華東理工大學

计算机图形学

2023年10月

奉贤校区

勤 奋 求 实 / 励 志 明 德

07

三维变换和三维观察

3D Transformation and View

绘制流水线

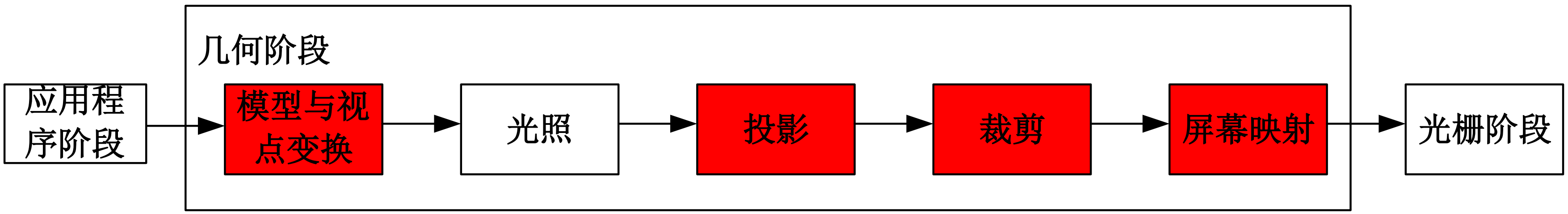
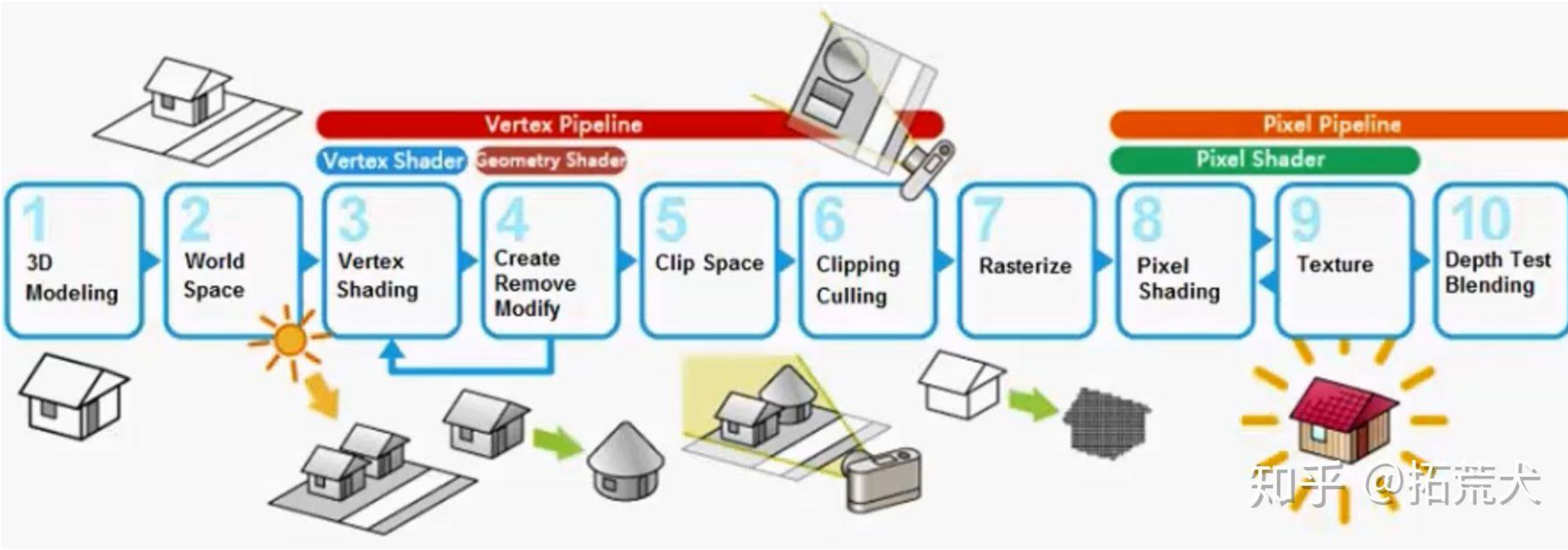
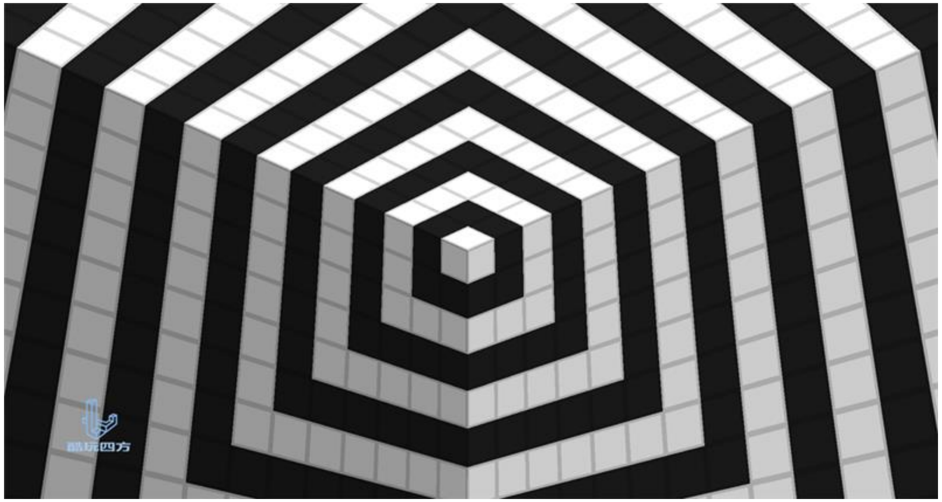


图2.22 绘制流水线的结构


Vertex Pipeline
Pixel Pipeline
Vertex Shader
Geometry Shader
Pixel Shader
1
3D Modeling
2
World Space
3
Vertex Shading
4
Create Remove Modify
5
Clip Space
6
Clipping Culling
7
Rasterize
8
Pixel Shading
9
Texture
10
Depth Test Blending
知乎 @拓荒犬

本章要点

- 如何对**三维**图形进行方向、尺寸和形状方面的变换;
- 如何进行投影变换;（三维->二维）
- 如何方便地实现在显示设备上对三维图形进行观察;
- OpenGL中的观察变换



三维变换

1 三维齐次坐标变换矩阵

2 三维基本几何变换

3 三维复合变换

4 投影变换

三维齐次坐标变换矩阵

$$p' = \begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = p \cdot T_{3D} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right]$$

三维变换

1 三维齐次坐标变换矩阵

2 三维基本几何变换

3 三维复合变换

4 投影变换

三维基本几何变换

- 三维基本几何变换都是相对于**坐标原点**和**坐标轴**进行的几何变换。
- 假设三维形体变换前一点为p(x,y,z)，变换后为p'(x',y',z')。

三维基本几何变换——平移变换

$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & Tz & 1 \end{bmatrix}$$

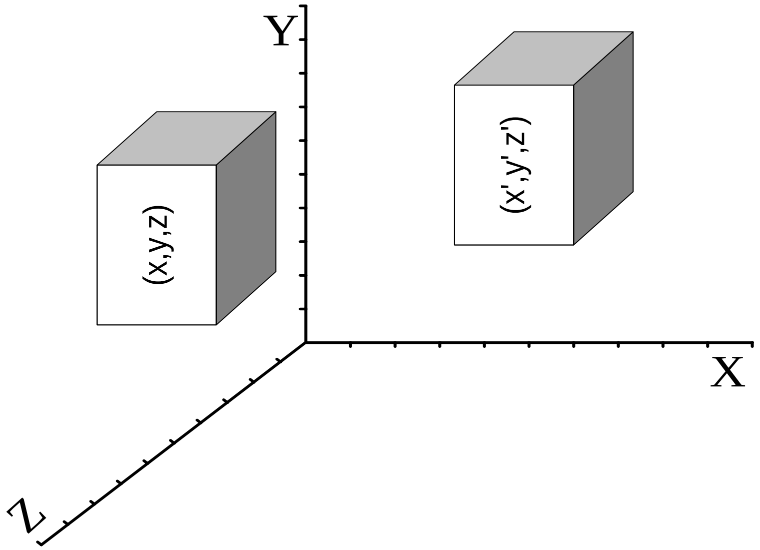


图7.1 三维平移变换

- 一般比例变换

$$T_s = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 例：对下图所示的长方形体进行比例变换，其中a=1/2，e=1/3，j=1/2，求变换后的长方形体各点坐标。

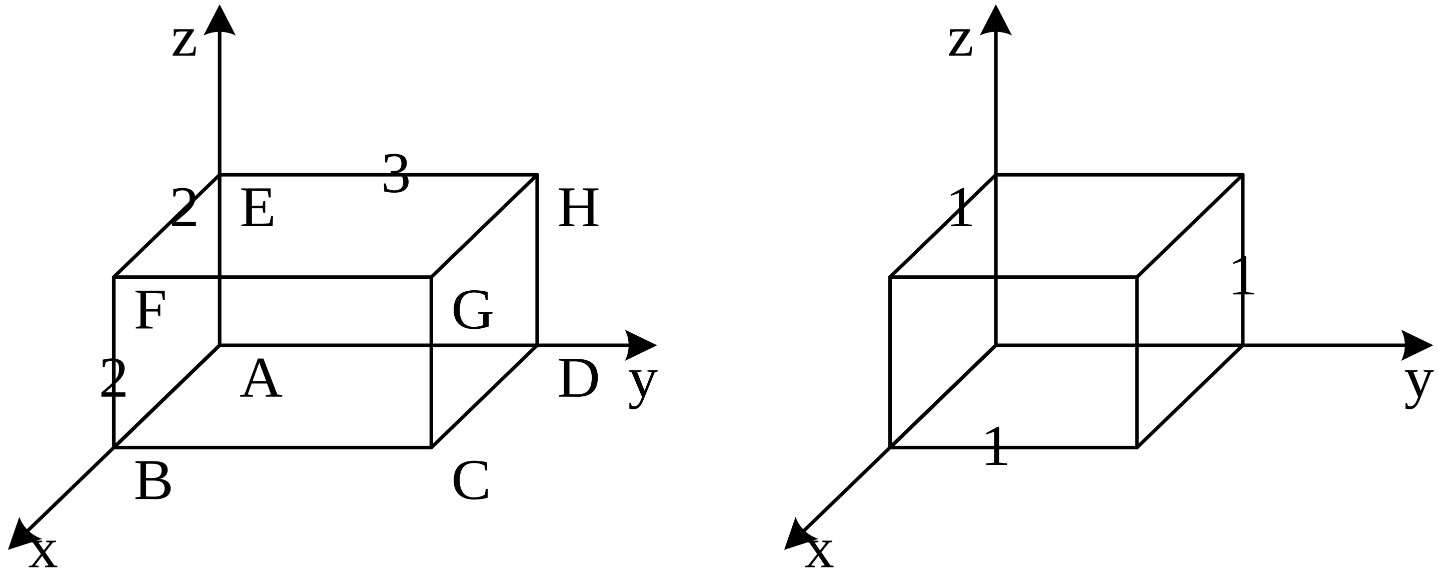


图7.2 三维比例变换

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

三维基本几何变换——比例变换

- 整体比例变换

$$T_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——旋转变换

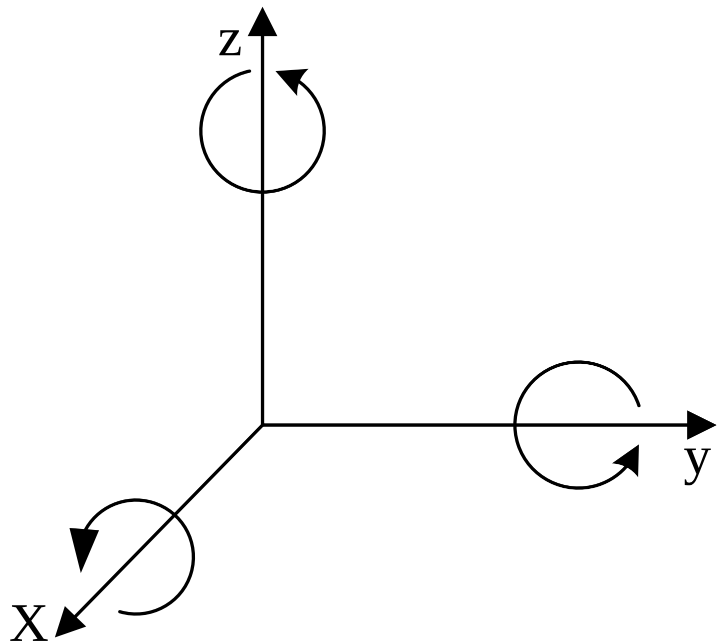


图7.3 三维旋转的方向与角度

- 绕Z轴旋转

$$T_{RZ} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

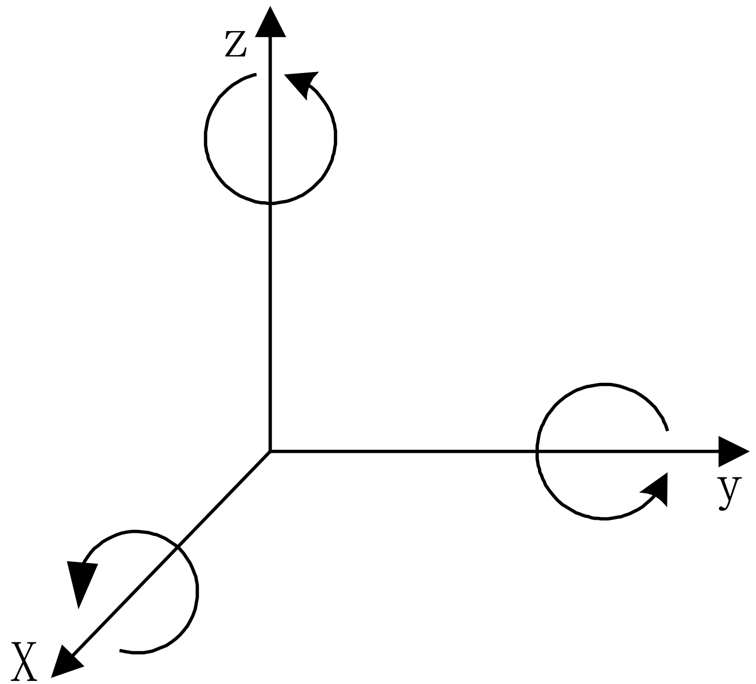


图7.3 三维旋转的方向与角度

- 绕X轴旋转

$$T_{RX}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

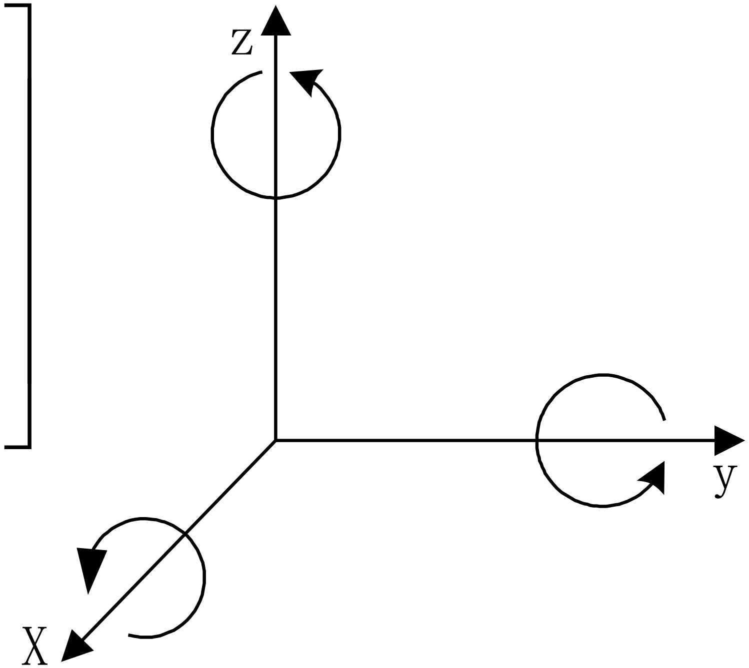


图7.3 三维旋转的方向与角度

- 绕Y轴旋转

$$
T_{RY} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

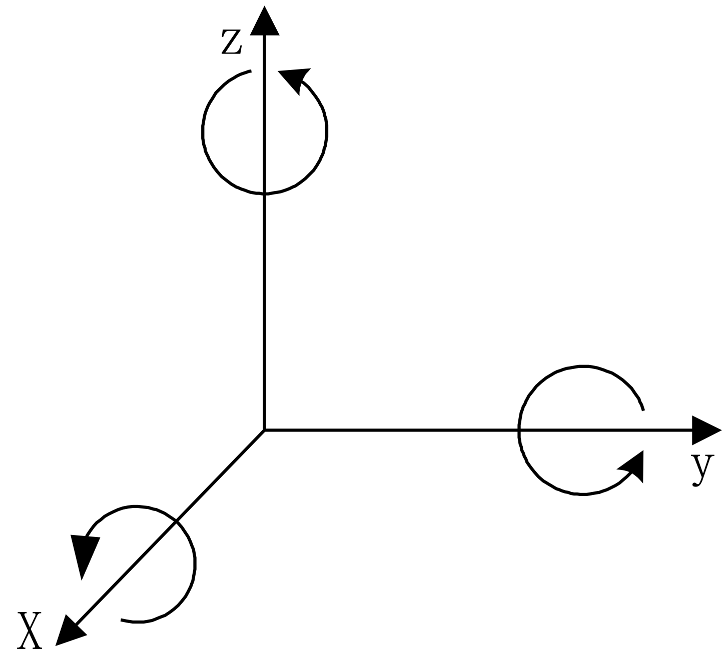


图7.3 三维旋转的方向与角度

◻关于坐标平面对称

- 关于XOY平面进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fxy}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

■关于YOZ平面进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fyz}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——对称变换

■关于ZOX平面进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fzx}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

关于坐标轴对称变换

- 关于x轴进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■关于Y轴进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fy}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——对称变换

■关于Z轴进行对称变换的矩阵计算形式为：

$$T_{Fz}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

□关于原点对称

$$T_{Fxy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维基本几何变换——错切变换

$$T_{SH}=\begin{bmatrix}1 & b & c & 0\\ d & 1 & f & 0\\ g & h & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 逆变换：所谓逆变换即是与上述变换过程的相反的变换。
  - 平移的逆变换

$$T_t^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-T_x&-T_y&-T_z&1\end{bmatrix}$$

■比例的逆变换

◆局部比例变换的逆变换矩阵为：

$$T_s^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

◆整体比例变换的逆变换矩阵为：

$$T_S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix}$$

- 旋转的逆变换

$$T_{RZ}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 0 & 0\\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维变换

1. 三维齐次坐标变换矩阵
2. 三维基本几何变换
3. 三维复合变换
4. 投影变换

三维复合变换

- 三维复合变换是指图形作一次以上的变换，变换结果是每次变换矩阵的乘积。

$$P' = P \cdot T = P \cdot (T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n) \qquad (n > 1)$$

相对任一参考点的三维变换

□相对于参考点$F(x_f,y_f,z_f)$作比例、对称等变换的过程分为以下三步：

(1)将参考点F移至坐标原点；

(2)针对原点进行三维几何变换；

(3)进行反平移。

相对任一参考点的三维变换

□ 相对于$F(x_f, y_f, z_f)$点进行比例变换

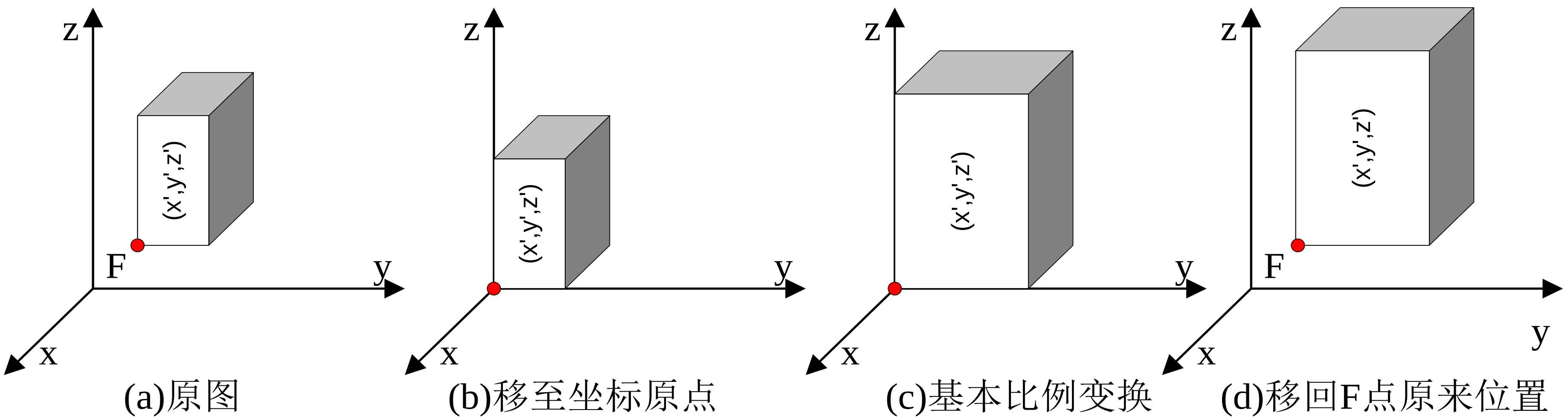


图7.4 相对参考点F的比例变换

绕任意轴的三维旋转变换

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot T_{RAB}$$

问题：如何求出为T_{RAB}。

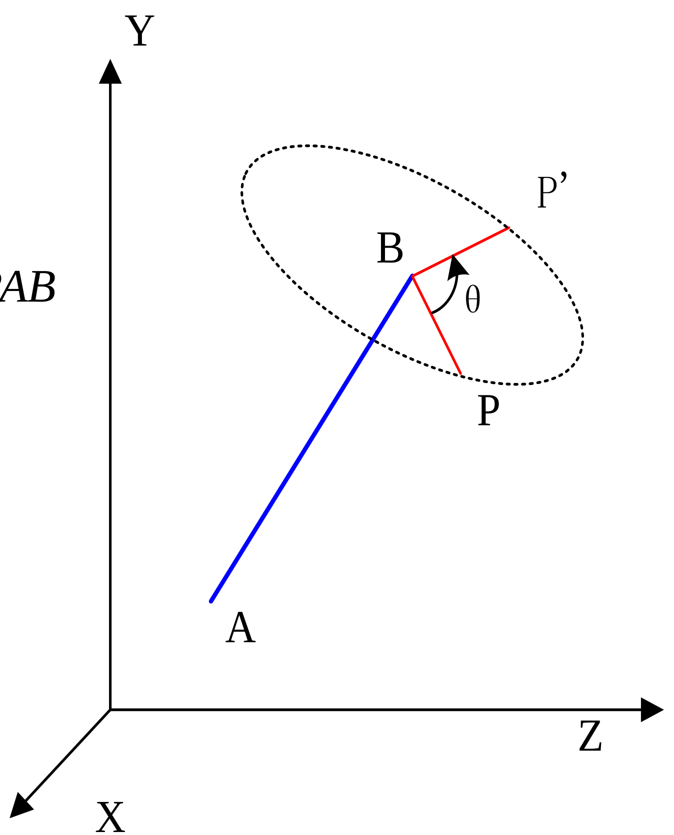


图7.5 P点绕AB轴旋转

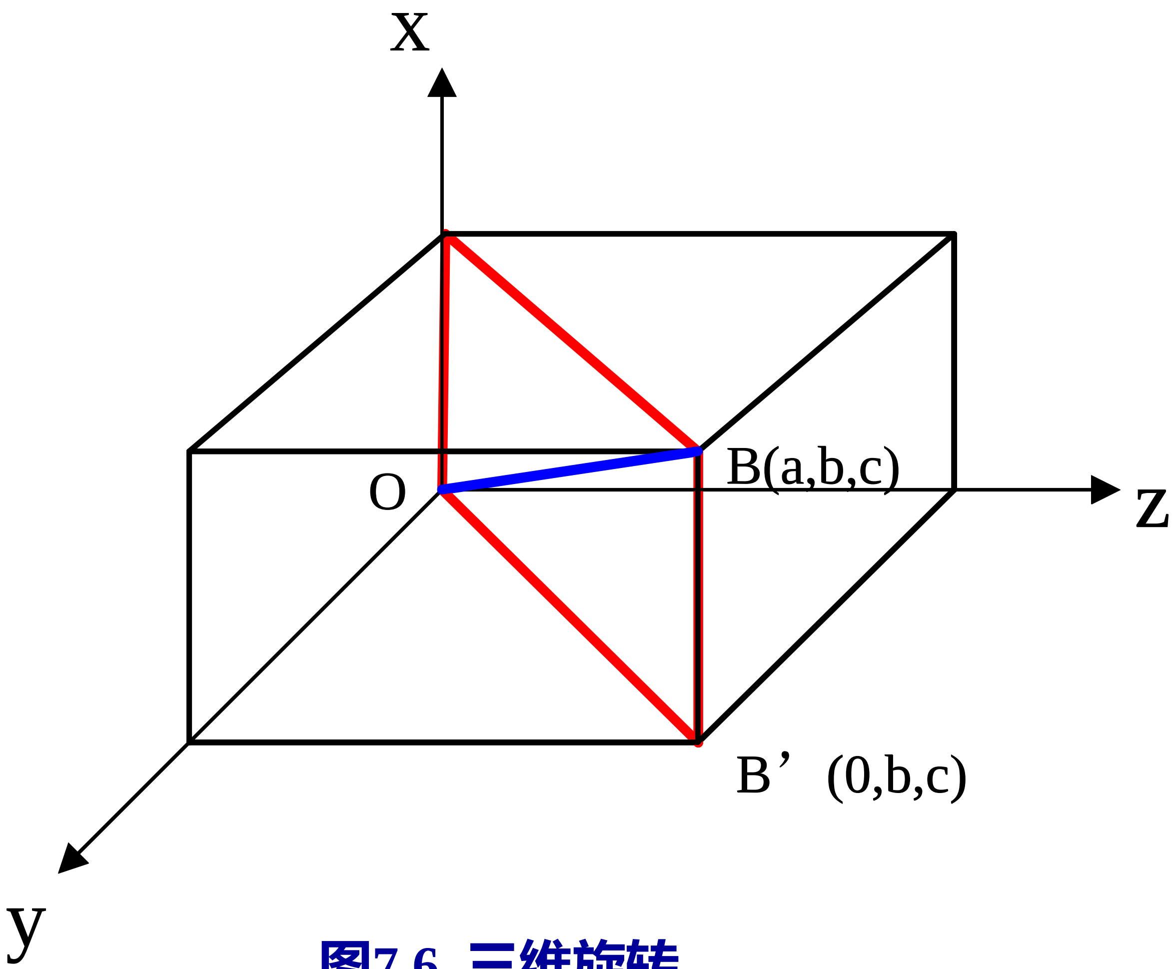


图7.6 三维旋转

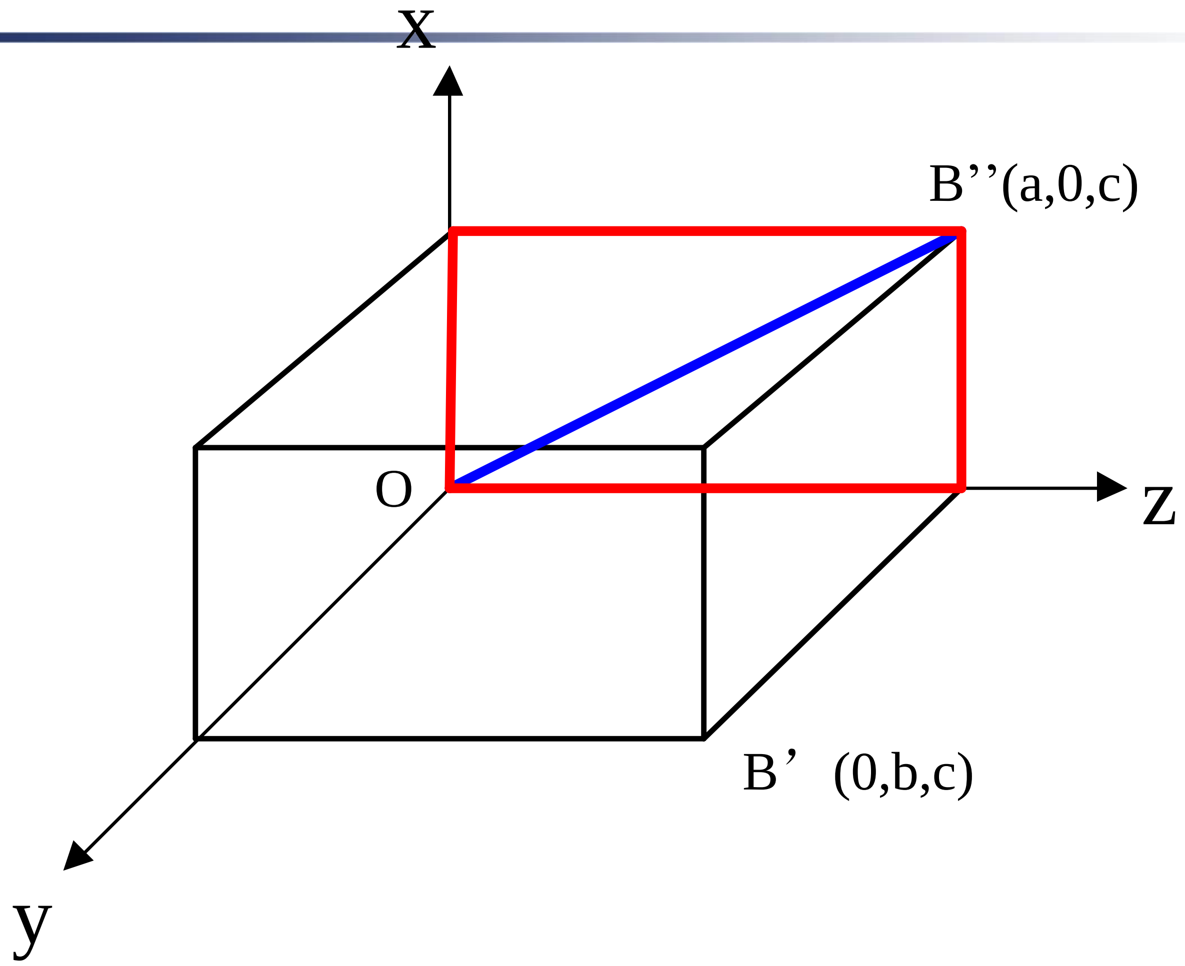


图7.6 三维旋转

绕任意轴的三维旋转变换

(1) 将坐标原点平移到*A*点；

$$T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_A & -y_A & -z_A & 1 \end{bmatrix}$$

绕任意轴的三维旋转变换

(2) 将O'BB'绕x'轴逆时针旋转α角，则O'B旋转到x'o'z'平面上;

$$T_{Rx}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕任意轴的三维旋转变换

(3) 将O'B绕y'轴顺时针旋转β角，则O'B旋转到z'轴上；

$$T_{Ry}=\begin{bmatrix}\cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

绕任意轴的三维旋转变换

(4) 经以上三步变换后，AB轴与z'轴重合，此时绕AB轴的旋转转换为绕z轴的旋转；

(5) 最后，求T_{tA}，T_{Rx}，T_{Ry}的逆变换，回到AB原来的位置。

$$T = T_A \cdot T_{Rx} \cdot T_{Ry} \cdot T_R \cdot T_{Ry}^{-1} \cdot T_{Rx}^{-1} \cdot T_A^{-1}$$

绕任意轴的三维旋转变换

- 类似地，针对任意方向轴的变换可用五个步骤来完成：

  (1)使任意方向轴的起点与坐标原点重合，此时进行平移变换。

  (2)使方向轴与某一坐标轴重合，此时需进行旋转变换，且旋转变换可能不止一次。

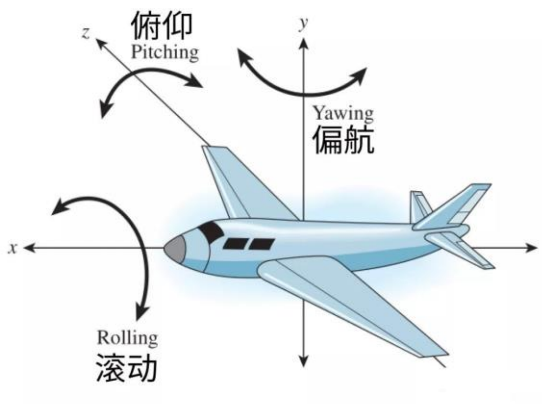
  (3)针对该坐标轴完成变换。

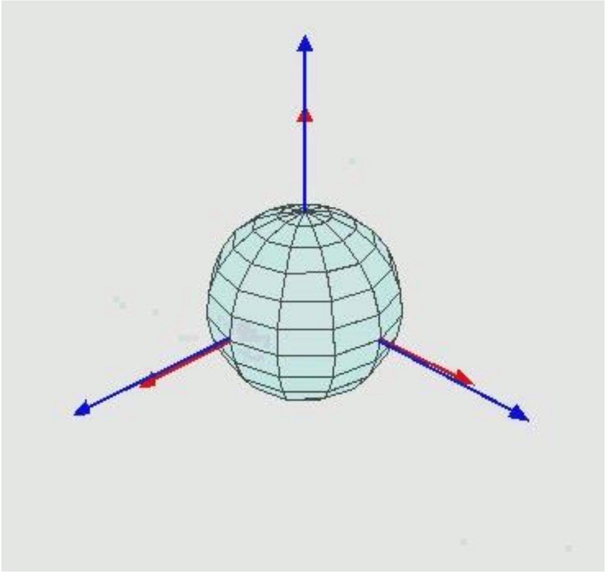
  (4)用逆旋转变换使方向轴回到其原始方向。

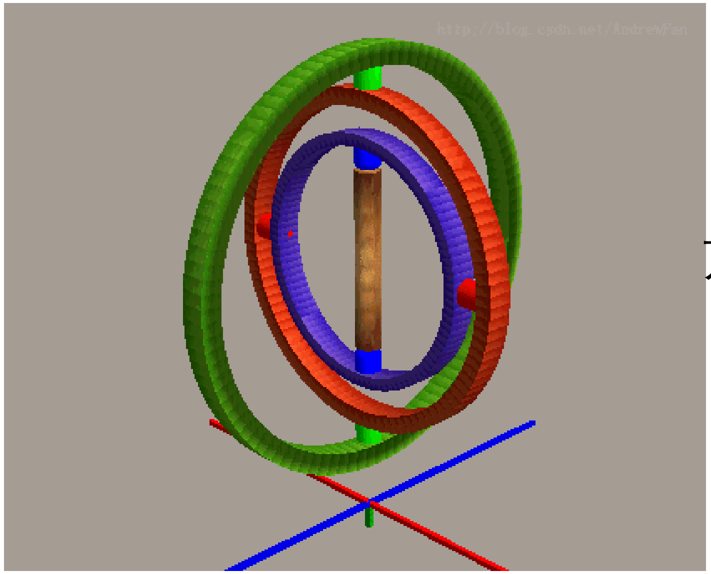
  (5)用逆平移变换使方向轴回到其原始位置。

扩展-欧拉角

欧拉角是由 Leonhard Euler引入的三个角度，用于描述刚体相对于固定坐标系的方向。







万向节死锁

扩展-四元数(quaternions)

四元数的表示:

$$q = \underbrace{\boxed{\cos\frac{\theta}{2}}}_{\lambda} + \underbrace{\boxed{\sin\frac{\theta}{2}\cos\alpha}}_{P_1} \cdot i + \underbrace{\boxed{\sin\frac{\theta}{2}\cos\beta}}_{P_2} \cdot j + \underbrace{\boxed{\sin\frac{\theta}{2}\cos\gamma}}_{P_3} \cdot k$$

$$q = \lambda + P_1 i + P_2 j + P_3 k$$

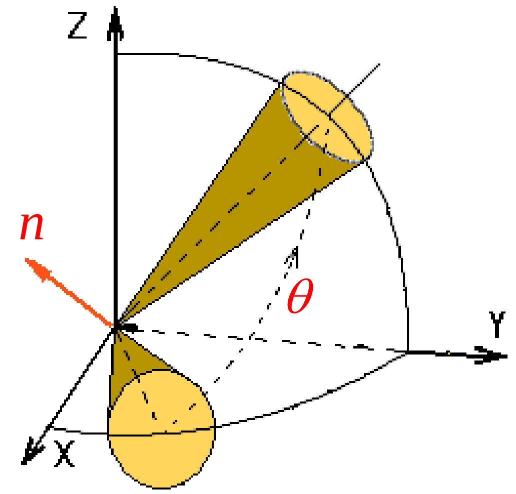
λ ----- 标量部分

$P_1 i + P_2 j + P_3 k$ ---- 矢量部分

包括一个实数单位 *1* 和三个虚数单位 $i,\ j, k$

另一种表示法: $q = (\lambda,\quad P)$, P 代表矢量部分

扩展-四元数(quaternions)



一个有固定点的刚体通过绕该点的某个轴转过特定角度可达到任何姿态

转轴的方向可以表示成一个单位矢量:

$$\vec{n} = \cos\alpha \cdot i + \cos\beta \cdot j + \cos\gamma \cdot k$$

则描述该转动的四元数可以表示成:

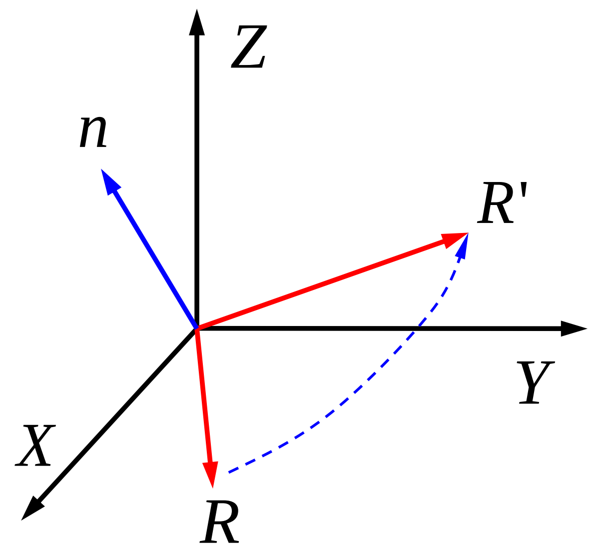
$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \cdot \vec{n}$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\alpha \cdot i + \sin\frac{\theta}{2}\cos\beta \cdot j + \sin\frac{\theta}{2}\cos\gamma \cdot k$$

四元数既反映了转动的方向又反映了转动的幅值.

扩展-四元数(quaternions)

如果矢量 R 相对固定坐标系旋转, 并且该旋转可以用四元数 q 描述，新矢量记为 R',



则 R 和 R' 之间的变换可以表示成下述四元数运算:

$$R' = q\, R\, q^{-1}$$

含义: 矢量 R 相对固定坐标系旋转,
旋转的角度和轴向由 q 决定

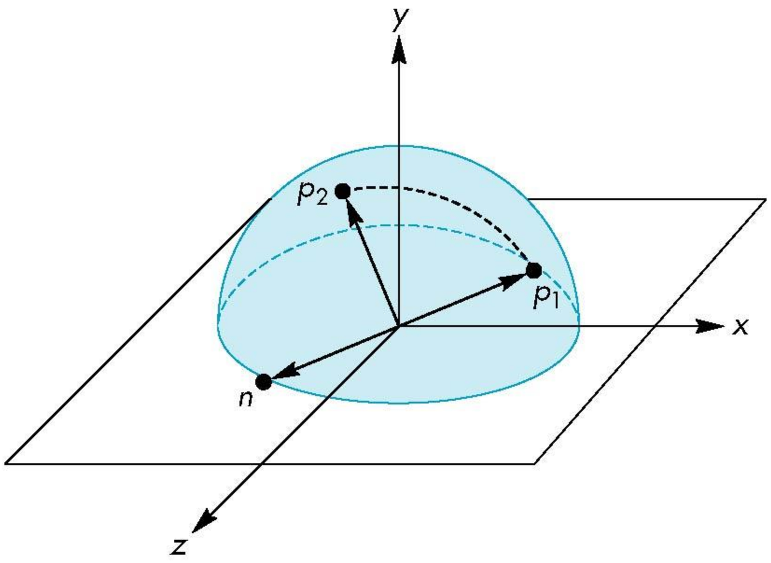
上述运算中, R 被当成一个标量部分为零的四元数，即:

$$R = 0 + R_x i + R_y j + R_z k$$

扩展-四元数(quaternions)

- 四元数可以完美的描述物体在空间的姿态，它最大的优点就是没有奇异性，物体的每一种姿态都对应一个唯一的四元数，因此飞行器的大角度控制多半使用四元数，比如俯冲、翻转等动作。

$$\mathbf{n} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2$$



三维变换

1. 三维齐次坐标变换矩阵
2. 三维基本几何变换
3. 三维复合变换
4. 投影变换

平面几何投影变换

- 投影变换就是把三维立体（或物体）投射到投影面上得到二维平面图形的过程。
  - **平面几何投影**主要指平行投影、透视投影以及通过这些投影变换而得到的三维立体的常用平面图形：三视图、轴测图。
  - **观察投影**是指在观察空间下进行的图形投影变换。

平面几何投影变换

- 投影中心、投影面、投影线：

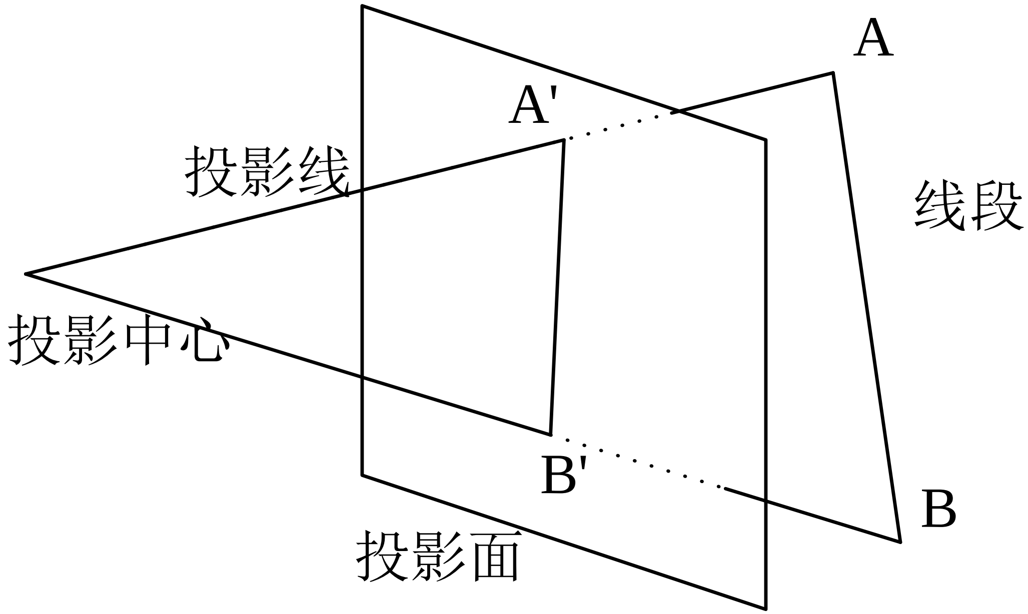
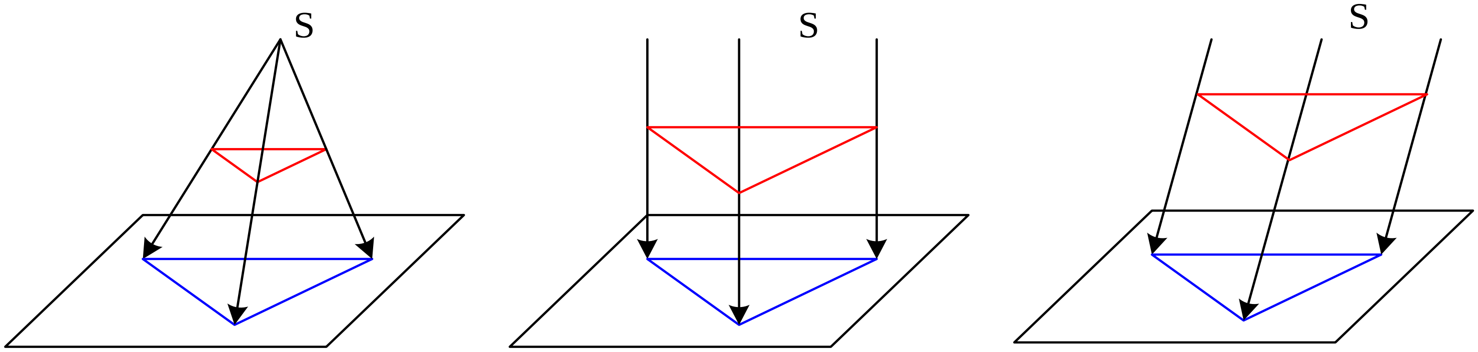


图7.7 投影构成

平面几何投影变换



(a)透视投影　　(b)正投影　　(c)斜投影

图7.8 平面几何投影分为透视投影和平行投影

平面几何投影可分为两大类：

- 透视投影的投影中心到投影面之间的距离是有限的；
- 平行投影的投影中心到投影面之间的距离是无限的。

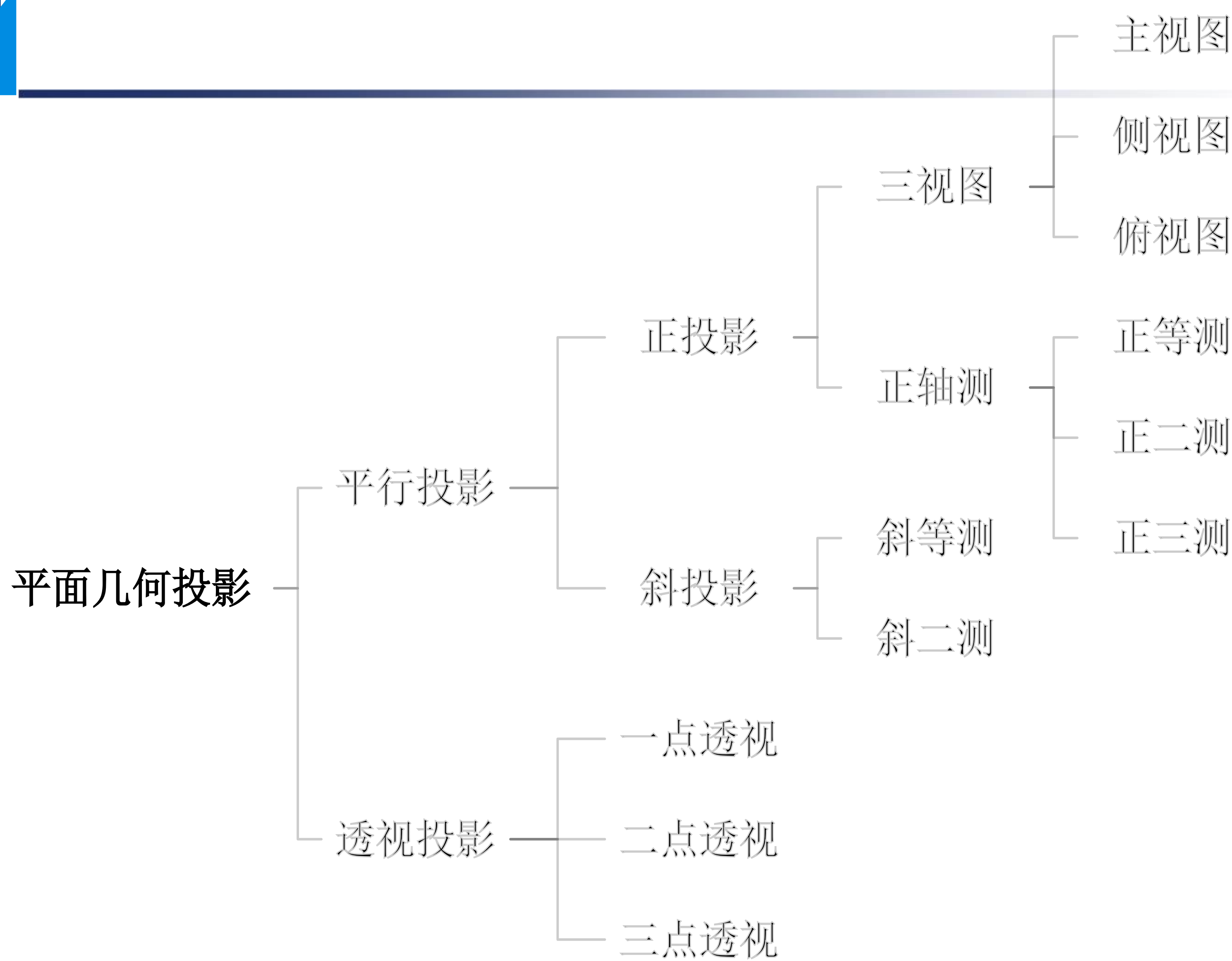


图7.9 平面几何投影的分类

平面几何投影变换——平行投影

□平行投影可分成两类：正投影和斜投影。

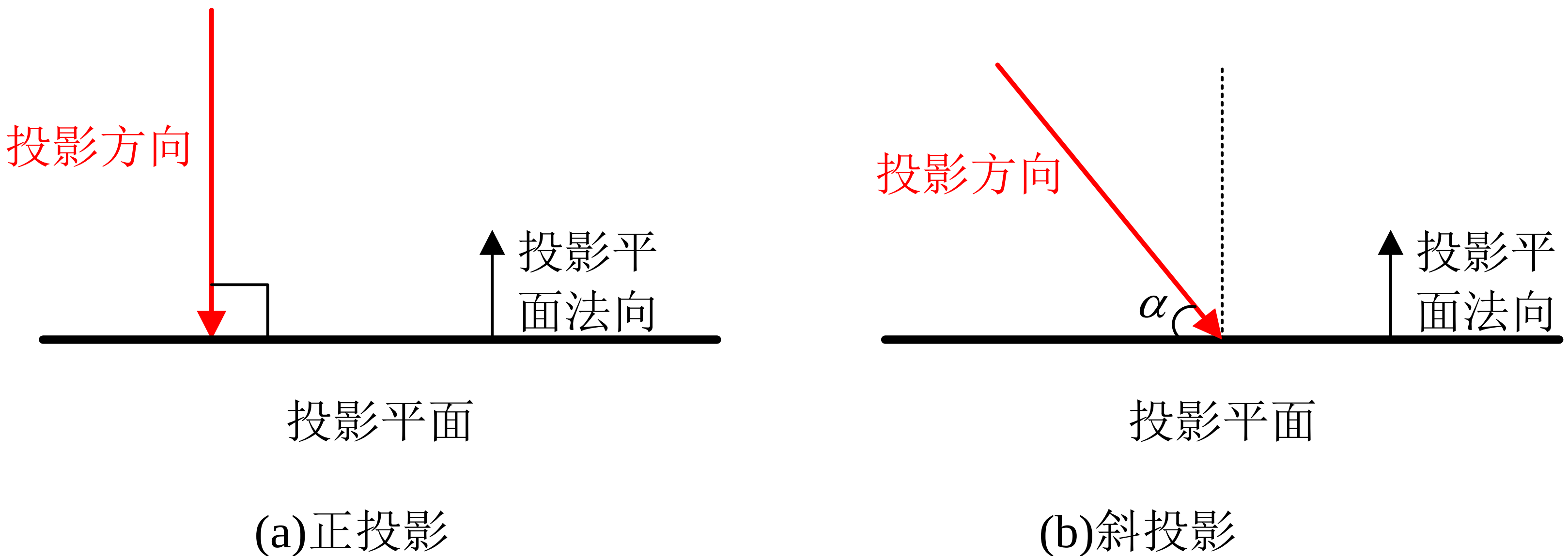
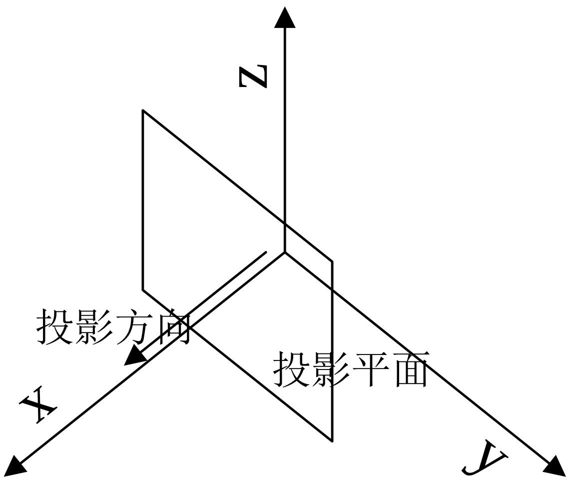


图7.10 平行投影

□ 性质：能够精确地反映物体的实际尺寸。

平面几何投影变换——正投影

- 正投影又可分为：三视图和正轴测。
- 当投影面与某一坐标轴**垂直**时，得到的投影为三视图；否则，得到的投影为正轴测图。



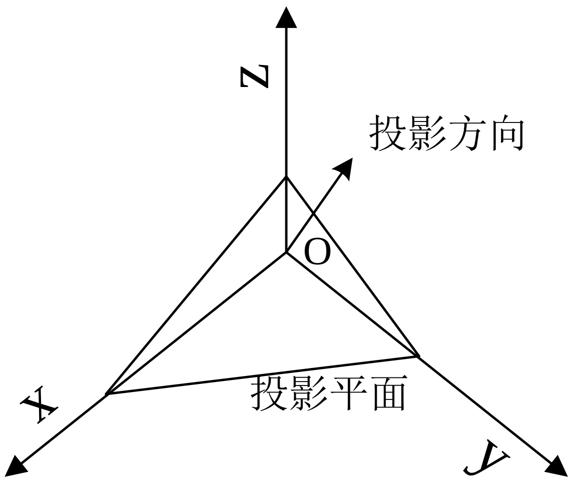


图7.11 正投影

□三视图包括主视图、侧视图和俯视图三种，投影面分别与Y轴、X轴和Z轴垂直。

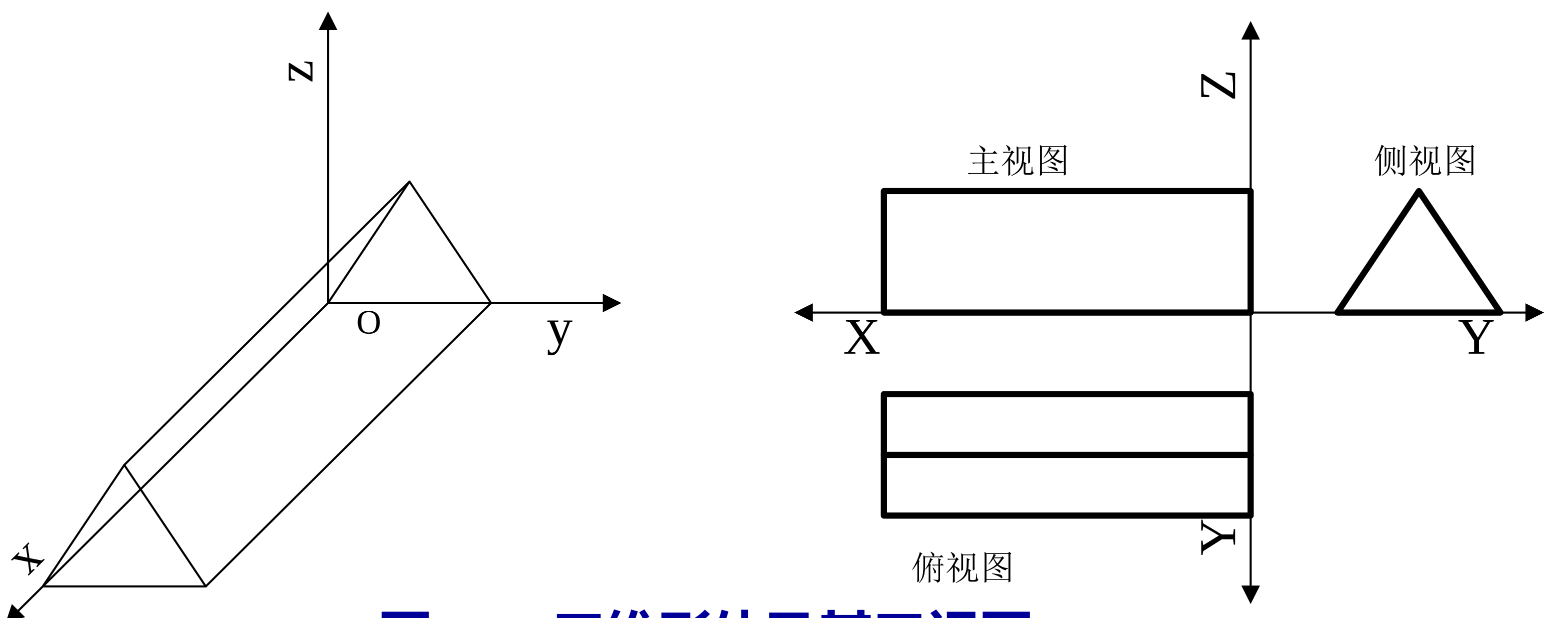


图7.12 三维形体及其三视图

平面几何投影变换——三视图

- 确定三维形体上各点的位置坐标；
- 引入齐次坐标，求出所作变换相应的变换矩阵；
- 将所作变换用矩阵表示，通过运算求得三维形体上各点(x,y,z)经变换后的相应点(x',y')或(y',z')；
- 由变换后的所有二维点绘出三维形体投影后的三视图。

□主视图：将三维形体向xoz面（又称V面）作垂直投影（即正平行投影），得到主视图。

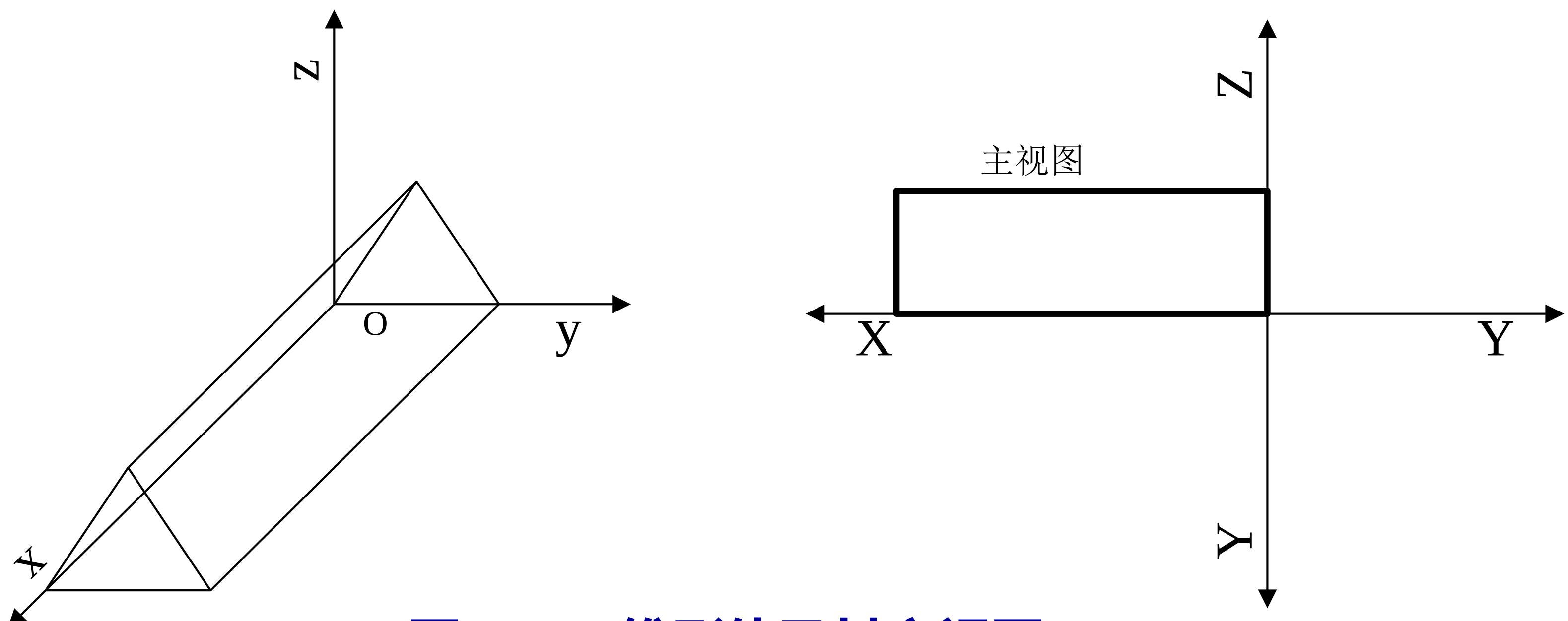


图7.13 三维形体及其主视图

□主视图投影矩阵为：

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平面几何投影变换——三视图

- 俯视图：三维形体向xoy面（又称H面）作垂直投影得到俯视图。

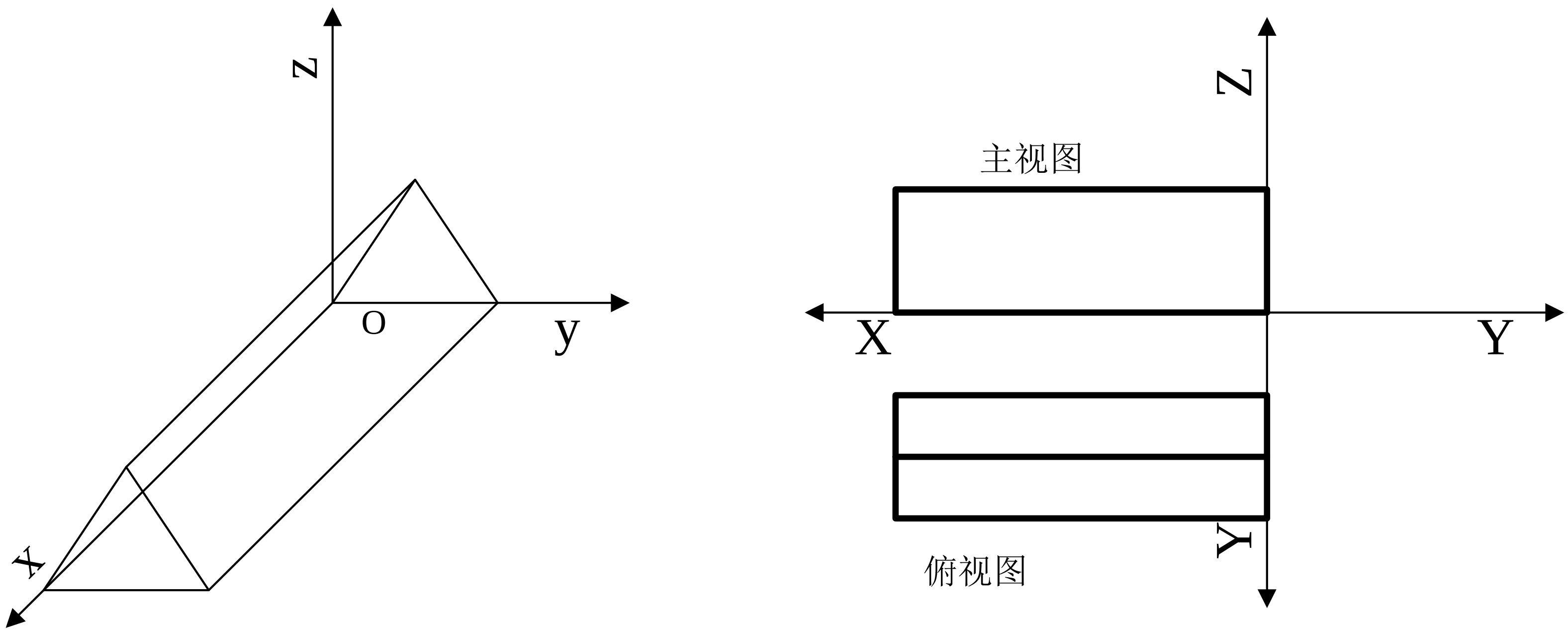
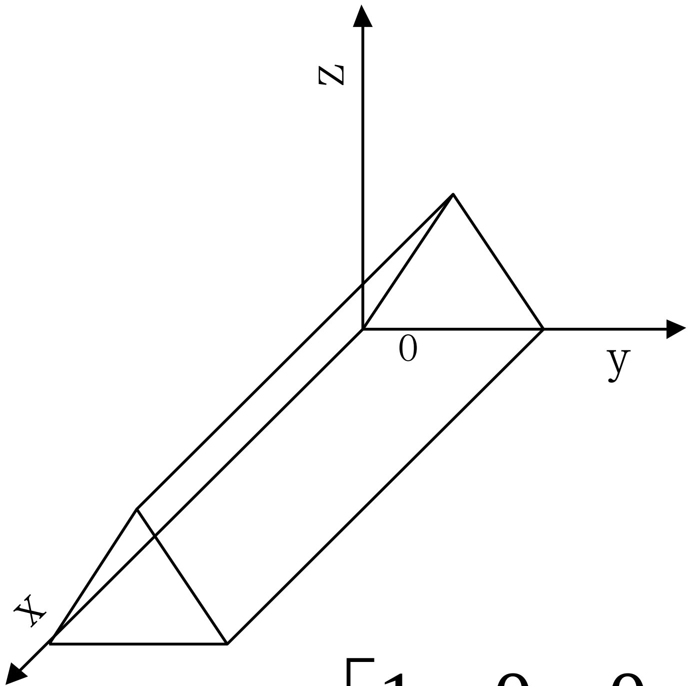
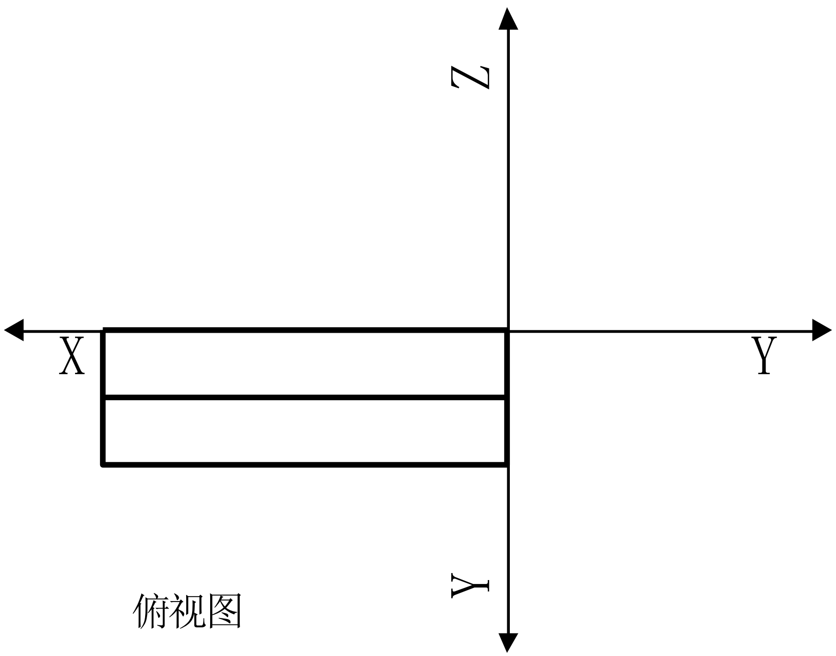


图7.14 三维形体及其主、俯视图

(1) 投影变换

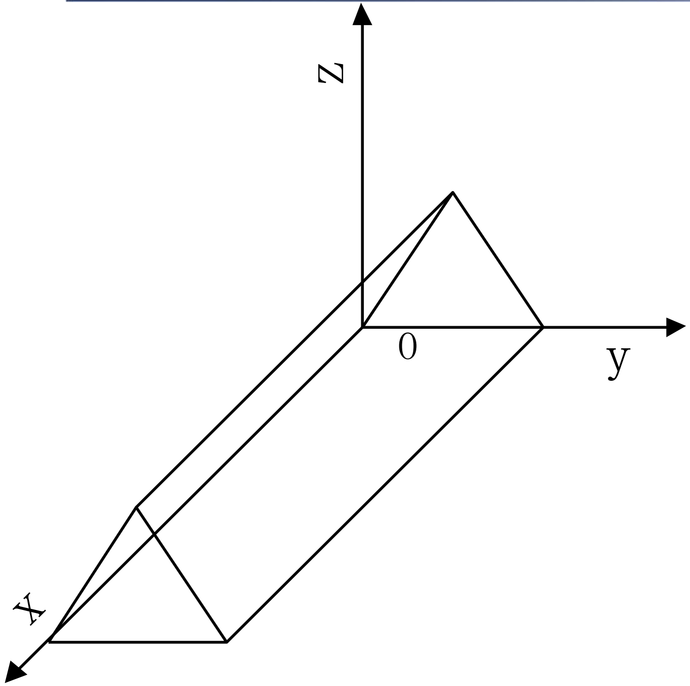


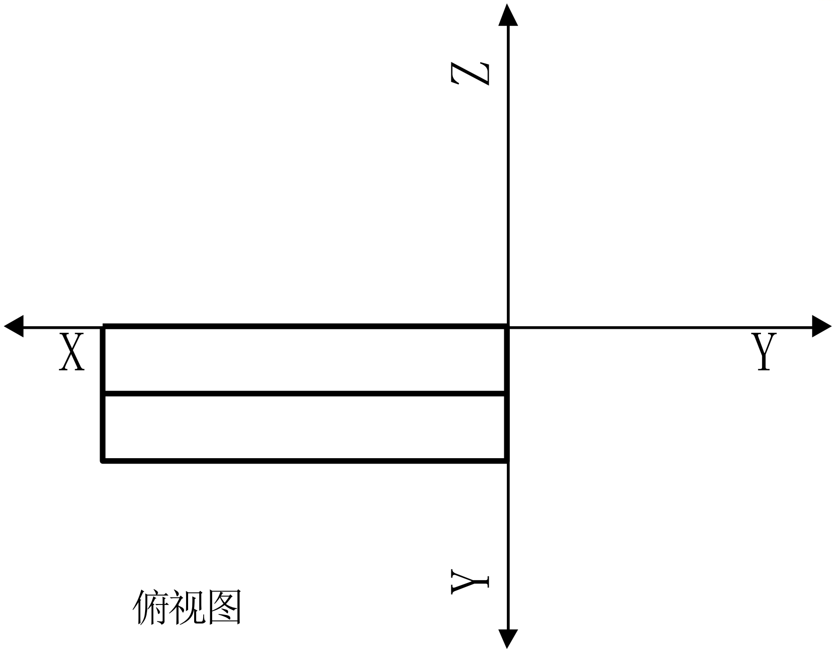


俯视图

$$T_{xoy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)使H面绕x轴负转90°

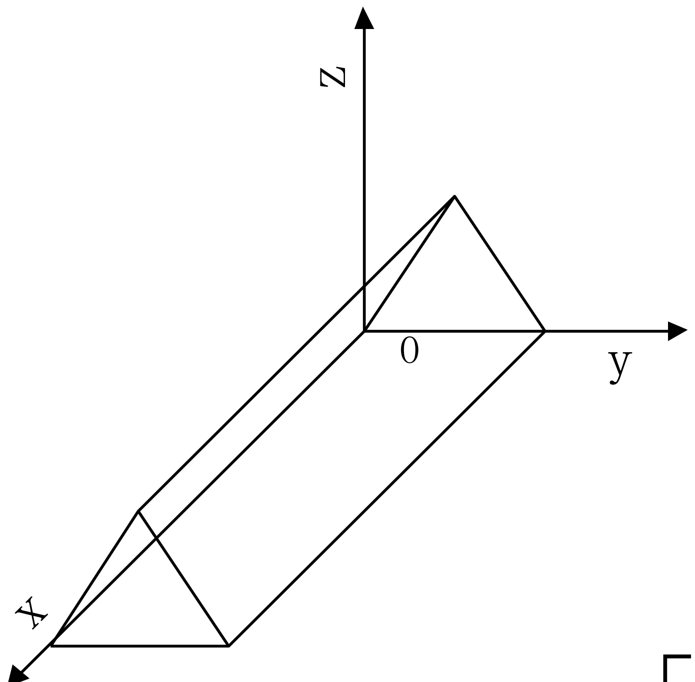


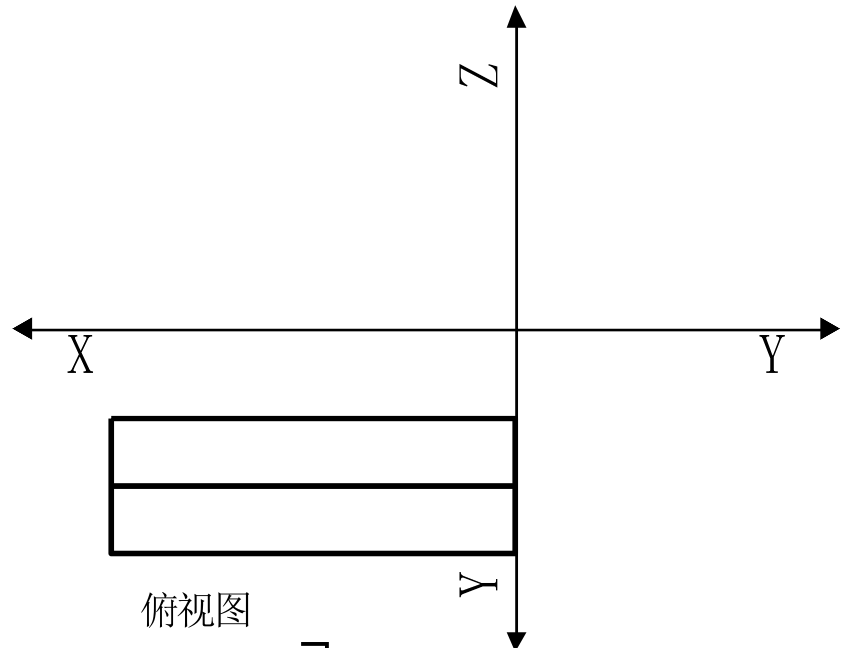


俯视图

$$T_{Rx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & \cos(-90^\circ) & \sin(-90^\circ) & 0\\0 & -\sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(3)使H面沿z方向平移一段距离$-z_0$





俯视图

$$T_{Rx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -z_0 & 1\end{bmatrix}$$

□俯视图投影矩阵为：

$$T = T_{xoy} \cdot T_{Rx} \cdot T_{tz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix}$$

平面几何投影变换——三视图

- 侧视图：获得侧视图是将三维形体往yoz面（侧面W）作垂直投影。

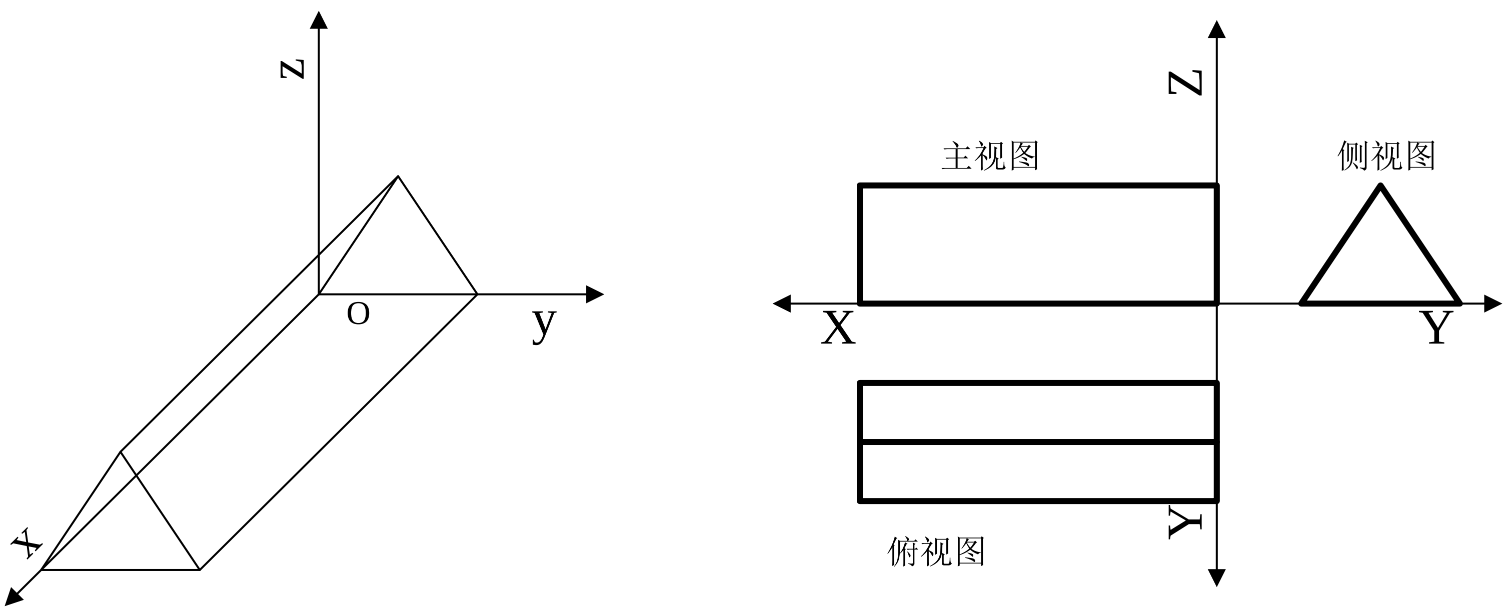
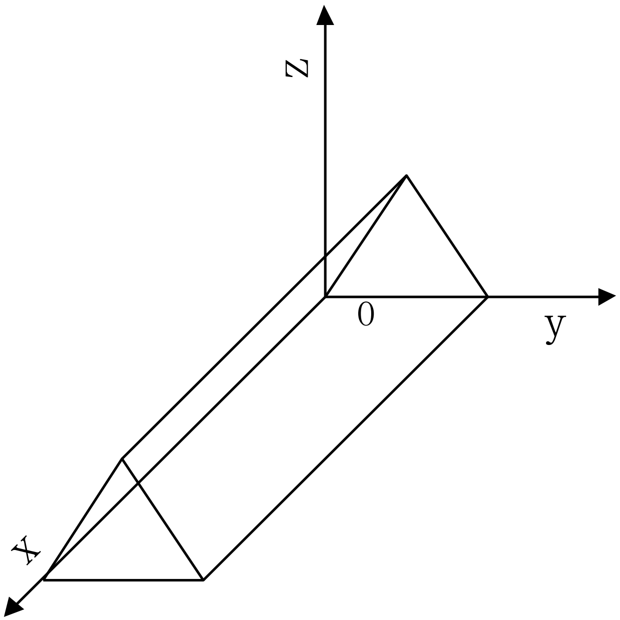
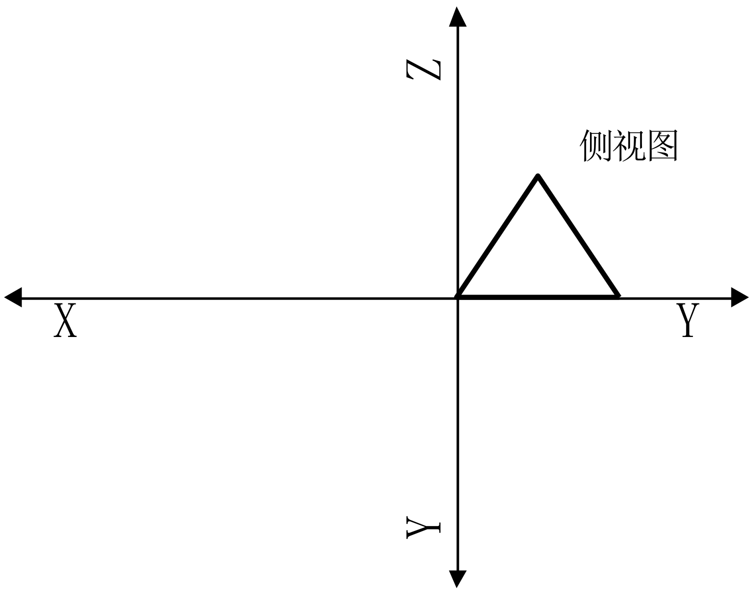


图7.15 三维形体及其三视图

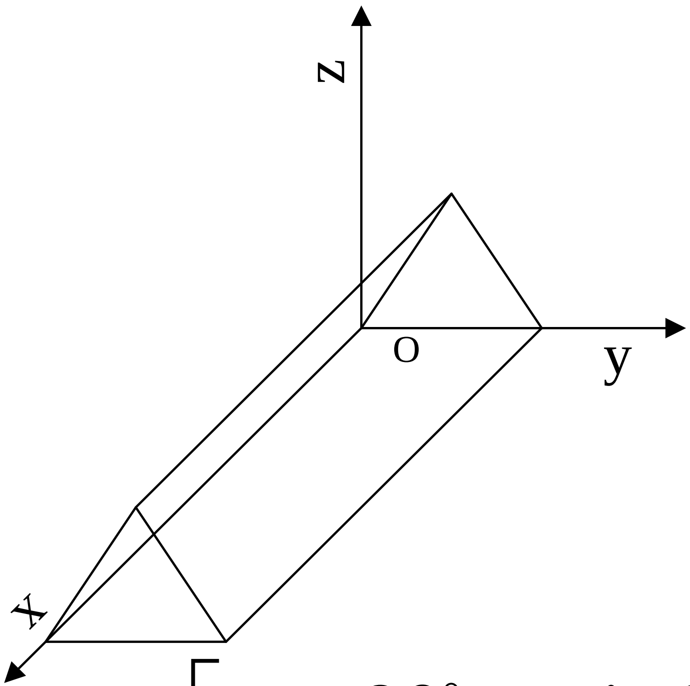
(1) 侧视图的投影变换

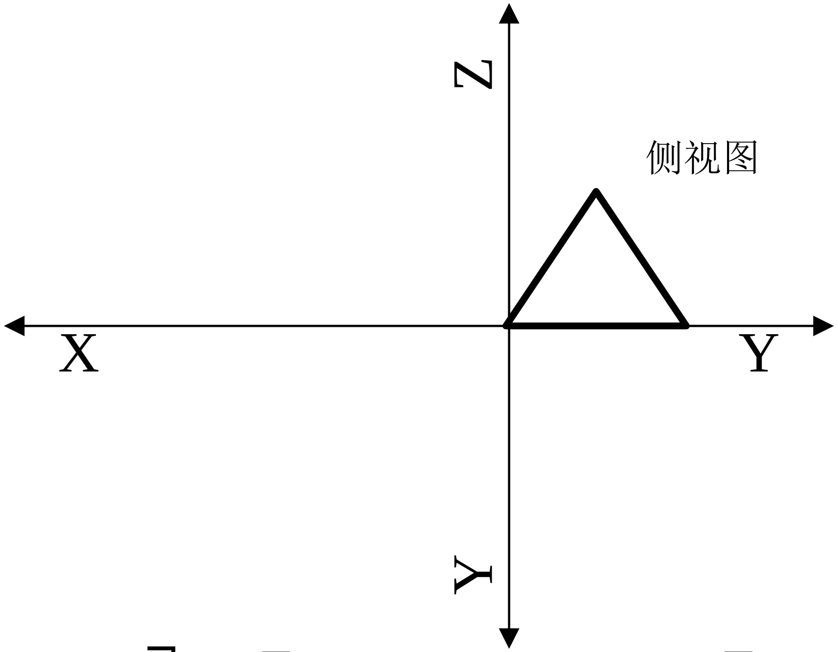




$$T_{yoz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

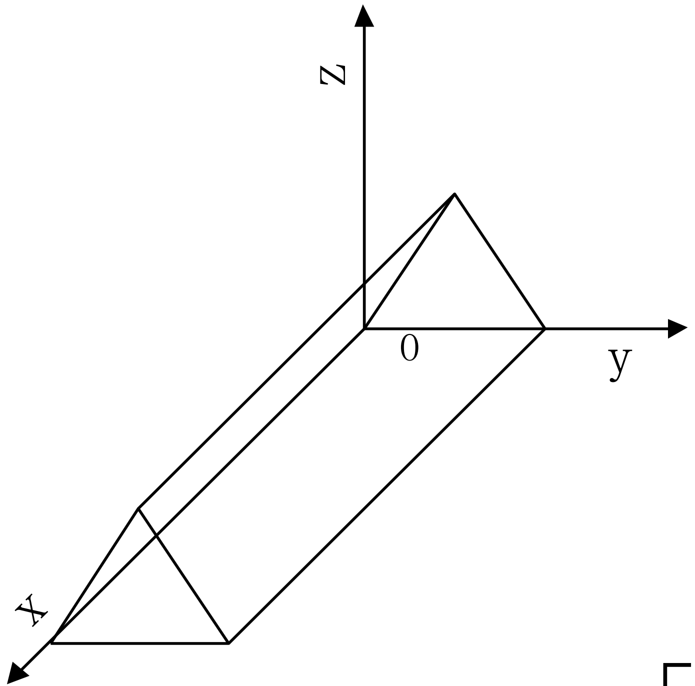
(2)使W面绕z轴正转90°

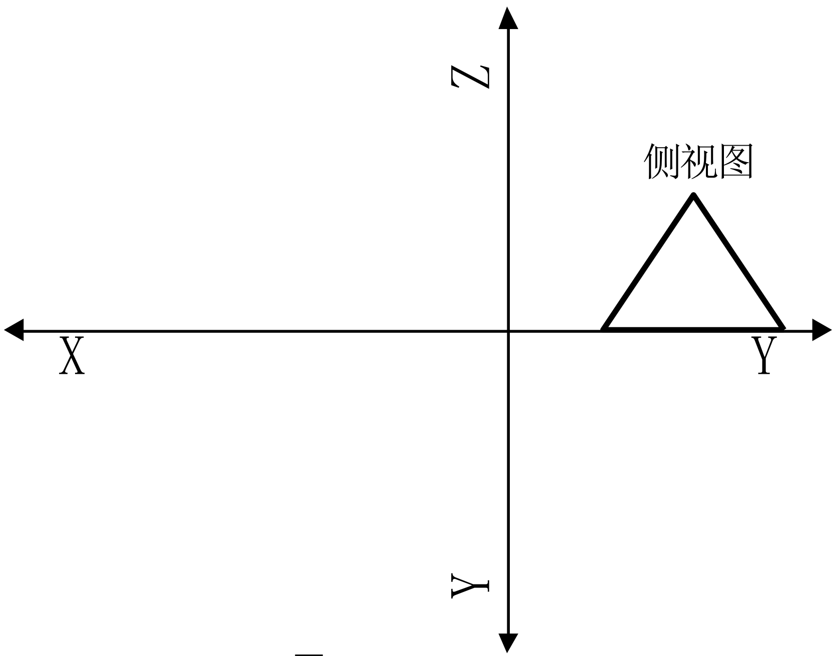




$$T_{Rz}=\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & \sin 90^\circ & 0 & 0\\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(3)使W面沿负x方向平移一段距离x_0





$$T_{Rx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□侧视图投影矩阵为：

$$T = T_{yoz} \cdot T_{Rz} \cdot T_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最后的三视图：

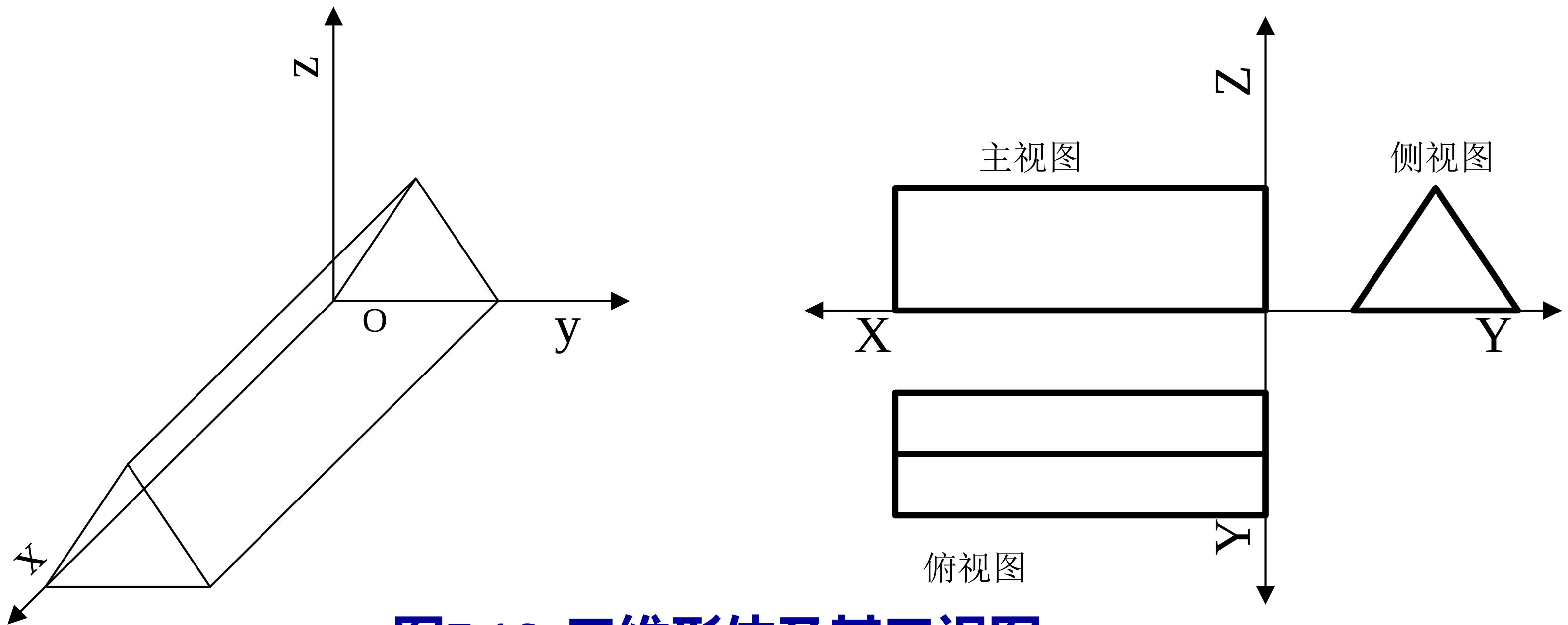


图7.16 三维形体及其三视图

图例

实例

7.7 试作出图 7-41 中空间四面体的 三 视图，要求写清变换式（设平移矢量均为 1）。

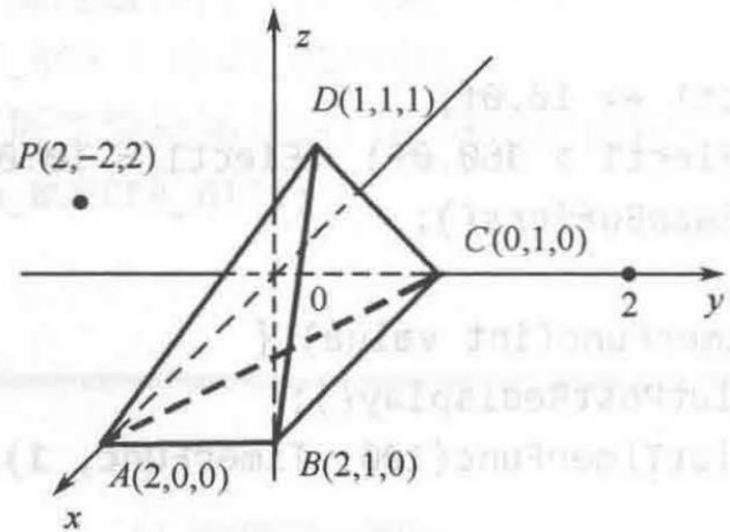


图 7-41

平面几何投影变换——正轴测图

投影面不与坐标轴垂直的正投影

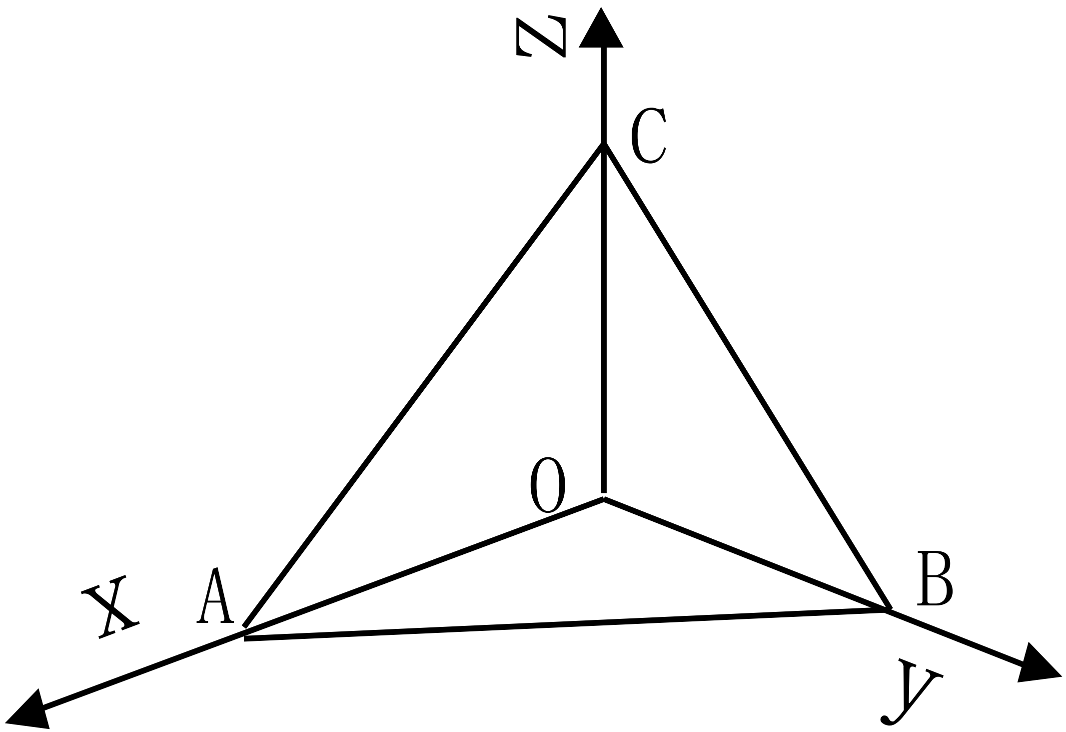


图7.17 正轴测图

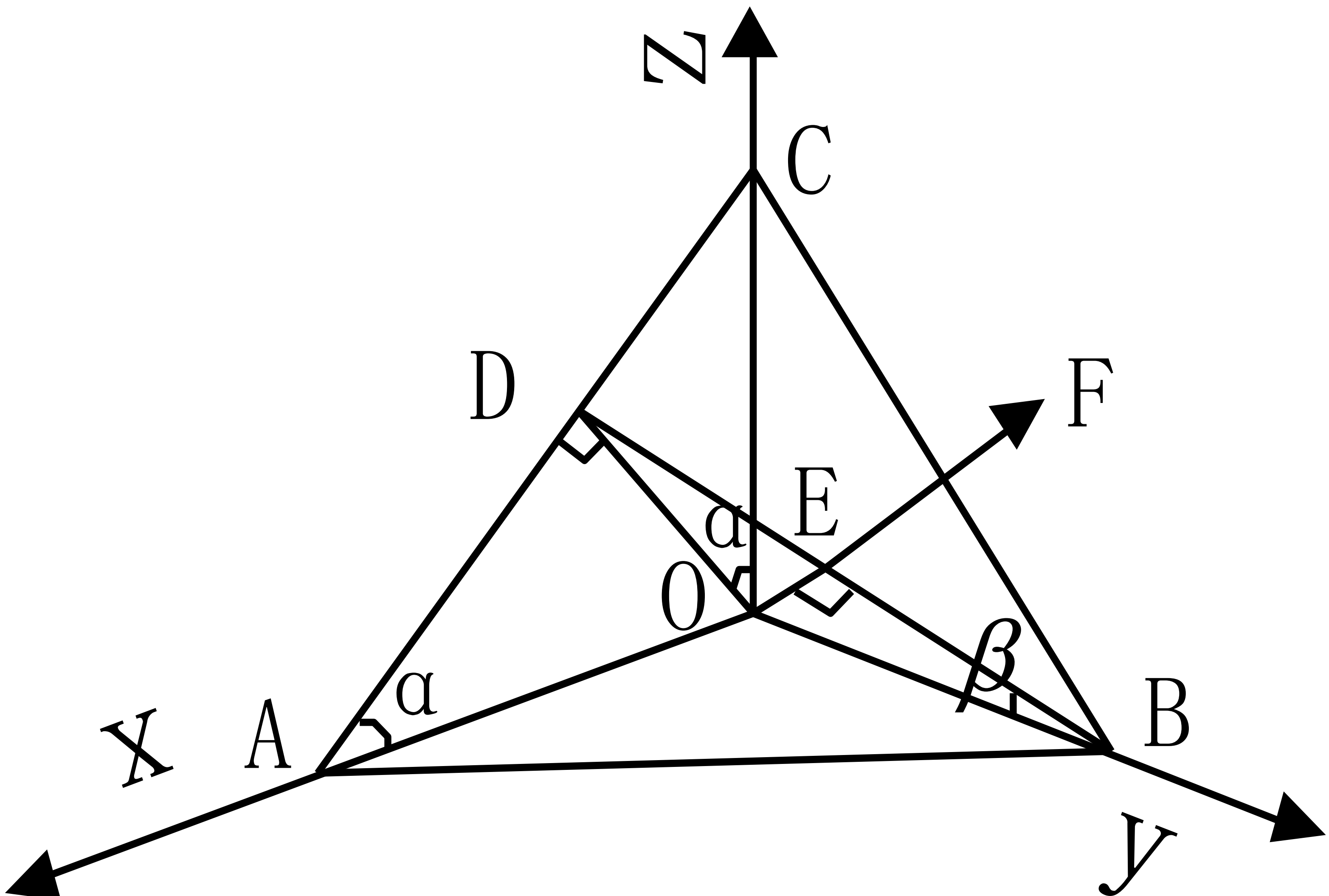


图7.18 正轴测图

(1) 先绕y轴顺时针旋转α角

$$T_{Ry}=\begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & 0 & -\sin(-\alpha) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(2) 再绕x轴逆时针旋转β角

$$T_{Rx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0\\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(3) 将三维形体向xoy平面作正投影

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 最后得到正轴测图的投影变换矩阵：

$$T = T_{Ry} \cdot T_{Rx} \cdot T_p = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \cdot \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \cdot \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **此矩阵是一般正轴测图的投影变换矩阵。**

□正等测图

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \sqrt{2}/2$$

$$\sin\beta = \sqrt{3}/3$$

$$\cos\beta = \sqrt{6}/3$$

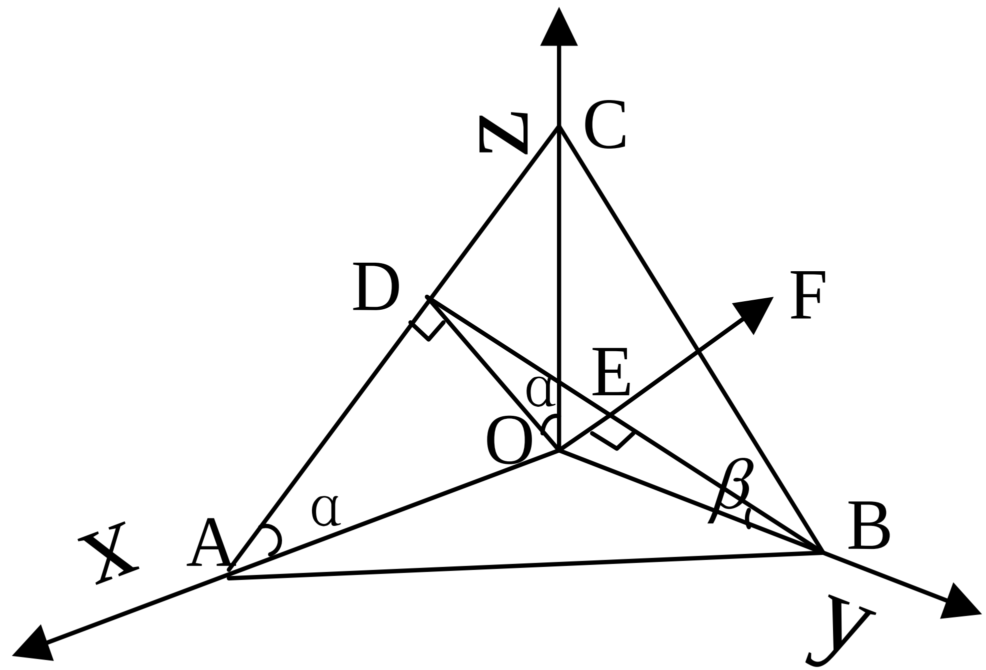


图7.19 正等测图

□将α和β的值代入(7-1)式得到正等测图的投影变换矩阵：

$$T=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.7071 & -0.4082 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8165 & 0 & 0 \\ -0.7071 & -0.4082 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

正二测图

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \sqrt{2}/2$$

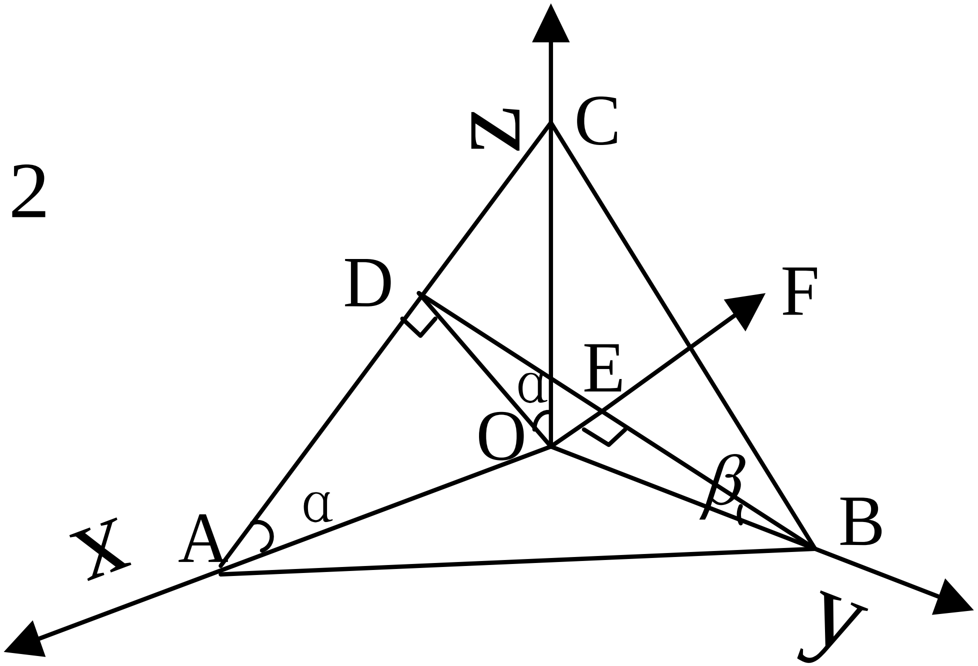


图7.20 正二测图

□将α值代入(7-1)式得到正二测图的投影变换矩阵：

$$T=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平面几何投影变换——正轴测图

- 能同时反映物体的多个面，具有一定的立体效果。
- 能使空间任意一组平行线的投影仍然保持平行。
- 不能保持三维空间的角度关系。
- 沿三个坐标轴的方向均可测量距离，但要注意比例关系。

平面几何投影变换——斜投影图

- 斜投影图，即斜轴测图，是将三维形体向一个单一的投影面作平行投影，但投影方向不垂直于投影面所得到的平面图形。
- 常选用垂直于某个主轴的投影面，使得平行于投影面的形体表面可以进行距离和角度的测量。
- 特点：既可以进行测量又可以同时反映三维形体的多个面，具有立体效果。

□ 常用的斜轴测图有斜等测图和斜二测图。

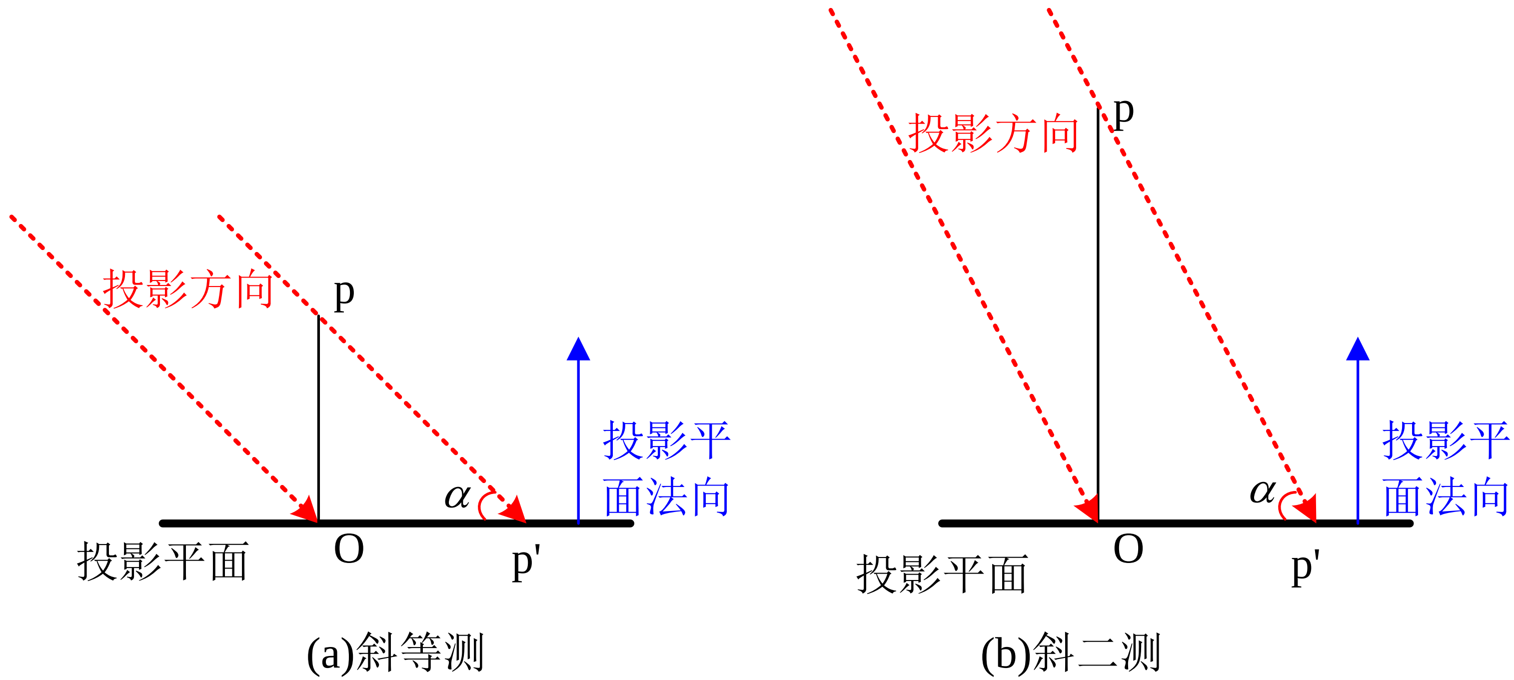


图7.21 斜平行投影

平面几何投影变换——斜投影图

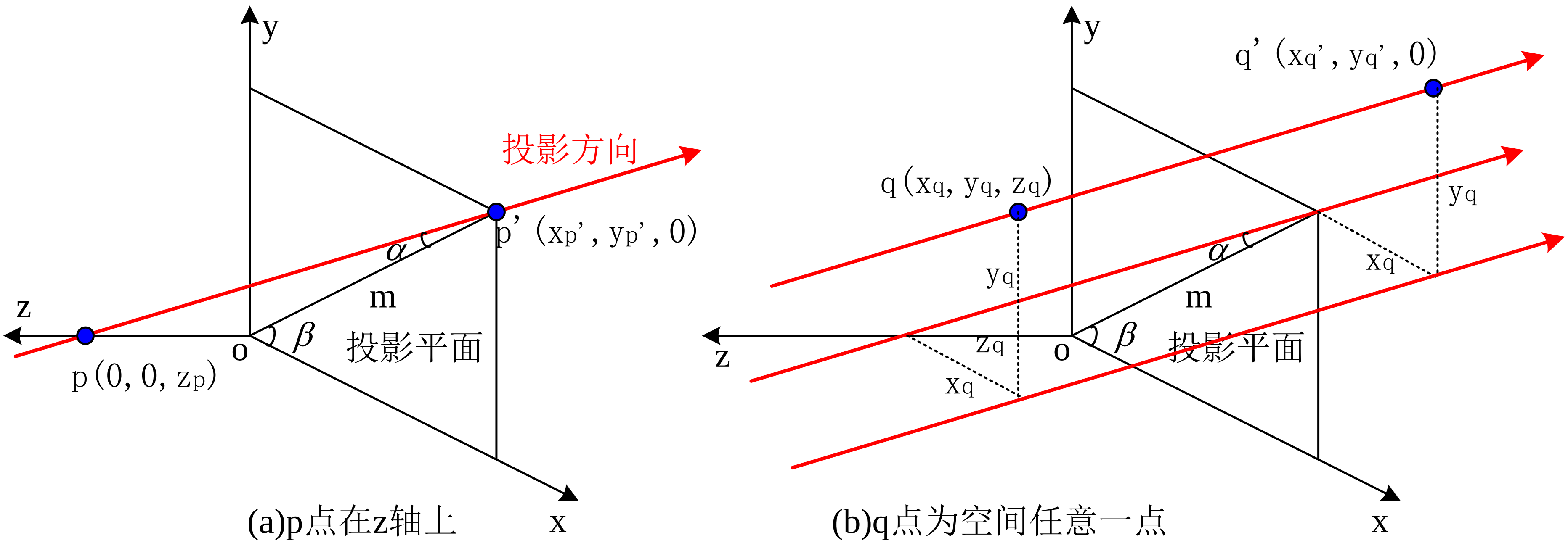


图7.21 斜平行投影的形成

平面几何投影变换——斜投影图

$$x_q' = z_q ctg\alpha\cos\beta + x_q$$

$$y_q' = z_q ctg\alpha\sin\beta + y_q$$

□斜平行投影的投影变换矩阵为：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ctg\alpha\cos\beta & ctg\alpha\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

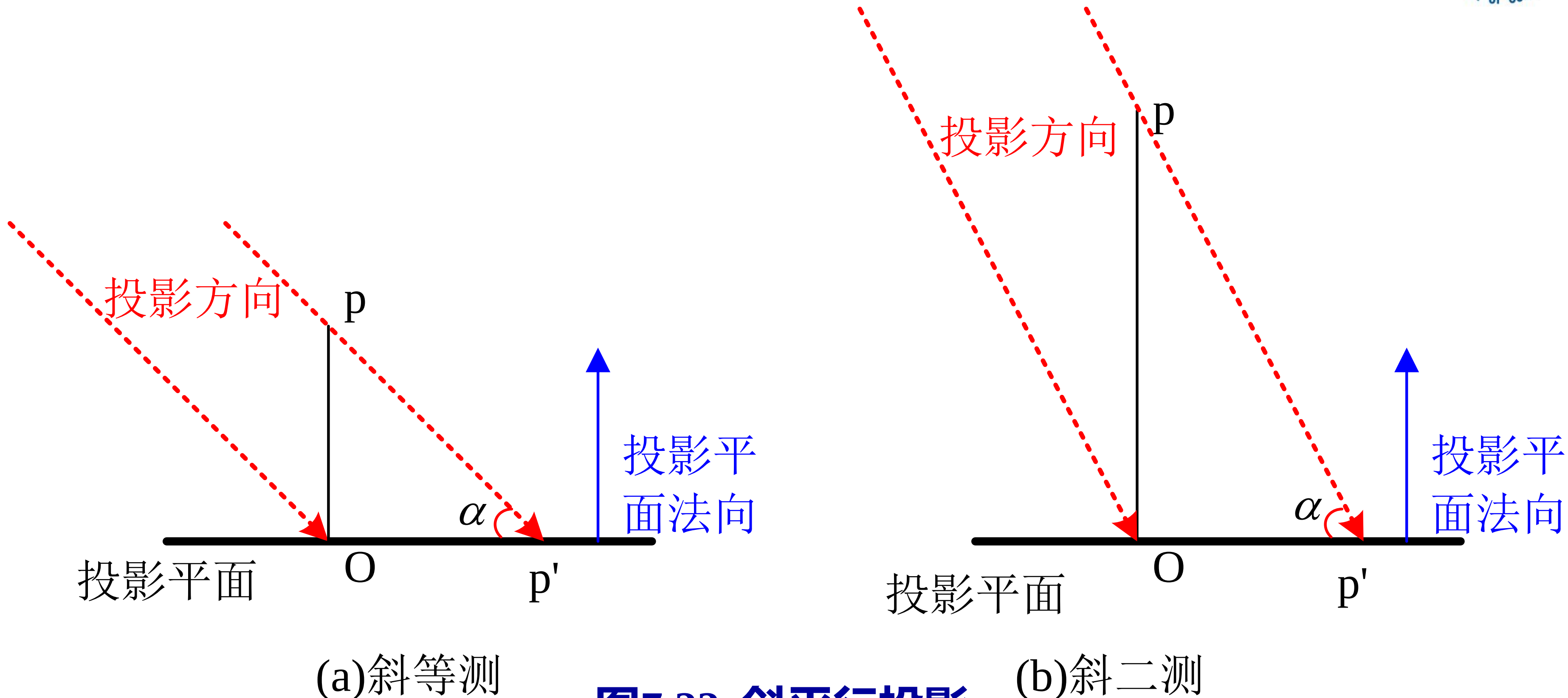


图7.22 斜平行投影

对于斜等测图有：α=45°,ctgα=1。

斜二测图则有：α=arctg(2),ctgα=1/2。

通常β取30° 或45° 。

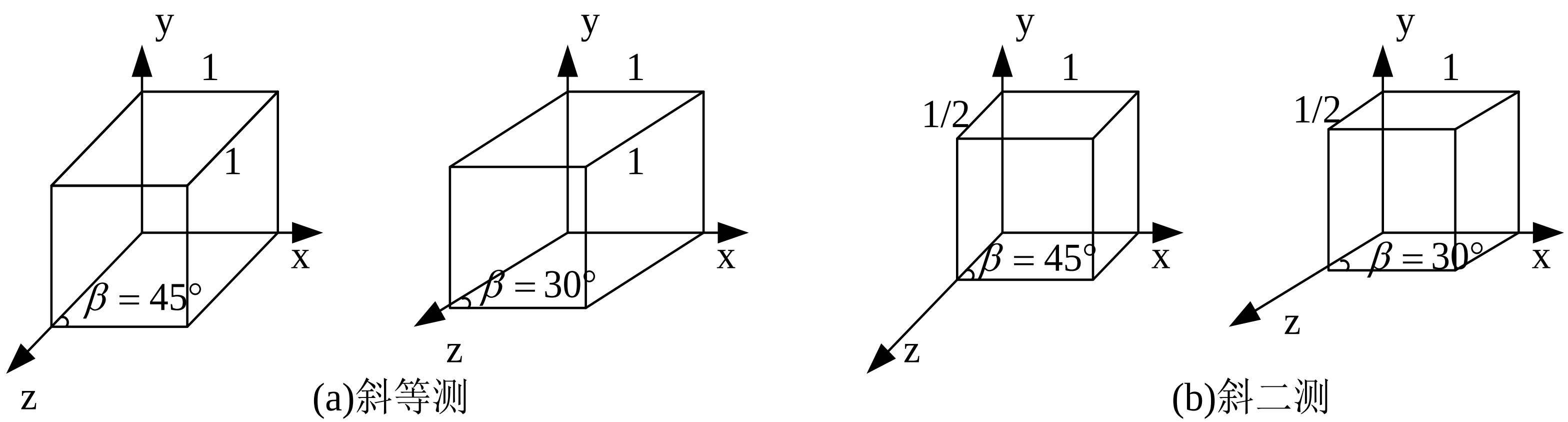
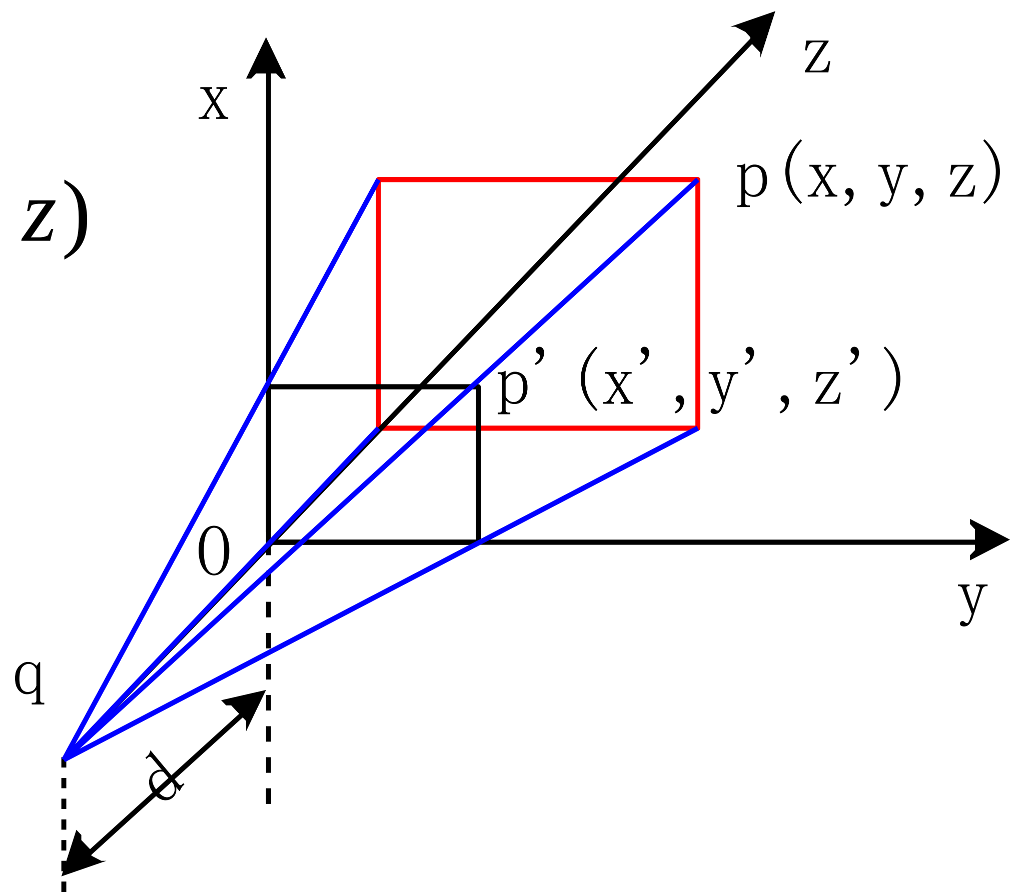


图7.23 单位立方体的斜平行投影

平面几何投影变换——透视投影

$$x'/x = y'/y = d/(d+z)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□透视缩小效应：物体的透视投影的大小与物体到投影中心的Z方向距离成反比。

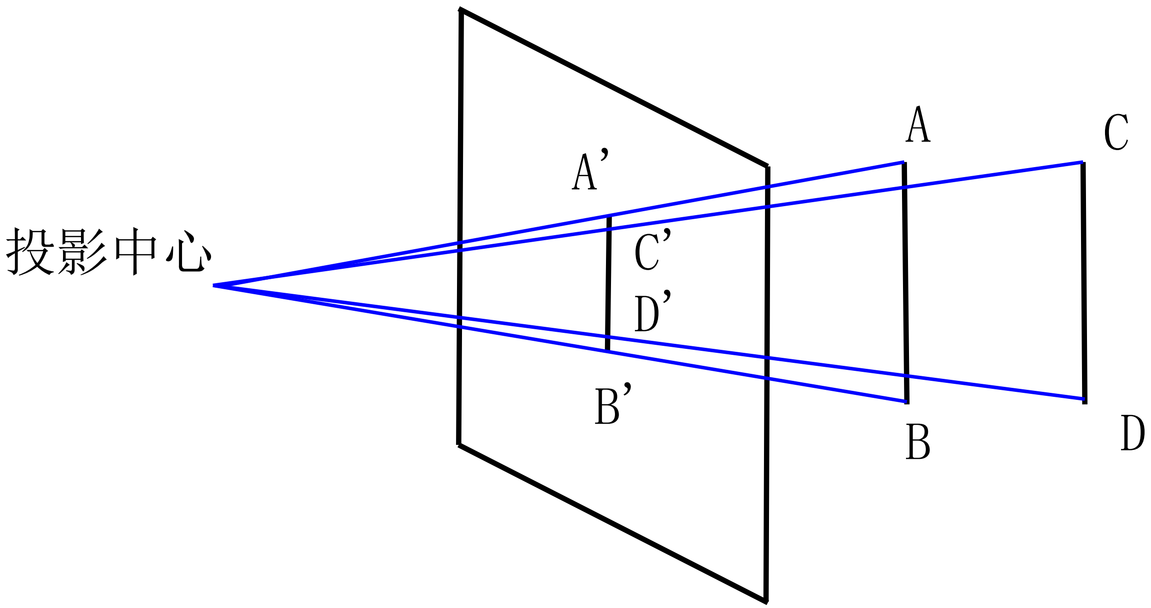


图7.24 透视缩小效应

平面几何投影变换——透视投影

□透视投影的深度感更强，更加具有真实感，但透视投影不能够准确反映物体的大小和形状。

□透视投影的大小与物体到投影中心的距离有关。

□一组平行线若平行于投影平面时，它们的透视投影仍然保持平行。

□只有当物体表面平行于投影平面时，该表面上的角度在透视投影中才能被保持。

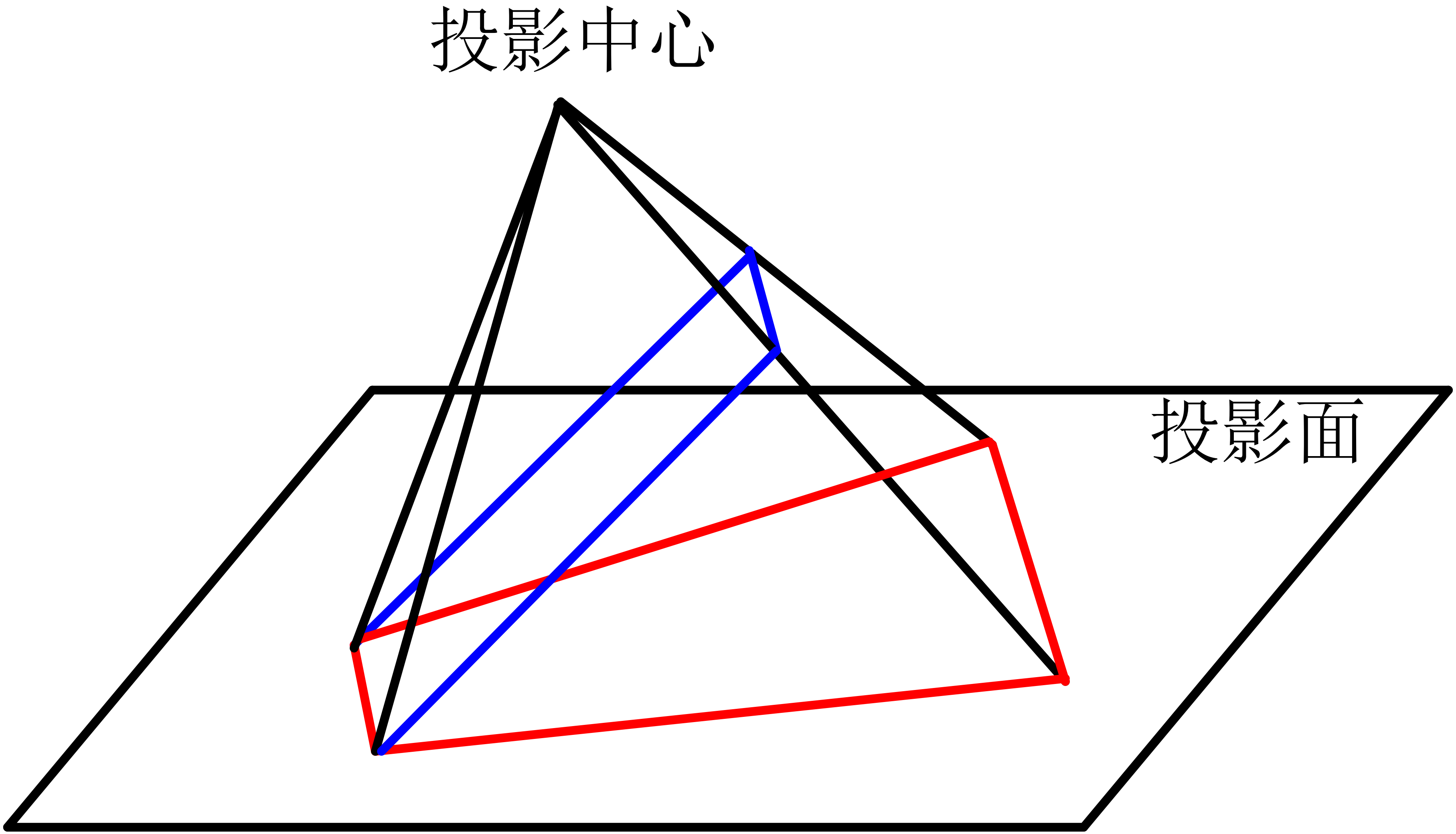


图7.25 灭点

平面几何投影变换——透视投影

- 不平行于投影面的平行线的投影会汇聚到一个点，这个点称为**灭点(Vanishing Point)。**
- **坐标轴方向的平行线**在投影面上形成的灭点称作**主灭点**。
- **一点透视**有一个主灭点，即投影面与一个坐标轴正交，与另外两个坐标轴平行。
- **两点透视**有两个主灭点，即投影面与两个坐标轴相交，与另一个坐标轴平行。
- **三点透视**有三个主灭点，即投影面与三个坐标轴都相交。

平面几何投影变换——透视投影

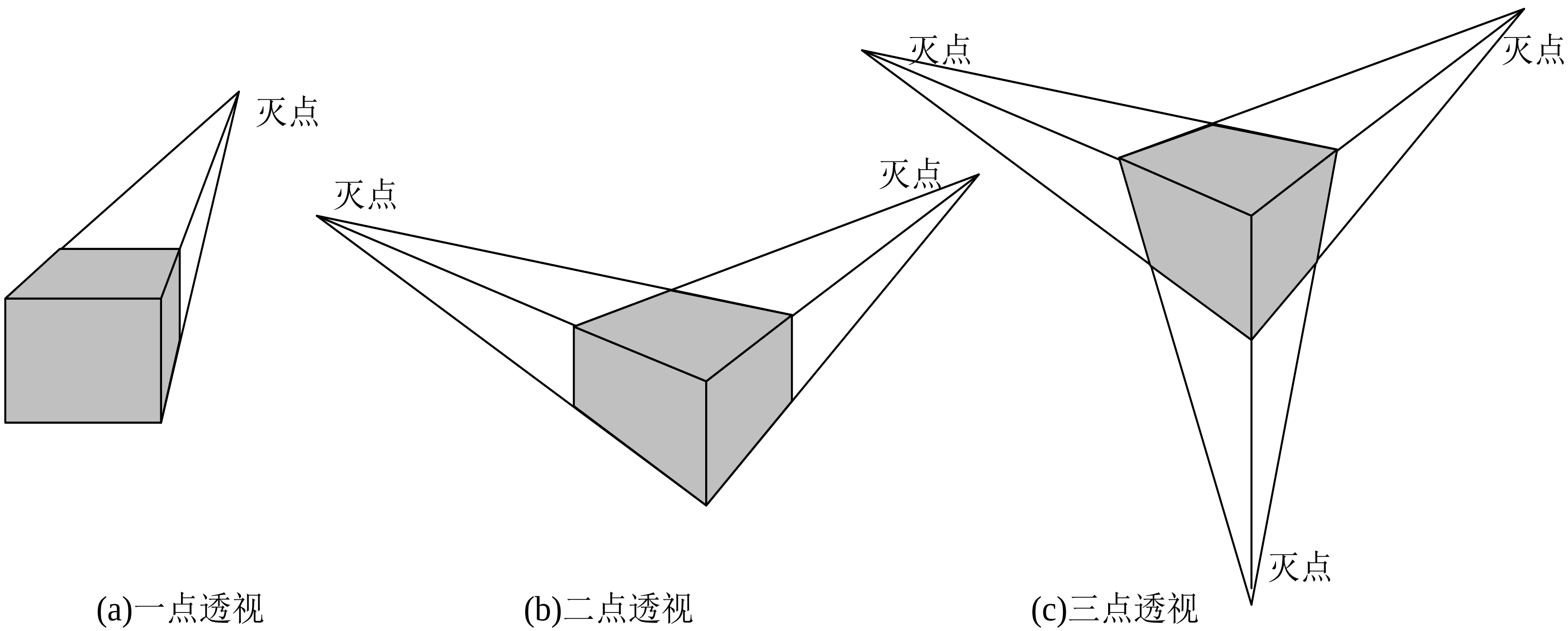


图7.26 透视投影

□ 透视投影的变换矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维观察变换

三维观察变换

1 观察坐标系

2 观察空间

3 三维观察流程

4 三维裁剪

提醒

- 下周一个课时进行测试，对前面的内容做总结。