浙江传媒学院
COMMUNICATION UNIVERSITY OF ZHEJIANG

数据结构与算法

Data Structures and Algorithms

谢昊

xiehao@cuz.edu.cn

半线性结构

Semi-Linear Structures

大纲

1. 二叉树
   - 二叉树的性质
2. 小结

表 1: 线性结构的优势与不足

	顺序列表	**链式列表**
访问元素	$O(1)$	$O(n)$
增删元素	$O(n)$	$O(1)$

表 1: 线性结构的优势与不足

	顺序列表	**链式列表**
访问元素	$O(1)$	$O(n)$
增删元素	$O(n)$	$O(1)$

半线性结构：可去二者之糟粕，取二者之精华

二叉树

二叉树

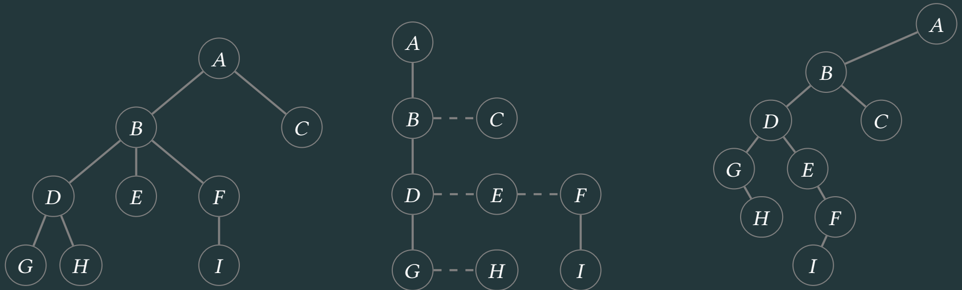
二叉树 (binary tree)

- 度不大于 2 的有序树
- 子结点可按左右区分

将树转化为二叉树

- 令长子为左子结点、首个兄弟为右子结点
- 任何树均可按此法转化为二叉树
- 因二叉树的表示与运算相对方便，故树的问题均可转化为二叉树形式进行研究

二叉树



(a) 树表示　(b) 中间表示　(c) 二叉树表示

图 1: 将树转化为二叉树

二叉树的性质

性质甲

- 令 N 层二叉树第 k 层结点数为 $n_l(k)$，则有

$$1 \le n_l(k) \le 2^k,\ k \in \mathbb{Z} \cap [0, N)$$

二叉树的性质

性质甲

- 令 N 层二叉树第 k 层结点数为 $n_l(k)$，则有

$$1 \le n_l(k) \le 2^k,\ k \in \mathbb{Z} \cap [0, N)$$

证明

1. 左侧不等式显然成立
2. 右侧不等式当 $k = 0$ 时，第 0 层仅有根结点，故 $n_l(0) = 1 = 2^0$ 显然成立
3. 假设当 $k = n < N - 1$ 时成立，即 $n_l(n) \le 2^n$，因所有结点的度均不大于 2，故

$$n_l(n+1) \le 2 \cdot n_l(n) \le 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

   于是当 $k = n + 1$ 时，归纳假设成立 □

性质乙

- 令 k 层二叉树的结点总数为 $n(k)$，则有

$$k \le n(k) \le 2^k - 1$$

性质乙

- 令 k 层二叉树的结点总数为 $n(k)$，则有

$$k \leq n(k) \leq 2^k - 1$$

证明

1. 由性质甲，$1 \leq n_l(i) \leq 2^i$，$i \in \mathbb{Z} \cap [0, k)$
2. 经累加后，有

$$k = \sum_{i=0}^{k-1} 1 \leq n(k) = \sum_{i=0}^{k-1} n_l(i) \leq \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$$

$\square$

二叉树的性质

思考

- 满足 $n(k) = k$ 的二叉树一定是斜树么?
- 满足 $n(k) = 2^k - 1$ 的二叉树一定是满二叉树么?

二叉树的性质

性质丙

- 令二叉树中度为 d 的结点数为 n_d，($d \in \{0, 1, 2\}$)，则有

$$n_0 = n_2 + 1$$

性质丙

- 令二叉树中度为 d 的结点数为 n_d，$(d \in \{0, 1, 2\})$，则有

$$n_0 = n_2 + 1$$

证明

1. 一方面，结点总数由各种度的结点构成，故总结点数 n 满足

$$n = \sum_{d=0}^{2} n_d = n_0 + n_1 + n_2$$

2. 另一方面，每个非根结点均由 1 个结点生成，故度为 d 的结点可生成 d 个结点，即

$$n = \sum_{d=0}^{2} d \cdot n_d + 1 = n_1 + 2n_2 + 1$$

3. 综上得证 $\square$

二叉树的性质

思考

- 有 n 个结点的完全二叉树有多少叶结点?

二叉树的性质

思考

- 有 n 个结点的完全二叉树有多少叶结点?

提示

- 在完全二叉树中，度为 1 的结点数不多于 1
- 当 n 为偶数时，$n_1 = 1$，$n_0 = n/2$，$n_2 = n/2 - 1$
- 当 n 为奇数时，$n_1 = 0$，$n_0 = (n+1)/2$，$n_2 = (n-1)/2$
- 故 $n_0 = \lceil n/2 \rceil$, $n_2 = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$

性质丁

- 具有 n 个结点的完全二叉树层数 $k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

二叉树的性质

性质丁

- 具有 n 个结点的完全二叉树层数 $k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

证明

1. 由完全二叉树性质与性质乙可得，k 层完全二叉树结点数 n 满足

$$2^{k-1} - 1 < n \leq 2^k - 1 \text{ 或 } 2^{k-1} \leq n < 2^k$$

2. 取对数

$$k - 1 \leq \log_2 n < k \text{ 或 } \log_2 n < k \leq \log_2 n + 1$$

3. 注意到 $k \in \mathbb{Z}$，于是得证 $\square$

完全二叉树按层序编号

- 可为完全二叉树结点按层序依次编号
- 约定根编号为 1，依次递增
- 称如此编号为 k 的结点为**结点** k

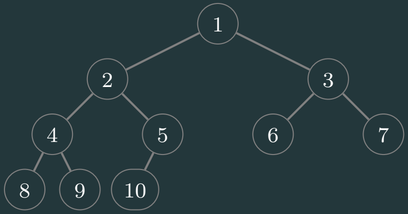


图 2: 为完全二叉树按层序编号

性质戊

- 为含有 n 个结点的完全二叉树按层序对结点编号[1]，则有
  1. 结点 k 的左右子结点序号分别为 $2k$ 与 $2k+1$, $k \in \mathbb{Z} \cap [1, \lfloor n/2 \rfloor]$
  2. 结点 k 的父结点序号为 $\lfloor k/2 \rfloor$, $k \in \mathbb{Z} \cap (1, n]$

[1]根结点为 1

性质戊

- 为含有 n 个结点的完全二叉树按层序对结点编号[1]，则有
  1. 结点 k 的左右子结点序号分别为 $2k$ 与 $2k+1$, $k \in \mathbb{Z} \cap [1, \lfloor n/2 \rfloor]$
  2. 结点 k 的父结点序号为 $\lfloor k/2 \rfloor$, $k \in \mathbb{Z} \cap (1, n]$

证明

1. 考察结论 1，当 $k = 1$ 时，显然其左右子结点序号分别为 2 与 3，成立
2. 假设当 $k = m$ 时成立，即结点 m 的左右子结点序号分别为 $2m$ 与 $2m+1$,
   - 因结点 $m+1$ 的左子结点必为结点 m 的右子结点的后继
   - 故结点 $m+1$ 的左子结点序号为 $(2m+1)+1 = 2(m+1)$
   - 且结点 $m+1$ 的右子结点序号为 $2(m+1)+1$

   则当 $k = m+1$ 时，假设成立，故结论 1 成立
3. 由结论 1 知结论 2 成立 □

[1]根结点为 1

小结

小结

-

问与答