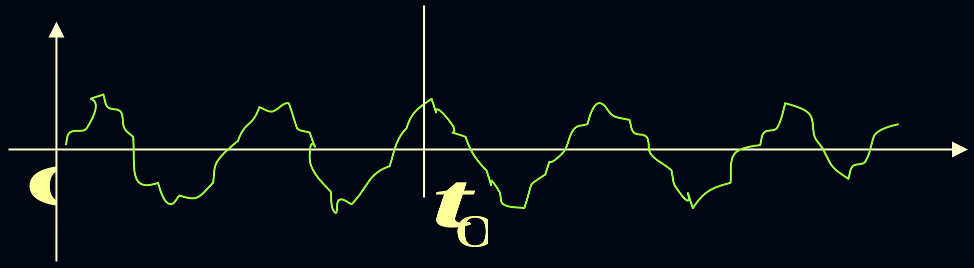
引例

在实际中，人们常常对随机变量的函数更感兴趣.

已知$t=t_0$ 时刻噪声电压 V的分布，



求功率 $W=V^2/R$ （R为电阻）的分布.

§5 随机变量函数的分布

设X, Y 是两个随机变量，$y=g(x)$是一个已知函数，如果当X 取值 x 时，Y取值为$g(x)$，则称Y 是随机变量X 的函数。

记为$Y = g(X)$

问题：已知随机变量 X 的分布函数 或 密度函数（分布列）

$$Y = g(X)$$

求 随机变量Y 的分布

离散型随机变量函数的分布

例1 设随机变量 X 的分布列为

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

试求 $Y=(X-1)^2$ 的分布列

解：随机变量 Y 的取值为 0，1，4

且 $Y=0$ 对应于 $(X-1)^2=0$，

解得 $X=1$

所以 $P（Y=0）=P（X=1）=0.1$

例1（续）

同理

$$P(Y=1) = P(X=0) + P(X=2)$$

$$= 0.3 + 0.4 = 0.7$$

$$P(Y=4) = P(X=-1) = 0.2$$

所以，$Y=(X-1)^2$ 的分布列为

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2

例2.已知随机变量X的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}, k=1,2,\cdots$$

令 $Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)$， 求Y的分布律。

解：已知Y可能的取值为 -1，0，1

且:
$$Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)=\begin{cases}-1, & X=4n-1\\ 0, & X=2n\\ 1, & X=4n-3\end{cases}, n=1,2,\cdots$$

$$P\{X=k\}=\frac{1}{2^k},k=1,2,\cdots \qquad Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)=\begin{cases}-1, & X=4n-1\\ 0, & X=2n \\ 1, & X=4n-3\end{cases},n=1,2,\cdots$$

$$P\{Y=-1\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=4n-1\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4n-1}}=\frac{1/8}{1-1/16}=\frac{2}{15}$$

$$P\{Y=0\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=2n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1/4}{1-1/4}=\frac{1}{3}$$

$$P\{Y=1\}=1-P\{Y=-1\}-P\{Y=0\}=\frac{8}{15}$$

$\therefore Y$的分布律为:

Y	-1	0	1
P	2/15	1/3	8/15

连续型随机变量函数的分布

➢ X连续 Y离散

例3.设随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

令 $Y=\begin{cases}1, & X\le \frac{1}{2}\\ 0, & X>\frac{1}{2}\end{cases}$ 求Y的分布。

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, & X\le \frac{1}{2}\\ 0, & X>\frac{1}{2}\end{cases}$$

解：$P\{Y=1\}=P\{X\le \frac{1}{2}\}=\int_{-\infty}^{1/2} f(x)dx=\int_{0}^{1/2} 2xdx=\frac{1}{4}$

$$P\{Y=0\}=1-P\{Y=1\}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

所以Y的分布为

Y	0	1
P	3/4	1/4

连续型随机变量函数的分布

➢ 当 $y=g(x)$ 是单调函数

定理 若连续型随机变量 X只在(a, b)上取值,它的概率密度为 $f_X(x)$，又 $y=g(x)$ 是严格单调的可导函数，则$Y=g(X)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\,|[g^{-1}(y)]'| & y\in(\alpha,\beta) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中(α，β)是$y=g(x)$， $a<x<b$ 的值域。

步骤

1 证明严格单调可导

2 求值域

3 求反函数

4 求反函数导数

5 代入公式

例4 **设** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b$, **求Y的密度函数**

1 y=ax+b 严格单调可导

2 值域为R

$$-\infty < y < \infty$$

3 反函数x=(y-b)/a

4 dx/dy=1/a

例4 **设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$Y = aX + b$，求Y的密度函数**

$$5 \quad f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\,|a|} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2a^2\sigma^2}} \qquad -\infty < y < \infty$$

$$\boxed{Y \sim N(a\mu + b,\ a^2\sigma^2)}$$

特别地，若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，

则 $$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\,|[g^{-1}(y)]'|$$

例 5

假设随机变量X服从参数为2的指数分布，

证明：$Y=1-e^{-2X}$ 在区间（0，1）上服从均匀分布。

解：X的密度函数为

$$f_X(x) = 2e^{-2x} \quad x > 0$$

易知 $y = 1 - e^{-2x}$ 为严格单调的可导函数，

由已知条件可知Y的取值范围为（0，1）

其反函数为 $x = -\frac{1}{2}\ln(1-y)$，且 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2(1-y)}$，

所以 $f_Y(y) = 2e^{-2[-\frac{1}{2}\ln(1-y)]}\left|\frac{1}{2(1-y)}\right| = 1, \quad 0 < y < 1$

- 当$y=g(x)$是非单调函数

1 求出 Y的 的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$$

2 $$f_Y(y)=F_Y'(y)$$

例6 已知 $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$, 求 $f_Y(y)$

解

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y)$$

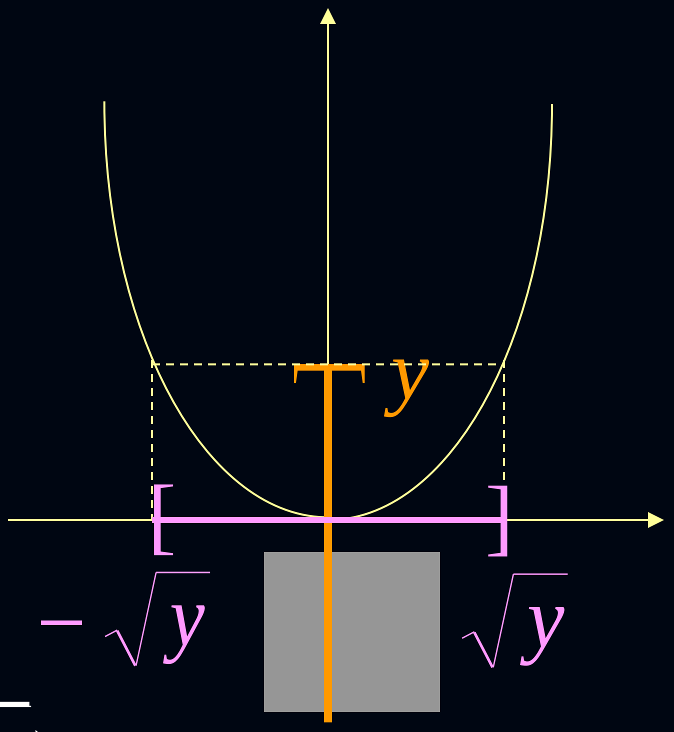
当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = 0$

当 $y > 0$ 时，

$$F_Y(y) = P(X^2 \le y)$$

$$= P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$$

$$= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y})$$



$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}), & y > 0 \end{cases}$$

故

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(\varphi(\sqrt{y}) + \varphi(-\sqrt{y})\right), & y > 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, y^{1/2}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \end{cases}$$

例 7 已知随机变量 $X \sim U[0, \pi]$, 求 $Y = \sin X$ 的概率密度 $f_Y(y)$

解 $$F_Y(y) = P(Y \le y)$$

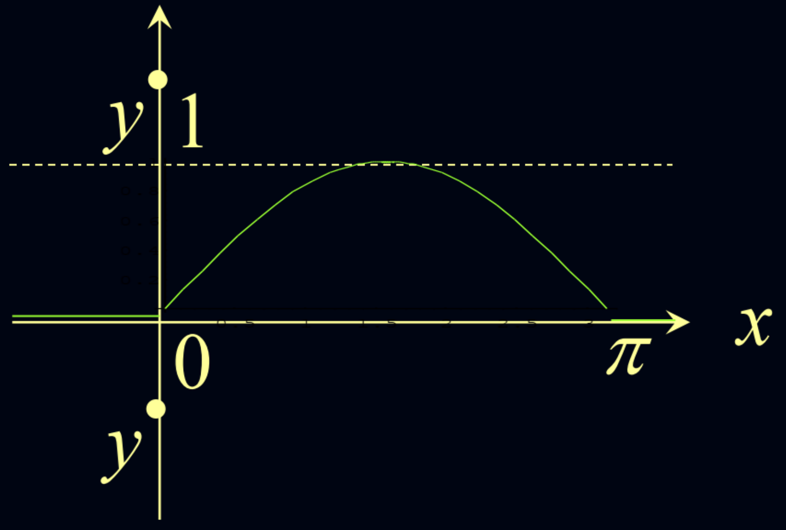
当 $y \le 0$

$$F_Y(y) = 0$$

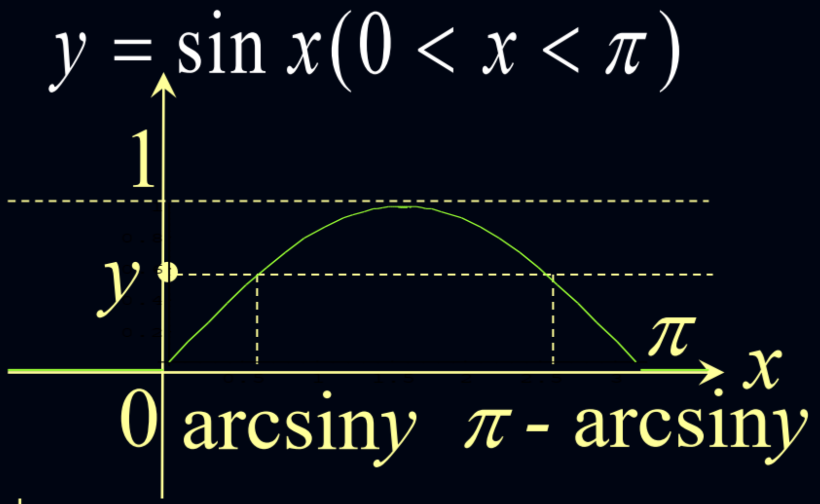
$y \ge 1$ 时

$$F_Y(y) = 1$$

$y = \sin x (0 < x < \pi)$



当$0<y<1$时



$$F_Y(y)=P(\sin X\le y)$$

$$=P(0\le X\le \arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\le X\le \pi)$$

$$=\frac{2\arcsin y}{\pi}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & y\le 0 \\ \dfrac{2\arcsin\sqrt{y}}{\pi} & 0<y<1 \\ 1 & y\ge 1 \end{cases}$$

所以

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} & 0<y<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

例8 假设一设备开机后无故障工作的时间X服从参数为1/4的指数分布。设备定时开机，出现故障自动关机，而在无故障的情况下工作3小时便关机。试求该设备每次开机无故障工作时间Y的分布函数。

解：易知X的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{4}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}X, & X<3\\ 3, & X\ge 3\end{cases}$$

例8.假设一设备开机后无故障工作的时间X服从参数为1/4的指数分布。设备定时开机，出现故障自动关机，而在无故障的情况下工作3小时便关机。试求该设备每次开机无故障工作时间Y的分布函数。

$$\therefore F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$$

$$= P\left\{\{Y \leq y, X < 3\} \cup \{Y \leq y, X \geq 3\}\right\}$$

$$= P\left\{X \leq y, X < 3\right\} + P\left\{3 \leq y, X \geq 3\right\}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{4}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad F_Y(y)=P\{X\le y, X<3\}+P\{3\le y, X\ge 3\}$$

当$y<0$时 $F_Y(y)=0+0=0$

当$0\le y<3$时 $F_Y(y)=P\{X\le y\}+0=1-e^{-y/4}$

当$y\ge 3$时 $F_Y(y)=P\{X<3\}+P\{X\ge 3\}=1$

所以Y的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-y/4}, & 0\le y<3\\ 1, & y\ge 3\end{cases}$$

易知$F_Y(y)$在$y=3$时不连续。

例9.设随机变量X 服从参数为1/4的指数分布，令 $Z=(X-1)^2$.求Z的概率密度。

解：易知X的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

先求Z的分布函数

当$z<0$时，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=0$

当$z\ge0$时，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{(X-1)^2\le z\}=P\{1-\sqrt{z}\le X\le 1+\sqrt{z}\}=F_X(1+\sqrt{z})-F_X(1-\sqrt{z})$

即有 $F_Z(z)=\begin{cases}F_X(1+\sqrt{z})-F_X(1-\sqrt{z}), & z\ge 0\\ 0, & z<0\end{cases}$

$$F_Z(z)=\begin{cases} F_X(1+\sqrt{z})-F_X(1-\sqrt{z}), & z\geq 0 \\ 0, & z<0 \end{cases} \qquad f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

所以Z的密度函数为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{z}}[f_X(1+\sqrt{z})+f_X(1-\sqrt{z})], & z\geq 0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$

当$z\geq 0$时 $f_X(1+\sqrt{z})=\frac{1}{4}e^{-\frac{1+\sqrt{z}}{4}}$

当$0\leq z<1$时，$f_X(1-\sqrt{z})=\frac{1}{4}e^{-\frac{1-\sqrt{z}}{4}}$

当$z\geq 1$时 $f_X(1-\sqrt{z})=0$

$$f_X(1+\sqrt{z})=\frac{1}{4}e^{-\frac{1+\sqrt{z}}{4}}, z>0$$

$$f_X(1-\sqrt{z})=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1-\sqrt{z}}{4}}, & 0\le z<1\\ 0, & z\ge 1\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{1}{2\sqrt{z}}\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1+\sqrt{z}}{4}}+\frac{1}{4}e^{-\frac{1-\sqrt{z}}{4}}\right), & 0\le z<1\\ \frac{1}{2\sqrt{z}}\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1+\sqrt{z}}{4}}+0\right), & z\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{1}{8\sqrt{z}}\left[e^{-\frac{1+\sqrt{z}}{4}}+e^{-\frac{1-\sqrt{z}}{4}}\right], & 0\le z<1\\ \frac{1}{8\sqrt{z}}e^{-\frac{1+\sqrt{z}}{4}}, & z\ge 1\end{cases}$$

例10.在半径为R，圆心在原点O的圆周上任取一点M，设MO与x轴正向的夹角Θ~$U(-\pi,\ \pi)$，求M点与$A(-R,0)$，$B(R,0)$三点构成的三角形面积的密度函数。

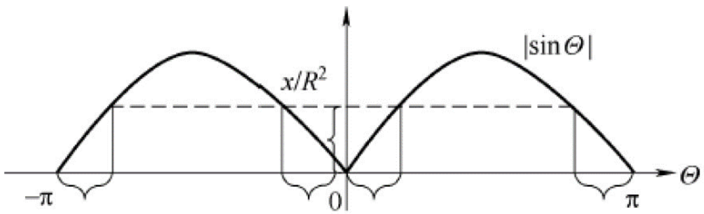
解：易知三角形的面积为

$$S = R^2 \left|\sin \Theta\right|, -\pi < \Theta < \pi$$

先求分布函数 $F_S(x) = P\{S \le x\} = P\{R^2 \left|\sin \theta\right| \le x\} = P\{\left|\sin \Theta\right| \le \dfrac{x}{R^2}\}$

当 $\dfrac{x}{R^2} < 0$ **即$x<0$时** $F_S(x) = 0$

当 $\dfrac{x}{R^2} \ge 1$ **即$x>R^2$时** $F_S(x) = 1$



$$F_S(x) = P\{|\sin\Theta| \le \frac{x}{R^2}\} \qquad \Theta \sim U(-\pi, \pi)$$

当 $0 \le \frac{x}{R^2} < 1$ 即$0 \le x < R^2$时

$$F_S(x) = P\{|\sin\Theta| \le \frac{x}{R^2}\} = P\{0 \le \Theta \le \arcsin(\frac{x}{R^2})\}$$

$$+P\{\pi - \arcsin(\frac{x}{R^2}) \le \Theta \le \pi\} + P\{-\arcsin(\frac{x}{R^2}) \le \Theta \le 0\}$$

$$+P\{-\pi \le \Theta \le -\pi + \arcsin(\frac{x}{R^2})\} = 4\arcsin(\frac{x}{R^2}) \Big/ 2\pi$$

故 $$F_S(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{2\arcsin(\frac{x}{R^2})}{\pi}, & 0\le x\le R^2 \\ 1, & x>R^2 \end{cases}$$

所以 $$f_S(x)=F_S'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{R^4-x^2}}, & 0\le x\le R^2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

第二章

- 作业3：　50,53,57,59