# 数据结构与算法

## Data Structures and Algorithms

谢昊

*xiehao@cuz.edu.cn*

# 非线性结构
# Non-Linear Structures

# 大纲

1. 最小生成树

2. 小结

## 引例：Königsberg 七桥问题

- 在 Königsberg 市有 $7$ 座桥连通了 $4$ 块区域
- 是否有算法实现
  - 从某处出发
  - 依次穿过所有桥仅 $1$ 次
  - 回到原地

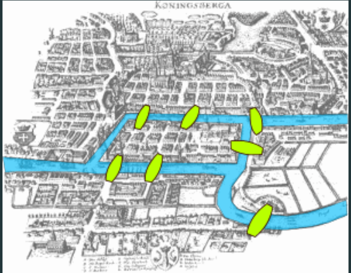


**图 1:** Königsberg 七桥问题

## 引例：Königsberg 七桥问题

- 在 Königsberg 市有 $7$ 座桥连通了 $4$ 块区域
- 是否有算法实现
  - 从某处出发
  - 依次穿过所有桥仅 $1$ 次
  - 回到原地
- 可抽象为图的一笔画问题

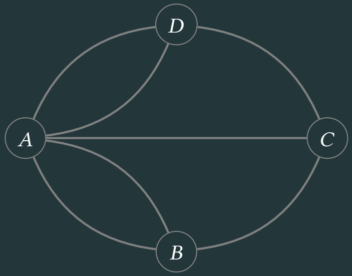


**图 1:** Königsberg 七桥问题

**非线性结构**

- 在半线性结构的基础上允许有环的存在
- 半线性结构的一种扩展
- 非线性结构主要指**图**结构
- 图与树之间可转换

# 最小生成树

**引例：网线铺设问题**

- 假设 6 个城市之间路线连接关系如图
- 图中边的权值可表示路线的距离与代价
- 如何铺设网线连接所有城市且代价最低

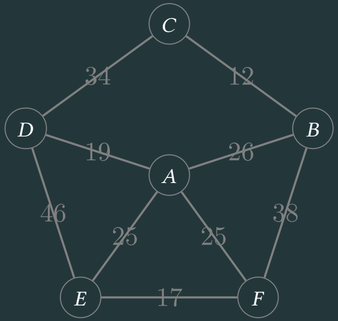


**图 2:** 引例：网线铺设问题

**引例：网线铺设问题**

- 假设 6 个城市之间路线连接关系如图
- 图中边的权值可表示路线的距离与代价
- 如何铺设网线连接所有城市且代价最低
- 可转化为连通图的最小生成树问题

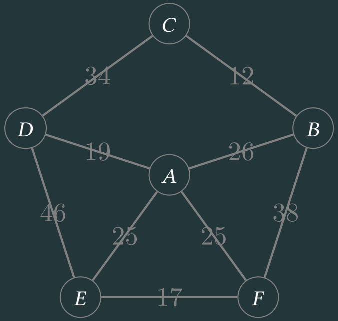


**图 2:** 引例：网线铺设问题

**最小生成树 (Minimum Spanning Tree, MST)**

- 在连通图 $G$ 的所有生成树中，称边权重之和最小的为**最小生成树**

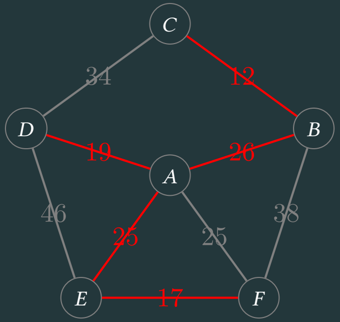


**图 3:** 最小生成树示例

**连通图的分割与桥梁**[1]

- 已知图 $G = (V, E)$ 与其子图 $G_a = (V_a, E_a)$ 与 $G_b = (V_b, E_b)$
- 若 $G_a$ 与 $G_b$ 满足

$$V = V_a \cup V_b, \quad \emptyset = V_a \cap V_b,$$

  则称 $G_a$ 与 $G_b$ 构成图 $G$ 的一个**分割 (cut)**，记作 $(G_a : G_b)$
- 若 $G_a$ 与 $G_b$ 构成图 $G$ 的一个分割，且

$$e \in E - (E_a \cup E_b),$$

  则称 $e$ 为 $G_a$ 与 $G_b$ 间的一个**桥梁 (bridge)**

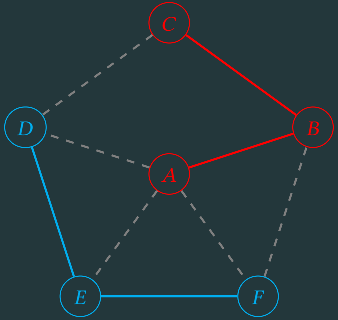


**图 4:** 图的分割与桥梁

[1] 以下图与子图均指连通图

# 最小生成树

**Prim 算法[2]核心思想**

- 在分割图时始终选择权重最小的桥梁作为生成树的边

**步骤**

1. 初始化
   - 在图 $G$ 中任选一顶点 $v_0$ 作为起始点
   - 对 $G$ 做分割 $(G_a, G_b)$，使得 $G_a = \{v_0\}$ 且 $G_b = G - G_a$
   - 令生成树边的集合 $E_{mst} = \emptyset$
2. 将权重最小的桥梁 $e$ 加入 $E_{mst}$
3. 若 $G_b = \emptyset$ 则结束；否则在 $G_b$ 中去除 $e$ 的端点并将其加入 $G_a$ 中，执行 2

[2]作者：R. C. Prim，1956 年

# 最小生成树

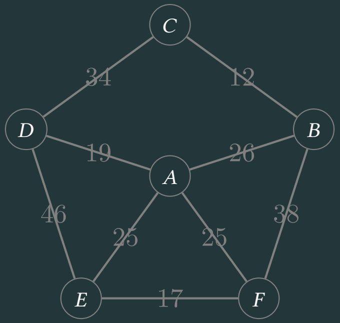


**图 5:** Prim 算法示例过程

# 最小生成树

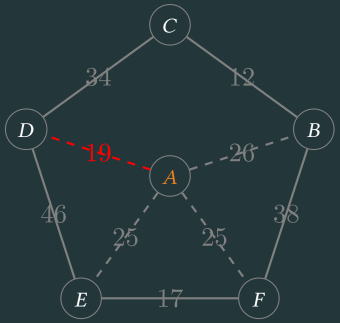


**图 5:** Prim 算法示例过程

# 最小生成树

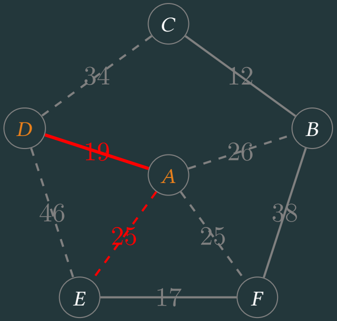


**图 5:** Prim 算法示例过程

# 最小生成树

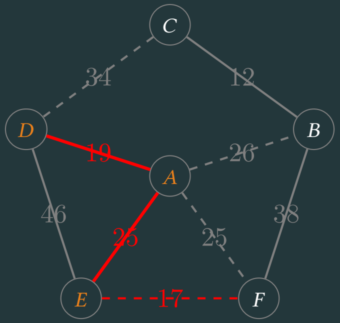


**图 5:** Prim 算法示例过程

# 最小生成树

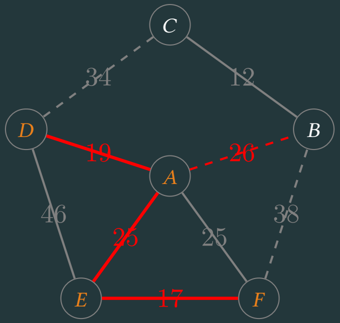


**图 5:** Prim 算法示例过程

# 最小生成树

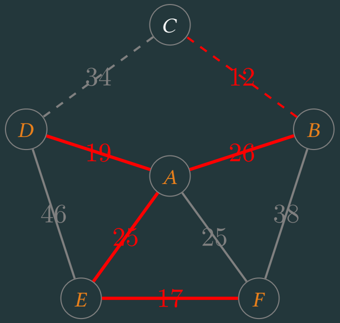


图 5: Prim 算法示例过程

# 最小生成树

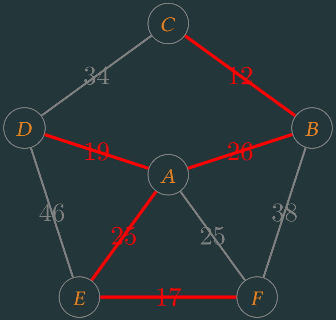


图 5: Prim 算法示例过程

# 小结

# 小结

- 

# 问与答