第四章 图形变换

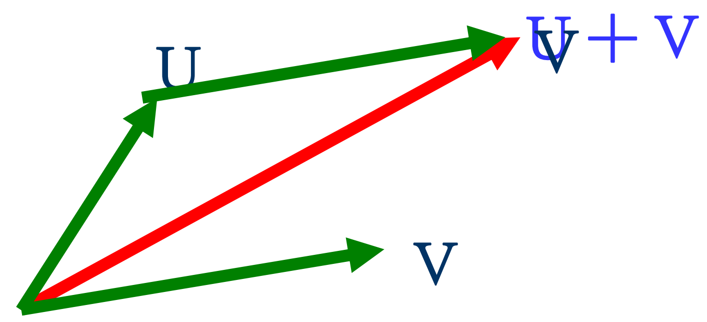
- 数学基础
- 几何变换—图形变换之一
- 坐标变换—图形变换之二
- 几何变换与坐标变换的关系
- 显示变换—图形变换之三
- 裁剪

- **矢量：** 是一有向线段，具有方向和大小两个参数

$$U=\begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix}\qquad V=\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}$$

  - **矢量和** :几何意义?

$$U+V=\begin{bmatrix}u_x+v_x\\u_y+v_y\\u_z+v_z\end{bmatrix}$$



– 矢量的数乘

$$k \bullet U = \begin{bmatrix} ku_x \\ ku_y \\ ku_z \end{bmatrix}$$

– 矢量的点积：几何意义？

$$U \bullet V = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

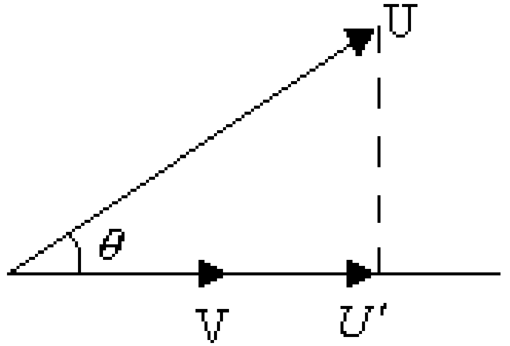
- 性质

$$U \bullet V = V \bullet U$$

$$U \bullet V = 0 \Leftrightarrow U \perp V$$

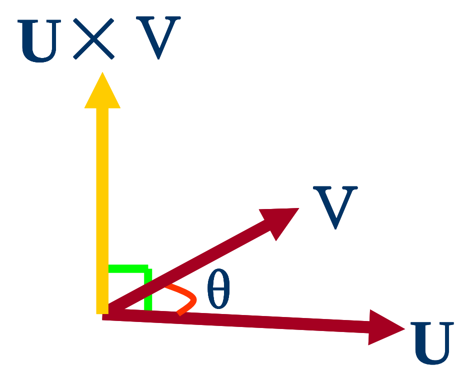
$$U \bullet U = 0 \Leftrightarrow U = 0$$

- 矢量的长度：模 $\|U\| = \sqrt{U \bullet U} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$
  - 单位矢量 $\|V\| = 1$
  - 矢量的夹角 $\cos\theta = \dfrac{U \bullet V}{\|U\| \bullet \|V\|}$



- 矢量的叉积：几何意义？

$$U \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$



矩阵： 由m×n个数按一定位置排列的一个整体，简称m×n矩阵。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

其中，a_{ij}称为矩阵A的第i行第j列元素

矩阵运算

- **加法**：设A，B为两个具有相同行和列元素的矩阵

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

- **数乘**

$$kA = [\ k*a_{ij}] \Big|_{i=1...m,\ j=1,..\ n}$$

- **乘法**：设A为 2 × 3 矩阵，B为 3 × 2 矩阵：$A_{m*n} * B_{n*k} = C_{m*k}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

- **单位矩阵**

在一矩阵中，其主对角线各元素a_{ii}=1,其余皆为0的矩阵称为单位矩阵。n阶单位矩阵通常记作I_n。

$A_{m \times n} = A_{m \times n} \cdot I_n$

- **逆矩阵：是否为方阵？如何求？**

若矩阵A存在$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$，则称$A^{-1}$为A的逆矩阵

- **矩阵的转置**

把矩阵$A=(aij)m\times n$的行和列互换而得到的$n\times m$矩阵称为A的转置矩阵，记作A^T

$(A^T)^T = A$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(aA)^T = aA^T$

$(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

当A为n阶矩阵，且$A=A^T$，则 A是对称矩阵

矩阵运算的基本性质

- 交换律与结合律师

$$A+B=B+A$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

- 数乘的分配律及结合律

$$a(A+B) = aA+aB$$

$$a(A \cdot B) = (aA) \cdot B=A \cdot (aB)$$

$$(a+b)A = aA + bA$$

$$a(bA) = (ab)A$$

- 矩阵乘法的结合律及分配律

$$A(B\cdot C)=(A\cdot B)C$$

$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$$

$$C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$$

- 矩阵的乘法不满足交换律

$$A\cdot B\neq B\cdot A$$

唯一性：若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的.

逆矩阵的求法一：待定系数法

例1: 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求$A$的逆矩阵.

解: 设 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$是 A 的逆矩阵,

则 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 1, \\ 2b + d = 0, \\ -a = 0, \\ -b = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = -1, \\ c = 1, \\ d = 2. \end{cases}$$

又因为

$$\begin{array}{ccc} AB & & BA \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

逆矩阵的求法二：伴随矩阵法

(1) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$，其中 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

其中 A^*为 A 的伴随矩阵，

A_{ij}为行列式 $|A|$中元素 a_{ij}的代数余子式 .

(2) 特别地，对二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

当$|A| = ad - bc \neq 0$时，有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例2： 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}\neq 0,\quad \therefore\ A^{-1}$存在.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,$$

同理可得 $A_{13}=2,\ A_{21}=6,\ A_{22}=-6,\ A_{23}=2,$

$A_{31}=-4,\ A_{32}=5,\ A_{33}=-2,$

得 $$A^*=\begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ -3 & -6 & 5\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix},$$

故

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ -3 & -6 & 5\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -3/2 & -3 & 5/2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

例4： 已知$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$求$A^{-1}$.

解： 因$|A| = 5! \neq 0$, 故A^{-1}存在.

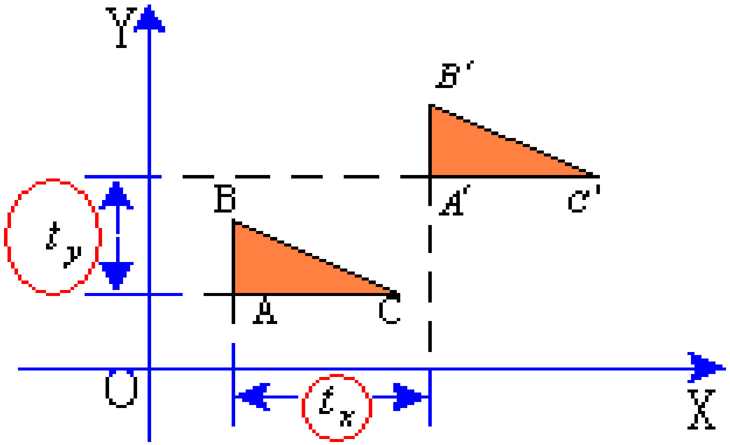
由伴随矩阵法得 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$,

$$
= \frac{1}{5!}\begin{pmatrix} 2\cdot3\cdot4\cdot5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1\cdot3\cdot4\cdot5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdot2\cdot4\cdot5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\cdot2\cdot3\cdot5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\cdot2\cdot3\cdot4 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.
$$

- **平移变换:行方式与列方式**

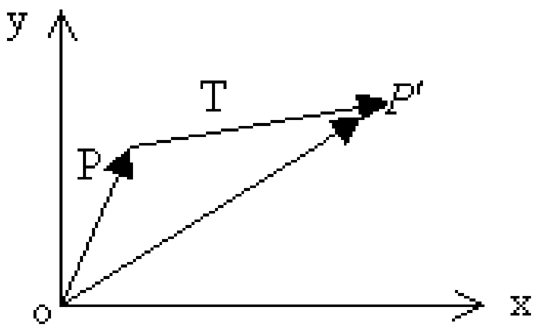
$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$



平移示意图

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

$$P' = P + T$$



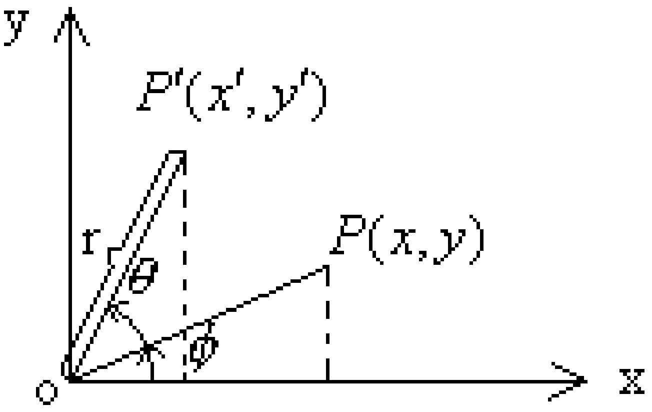
二维基本几何变换（2/3）

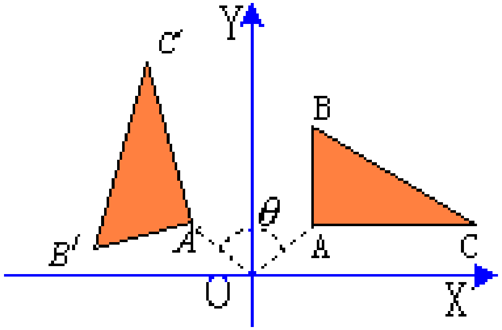
• 旋转变换

– 绕坐标原点旋转角度 θ（逆时针为正，顺时针为负）

$$P' = R \bullet P$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$





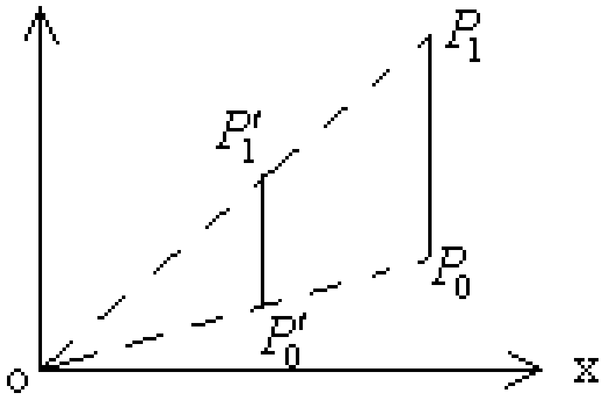
相对原点旋转 θ角

二维基本几何变换（3/3）

- 缩放变换

$$P' = S \bullet P$$

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$



- 以坐标原点为缩放参照点
- 不仅改变了物体的大小和形状，也改变了它离原点的距离

齐次坐标（1/6）

为什么需要齐次坐标?

多个变换作用于多个目标

↓

变换合成

↓

变换合成的问题

↓

引入齐次坐标

↓

变换的表示法统一

$$P' = P + T$$

$$P' = R \bullet P$$

$$P' = S \bullet P$$

齐次坐标（2/6）

- 齐次坐标
  - 定义
    - (x, y) 点对应的齐次坐标为 (x_h, y_h, h)

      $$x_h = hx, y_h = hy, h \neq 0$$

  - (x, y) 点对应的齐次坐标为三维空间的一条直线

$$\begin{cases} x_h = hx \\ y_h = hy \\ z_h = h \end{cases}$$

齐次坐标（3/6）

- 标准齐次坐标(x, y, 1)
- 二维变换的矩阵表示
  - 平移变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \overset{\text{记为}}{=} T(t_x, t_y) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

平移变换演示

$$T(t_x,t_y)^{-1}=T(-t_x,-t_y)$$

齐次坐标（4/6）

-旋转变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \overset{\text{记为}}{=} R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

旋转变换演示

$$R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$$

齐次坐标（5/6）

– 缩放变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \overset{\text{记为}}{=} S(s_x, s_y) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

缩放变换演示

$$S(s_x,s_y)^{-1}=S(1/s_x,1/s_y)$$

齐次坐标（6/6）

使用齐次坐标使得：

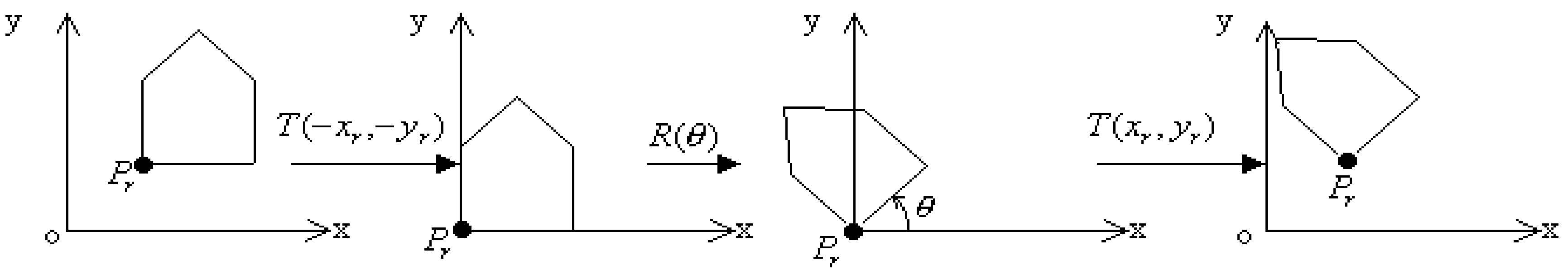
- 变换具有统一表示形式的优点
  - ☞便于变换合成
  - ☞便于硬件实现

二维组合变换（1/6）

- **问题：如何实现复杂变换？基本变换**

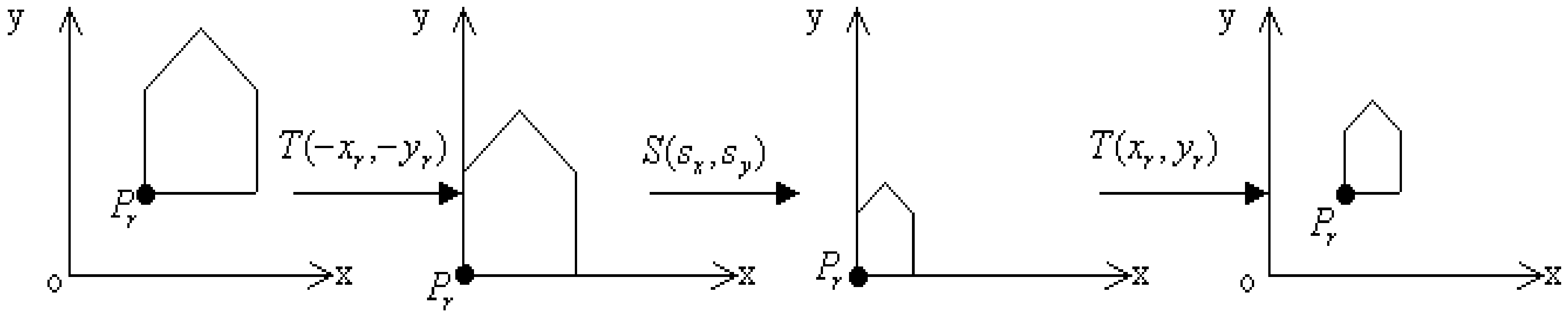
变换分解 → 变换合成

- **关于任意参照点** $P_r(x_r, y_r)$ **的旋转变换**



$$R(x_r, y_r; \theta) = T(x_r, y_r) \bullet R(\theta) \bullet T(-x_r, -y_r)$$

- 关于**任意**参照点 $P_r(x_r, y_r)$ 的缩放变换



$$S(x_r,y_r;s_x,s_y)=T(x_r,y_r)\bullet S(s_x,s_y)\bullet T(-x_r,-y_r)$$

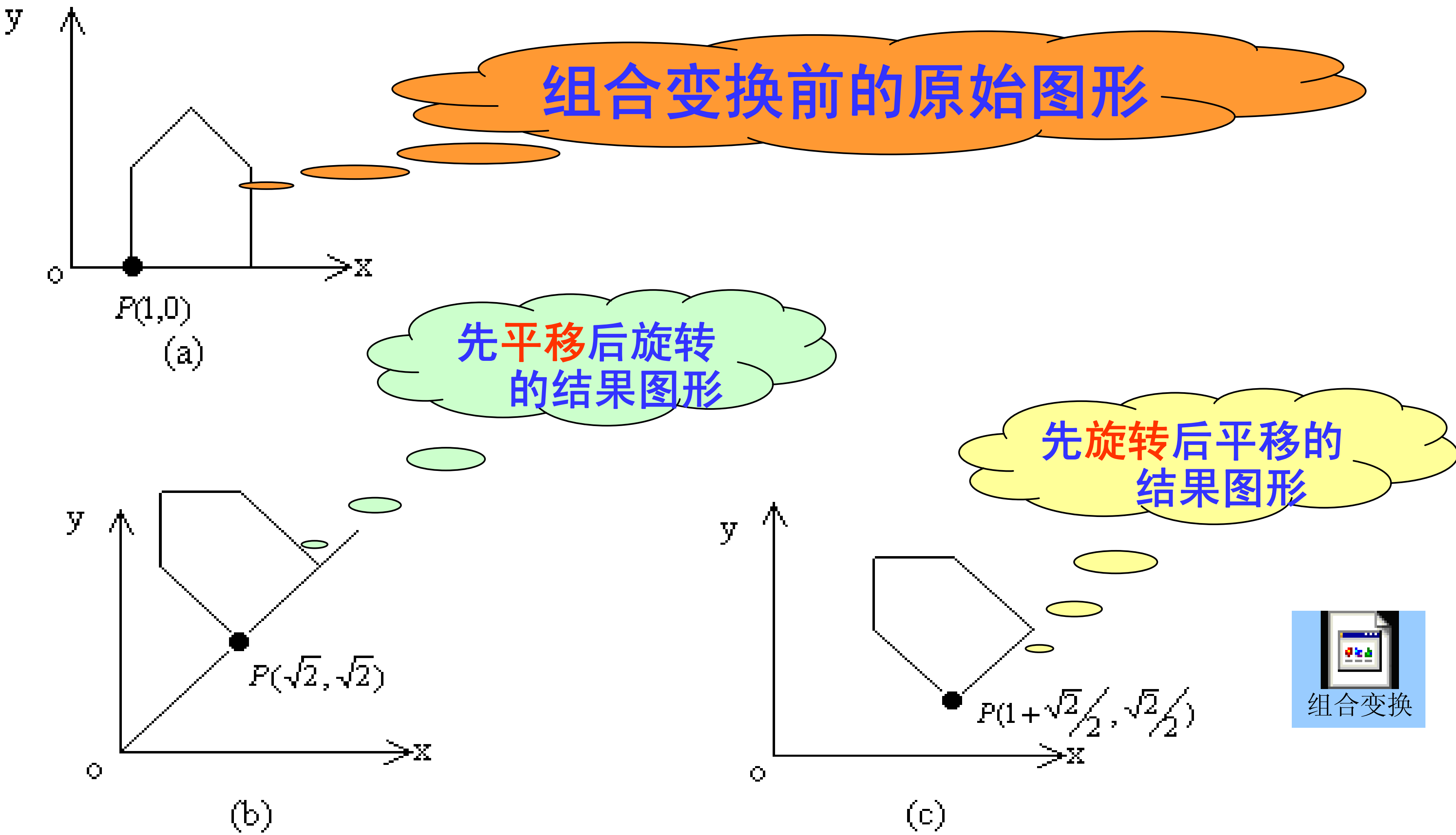
二维组合变换（3/6）

- 变换的结果与变换的顺序有关

  －因为矩阵乘法不可交换

☝举例说明

二维组合变换（6/6）


组合变换前的原始图形
y
o
x
P(1,0)
(a)
先平移后旋转
的结果图形
y
o
x
$P(\sqrt{2},\sqrt{2})$
(b)
先旋转后平移的
结果图形
y
o
x
$P(1+\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$
(c)
组合变换

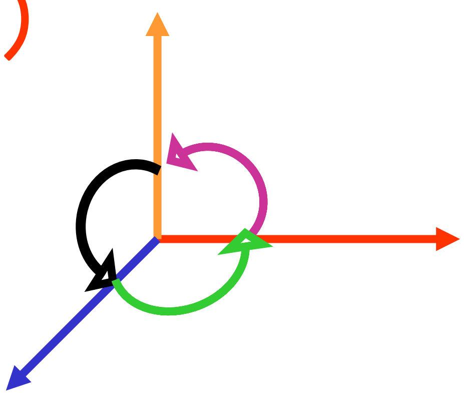
三维几何变换（1/4）

- 三维齐次坐标：不唯一！
  - (x, y, z) 点对应的齐次坐标为

$$(x_h, y_h, z_h, h)$$

$$x_h = hx, y_h = hy, z_h = hz, h \neq 0$$

  - 标准齐次坐标 (x, y, z, 1)
- 右手坐标系：正方向的判定？



三维几何变换（2 / 4）

- 平移变换

$$T(t_x,t_y,t_z)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & t_x\\ 0 & 1 & 0 & t_y\\ 0 & 0 & 1 & t_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 缩放变换

$$S(s_x,s_y,s_z)=\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0 & 0\\ 0 & 0 & s_z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维几何变换（3 / 4）

- **旋转变换：记忆？**
  - 绕x轴

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

  - 绕y轴

$$R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

三维几何变换（4/4）

– 绕z轴

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

旋转角度正向判断：p79

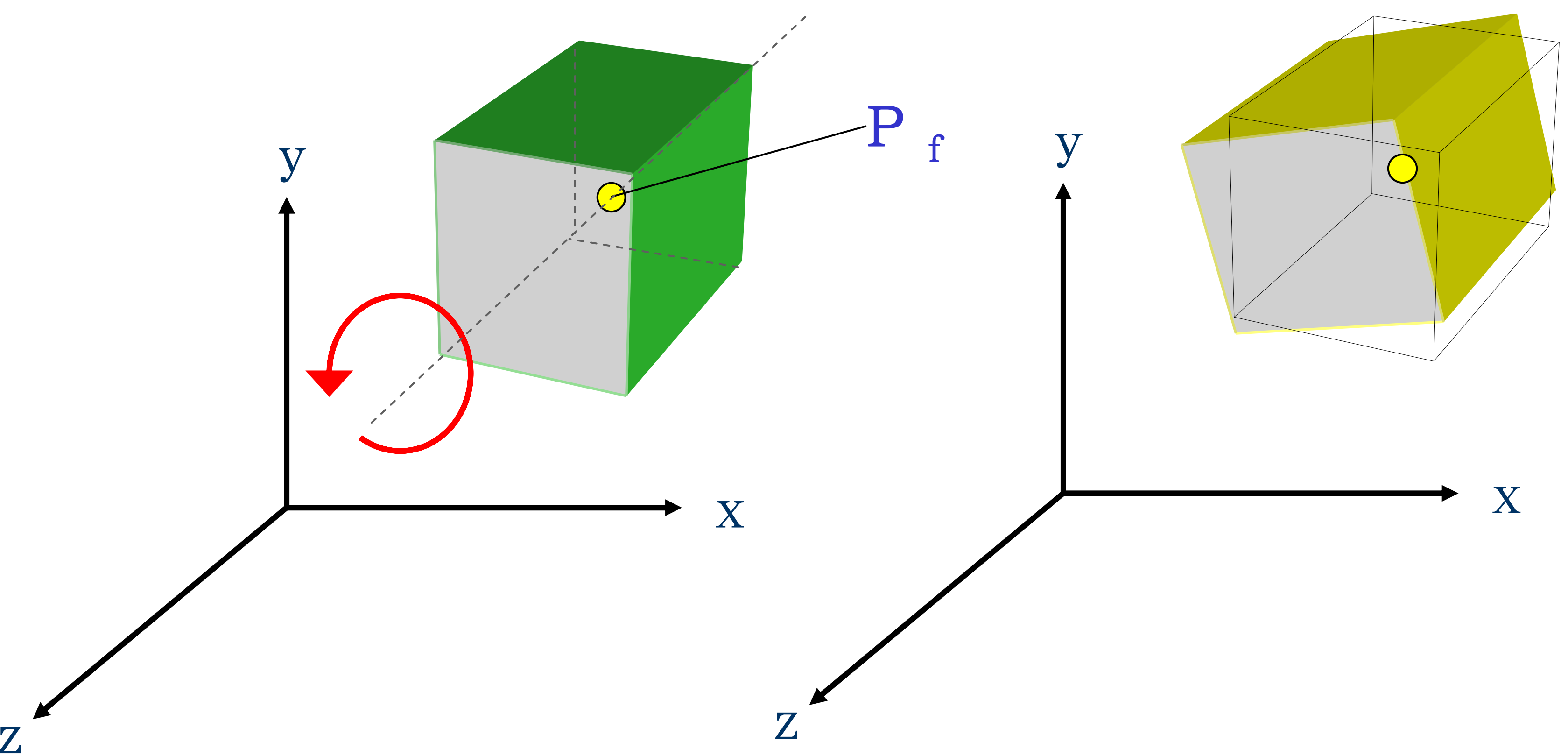
沿坐标轴正向往座标原点看过去，逆时针旋转为正。

逆矩阵？？

- 平移矩阵：$T(x,y,z)^{-1}=T(-x,-y,-z)$
- 缩放矩阵：$S(s_x,s_y,s_z)^{-1}=S(1/s_x,1/s_y,1/s_z)$
- 旋转矩阵：$R(\alpha,\beta,\gamma)^{-1}=R(-\alpha,-\beta,-\gamma)$
- 非常简便，易记！！

组合变换举例

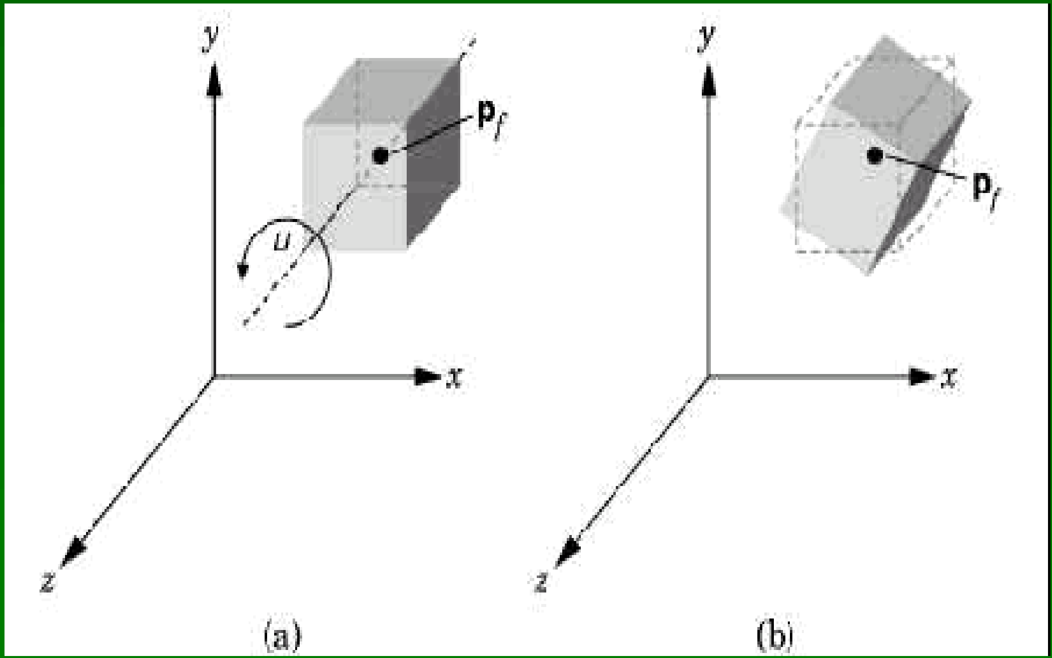
相对于固定点P (xf, yf, zf) 的旋转变换



组合变换举例

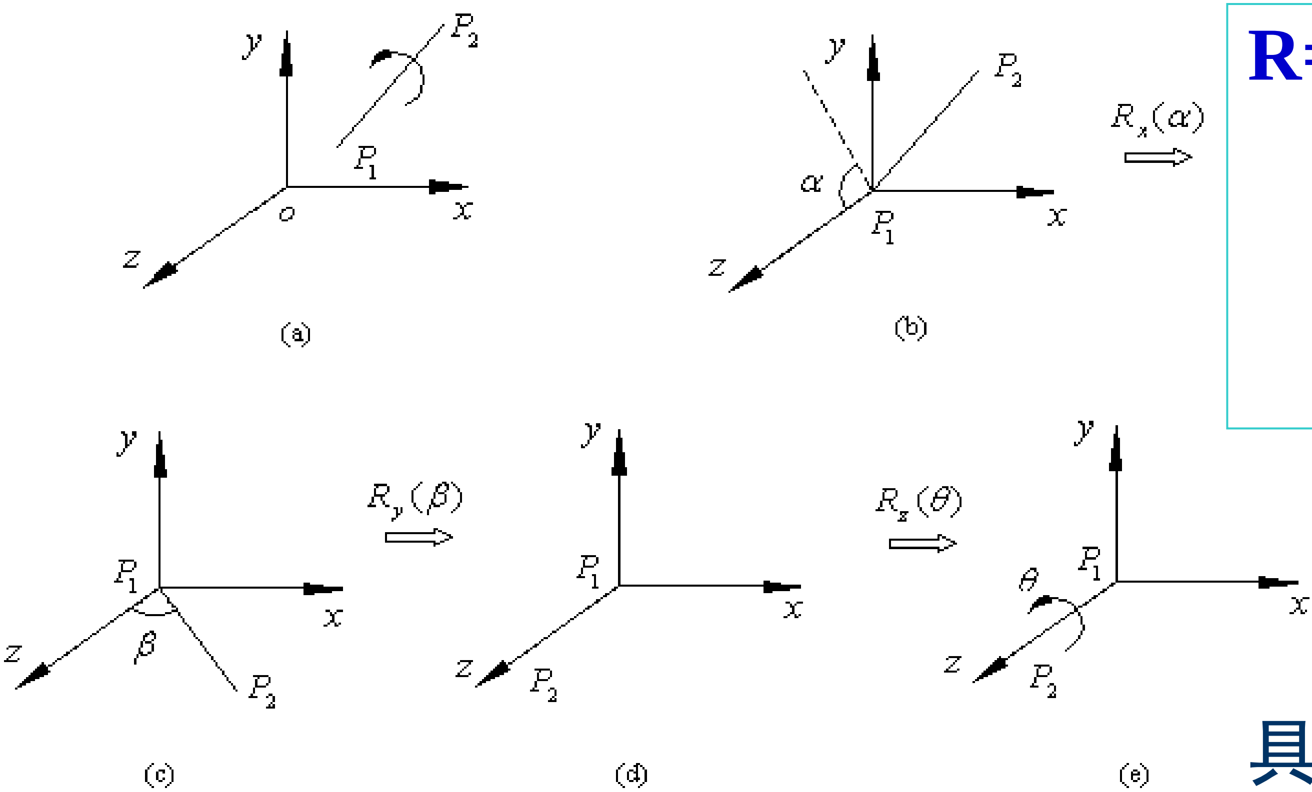
相对于固定点P(xf, yf, zf)的旋转变换

$$M = T(p_f)\, R_z(\theta)\, T(-p_f) = \ldots$$



组合变换举例

绕任意轴旋转 θ：正—主—逆变换



$R=T(t_x,t_y,t_z).R(\alpha).R(\beta).R(\theta).R(\beta)^{-1}.R(\alpha)^{-1}.T(t_x,t_y,t_z)^{-1}$

矩阵顺序？

具体计算过程？

坐标变换

- 什么是坐标变换？
  - 将图形从一个坐标系中变换到另一个坐标系中
  - 建立坐标系之间的变换关系：矩阵
- 特点？
  - 坐标变换是在两个坐标系之间进行
  - 图形是静止的，坐标系是变动的
  - 简单问题用几何变换，复杂问题用坐标变换。

- **坐标的定义**

若 ε_1， $\varepsilon_2 \cdots\cdots \varepsilon_n$是n维线性空间V的一组基， α 是V中的任一向量，若

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots\cdots + x_n\varepsilon_n,$$

记 $X = [x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n]^T$ ， 向量 α 可以写成：

$$\alpha = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_n] \cdot X$$

∴称X是向量 α 在基 ε_1， $\varepsilon_2 \cdots\cdots \varepsilon_n$下的坐标

坐标系和坐标

- 在三维空间给定一个点P_0和三个线性无关的矢量v_1、v_2、v_3
- 则，空间中任何一个点P可以表示为：

$P = P_0 + a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$，($a_1a_2a_3$为实数)

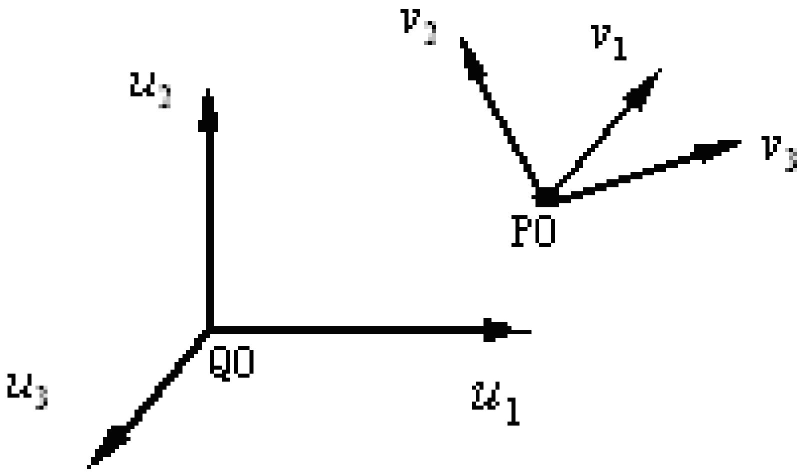
称点P的坐标为（a_1，a_2，a_3）

☻写成矩阵形式为：

$P = P_0 +$（a_1，a_2，a_3）$(v_1, v_2, v_3)^T$

两个坐标系之间的关系

- 已知坐标系Ⅰ： 原点Q_0，
  坐标轴（即基）u_1, u_2, u_3
- 已知坐标系Ⅱ： 原点P_0，
  坐标轴（即基）v_1, v_2, v_3



两个坐标系之间的关系

两坐标系间可以表示成如下的关系式：

$$u_1 = \gamma_{11} v_1 + \gamma_{12} v_2 + \gamma_{13} v_3$$

$$u_2 = \gamma_{21} v_1 + \gamma_{22} v_2 + \gamma_{23} v_3$$

$$u_3 = \gamma_{31} v_1 + \gamma_{32} v_2 + \gamma_{33} v_3$$

写成矩阵表示形式：

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

那么由坐标系II到坐标系I的变换矩阵为：

$$M = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

坐标系之间的变换

- 已知
  - 坐标系I:原点Q_0，坐标轴 $[u_1, u_2, u_3]$
  - 坐标系II:原点P_0，坐标轴$[v_1, v_2, v_3]$
  - Q_0在坐标系II的坐标为：$[q_1, q_2, q_3]^T$
- 写成矩阵形式

$$Q_0=P_0+[v_1, v_2, v_3][q_1, q_2, q_3]^T$$

$$=P_0+[u_1, u_2, u_3]\cdot M^{-1}\cdot[q_1, q_2, q_3]^T$$

坐标系之间的变换

- 对于空间中的任一个点D，如果已知D点在坐标系II中的坐标为$[d_1, d_2, d_3]^T$

$$D = P_0 + [v_1, v_2, v_3][d_1, d_2, d_3]^T$$

$$= Q_0 - [v_1, v_2, v_3]\cdot[q_1, q_2, q_3]^T$$

$$+ [v_1, v_2, v_3]\cdot[d_1, d_2, d_3]^T$$

$$= Q_0 + [u_1, u_2, u_3]\cdot M^{-1}\cdot([d_1, d_2, d_3]^T - [q_1, q_2, q_3]^T)$$

∴D点在坐标系I中的坐标为

$$M^{-1}\cdot([d_1, d_2, d_3]^T - [q_1, q_2, q_3]^T)$$

三维空间中给定一个点P_0和三个线性无关的矢量v_1, v_2, v_3, 则空间中任何一个点P的矩阵可以表示为：

$$P = [v_1, v_2, v_3, P_0] \cdot [a_1, a_2, a_3, 1]^T$$

则P的齐次坐标为：

$$[a_1, a_2, a_3, 1]^T$$

- 已知坐标系Ⅰ： 原点Q_0，

  坐标轴(即基)u_1, u_2, u_3

已知坐标系Ⅱ： 原点P_0，

坐标轴(即基)v_1, v_2, v_3

两坐标系间可以表示成如下的关系式：

$$\boldsymbol{u}_1 = \gamma_{11}\boldsymbol{v}_1 + \gamma_{12}\boldsymbol{v}_2 + \gamma_{13}\boldsymbol{v}_3$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \gamma_{21}\boldsymbol{v}_1 + \gamma_{22}\boldsymbol{v}_2 + \gamma_{23}\boldsymbol{v}_3$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \gamma_{31}\boldsymbol{v}_1 + \gamma_{32}\boldsymbol{v}_2 + \gamma_{33}\boldsymbol{v}_3$$

$$\boldsymbol{Q}_0 = \gamma_{41}\boldsymbol{v}_1 + \gamma_{42}\boldsymbol{v}_2 + \gamma_{43}\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{P}_0$$

两坐标系间可以表示成如下的关系式：

$$u_1 = \gamma_{11} v_1 + \gamma_{12} v_2 + \gamma_{13} v_3$$

$$u_2 = \gamma_{21} v_1 + \gamma_{22} v_2 + \gamma_{23} v_3$$

$$u_3 = \gamma_{31} v_1 + \gamma_{32} v_2 + \gamma_{33} v_3$$

$$Q_0 = \gamma_{41} v_1 + \gamma_{42} v_2 + \gamma_{43} v_3 + P_0$$

矩阵表示形式为：

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & P_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} & \gamma_{41} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} & \gamma_{42} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} & \gamma_{43} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

两坐标系间的齐次坐标表示

矩阵表示形式为：

$$[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad Q_0] = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad P_0] \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} & \gamma_{41} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} & \gamma_{42} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} & \gamma_{43} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

齐次坐标下的两坐标系的变换矩阵为：

$$M_{齐} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} & \gamma_{41} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} & \gamma_{42} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} & \gamma_{43} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

两坐标系之间关系矩阵表示形式为：

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & P_0 \end{bmatrix} \cdot M_{齐}$$

对于空间中的任一个点D，如果已知D点在坐标系II中的坐标为$[d_1, d_2, d_3, 1]^T$

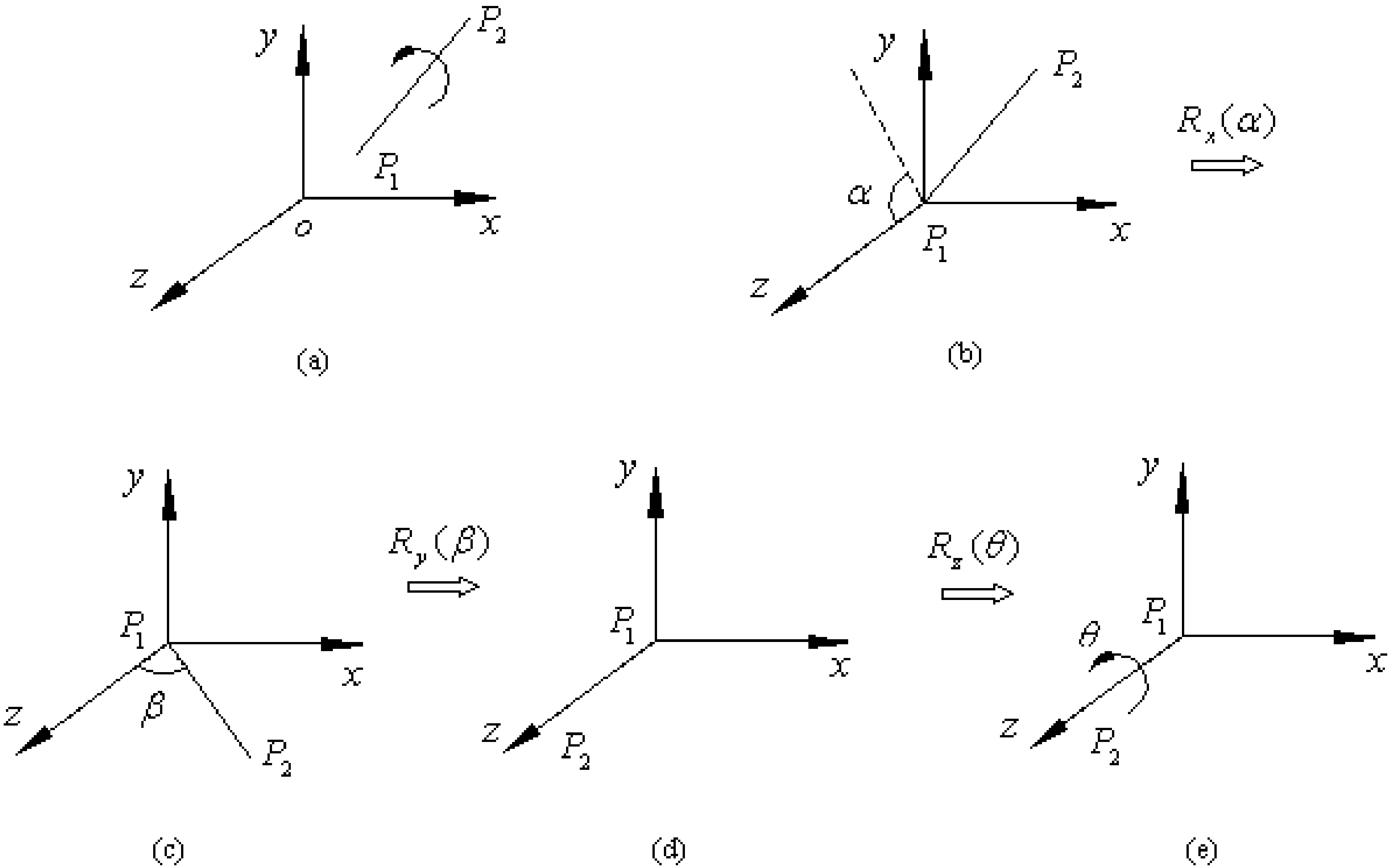
$D = [v_1, v_2, v_3, p_0] \cdot [d_1,d_2,d_3,1]^T$

$= [u_1, u_2, u_3, Q_0] \cdot M_{齐}^{-1} \cdot [d_1,d_2,d_3,1]^T$

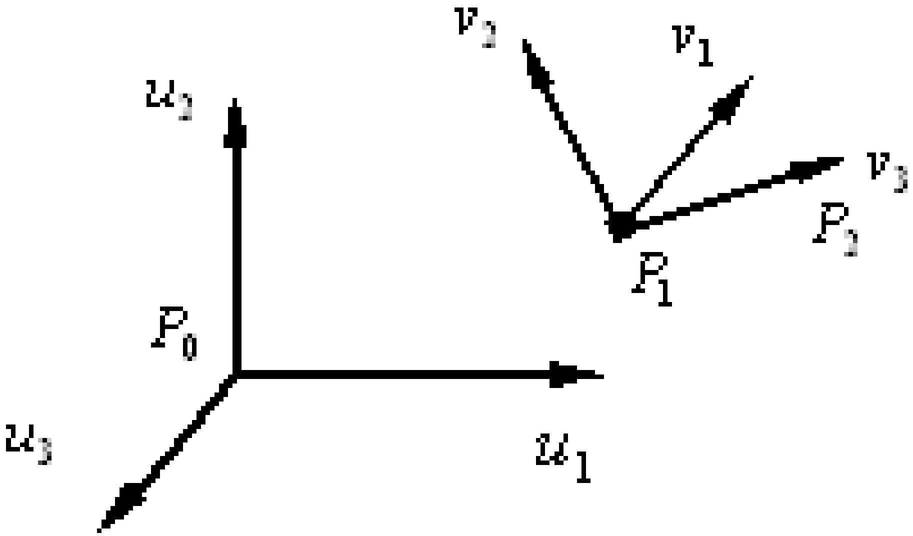
∴D点在坐标系I中的坐标为

$M_{齐}^{-1} \cdot [d_1, d_2, d_3, 1]^T$

几何变换和坐标变换的关系



用坐标变换的方法实现求解绕任意轴旋转的问题



几何变换与坐标变换的关系

- 将三角形

A(250,200),B(100,100),C(300,200)绕

P(200,100)点旋转45°，求旋转后的三角

形的坐标并绘出先后2个三角形。——上机

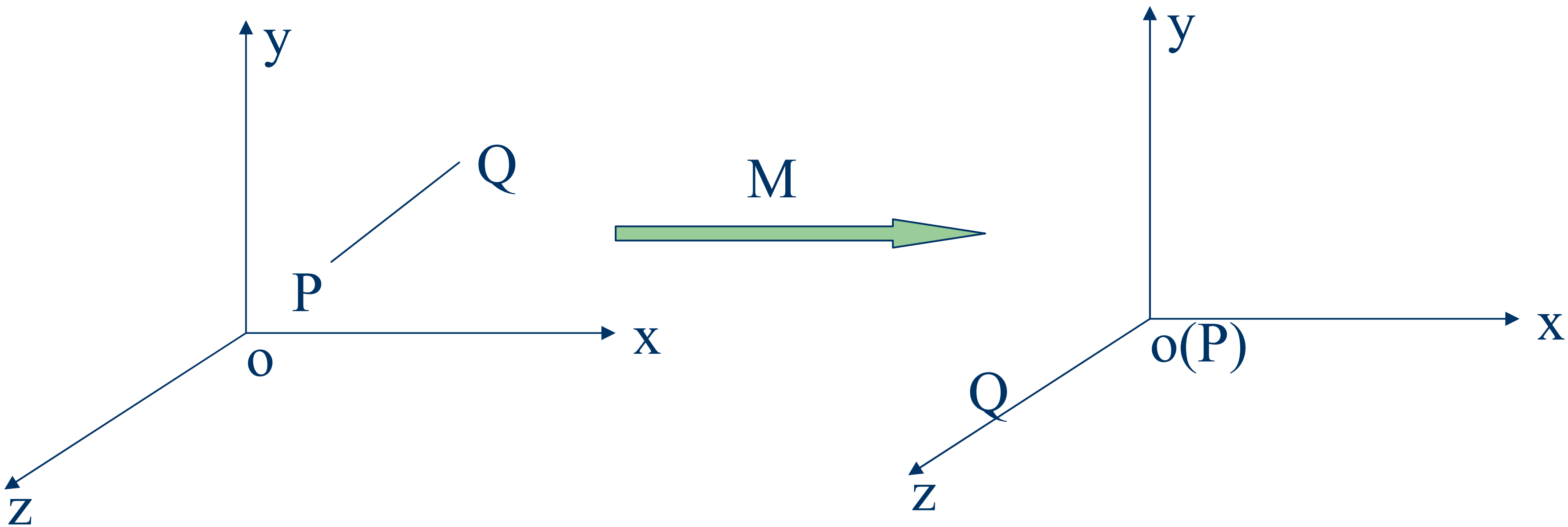
实验5—5月16日

- 在三维坐标系oxyz中，坐标系ōuvn的原点为ō(0, 1, 0), u, v, n轴的方向矢量分别为(1, 0, 1), (-1, 0, 1), (0, -1, 0), P点在oxyz中的坐标为(-1, 2, $\sqrt{2}$),

1）求坐标系oxyz到ōuvn的变换矩阵M

2）求P点在坐标系ōuvn中的坐标

在坐标系oxyz中，求一个变换将P(1,1,1)Q(2,2,2)变换到z轴上：P在坐标原点，Q在z轴正半轴。



三维图形的显示问题

1. 在二维屏幕上如何显示三维物体？

- 显示器屏幕、绘图纸等是二维的
- 显示对象是三维的
- 解决方法——投影
- 三维显示设备正在研制中

2. 三维图形的显示流程

几何变换 → 投影变换 → 对窗口裁剪 → 窗口到视区变换 → 显示

几个概念

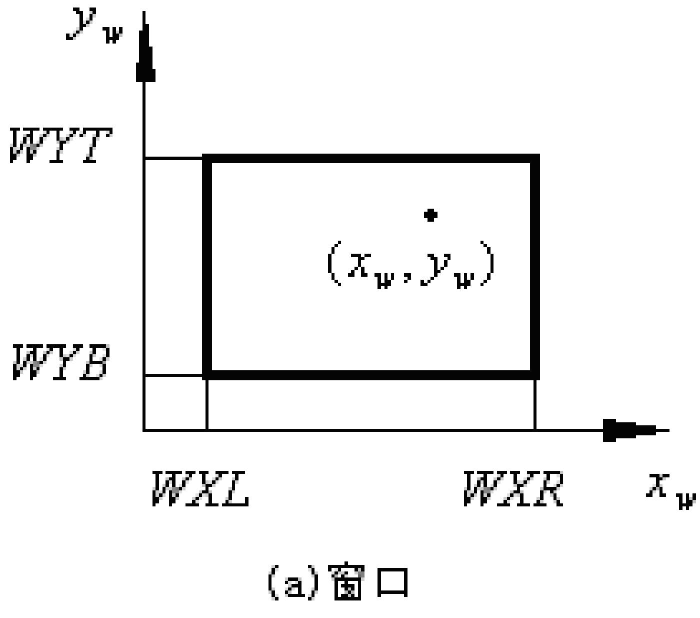
- **窗口：**

　　在投影面上定义的一个矩形区域，只有在窗口内的图形才显示，而窗口外的部分则不显示。

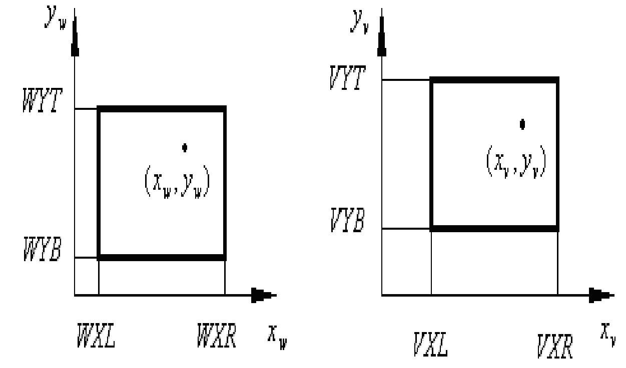
- **视区：**

　　在屏幕上定义的一个矩形区域。

窗口到视区的变换



窗口到视区的变换



(a)窗口　(b) 视口

- 将窗口内的点映射到视区内的点，应该满足如下关系式：

$$\frac{x_v - VXL}{VXR - VXL} = \frac{x_w - WXL}{WXR - WXL}$$

$$\frac{y_v - VYB}{VYT - VYB} = \frac{y_w - WYB}{WYT - WYB}$$

- 由此可得：

$$x_v = VXL + (x_w - WXL) \cdot s_x$$

$$y_v = VYB + (y_w - WYB) \cdot s_y$$

- 其中：

$$s_x = \frac{VXR - VXL}{WXR - WXL} \qquad s_y = \frac{VYT - VYB}{WYT - WYB}$$

窗口到视区的变换，变换过程可以按以下步骤进行

- 将窗口左下角点平移到窗口所在坐标系的原点，变换为T1(-WXL,-WYB)
- 进行缩放变换，使窗口的大小与视区相等，变换为S(Sx,Sy)
- 平移使窗口与视区重合，变换为T2(VXL,VYB)

矩阵形式为：

$$T_{窗视} = T_2 \cdot S \cdot T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & VXL \\ 0 & 1 & VYB \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -WXL \\ 0 & 1 & -WYB \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & -WXL \cdot s_x + VXL \\ 0 & s_y & -WYB \cdot s_y + VYB \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & -WXL \cdot s_x + VXL \\ 0 & s_y & -WYB \cdot s_y + VYB \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

投影变换—投影及其分类

–投影

- 将n维的点变换成小于n维的点
- 将3维的点变换成2维的点

–投影线

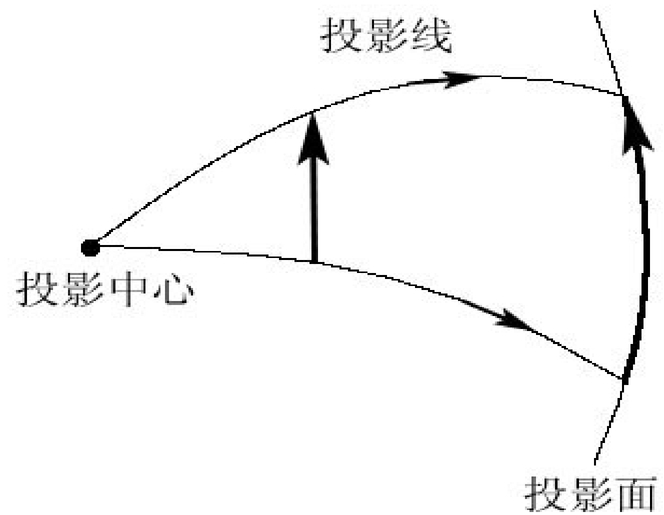
- 从投影中心向物体上各点发出的射线
- 直线—光线
- 曲线—喷绘

–平面几何投影

- 投影面是平面
- 投影线为直线

–投影变换

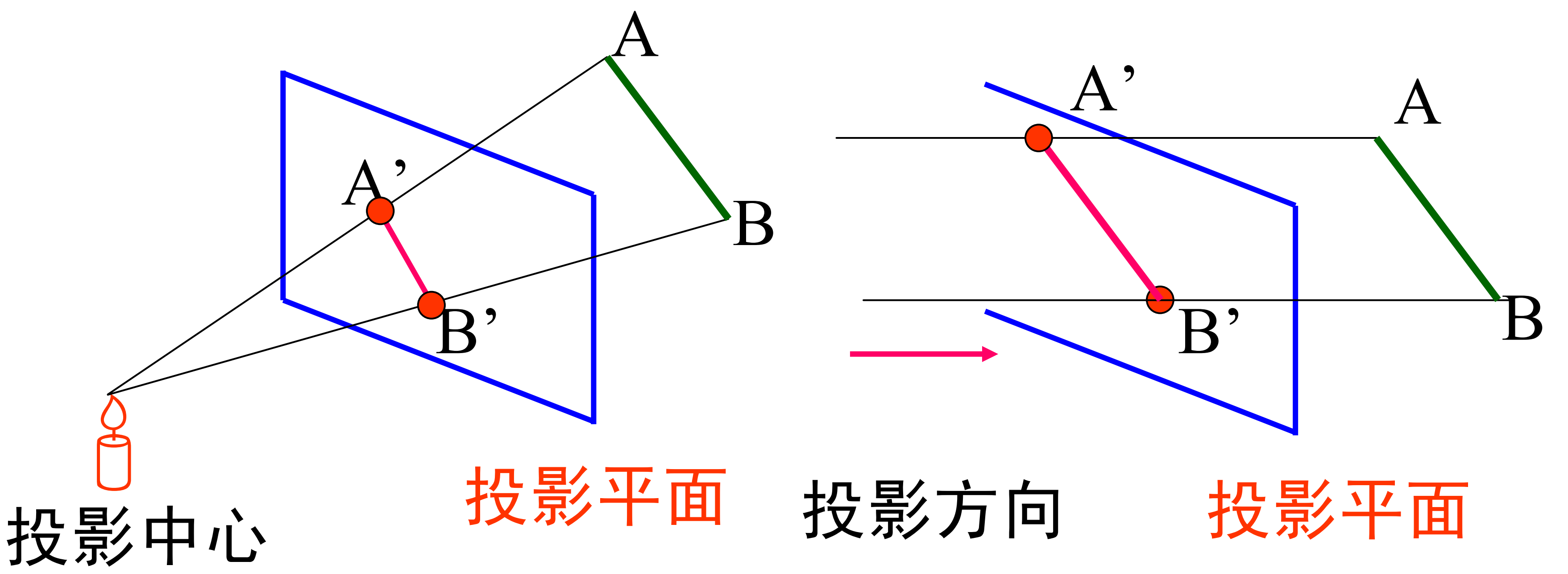
- 投影过程
- 投影的数学表示



一投影分类

透视投影：投影中心与投影平面之间的距离为有限

平行投影：投影中心与投影平面之间的距离为无限



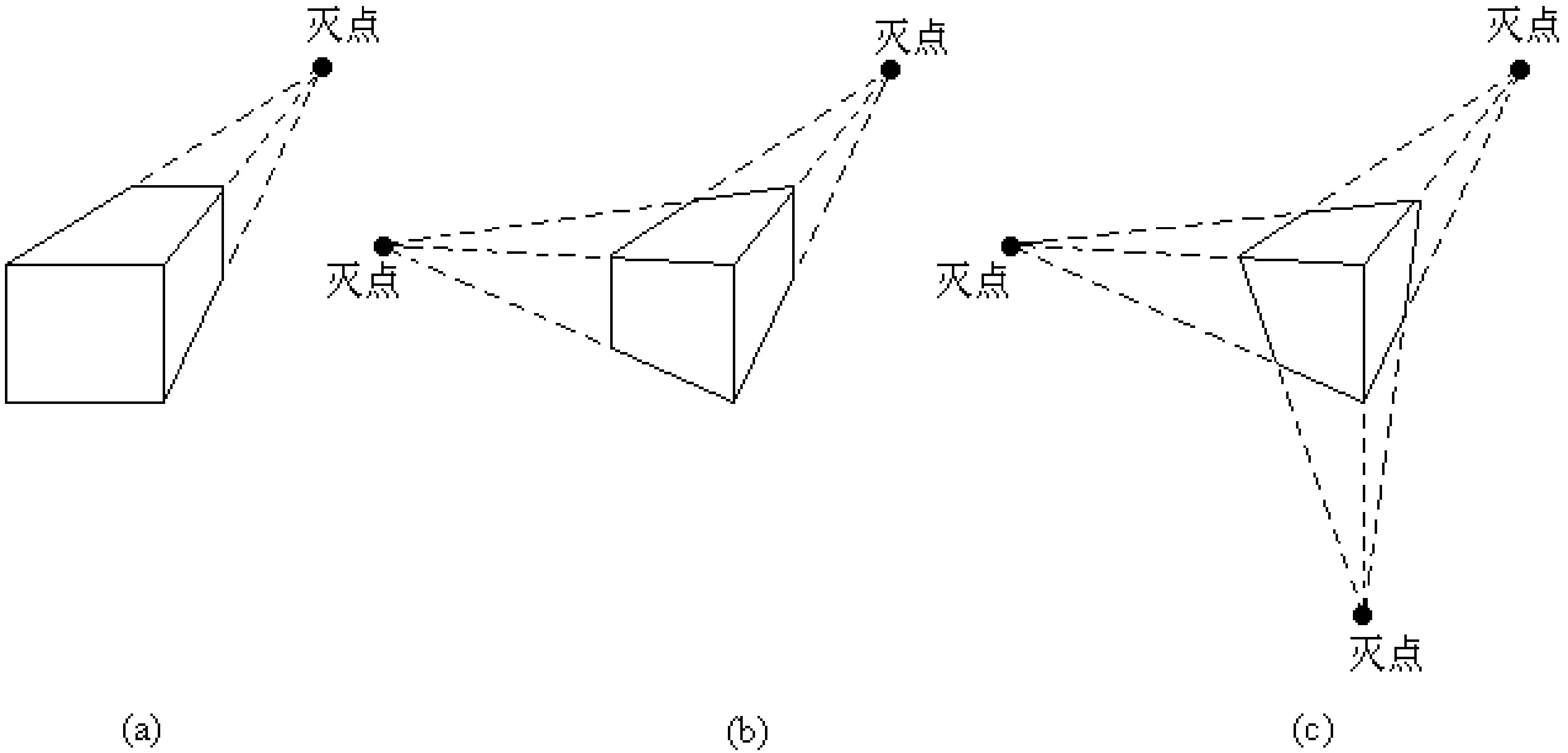
– 透视投影

- 投影中心与投影平面之间的距离为有限
- 参数：投影中心的位置
- 例子：室内白炽灯的投影，视觉系统
- 灭点：不平行于投影平面的平行线，经过透视投影之后收敛于一点，称为灭点.

灭点的个数?

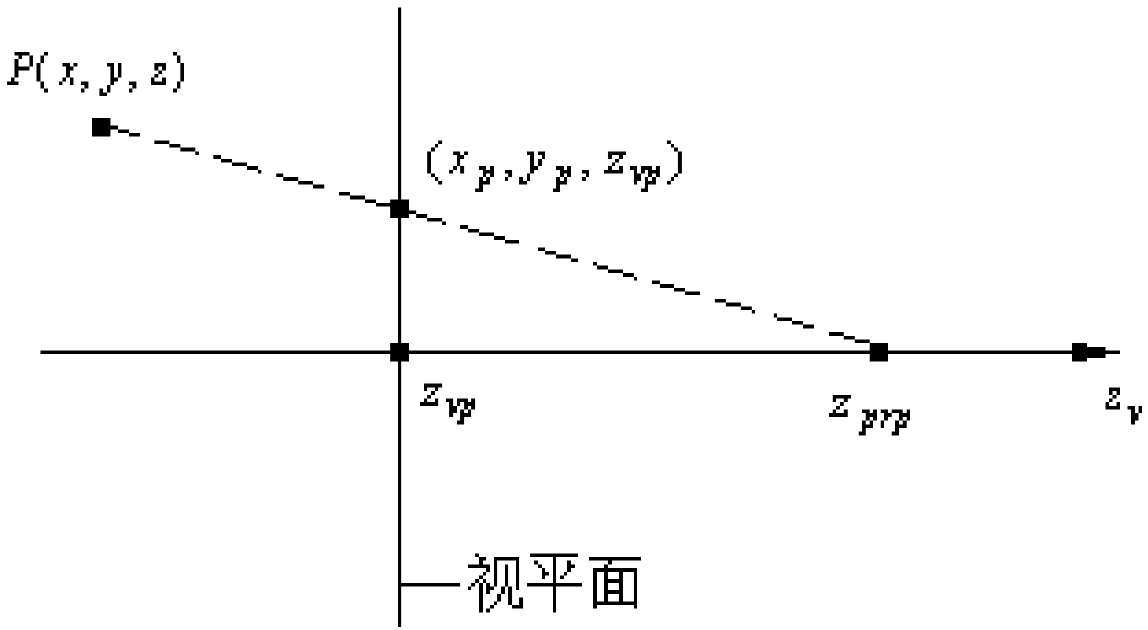
- 主灭点:平行于坐标轴的平行线的灭点。

主灭点的个数由什么决定?


灭点
灭点
灭点
灭点
灭点
灭点
(a)
(b)
(c)

投影变换—透视变换矩阵

空间任意一点的透视投影是投影中心与空间点构成的投影线与投影平面的交点。假设投影中心在Zv轴上的Zprp处，视平面与Zv轴垂直并且交在Zvp处，如图



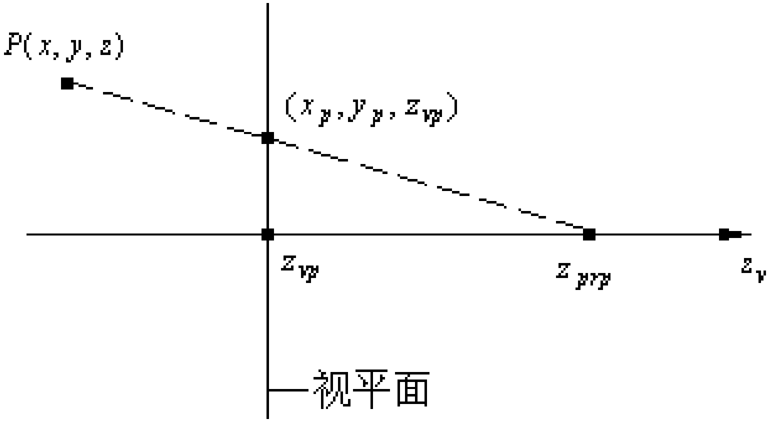
透视投影线上任一点坐标的参数形式

$$x' = x - xu$$

$$y' = y - yu$$

$$z' = z - (z - z_{prp})u$$

$$0 \le u \le 1$$



推导过程见教材P90，91页

令d=Zprp-Zvp=Zprp，透视投影矩阵变为

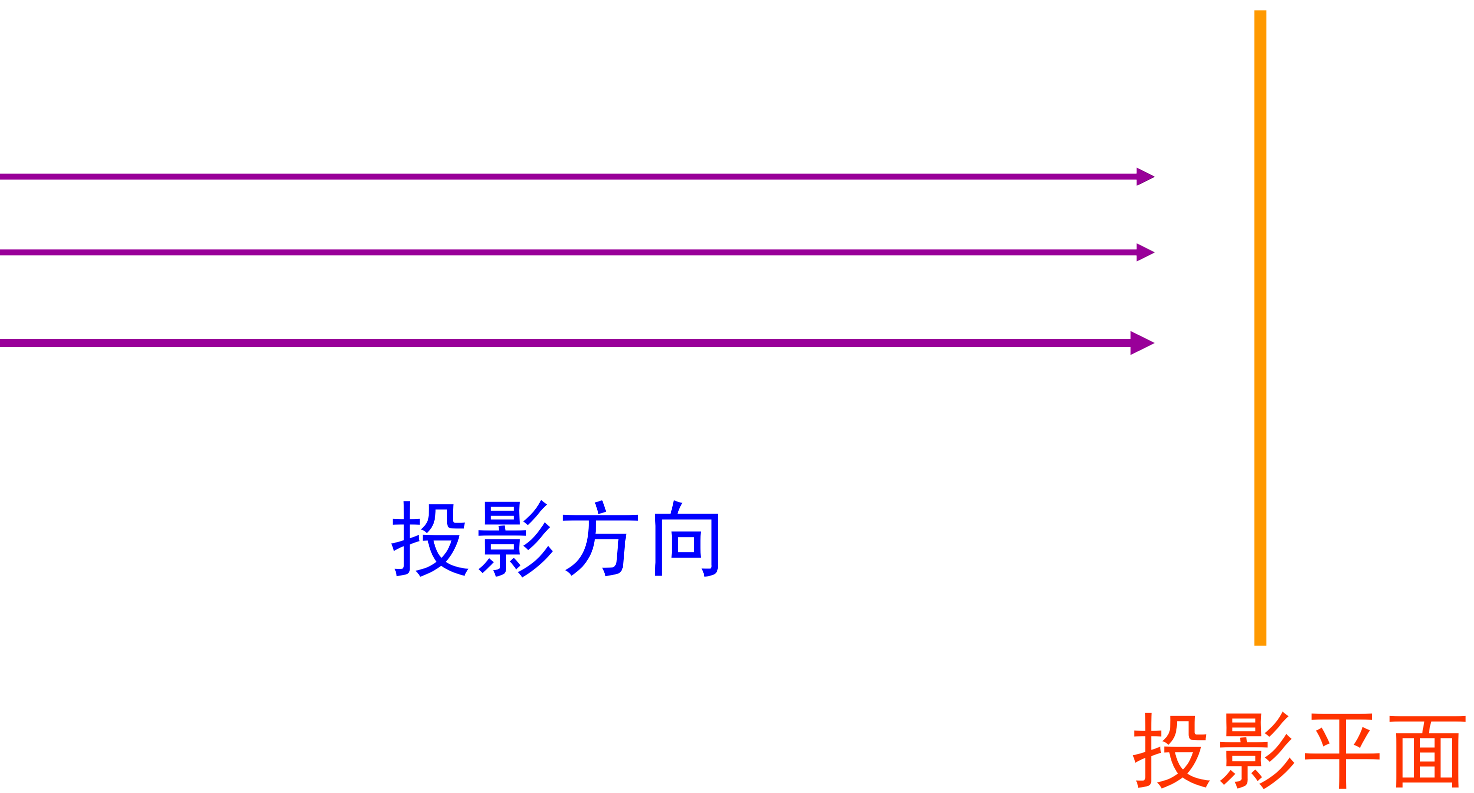
$$M_{透视}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1/d&1\end{bmatrix}$$

作用是将三维物体变换成其二维透视投影

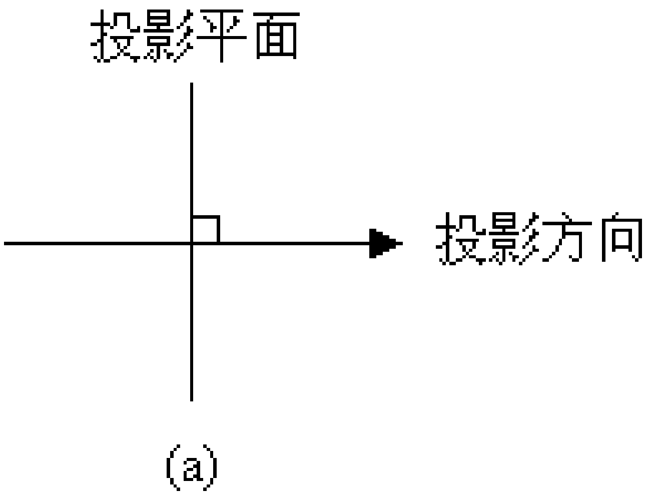
$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cdot z_{prp}/(z_{prp}-z)\\y\cdot z_{prp}/(z_{prp}-z)\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\0\\(z_{prp}-z)/z_{prp}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1/z_{prp}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}$$

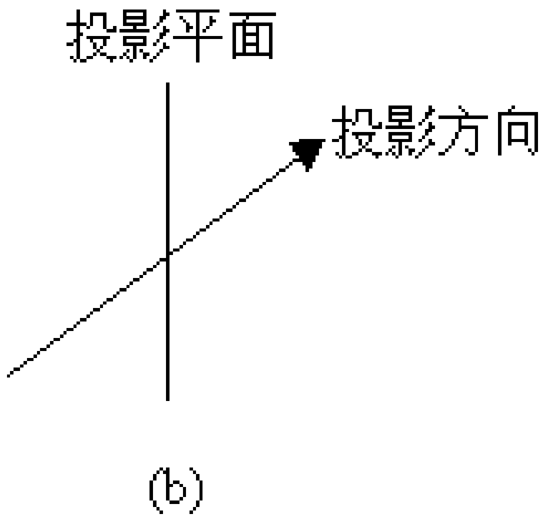
– 平行投影

- 投影中心与投影平面之间的距离为无限



- 正投影与斜投影

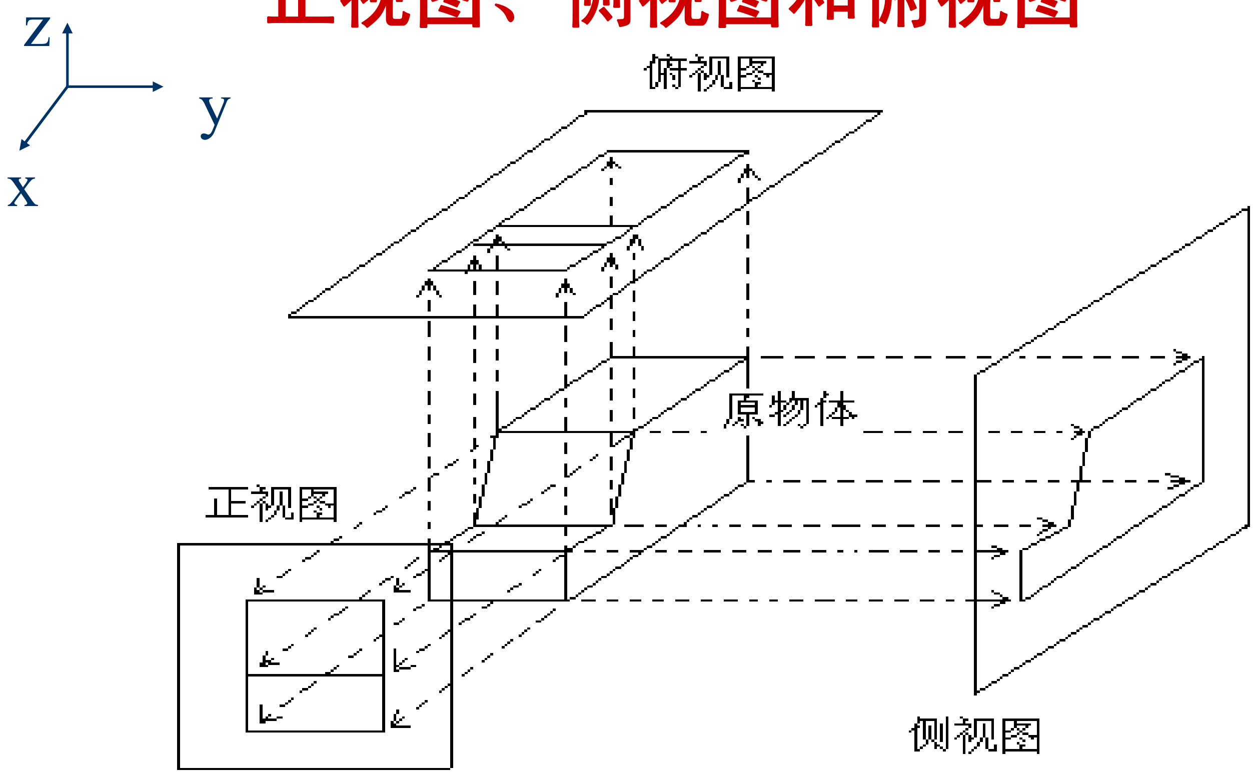




投影变换—平行投影

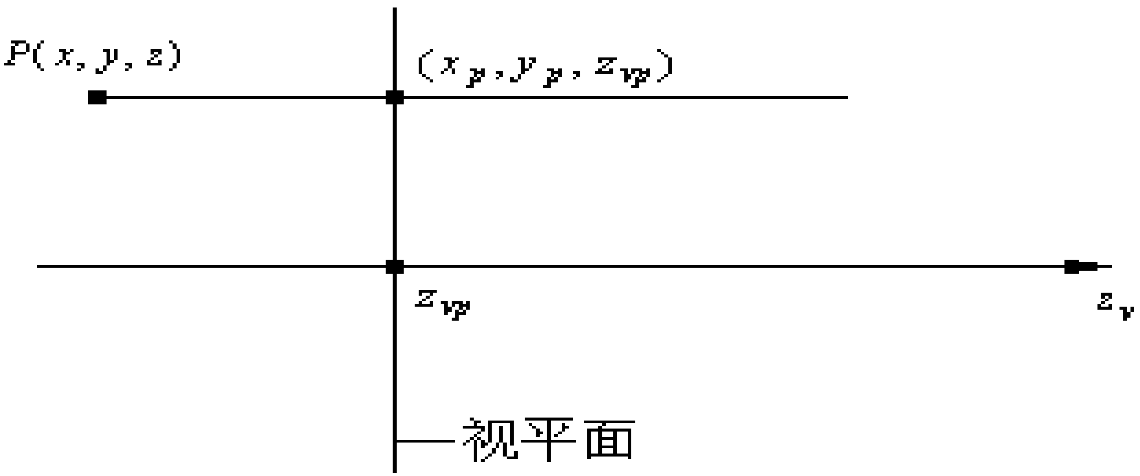
- 三视图(投影平面与某个坐标轴垂直，得到的投影)：

—正视图、侧视图和俯视图



投影变换—平行投影

正投影的变换：投影平面垂直于Zv轴，并且在Zvp处，如图



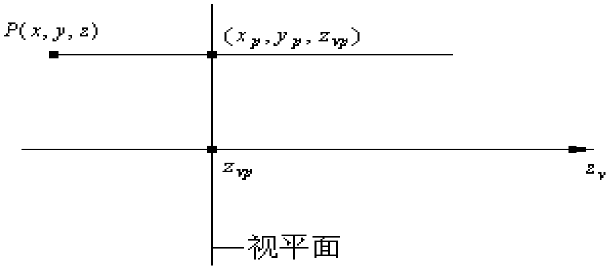
投影变换—平行投影

空间中的任意一点p(x, y, z)，与投影点坐标之间的关系为

$$x' = x \qquad y' = y \qquad z' = z_{vp}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

投影平面位于uv平面内，Zvp=0



平行投影的矩阵为：

$$M_{平行} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

投影变换—平行投影

平行投影的矩阵为：

$$M_{平行} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

透视投影的矩阵为：

它们之间有关系吗？

$$M_{透视} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{bmatrix}$$

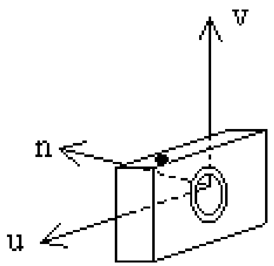
$d \longrightarrow \infty$

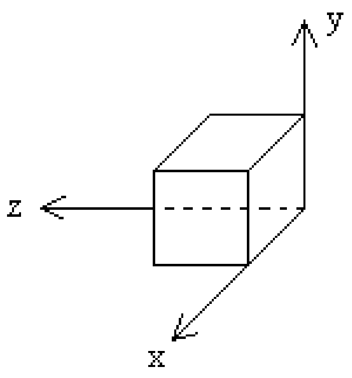
视坐标系与视变换

–视坐标系

– 生活中的类比--移动舞台还是移动摄像机

- 移动舞台
  – 投影（摄像）简单
  – 移动难度大
- 移动摄像机
  – 移动容易
  – 投影复杂

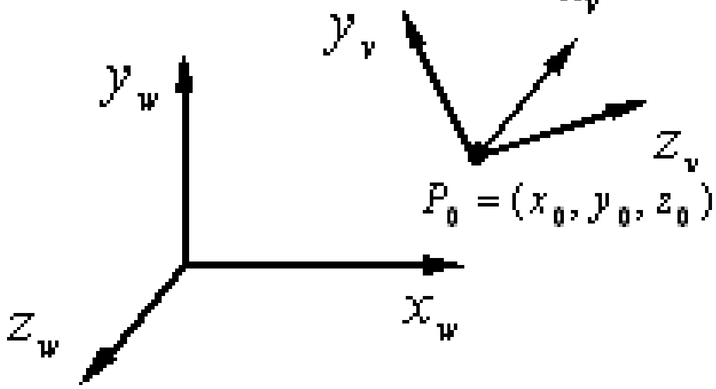


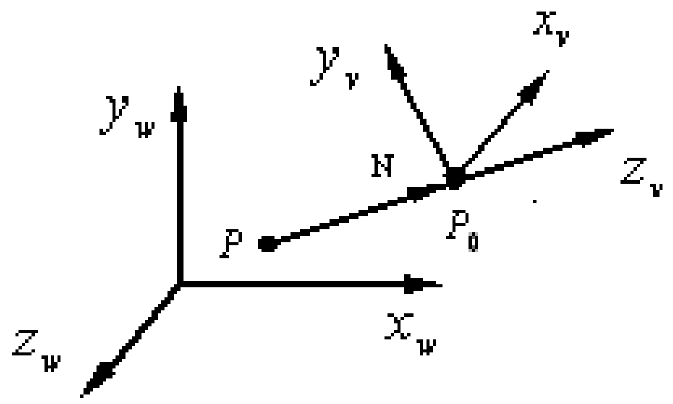


采用视坐标系，目的是简化投影变换

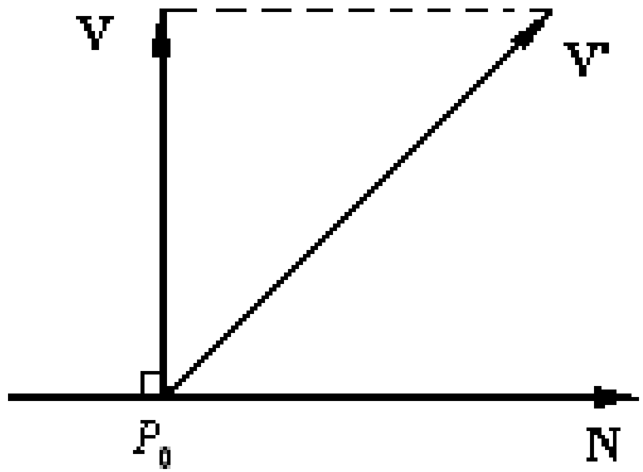
- **什么是视坐标系**
  - 照相机所在的坐标系
- **如何建立视坐标系**
  - 坐标原点
  - n轴----照相机镜头方向（投影平面的法向）
  - v轴----照相机向上的方向（观察正向）
  - u轴---- $u = v \times n$

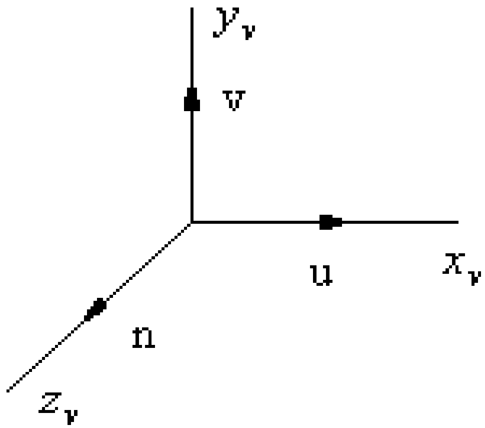
视坐标系与视变换－视坐标系的建立





P92、93





视变换： 由世界坐标系变换到视坐标系

- 世界坐标系为 $O_w x_w y_w z_w$
- 视坐标系为 $O_v uvn$
- 视坐标系的原点在世界坐标系中的坐标为

$$(x_0, y_0, z_0)$$

- 视坐标系的三个坐标轴的单位向量分别为

$$(u_x, u_y, u_z) \qquad (v_x, v_y, v_z) \qquad (n_x, n_y, n_z)$$

问题： 如何将世界坐标系的图形变换到视坐标系中

问题：如何将世界坐标系的图形变换到视坐标系中—利用组合变换的方法

1）**平移变换：** 使视坐标系的原点平移到世界坐标系的原点

2）**旋转变换：**

分别使x_v, y_v, z_v对应到世界坐标系中的x_w, y_w, z_w

当n不与任意坐标轴方向相同时，该过程的变换过程与绕任意直线旋转类似

称这个变换矩阵为 $T_{视}$

根据齐次坐标下的坐标变换公式也可以得到透视变换矩阵

$$T_{视} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & n_x & x_0 \\ u_y & v_y & n_y & y_0 \\ u_z & v_z & n_z & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

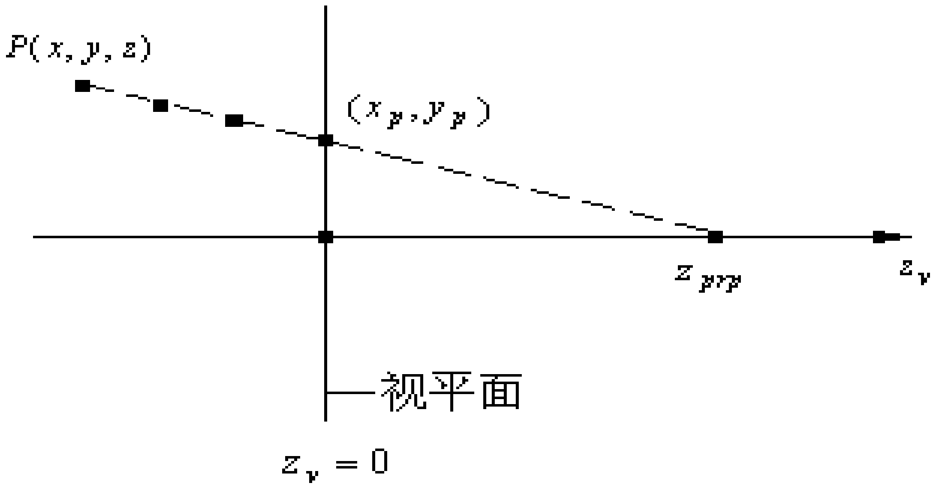
将三维图形显示在屏幕上，组合变换的矩阵为：

$$T = T_{窗视} \cdot T_{投影} \cdot T_{视} \cdot T_{几何}$$

窗口到三维空间的变换

用鼠标拾取三维坐标系中的位置，鼠标返回一个二维的值

投影知识，一个二维点，可以来源于三维空间中的同一条投影线上的任意位置，需要提供辅助信息，如深度值



窗口到三维空间的变换

已知点的深度值：二维点与三维点的对应关系为

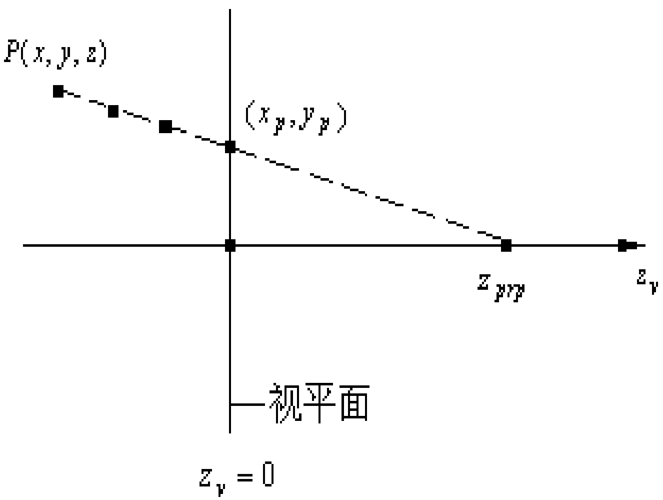
$$x = \frac{z_{prp} - z}{z_{prp}} \cdot x_p$$

$$y = \frac{z_{prp} - z}{z_{prp}} \cdot y_p$$

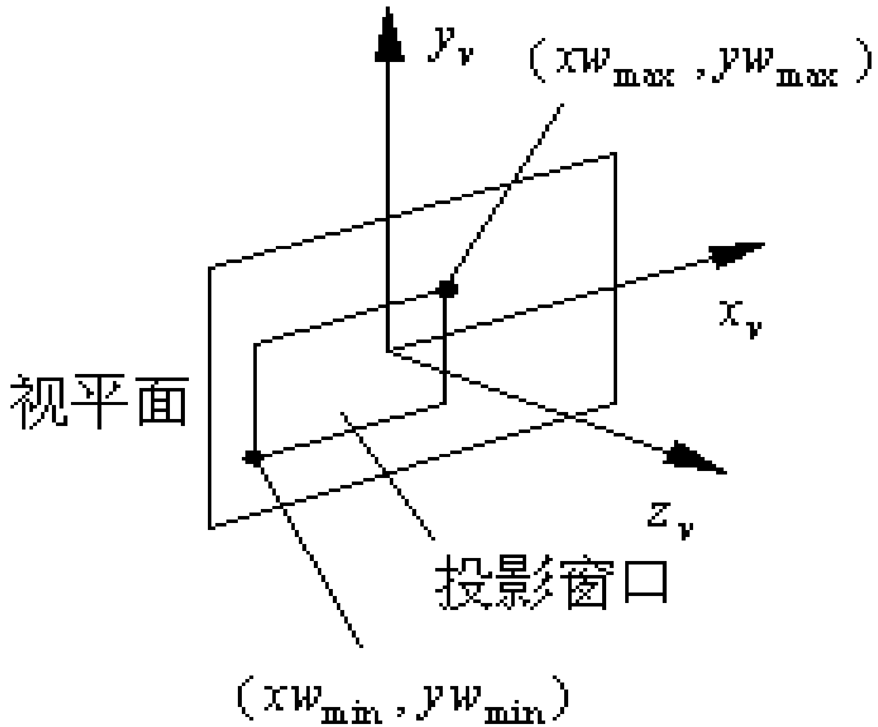
$$x_p = x\left(\frac{z_{prp}}{z_{prp} - z}\right)$$

$$y_p = y\left(\frac{z_{prp}}{z_{prp} - z}\right)$$

$$z_p = z_{vp} = 0$$

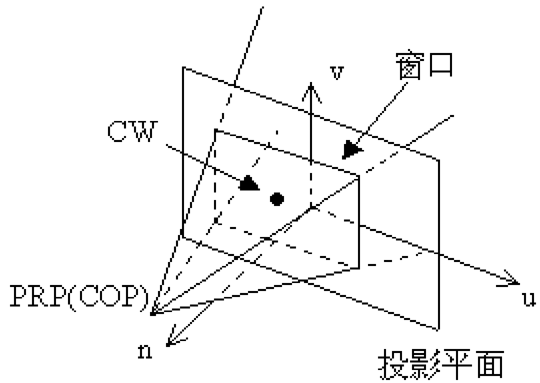


视景体

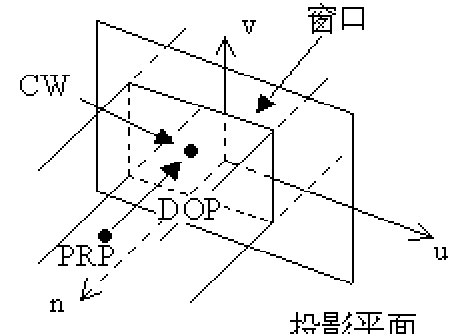


三维裁剪

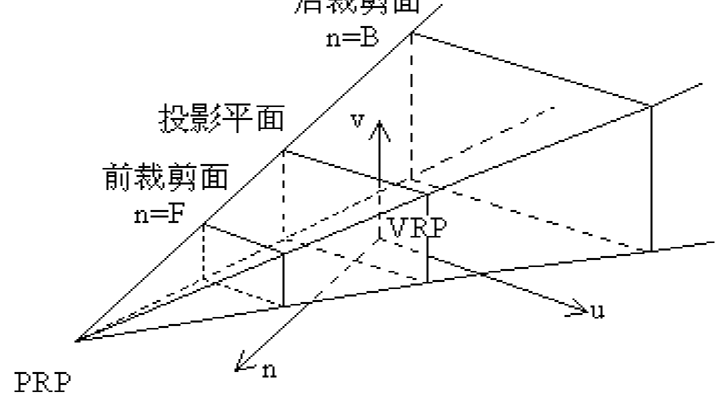
观察空间



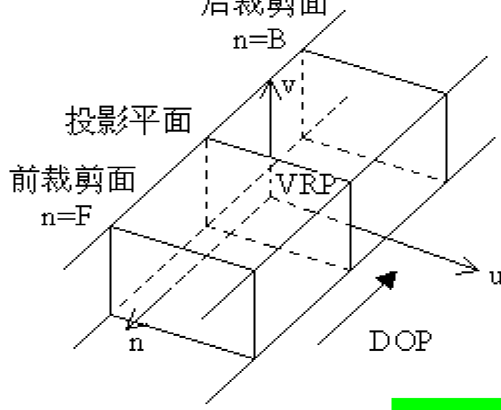
透视投影



平行投影



透视投影



平行投影

有限观察空间亦称视景体或裁剪空间

三维裁剪

- 何时裁剪
  - 投影之前裁剪——三维裁剪
    - 优点
      - 只对可见的物体进行投影变换
    - 缺点
      - 三维裁剪相对复杂
  - 投影之后裁剪——二维裁剪
    - 优点
      - 二维裁剪相对容易
    - 缺点
      - 需要对所有的物体进行投影变换

在投影之前裁剪的理由

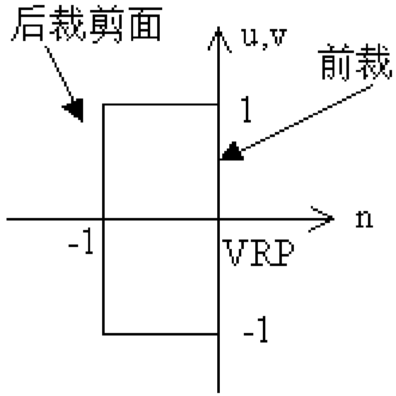
- 三维物体的表面通常被离散表示成多边形或折线，而对这类简单图元，三维裁剪同样比较简单。
- 三维图形在显示过程中需要被消隐，做这个工作要有图形的深度信息，所以必须在投影之前完成 。 消隐很费时，如果在此之前裁剪（或部分裁剪）掉不可见的图形，可使需要消隐的图形减至最小。

– 为什么引入规范视景体

- 简化投影
- 简化裁剪

- 规范视景体
  - 平行投影的规范视景体
    - 半立方体

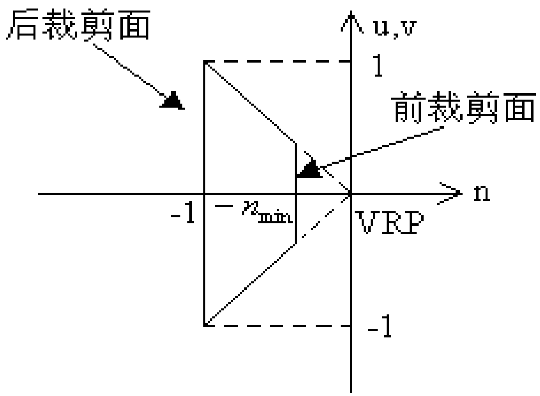
$$\begin{cases} u=1, u=-1 \\ v=1, v=-1 \\ n=0, n=-1 \end{cases}$$



(a)

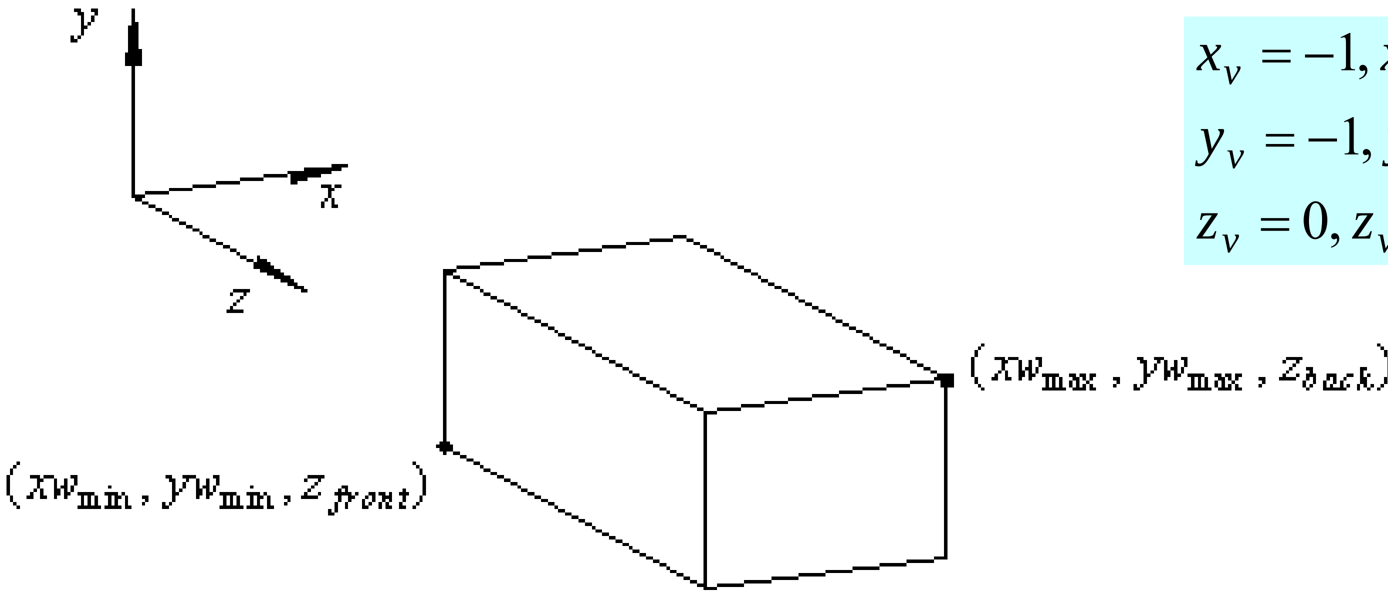
  - 透视投影的规范视景体
    - 四棱台

$$\begin{cases} u=n, u=-n \\ v=n, v=-n \\ n=-n_{\min}, n=-1 \end{cases}$$



(b)

– 视景体的规范化过程：不作要求！



$$x_v = -1, x_v = 1,$$
$$y_v = -1, y_v = 1,$$
$$z_v = 0, z_v = 1$$

视景体的参数

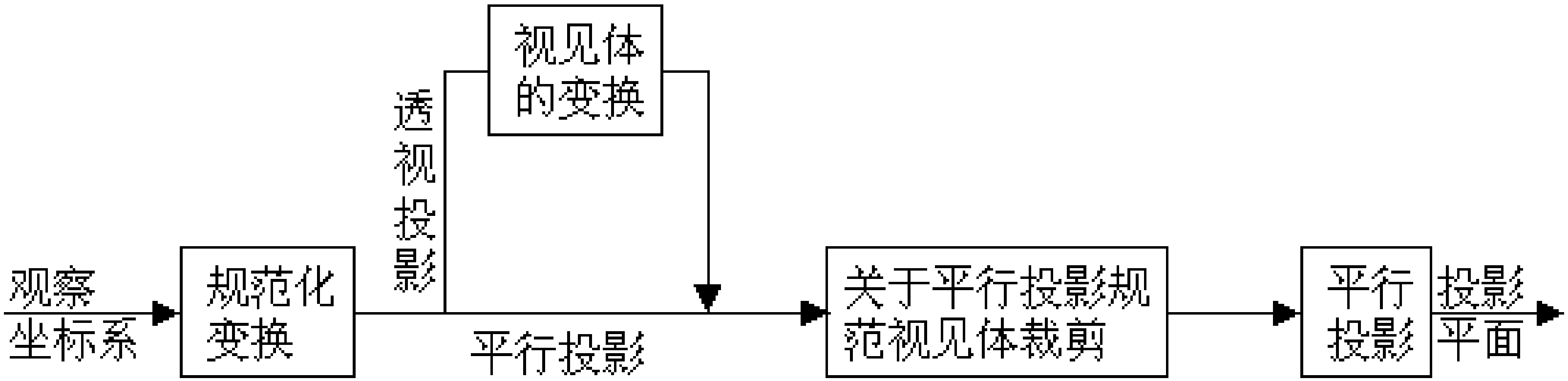
三维裁剪

- 规范视景体之间的变换
  - 将透视投影的规范视景体变换为平行投影的规范视景体

为什么

- 关于长方体的裁剪较关于正四棱台的裁剪简单。
- 平行投影较透视投影简单。
- 透视投影与平行投影都采用同一套裁剪与投影程序，处理一致，便于用硬件实现。

采用视景体变换的图形显示过程



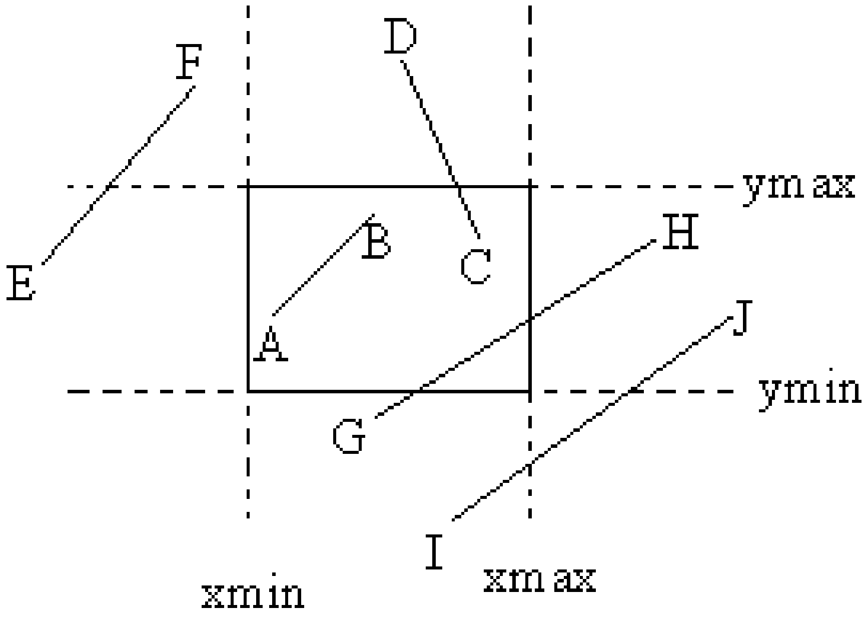
- 直线段裁剪
- 多边形裁剪

直线段裁剪

- 裁剪的目的
  - 判断图形元素是否落在裁剪窗口之内并找出其位于内部的部分
- 裁剪的处理的基础
  - 图元关于窗口内外关系的判别
  - 图元与窗口的求交
- 假定条件
  - 矩形裁剪窗口：$[x_{min},x_{max}]$ $[y_{min},y_{max}]$
  - 待裁剪线段：$P_0(x_0,y_0)P_1(x_1,y_1)$

直线段裁剪

- 待裁剪线段和窗口的关系
  - 线段完全可见
  - 显然不可见
  - 线段至少有一端点在窗口之外，但非显然不可见



- 点裁剪
  - 点(x，y)在窗口内的**充分必要**条件是：

$$x_{\min} \le x \le x_{\max}$$

$$y_{\min} \le y \le y_{\max}$$

与期中试题的区别？

- Cohen_Sutherland 算法

步骤：

第一步 判别线段两端点是否都落在窗口内，如果是，则线段完全可见；否则进入第二步；

第二步 判别线段是否为显然不可见，如果是，则裁剪结束；否则进行第三步；

第三步 求线段与窗口边延长线的交点，这个交点将线段分为两段，其中一段显然不可见，丢弃。对余下的另一段重新进行第一步，第二步判断，直至结束

How？？

直线段裁剪－ Cohen_Sutherland算法

– 特点：对显然不可见线段的快速判别

– 编码方法

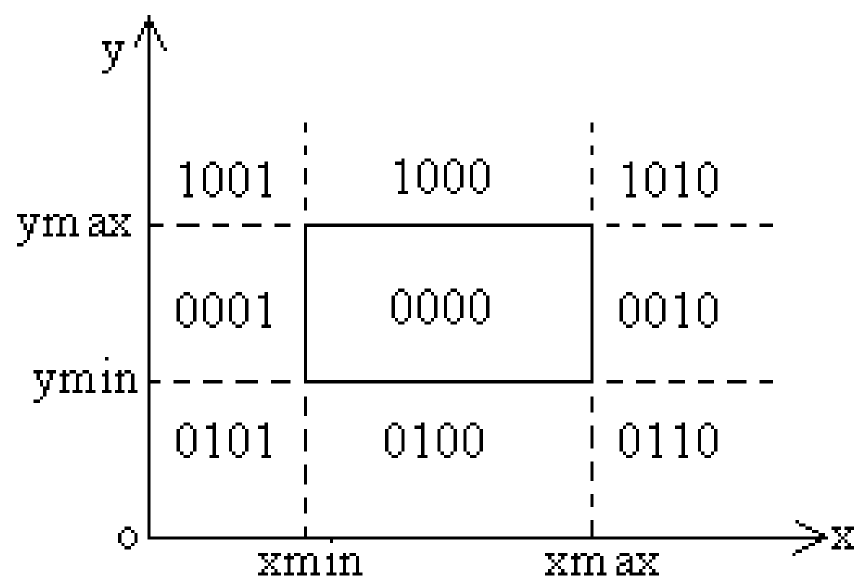
- 区域编码：用窗口四边所在的直线将整个平面分成9个区域，每个区域赋于一个四位的编码 $C_tC_bC_rC_l$

$$C_t = \begin{cases} 1 & 当\ y > y\max \\ 0 & else \end{cases}$$

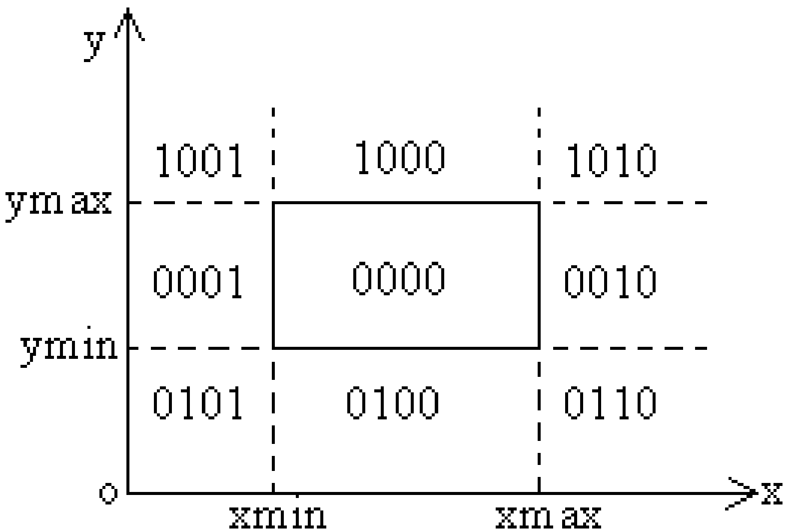
$$C_b = \begin{cases} 1 & 当\ y < y\min \\ 0 & else \end{cases}$$

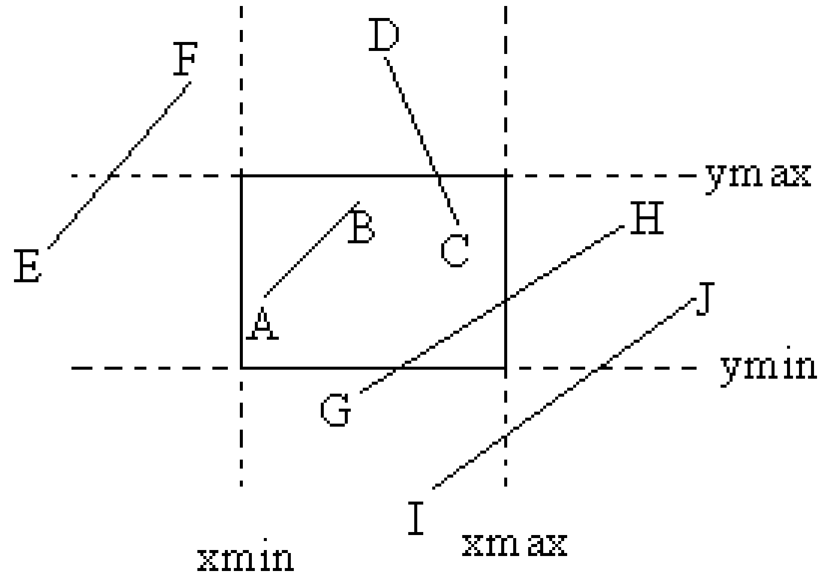
$$C_r = \begin{cases} 1 & 当\ x > x\max \\ 0 & else \end{cases}$$

$$C_l = \begin{cases} 1 & 当\ x < x\min \\ 0 & else \end{cases}$$



- **端点编码：** 定义为它所在区域的编码
- **结论：** 当线段的两个端点的编码的逻辑"与"非零时，线段为显然不可见的

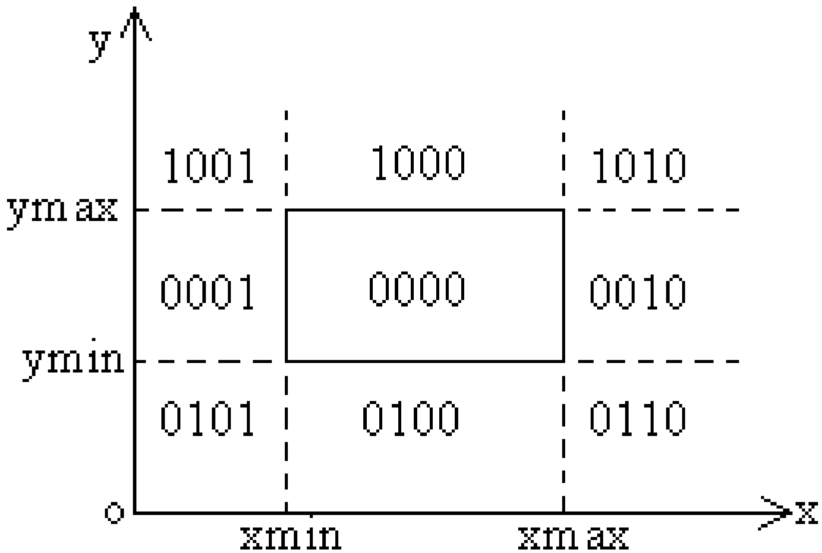


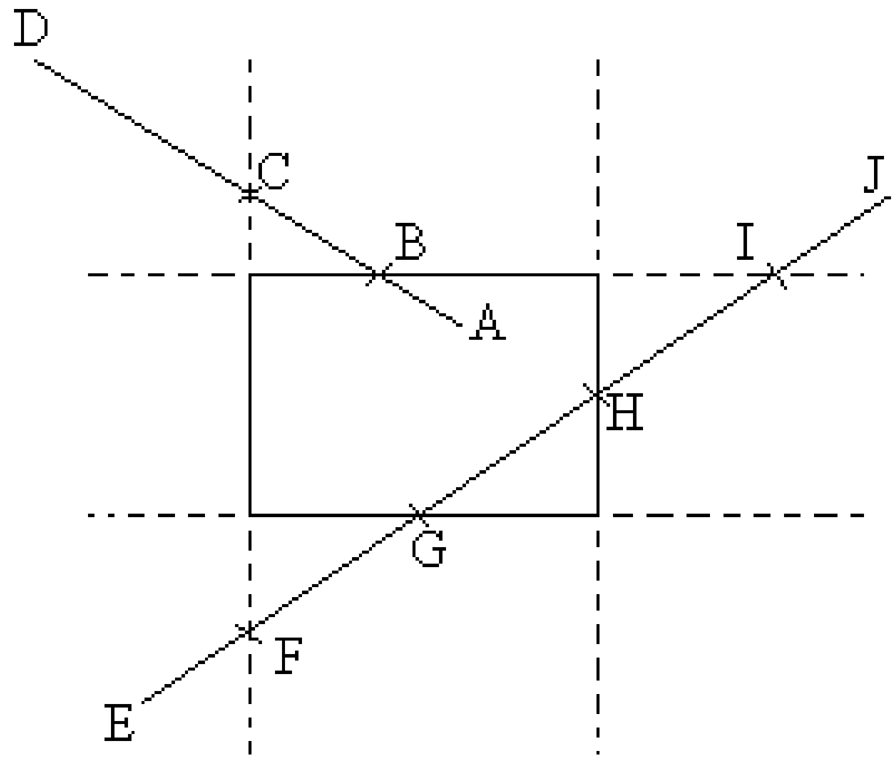


直线段裁剪— Cohen_Sutherland算法

– 适用场合：大窗口：大部分线段完全可见
  小窗口：大部分线段完全不可见
– 问题：裁剪一条直线段需要多次求交,how?

COHEN-SUTHERLAND算法.SWF





两个问题:

1）在窗口哪一侧？2）哪点在窗口外？

- 梁友栋_Barskey算法:简化求交!
  - ✱基本出发点:直线的参数方程
  - ✱给出任意一条直线段,两端点分别为(x1, y1)和(x2, y2),令 $\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1$

则直线的参数方程为:

$$x = x_1 + u \cdot \Delta x$$

$$y = y_1 + u \cdot \Delta y$$

$$0 \le u \le 1$$

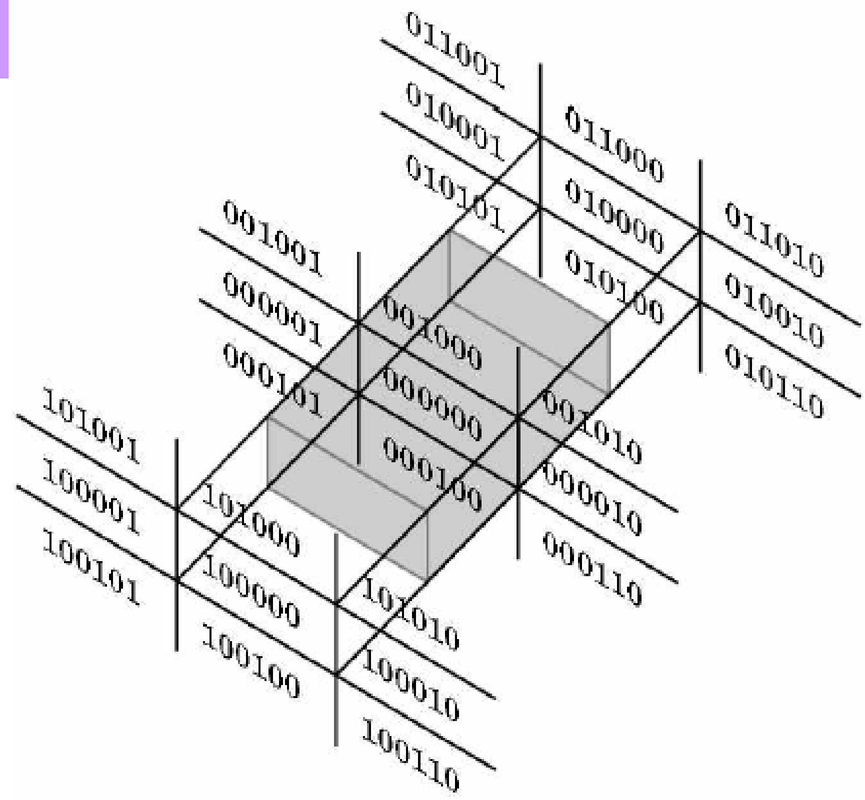
不作要求!!!

三维直线段的裁剪

- 三维Cohen－Sutherland编码法：增加前后2个裁剪面；
  - 六位编码：$B_b B_f B_t B_b B_r B_l$

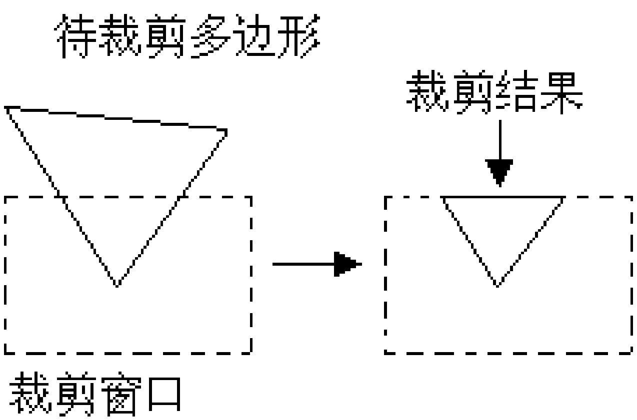
$$B_b = \begin{cases} 1 \quad , & z > zv_{\max} \\ 0 \quad , & \text{其它} \end{cases}$$

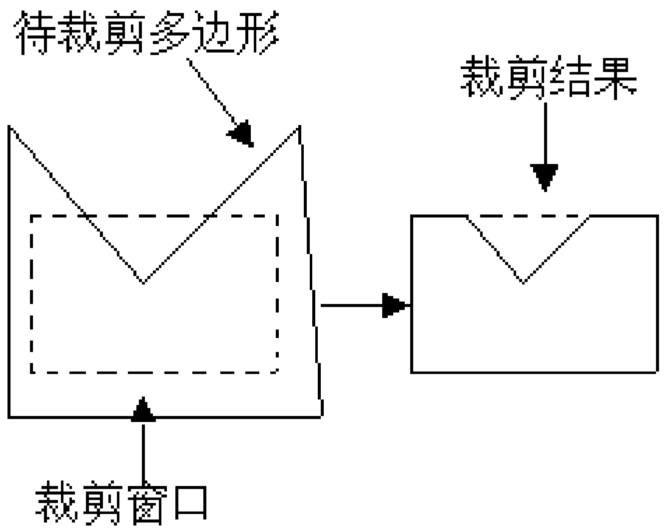
$$B_f = \begin{cases} 1 \quad , & z < zv_{\min} \\ 0 \quad , & \text{其它} \end{cases}$$



多边形裁剪

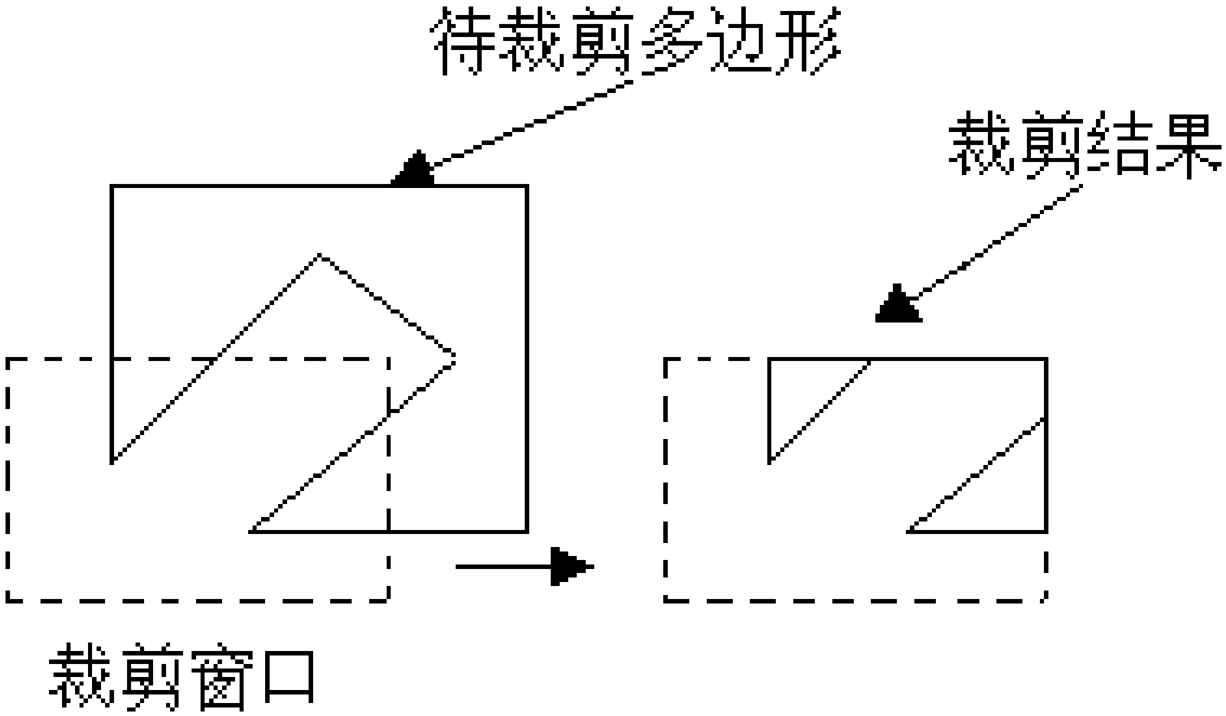
- 一个误解：直线段裁剪的组合？
- 新的问题：
  - 边界不再封闭
  - 产生多个部分





多边形裁剪

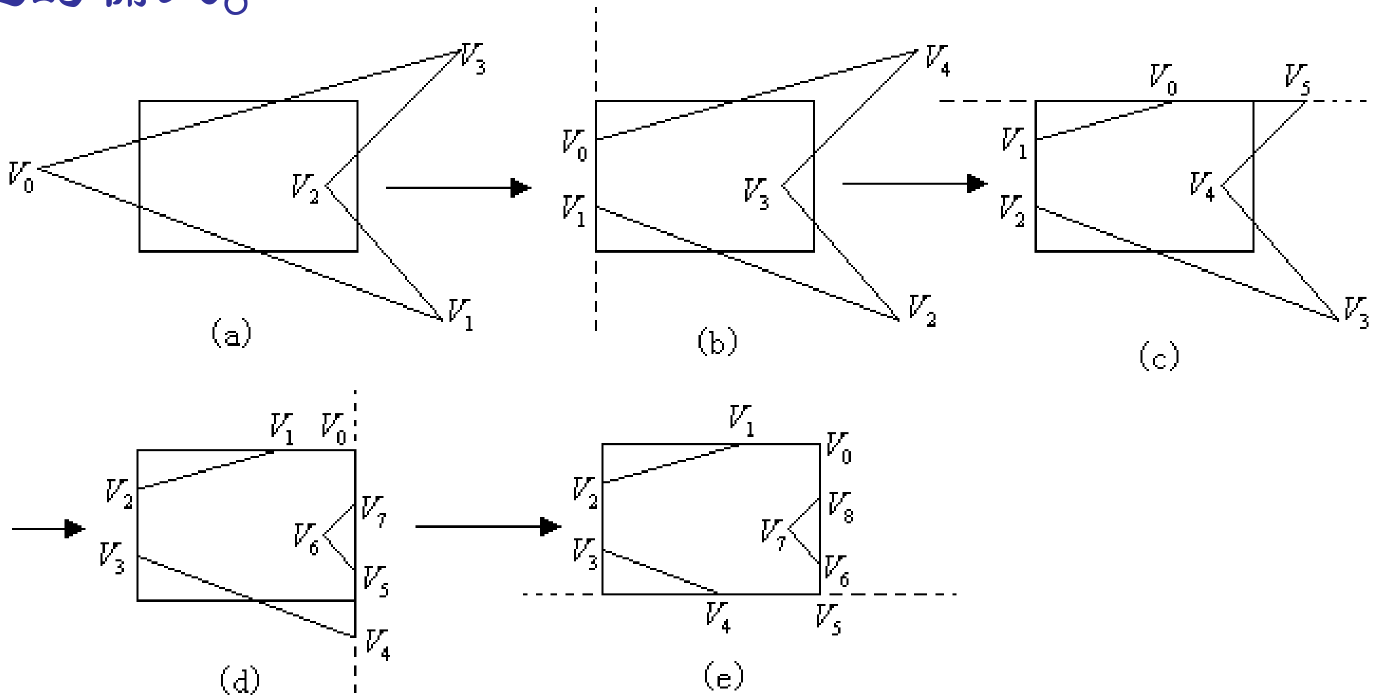
凹多边形如何处理？



- Sutherland_Hodgman算法

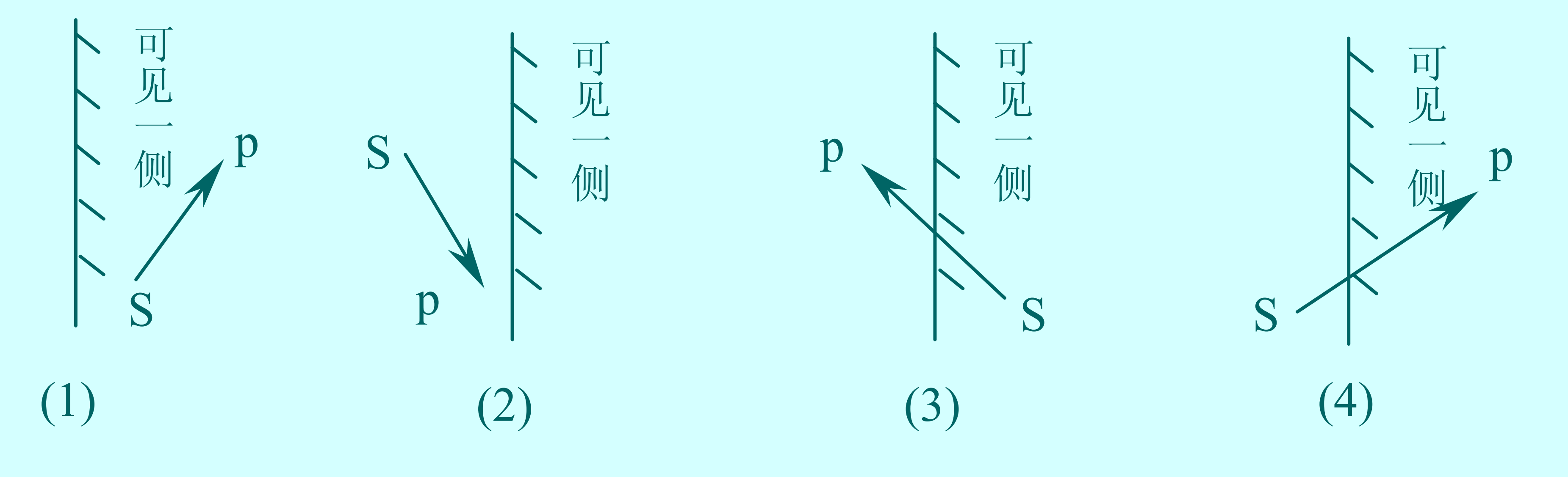
亦称逐边裁剪算法

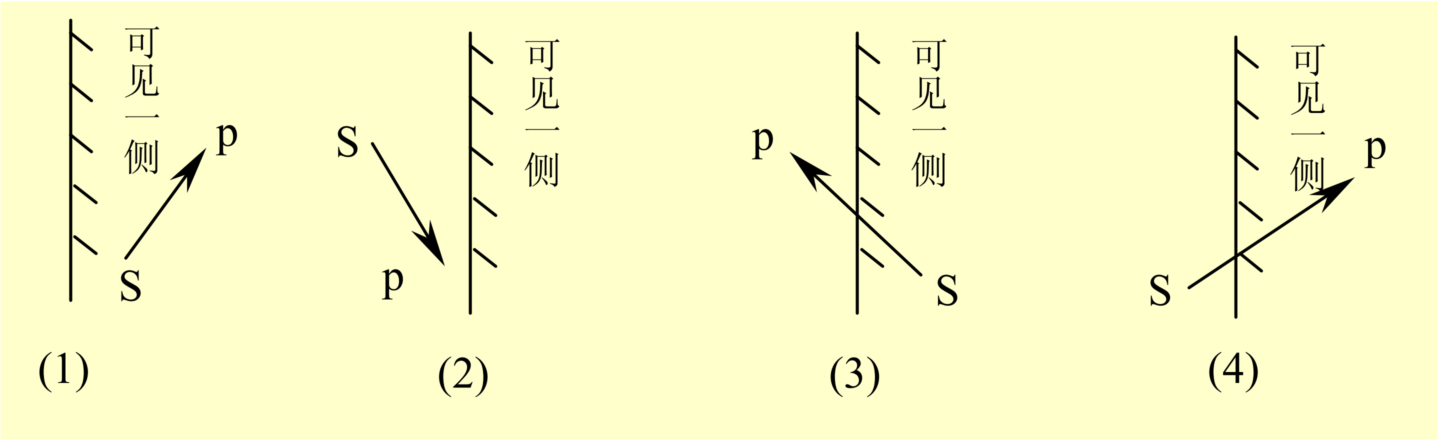
 – 逐边裁剪 ： 两次分解，流水线处理
 – 例子：流水线过程(左上右下)：前边的结果是后边的输入。



多边形裁剪— Sutherland_Hodgman 算法

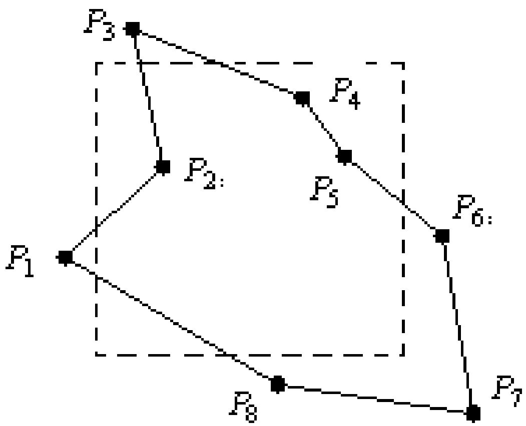
- 基本思想是一次用窗口的一条边裁剪多边形。
- 考虑窗口的一条边以及延长线构成的裁剪线该线把平面分成两个部分:可见一侧;不可见一侧
- 多边形的各条边的两端点S、P。它们与裁剪线的位置关系只有四种



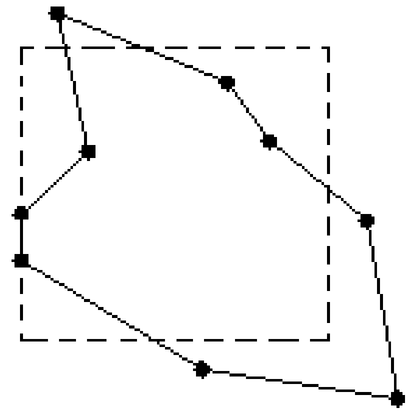


- 情况（1）仅输出顶点P；
- 情况（2）输出0个顶点；
- 情况（3）输出线段SP与裁剪线的交点I；
- 情况（4）输出线段SP与裁剪线的交点I和终点P

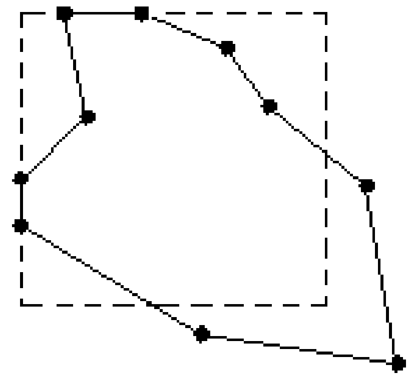
多边形裁剪— Sutherland_Hodgman 算法



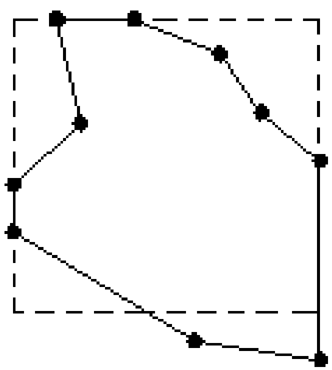
(a)原多边形



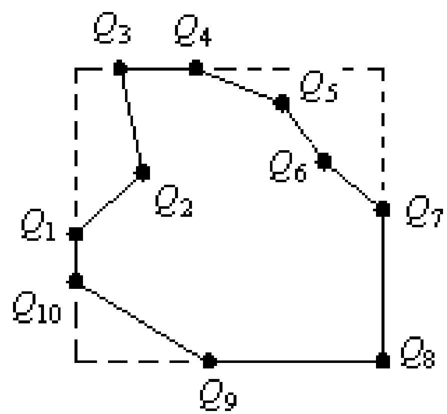
(b)窗口左边裁剪



(c) 窗口上边裁剪



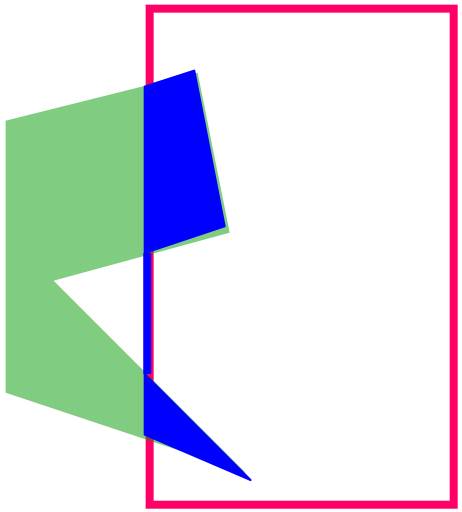
(d)窗口右边裁剪

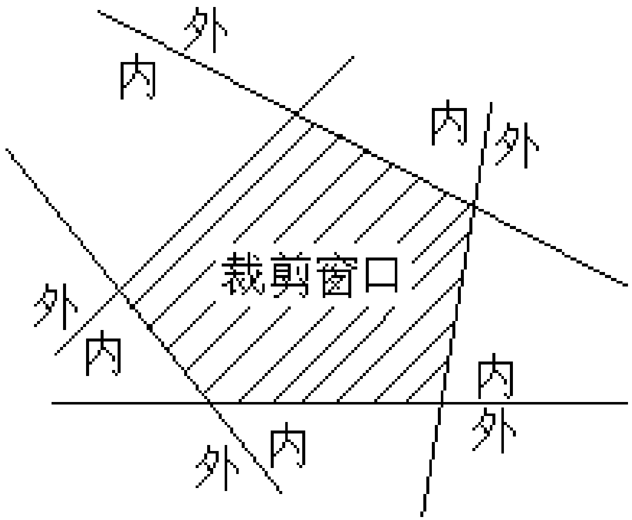


(e)窗口下边裁剪

- 上述算法仅用一条裁剪边对多边形进行裁剪，得到一个顶点序列，作为下一条裁剪边处理过程的输入。
- 对于每一条裁剪边，算法只是判断点在窗口哪一侧以及求线段SP与裁剪边的交点。

- 对凸多边形应用本算法可以得到正确的结果，但是对凹多边形的裁剪将如图所示显示出一条多余的直线。这种情况在裁剪后的多边形有两个或者多个分离部分的时候出现。因为只有一个输出顶点表，所以表中最后一个顶点总是连着第一个顶点。
- 解决这个问题有多种方法，一是把凹多边形分割成若干个凸多边形，然后分别处理各个凸多边形。二是修改本算法，沿着任何一个裁剪窗口边检查顶点表，正确的连接顶点对。再有就是Weiler-Atherton算法。



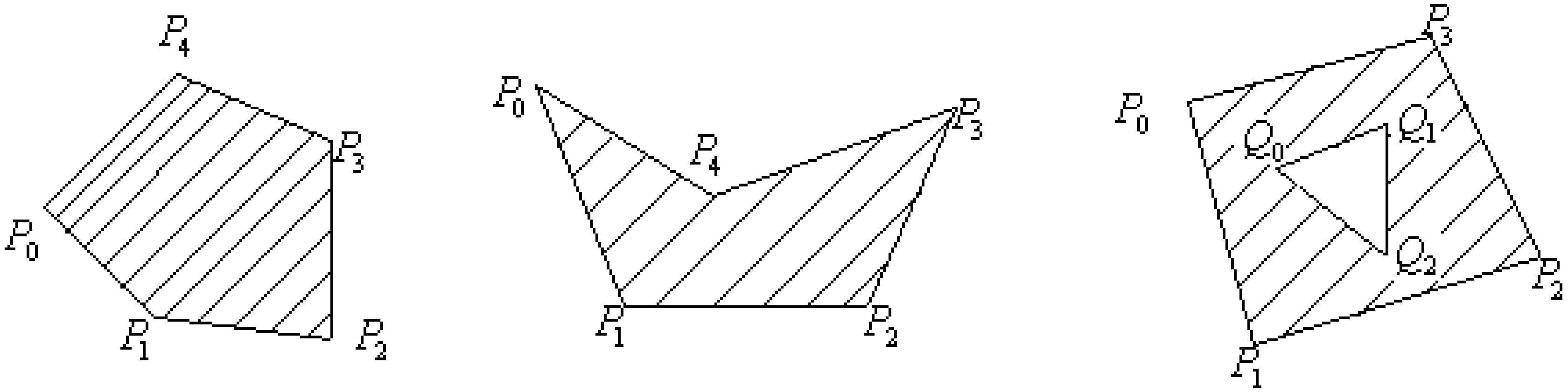


思考:

- 如何推广到任意凸多边形裁剪窗口?

SUTHERLAND-HODGEMAN 多边形裁剪.SWF

- Weiler-Athenton算法
  - 裁剪窗口为任意多边形



  - 主多边形：被裁剪多边形，记为A
  - 裁剪多边形：裁剪窗口，记为B