



数据结构与算法

Data Structures and Algorithms

谢昊

xiehao@cuz.edu.cn

半线性结构 Semi-Linear Structures

1. 二叉树

二叉树的遍历

2. 小结

表 1: 线性结构的优势与不足

	顺序列表	链式列表
访问元素	$O(1)$	$O(n)$
增删元素	$O(n)$	$O(1)$

表 1: 线性结构的优势与不足

	顺序列表	链式列表
访问元素	$O(1)$	$O(n)$
增删元素	$O(n)$	$O(1)$

半线性结构：可去二者之糟粕，取二者之精华

二叉树

二叉树

二叉树 (binary tree)

- 度不大于 2 的有序树
- 子结点可按左右区分

将树转化为二叉树

- 令长子为左子结点、首个兄弟为右子结点
- 任何树均可按此法转化为二叉树
- 因二叉树的表示与运算相对方便，故树的问题均可转化为二叉树形式进行研究

二叉树

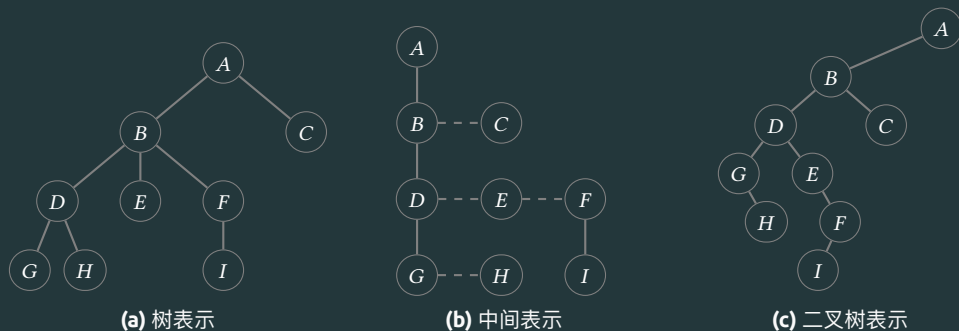


图 1: 将树转化为二叉树

二叉树的遍历

遍历 (traversal)

- 按某种约定顺序访问半线性结构中的所有结点
- 每个结点均被且仅被访问 1 次
- 意义：使半线性结构转化为线性结构
- 两类常见遍历方式：深度优先与广度优先
- 前者可按访问根结点的次序区分
 - 先序 (preorder) 遍历：根结点 \Rightarrow 子树序列¹
 - 中序 (inorder) 遍历²：左子树 \Rightarrow 根结点 \Rightarrow 右子树
 - 后序 (postorder) 遍历：子树序列 \Rightarrow 根结点
- 后者包括层序 (level order) 遍历

¹按顺序遍历每个子树，遍历方式亦为递归相同遍历方式，其余类同

²仅针对二叉树

二叉树的遍历

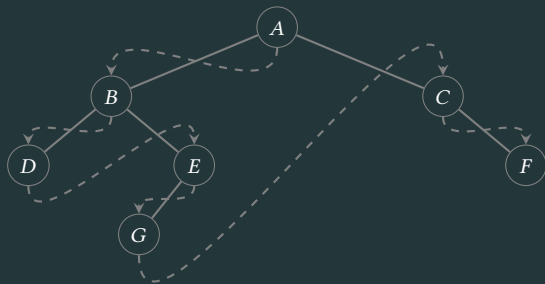


图 2: 二叉树的先序遍历示例: $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow F$

二叉树的遍历

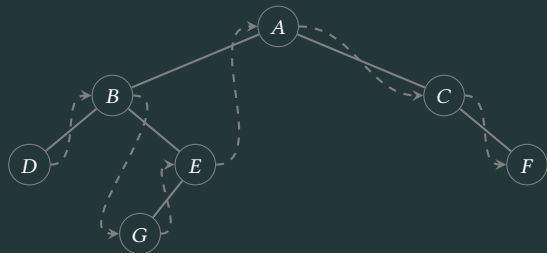


图 3: 二叉树的中序遍历示例: $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$

二叉树的遍历

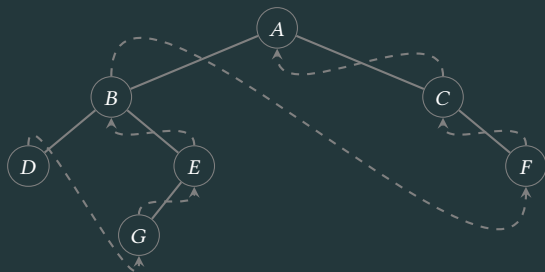


图 4: 二叉树的后序遍历示例: $D \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow A$

二叉树的遍历

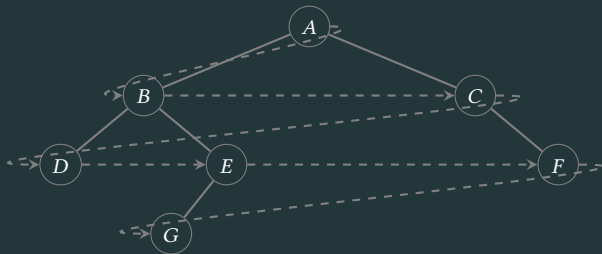


图 5: 二叉树的层序遍历示例: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$

二叉树的遍历

二叉树遍历性质甲

- 由先序遍历与中序遍历可推出后序遍历

二叉树的遍历

二叉树遍历性质甲

- 由先序遍历与中序遍历可推出后序遍历

证明

- 由先序遍历性质可找出根结点
 - 由中序遍历性质可找出左右子树
 - 对左右子树分别递归应用上述步骤直至无左右子树
-

先序:

根	左子树	右子树
---	-----	-----

中序:

左子树	根	右子树
-----	---	-----

图 6: 先序 + 中序 \Rightarrow 后序

二叉树的遍历

例

- 已知先序： $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow F$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求后序

先序：	A	B	D	E	G	C	F
中序：	D	B	G	E	A	C	F
后序：							

图 7: 示例过程：先序 + 中序 \Rightarrow 后序

二叉树的遍历

例

- 已知先序： $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow F$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求后序

先序：

A	B	D	E	G	C	F
---	---	---	---	---	---	---

中序：

D	B	G	E	A	C	F
---	---	---	---	---	---	---

后序：

						A
--	--	--	--	--	--	---

图 7: 示例过程：先序 + 中序 \Rightarrow 后序

二叉树的遍历

例

- 已知先序： $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow F$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求后序

先序：	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>G</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
中序：	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
后序：				<i>B</i>			<i>A</i>

图 7: 示例过程：先序 + 中序 \Rightarrow 后序

二叉树的遍历

例

- 已知先序： $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow F$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求后序

先序：	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>G</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
中序：	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
后序：	<i>D</i>			<i>B</i>			<i>A</i>

图 7: 示例过程：先序 + 中序 \Rightarrow 后序

二叉树的遍历

例

- 已知先序： $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow F$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求后序

先序：	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>G</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
中序：	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
后序：	<i>D</i>		<i>E</i>	<i>B</i>			<i>A</i>

图 7: 示例过程：先序 + 中序 \Rightarrow 后序

二叉树的遍历

例

- 已知先序： $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow F$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求后序

先序：	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>G</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
中序：	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
后序：	<i>D</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>B</i>			<i>A</i>

图 7: 示例过程：先序 + 中序 \Rightarrow 后序

二叉树的遍历

例

- 已知先序： $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow F$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求后序

先序：	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>G</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
中序：	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
后序：	<i>D</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>B</i>		<i>C</i>	<i>A</i>

图 7: 示例过程：先序 + 中序 \Rightarrow 后序

二叉树的遍历

例

- 已知先序： $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow F$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求后序

先序：	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>G</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
中序：	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
后序：	<i>D</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>C</i>	<i>A</i>

图 7: 示例过程：先序 + 中序 \Rightarrow 后序

二叉树的遍历

二叉树遍历性质乙

- 由后序遍历与中序遍历可推出先序遍历

二叉树的遍历

二叉树遍历性质乙

- 由后序遍历与中序遍历可推出先序遍历

证明

1. 与性质甲类似，略

后序:

左子树	右子树	根
-----	-----	---

中序:

左子树	根	右子树
-----	---	-----

图 8: 后序 + 中序 \Rightarrow 先序

二叉树的遍历

例

- 已知后序： $D \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow A$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求先序

后序:	D	G	E	B	F	C	A
中序:	D	B	G	E	A	C	F
先序:							

图 9: 示例过程：后序 + 中序 \Rightarrow 先序

二叉树的遍历

例

- 已知后序： $D \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow A$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求先序

后序:	D	G	E	B	F	C	A
中序:	D	B	G	E	A	C	F
先序:	A						

图 9: 示例过程：后序 + 中序 \Rightarrow 先序

二叉树的遍历

例

- 已知后序： $D \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow A$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求先序

后序:	D	G	E	B	F	C	A
中序:	D	B	G	E	A	C	F
先序:	A	B					

图 9: 示例过程：后序 + 中序 \Rightarrow 先序

二叉树的遍历

例

- 已知后序： $D \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow A$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求先序

后序：	<i>D</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
中序：	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
先序：	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>				

图 9: 示例过程：后序 + 中序 \Rightarrow 先序

二叉树的遍历

例

- 已知后序： $D \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow A$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求先序

后序：	<i>D</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
中序：	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
先序：	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>E</i>			

图 9: 示例过程：后序 + 中序 \Rightarrow 先序

二叉树的遍历

例

- 已知后序： $D \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow A$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求先序

后序：

<i>D</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

中序：

<i>D</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

先序：

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>G</i>		
----------	----------	----------	----------	----------	--	--

图 9: 示例过程：后序 + 中序 \Rightarrow 先序

二叉树的遍历

例

- 已知后序： $D \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow A$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求先序

后序：

<i>D</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

中序：

<i>D</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

先序：

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>G</i>	<i>C</i>	
----------	----------	----------	----------	----------	----------	--

图 9: 示例过程：后序 + 中序 \Rightarrow 先序

二叉树的遍历

例

- 已知后序： $D \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow A$
- 已知中序： $D \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$
- 求先序

后序：

<i>D</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>B</i>	<i>F</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

中序：

<i>D</i>	<i>B</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

先序：

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>G</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

图 9: 示例过程：后序 + 中序 \Rightarrow 先序

二叉树的遍历

二叉树遍历性质丙

- 由先序遍历与后序遍历不可推出中序遍历

二叉树的遍历

二叉树遍历性质丙

- 由先序遍历与后序遍历不可推出中序遍历

证明

- 当根结点度为 1 时无法区分左右子树

先序:

根	左子树 ? 右子树
---	-----------

后序:

左子树 ? 右子树	根
-----------	---

图 10: 先序 + 后序 \nRightarrow 中序

二叉树的遍历

二叉树深度优先遍历的递归实现³

```
void traverse_preorder(  
    BinaryTreeNode *p,  
    Visit v) {  
    if (!p) {  
        return; // 递归出口  
    }  
    v(p->data);  
    traverse_preorder(p->left, v);  
    traverse_preorder(p->right, v);  
}
```

```
void traverse_inorder(  
    BinaryTreeNode *p,  
    Visit v) {  
    if (!p) {  
        return; // 递归出口  
    }  
    traverse_inorder(p->left, v);  
    v(p->data);  
    traverse_inorder(p->right, v);  
}
```

```
void traverse_postorder(  
    BinaryTreeNode *p,  
    Visit v) {  
    if (!p) {  
        return; // 递归出口  
    }  
    traverse_postorder(p->left, v);  
    traverse_postorder(p->right, v);  
    v(p->data);  
}
```

³须事先定义: `typedef void (*Visit)(DataType);`

二叉树的遍历

二叉树广度优先遍历的非递归实现

- 用队列对每层结点按顺序缓存
- 根结点首先入队
- 当结点出队时均将其子树按顺序入队
- 当队列空时结束

```
1 void traverse_binary_tree_level_order(  
2     BinaryTreeNode *p, Visit v) {  
3     LinkedQueue *buffer = create_linked_queue();  
4     if (!buffer) { return; }  
5     push_linked_queue(buffer, p);  
6     while (!empty_linked_queue(buffer)) {  
7         pop_linked_queue(buffer, (DataType *)(&p));  
8         v(p->data);  
9         if (p->left) {  
10             push_linked_queue(buffer, p->left);  
11         }  
12         if (p->right) {  
13             push_linked_queue(buffer, p->right);  
14         }  
15     }  
16     destroy_linked_queue(buffer);  
17 }
```

二叉树的遍历

应用：表达式树

- 考虑仅包括二元运算的表达式
- 可将运算符作为根结点，左右操作数分别为左右子结点
- 操作数为叶结点，运算符为非叶结点
- 如此可将表达式转换为二叉树
- 前/中/后缀表达式分别对应二叉树的先/中/后序遍历

二叉树的遍历

例：表达式树

- 前缀表达： $+ - A / B C * D E$
- 中缀表达： $A - B / C + D * E$
- 后缀表达： $A B C / - D E * +$

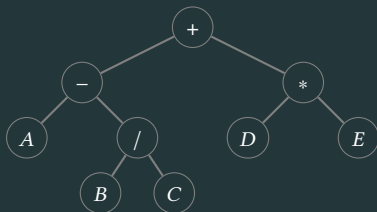


图 11: 表达式树示例

未完待续...

小结

-

问与答