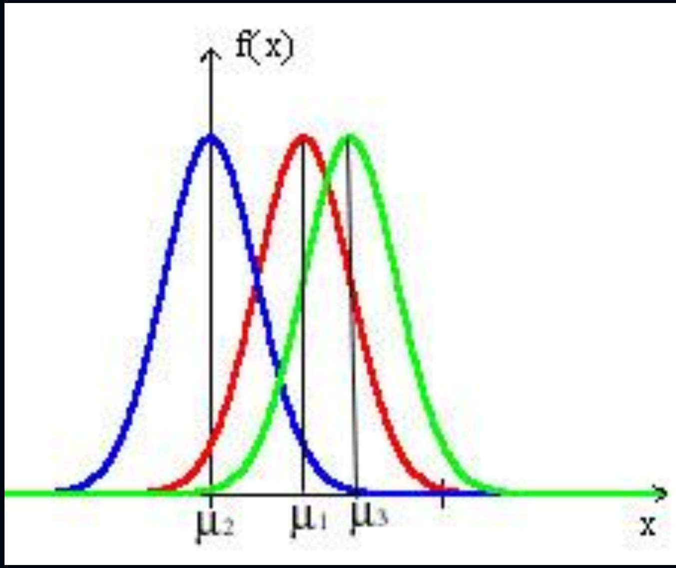
当$x \to \pm\infty$时，$f(x) \to 0$,

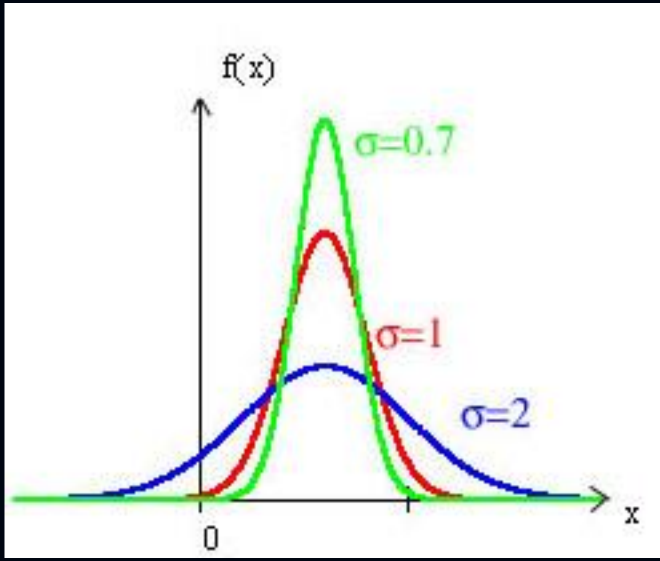


这说明曲线 $f(x)$向左右伸展时，越来越贴近x轴。即$f(x)$以x轴为渐近线。

$$x = \mu \pm \sigma$$

为$f(x)$的两个拐点的横坐标。





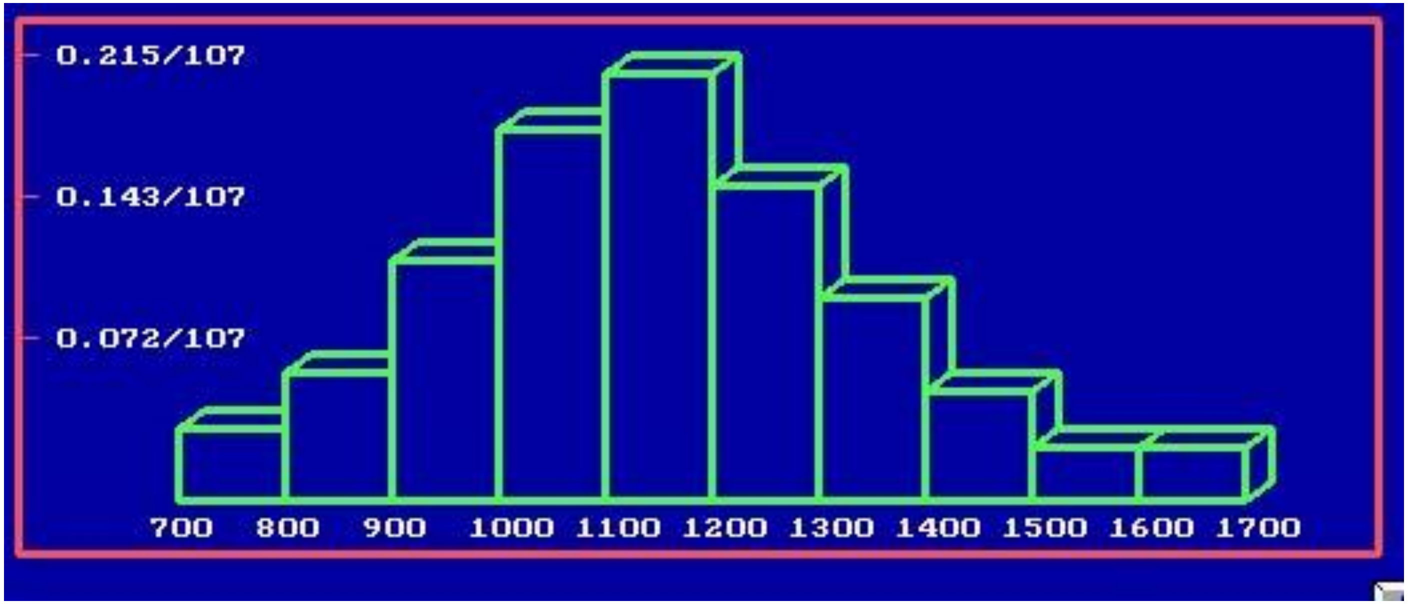
b. μ决定了图形的中心位置，σ 决定了图形中峰的陡峭程度.

3　应用场合

年降雨量、同龄人身高、在正常条件下各种产品的质量指标——如零件的尺寸；纤维的强度和张力、农作物的产量，小麦的穗长、株高、测量误差、射击目标的水平或垂直偏差、信号噪声等等，都服从或近似服从正态分布.

年降雨量问题

这是用上海1999年年降雨量的数据画出的频率直方图



从直方图可以初步看出，年降雨量近似服从正态分布

身高问题

此外，人的身高高低不等，但中等身材的占大多数，特高和特矮的只是少数，而且较高和较矮的人数大致相近，这从一个方面反映了服从正态分布的随机变量的特点

说 明

(1). 正态分布是自然界及工程技术中最常见的分布之一，大量的随机现象都是服从或近似服从正态分布的. 可以证明，如果一个随机指标受到诸多因素的影响，但其中任何一个因素都不起决定性作用，则该随机指标一定服从或近似服从正态分布

(2). 正态分布有许多良好的性质，这些性质是其它许多分布所不具备的

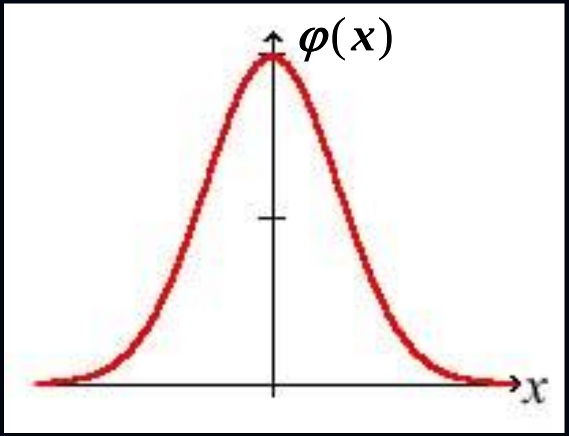
(3). 正态分布可以作为许多分布的近似分布

4　标准正态分布

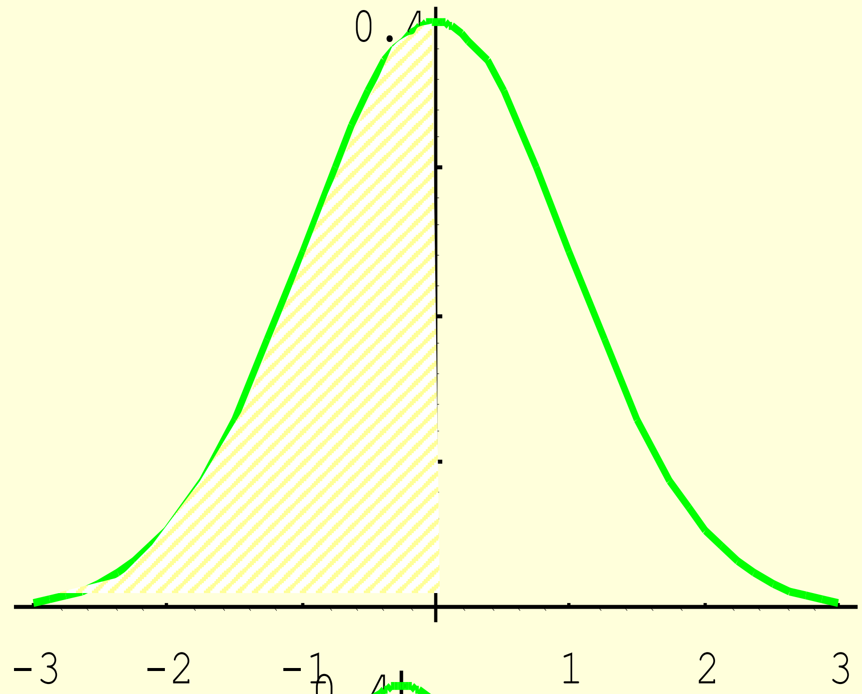
$\mu = 0, \sigma = 1$ 的正态分布称为标准正态分布.

其密度函数常用 $\varphi(x)$ 表示:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

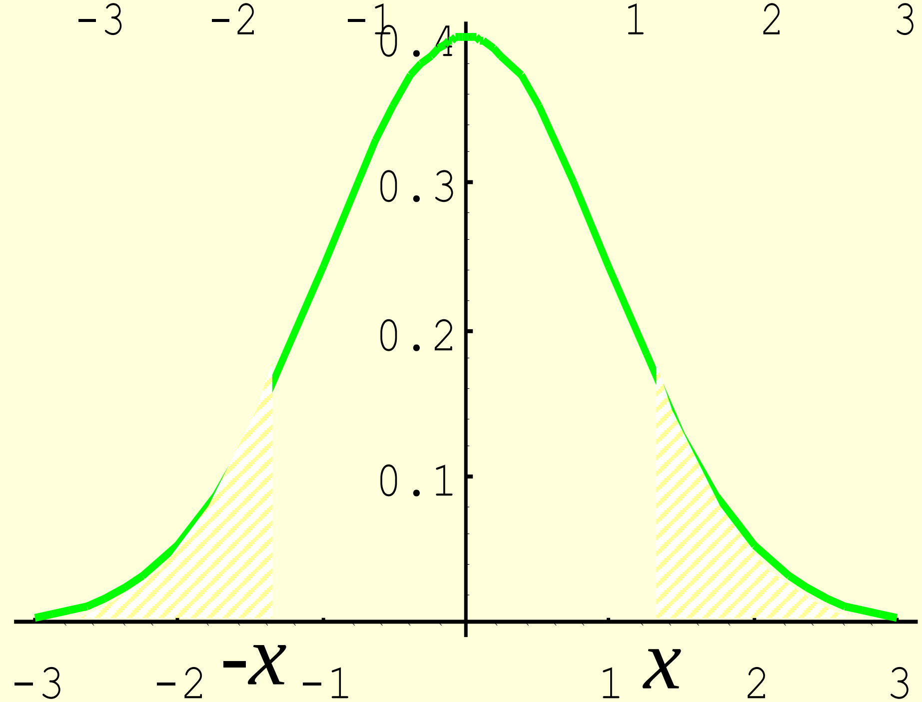


$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$



注意:

Φ(0)=0.5



Φ(-*x*)=1-Φ(*x*)

5　正态分布的计算

对一般的正态分布：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

对任意的实数x_1， x_2 ($x_1 < x_2$)，有

$$P(X \le x_1) = \Phi(\frac{x_1 - \mu}{\sigma})$$

$$P(X > x_1) = 1 - \Phi(\frac{x_1 - \mu}{\sigma})$$

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1 - \mu}{\sigma})$$

例4 设 $X \sim N(1,4)$, 求 $P(0 \le X \le 1.6)$

解 $$P(0 \le X \le 1.6) = P\left(\frac{0-1}{2} \le \frac{X-1}{2} \le \frac{1.6-1}{2}\right)$$

$$= \Phi(0.3) - \Phi(-0.5)$$

$$= \Phi(0.3) - [1 - \Phi(0.5)]$$

附录

$$= 0.6179 - [1 - 0.6915]$$

$$= 0.3094$$

例5 公共汽车车门的高度是**按男子与车门顶头碰头机会在0.01以下**来设计的. 设男子身高$X \sim N(170, 6^2)$, 问车门高度应如何确定?

解: 设车门高度为h cm, 按设计要求

$$P(X \geq h) \leq 0.01$$

或 $P(X < h) \geq 0.99$,

下面我们来求满足上式的最小的 h.

求满足 $P(X< h) \geq 0.99$ 的最小的 h.

因为 $X \sim N(170, 6^2)$, $\dfrac{X-170}{6} \sim N(0,1)$

故 $P(X< h)= \Phi\left(\dfrac{h-170}{6}\right) \geq 0.99$

查表得 $\Phi(2.33)=0.9901>0.99$

所以 $\dfrac{h-170}{6}=2.33$,

即 $h=170+13.98 \approx 184$

设计车门高度为184厘米时，可使男子与车门碰头机会不超过0.01.

例6 一桥长60m，以桥的中点为原点,沿着桥的方向引入坐标轴．一架飞机沿着坐标轴俯冲投弹轰炸此桥，假定弹着点的坐标$X \sim N(0, 100^2)$.

(1)求投掷一枚炸弹，命中此桥的概率;

（1）解:

$$P(|X| \le 30)$$

$$= P(-30 \le X \le 30) = P(-0.3 \le \frac{X}{100} \le 0.3)$$

$$= 2\Phi(0.3) - 1 = 0.2358$$

一桥长60m，以桥的中点为原点,沿着桥的方向引入坐标轴．一架飞机沿着坐标轴俯冲投弹轰炸此桥，假定弹着点的坐标$X \sim N(0, 100^2)$.

(1)求投掷一枚炸弹，命中此桥的概率;

(2)问独立投掷多少枚炸弹，才能使至少有一枚弹命中此桥的概率大于0.9.

(2) 分析: 设独立投掷k枚炸弹

A={至少有一枚弹 命中此桥}

k需满足$P(A) > 0.9$

或$P(\overline{A}) \le 0.1$

一桥长60m，以桥的中点为原点,沿着桥的方向引入坐标轴．一架飞机沿着坐标轴俯冲投弹轰炸此桥，假定弹着点的坐标$X \sim N(0, 100^2)$.

(1)求投掷一枚炸弹，命中此桥的概率;

(2)问独立投掷多少枚炸弹，才能使至少有一枚弹命中此桥的概率大于0.9.

（2）解:

设独立投掷k枚炸弹，

A:至少一枚炸弹命中此桥

k需满足$P(A) > 0.9$

即k满足$P(\overline{A}) \le 0.1$

$$P(\overline{A}) = 0.7642^k < 0.1$$

$$k > 8.5622$$