2013年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

一、选择题:1~8小题，每小题4分，共32分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设$\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中$\left|\alpha(x)\right|<\dfrac{\pi}{2}$，则当$x\to 0$时，$\alpha(x)$是　　　（　）

(A) 比x高阶的无穷小　　　(B) 比x低阶的无穷小

(C) 与x同阶但不等价的无穷小　　　(D) 与x等价的无穷小

【答案】(C)

【解析】$\because \cos x-1=x\cdot\sin\alpha(x)$，$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$

$\therefore x\cdot\sin\alpha(x)\sim-\dfrac{1}{2}x^2$　　$\therefore \sin\alpha(x)\sim-\dfrac{1}{2}x$

又$\because \sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$　　$\therefore \alpha(x)\sim-\dfrac{1}{2}x$

$\therefore$ $\alpha(x)$与x同阶但不等价的无穷小.　所以选（C）.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\dfrac{2}{n})-1]=$（　）

（A）2　　（B）1　　（C）-1　　（D）-2

【答案】（A）

【解析】因为$x=0$时，$y=1$即$f(0)=1$.

$$\because \lim_{n\to\infty}n\left[f(\frac{2}{n})-1\right]=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}-0}=2f'(0)=2y'|_{x=0}$$

又$\because \cos(xy)+\ln y-x=1$

两边对x求导得：$-\sin(xy)\cdot y+\dfrac{1}{y}\cdot y'-1=0$，

将$x=0,y=1$，代入上式得$y'=1$.

$\therefore$选（A）.

(3) 设函数$f(x)=\begin{cases}\sin x,0\le x<\pi\\ 2,\pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则　　　（　）

（A）$x=\pi$是函数$F(x)$的跳跃间断点

（B）$x=\pi$是函数$F(x)$的可去间断点

（C）$F(x)$在$x=\pi$处连续但不可导

（D）$F(x)$在 x=π处可导

【答案】（C）

【解析】因$x=\pi$是$f(x)$在$[0,2\pi]$唯一的第一类间断点，即$f(x)$在$[0,2\pi]$可积，故$F(x)=\int_0^x f(t)dt$在$[0,2\pi]$连续.

因$x=\pi$是$f(x)$的第一类间断点，故$F(x)$在$x=\pi$不可导. 所以选（C）.

（4）设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}},1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x},x\ge e\end{cases}$，若反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛，则（　）

（A）$\alpha<-2$　（B）$\alpha>2$　（C）$-2<\alpha<0$　（D）$0<\alpha<2$

【答案】（D）

【解析】$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^e\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx+\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx$

$\int_1^e\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx$，$x=1$是瑕点，故$\alpha-1<1$时，瑕积分收敛.

$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx=-\frac{1}{\alpha}(\ln x)^{-\alpha}\Big|_e^{+\infty}$，要使其收敛，需$\alpha>0$.

综上所述$0<\alpha<2\therefore$选（D）.

（5）设$z=\frac{y}{x}f(xy)$，其中函数f可微，则$\frac{x\partial z}{y\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$　（　）

(A) $2yf'(xy)$　(B) $-2yf'(xy)$　(C) $\frac{2}{x}f(xy)$　(D) $-\frac{2}{x}f(xy)$

【答案】（A）

【解析】$\because\frac{\partial z}{\partial x}=(\frac{y}{x}f(xy))'=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)\cdot y=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy)$

$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)\cdot x=\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)$

$\therefore\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'(xy)$　$\therefore$选（A）.

（6）设 D_k 是圆域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy$，

$(k=1,2,3,4)$ 则　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(A)　$I_1>0$　　　　(B) $I_2>0$　　　　(C)　$I_3>0$　　　　(D)　$I_4>0$

【答案】(B)

【解析】方法一：

$$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy=\int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}}d\theta\int_0^1(r\sin\theta-r\cos\theta)rdr=\frac{1}{3}\int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}}(\sin\theta-\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}}(\sin\theta-\cos\theta)d\theta=-\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\Big|_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}}$$，代入得 $I_2=\frac{2}{3}>0.$

方法二：

$\because$ 第二象限中 $y>0$，$x<0$，始终 $y>x$　即　$y-x>0$　　$\therefore$ I_2>0 $\therefore$ 选（B）.

(7) 设 A，B，C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 B 可逆，则　　　　　　　　　（　　）

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量等价

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量等价

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量等价

(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量等价

【答案】(B)

【解析】将 A,C 按列分块，$A=(\alpha_1,...,\alpha_n),C=(\gamma_1,...,\gamma_n)$

由于 $AB=C$，故

$$(\alpha_1,...,\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ . & ... & . \\ b_{n1} & ... & b_{nn}\end{pmatrix}=(\gamma_1,...,\gamma_n)$$

即 $\gamma_1=b_{11}\alpha_1+...+b_{n1}\alpha_n,...,\gamma_n=b_{1n}\alpha_1+...+b_{nn}\alpha_n$

即 C 的列向量组可由 A 的列向量线性表示

由于 B 可逆，故 $A=CB^{-1}$，A 的列向量组可由 C 的列向量组线性表示 $\therefore$ 选（B）.

(8) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为　　　　　　　　　（　　）

(A) $a=0,b=2$　(B) $a=0,b$ 为任意实数　(C)　$a=2,b=0$　(D) $b=0,a$ 为任意实数

【答案】(B)

【解析】令 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

因为 A 为实对称矩阵，B 为对角阵，则 A 与 B 相似的充要条件是 A 的特征值分别为 $2,b,0$

A 的特征方程 $\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-a&-1\\0&\lambda-b&-a\\-\lambda&-a&\lambda-1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\lambda&-a&-1\\0&\lambda-b&-a\\0&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\left[(\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2\right],$$

因为 $\lambda=2$ 是 A 的特征值，所以 $\left|2E-A\right|=0$

所以 $-2a^2=0$，即 $a=0$.

当 $a=0$ 时，$\left|\lambda E-A\right|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)$，

A 的特征值分别为 $2,b,0$ 所以 b 为任意常数即可． 故选(B).

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to0}(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=$____________.

【答案】$e^{\frac{1}{2}}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}(1-\frac{\ln(1+x)}{x})\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2x(1+x)}}=e^{\frac{1}{2}}$.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数

$\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}=$________.

【答案】$\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

【解析】

$f(-1)=0, f'(x)=\sqrt{1-e^x}, f'(-1)=\sqrt{1-e^{-1}}$

$\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$.

（11）设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta(-\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{6})$，则 L 所围平面图形的面积是____.

【答案】$\dfrac{\pi}{12}$

【解析】$S=\dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta=\dfrac{1}{2}\left(\theta+\dfrac{\sin 6\theta}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\pi}{12}$.

（12）曲线 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为__________.

【答案】$y=-x+\dfrac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}$

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}.\dfrac{1}{2}\left(1+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}.2t}{\dfrac{1}{1+t^2}}=t$,

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=t\big|_{t=1}=1$.

当 $t=1$ 时 $x_0=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$，$y_0=\ln\sqrt{1+1}=\ln\sqrt{2}$，

所以法线方程 $y-y_0=-1(x-x_0)$，即 $y-\ln\sqrt{2}=-x+\dfrac{\pi}{4}$.

（13）已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程满足条件 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$___________.

【答案】$e^{3x}-e^x-xe^{2x}$

【解析】$y_1-y_2=e^{3x}-e^x, y_1-y_3=e^{3x}$

故该方程组的通解为 $y=C_1\left(e^{3x}-e^x\right)+C_2e^{3x}-xe^{2x}$. 由 $y(0)=0, y'(0)=1$, 得 $C_1=1, C_2=0$.

从而满足初始条件的解为 $y=e^{3x}-e^x-xe^{2x}$.

（14）设 $A=(a_{ij})$ 是三阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若

$a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则$|A|=$__________.

【解析】方法一：取矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，满足题设条件，$|A|=-1$.

方法二：$A^*=-A^T$，则$|A^*|=|-A^T|$，整理得到$|A|^{3-1}=(-1)^3|A|$，即$|A|=-1$或者$|A|=0$.

$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=-\left(a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2\right)\le 0$

又因为$A\ne O$，所以至少有一个$a_{ij}\ne 0$，所以

$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=-\left(a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2\right)<0$

从而$|A|=-1$.

三、解答题：15～23小题，共94分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分10分)

当$x\to 0$时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$与$ax^n$为等价无穷小.求$n$与$a$的值.

【解析】方法一：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\cos 6x+\cos 4x+\cos 2x+1}{4}}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-\cos 6x-\cos 4x-\cos 2x}{4ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x+4\sin 4x+2\sin 2x}{4a\cdot n\cdot x^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{36\cos 6x+16\cos 4x+4\cos 2x}{4a\cdot n(n-1)x^{n-2}}$$

$\therefore n-2=0$，即$n=2$时，上式极限存在.

当$n=2$时，由题意$\dfrac{36+16+4}{4a\cdot 2\cdot 1}=1\Rightarrow a=7\quad \therefore n=2,a=7$.

方法二：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x]\sin x}{ax^n\cdot\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\dfrac{1}{4}\sin 4x\cdot\cos 3x}{ax^n\cdot\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\frac{1}{8}(\sin 7x+\sin x)}{ax^{n+1}}=\frac{7}{8}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 7x}{a(n+1)x^{n}}=\frac{7}{8}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+1-\cos 7x}{a(n+1)x^{n}}$$

当$n=2$时，

$$I=\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3a}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+1-\cos 7x}{x^2}=\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3a}\left(\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 7x}{x^2}\right)$$

$$=\frac{7}{24a}\left(\frac{-1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{(7x)^2}{x^2}\right)=\frac{7}{a}=1$$

得到$a=7$

方法三：

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{-\left(\cos x\cos 2x\cos 3x\right)'}{nax^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{-\left(e^{\ln\cos x\cos 2x\cos 3x}\right)'}{nax^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\left(e^{\ln\cos x\cos 2x\cos 3x}\right)'}{nax^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x\cos 2x\cos 3x\left(\ln\cos x\cos 2x\cos 3x\right)'}{nax^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\left(\ln\cos x+\ln\cos 2x+\ln\cos 3x\right)'}{nax^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x}+2\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+3\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right)}{nax^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\tan x+2\tan 2x+3\tan 3x\right)}{nax^{n-1}}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{\left(\sec^2 x+4\sec^2 2x+9\sec^2 3x\right)}{n\left(n-1\right)ax^{n-2}}$$

$=\frac{14}{n\left(n-1\right)a}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{n-2}}=\frac{14}{n\left(n-1\right)a}\lim_{x\to0}x^{2-n}=1$，故$n=2,a=7$.

(16)(本题满分 10 分)

设D是由曲线$y=x^{\frac{1}{3}}$，直线$x=a(a>0)$及x轴所围成的平面图形，V_x,V_y分别是D绕x轴，y轴旋转一周所得旋转体的体积，若$V_y=10V_x$，求a的值.

【解析】由旋转体积公式得：

$V_x=\int_0^a\pi(x^{\frac{1}{3}})^2dx=\frac{3\pi}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_0^a=\frac{3\pi}{5}a^{\frac{5}{3}}$，

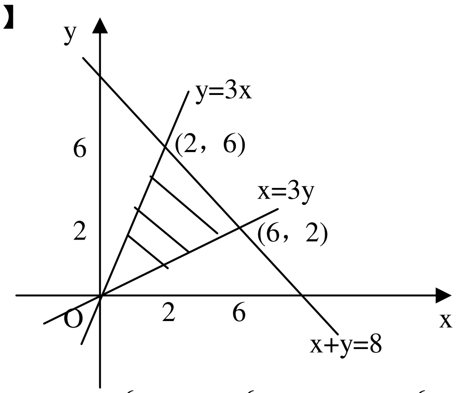
$$V_y=\int_0^a 2\pi x(x^{\frac{1}{3}})dx=\frac{3}{7}2\pi x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^a=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}$$

由已知条件知$V_y=10V_x$，故$\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=10\frac{3\pi}{5}a^{\frac{5}{3}}$，所以$a=7\sqrt{7}$.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域D由直线$x=3y, y=3x$及$x+y=8$围成. 计算$\iint\limits_D x^2dxdy$.

【解析】



由$\begin{cases}x=3y\\x+y=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$，$\begin{cases}y=3x\\x+y=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$

故

$$\iint\limits_D x^2dxdy=\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{3}}^{3x}x^2dy+\int_2^6 dx\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}x^2dy$$

$$=\frac{2}{3}x^4\Big|_0^a+\left(\frac{8}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4\right)\Big|_0^a=\frac{32}{3}+128=\frac{416}{3}.$$

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有 2 阶导数，且$f(1)=1$. 证明：

（I）存在$\xi\in(0,1)$. 使得$f'(\xi)=1$;

（II）存在$\eta\in(0,1)$ 使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

【解析】

（I）由于$f(x)$在$[-1,1]$上为奇函数，故$f(-x)=-f(x)$，则$f(0)=0$

令$F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$F(1)=f(1)-1=0$

$F(0)=f(0)-0=0$，由罗尔定理，存在$\xi\in(0',1)$，使得$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=1$.

（II）由于$f(x)$在$[-1,1]$上为奇函数，则$f'(x)$在$[-1,1]$上为偶函数，所以由（I）

$f'(-\xi)=f'(\xi)=1$.

令$G(x)=e^x\left[f'(x)-1\right]$，则$G(x)$在$[-1,1]$上连续，在$\left(-1,1\right)$内可导，且

$G(\xi)=G(-\xi)=0$，由罗尔定理存在$\eta\in(-\xi,\xi)\subset(0,1)$，使得$G'(\eta)=0$

即$f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19)(本题满分 10 分)

求曲线$x^3-xy+y^3=1(x\ge 0,y\ge 0)$上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

【解析】设$d=\sqrt{x^2+y^2}$

建立拉格朗日函数

$L(x,y,\lambda)=(x^2+y^2)+\lambda(x^3-xy+y^3-1)$

令
$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda(3x^2-y)=0 & ①\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda(3y^2-x)=0 & ②\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^3-xy+y^3-1=0 & ③\end{cases}$$

(i) 若$\lambda=0$，得$x=y=0$不合题意.

(ii) 若$\lambda\ne 0$，得$y-3x^2=0$或$x-3y^2=0$，均得$x=y=0$不合题意.

若$\lambda\ne 0$，得$y\ne 3x^2$或$x\ne 3y^2$，由①②得$(x-y)(x+y+3xy)=0$

$x+y+3xy\ne 0$，$x=y$代入③得$2x^3-x^2-1=0$，即$(x-1)(2x^2+x+1)=0$得$x=y=1$，

故距离为$\sqrt{2}$.

又$x=0,y=1,d=1$；$y=0,x=1,d=1$

所以最长距离为$\sqrt{2}$，最短距离为 1.

(20)(本题满分 11 分)

设函数$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$

(I)求$f(x)$的最小值；

(II)设数列$\{x_n\}$满足$\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$.证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求此极限.

【解析】(I) $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x},x>0,f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$

令$f'(x)=0,x=1$是唯一驻点，且当$0<x<1,f'(x)<0$，当$x>1,f'(x)>0$

所以$x=1$是$f(x)$的极小值点，故$f(1)=1$是最小值.

（II）由（I）知$\ln x_n+\frac{1}{x_n}\geq 1$，又由已知$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$

可得$\frac{1}{x_n}>\frac{1}{x_{n+1}}$，即$x_n<x_{n+1}$，所以$\left\{x_n\right\}$单调递增.

又由$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$，可得$\ln x_n<1,0<x_n<e$，所以$\left\{x_n\right\}$有上界.

由单调有界定理，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设为$A$.

对于$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$两边取极限得$\ln A+\frac{1}{A}\leq 1$，

又$\ln A+\frac{1}{A}\geq 1$，所以$\ln A+\frac{1}{A}=1$，又由（I）可知$A=1$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

(21)(本题满分 11 分)

设曲线L的方程为$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\quad(1\leq x\leq e)$.

(I)求L的弧长;

(II)设D是由曲线L，直线$x=1$，$x=e$及x轴所围成平面图形，求D的形心的横坐标.

【解析】(I) 设弧长为s，由弧长的计算公式，得

$$s=\int_1^e\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x})^2}dx$$

$$=\int_1^e\sqrt{(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x})^2}dx=(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x)\Big|_1^e$$
$$=\frac{1+e^2}{4}.$$

(II)由形心的计算公式，得

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy}=\frac{\int_0^1dx\int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x}xdy}{\int_1^e(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x)dx}=\frac{\int_1^e x(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x)dx}{\int_1^e(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x)dx}$$

$$=\frac{\frac{1}{16}e^4-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}(e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2})}{\frac{1}{12}e^3-\frac{1}{12}-\frac{1}{2}}=\frac{3(e^4-2e^2-3)}{4(e^3-7)}.$$

(22)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C，使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C.

【解析】设 $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，由于 $AC-CA=B$，故

$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix},$$

即 $\begin{pmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}\qquad (\text{I})$$

由于矩阵 C 存在，故方程组(I)有解. 对(I)的增广矩阵进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & \vdots & 0\\ -a & 1 & 0 & a & \vdots & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b\end{pmatrix}$$

方程组有解，故 $a+1=0$，$b=0$，即 $a=-1,b=0$.

当 $a=-1,b=0$ 时，增广矩阵变为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$

x_3,x_4 为自由变量，令 $x_3=1,x_4=0$，代为相应的齐次方程组，得 $x_2=-1,x_1=1$.

令 $x_3=0,x_4=1$，代为相应齐次方程组，得 $x_2=0,x_1=1$.

故 $\xi_1=(1,-1,1,0)^T$，$\xi_2=(1,0,0,1)^T$，令 $x_3=0,x_4=0$，得特解 $\eta=(1,0,0,0)^T$，方程组的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=(k_1+k_2+1,-k_1,k_1,k_2)^T$，所以 $C=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$. 记

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

(Ⅱ)若 α，β 正交且均为单位向量. 证明 f 在正交变换下的标准型为 $2y_1^2+y_2^2$.

【解析】证明：(Ⅰ) $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$

$$=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$+\ (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\left(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$=x^TAx$，其中 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$.

由于 $A^T=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)^T=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T=A,$ 所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$.

(II)由于 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，$\alpha$ 与 β 正交,故 $\alpha^T\beta=0$，α，β 为单位向量,故 $\|\alpha\|=\sqrt{\alpha^T\alpha}=1$，

故 $\alpha^T\alpha=1$，同样 $\beta^T\beta=1$.

$A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha\alpha^T\alpha+\beta\beta^T\alpha=2\alpha$，由于 $\alpha\neq 0$，故 A 有特征值 $\lambda_1=2$.

$A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=\beta$，由于 $\beta\neq 0$，故 A 有特征值 $\lambda_2=1$.

$r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leq r(2\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\ 1+1=2<3$.

所以 $|A|=0$，故 $\lambda_3=0$.

因此 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.