华東理工大學

计算机图形学

2023年11月

奉贤校区

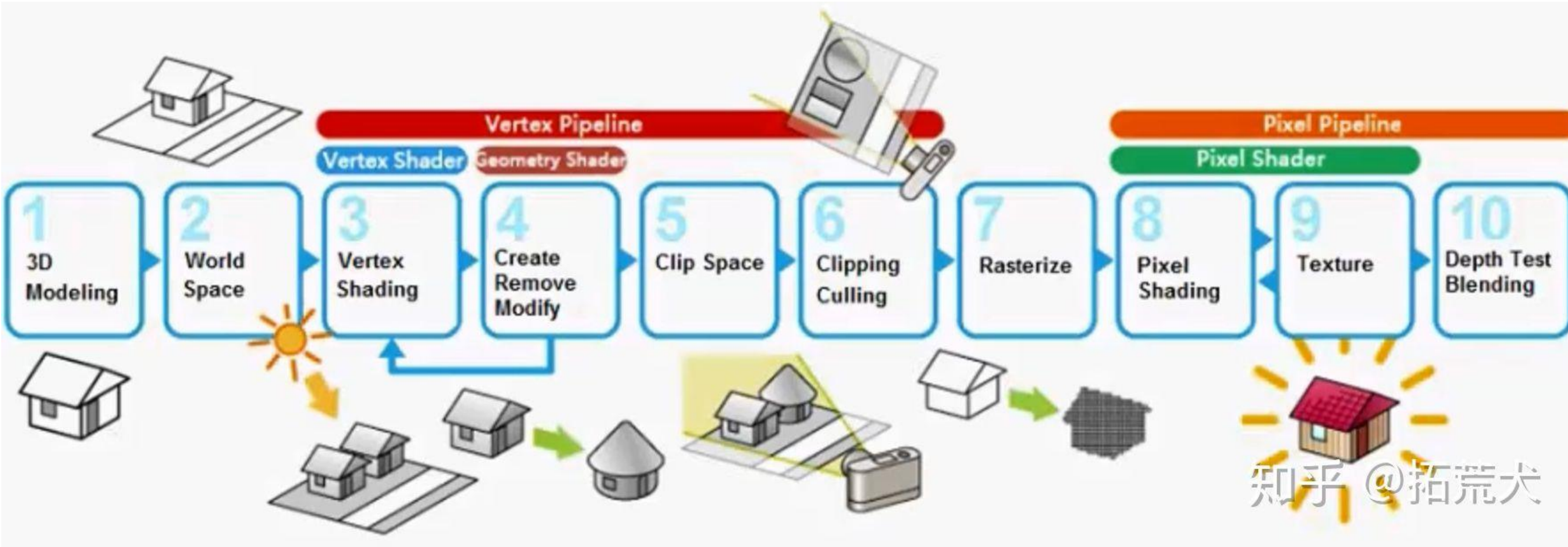
勤奋求实 / 励志明德

華東理工大學

08

曲线和曲面

Curve and Surface


Vertex Pipeline
Pixel Pipeline
Vertex Shader
Geometry Shader
Pixel Shader
1 3D Modeling
2 World Space
3 Vertex Shading
4 Create Remove Modify
5 Clip Space
6 Clipping Culling
7 Rasterize
8 Pixel Shading
9 Texture
10 Depth Test Blending
知乎 @拓荒犬

曲线和曲面

1 基本概念

2 三次样条

3 Bezier曲线曲面

4 B样条曲线曲面

5 有理样条曲线曲面

Review

- 几何连续性和参数连续性谁更严格？

- 曲面拼接处“光滑”意味着什么？

基本概念

- Degree(次数）为曲线数学定义中所取的基函数所决定的。
- Order（阶数），阶数等于次数加1。

Bezier曲线的定义

- 定义

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k BEN_{k,n}(t) \quad t \in [0,1]$$

- Bernstein基函数具有如下形式：

$$BEN_{k,n}(t) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$$

$k = 0,1,\cdots,n$

- 注意：当k=0，t=0时，t^k=1，k!=1。

de Casteljau算法

- 在工业应用中，经常需要计算曲线上参数t位置的点；
- 我们并不通过Bezier 曲线方程式来求解，而是通过一个递归的数值稳定的(numerical stable）算法。

Bernstein多项式的性质

$$BEN_{k,n}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) t^k (1-t)^{n-k}$$

$$= C_{n-1}^k (1-t)^{n-k} + C_{n-1}^{k-1} t^k (1-t)^{n-k}$$

$$= (1-t) C_{n-1}^k (1-t)^{(n-k)-1} + t C_{n-1}^{k-1} t^{k-1} (1-t)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= (1-t) BEN_{k,n-1}(t) + t\, BEN_{k-1,n-1}(t)$$

递归性(Recursive)

-这个式子表明n阶Bernstein多项式是n-1阶Bernstein多项式的线性组合

- 请注意：

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{P}_k BEN_{k,n}(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{P}_k [(1-t)BEN_{k,n-1}(t) + t\, BEN_{k-1,n-1}(t)]$$

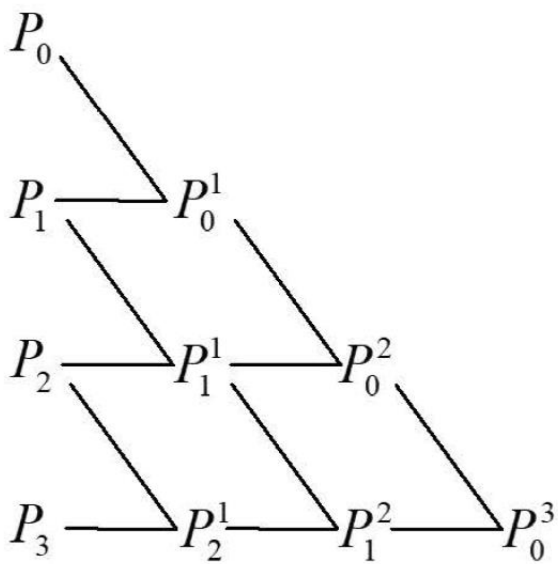
$$= \sum_{k=0}^{n-1} [(1-t)\boldsymbol{P}_k + \mathrm{t}\boldsymbol{P}_{k+1}]\, BEN_{k,n-1}(t)$$

- 我们可以得到Bezier 曲线的递推计算公式：

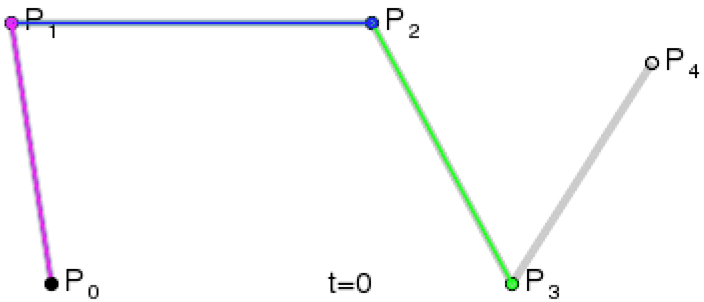
$$P(t) = P_0^n$$

$$P_i^k = \begin{cases} P_i & k = 0 \\ (1-t)P_i^{k-1} + tP_{i+1}^{k-1} & \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots, n, \\ i = 0, 1, \ldots, n-k \end{array} \end{cases}$$

- 当n = 3 时，递推过程如下图所示：



- 实例



- 题目

一条3次Bézier曲线顶点为(10,0), (30,60), (130,60), (190, 0), 请问t=1/2处曲线的值为?

曲线和曲面

1 基本概念

2 三次样条

3 Bezier曲线曲面

4 B样条曲线曲面

5 有理样条曲线曲面

B样条曲线

- Bezier曲线的不足
  - 缺乏灵活性：控制多边形的顶点个数决定了Bezier曲线的阶数
  - 控制性差：且当顶点个数较大时，控制多边形对曲线的控制将会减弱；
  - 不能作局部修改：任何一个控制点位置的变化对整条曲线都有影响。

顶点是顶点，次数由另外的序列决定(与顶点个数无关，控制性较强)；能够局部修改

B样条的历史

- 1946年， Schoenberg提出样条的概念，及其基于样条的近似曲线的方法。
- B样条的动机源于插值中的Runge-Kutta现象：高阶多项式很容易产生不稳定的上下抖动。
- 为什么不用分段低阶多项式通过连续的连接来代替高阶多项式呢？

  —这就是样条的思想。

- - Isaac Jacob Schoenberg： 出生于罗马尼亚的galatz，学术经历：雅西大学、哥廷根、希伯来、芝加哥、斯沃斯莫尔、宾大、威斯康辛大学麦迪逊。

- 人们曾经以为使用样条来做形状设计不太可能，因为计算过于复杂。
- 1972 年， 基于 Schoenberg 的工作， Gordon 和 Riesenfeld提出了B样条以及一系列对应的几何算法。
- B样条保持了Bezier 曲线的优点，同时克服了Bezier 曲线的缺点。
- NURBS成为工业标准

工业软件－CAD软件

Richard Riesenfeld

梁友栋

B样条曲线

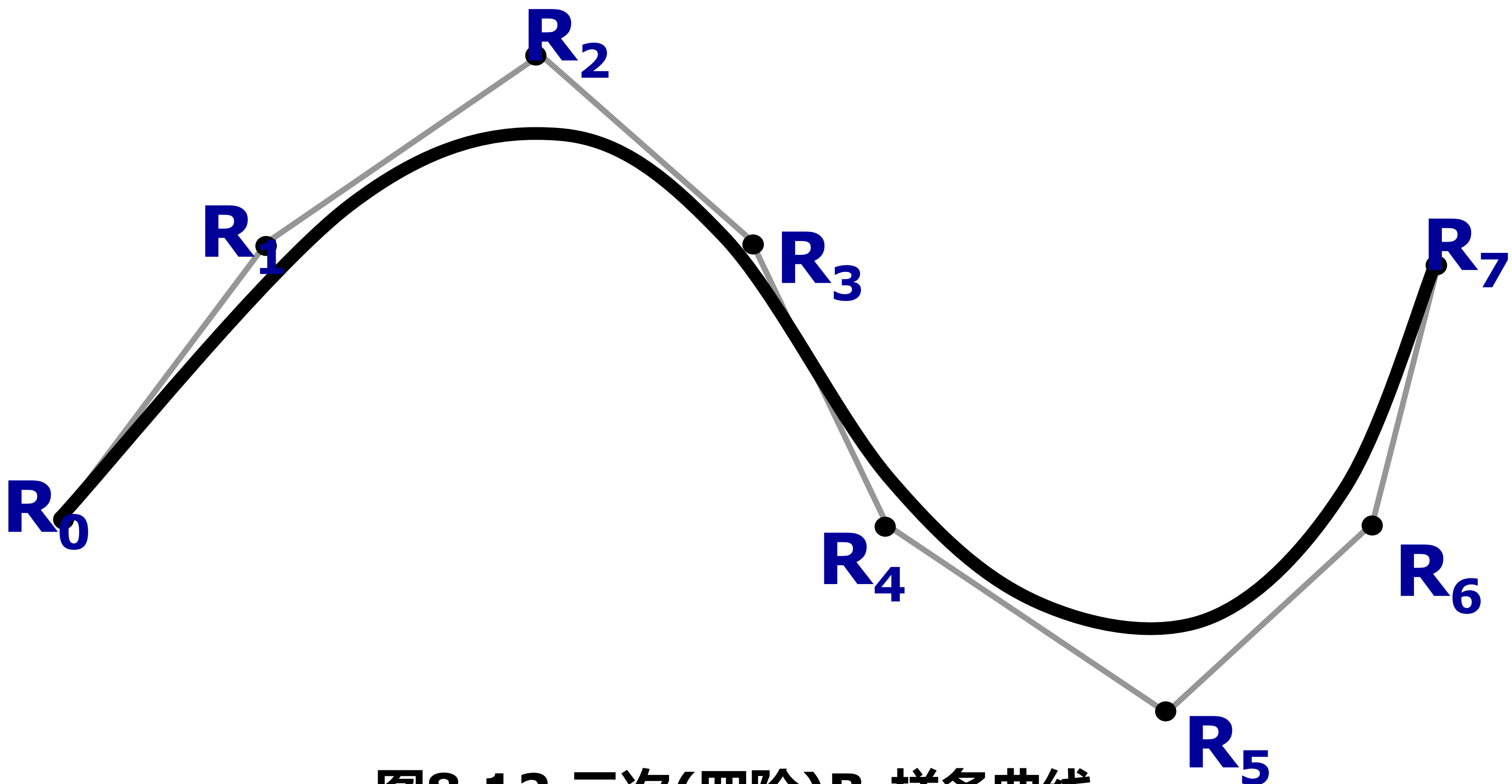


图8.12 三次(四阶)B-样条曲线

B样条曲线

- 定义

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,m}(t)$$

- de Boor点： P_k
- B样条控制多边形　n+1个顶点
- B样条基函数：是分段m 阶（m-1 次）多项式，它们由**节点向量**（$T=(t_0, t_1, \cdots t_{n+m})$）唯一决定；节点向量则是一串非减（non-decreasing）的实数序列。

m可取2到n+1之间的任意整数

- 曲线定义的范围：$[t_{m-1}, \cdots t_{n+1}]$

B样条曲线

$$B_{k,1}(t)=\begin{cases}1 & 若t_k \le t < t_{k+1} \\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$B_{k,m}(t)=\frac{t-t_k}{t_{k+m-1}-t_k}B_{k,m-1}(t)+\frac{t_{k+m}-t}{t_{k+m}-t_{k+1}}B_{k+1,m-1}(t)$$

- 参数说明
  - m是曲线的阶数，(m-1)为B样条曲线的次数，曲线在连接点处具有(m-2)阶连续。

m可取2到n+1之间的任意整数

B样条曲线

- t_k是节点值，非减序列

  $T=(t_0, t_1, \cdots t_{n+m})$

  构成了$m-1$次B样条函数的节点矢量。

- 节点矢量分为三种类型：均匀的，开放均匀的和非均匀的。

节点表是生成基本函数表的关键参数，非减（non-decreasing）的实数序列，大小等于（控制点数量-1）+阶数+1

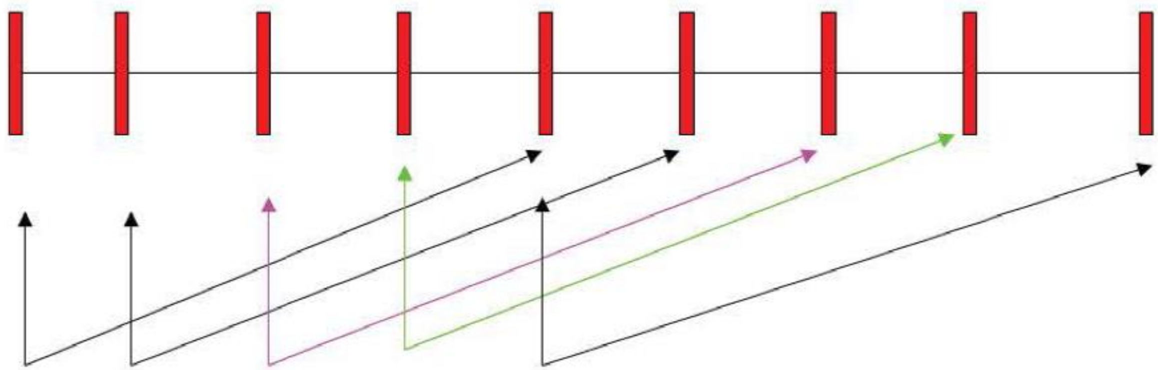
n + m +1

B样条基函数

- 以n=4, m=4为例：

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,m}(t)$$

$$t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8$$



B样条曲线

- 均匀周期性B样条曲线（均匀 Uniform)

当节点沿参数轴均匀等距分布，即“t_{k+1} — t_k=常数”时，所生成的曲线称为均匀B样条曲线。

$$B_{k,m}(t) = B_{k+1,m}(t+\Delta t) = B_{k+2,m}(t+2\Delta t)$$

$$B_{k,m}(t) = B_{0,m}(t-k\Delta t)$$

B样条曲线

- 均匀二次（三阶）B样条曲线

取n=3，m=3，则n+m=6，不妨设节点矢量为：

T=(0,1,2,3,4,5,6)：

$$B_{k,1}(t)=\begin{cases}1 & k\le t<k+1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$B_{k,m}(t)=\frac{t-k}{m-1}B_{k,m-1}(t)+\frac{k+m-t}{m-1}B_{k+1,m-1}(t)$$

B样条曲线

$$B_{0,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & 0\le t<1\\ \frac{1}{2}t(2-t)+\frac{1}{2}(t-1)(3-t) & 1\le t<2\\ \frac{1}{2}(3-t)^2 & 2\le t<3\end{cases}$$

$$B_{1,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-1)^2 & 1\le t<2\\ \frac{1}{2}(t-1)(3-t)+\frac{1}{2}(t-2)(4-t) & 2\le t<3\\ \frac{1}{2}(4-t)^2 & 3\le t<4\end{cases}$$

B样条曲线

$$B_{2,3}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(t-2)^2 & 2\le t<3\\ \dfrac{1}{2}(t-2)(4-t)+\dfrac{1}{2}(t-3)(5-t) & 3\le t<4\\ \dfrac{1}{2}(5-t)^2 & 4\le t<5\end{cases}$$

$$B_{3,3}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(t-3)^2 & 3\le t<4\\ \dfrac{1}{2}(t-3)(5-t)+\dfrac{1}{2}(t-4)(6-t) & 4\le t<5\\ \dfrac{1}{2}(6-t)^2 & 5\le t<6\end{cases}$$

B样条曲线

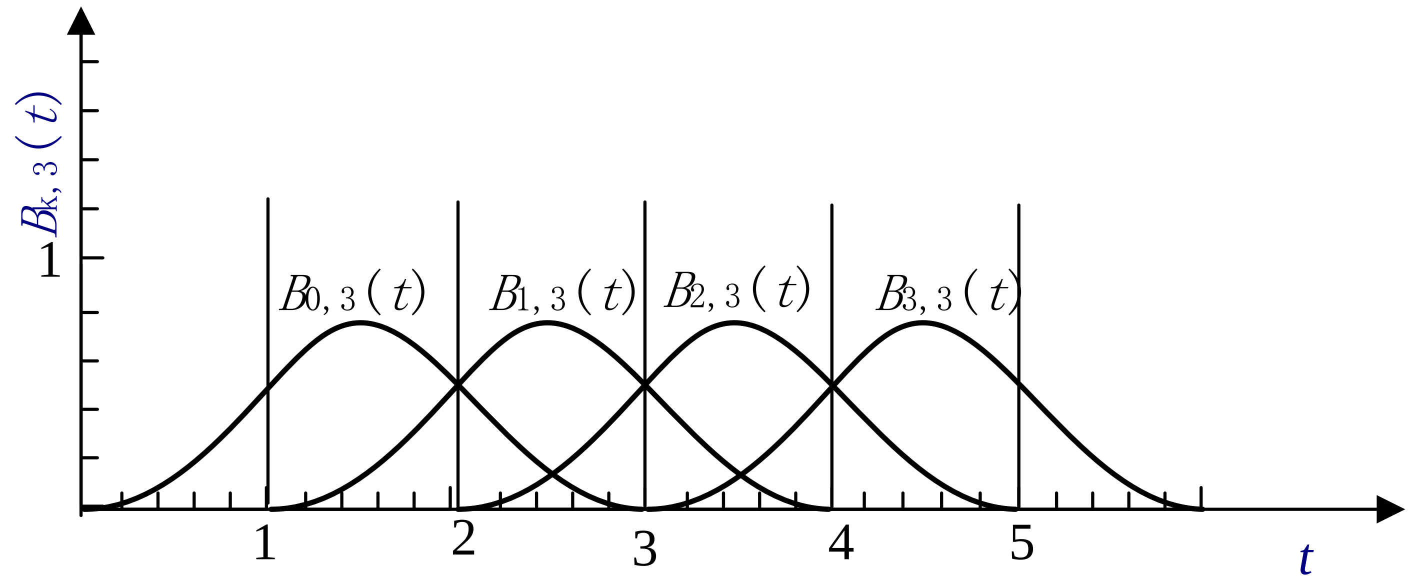


图8.13 四段二次(三阶)均匀B样条基函数

B样条曲线

- 曲线的起点和终点值：

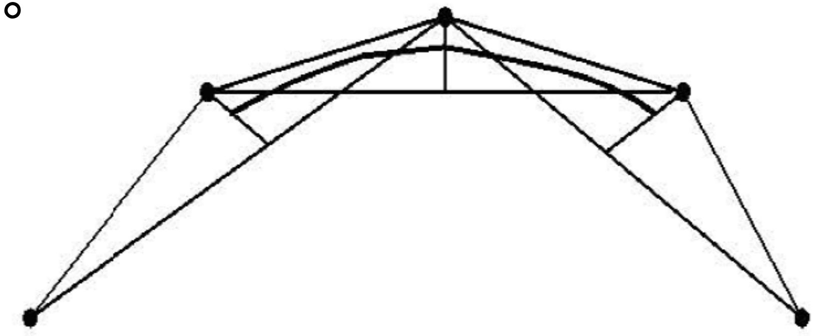
$$p(start)=\frac{1}{2}(P_0+P_1),\ p(end)=\frac{1}{2}(P_2+P_3)$$

- 均匀二次B样条曲线起点和终点处的导数：

$$p'(start)=P_1-P_0,\ p'(end)=P_3-P_2$$

B样条曲线

- 对于由任意数目的控制点构造的二次均匀周期性B样条曲线来说，曲线的起始点位于头两个控制点之间，终止点位于最后两个控制点之间。
- 对于高次多项式，起点和终点是$m-1$个控制点的加权平均值点。若某一控制点出现多次，样条曲线会更加接近该点。



uniform B-Spline of Degree 3

B样条曲线

- 三次周期性B样条曲线

取 m=4，n=3，节点矢量为：

T=(0,1,2,3,4,5,6,7)：

$$B_{0,4}(t)=\frac{t}{3}B_{0,3}(t)+\frac{4-t}{3}B_{0,3}(t-1)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{6}t^3 & 0\le t<1\\ \frac{1}{6}t^2(2-t)+\frac{1}{6}t(3-t)(t-1)+\frac{1}{6}(4-t)(t-1)^2 & 1\le t<2\\ \frac{1}{6}t(3-t)^2+\frac{1}{6}(4-t)(3-t)(t-1)+\frac{1}{6}(4-t)^2(t-2) & 2\le t<3\\ \frac{1}{6}(4-t)^3 & 3\le t<4\end{cases}$$

B样条曲线

$$B_{0,4}(t)=\frac{1}{6}(-t^3+3t^2-3t+1)$$

$$B_{1,4}(t)=\frac{1}{6}(3t^3-6t^2+4)$$

$$B_{2,4}(t)=\frac{1}{6}(-3t^3+3t^2+3t+1)$$

$$B_{3,4}(t)=\frac{1}{6}t^3$$

$t\in[0,1)$

B样条曲线

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n}P_k B_{k,m}$$

$$=\begin{bmatrix}B_{0,4}(t) & B_{1,4}(t) & B_{2,4}(t) & B_{3,4}(t)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\3 & -6 & 3 & 0\\-3 & 0 & 3 & 0\\1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_0\\P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix}$$

$$=T\cdot M_B\cdot G_B \qquad \mathrm{t}\in[0,1)$$

B样条曲线

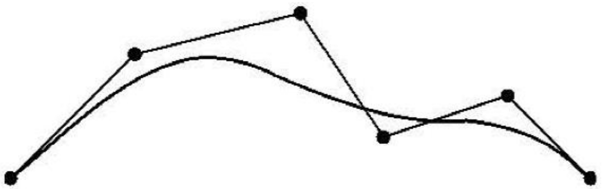
- 开放均匀B样条曲线（准均匀 Quasi-Uniform)

节点矢量可以这样定义：

令 L=n-m，从0开始，按$t_i \leqslant t_{i+1}$排列。

$$T = (\underbrace{0,\ldots,0}_{\mathrm{m}},1,2,\ldots,k-1,\underbrace{k,\ldots,k}_{\mathrm{m}}) \qquad k = \mathrm{n} - \mathrm{m} + 2$$

$$t_i = \begin{cases} 0 & 0 \le i < m \\ i - m + 1 & m \le i \le L + m \\ L + 2 & i > L + m \end{cases}$$



Quasi-uniform B-Spline curve of degree 3

B样条曲线

- 开放均匀的二次（三阶）B样条曲线

  假设m=3，n=4，节点矢量为：$T=(t_0, t_1, \cdots, t_{n+m})$
  $=(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7) =(0,0,0,1,2,3,3,3)$。

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^2 \qquad 0 \le t < 1$$

$$B_{1,3}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t(4-3t) & 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{2}(2-t)^2 & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

B样条曲线

$$B_{2,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & 0\le t<1\\ \frac{1}{2}t(2-t)+\frac{1}{2}(t-1)(3-t) & 1\le t<2\\ \frac{1}{2}(3-t)^2 & 2\le t<3\end{cases}$$

$$B_{3,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-1)^2 & 1\le t<2\\ \frac{1}{2}(3t-5)(3-t) & 2\le t<3\end{cases}$$

$$B_{4,3}(t)=(t-2)^2 \qquad 2\le t<3$$

B样条曲线

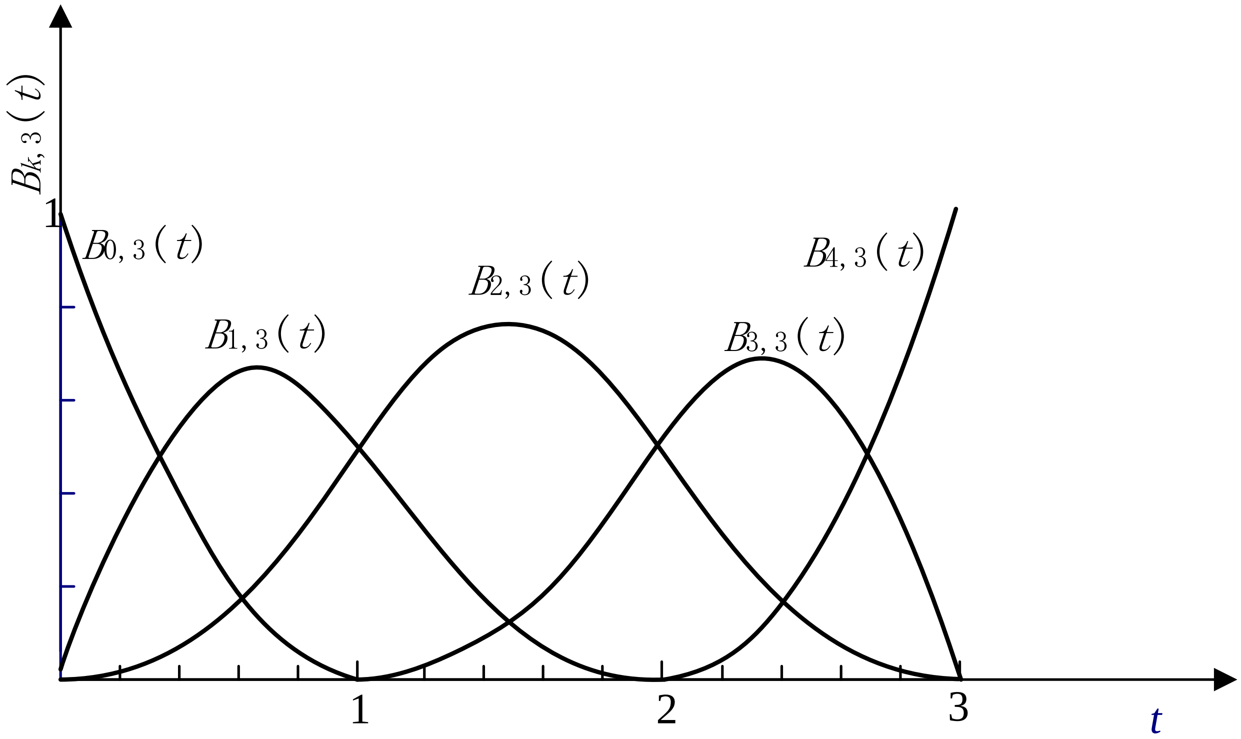


图8.14 开放均匀的二次B样条基函数

B样条曲线

- 非均匀B样条曲线

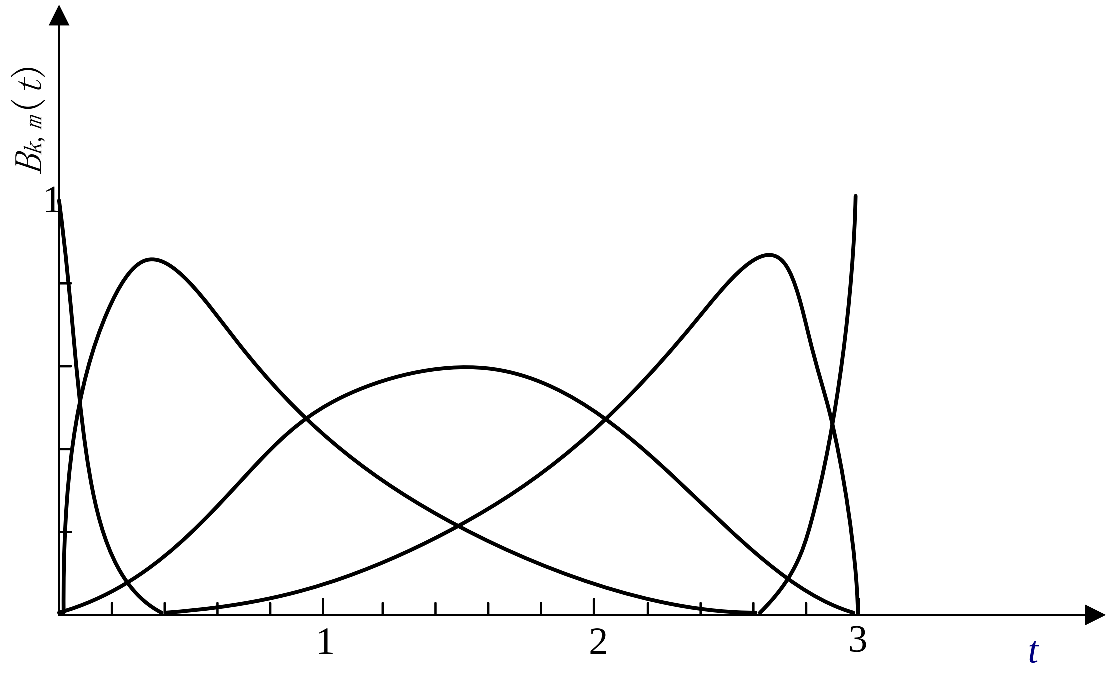


图8.13 非均匀B样条曲线的基函数

B样条曲线的性质

- 局部支柱性

B样条的基函数是一个分段函数，其重要特征是在参数变化范围内，每个基函数在t_k到t_{k+m}的子区间内函数值不为零，在其余区间内均为零，通常也将该特征称为局部支柱性。

B样条曲线的性质

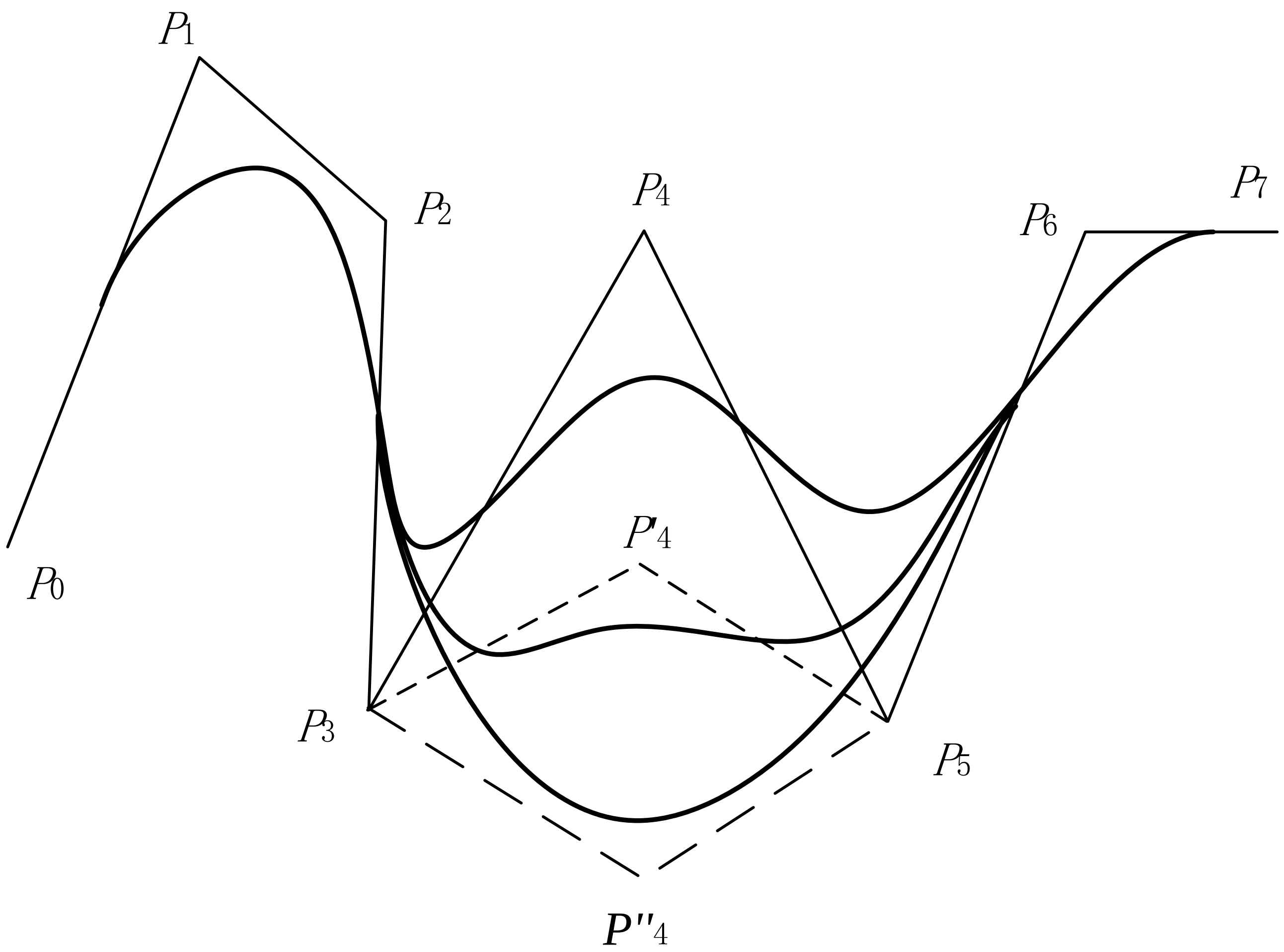


图8.15 B样条曲线的局部支柱性

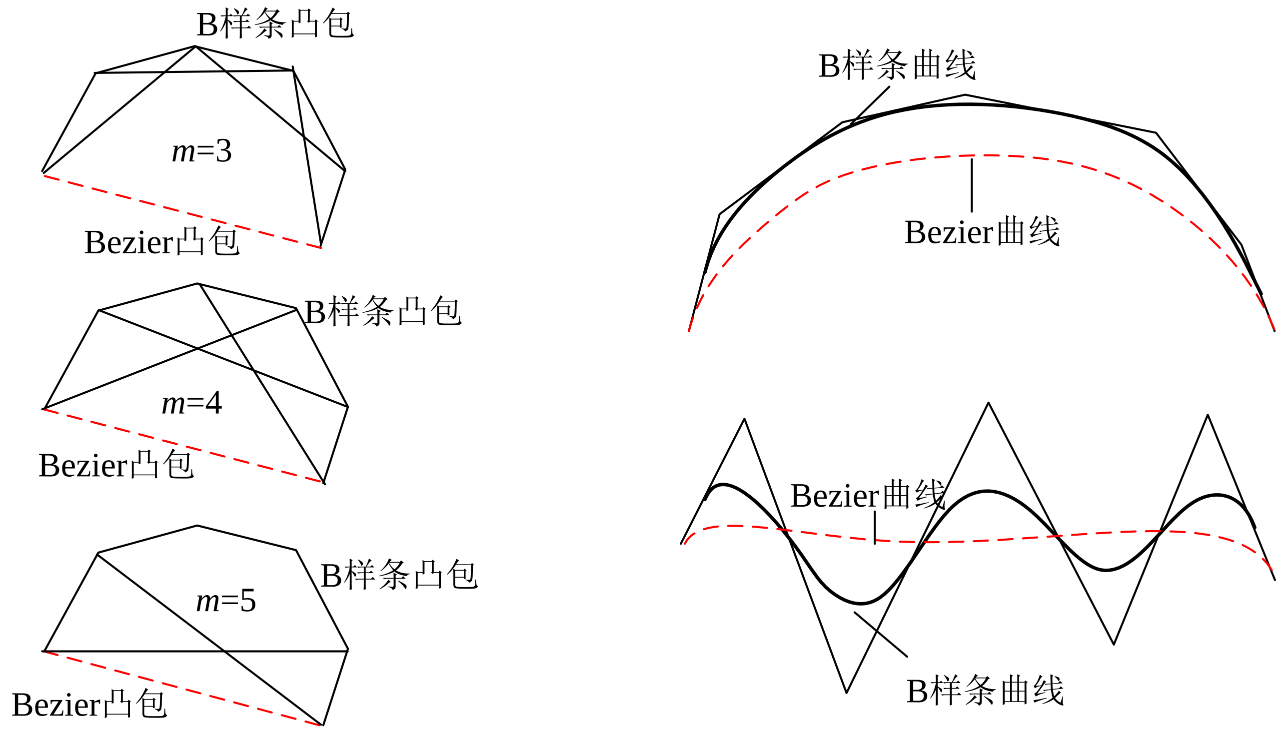
B样条曲线的性质

- B样条的凸组合性质

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,m}(t) \equiv 1 \qquad t \in [t_{m-1}, t_{n+1}]$$

B样条的凸组合性和B样条基函数的数值均大于或等于0保证了B样条曲线的凸包性，即B样条曲线必处在控制多边形所形成的凸包之内。

B样条曲线的性质



(a) B样条曲线和Bezier曲线的凸包比较　　(b) B样条曲线和Bezier曲线的比较

图8.16 B样条曲线与Bezier曲线的凸包性比较

B样条曲线的性质

- 连续性
  - 若一节点矢量中节点均不相同，则m阶（m-1次）B样条曲线在节点处为m-2阶连续。
  - B样条曲线基函数的次数与控制顶点个数无关。
  - 重节点问题：
    重节点处连续性降低

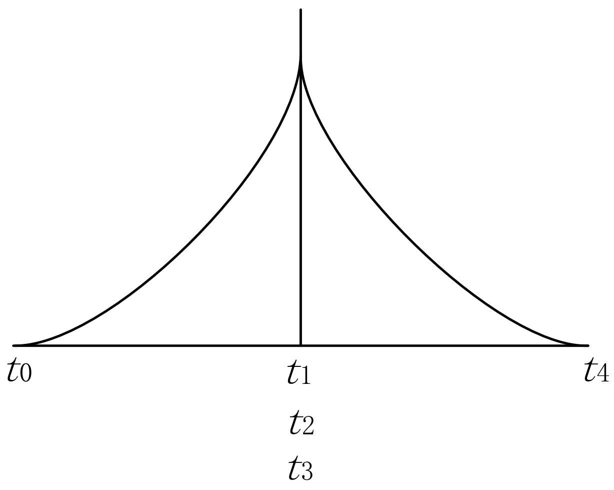


图8.17 具有重节点的三次B样条

B样条曲线的性质

- 导数

$$p'(t) = (m-1)\sum_{k=1}^{n} \frac{P_k - P_{k-1}}{t_{k+m-1} - t_k} B_{k,m-1}(t) \qquad t \in [t_{m-1}, t_{n+1}]$$

B样条曲线的导数可以用其低阶的B样条基函数和顶点矢量的差商序列的线性组合表示。

B样条曲线的性质

- 几何不变性
  - 曲线的形状和相对于控制点的位置不取决于坐标系的选择。
- 变差减少性
  - 这个性质说明任何一条直线与B样条曲线的交点数目不会超过该直线与该B样条曲线的控制多边形的交点数目。

B样条曲面

- 定义

$$p(u,v)=\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}P_{k_1,k_2}B_{k_1,m_1}(u)B_{k_2,m_2}(v)$$

- 控制顶点、控制网格（特征网格）、B样条基函数。
- B样条曲面具有与B样条曲线相同的局部支柱性、凸包性、连续性、几何不变性等性质。

曲线和曲面

1 基本概念

2 三次样条

3 Bezier曲线曲面

4 B样条曲线曲面

5 有理样条曲线曲面

NURBS的引入

- B样条曲线与Bezier 曲线的缺点
  - 不能精确表示圆锥曲线（除了抛物线）。
- NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline, 非均匀有理B样条）
  - 目的在于找到一种精确描述圆锥曲线以及二次曲面的数学方法。

NURBS

- NURBS 十分复杂。
- Les Piegl 的关于NURBS 的专著：
  - "NURBS: From Projective Geometry to Practical Use"
  - Les Piegl 毕业于匈牙利的Budapest大学，之后多年在SDRC公司进行几何建模工具的设计。

NURBS曲线曲面的定义

- 定义

$$p(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n} w_k P_k B_{k,m}(t)}{\sum_{k=0}^{n} w_k B_{k,m}(t)}$$

P_k为控制顶点；W_k是控制点的权因子，权因子越大，曲线越靠近对应的控制点；B(t)是B样条基函数。

NURBS曲线曲面的定义

- 例：假定用定义在三个控制顶点和开放均匀的节点矢量上的二次（三阶）B样条函数来拟合，于是，T=(0, 0, 0, 1, 1, 1)，取权函数为：

$$w_0 = w_2 = 1$$

$$w_1 = \frac{r}{1-r} \qquad 0 \le r < 1$$

NURBS曲线曲面的定义

- 则有理B样条的表达式为：

$$p(t)=\frac{P_0B_{0,3(t)}+\frac{r}{1-r}P_1B_{1,3(t)}+P_2B_{2,3(t)}}{B_{0,3(t)}+\frac{r}{1-r}B_{1,3(t)}+B_{2,3(t)}}$$

NURBS曲线曲面的定义

- 然后取不同的r值得到各种二次曲线：

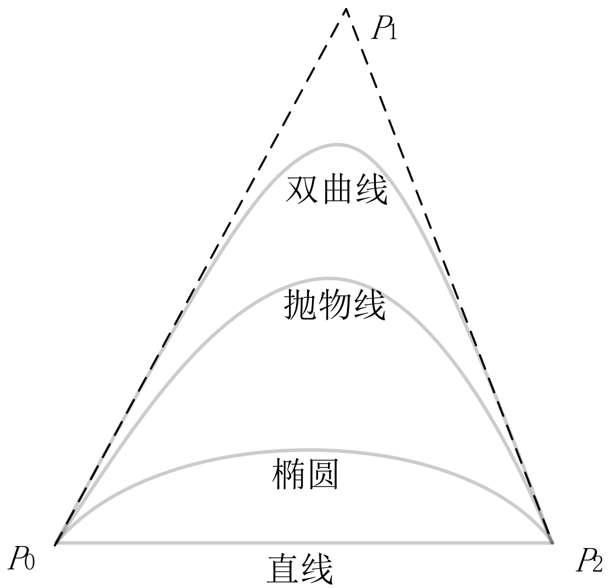


图8.18 由不同有理样条权因子生成的二次曲线段

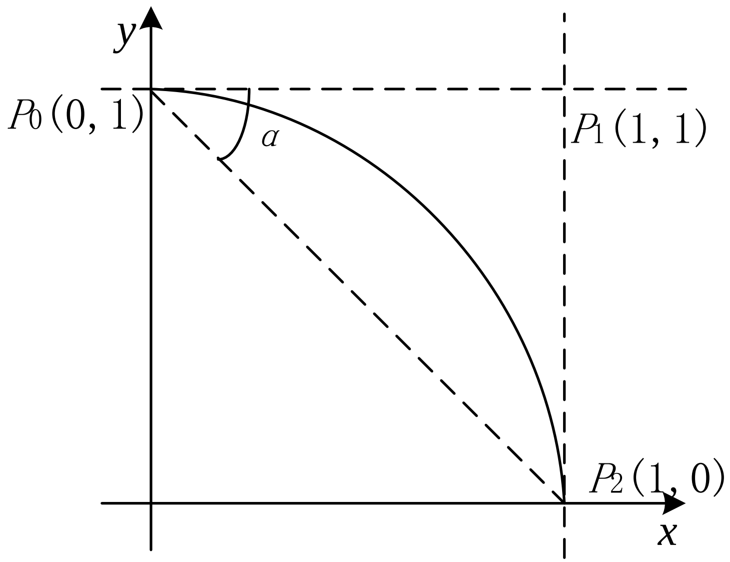


图8.19 由有理样条函数生成的第一象限上的圆弧

NURBS曲线曲面的定义

- NURBS曲面可由下面的有理参数多项式函数表示：

$$p(u,v)=\frac{\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} w_{k_1,k_2} P_{k_1,k_2} B_{k_1,m_1}(u) B_{k_2,m_2}(v)}{\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} w_{k_1,k_2} B_{k_1,m_1}(u) B_{k_2,m_2}(v)}$$

NURBS曲线曲面的性质

- NURBS曲面可由下面的有理参数多项式函数表示：

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n}P_kR_{k,m}(t)$$

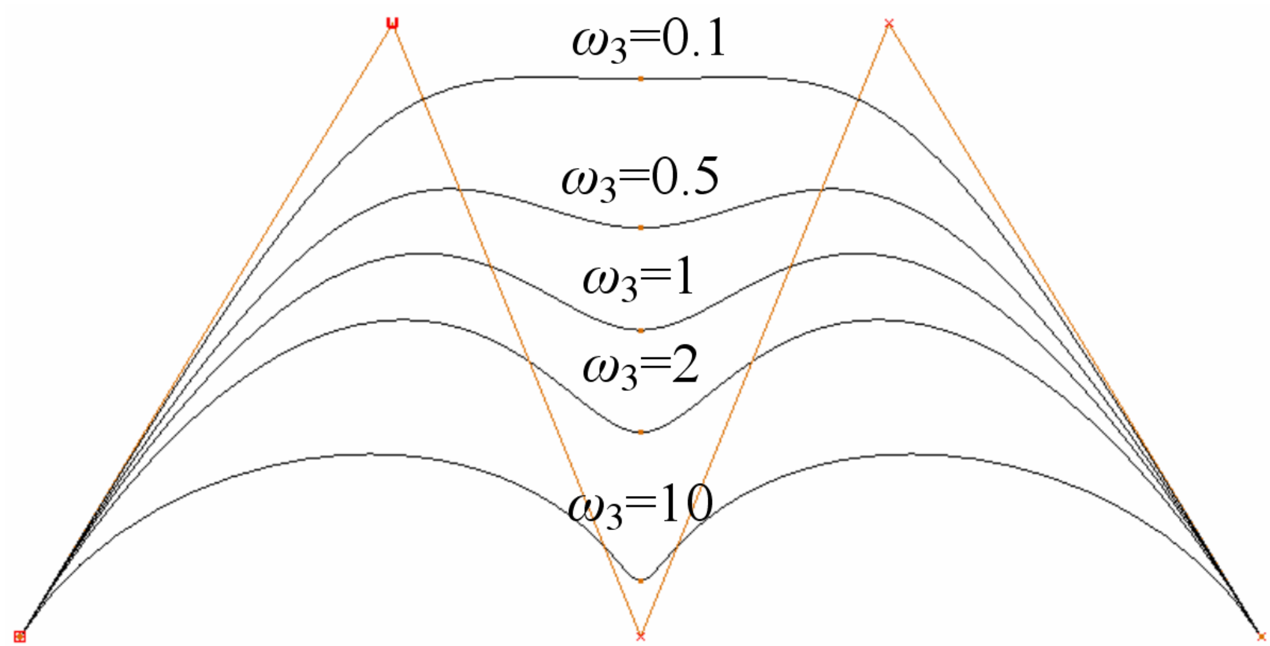
$$R_{k,m}(t)=\frac{w_kB_{k,m}(t)}{\sum_{j=0}^{n}w_jB_{j,m}(t)}$$

NURBS曲线曲面的性质

- 普遍性：通过权因子，将Bezier样条，B样条和有理样条有效统一起来。
- 局部性：在t_k到t_{k+m}的子区间取正值，其他地方为0。
- 凸包性

NURBS曲线曲面的性质

- 可微性：在结点处具有与B样条曲线相同的连续性。
- 权因子



NURBS曲线曲面的特点

- 既为自由型曲线曲面也为初等曲线曲面的精确表示与设计提供了一个公共的数学形式，因此，一个统一的数据库就能够存储这两类形状信息。
- 为了修改曲线曲面的形状，既可以借助调整控制顶点，又可以利用权因子，因而具有较大的灵活性。

NURBS曲线曲面的特点

- 计算稳定且速度快。
- NURBS有明确的几何解释，使得它对良好的几何知识尤其是画法几何知识的设计人员特别有用。
- NURBS具有强有力的几何配套计算工具，包括节点插入与删除、节点细分、升阶、节点分割等，能用于设计、分析与处理等各个环节。

NURBS曲线曲面的特点

- NURBS具有几何和透视投影变换不变性。
- NURBS是非有理B样条形式以及有理与非有理Bezier形式的合适的推广。
- 需要额外的存储以定义传统的曲线曲面。
- 权因子的不合适应用可能导致很坏的参数化，甚至毁掉随后的曲面结构。

NURBS曲线曲面的特点

- 某些技术用传统形式比用NURBS工作得更好。例如，曲面与曲面求交时，NURBS方法特别难于处理刚好接触的情况。
- 某些基本算法，例如求反曲线曲面上的点的参数值，存在数值不稳定问题。

作业

- 8. 2
- 8. 3
- 8. 8