2014 年研究生入学统一考试数学二试题及解析(完整精准版)

来源：文都教育

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

（1）当 $x \to 0^+$时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x), (1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是（　　）

（A）$(2,+\infty)$

（B）（1，2）

（C）$(\frac{1}{2},1)$

（D）$(0,\frac{1}{2})$

【解析】当 $x \to 0^+$时，$\ln^{\alpha}\left(1+2x\right) \sim \left(2x\right)^{\alpha}$

$$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim (\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{\alpha}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{\alpha}} \cdot x^{\frac{2}{\alpha}}$$

$\therefore$ 由 $\alpha > 1$ 且 $\frac{2}{\alpha} > 1 \Rightarrow 1 < \alpha < 2.$

【答案】B

（2）下列曲线有渐近线的是（　　）

（A） $y = x + \sin x.$

（B） $y = x^2 + \sin x.$

（C） $y = x + \sin\frac{1}{x}.$

（D） $y = x^2 + \sin^2 x.$

【解析】$a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}) = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax] = \lim\limits_{x\to\infty}[x+\sin\frac{1}{x}-x] = \lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x} = 0$

$\therefore$ $y = x$ 是 $y = x + \sin\frac{1}{x}$ 的斜渐近线

【答案】C

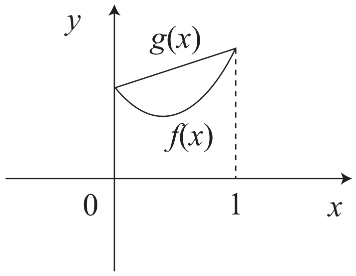
（3）设函数 $f\left(x\right)$ 具有 2 阶导数，$g\left(x\right) = f\left(0\right)\left(1-x\right) + f\left(1\right)x$，则在区间[0，1]上（　　）

（A） 当$f'(x)\geq 0$时，$f(x)\geq g(x)$.

（B） 当$f'(x)\geq 0$时，$f(x)\leq g(x)$.

（C） 当$f''(x)\geq 0$时，$f(x)\geq g(x)$.

（D） 当$f''(x)\geq 0$时，$f(x)\leq g(x)$.



【解析】当$f''(x)\geq 0$时，$f(x)$是凹函数

而$g(x)$是连接$(0,f(0))$与$(1,f(1))$的直线段，如右图

故$f(x)\leq g(x)$

【答案】D

（4）曲线$\begin{cases} x=t^2+7, \\ y=t^2+4t+1, \end{cases}$上对应$t=1$的点处的曲率半径是（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{10}}{50}$.

（B）$\dfrac{\sqrt{10}}{100}$.

（C）$10\sqrt{10}$.

（D）$5\sqrt{10}$.

【解析】令$x=\varphi(t)=t^2+7 \qquad y=\psi(t)=t^2+4t+1$

则$\varphi'(t)=2t,\varphi''(t)=2$；　$\psi'(t)=2t+4 \qquad \psi''(t)=2$

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$$

当 t=1 时，$\varphi'(1)=2, \qquad \varphi''(1)=2 \qquad \psi'(1)=6, \qquad \psi''(1)=2$

则$K=\dfrac{|2\times2-2\times6|}{(2^2+6^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{8}{40^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$

【答案】C

（5）设函数 $f\left(x\right)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=$（　　）

（A）1.

（B）$\dfrac{2}{3}$.

（C）$\dfrac{1}{2}$.

（D）$\dfrac{1}{3}$.

【解析】由 $f\left(x\right)=\arctan x,\ f\left(x\right)=xf'(\xi)$ 得

$$\arctan x=x\cdot\frac{1}{1+\xi^2}$$

$$\xi^2=\frac{x-\arctan x}{\arctan x}$$

$$\therefore\lim_{x\to\infty}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

【答案】D

（6）设函数 $u(x,\ y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 则（　　）

（A）$u(x,\ y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得.

（B）$u(x,\ y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得.

（C）$u(x,\ y)$ 的最大值在 D 的内部取得，最小值在 D 的边界上取得.

（D）$u(x,\ y)$ 的最小值在 D 的内部取得，最大值在 D 的边界上取得.

【解析】A= $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$　　B= $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$　　C= $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$B\neq 0,\ A+C=0,\ AC-B^2=-A^2-B^2<0$

∴D 内部无极值.

【答案】A

（7）行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

（A）$(ad-bc)^2$.

（B）$-(ad-bc)^2$.

（C）$a^2d^2-b^2c^2$.

（D）$b^2c^2-a^2d^2$.

【解析】 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \underline{\underline{按第4行展开}} c\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix} + d(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$

$=-c\cdot b(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + d\cdot a(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$=(ad-bc)\cdot bc-ad(ad-bc)$

$=(ad-bc)(bc-ad)=-(ad-bc)^2$

【答案】 B

（8）设α_1，α_2，α_3均为 3 维向量，则对任意常数kl，向量组$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量组α_1，α_2，α_3线性无关的（　　）

（A）必要非充分条件.

（B）充分非必要条件.

（C）充分必要条件.

（D）既非充分也非必要条件.

【解析】 由（$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$）$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$知，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关时，因为$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

所以$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关

反之不成立. 如当$\alpha_3=0$，且α_1与α_2线性无关时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

【答案】 A

二、填空题：9～14 题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

（9）$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x=$____________.

【解析】 $\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{x+1}{2}\right)}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$

$\therefore\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}arc\tan\frac{x+1}{2}\bigg|_{-\infty}^{1}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}arc\tan\frac{x+1}{2}$

$=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{8}$

（10）设$f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且$f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，则$f(7)=$

________.

【解析】 $\because f(x)$是周期为 4 的可导函数

$\therefore f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1)$ 　 且$f(0)=0$

又$f'(x)=2(x-1)$ 　 $\therefore f(x)=x^2-2x+C$ 　 将$f(0)=0$代入得$C=0$

$\therefore f(x)=x^2-2x$，

$\therefore f(1)=-1$ 从而$f(7)=-f(1)=1$

(11)设$z=z(x,y)$是由方程$e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$确定的函数，则$\mathrm{d}z\big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$____________.

【解析】 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 　 将$x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$代入得$z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=0$.

两边对x求偏导 　 $\mathrm{e}^{2yz}(2y\frac{\partial z}{\partial x})+1+\frac{\partial z}{\partial x}=0$解得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-1}{1+2ye^{2yz}}$.

同理得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y+2ze^{2yz}}{1+2ye^{2yz}}$

$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}$

$\therefore dz=\left(-\frac{1}{2}\right)dx+\left(-\frac{1}{2}\right)dy$.

（12）函数 z 的极坐标方程是 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是__________.

【解析】 $r=\theta$，即 $\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$ 两边对 x 求导得

$\frac{x+y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2}$　　即 $x+yy'=\frac{xy'-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

点 $(r,\theta)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 即 $(x,y)=(0,\frac{\pi}{2})$ 代入上式得 $\left.y'\right|_{(0,\frac{\pi}{2})}=-\frac{2}{\pi}$

于是切线方程为 $y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)$

即 $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$

（13）一根长度为 1 的细棒位于 x 轴的区间[0，1）上，若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$_______.

【解析】 $\int_0^1(-x^2+2x+1)dx=(-\frac{1}{3}x^3+x^2+x)\Big|_0^1=\frac{5}{3}$

$\int_0^1 x(-x^2+2x+1)dx=\int_0^1(-x^3+2x^2+x)dx=(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1=\frac{11}{12}$

$\therefore \bar{x}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}}=\frac{11}{20}$

（14）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围是__________.

【解析】$A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$

因为$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|$，负惯性指数为 1

$\therefore$ 设$\lambda_1<0$, 从而$\lambda_2\lambda_3\geq 0$

$\therefore |A|\leq 0$

① 若$|A|<0$，则$\lambda_1<0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_3>0$．此时符合题意，而$|A|=a^2-4$

$\therefore a^2-4<0$. 即 $-2<a<2$.

② 若$|A|=0$，此时$a=\pm2$

当$a=2$时．　$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-1&2\\2&2&0\end{pmatrix}$　$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda+1&-2\\-2&-2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$

$\lambda_1=-3,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=0$

$\therefore a=2$符合题意

当$a=-2$时$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-1&2\\-2&2&0\end{pmatrix}$　$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&2\\0&\lambda+1&-2\\2&-2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$

$\lambda_1=-3,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=0$　所以$a=-2$　符合题意

综上，a的取值范围是　$-2\leq a\leq 2$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸佛定位置上，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$。

【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}$$

（16）（本题满分 10 分）

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y=y(x)$ 的极大值与极小值。

【解】 由 $x^2+y^2y'=1-y'$ 得 $(1+y^2)dy=(1-x^2)dx$，积分得

$y+\frac{1}{3}y^3=x-\frac{1}{3}x^3+C$。

由 $y(2)=0$ 得 $C=\frac{2}{3}$，故 $y+\frac{1}{3}y^3=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}$。

由 $y'=\frac{1-x^2}{1+y^2}=0$ 得 $x=\pm1$。

$$y''=\frac{-2x(1+y^2)-(1-x^2)\cdot2yy'}{(1+y^2)^2},$$

当 $x=-1$ 时，$y''>0$，$x=-1$ 为极小点，

当 $x=-1$ 时，由 $y+\frac{1}{3}y^3=-1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0$ 得极小值 $y=0$；

当 $x=1$ 时，$y''<0$，$x=1$ 为极大点，

当 $x=1$ 时，由 $y+\frac{1}{3}y^3=\frac{4}{3}$，解得极大值为 $y=1$。

（17）（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le4,x\ge0,y\ge0\}$，计算 $\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$。

【解】

由对称性得 $I=\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint\limits_D\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$，

于是 $I=\frac{1}{2}[\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy+\iint\limits_D\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2r\sin\pi rdr=\frac{1}{4\pi}\int_1^2\pi r\sin\pi rd(\pi r)$$

$=\frac{1}{4\pi}\int_{\pi}^{2\pi} t\sin t dt=-\frac{1}{4\pi}\int_{\pi}^{2\pi} td(\cos t)=-\frac{1}{4\pi}t\cos t\,|_{\pi}^{2\pi}+\frac{1}{4\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\cos t dt=-\frac{3}{4}$。

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 二阶连续可导，$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x},$$

若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式。

【解】

$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\cos y\cdot f'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-e^x\sin y\cdot f'$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\cos y\cdot f'+e^{2x}\cos^2 y\cdot f''$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\cos y\cdot f'+e^{2x}\sin^2 y\cdot f''$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}f''$，

令 $u=e^x\cos y$，由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$ 得

$f''(u)=4f(u)+u$，或 $f''(u)-4f(u)=u$，

解得 $f(u)=C_1e^{-2u}+C_2e^{2u}-\frac{1}{4}u$，

由 $f(0)=0, f'(0)=0$ 得 $\begin{cases}C_1+C_2=0\\ -2C_1+2C_2-\frac{1}{4}=0\end{cases}$，解得 $C_1=-\frac{1}{16}, C_2=\frac{1}{16}$，

故 $f(u)=-\frac{1}{16}(e^{-2u}-e^{2u})-\frac{1}{4}u$。

（19）（本题满分 10 分）设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$，

证明：

（I）$0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$，$x\in[a,b]$。

（II）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$。

【证明】（I）因为 $0\le g(x)\le 1$，

所以 $\int_a^x 0dt\le\int_a^x g(t)dt\le\int_a^x 1dt$，即 $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$。

（II） $\varphi(x)=\int_a^x f(u)g(u)du-\int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du$， $\varphi(a)=0$，

$\varphi'(x)=f(x)g(x)-g(x)f[a+\int_a^x g(t)dt]$，

因为 $\int_a^x g(t)dt\le x-a$ 且 $f(x)$ 单调增加，

所以 $f[a+\int_a^x g(t)dt]\le f[a+(x-a)]=f(x)$，

从而 $\varphi'(x)\ge f(x)g(x)-g(x)f(x)=0$， $x\in[a,b]$

由 $\begin{cases}\varphi(a)=0\\ \varphi'(x)\ge 0(a\le x\le b)\end{cases}$ 得 $\varphi(x)\ge 0$（ $x\in[a,b]$），

从而 $\varphi(b)\ge 0$，故 $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$。

（20）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x},x\in[0,1]$，定义函数列

$f_1(x)=f(x),f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots,f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$，记 S_n 是曲线 $y=f_n(x)$、直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$。

【解】

$$f_2(x)=\frac{f(x)}{1+f(x)}=\frac{x}{1+2x},$$

$$f_3(x)=\frac{f_2(x)}{1+f_2(x)}=\frac{x}{1+3x}，$$ 由归纳法得 $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$。

$$S_n=\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{1}{n^2}\int_0^1\frac{nx}{1+nx}d(nx)=\frac{1}{n^2}\int_0^n\frac{x}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{n^2}\int_0^n(1-\frac{1}{1+x})dx=\frac{1}{n}-\frac{\ln(1+n)}{n^2}。$$

$$\lim_{n\to\infty}nS_n=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}=1。$$

（21）（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$ 且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线 $f(x,y)=0$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积。

【解】由 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$ 得 $f(x,y)=(y+1)^2+\varphi(x)$，

由 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$ 得 $\varphi(x)=(x-2)\ln x$，

故 $f(x,y)=(y+1)^2+(x-2)\ln x$。

$f(x,y)=0$ 与 y 轴所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积与

$y^2=-(x-2)\ln x$ 所围成的图形绕 $y=0$ 旋转所得的体积相等，

$V=\pi\int_1^2 y^2dx=\pi\int_1^2(2-x)\ln xdx=(2\ln 2-\frac{5}{4})\pi$。

（22）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵。

（I）求方程组 $AX=O$ 的一个基础解系。

（II）求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B。

【解】

（I）$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-2&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$，

则方程组 $AX=O$ 的一个基础解系为 $\xi=(-1,2,3,1)$。

（II）令 $B=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\\x_{10}&x_{11}&x_{12}\end{pmatrix}$，

$AB=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\\x_{10}&x_{11}&x_{12}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}x_1-2x_4+3x_7-4x_{10}&x_2-2x_5+3x_8-4x_{11}&x_3-2x_6+3x_9-4x_{12}\\x_4-x_7+x_{10}&x_5-x_8+x_{11}&x_6-x_9+x_{12}\\x_1+2x_4-3x_{10}&x_2+2x_5-3x_{11}&x_3+2x_6-3x_{12}\end{pmatrix}$，

由 $AB=E$ 得

$$\begin{cases} x_1-2x_4+3x_7-4x_{10}=1 \\ x_4-x_7+x_{10}=0 \\ x_1+2x_4-3x_{10}=0 \end{cases}、\begin{cases} x_2-2x_5+3x_8-4x_{11}=0 \\ x_5-x_8+x_{11}=1 \\ x_2+2x_5-3x_{11}=0 \end{cases}、\begin{cases} x_3-2x_6+3x_9-4x_{12}=0 \\ x_6-x_9+x_{12}=0 \\ x_3+2x_6-3x_{12}=1 \end{cases}。$$

由 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ 得

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_7 \\ x_{10} \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-k_1 \\ 2k_1-1 \\ 3k_1-1 \\ k_1 \end{pmatrix}$；

由 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ 得

$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_8 \\ x_{11} \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-k_2 \\ 2k_2-3 \\ 3k_2-4 \\ k_2 \end{pmatrix}$；

由 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 得

$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_6 \\ x_9 \\ x_{12} \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-k_3 \\ 2k_3+1 \\ 3k_3+1 \\ k_3 \end{pmatrix}$，

故 $B=\begin{pmatrix} 2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3 \\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1 \\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$（其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数）。

（23）（本题满分 11 分）证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似。

【证明】

令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$，

由 $|\lambda E-A|=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$，

由 $|\lambda E-B|=0$ 得 B 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$。

因为 $A^T=A$，所以 A 可对角化；

对 B，因为 $r(0E-B)=r(B)=1$，所以 B 可对角化，

因为 A,B 特征值相同且都可对角化，所以 $A\sim B$。