華東理工大學

计算机图形学

2023年9月

奉贤校区

勤 奋 求 实 / 励 志 明 德

06

二维变换和二维观察

2D Transformation and View

绘制流水线

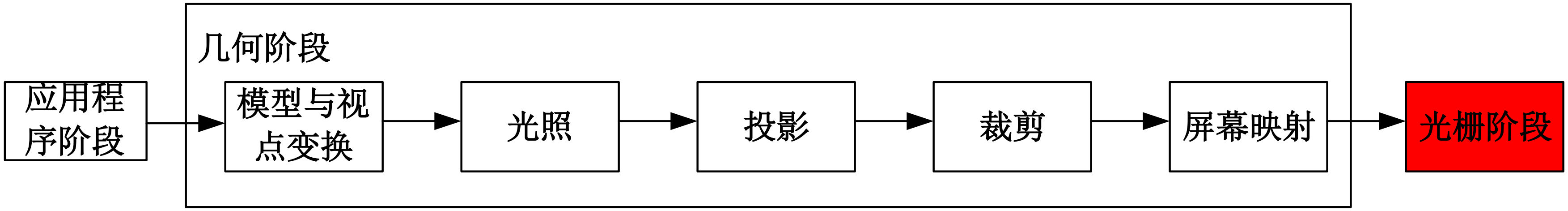
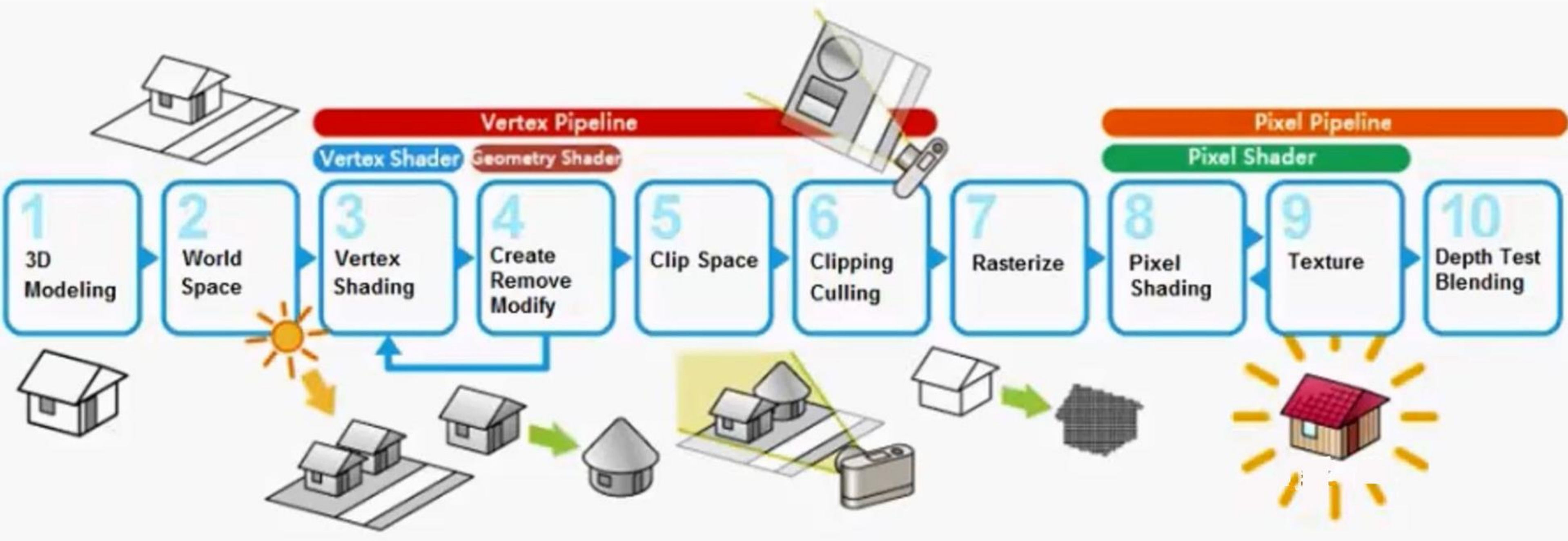


图2.22 绘制流水线的结构


Vertex Pipeline
Pixel Pipeline
Vertex Shader
Geometry Shader
Pixel Shader
1 3D Modeling
2 World Space
3 Vertex Shading
4 Create Remove Modify
5 Clip Space
6 Clipping Culling
7 Rasterize
8 Pixel Shading
9 Texture
10 Depth Test Blending

- 快速
- 真实逼近

总结

直线段	◯的绘制	多边形	区域填充	反走样
DDA算法	简单方程生成圆弧	X－扫描线算法	种子填充算法	过取样
中点Bresenhan算法	中点Bresenhan算法画圆	改进的有效边表算法	扫描线种子填充算法	区域取样
改进Bresenhan算法		边缘填充算法		
		栅栏填充算法		
		边标志算法		

图形到图像是扫描转换；那么从图像中识别图形是什么？

Hough变换 识别直线、◯等

绘制流水线

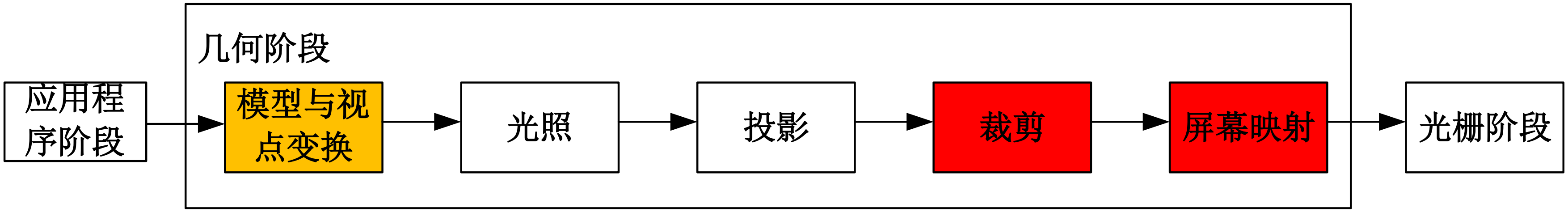
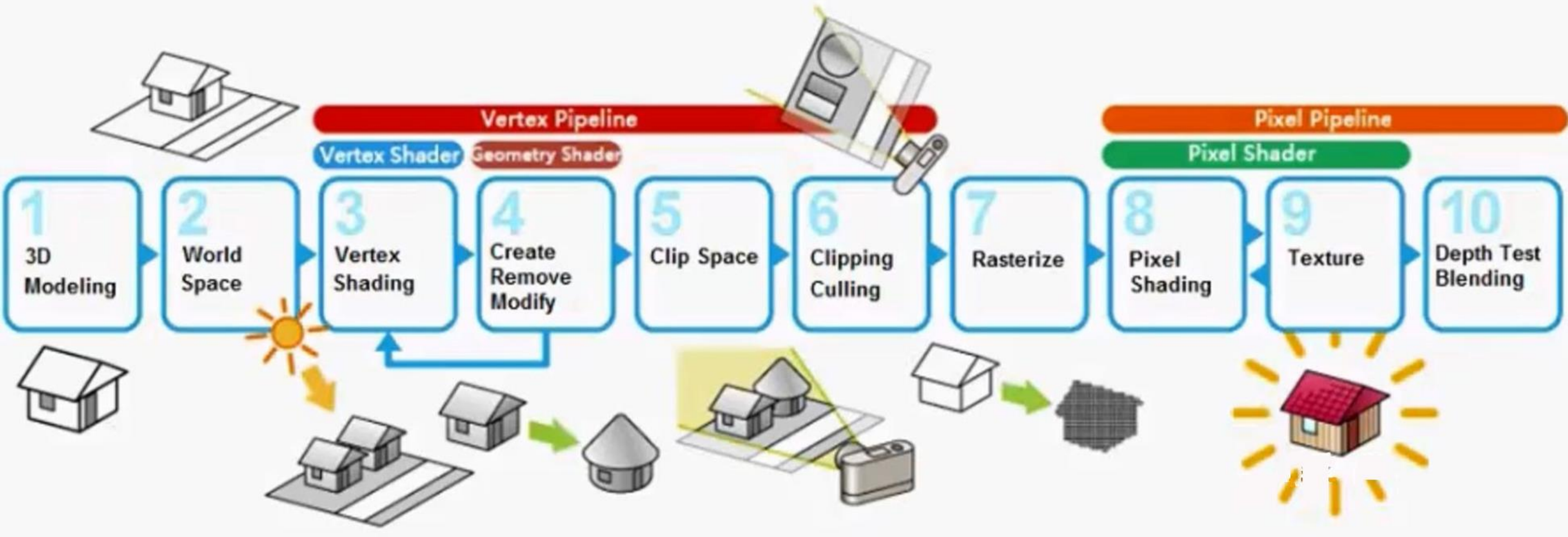
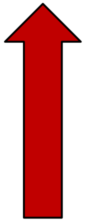


图2.22 绘制流水线的结构


Vertex Pipeline
Vertex Shader
Geometry Shader
Pixel Pipeline
Pixel Shader
1 3D Modeling
2 World Space
3 Vertex Shading
4 Create Remove Modify
5 Clip Space
6 Clipping Culling
7 Rasterize
8 Pixel Shading
9 Texture
10 Depth Test Blending



本章要点

- 如何对二维图形进行**方向**、**尺寸**和**形状**方面的**变换**。

- 如何进行**二维观察**。

核心技术：矩阵乘法

不变性

- **形状不变性**

  在“搬动”之下保持不变的性质和数量

  如距离、角度、面积、体积等

- **仿射不变性**

  若一个图形具有某种性质或者某个量，在平行射影下，如果不变，称这个性质为仿射不变性质

二维变换

1 基本几何变换

2 二维图形几何变换的计算

3 复合变换

4 变换的性质

基本几何变换

- **图形的几何变换**是指对图形的几何信息经过平移、比例、旋转等变换后产生新的图形，是图形在方向、尺寸和形状方面的变换。
- **基本几何变换**都是相对于**坐标原点**和**坐标轴**进行的几何变换。

基本几何变换——平移变换

□**平移**是指将p点沿直线路径从一个坐标位置移到另一个坐标位置的重定位过程。

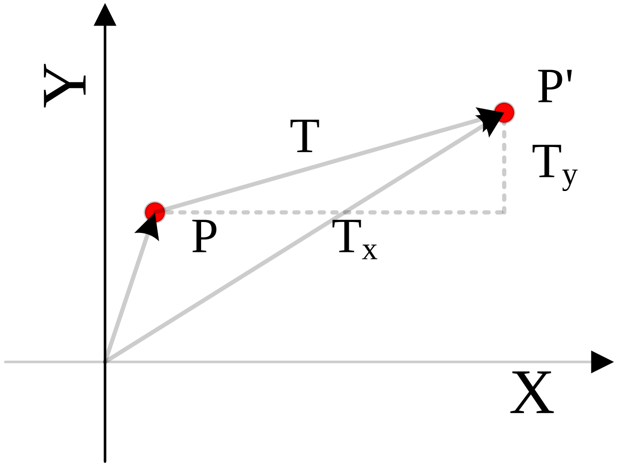


图6.1 平移变换

基本几何变换——平移变换

推导：

$$x' = x + T_x$$
$$y' = y + T_y$$

矩阵形式：

$$[x' \quad y'] = [x \quad y] + [T_x \quad T_y]$$

T_x，T_y称为平移矢量。

基本几何变换——比例变换

- **比例变换**是指对p点相对于坐标原点沿x方向放缩S_x倍，沿y方向放缩S_y倍。其中S_x和S_y称为比例系数。

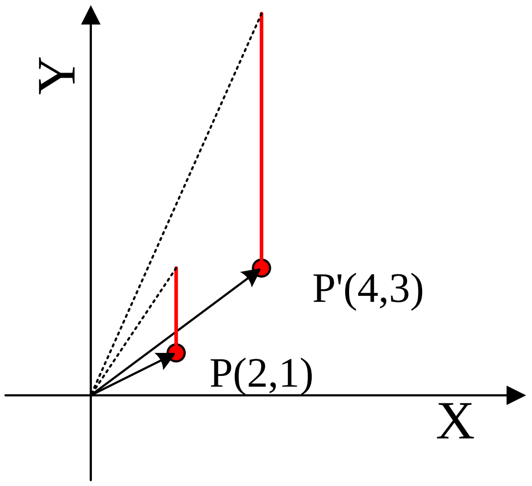


图6.2 比例变换(S_x=2,S_y=3)

基本几何变换——比例变换

推导：

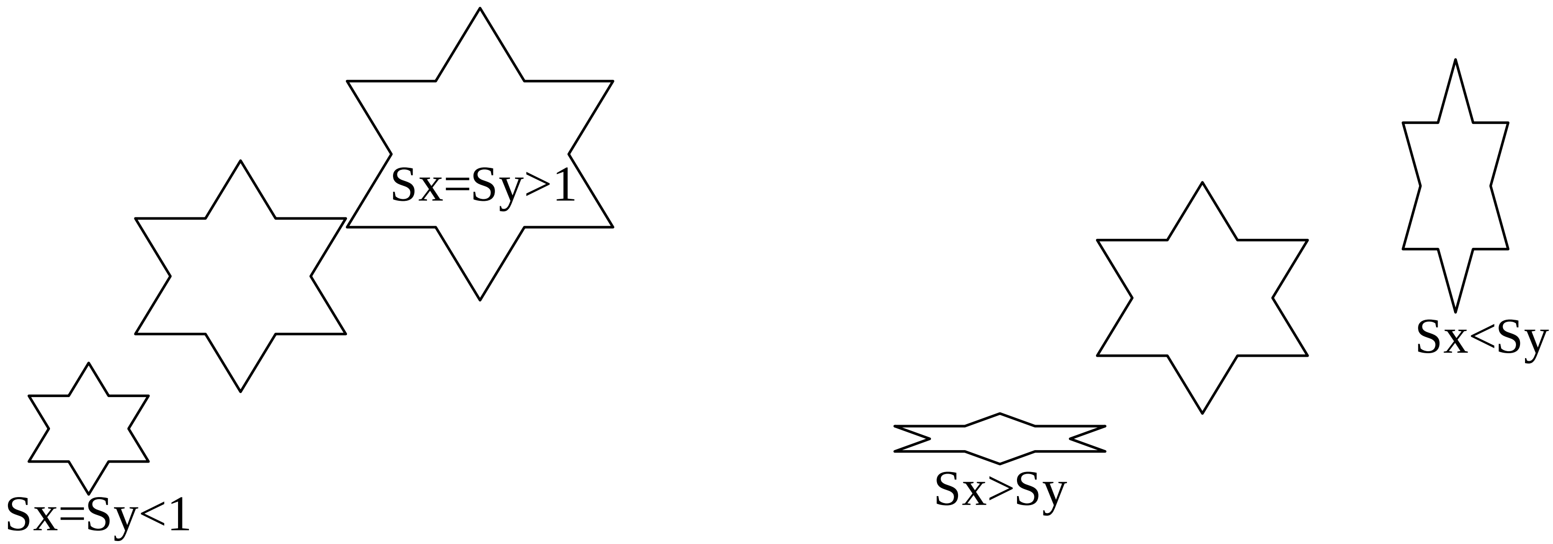
$$x' = S_x \cdot x$$

$$y' = S_y \cdot y$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

基本几何变换——比例变换



(a) Sx=Sy比例　　(b) Sx<>Sy比例

图6.3 比例变换

基本几何变换——旋转变换

- **二维旋转**是指将p点绕坐标原点转动某个角度（逆时针为正，顺时针为负）得到新的点p'的重定位过程。

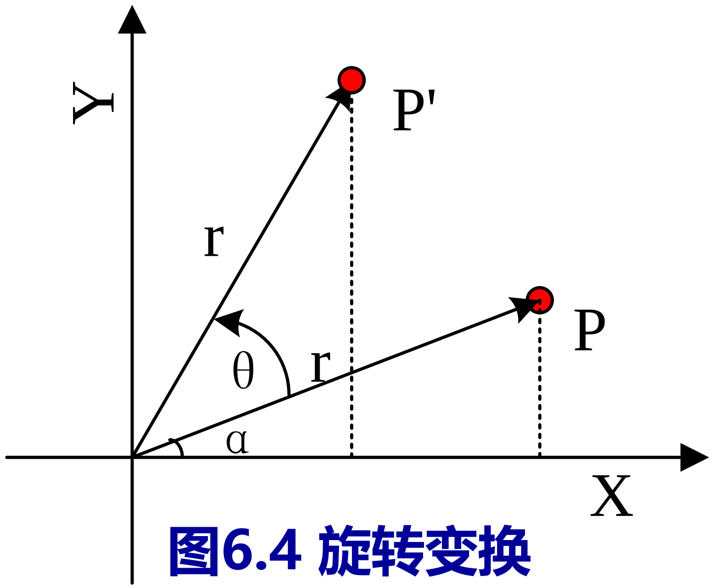


图6.4 旋转变换

基本几何变换——旋转变换

推导：　（极坐标）

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\sin\alpha$$

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = r\sin(\alpha+\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta$$

矩阵：逆时针旋转θ角

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

基本几何变换

- **平移、缩放、旋转变换的矩阵表示：**

$$P' = P + T$$

$$P' = P \cdot S \quad \longrightarrow \quad P' = P \cdot T_1 + T_2$$

$$P' = P \cdot R$$

- **图形通常要进行一系列基本几何变换，希望能够把二维变换统一表示为“矩阵的乘法”形式。**

二维齐次点坐标

当 $x_3 \neq 0, \dfrac{x_1}{x_3} = x, \dfrac{x_2}{x_3} = y$，则称$(x_1, x_2, x_3)$为P(x,y)的齐次坐标；

当$x_3=0$时，规定$(x_1, x_2, 0)$ (x_1, x_2不全为0）为无穷远点的坐标。

而称(x, y)为点P的非齐次坐标。

齐次坐标的最大特征

(1) $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ 与(x_1, x_2, x_3)表示同一点, 记作

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \equiv (x_1, x_2, x_3)$$ 。

(2) (0,0,0)无意义。

齐次坐标的初步应用

(1) 齐次与非齐次点坐标的对应关系

	非齐次	关系	齐次坐标
有穷远点	(x, y)	$x = x_1 / x_3$, $y = x_2 / x_3$	(x_1, x_2, x_3) $(x_3 \neq 0)$
无穷远点			$(x_1, x_2, 0)$ $(x_1, x_2$ 不全为0)

(2) 直线的齐次坐标表示： $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

特别地有无穷远直线： $x_3 = 0$ 。

齐次坐标实例

(1)	齐次坐标(**一般形式**)	特定一组（**规范化**）
$P_1(0,0)$	$P_1(0,0,x_3),(x_3 \neq 0)$	$P_1(0,0,1)$
$P_2(1,0)$	$P_2(\rho,0,\rho),(\rho \neq 0)$	$P_2(1,0,1)$
$P_3(0,1)$	$P_3(0,\rho,\rho),(\rho \neq 0)$	$P_3(0,1,1)$
$P_4(2,\frac{5}{3})$	$P_4(2\rho,\frac{5}{3}\rho,\rho),(\rho \neq 0)$	$P_4(6,5,3)$

(2) 求直线 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ 上的无穷远点。

解: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ 与无穷远直线 x_3=0 的交点

$$(a_1, a_2, a_3) \times (0, 0, 1) = (a_2, -a_1, 0)$$

即为所求的无穷远点。

- **齐次坐标表示**就是用n+1维向量表示一个n维向量。

$$(x, y) \Leftarrow (xh, yh, h) \qquad h \neq 0$$

- 规范化齐次坐标表示就是h=1的齐次坐标表示。

$$(x, y) \Leftarrow (x, y, 1)$$

基本几何变换

平移：

$$[x' \quad y'] = [x \quad y] + [T_x \quad T_y]$$

$$\Downarrow$$

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

基本几何变换

比例：

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基本几何变换

整体比例变换：

$$
\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}
$$

旋转变换:

$$[x' \quad y'] = [x \quad y] + \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

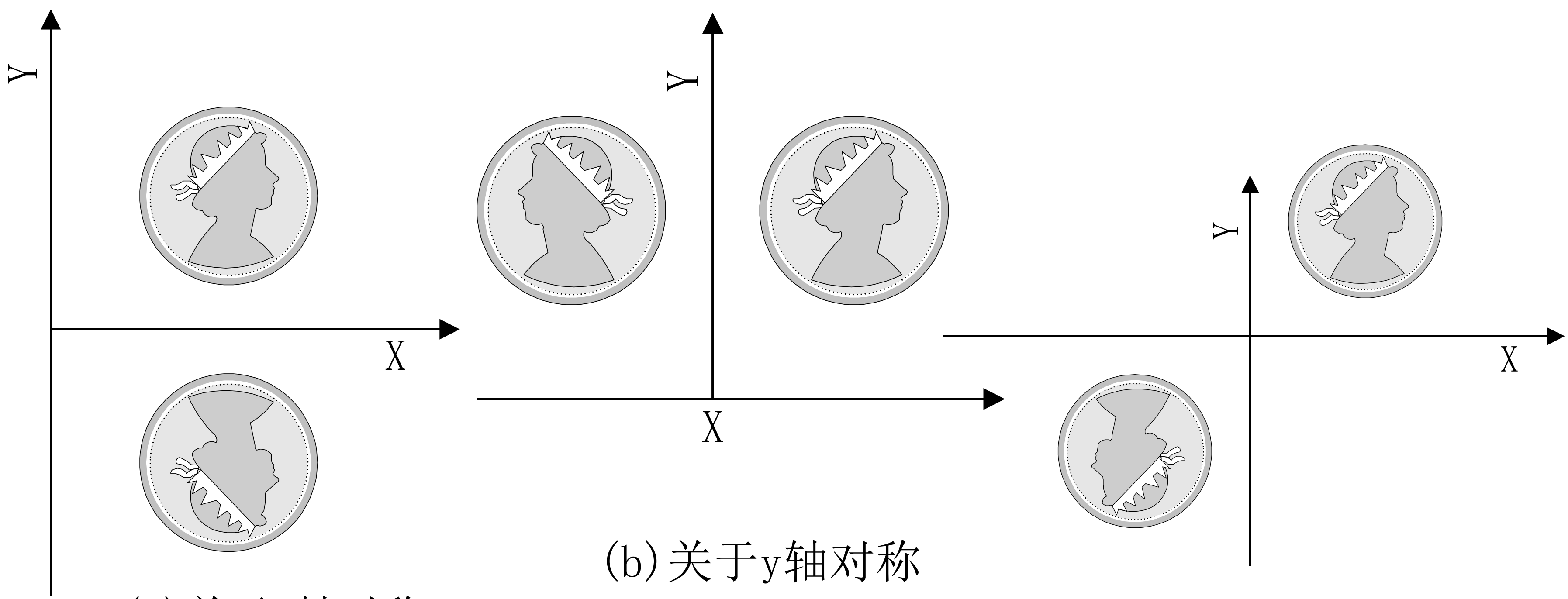
$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot T_{2D} = [x \quad y \quad 1] \cdot \left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \\ \hline l & m & s \end{array}\right]$$

$$x' = \frac{ax + cy + l}{px + qy + s} \qquad y' = \frac{bx + dy + m}{px + qy + s}$$

基本几何变换——对称变换（反射）

- 对称变换后的图形是原图形关于某一轴线或原点的镜像。

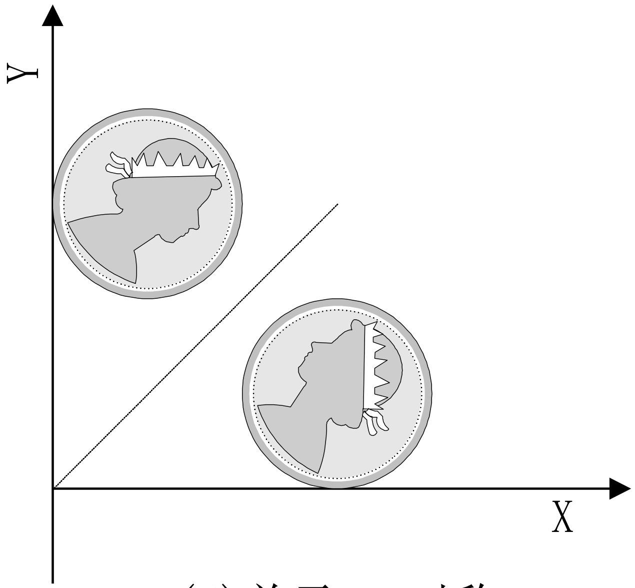


(a)关于x轴对称

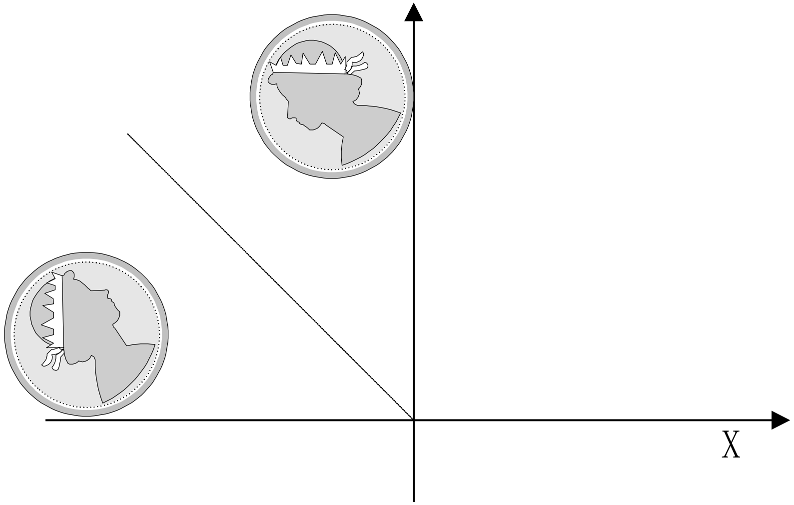
(b)关于y轴对称

(c)关于原点对称

基本几何变换——对称变换



(d)关于x=y对称



(e)关于x=-y对称

(1)关于x轴对称

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}$$

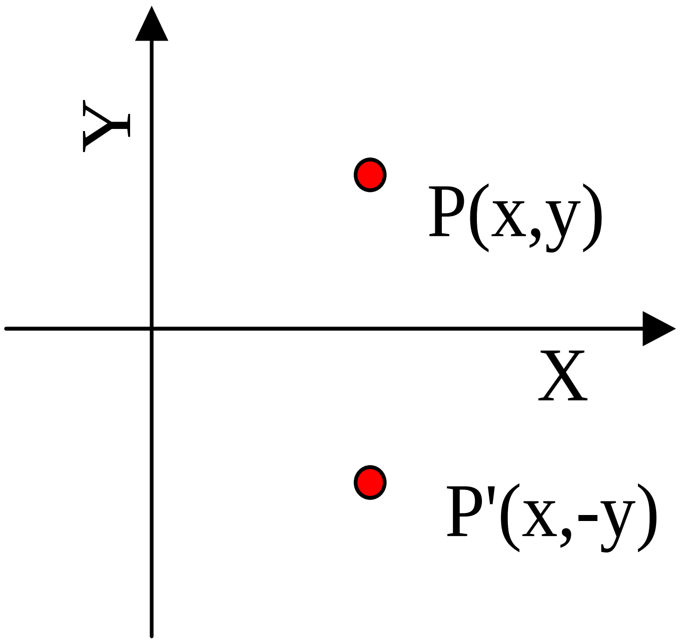


图6.5 关于x轴对称

(2)关于y轴对称

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

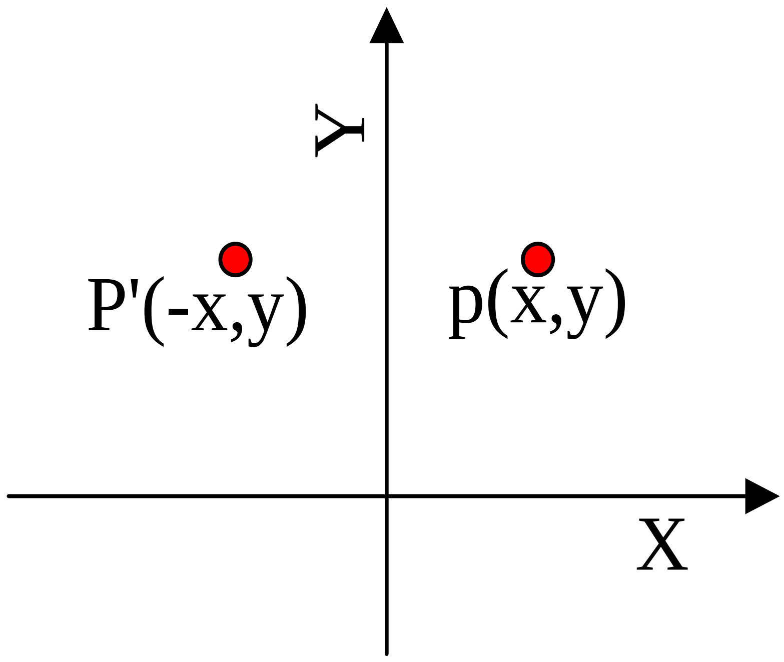


图6.6 关于y轴对称

(3)关于原点对称

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

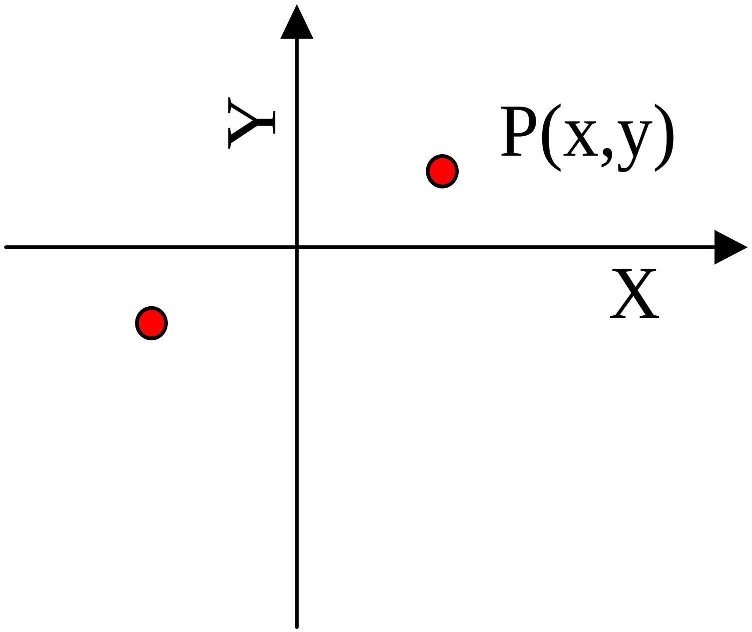


图6.7 关于原点对称

(4)关于y=x轴对称

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

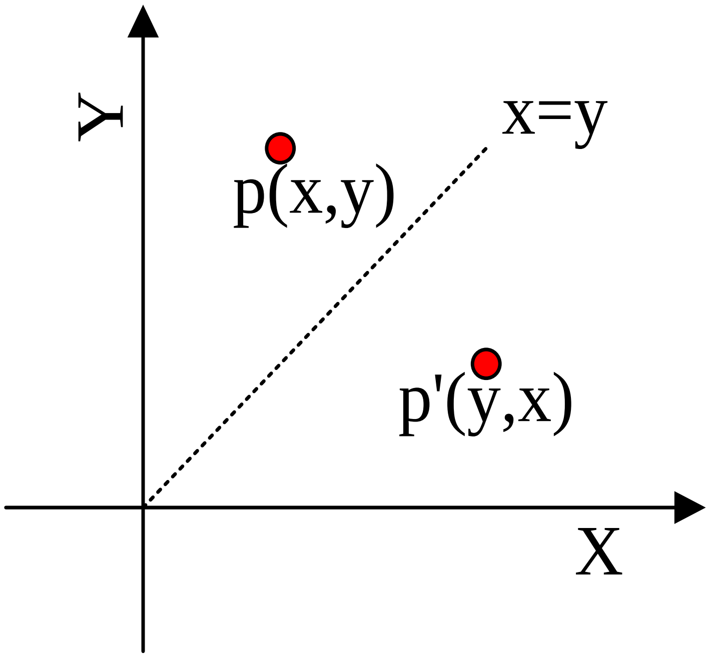


图6.8 关于x = y对称

(5)关于y=-x轴对称

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

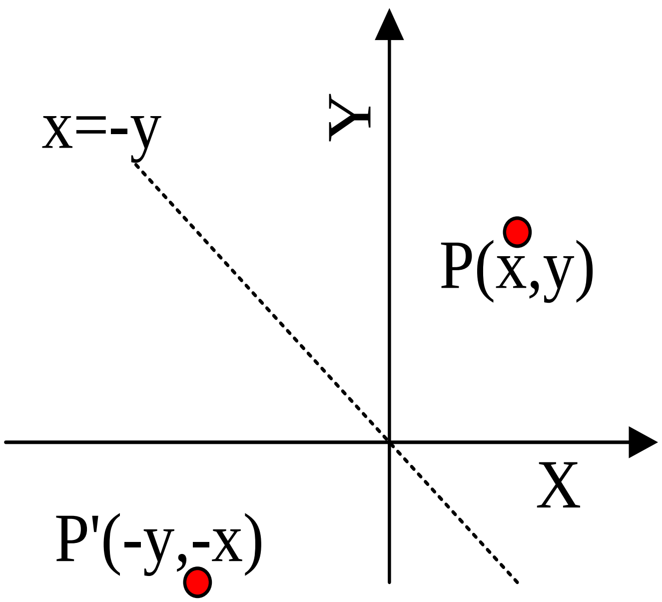


图6.9 关于x = - y对称

- 错切变换，也称为剪切、错位变换，用于产生弹性物体的变形处理。

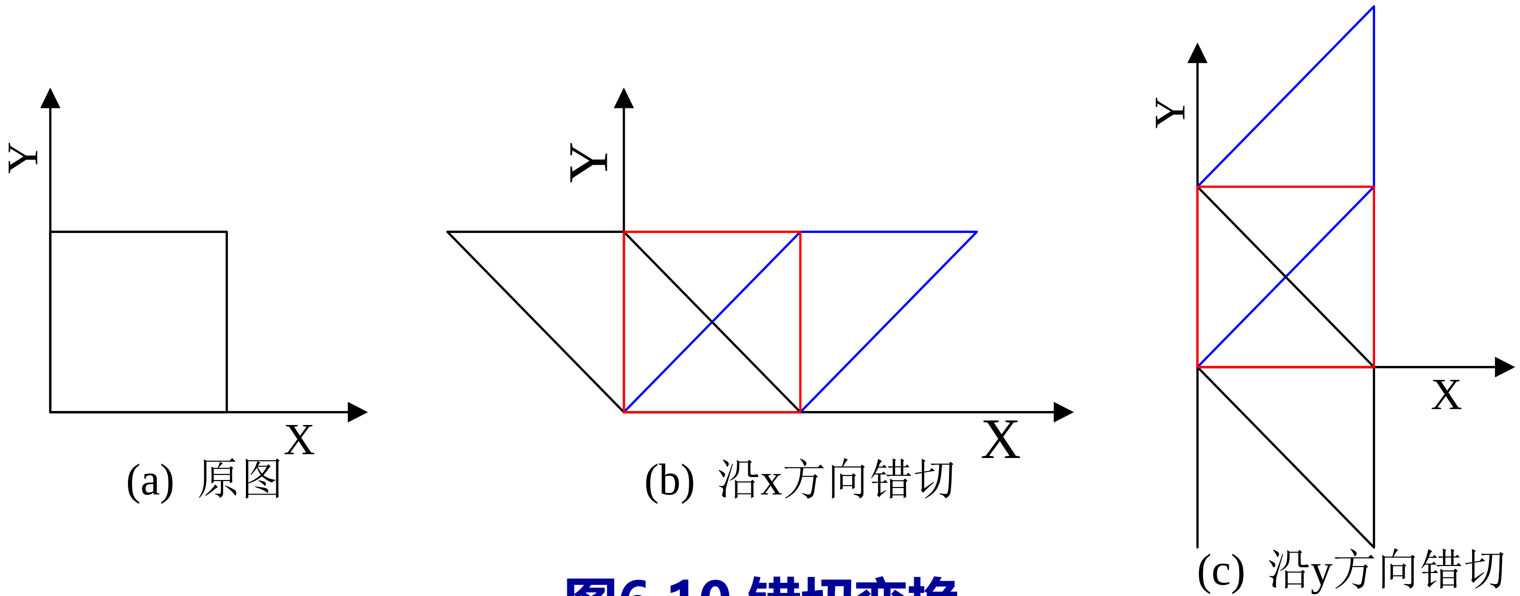


图6.10 错切变换

其变换矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1)沿x方向错切

(2)沿y方向错切

(3)两个方向错切

二维变换

1 基本几何变换

2 二维图形几何变换的计算

3 复合变换

4 变换的性质

二维图形几何变换的计算

几何变换均可表示成P’=P*T的形式。

1. 点的变换

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & r \end{bmatrix}$$

2. 直线的变换

$$\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & r \end{bmatrix}$$

3．多边形的变换

$$\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n' & y_n' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & r \end{bmatrix}$$

二维变换

1 基本几何变换

2 二维图形几何变换的计算

3 复合变换

4 变换的性质

复合变换

- 图形作**一次以上**的几何变换，变换结果是每次**变换矩阵的乘积**。
- 任何一复杂的几何变换都可以看作基本几何变换的组合形式。
- 复合变换具有形式：

$$P' = P \cdot T = P \cdot (T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots \cdot T_n)$$

$$= P \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots \cdot T_n \qquad (n > 1)$$

复合变换——二维复合平移

$$T_t = T_{t1} \cdot T_{t2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1} & T_{y1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x2} & T_{y2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1} + T_{x2} & T_{y1} + T_{y2} & 1 \end{bmatrix}$$

复合变换——二维复合比例

$$T_s = T_{s1} \cdot T_{s2} = \begin{bmatrix} S_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{x1} \cdot S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1} \cdot S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

复合变换——二维复合旋转

$$T_r = T_{r1} \cdot T_{r2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = R_{(\theta_1)} \bullet R_{(\theta_2)} = R(\theta_1+\theta_2)$$

复合变换

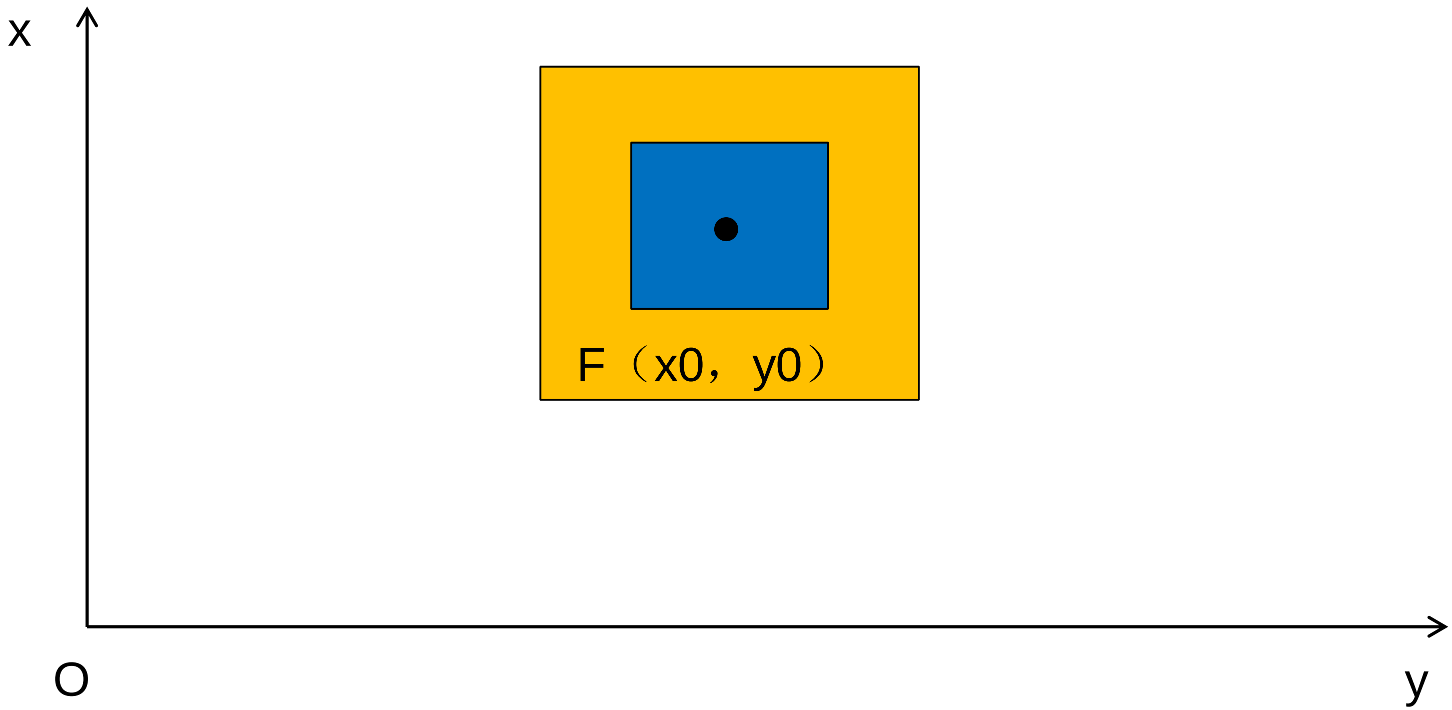
$$R=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & tg\theta & 0\\ -tg\theta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & tg\theta & 0\\ -tg\theta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

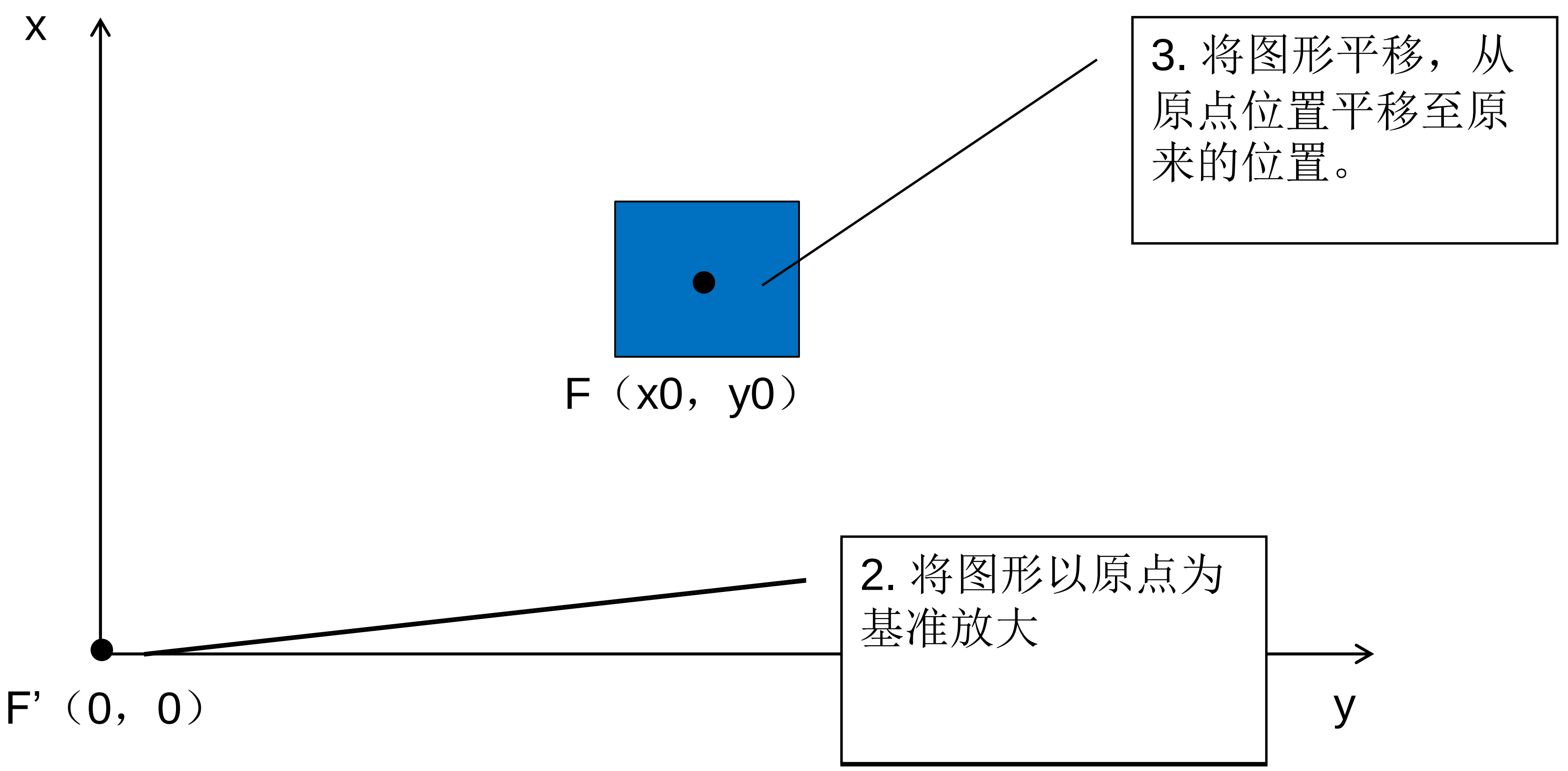
几何意义？

相对任一参考点的二维几何变换

例1：关于F点将矩形延x轴和y轴方向各放大一倍。



相对任一参考点的二维几何变换



相对任一参考点的二维几何变换

- 相对某个参考点(x_F,y_F)作二维几何变换，其变换过程为：

(1) 平移；

(2) 针对原点进行二维几何变换；

(3) 反平移。

例2. 相对点(x_F, y_F)的旋转变换

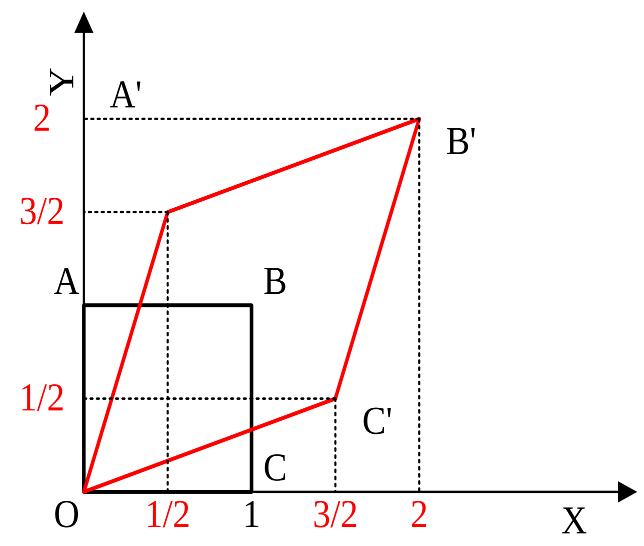
$$T_{RF}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-x_F&-y_F&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x_F&y_F&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\x_F-x_F\cos\theta+y_F\sin\theta&y_F-y_F\cos\theta-x_F\sin\theta&1\end{bmatrix}$$

相对任意方向的二维几何变换

- 相对任意方向作二维几何变换，其变换的过程：
  (1) 旋转变换；
  (2) 针对坐标轴进行二维几何变换；
  (3) 反向旋转。
- 例3. 相对直线y=x的反射变换

例 4. 将正方形 ABCO 各点沿下图所示的(0,0)→(1,1)方向进行拉伸，结果为如图所示的，写出其变换矩阵和变换过程。



可能发生的变换：沿（0，0）到（1，1）的比例变换

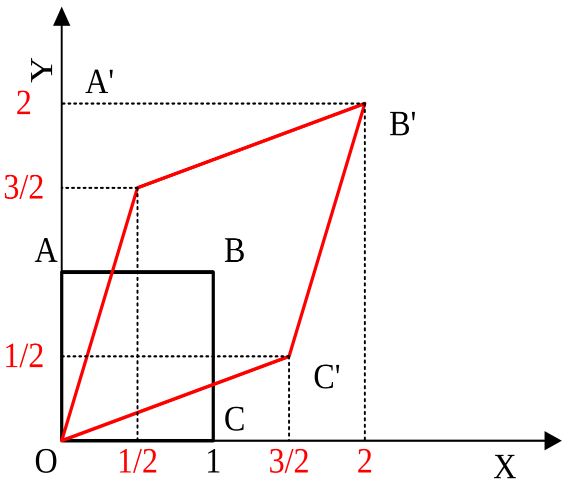


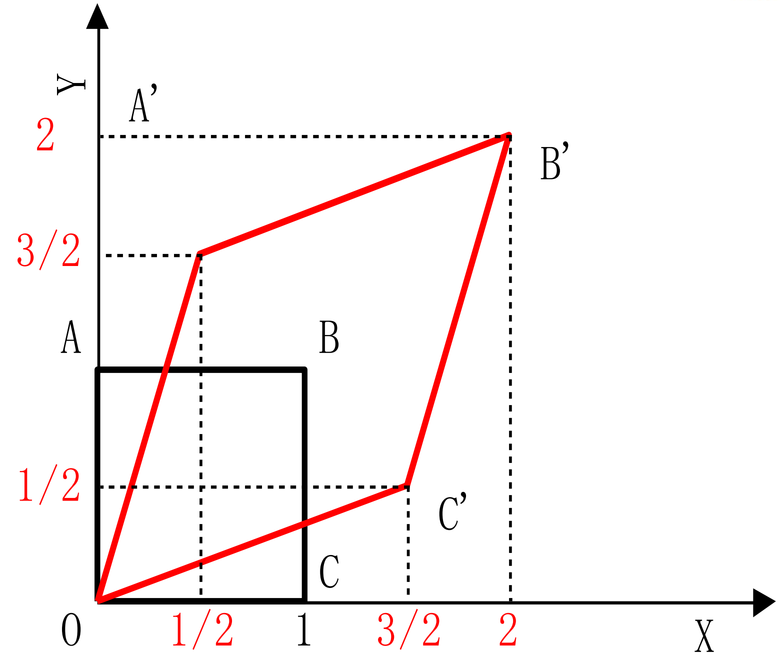
图6.11 沿固定方向拉伸

$$T=\begin{bmatrix}\cos(-45^\circ) & \sin(-45^\circ) & 0\\ -\sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}S_x & 0 & 0\\ 0 & S_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & \sin 45^\circ & 0\\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P'=P\cdot T$$

简单方式:

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

坐标系之间的变换

问题：

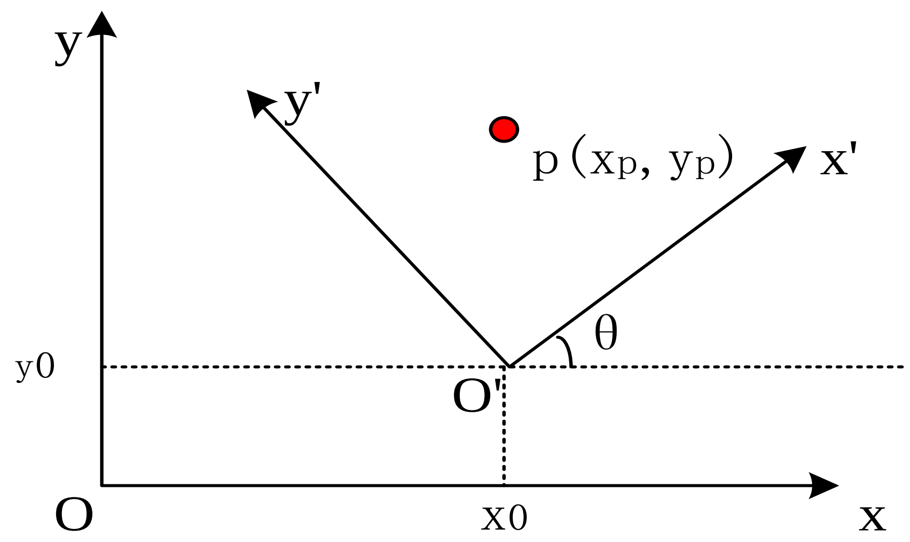


图6.12 坐标系间的变换

坐标系之间的变换

分析：

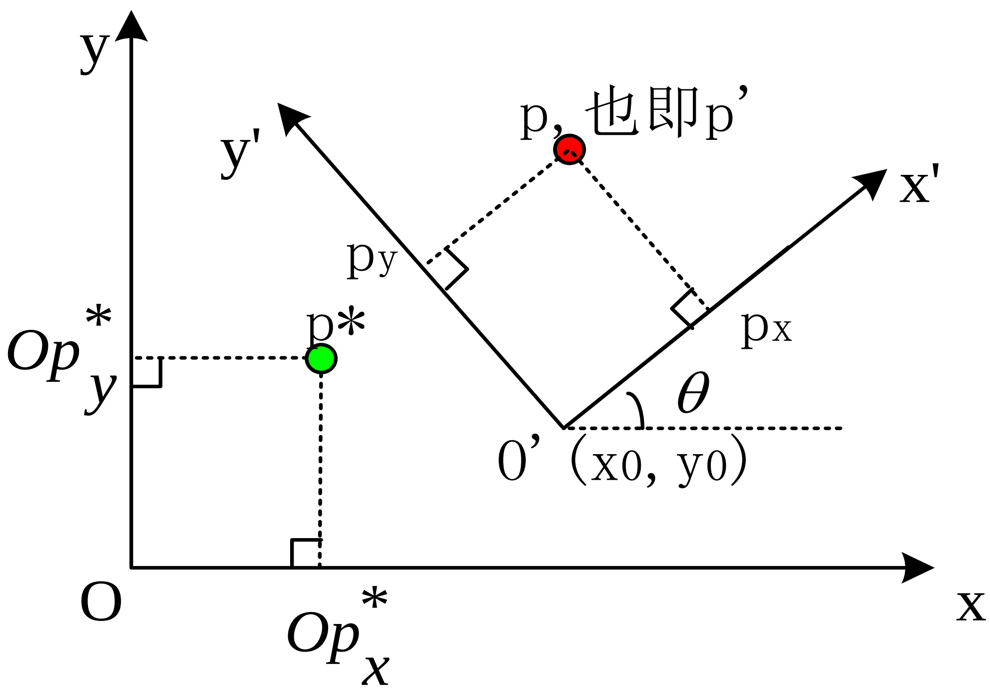
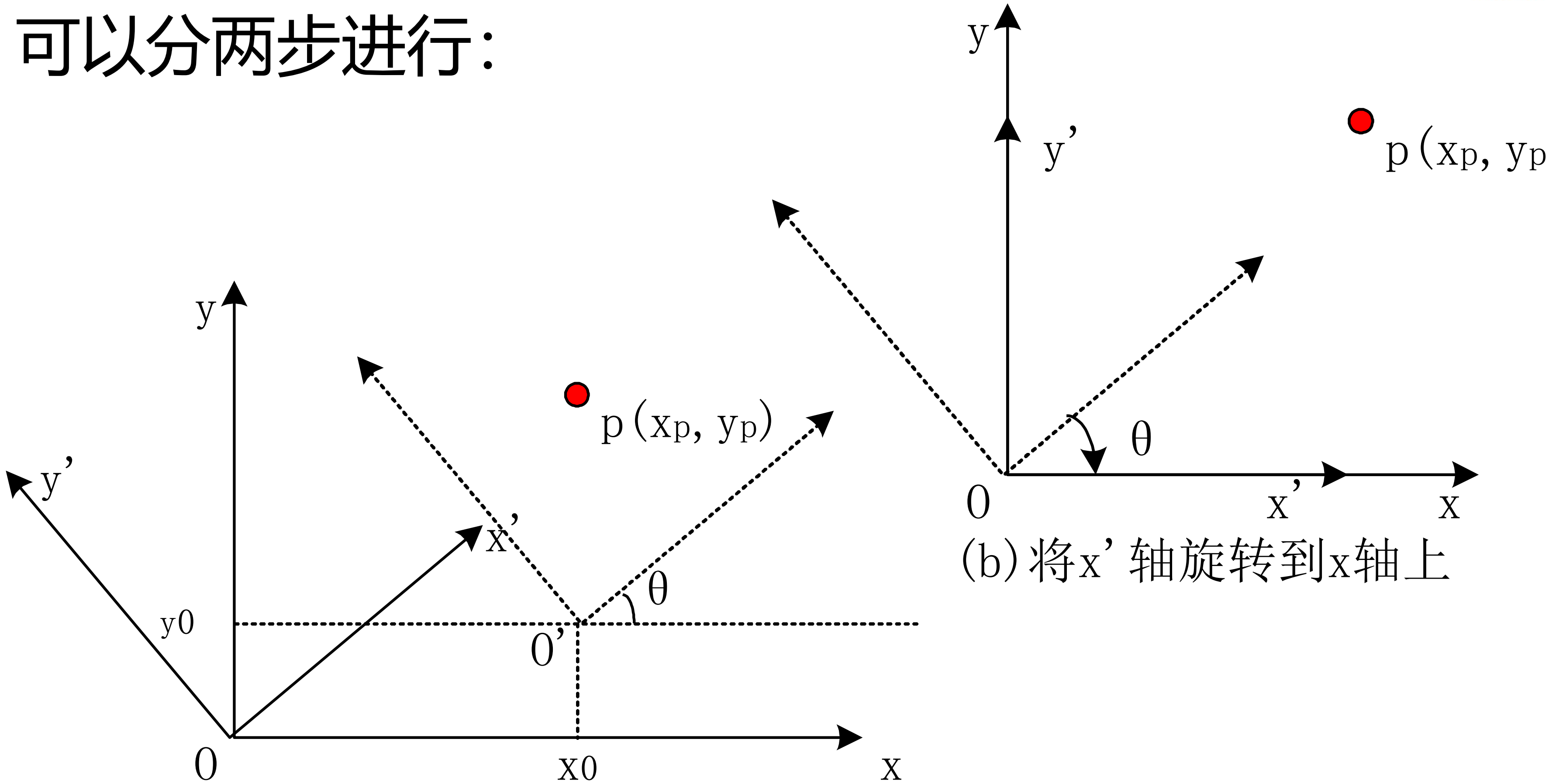


图6.13 坐标系间的变换的原理

可以分两步进行：



(b) 将x'轴旋转到x轴上

(a) 将x'y'坐标系的原点平移到xy坐标系的原点

图6.14 坐标系间的变换的步骤

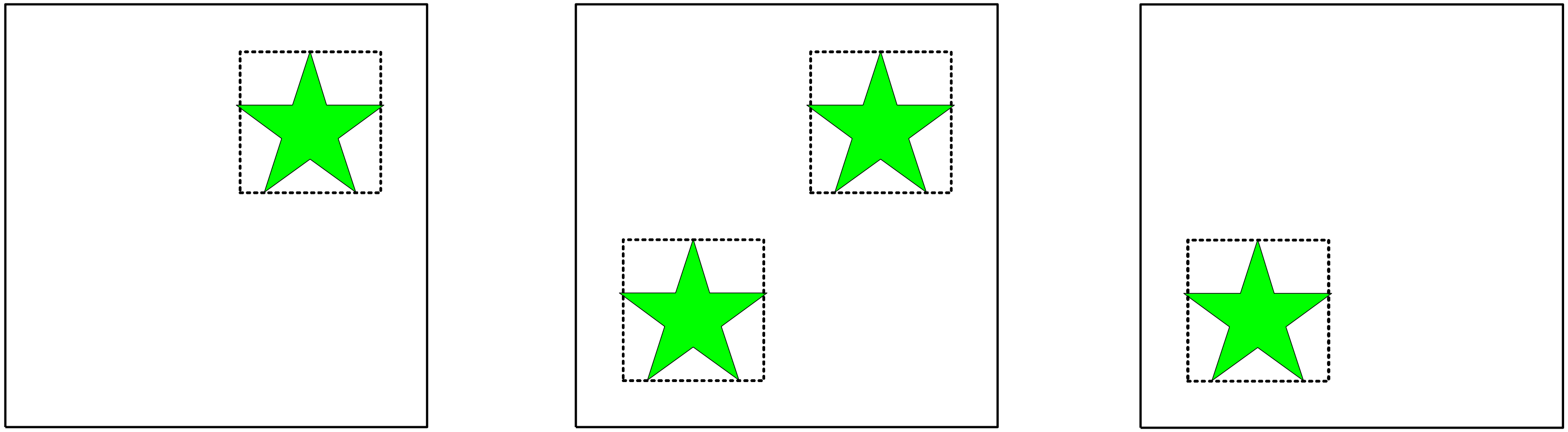
于是:

$$p' = [x'_p \quad y'_p \quad 1]$$
$$= [x_p \quad y_p \quad 1] \cdot T$$
$$= p \cdot T = p \cdot T_t \cdot T_R$$

$$T = T_t \cdot T_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

光栅变换

- 直接对帧缓存中象素点进行操作的变换称为光栅变换。
- 光栅平移变换：



(a) 读出象素块的内容　(b) 复制象素块的内容　(c) 擦除原象素块的内容

光栅变换

- 90°、180°和270°的光栅旋转变换：

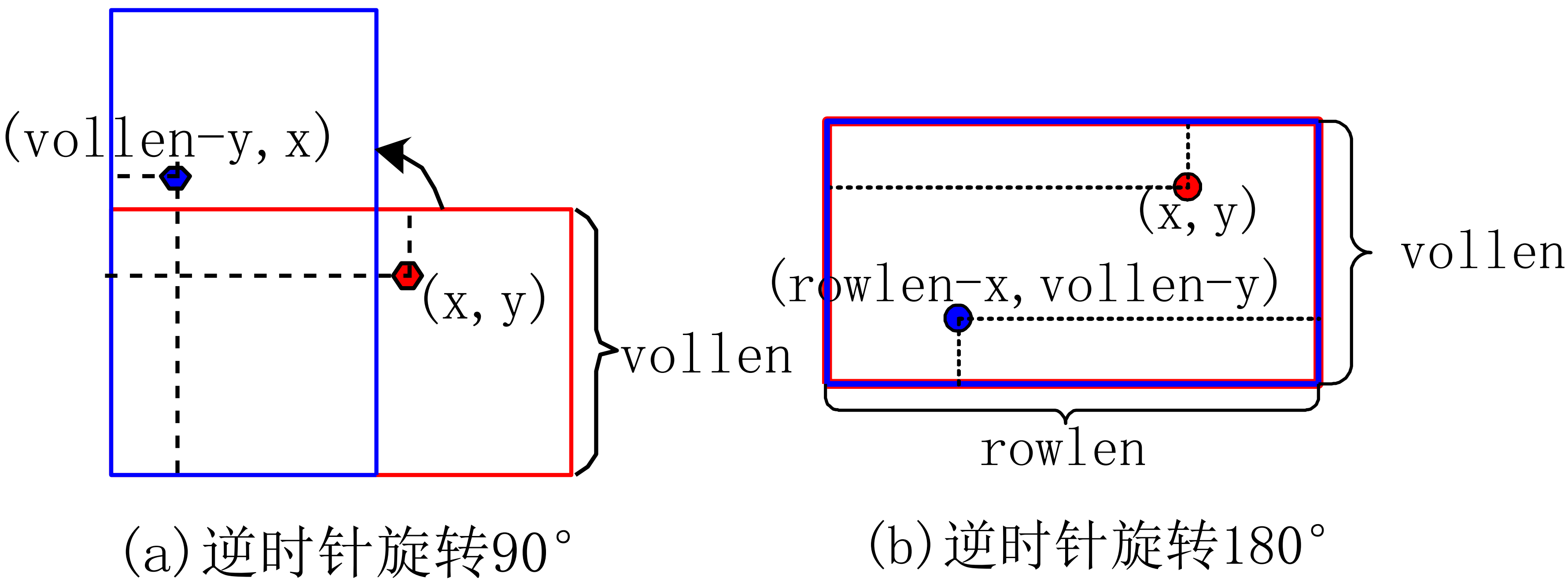


图6.15 光栅旋转变换

光栅变换

- 任意角度的光栅旋转变换：

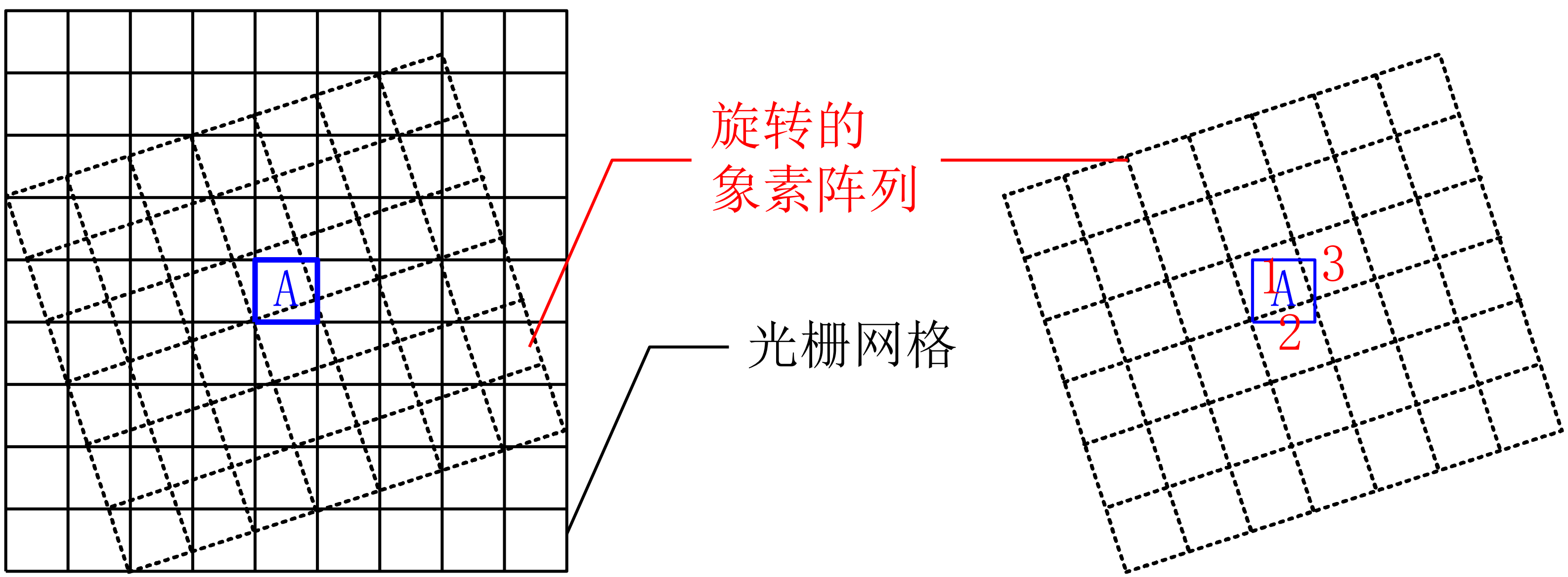


图6.16 任意角度的光栅旋转变换

光栅变换

- 光栅比例变换：进行区域的映射处理。

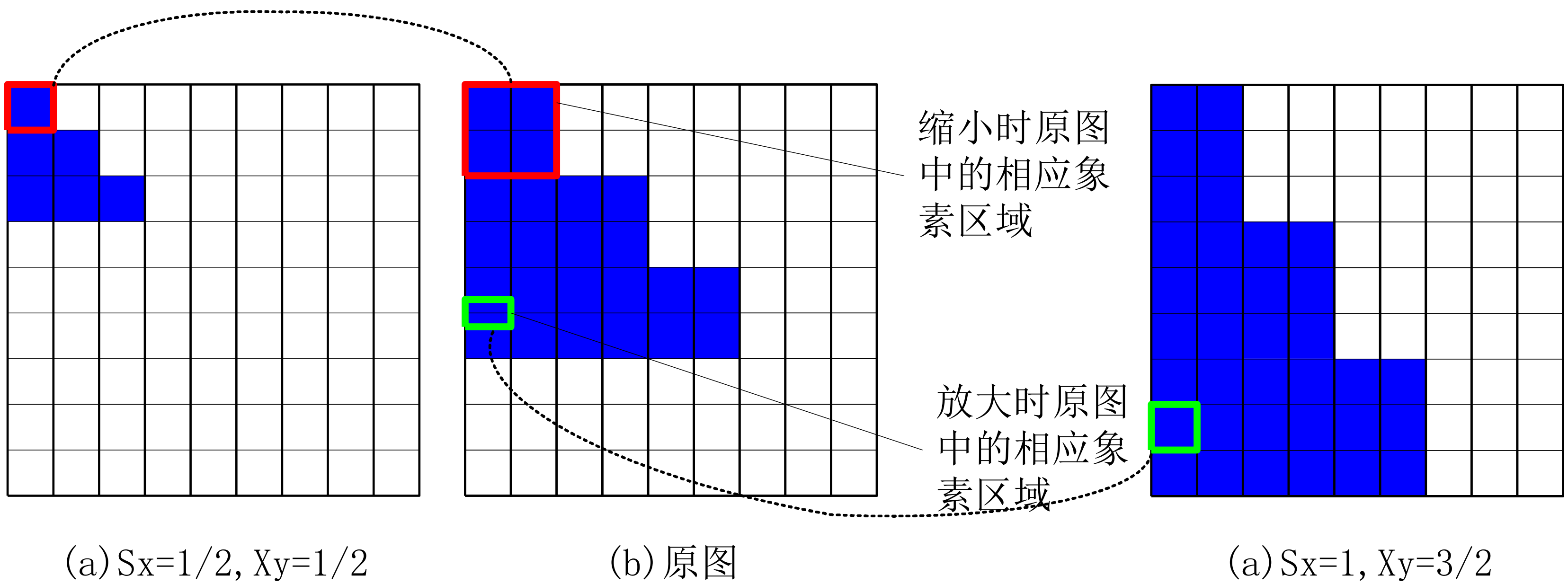


图6.17 光栅比例变换

二维变换（下回分解）

1 基本几何变换

2 二维图形几何变换的计算

3 复合变换

4 变换的性质