華東理工大學

计算机图形学

2023年11月

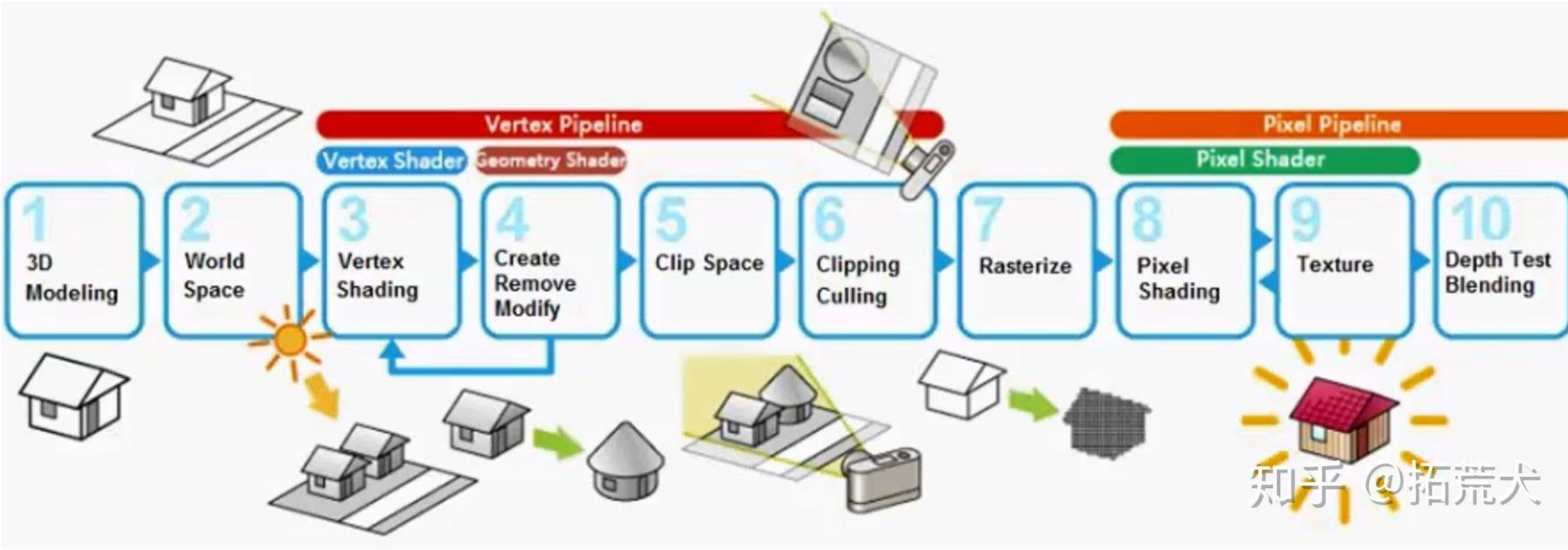
奉贤校区

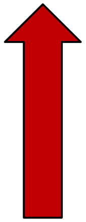
勤奋求实 / 励志明德

08

曲线和曲面

Curve and Surface


Vertex Pipeline
Vertex Shader
Geometry Shader
Pixel Pipeline
Pixel Shader
1 3D Modeling
2 World Space
3 Vertex Shading
4 Create Remove Modify
5 Clip Space
6 Clipping Culling
7 Rasterize
8 Pixel Shading
9 Texture
10 Depth Test Blending
知乎 @拓荒犬



Review

- 分形几何

  科赫曲线是不是无限长的？

  英国的海岸线呢？

- 网格表示的好处有哪些？
  - 简单易懂，网格模型容易获得；
- 不好处有哪些？
  - 没有内外信息，只能用来显示；过密可能还会开销多余的显存。

边界表示-平面多边形表示

- **边界表示(B-reps)**的最普遍方式是**多边形表面模型**，它使用一组包围物体内部的**平面**多边形，也即平面多面体，来描述实体。此时**边**是**直线段**。

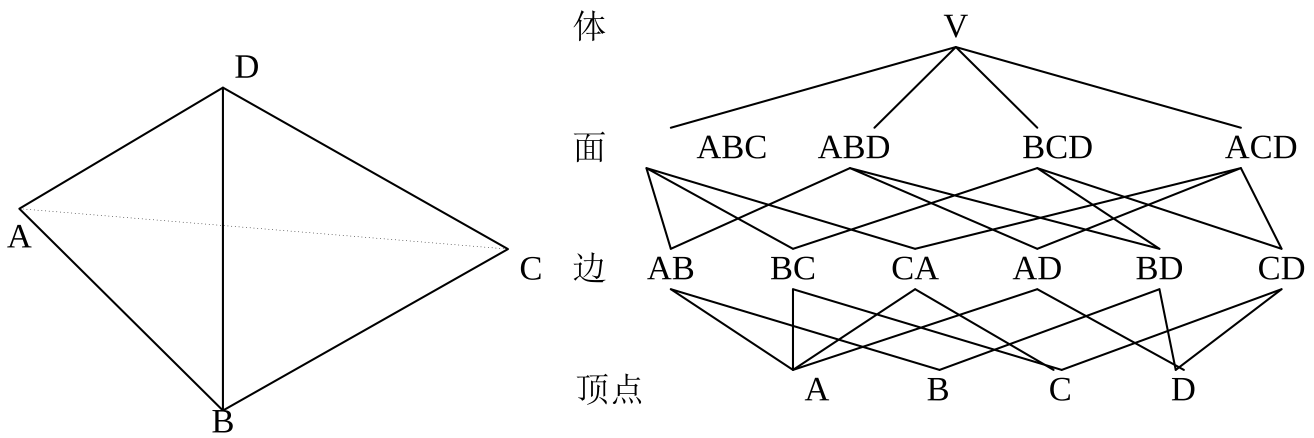
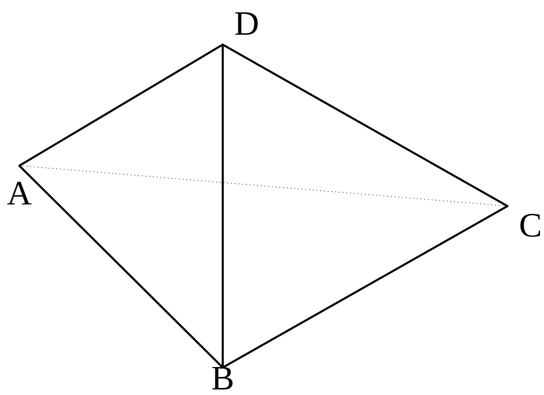


图4.10 四面体及其点、边、面的关系

边界表示

- **边界表示(B-reps)**使用一组包围物体内部的**曲面**或**平面**表示，来描述实体。
- 此时，**边**就是**曲线段**或**直线段**



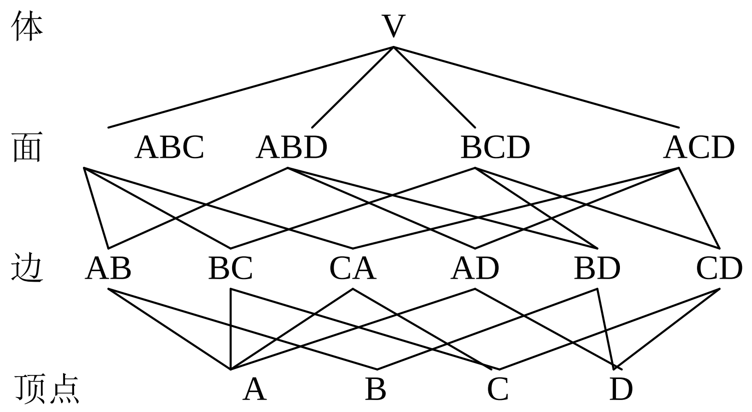


图4.10 四面体及其点、边、面的关系

曲线和曲面

1. 基本概念
2. 三次样条
3. Bezier曲线曲面
4. B样条曲线曲面
5. 有理样条曲线曲面

基本概念

- 提出问题

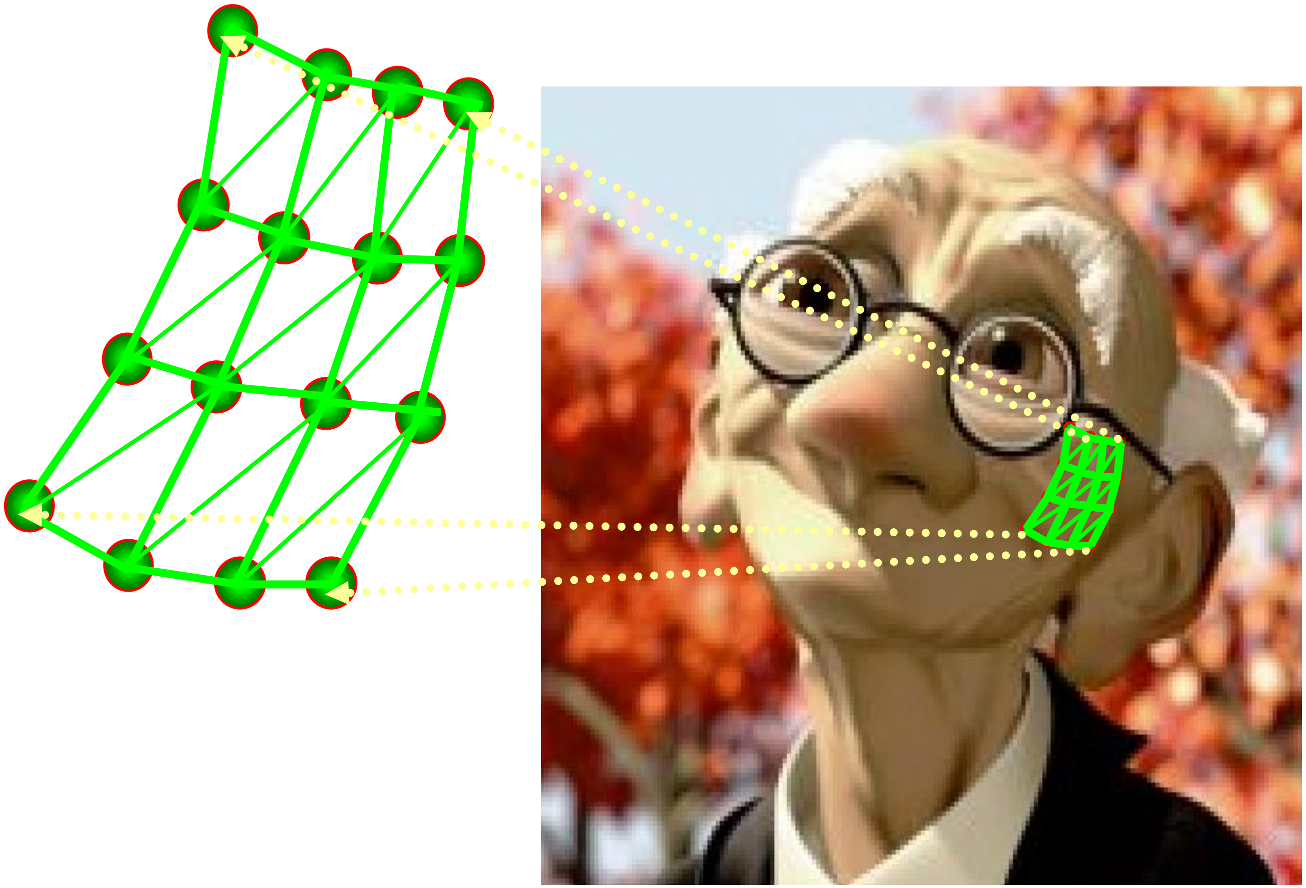
由**离散点**来**近似**地决定**曲线**和**曲面**，即通过测量或实验得到一系列有序点列，根据这些点列需构造出一条**光滑**曲线，以直观地反映出实验特性、变化规律和趋势等。

曲线曲面概述

- 图形学中一个很复杂的又非常重要的研究领域。
  - 曲线曲面才是造型的真正统治者，它占据了我们生活和幻想中的造型的绝大部分。
  - 但曲线曲面又是如此地难以理解，让人们在一段很长很长的时间内无法征服它。

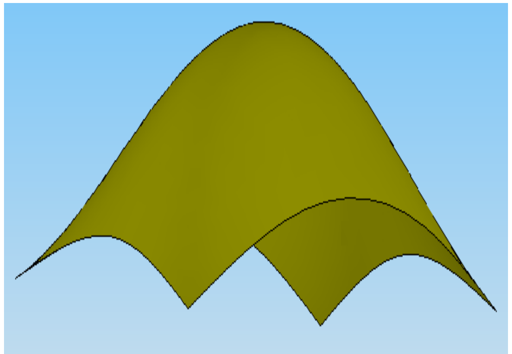
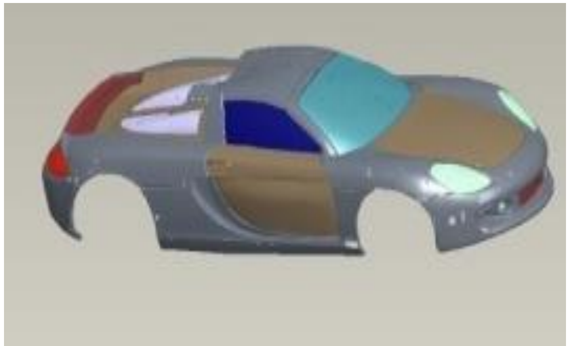
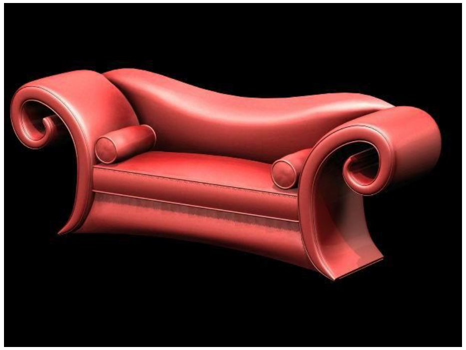
曲面造型(Surface Modeling)是计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometric Design, CAGD)和计算机图形学的一项重要内容，主要研究在计算机图形系统的环境下对曲线曲面的表示、设计、显示和分析。

娱乐中的曲线曲面

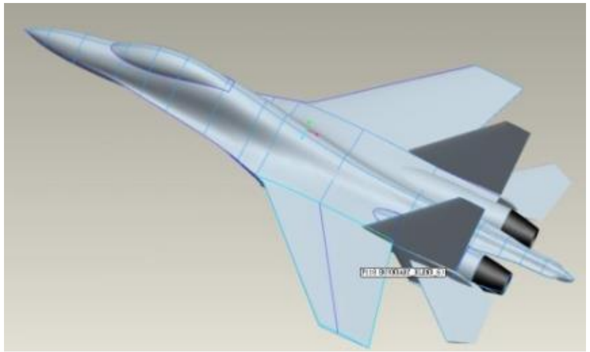


特点？

工程中的曲线曲面



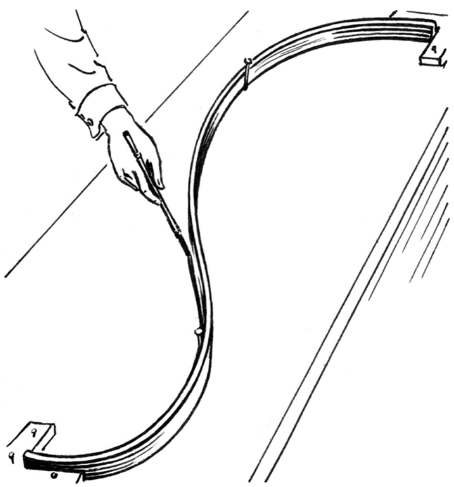



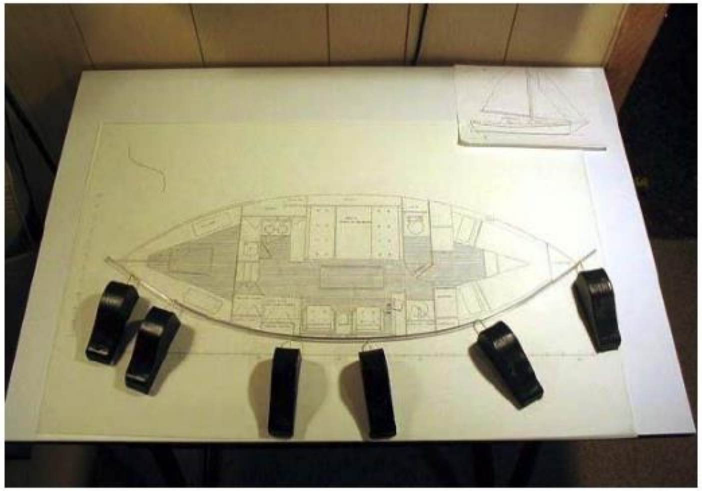

特点？

曲线曲面主要研究内容

曲面造型(Surface Modeling)是计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometric Design,CAGD)和计算机图形学的一项重要内容，主要研究在计算机图形系统的环境下对曲线曲面的表示、设计、显示和分析。

它起源于汽车、飞机、船舶、叶轮等的**外形放样**工艺，由Coons、Bezier等大师于二十世纪六十年代奠定其理论基础。

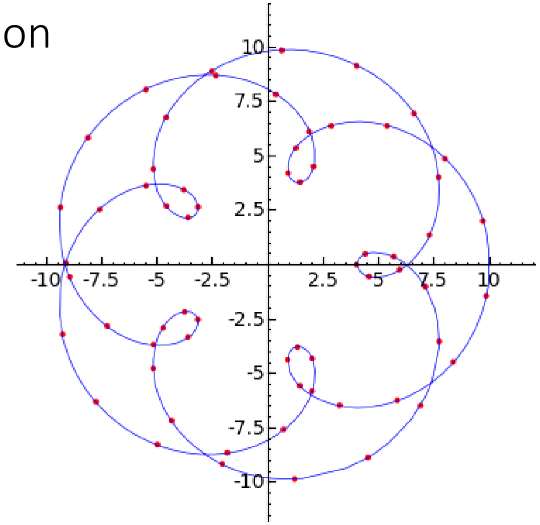




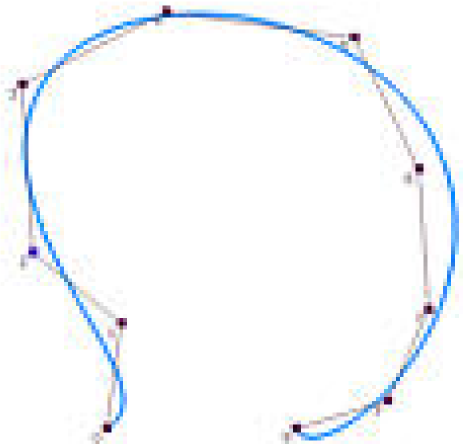
曲线曲面主要研究内容

经多年的发展，曲面造型现在已形成了以有理B样条曲面(Rational B-spline Surface)为基础的参数化特征设计和隐式代数曲面(Implicit Algebraic Surface)表示这两类方法为主体，以插值(Interpolation)、逼近(Approximation)这二种手段为骨架的几何理论体系。

Interpolation



Approximation



计算机图形学的起源与发展

1950s　1960s

- 同期，雷诺汽车公司的Pierre Bézier 提出了一种新的曲线表达方式，并于1972年开发出用于汽车外形设计的UNISURF系统
  - Bézier与de Casteljau
  - “天上掉下来”— 到Forrest的“蓦然回首”

Pierre Bézier

- Pierre Etienne Bezier于1910年出生在法国巴黎，其父亲和爷爷都是工程师
- 他于1930年取得了机械工程学士学位，并于1931年获得了电子工程的第二学位，46年后的1977年，他获得了巴黎大学数学博士学位
- 1933年，时年23岁的Bezier进入雷诺公司并为其工作了42年
- Bezier的学术生涯是从1968-1979年，在此期间他担任国立巴黎工艺技术学院生产工程系教授

曲线曲面数学描述的发展

- 弗格森双三次曲面片（1963年）
- 孔斯双三次曲面片（1964年）
- 样条方法（1964年）
- Bezier方法（1971年，法国雷诺公司）
- B样条方法（1974年，通用汽车公司）
- 有理Bezier（1968年 Forrest）
- 非均匀有理B样条方法（1975年 NURBS）

曲线曲面发展历程

- 数学上曲线常见以**多项式表达**为主（Polynomial equations）

$$\mathbf{P}(u)=\begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix}=\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1 u+\mathbf{a}_2 u^2+\mathbf{a}_3 u^3=\sum_{i=0}^{3}\mathbf{a}_i u^i$$

$\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ 为矢量系数

- **问题：** 没有明显几何意义，系数变化与曲线没有直观关系

曲线曲面发展历程

$$\mathbf{P}(u)=\begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix}=\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1u+\mathbf{a}_2u^2+\mathbf{a}_3u^3$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_0=\mathbf{P}_0 \\ &\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3=\mathbf{P}_1 \\ &\mathbf{a}_1=\mathbf{P}_0' \\ &\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2+3\mathbf{a}_3=\mathbf{P}_1' \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(u)=\begin{bmatrix} F_0(u) & F_1(u) & G_0(u) & G_1(u) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_0' \\ \mathbf{P}_1' \end{bmatrix}$$

- **1963年 美国波音飞机公司的弗格森（Ferguson）最早引入参数三次曲线，将曲线曲面表示成参数矢量函数形式，构造了组合曲线和由四角点的位置矢量、两个方向切矢定义的弗格森双三次曲面片。**

$$\mathbf{P}(u)=\begin{bmatrix} F_0(u) & F_1(u) & G_0(u) & G_1(u) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_0' \\ \mathbf{P}_1' \end{bmatrix}$$

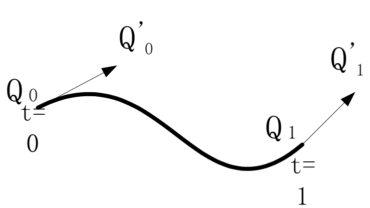


图 Ferguson曲线

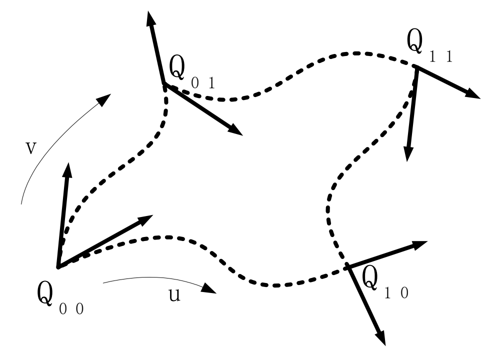


图 Ferguson曲面

曲线曲面发展历程

Ferguson曲面问题：角点平坦（Flat spots）

$$P(u,v)=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix} M \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{v,00} & P_{v,01} \\ P_{10} & P_{11} & P_{v,10} & P_{v,11} \\ P_{u,00} & P_{u,00} & 0 & 0 \\ P_{u,10} & P_{u,11} & 0 & 0 \end{bmatrix} M^T \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

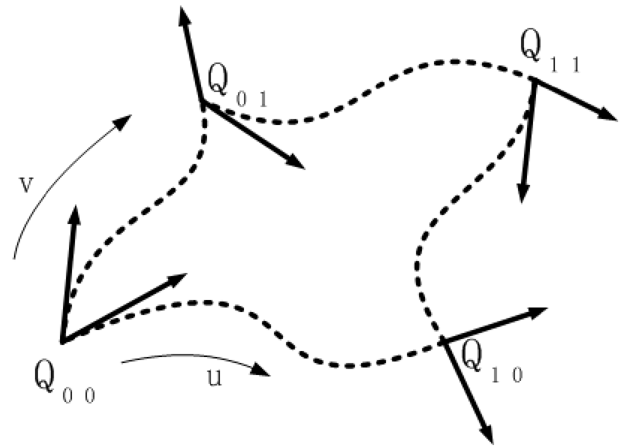
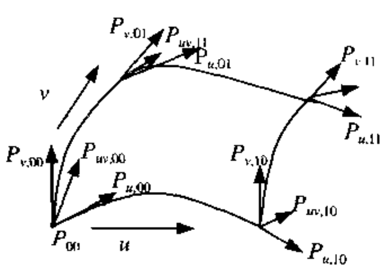
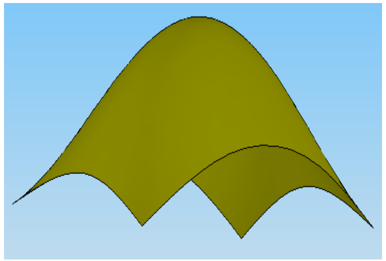


图 Ferguson曲面

- **1964年，**MIT**孔斯（Coons）用封闭曲线的四条边界定义一张曲面(增加扭矢控制)。同年，舍恩伯格（Schoenberg）提出了参数样条曲线、曲面的形式。**



$$P(u,v)=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix} M \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{v,00} & P_{v,01} \\ P_{10} & P_{11} & P_{v,10} & P_{v,11} \\ P_{u,00} & P_{u,00} & P_{uv,00} & P_{uv,01} \\ P_{u,10} & P_{u,11} & P_{uv,10} & P_{uv,11} \end{bmatrix} M^T \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$



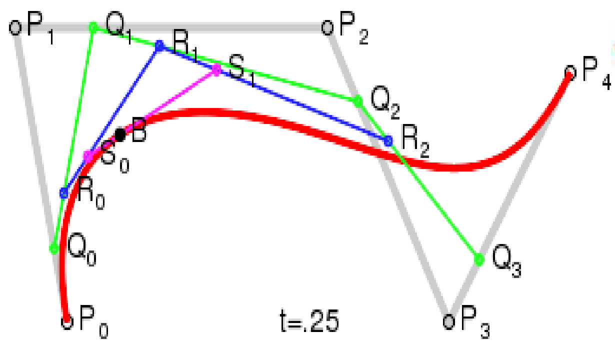
Coons曲面问题：中间形状控制能力不足

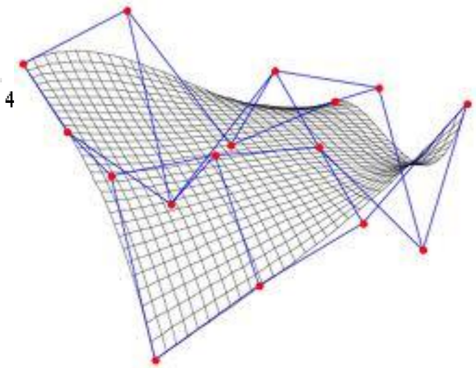
曲线曲面发展历程

- 1971年，法国雷诺（Renault）汽车公司的贝塞尔（Bezier）发表了一种用控制多边形定义曲线和曲面的方法。

$$\mathbf{P}(u)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{P}_i B_{i,n}(u)$$

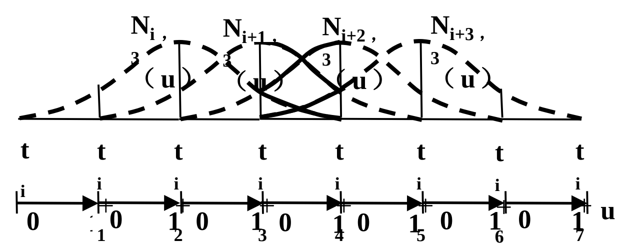
$$\mathbf{P}(u,v)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}\mathbf{P}_{i,j} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v)$$

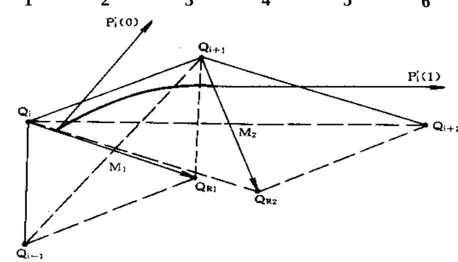




- 1974年，美国通用汽车公司的戈登（Gorden）和里森费尔德（Riesenfeld）将B样条理论用于形状描述，提出了B样条曲线和曲面。

$$\begin{cases} N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & 若 t_i \le u \prec t_{i+1} \\ 0 & 其它\end{cases} \\ N_{i,k}(u)=\dfrac{(u-t_i)N_{i,k-1}(u)}{t_{i+k}-t_i}+\dfrac{(t_{i+k+1}-u)N_{i+1,k-1}(u)}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} \qquad k>0 \\ 0/0=0 \\ \mathbf{C}(u)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{P}_i N_{i,k}(u) \end{cases}$$





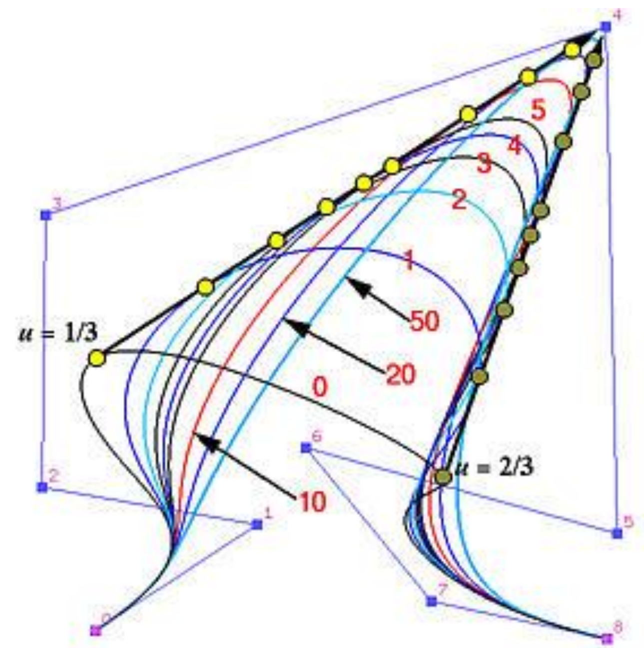
曲线曲面发展历程

•1975年，美国锡拉丘兹（Syracuse）大学的佛斯普里尔（Versprill）提出了有理B样条方法。

•80年代后期皮格尔（Piegl）和蒂勒（Tiller）将有理B样条发展成非均匀有理B样条(NURBS)方法，并已成为当前自由曲线和曲面描述的最广为流行的技术。

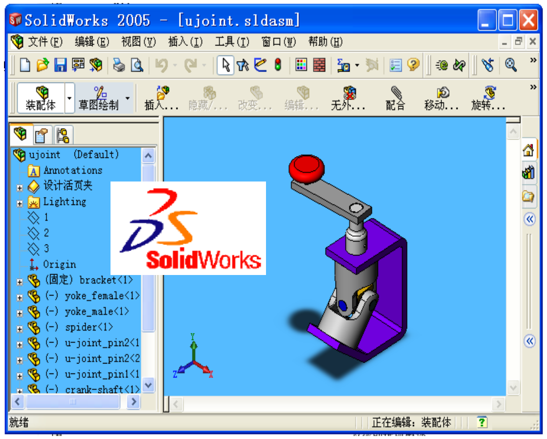
$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & 若 t_i \le u \prec t_{i+1} \\ 0 & 其它 \end{cases} \\ N_{i,k}(u) = \dfrac{(u-t_i)N_{i,k-1}(u)}{t_{i+k}-t_i} + \dfrac{(t_{i+k+1}-u)N_{i+1,k-1}(u)}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} \qquad k>0 \\ 0/0=0 \end{cases}$$

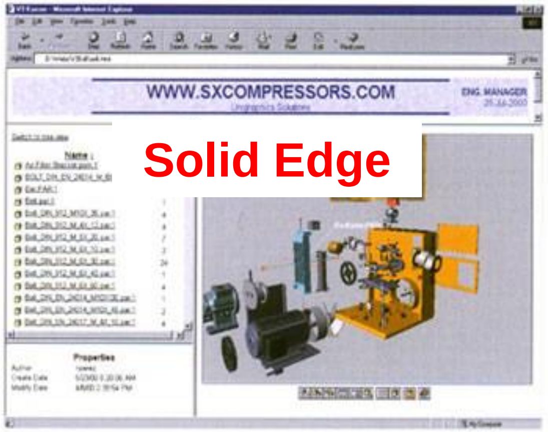
$$\mathbf{P}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\omega_{i,j}\mathbf{P}_{i,j}\,N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\omega_{i,j}\,N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)}$$

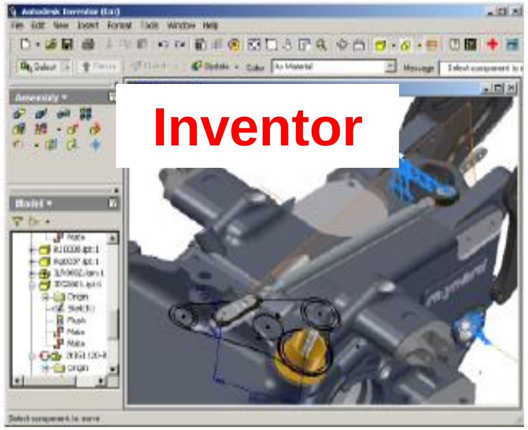


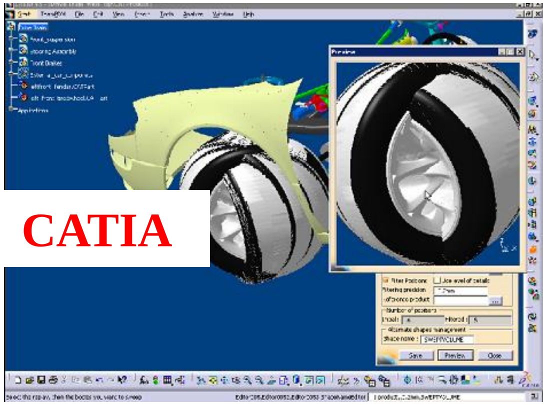
曲线曲面发展历程

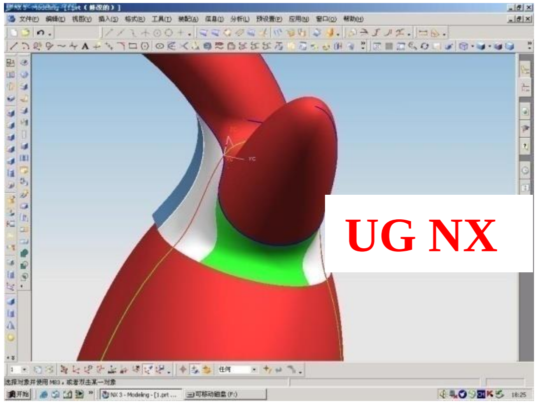
•非均匀有理B样条（NURBS）成为当前大多数商用CAD软件系统的内部表达技术。

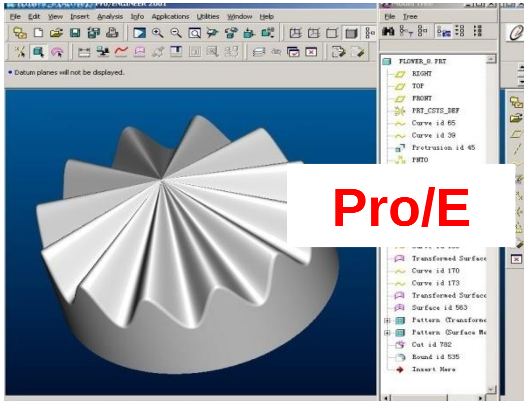












曲线曲面的表示要求

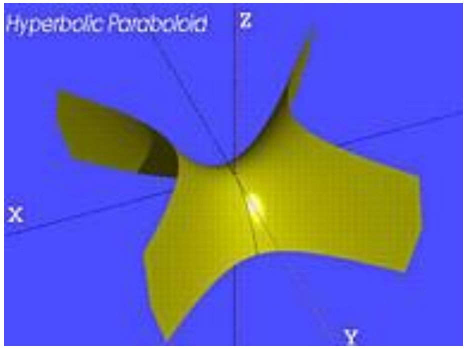
- **唯一性：**形状唯一确定
- **几何不变性：**位置相对不变
- 易于**定界**
- **统一性：**统一表示各种形状（平面、空间）
- 易于实现**光滑连接**
- **几何直观：**几何意义明显

曲线曲面的表示

曲线曲面常见有**显式**、**隐式**及**参数**表达方法

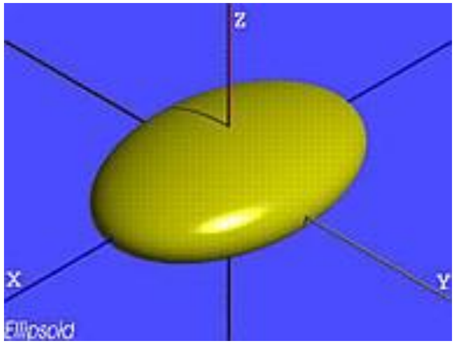
显式表达:如曲面方程 z=f(x，y)，式中每个z值对应唯一的x、y值，该表示计算非常方便，但无法描述多值或封闭面，如球。

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$$



隐式表达:如曲面f(x, y，z)=0，这种表示不便于由已知的参量x，y计算z值，可用于判断点与曲线曲面的位置关系

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$



曲线曲面的参数表示

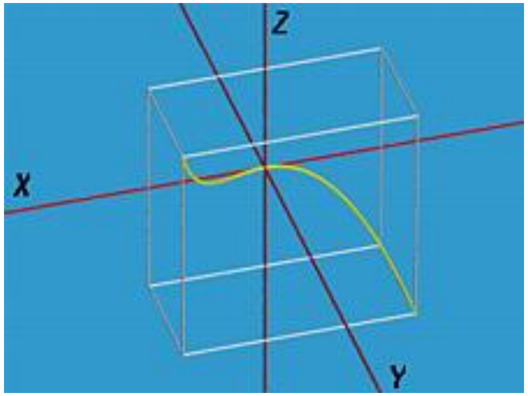
曲线参数表达

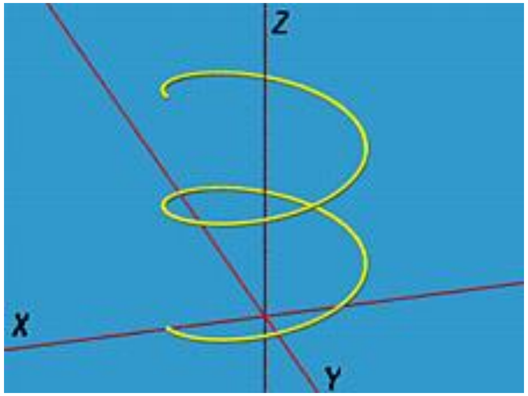
空间曲线上一点p的坐标被表示成参数u的函数：

$$x=x(u),\ y=y(u),\ z=z(u)$$

合起来，曲线被表示为参数u的矢函数：

$$\mathbf{P}(u) = [x \quad y \quad z] = [\ x(u) \quad y(u) \quad z(u)\ ]$$





由端点为P1、P2的直线段参数方程可表示为：

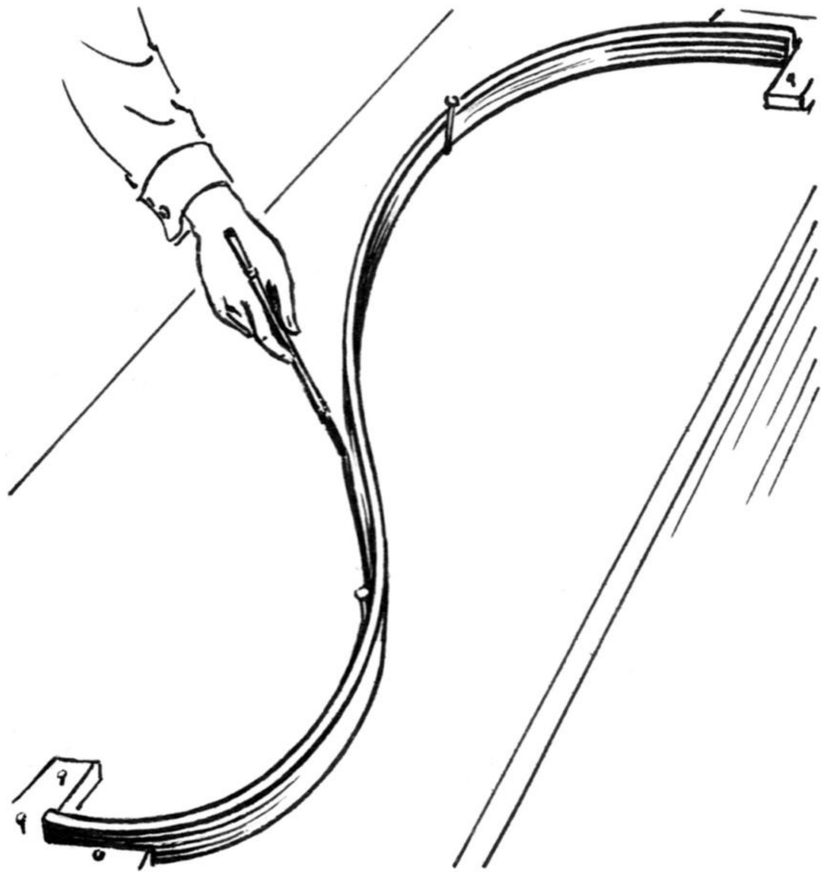
$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}1 + (\ \mathbf{P}2 - \mathbf{P}1\ )u \qquad u\in[0,\ 1]$$

曲线曲面的参数表示

- 参数法表示的优点
  - 点动成线，一阶、二阶导数
  - 通常总是能够选取那些具有几何不变性的参数曲线曲面表示形式，满足几何不变性。
  - 用对参数求导来代替斜率，避免无穷大斜率
  - t∈[0, 1]，使其相应的几何分量是有界的。
  - 可对参数方程直接进行仿射和投影变换。
  - 参数变化对各因变量的影响可以明显地表示出来。

插值与逼近

- 采用**模线样板法**表示和传递自由曲线曲面的形状称为样条（spline）。
- 样条曲线是指由多项式曲线段连接而成的曲线，在每段的边界处满足特定的连续条件。
- 样条曲面则可以用两组正交样条曲线来描述。



手工作业中所使用的样条

曲线曲面的插值和逼近

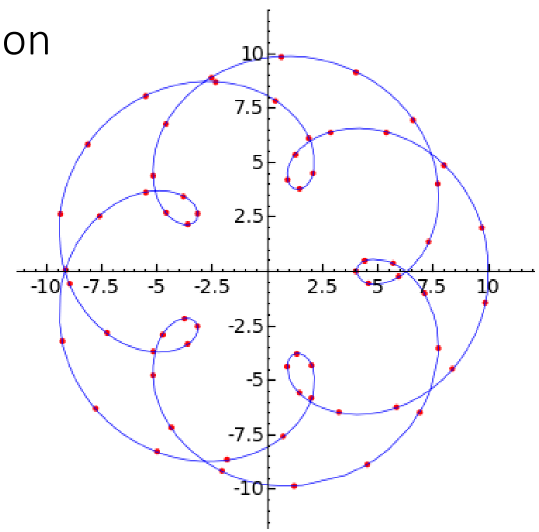
曲线常用定义方法：

插值：给定一组有序的数据点Pi，i=0, 1, …, n，构造一条曲线顺序通过这些数据点，称为对这些数据点进行插值，所构造的曲线称为插值曲线。常用插值方法有线性插值、抛物线插值等(Interpolation)。

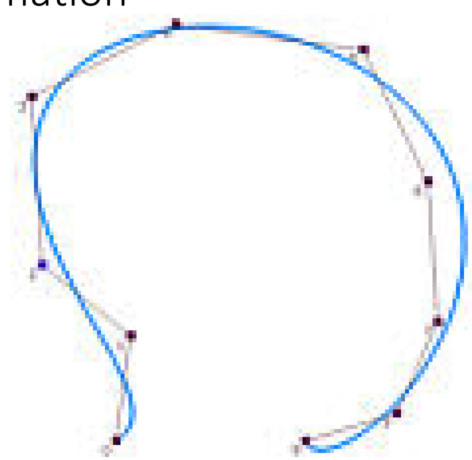
逼近：构造一条曲线使之在某种意义下最接近给定的数据点，称为对这些数据点进行逼近，所构造的曲线为逼近曲线(Approximation)。

拟合：插值和逼近则统称为拟合（fitting）。

Interpolation



Approximation



插值与逼近

- 曲线曲面的插值：当用一组型值点（插值点）来指定曲线曲面的形状时，形状完全通过给定的型值点列。

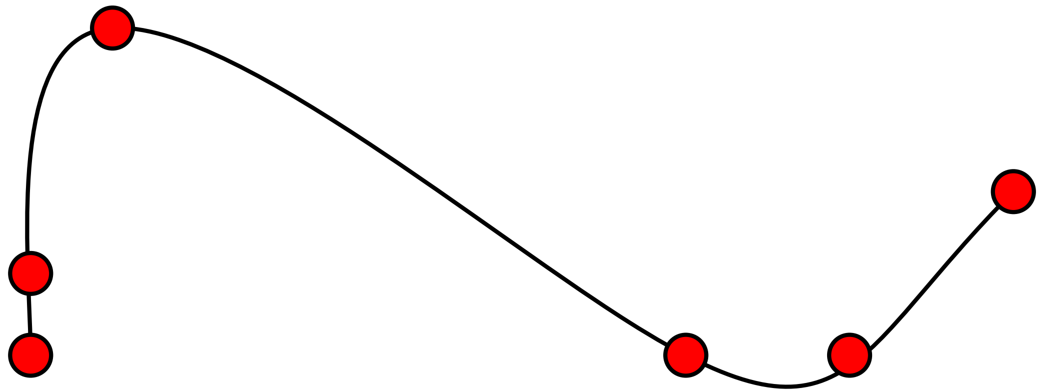


图8.1 曲线的拟合

插值与逼近

- 曲线曲面的逼近：当用一组控制点来指定曲线曲面的形状时，求出的形状不必通过控制点列。

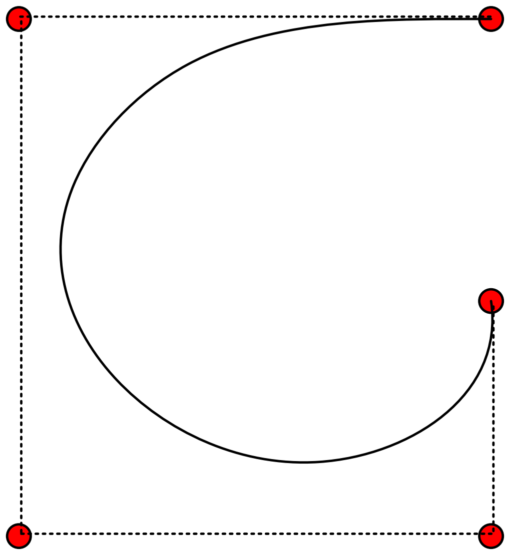


图8.2 曲线的逼近

插值与逼近

- 求给定**型值点**之间曲线上的点称为曲线的插值。
- 将连接有一定次序**控制点**的直线序列称为控制多边形或特征多边形。

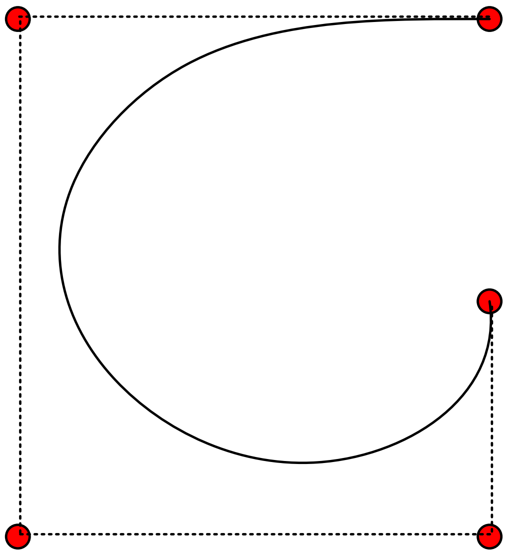


图8.2 曲线的逼近

连续性条件

- 假定参数曲线段p_i以参数形式进行描述：

$$p_i = p_i(t) \qquad t \in [t_{i0}, t_{i1}]$$

- 参数连续性
  - 0阶参数连续性，记作C^0连续性，是指曲线的几何位置连接，即

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

连续性条件

- 1阶参数连续性，记作C¹连续性，指代表两个相邻曲线段的方程在相交点处有相同的一阶导数：

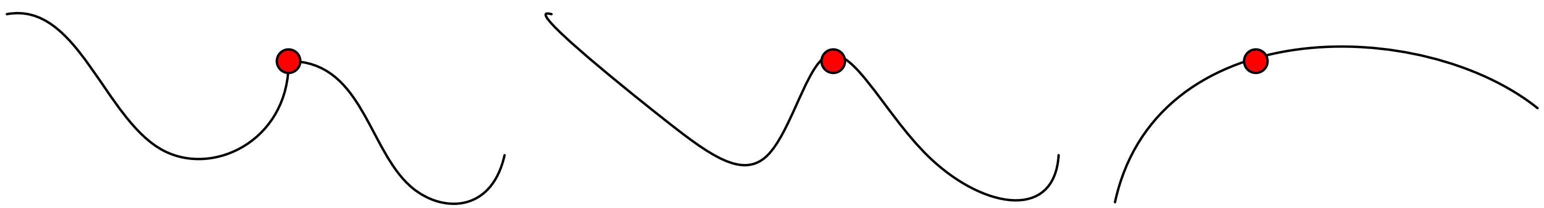
$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

$$且 p_i'(t_{i1}) = p_{(i+1)}'(t_{(i+1)0})$$

大小和方向相等

连续性条件

- 2阶参数连续性，记作C^2连续性，指两个相邻曲线段的方程在相交点处具有相同的一阶和二阶导数。



(a) 0阶连续性　　(b) 1阶连续性　　(c) 2阶连续性

图8.3 曲线段的参数连续性

大小和方向相等

连续性条件

- 几何连续性
  - 0阶几何连续性，记作G^0连续性，与0阶参数连续性的定义相同，满足：

$$p_i(t_{i1}) = p_{(i+1)}(t_{(i+1)0})$$

连续性条件

- 1阶几何连续性，记作G^1连续性，指一阶导数在相邻段的交点处成比例
- 2阶几何连续性，记作G^2连续性，指相邻曲线段在交点处其一阶和二阶导数均成比例。

大小不等、方向相等

样条描述

- n次样条参数多项式曲线的矩阵

$$\begin{cases} x(t) = a_n t^n + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t^1 + a_0 \\ y(t) = b_n t^n + \cdots + b_2 t^2 + b_1 t^1 + b_0 \\ z(t) = c_n t^n + \cdots + c_2 t^2 + c_1 t^1 + c_0 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

样条描述

$$p(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} t^n & \cdots & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_n & b_n & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{bmatrix}$$

$$= T \cdot C = \boxed{T \cdot M_S} \cdot G \qquad t \in [0, 1]$$

样条描述

- M_s称为基矩阵，是一个（n+1）*（n+1）阶矩阵
- G是一个（n+1）*3阶的矩阵，包含样条形式的几何约束条件（边界条件）。

- C称为混合函数/调和函数，或基函数（Blending Function）

曲线和曲面

1 基本概念

2 三次样条

3 Bezier曲线曲面

4 B样条曲线曲面

5 有理样条曲线曲面

三次样条

- 给定n+1个点，可得到通过每个点的分段三次多项式曲线：

$$
\begin{cases}
x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\
y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\
z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z
\end{cases}
\qquad t \in [0,1]
$$

自然三次样条

- **定义**：给定n+1个型值点，现通过这些点列构造一条自然三次参数样条曲线，要求在所有曲线段的公共连接处均具有位置、一阶和二阶导数的连续性，即自然三次样条具有C^2连续性。
- 4（n-1）个方程（一阶和二阶），起点、终点，补充两个条件　　　4n个变量

当两端点的二阶导数值都为0时，该样条被称为自然三次样条，该条件被称为自然边界条件。自然三次样条向边界外施加线性假设，从而扣掉4个自由度（两侧边界各两个限制条件）

自然三次样条

- 特点
  - 只适用于型值点分布比较均匀的场合
  - 不能“局部控制”

三次Hermite样条

- **定义：** 假定型值点P_k和P_{k+1}之间的曲线段为p(t), t∈[0,1]，给定矢量P_k、P_{k+1}、R_k和R_{k+1}，则满足下列条件的三次参数曲线为三次Hermite样条曲线：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{p}(0) = P_k, \qquad && \boldsymbol{p}(1) = P_{k+1} \\
&\boldsymbol{p}'(0) = R_k, \qquad && \boldsymbol{p}'(1) = R_{k+1}
\end{aligned}
$$

- 推导

$$p(t)=[t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

$$=[t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=T\cdot C$$

$$C=\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&1&1&1\\0&0&1&0\\3&2&1&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}P_k\\P_{k+1}\\R_k\\R_{k+1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&-2&1&1\\-3&3&-2&-1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_k\\P_{k+1}\\R_k\\R_{k+1}\end{bmatrix}=M_h\cdot G_h$$

- M_h是Hermite矩阵。G_h是Hermite几何矢量。

三次Hermite样条

- 三次Hermite样条曲线的方程为：

$$p(t)=T\cdot M_h\cdot G_h \qquad t\in[0,1]$$

$$T\cdot M_h=\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

三次Hermite样条

- 通常将$T \bullet M_k$称为Hermite基函数：

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$H_3(t) = t^3 - t^2$$

$$p(t) = P_k H_0(t) + P_{k+1} H_1(t) + R_k H_2(t) + R_{k+1} H_3(t)$$

三次Hermite样条

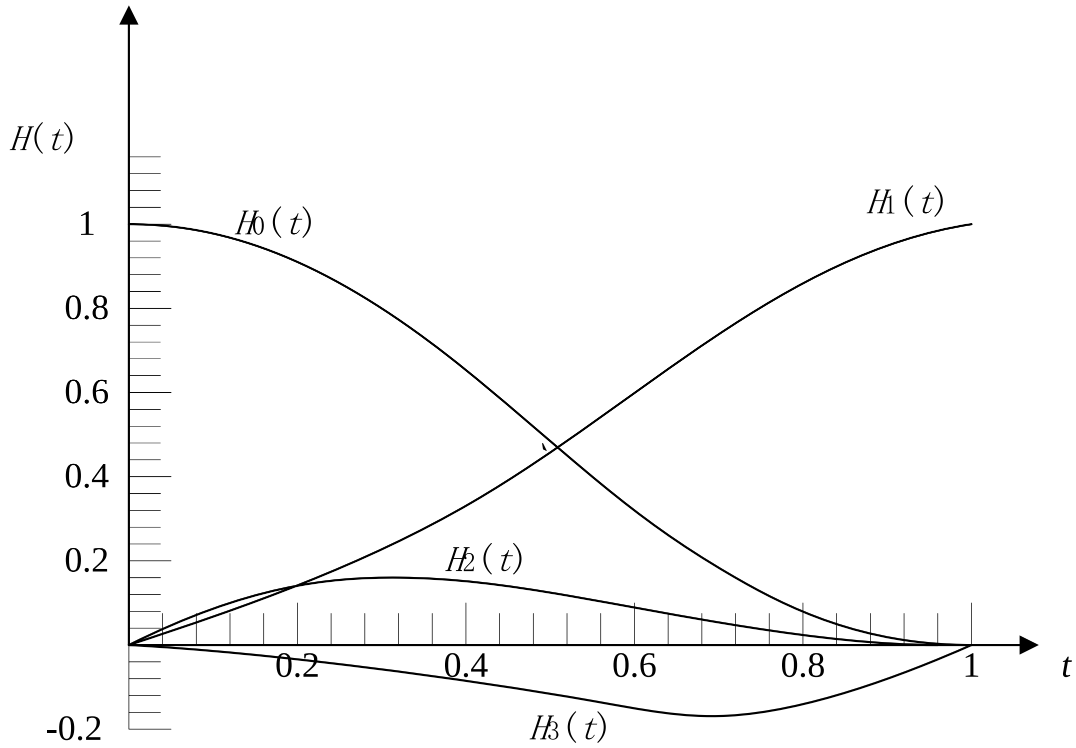


图8.4 Hermite基函数

三次Hermite样条

特点

- 可以局部调整，因为每个曲线段仅依赖于端点约束。
- 基于Hermite样条的变化形式：Cardinal样条和Kochanek-Bartels样条。
- Hermite曲线具有几何不变性。

曲线和曲面

1 基本概念

2 三次样条

3 Bezier曲线曲面

4 B样条曲线曲面

5 有理样条曲线曲面

Bezier曲线的定义

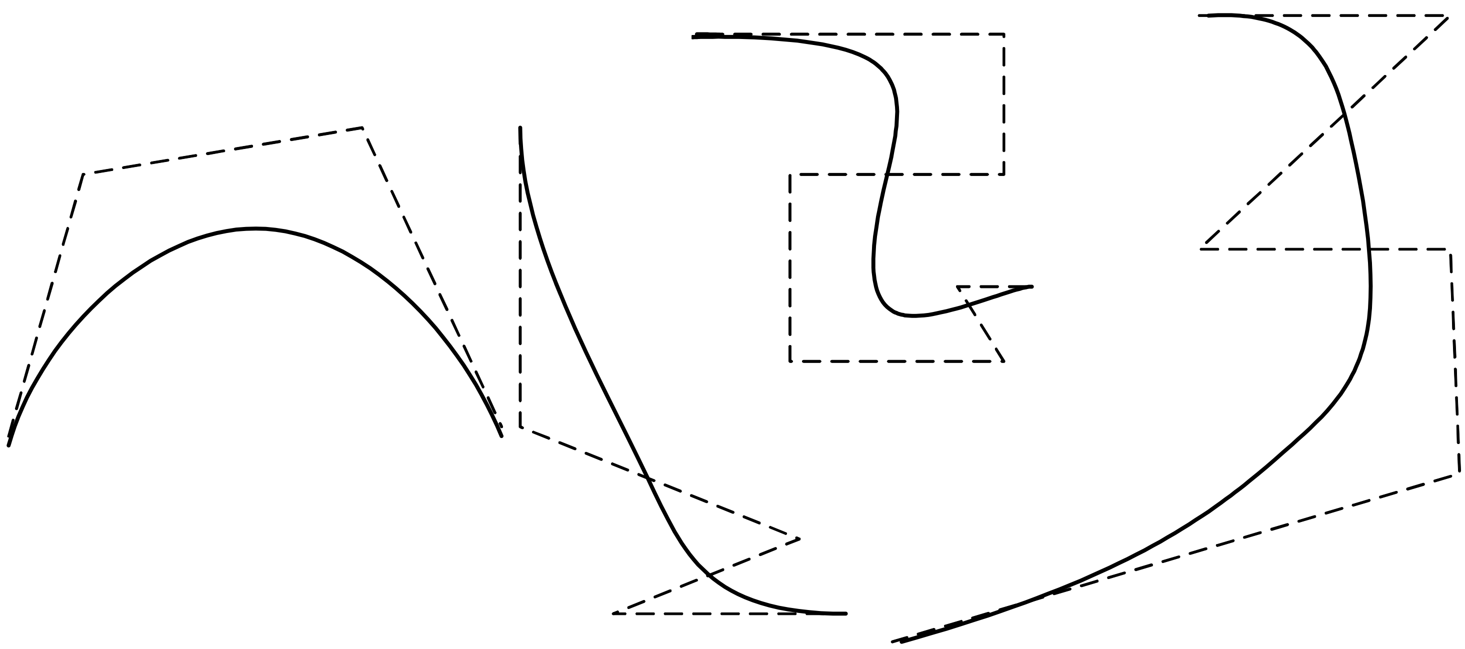


图8.5 Bezier曲线

Bezier曲线的定义

- 面向几何，利用易于控制的参数改变曲线的阶次和形状。
- 由控制多边形的顶点唯一确定。
- 第一个和最后一个点在曲线上，其他顶点用于控制曲线的导数、阶次和形状。

Bezier曲线的定义

- 定义

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n}P_k BEN_{k,n}(t) \qquad t\in[0,1]$$

- Bernstein基函数具有如下形式：

$$BEN_{k,n}(t)=\frac{n!}{k!(n-k)!}t^k(1-t)^{n-k}=C_n^k t^k(1-t)^{n-k}$$

$$k=0,1,\cdots,n$$

- 注意：当k=0，t=0时，$t^k=1$，k!=1。

Bezier曲线的定义

- 一次Bezier曲线（n=1）

$$p(t)=\sum_{k=0}^{1}\boldsymbol{P}_k BEN_{k,1}(t)=(1-t)\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{P}_1 \quad t\in[0,1]$$

Bezier曲线的定义

- 二次Bezier曲线（n=2）

$$p(t)=\sum_{k=0}^{2}P_k BEN_{k,n}(t)=(1-t)^2 P_0+2t(1-t)P_1+t^2P_2$$

$$=(P_2-2P_1+P_0)t^2+2(P_1-P_0)t+P_0 \qquad t\in[0,\ 1]$$

Bezier曲线的定义

- 三次Bezier曲线（n=3）

$$p(t)=\sum_{k=0}^{3}P_k BEN_{k,n}(t)$$

$$=BEN_{0,3}(t)P_0+BEN_{1,3}(t)P_1+BEN_{2,3}(t)P_2+BEN_{3,3}(t)P_3$$

$$=(1-t)^3P_0+3t(1-t)^2P_1+3t^2(1-t)P_2+t^3P_3 \qquad t\in[0,1]$$

$$p(t)=\begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\\ P_3\end{bmatrix}=T\cdot M_{be}G_{be} \qquad t\in[0,1]$$

Bezier曲线的定义

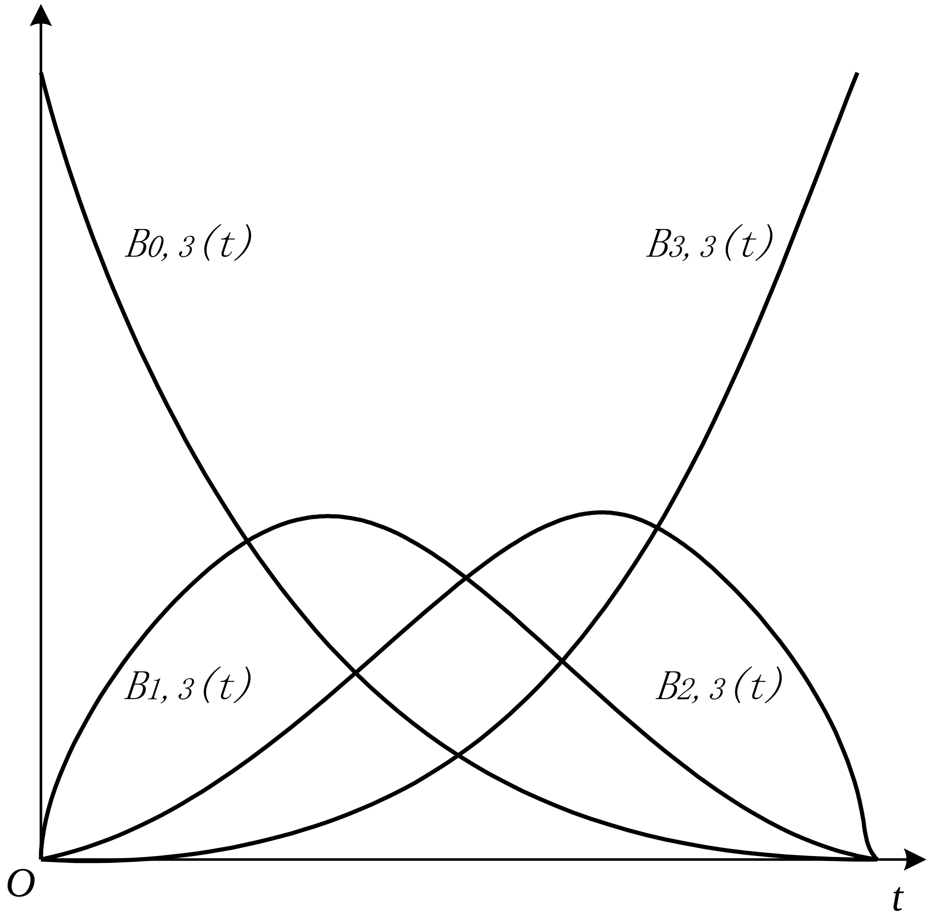


图8.6 三次Bezier曲线的四个Bezier基函数

Bezier曲线的性质

- 端点

$$p(0)=\sum_{k=0}^{n}P_kBEN_{k,n}(0)$$
$$=P_0BEN_{0,n}(0)+P_1BEN_{1,n}(0)+\cdots+P_nBEN_{n,n}(0)$$
$$=P_0$$

$$p(1)=\sum_{k=0}^{n}P_kBEN_{k,n}(1)$$
$$=P_0BEN_{0,n}(1)+P_1BEN_{1,n}(1)+\cdots+P_nBEN_{n,n}(1)$$
$$=P_n$$

Bezier曲线的性质

- 一阶导数

$$p'(0) = n\sum_{k=1}^{n}(P_k - P_{k-1})BEN_{k-1,n-1}(0) = n(P_1 - P_0)$$

$$p'(1) = n\sum_{k=1}^{n}(P_k - P_{k-1})BEN_{k-1,n-1}(0) = n(P_n - P_{n-1})$$

Bezier曲线的性质

- 二阶导数

$$p''(0) = n(n-1)((P_2 - P_1) - (P_1 - P_0))$$

$$p''(1) = n(n-1)((P_{n-2} - P_{n-1}) - (P_{n-1} - P_n))$$

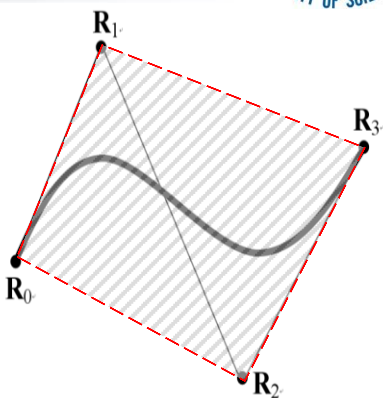
  - Bezier曲线在起始点和终止点处的二阶导数分别取决于最开始和最后的三个控制点。

Bezier曲线的性质

- 对称性

保持控制多边形的顶点位置不变，仅仅把它们的顺序颠倒一下，将下标为k的控制点P_k改为下标为$n-k$的控制点P_{n-k}时，曲线保持不变，只是走向相反而已。

Bezier曲线的性质



- 凸包性

$$BEN_{k,n}(t)=\frac{n!}{k!(n-k)!}t^k(1-t)^{n-k}\geq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n}BEN_{k,n}(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}t^k(1-t)^{n-k}=((1-t)+t)^n\equiv 1$$

- Bezier曲线各点均落在控制多边形各顶点构成的凸包之中。
- Bezier曲线的凸包性保证了曲线随控制点平稳前进而不会振荡。

Bezier曲线的性质

- 几何不变性：Bézier曲线的形状仅与控制多边形有关，与坐标系无关。
- 差变减少性：如果控制多边形是平面的，则平面内任意直线与曲线的交点个数不多于直线与多边形的交点个数。
- 控制顶点变化对曲线形状的影响：第i个控制点的变化Pi，将在曲线上参数为t=i/n的那个点处发生最大的影响。

Bezier曲线的拼接

- 如何保证连接处具有G^1和G^2连续性。
  - 在两段三次Bezier曲线间得到G^1连续性

$$p_1'(1) = 3(P_3 - P_2)$$
$$p_2'(0) = 3(Q_1 - Q_0)$$

为实现G^1连续，则有：

$$p_2'(0) = \alpha \cdot p_1'(1) \Rightarrow Q_1 - Q_0 = \alpha \cdot (P_3 - P_2)$$

Bezier曲线的拼接

- 在两段三次Bezier曲线间得到G^2连续性

$$p_2''(0) = \beta \cdot p_1''(1)$$

$$(Q_0 - 2Q_1 + Q_2) = \beta \cdot (P_1 - 2P_2 + P_3)$$

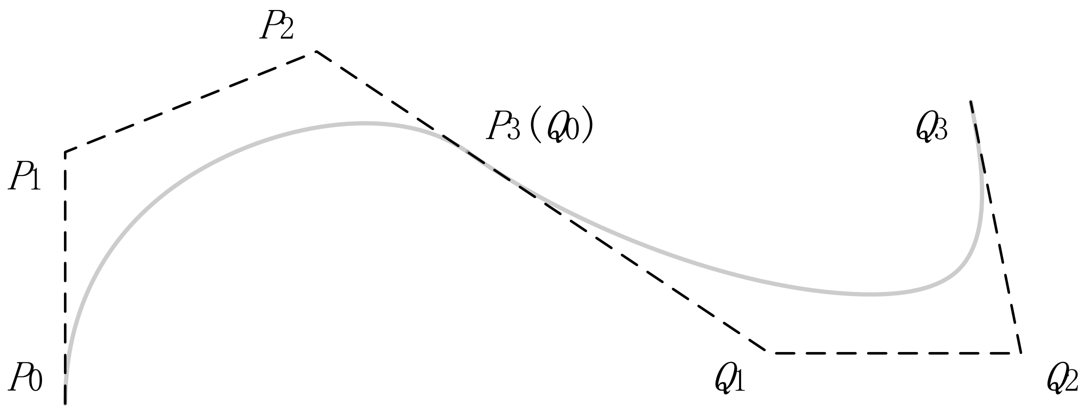


图8.7 两段三次Bezier曲线的连接

Bezier曲线的细分

- 用少量的控制顶点来设计曲线形状，然后用**细分**过程来得到附加的控制点，可以对曲线的某些小段作精确的调整。

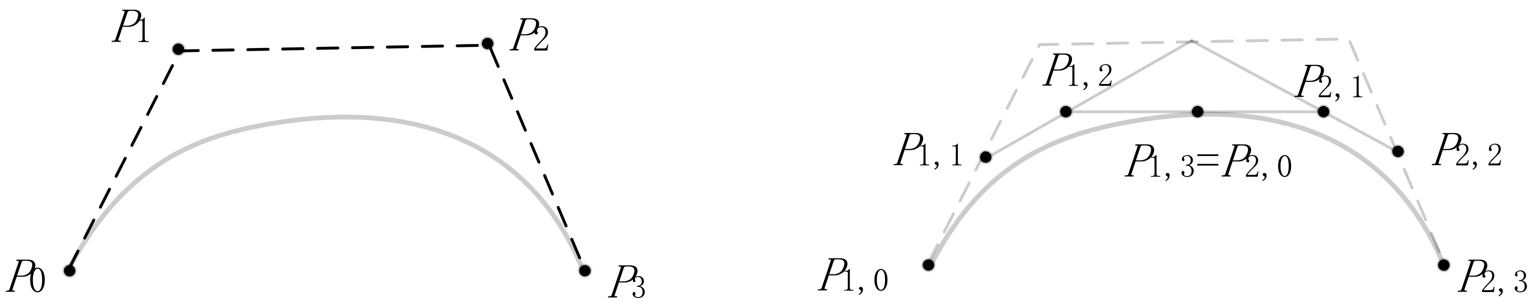


图8.8 四个控制点的Bezier曲线分成两段

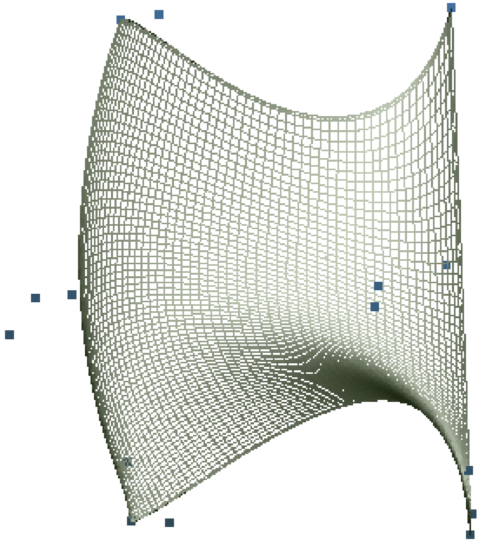
Bezier曲面

- 定义

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{i,j}BEN_{i,m}(u)BEN_{j,n}(v) \quad (u,v)\in[0,1]\times[0,1]$$

$BEN_{i,m}$(u)与$BEN_{j,n}$(v)是Bernstein基函数

Bezier曲面



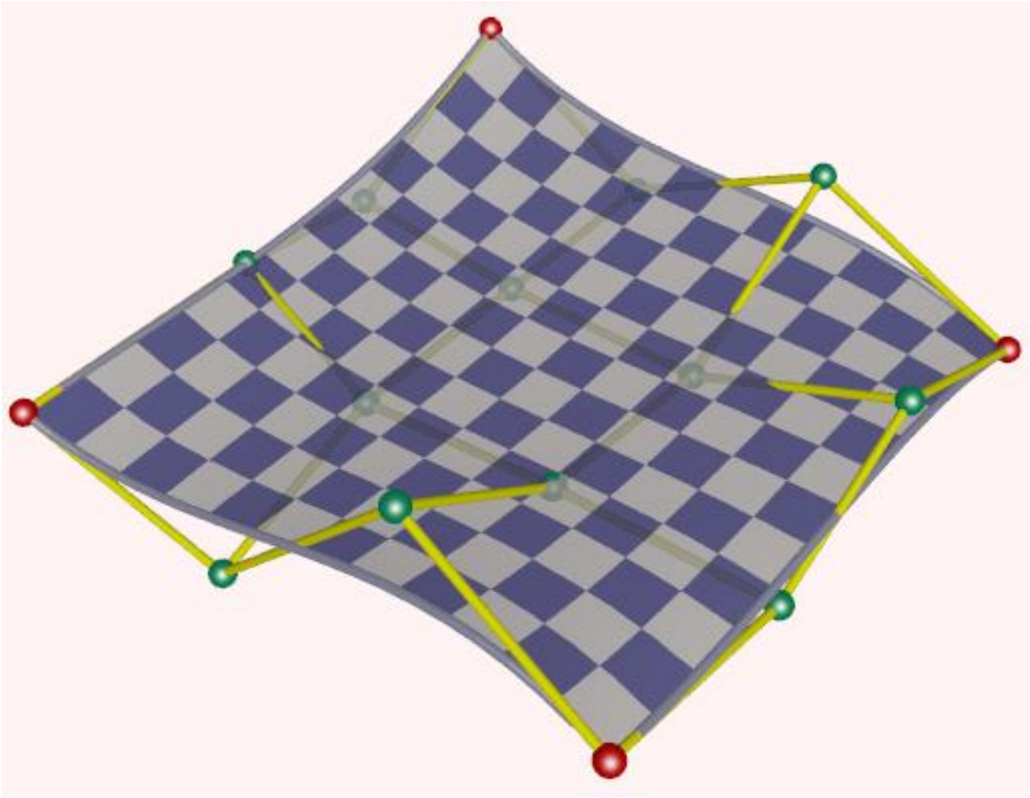


图8.9 Bezier曲面

Bezier曲面

- 双三次Bezier曲面（$m = n = 3$）

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}P_{i,j}BEN_{i,3}(u)BEN_{j,3}(v) \qquad (u,v)\in[0,1]\times[0,1]$$

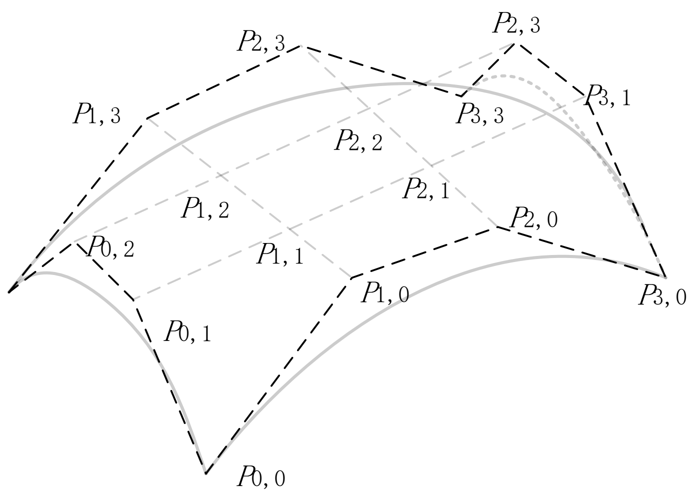


图8.10 双三次Bezier曲面及其控制网格

Bezier曲面的性质

- 控制网格的四个角点正好是Bezier曲面的四个角点。
- 控制网格最外一圈顶点定义Bezier曲面的四条边界，这四条边界均为Bezier曲线。
- 几何不变性、对称性、凸包性等。

Bezier曲面的拼接

- 0阶连续性只要求在边界上匹配控制点；
- 1阶连续性则要求在边界曲线上的任何一点，两个曲面片跨越边界的切线矢量应该共线，而且两切线矢量的长度之比为常数。

Bezier曲面的拼接

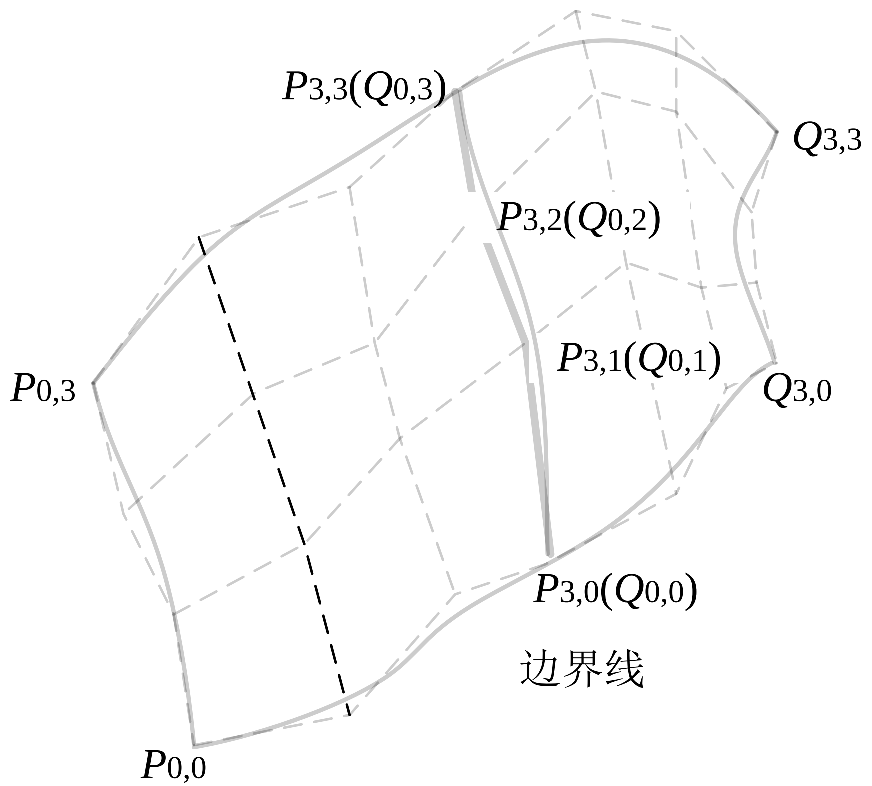


图8.11 Bezier曲面片的拼接

Bezier曲面的不足

- 全局性：当移动一个控制顶点的位置时，整个曲面的形状会发生改变，这对于外形设计是很不方便的。
- 生成复杂外形需要多个Bézier曲面的光滑拼接，十分复杂。

谢谢！

Thank You