笔记部分

2021年10月7日 23:04

1.1 数域 → 1.2 多项式 → 多项式环 → 1.3 带余除 整除th → 整除关系 → 带余除法 → 1.4 最大公因式 → 互素 → 1.5 因式分解 → 不可约多 → 因式分解 → 1.6 重因式 → 1.7 多项式函数及根 → 1.8 各系数多项式 → 复系数 → 实系数 → 有理系数

1.1 数域

定义
命题
任意数域
都包含有理
数域

1.2 多项式

多项式的指数运算
错题
题目1
答案1

多项式环

"被削了的数域"

1.3 带余除 整除th

重要例题

整除关系

三个推论
两个性质
相伴

带余除法

定理定理
(两个条件限制,
两个结论限制)
证明
存在性证明
唯一性证明
反证法

1.4 最大公因式

最大公因式与
线性组合的关系
定义
引例证明
错题
题目1
题目2
题目3
题目4
答案1
答案2
答案3
答案4

互素

定义
三个性质
证明
不整除

1.5 因式分解

错题
题目1
答案1

辗转相除法
例题

不可约多

定义
两个性质
错题
题目1
题目2
题目3
答案1
答案2
答案3

因式分解

唯一因式分解定理

1.6 重因式

定义
$p^k(x)|f(x)$,
$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$
定理1
证明1
3推论
注意！！！
若g(x)是f'(x)的重因式,
则g(x)是f(x)的重根(错)

1.7 多项式函数及根

余数定理
定义
(重)根与(重)因式的关系
当次数为2、3时
等价条件
当次数大于3时
重因式不一定重根
错题
题目1
题目2
答案1
答案2

1.8 各系数多项式

复系数

代数基本定理
不可约多=>一次多项式
n次有n个复根
唯一分解为一次因式乘积

数域扩大

实系数

c是复根=>c一拔也是
不可约多项式=>
一次或△<0的二次多项式
唯一分解△<0和一次的乘积
错题

有理系数

q/p是f(x)的一个有理根
$=>p|a_n,q|a_0$
存在素数p,若
$p|a_i,i=0,1...n-1;$
$p\nmid a_n;$
$p^2\nmid a_0$
那么在Q上不可约
注意:不是万能的!!
(充分不必要)
可令x=ay+b再进行
判断
错题
题目1
题目2
题目3
题目4
答案1
答案2
答案3
答案4
例题
eg1
eg2

错题集题目

2021年10月27日　16:30

3'. 设 $f(x), g(x), h(x)$ 都是实数域上的多项式，证明：若 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

3. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不全为零，$d(x)=(f(x),g(x))$，$f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，证明：$(f_1(x),g_1(x))=1$.

4. 如果 $f(x),g(x)$ 不全为零，且满足 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，证明 $u(x),v(x)$ 互素.

5. 证明：若 $(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1$，则 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

3. 设 $f($

(1) $f(x)=x^2+1$;

(有理数域上是否可约？)

2. 证明：设 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，且 $p(x)|f(x)g(x)$，则 $p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$.

3. 证明：$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 不能有重根.

3. 整系数多项式 $f(x)$ 在 Z 上不可约是其

(A) 充分；　(B) 充分必要；　(C) 必要

4. 已知 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，$f(x),g(x)\in P[x]$，则下列命题中错误的是(　　).

(A) 若 $p(x)\nmid f(x)$，则 $(p(x),f(x))=1$;

(B) 若 $(p(x),f(x))=1$，则 $p(x)\nmid f(x)$;

(C) 若 $p(x)|f(x)g(x)$，且 $p(x)\nmid f(x)$，则 $(p(x),g(x))\neq 1$;

(D) 若 $p(x)|f(x)g(x)$，则 $(f(x),g(x))=1$.

6. 设多项式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 余式为 2，除以 $x-3$ 余式为 5，则 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-3)$ 的余式为__________.

4. 如果实数域上的多项式 $f(x)$ 没有实根,则 $f(x)$ 在实数域上不可约.(　)

5.

约

13. 多项式 x^4+1 在实数域上______(选填"可约"或"不可约").

6. 若 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，那么 $p(x)$ 在 P 中必定没有根.

(　　)

$x), g(x)$ 不全为零，证明 $\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1$.

实在 Q 上不可约的(　　　)条件.

要;　　(D) 既不充分也不必要.

如果有理数域上的多项式 $f(x)$ 没有有理根，则 $f(x)$ 在有理数域上不可

. (　　)

错题集答案

2021年10月27日 16:30

证 若 $g(x)=h(x)=0$，则 $f(x)=0$，上式成立.

若 $g(x)$ 与 $h(x)$ 中至少有一个不等于零，则 $xg^2(x)+xh^2(x)\neq 0$，从而 $f^2(x)\neq 0$，因 $\partial(xg^2(x)+xh^2(x))$ 为奇数，而 $\partial(f^2(x))$ 是偶数，从而与 $xg^2(x)+xh^2(x)=f^2(x)$ 矛盾. 故必有 $g(x)=h(x)=0$，于是 $f^2(x)=0$，等式 $f(x)=g(x)=h(x)=0$ 成立.

2021.11.8 核心思路正确，但是没有分正确情况

2021.12.21 情况分的不正确，差不多，核心抓住了

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不全为零，$d(x)=(f(x),g(x))$，$f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，证明：$(f_1(x),g_1(x))=1$.

2021，11，8做对，但是没有注意条件的运用，所以不完全对

2021.12.21 核心对了，但是逻辑没理清

4. 如果 $f(x),g(x)$ 不全为零，且满足 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，证明 $u(x),v(x)$ 互素.

2021.12.21 受上一道题启发做对

如果 $(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$，则 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

2021.12.21 没做出来

证明 根据定理 2，有多项式 $u(x),v(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x)),$$

于是

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1,$$

再根据定理 3，即得

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1.$$

(1) $f(x)=x^2+1$;

证明 如果 $p(x)\nmid f(x)$，则 $(p(x),f(x))=1$. 因此，存在多项式 $u(x),v(x)\in F[x]$，使得

$$p(x)u(x)+f(x)v(x)=1.$$

因此，

$$p(x)\big(u(x)g(x)\big)+\big(f(x)g(x)\big)v(x)=g(x).$$

由此即知，$p(x)\mid g(x)$.

2021.12.21做不来

提示 证明 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 与其导数互素.

证明 记 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$，则

$$f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=f(x)-\frac{x^n}{n!},$$

即有 $f(x)-f'(x)=\frac{x^n}{n!}$，因此

$$(f(x),f'(x))=\left(f(x),\frac{x^n}{n!}\right)=1.$$

根据定理 6 推论 3 知 $f(x)$ 不能有重根.

2021.12.22做错

3. 整系数多项式 $f(x)$ 在 Z 上不可约是其在 Q 上不可约的(B)条件.

(A) 充分; (B) 充分必要; (C) 必要; (D) 既不充分也不必要.

2021.12.22 做错

可约

5. 如果有理数域上的多项式 $f(x)$ 没有有理根，则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.(×)

4. 已知 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，$f(x),g(x)\in P[x]$，则下列命题中错误的是(D).

(A) 若 $p(x)\nmid f(x)$，则 $(p(x),f(x))=1$;

(B) 若 $(p(x),f(x))=1$，则 $p(x)\nmid f(x)$;

(C) 若 $p(x)\mid f(x)g(x)$，且 $p(x)\nmid f(x)$，则 $(p(x),g(x))\neq 1$;

(D) 若 $p(x)\mid f(x)g(x)$，则 $(f(x),g(x))=1$.

2021.12.21 做错，对B有疑问

6. 设多项式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 余式为 2，除以 $x-3$ 余式为 5，则 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-3)$ 的余式为 $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

$f(1)=2$

$f(3)=5$

2021.12.22 做对

4. 如果实数域上的多项式 $f(x)$ 没有实根，则 $f(x)$ 在实数域上不可约.(×)

2021.12.21 做对

6. 若 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式，那么 $p(x)$ 在 P

(×) 一次多项式不可约，但是有一个

2021.12.21做对

中必定没有根.

定理证明

2021年10月12日　9:27

证　存在性

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$　$(g(x)\neq 0)$

$\exists q(x),r(x)$, s.t. $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$

(1) 若$f(x)=0$,　取$q(x)=r(x)=0$.

(2) 若$f(x)\neq 0$,

当$n<m$时,　取$q(x)=0$, $r(x)=f(x)$即可.

当$n\geq m$时,　对$f(x)$的次数$\partial f(x)$用数学归纳法:

1) 当$\partial(f(x))=0$时, 则 $f(x)=a\neq 0$　从而$g(x)=b\neq 0$

取$q(x)=\frac{a}{b}$, $r(x)=0$即可.

2) 假设当$\partial(f(x))<n$时,结论成立.

3) 下证当$\partial(f(x))=n$时,结论也成立:

证　存在性

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$　$(g(x)\neq 0)$

$\exists q(x),r(x)$, s.t. $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$

3) 下证当$\partial(f(x))=n$时,结论也成立:

令$f_1(x)=f(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)$　(*)　构造$f_1(x)$是关键

则$\partial(f_1(x))<n$　由归纳法假设,得

$f_1(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$　(**)

其中$r_1(x)=0$,或者 $\partial(r_1(x))<\partial(g(x))$.

将(**)代入(*),得

$f(x)=g(x)(q_1(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m})+r_1(x)$

取 $q(x)=q_1(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$, $r(x)=r_1(x)$

即得 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$　其中$r(x)=0$,或者 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$.

证　唯一性

$f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$　　其中$r_1(x),r_2(x)$满足条件

$f(x)=g(x)q_2(x)+r_2(x)$　　$r_i(x)=0$,或 $\partial(r_i(x))<\partial(g(x))$.

两式相减得

$0=g(x)[q_1(x)-q_2(x)]+[r_1(x)-r_2(x)]$　　(1)

假设$q_1(x)\neq q_2(x)$　　反证法

$\because g(x)\neq 0$　$\therefore g(x)[q_1(x)-q_2(x)]\neq 0$　从而$r_1(x)-r_2(x)\neq 0$

对(1)式由指数定理,得

$\therefore \partial(g(x))+\partial(q_1(x)-q_2(x))=\partial(r_1(x)-r_2(x))$　　(2)

但$\because \partial(g(x))>\partial(r_1(x)-r_2(x))$　$\therefore$(2)式不可能成立　矛盾!

因此$q_1(x)=q_2(x)$　并且$r_1(x)=r_2(x)$

定理　$\forall f(x),g(x)\in P[x]$, 则$f(x)$与$g(x)$的最大公因式一定存在,并且$\exists u(x),v(x)\in P[x]$, 使得

$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

证　记$d(x)=(f(x),g(x))$

(1) 如果$f(x)=g(x)=0$　则$d(x)=0$

且$0=u(x)\cdot 0+v(x)\cdot 0$.　此处$u(x),v(x)$可任取

(2) 如果$f(x)\neq 0$, $g(x)=0$　则$d(x)=cf(x)$

且$cf(x)=c\cdot f(x)+1\cdot 0$

(3) 如果$f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$

引理: $f(x)=g(x)q(x)+r(x)\Rightarrow (f(x),g(x))=(g(x),r(x))$

(3) 如果$f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$　运用带余除法

$f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$　　如果$r_1(x)\neq 0$　　$\partial(r_1(x))<\partial(g(x))$

$g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x)$　　如果$r_2(x)\neq 0$　　$\partial(r_2(x))<\partial(r_1(x))$

$r_1(x)=r_2(x)q_3(x)+r_3(x)$　　如果$r_3(x)\neq 0$　　$\partial(r_3(x))<\partial(r_2(x))$

…………

$r_{s-2}(x)=r_{s-1}(x)q_s(x)+r_s(x)$　　如果$r_s(x)\neq 0$　　$\partial(r_s(x))<\partial(r_{s-1}(x))$

$r_{s-1}(x)=r_s(x)q_{s+1}(x)+0$　　$r_{s+1}(x)=0$　(有限步)

$(f(x),g(x))=(g(x),r_1(x))=(r_1(x),r_2(x))=(r_2(x),r_3(x))=\cdots\cdots$

$=(r_{s-1}(x),r_s(x))=(r_s(x),0)=r_s(x)$

再倒代上去,即得$u(x),v(x)$, 使得

$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$

引理: $f(x)=g(x)q(x)+r(x)\Rightarrow (f(x),g(x))=(g(x),r(x))$

2. 设 $p(x)$是多项式 $f(x)$ 的一个 k $(k>1)$ 重因

数的一个 $k-1$ 重因式.

证: 设 $f(x)=p^k(x)g(x)$, 且 $p(x)\nmid g$

$f'(x)=kp^{k-1}(x)p'(x)g(x)+p^k(x)g$

$=p^{k-1}(x)[kp'(x)g(x)+p(x)g$

此时 $p(x)\mid p(x)g'(x)$

但 $p(x)\nmid kp'(x)g(x)$, 否则与 $p(x)$

因此 $p(x)\nmid kp'(x)g(x)+p(x)g'(x)$

从而 $p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式.

(注: 本题要用到复合函数的求导

引理　如果有等式 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ 成立, 那么 $f(x),g(x)$ 和 $g(x),r(x)$ 有相同的公因式.

证　(1) 设$\varphi(x)\mid f(x)$, $\varphi(x)\mid g(x)$

$\because r(x)=f(x)-q(x)g(x)$　$\therefore \varphi(x)\mid r(x)$

即$f(x),g(x)$的公因式也是 $g(x),r(x)$的公因式.

(2) 设 $\varphi(x)\mid g(x)$, $\varphi(x)\mid r(x)$

$\because f(x)=q(x)g(x)+r(x)$　$\therefore \varphi(x)\mid f(x)$

即$g(x),r(x)$的公因式也是$f(x),g(x)$的公因式.

因式,那么 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的导

(x)

$'(x)$

$g'(x))$

$+g(x)$ 矛盾

)

定义定理

2021年10月12日 15:59

定义1 数域P上次数≥ 1的多项式$p(x)$如果不能表成P上两个次数比$p(x)$低的多项式的乘积,则称$p(x)$为P上的不可约多项式.

定理(因式分解定理) 数域P上每一个次数≥ 1的多项式$f(x)$都可以唯一地分解成数域P上的一些不可约多项式的乘积.

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

其中$p_i(x)\ (i=1,2,\cdots,s)$是不可约多项式.

定理 如果不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式$(k\geq 1)$,那么$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式.

任意非零多项式$g(x)$除$f(x)$，其商式余式一定存在，且余式是惟一满足关系式$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$的零多项式，或次数小于$g(x)$的一个多项式。[1]

推论1 不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的重因式的充分必要条件是:$p(x)$是$f(x)$与$f'(x)$的公因式.

推论2 不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式的充分必要条件是:$p(x)$是$f(x)$与$f'(x)$的最大公因式$(f(x),f'(x))$的$k-1$重因式

推论3 $f(x)$没有重因式的充分必要条件是$f(x)$与$f'(x)$互素,即$(f(x),f'(x))=1$.

定理(余数定理) 用一次多项式$x-c$去除$f(x)$,所得的余数就等于函数值$f(c)$.

每一个次数大于0的复系数多项式至少有一个复根

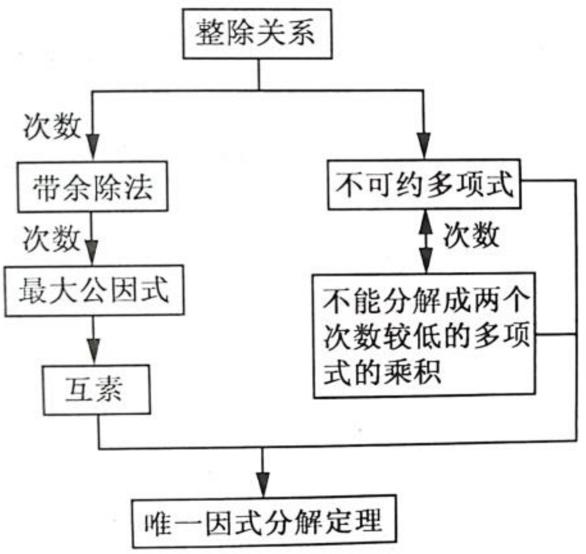
定义2: $d(x)$为$f(x)$与$g(x)$的最大公因式 $\Leftrightarrow$

(1) $d(x)|f(x), d(x)|g(x)$;

(2) 若$\varphi(x)|f(x), \varphi(x)|g(x)$, 则$\varphi(x)|d(x)$.

归纳总结

2021年10月7日 11:42



常用结论

2021年10月12日 9:24

方法总结

2021年10月12日 9:25

(p不可约)

(A) 若 $p(x) \nmid f(x)$, 则 $(p(x), f(x)) = 1$;

14. 多项式性质与数域扩大的关系

1. 多项式的带余除法、整除、最大公因式、互素与数域扩大无关

多项式有无重因式及重根与数域扩大无关

2. 多项式的不可约、因式分解、根与数域扩大有关.

重要例题

2021年10月12日 9:25

4. 把 $f(x)$ 按 $x-x_0$ 的方幂展开: $f(x)=x^4-2x^2+3$, $x_0=-2$.

2. 求下列多项式的有理根:

(1) $f(x)=x^3-6x^2+15x-14$;

3. 下列多项式在有理数域上是否可约

(1) $f(x)=x^2+1$;

(2) $f(x)=x^4-8x^3+12x^2+2$;

4. 把 $f(x)$ 按 $x-x_0$ 的方幂展开: $f(x)=x^4-2x^2+3$, $x_0=-2$.

解:

-2	1	0	-2	0	3	
		-2	4	-4	8	
	1	-2	2	-4		$11=c_0$
		-2	8	-20		
	1	-4	10			$-24=c_1$
		-2	12			
	1	-6				$22=c_2$
		-2				
	$c_4=1$	$-8=c_3$				

$f(x)=(x+2)^4-8(x+2)^3+22(x+2)^2-24(x+2)+11$

2021.11.8.做了一下，不是很熟悉，运算方法掌握还可

2021.12.21 笑死，余数整反了

例 设 $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$, $g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$,

(1) 求 $(f(x),g(x))$;

(2) 求 $u(x),v(x)$ 使 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

(1) $(f(x),g(x))=x+3$

(2) 上述结果用等式写出来

笔记部分

2021年10月8日 9:50

2.0 行列式 → 2.2 排列 → 逆序数 → 2.3 n阶行列式 → 性质 → 2.4 初等行变换 → 2.5 行列式按行展开 → 余子式 → 2.6 克莱姆th → 2.7 拉普拉斯th

2.2 排列

n阶排列
自然顺序

逆序数

奇排列
偶排列

定理

1.对换两数改变排列奇偶性
(很有意思的证明)

2.
任一*n*阶排列都可以对换成自然排列，并且所做的对换次数与这个排列的奇偶性相同

2.3 n阶行列式

定义
对角线法则
求解n阶行列式的常用技巧

性质

1.上下三角
2.转置行列式
行与列等价
3.提公因式(倍乘)
4.拆解多项式
5.交换两行(交换)
6.两行成比例
7.i1+k*i2(倍加)

错题
- [ ] 题目1
答案1

2.5 行列式按行展开

错题
- [ ] 题目1
答案1

余子式

定义
$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$
行列式与代数余子式的关系
(D) (A_{ij})

错题
- [ ] 题目1
答案1

2.6 克莱姆th

定理
计算难，适用于**理论性推导**
齐次方程组是否零解

错题
- [ ] 题目1
答案1

2.7 拉普拉斯th

高级版
按行展开
- [ ] 题目1
答案1

错题集题目

2021年10月26日 11:06

计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

14. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}=0$ 的所有根为

$$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 295 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}=\_\_\_$$

16. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ x & x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}=0$ 的所有根为

$D=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，则余子式 $M_{41}+M_{42}+M_{43}-M_{44}=\_$

已知平面曲线 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 经过四个点 $(1,3)$，$(2,4)$，$(3,3)$，$(4,-3)$，则系数 a_0,a_1,a_2,a_3 为(

(A) $a_0=3, a_1=-3/2, a_2=2, a_3=-1/2$；

(B) $a_0=-3, a_1=3/2, a_2=-2, a_3=1/2$；

(C) $a_0=3, a_1=3/2, a_2=2, a_3=1/2$；

(D) $a_0=-3, a_1=-3/2, a_2=-2, a_3=-1/2$.

错题集答案

2021年10月26日 11:07

1 1,-1,2,-2 0,-1,2,3

1

82000

2021.12.27算对 A(好像是)

定理证明

2021年10月16日 11:24

$$(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots j\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)} \qquad (-1)^{\tau(1\cdots j\cdots i\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}$$

而排列$1\cdots i\cdots j\cdots n$和排列$1\cdots j\cdots i\cdots n$的奇偶性相反,

定义定理

2021年10月16日 11:24

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$n!$项的代数和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定义 7 在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}.

$$\begin{vmatrix} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \cdots + ka_{in}A_{in}$$

性质4 交换行列式的两行(或两列)，行列式的值变号，$D_1 = -D$.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{行}) \\ \\ \\ \end{matrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

推论2 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则行列式的值为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kb_1 & kb_2 & \cdots & kb_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质5 把行列式某一行(列)的倍数加到另一行，行列式的值不变.

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 3 设

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式，则下列公式成立：

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} d, & k = i, \\ 0, & k \neq i; \end{cases} \qquad (6)$$

$$a_{1l}A_{1j} + a_{2l}A_{2j} + \cdots + a_{nl}A_{nj} = \begin{cases} d, & l = j, \\ 0, & l \neq j. \end{cases} \qquad (7)$$

定理2.4 (克莱姆(Cramer)法则) 如果线性方程组的系数行列式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有解，且解是唯一的: $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$

其中 $D_j\,(j = 1,2,\ldots,n)$ 是将系数行列式 D 中第 j 列元素对应地换为方程组的常数项 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 后得到的行列式.

不分
非齐次和齐次

齐次线性方程组仅有零解 $\Longleftrightarrow$ $D \neq 0$

齐次线性方程组有非零解 $\Longleftrightarrow$ $D = 0$

归纳总结

2021年10月16日 11:24

常用结论

2021年10月20日 20:53

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$D_1=a+b$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}=a^2+b^2+ab$$

$$D_n=(a+b)\,D_{n-1}-ab\,D_{n-2}$$ (递推式)

$$\Rightarrow D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})=\cdots=a^{n-2}(D_2-bD_1)=a^n$$

$$\Rightarrow D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^n$$

$$\begin{cases} D_n-bD_{n-1}=a^n \\ D_n-aD_{n-1}=b^n \end{cases}$$

$$D_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

方法总结

2021年10月20日　　20:54

求解n阶行列式的常用技巧

递推法、归纳法

1.行和相等的行列式		先加后减	
2.两条线性行列式		直接展开	
3.爪形(箭形)行列式		倍加化零	
4.Hessenberg行列式		(化简)展开	例题1 例题2
5.三对角行项式			
6.范德蒙德行列式 错题 题目1 答案1	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$	利用公式	例题

重要例题

2021年10月20日 20:54

例 计算$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2^2&\cdots&2^n\\3&3^2&\cdots&3^n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{vmatrix}$

解

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2^2&\cdots&2^n\\3&3^2&\cdots&3^n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot3\cdots n\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&2^2&\cdots&2^{n-1}\\1&3&3^2&\cdots&3^{n-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&n&n^2&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots\cdots[n-(n-1)]$$

$$=n!\,(n-1)!\,(n-2)!\cdots2!\,1!.$$

例 计算$D_n=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_{n-2}&a_{n-1}&a_n\\-1&x&0&\cdots&0&0&0\\0&-1&x&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&x&0\\0&0&0&\cdots&0&-1&x\end{vmatrix}$

从第一列开始，每列乘x加到下一列：$c_{i+1}+xc_i$

$$=\begin{vmatrix}a_1&a_2+a_1x&a_3+a_2x+a_1x^2&\cdots&a_{n-1}+a_{n-2}x+\cdots+a_1x^{n-2}&a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}\\-1&0&0&\cdots&0&0\\0&-1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&-1&0\end{vmatrix}$$

按第n列展开

$$=\begin{vmatrix}a_1&a_2+a_1x&a_3+a_2x+a_1x^2&\cdots&a_{n-1}+a_{n-2}x+\cdots+a_1x^{n-2}&a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}\\-1&0&0&\cdots&0&0\\0&-1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&-1&0\end{vmatrix}$$

按第n列展开

$$=(a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1})(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\0&-1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}$$

$$=(a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1})(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}\quad=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}$$

例 计算$D_n=\begin{vmatrix}x+a_1&x&x&\cdots&x&x\\-a_1&a_2&0&\vdots&0&0\\0&-a_2&a_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}&0\\0&0&0&\cdots&-a_{n-1}&a_n\end{vmatrix}$

将D_n按最后一行(或最后一列)展开，得

$D_n=a_nD_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-1}x$

$D_{n-1}=a_{n-1}D_{n-2}+a_1a_2\cdots a_{n-2}x$

$D_{n-2}=a_{n-2}D_{n-3}+a_1a_2\cdots a_{n-3}x$

$$D_2=\begin{vmatrix}x+a_1&x\\-a_1&a_2\end{vmatrix}=(a_1+a_2)x+a_1a_2\quad\Rightarrow D_n=a_1a_2\cdots a_n+x\sum_{i=1}^{n}a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n$$

笔记部分

2021年10月26日 10:09

第三章仍需补充。。

注意！！ 区分行列式与矩阵运算法则！！！

3.1 矩阵的定义 → 常见矩阵 → 3.2 矩阵的运算 (1) → 两者关系 → 同型运算 → 乘法运算 → E在乘法中 → 可交换 → 方幂 → 3.2 矩阵的运算 (2) → 转置 → 方阵行列式 → 3.3 方阵多项式 → 3.4 矩阵的逆 → 逆的定义 → 逆的性质 → 伴随矩阵 → 求逆定

3.1 矩阵的定义

数表

注意！！ 区分行列式与矩阵

矩阵行数可不等于列数

矩阵本身没有数量特性

常见矩阵

强调**全体元素**

1.零矩阵

2.上三角矩阵

3.对角矩阵

3.1.数量矩阵(k)

3.2.单位矩阵(E或I)

4.对称矩阵

4.1反对称矩阵

3.2 矩阵的运算 (1)

小技巧

两者关系

1.同型矩阵

行列数相等

2.相等**(全体)**

A=B

同型运算

1.加法

2.数乘

"线性"运算满足

交换律、结合律

分配律(2种)

乘法运算

条件

法则

结果

只满足

结合律

(AB)C=A(BC)

(kA)B=A(kB)

分配律

A0=0A=0

题目1

题目2

答案1

答案2

E在乘法中

$E_s*A_{s*n}=A_{s*n}$

$A_{m*s}*E_s=A_{m*s}$

AE=EA=A

(kE)A=A(kE)=kA

可交换

AB=BA

题目1

题目2

答案1

答案2

方幂

前提

$A^k=A...A$

$A^{k+l}=A^k*A^l$

不满足

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$(A+B)^n=...$

$(AB)^k=A^kB^k$

秩一矩阵可拆(行列成比例)

3.2 矩阵的运算 (2)

转置

法则

性质

$(A^T)^T=A$

$(A+B)^T=A^T+B^T$

$(kA)^T=kA^T$

$(AB)^T=B^TA^T$

$(A_1A_2...A_k)^T=A_K^T...A_1^T$

(先穿后脱原则)

与对称矩阵的关系

推论1

任一方阵A都能为

推论2

同阶(反)对称矩阵的和

推论3

同阶的(反)对称矩阵A、B,

且AB是(反)对称矩阵

<=>A与B可互换

方阵行列式

符号

|A|=detA

性质(设A为方阵)

$|A^T|=|A|$

$|kA|=k^n|A|$

$|AB|=|A||B|$

$|A+B|!=|A|+|B|$

等号两边同时取行列式

！！不可在不等号两边同取行列式

题目1

题目2

答案1

答案2

3.3 方阵多项式

$f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+...+a_0E_k$

3.4 矩阵的逆

特殊的关于逆

1.0不可逆

2.对角矩阵一定可逆

3.E=-E(还有其他)

总结于此

逆的定义

任意A,都存在B

使得AB=BA=E

(推论:AB=E也可)

则A可逆，B是A的逆

$B=A^{-1}$

说明

1.可交换、方阵

2、唯一性

证明

矩阵求逆专题

逆的性质

1.$(A^{-1})^{-1}=A$

2.$(kA)^{-1}=(1/k)*A^{-1}$

3.$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

4.$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

5.$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

6.$A^{-1}+B^{-1}!=(A+B)^{-1}$

伴随矩阵

满足AB=E.

那么B具有什么通性呢

B=()

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{matrix}$$

$=A^*$

即$AA^*=|A|E$(行列式按行展开)

特殊

A=a b A^*=d -c

c d -b a

性质

1.若A可逆,则A^*可逆,

且$(A^*)^{-1}=A/|A|$

2.$|A^*|=|A|^{n-1}$(n阶方阵)

证明

3.$AA^*=A^*A=E|A|$

求逆定

A可逆

证明求

推论

理

$<=>|A|!=0$

逆定理

$A^{-1}=A^*/|A|$

$|A||A^{-1}|=1$

$B=A^{-1}<=>AB=E$

可逆可消

A可逆，则

$AB=0=>B=0$

$BA=0=>B=0$

$AB=AC=>B=C$

$(A^{-1}AB=A^{-1}AC)$

矩阵方程

$AX=B$(A可逆)$=>X=A^{-1}B$

$XA=B$(A可逆)$=>X=BA^{-1}$

$AXB=C$(B可逆)$=>X=A^{-1}CB^{-1}$

特殊单元矩阵方程

幂等$A^2=A$例题

对合$A^2=E$

幂零$A^2=0$

求解矩阵方程常用方法

3.5

矩阵分块

(拼)

分块方式

1.按行、列分

2.二分法

3.分块对角矩阵(准对角矩阵)

4.分块三角矩阵(准上、下三角)

运算法则

加法、数乘、转置、乘法都要做**两次运算**(总+小块)

其中乘法前提要求两层行数=列数

求逆只掌握

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix};\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$

详细球阀

3. 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2-5A+6E=0$，判断 $A+3E$ 与 $A-3E$ 是否一定可逆，如果可逆，求出其逆.

4. 设 A，B 均为 n 阶可逆矩阵. 证明：如果 $A+B$ 可逆，那么 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆，并求其逆阵 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$.

2. 设方阵 A 满足 $A^k=0$，证明：矩阵 $E-A$ 可逆，并且有

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

11. 证明：如果 A 是实对称矩阵，且 $A^2=O$，那么 $A=O$.

6. 设 n 阶矩阵 A，B 满足 $A+B=AB$. 证明：

(1) $A-E$ 可逆，并求 $(A-E)^{-1}$；(2) $BA=AB$.

2. 设 A 是 n 阶方阵，满足 $A^TA=E$，且 $|A|<0$，求 $|A+E|$.

10. 设 A，B 都是 n 阶的对称矩阵，证明：AB 也对称当且仅当 A，B 可交换

与对角矩阵可交换的只能是对角矩阵 ()

3. 设 A 是 n 阶矩阵，且 $A^3=0$，则 $(E-A)^{-1}=$_

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\quad B!=0\quad AB=0$$

求t

7. 如果 $A=\frac{1}{2}(B+E)$，证明：$A^2=A$ 当且仅当 $B^2=E$.

设a,b,c,d是不全为零的实数,证明齐次线性方程组只有零解.

ax1+bx2+cx3+dx4=0

bx1 -ax2+dx3 -cx4=0

cx1 -dx2 -ax3+bx4=0

dx1+cx2 -bx3 -ax4=0.

错题集答案

2021年10月27日　16:31

$(E-A)^{-1}\cdot(E-A)=E-A^k=E$

2021.12.19 做对

证明：(1) $A+B=AB$

$A=AB-EB$

$A=(A-E)B$.

$A+(E-A)=(A-E)B+(E-A)E$

$(A-E)(B-E)=E$

故 $(A-E)^{-1}$存在

$(A-E)^{-1}=B-E$

(2) ∵ $(A-E)$可与$B-E$

∴ $(B-E)(A-E)=E$ 互逆

~~∴ $(A-E)(B-E)=E$~~

~~即 $BA=B+A=A+B$~~

~~$=AB$~~.

∴ $(B-E)(A-E)$

$=(A-E)(B-E)$

可交换之可逆

2021.12.19 (1)做对，但不熟悉，(2)不会(用AB=BA=E)

2021，12，27做对

Sf：两边同时取行列式：

$|A^TA|=|E| \Rightarrow |A^T|\cdot|A|=1 \Rightarrow |A|^2=1$

∵ $|A|<0$ ∴ $|A|=-1$

$|A+E|=|A+A^TA|=\cancel{|A|+}|EA+A^TA|$

$=|(E+A^T)\cdot A|=|E+A^T|\cdot|A|$.

$=|(E+A)^T|\cdot|A|=|E+A|\cdot|A|$

$((E^T+A^T)=(E+A)^T)$ ∵ $|A|=-1$

∴ $|A+E|=0$.

2021.11.22做不来

2021.12.19 转置那一步不会，其他可

2021.12.27 做对

$A=A^T(a_{ij}=a_{ji})$

$A^2=AA^T=0$

故第i行(i<=n)

$a_{i1}^2+a_{i2}^2\ldots+a_{in}^2=0$

实矩阵

A=0

提示

AB=0

假设A可逆，

则B=0

与B!=0矛盾

故A不可逆，|A|=0

提示，证充要

结论B!=0,AB=0,=>|A|=0

2021.12.19 做不来，想用秩做

2021.12.27 用秩序做的

错,若对角矩阵中的对角元互逆，则答案为正确

(可用后面知识证明)

$(E-A)(A^2+A+E)=E-A^3=E$

2021.12.19 做对

2021.12.27做对

证　因为 $A(A^{-1}+B^{-1})B=A+B$，故

$$(A^{-1}+B^{-1})B=A^{-1}(A+B),$$

$$(A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1}=A^{-1},$$

从而 $(A^{-1}+B^{-1})\cdot B(A+B)^{-1}A=E$. 因此 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆且

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A.$$

注　由于有 $B(A^{-1}+B^{-1})A=A+B$，从而类似可推出

$$(A^{-1}+B^{-1})\cdot A(A+B)^{-1}B=E.$$

即亦有

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B.$$

但由于一个方阵的逆方阵是惟一的，因此，对这个题来说还可得出以下结论。

$$A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A.$$

2021.12.19 半对

2021.12.27m最对

$$令D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix} != 0$$

$D^2=DD^T$=**(与矩阵乘法相同)**

…

2021.12.19 没算，以为很好算

2021.12.27做对

(1) 充分性 设 $B^2=E$，则

$A^2=\frac{1}{2}(B+E)\frac{1}{2}(B+E)=\frac{1}{4}(B^2+2B+E)$

$=\frac{1}{4}(2B+2E)=\frac{1}{2}(B+E)=A$

(2) 必要性 设 $A^2=A$，则

由 $A^2=\frac{1}{4}(B^2+2B+E)$

$A=\frac{1}{2}(B+E)$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(B^2+2B+E)=\frac{1}{2}(B+E)$

得 $B^2=E$

证：由 $A^2-5A+6E=0$，得

(1) $(A+3E)(A-8E)+24E+6E=0$

$(A+3E)(A-8E)=-30E$

$(A+3E)\left[-\frac{1}{30}(A-8E)\right]=E \Rightarrow A+3E$可逆，且$(A+3E)^{-1}=\frac{1}{30}(8E-A)$

(2) $(A-3E)(A-2E)-6E+6E=0$

$(A-3E)(A-2E)=0$

若$A-3E$可逆，则$A=2E$，故当$A\neq 2E$时，$A-3E$不可逆

21

2021.12.19做对

定义证明

2021年10月27日 16:31

证明矩阵逆的唯一性

（统一法）

设有AB=BA=E

AC=CA=E

现在只需证明B=C

证:

B=BE=BAC=EC=C

证毕

证明求逆定理

=>

$AA^{-1}=E$

$|A||A^{-1}|=1$

故|A|!=0

<=

|A|!=0

故A(A*/|A|)=(A*/|A|)A=E

故

10. 设 A^* 为 n $(n \geq 2)$ 阶矩阵 A 的伴随矩阵,证明: $|A^*| = |A|^{n-1}$.

Sf: $\because A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$

$\therefore A^* = |A| \cdot A^{-1}$

则 $|A^*| = |A|^n \cdot |A^{-1}| = |A|^n \cdot |A|^{-1}$

$= |A|^{n-1}$

得证毕

注:还要分情况(|A|=0)

定义定理

2021年10月27日 16:31

分块矩阵$D=\begin{matrix} A & 0 \\ 0 & B \end{matrix}$的求法(A、B可逆)

叛逆法则:|D|=|A||B|!=0

设$D^{-1}=\begin{matrix} X & Y \\ Z & W \end{matrix}$

则$DD^{-1}=\begin{matrix} AX & AY \\ BZ & BW \end{matrix} = E = \begin{matrix} E_r & 0 \\ 0 & E_K \end{matrix}$

$AX=E_r$
$AY=0$
$BZ=0$
$BW=E_k$
$\Rightarrow X=A^{-1}$
$Y=0$
$Z=0$
$W=B^{-1}$

$D^{-1}=\begin{matrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{matrix}$

(可推广到n阶)

归纳总结

2021年10月27日 16:31

常用结论

2021年10月27日 16:31

出现**零矩阵**和**可交换**

立刻想到用定义法(目前阶段)

方法总结

2021年10月27日 16:31

矩阵求逆的方法(矩阵求逆专题)

- 1.定义法
  - [ ] ? 题目1
  - [ ] 题目2
  - [ ] 题目3
  - 题目4
  - [x] 题目5
  - 答案1
  - 答案2
  - 答案3
  - 答案4
  - 答案5
- 2.叛逆求逆定理(公式法)
  - 阶数低
  - 特殊性
  - 理论推导
- 3.题型
  - 数值型
  - 抽象型(定义法)

求解矩阵方程常用方法(**和差化积**)

- 等式两边同时乘以A^{-1}(左、右乘)
  - 题目
  - 答案

重要例题

2021年10月27日　16:31

幂等中只有E为可逆矩阵

反证法：

假设有可逆矩阵A，

则有$AA^{-1}=E$

故$A^2A^{-1}=E$

=>A=E

笔记部分

2021年10月26日 10:09

4.1 线性方程组 → 解的情况 → 同型运算 → 4.2 高斯的消元 → 4.3 矩阵初变 → 化简结果 → 矩阵初变 → 标准型 → 4.4 高斯消元法 → 非齐次 → 自由未知量 → 齐次方程 → 4.5 初等矩阵 → 性质 → 与初等变换 → 与可逆矩阵 → 4.6 矩阵的秩

解的情况

非齐次

齐次

同型运算

1.一般形式

2.矩阵形式

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_2 \end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ax=B

3.向量形式

4.增广矩阵

$$\bar{A}=(A \quad B)$$

4.2 高斯的消元

三种变换(初等变换)

线性方程组的初等行变换

注意：矩阵A经过初等行变换后

B不等于A！！！

记作A->B

4.3 矩阵初变 化简

A初等变换得到B

A、B**等价**：$A \cong B$

性质

1.反身性

2.对称性

3.传递性

- 零行
- 非零首元

化简结果

一、阶梯形矩阵

二、最简形矩阵(阶)

矩阵初变

任意矩阵

经过(有限次)

初等**行**变换

阶梯矩阵

到

最简矩阵

注：只有标准形使用了列变换

标准型

任意矩阵

(有限次)

初等**行列**变换

到

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方法（主要用于**理论推导**）

1.先行后列

2.行列共进

4.4 高斯消元法 矩阵表示

多余方程

有效方程(r)

矛盾方程

未知量个数(n)

非齐次

Step1.

写出方程组的增广矩阵并化为阶梯形

Step2.

考察d_{r+1}=0

无解	0-d
有唯一解	r=n
有无穷多解	r<n

证明

自由未知量

无穷多解的产物

选取方式(优先)

将非 **非零首元**对应的x

作为自由未知量(n-r个)

(克莱姆法则)

格式

(k是任意常数

齐次方程

Step1

系数矩阵

Step2

阶梯形

Step3

最简形

仅有零解	r=n
有非零解	r<n

4.5 初等矩阵

定义

E做如下初等行(列)变换得到的符号表示如下

E(i,j)	交换	行列相同
E(i(k))	倍乘	行列相同
E(i,j(k))	倍加	行列相反

倍加列变换是反的！！！

错题

题目1

答案1

例题1

性质

逆

$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$

$E(i(k))^{-1}=E(i(1/k))$

$E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k))$

转置

$E(i,j)^T=E(i,j)$

$E(i(k))^T=E(i(k))$

$E(i,j(k))^T=E(j,i(k))$

与初等变换

(左行右列)

$A\xrightarrow{r_i<->r_j}E(i,j)A$

$A\xrightarrow{kr_i}E(i(k))A$

$A\xrightarrow{r_i+kr_j}E(i,j(k))A$

$A\xrightarrow{c_i<->c_j}AE(i,j)$

$A\xrightarrow{kc_i}AE(i(k))$

$A\xrightarrow{c_i+kc_j}AE(j,i(k))$

矩阵矩阵变换

=>矩阵乘法

与可逆矩阵

任意$A_{m*n}\xrightarrow{初等变换}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$(标准式)

$P_s \ldots P_1 A Q_1 \ldots Q_t=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

m阶初等矩阵 n阶初等矩阵

(1)可逆矩阵<=>**标准形为单位矩阵**

(2)可逆矩阵<=>**可表示为初等矩阵的乘积**

A与B等价<=>存在可逆**P、Q**,

故

(3)可逆矩阵<=>**与E行(列)()等价**

叛逆求逆的初等变换法

(4)$(A \; E)\xrightarrow{初等行变换}(E \; A^{-1})$

$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}\xrightarrow{初等列变换}\begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$

可以考虑用**转置**运算

推广:求$A^{-1}B$、BA^{-1}

运算方法

例题

4.6 矩阵的秩

错题

题目1

题目2?

题目3

答案1

答案2

答案3

向量组

第一步，先写出相关表达式

例:β=$k1\alpha1 + k2\alpha2 + \cdots + ks\alpha s$

注意！！！

写($k_1 \ldots k_{n-r}$是任意常数)

首先算

n-r(A)

4.7 线性相关 → 线性组合 → 一、 → 二、 → 三、 → 五定理 → 4.8 极大无关组与秩 → 向量组的秩 → 相关计算 → 4.9 解的结构 → 齐次线性 → 非齐次线性

4.7 线性相关

一、向量与向量组

二、向量组内部

三、向量组与向量组

错题

题目1

题目2

题目3

题目4A

题目5B

答案1

答案2

答案3

线性组合

$k1\alpha1 + k2\alpha2 + \cdots + ks\alpha s$

一、

定义

特例

1.P^n中任一向量都可以由单位向量组线性表出

(ε1、ε2…εn)

2.零向量是任意向量组的线性组合

3.向量组中的任意一个向量都可以由该向量组线性表出

判线性相关方法

定义法

(抽象型)

非齐次线性方程组法

(数值型)

有解<=>能线

等价

二、

定义

特例

1.包含零向量的向量组线性相关

2.一个向量α线性相关<=>α向量是零向量

3.两个向量线性相关<=>分量对应成比例

判线性相关方法

定义法

证明向量组线性相关性

(注意格式:设k_1…)

齐次线性方程组法

有非零解	线性相关	r(A)<s (个>维)
仅有零解	线性无关	r(A)=s

推论

例题

三、

定义

性质

1.向量组的表示

2.向量组的等价

等价=>等秩

判定方法

定义法

矩阵方程法

例题

使用方法

看这及5.

五定理

1.二 <=> 一

2.向量组部分与整体

3.向量组低维与高维

4.二 => 一

5.三 => 二(含两推论)

方法总结

4.8 极大无关组与秩

定义

特例

1)零向量组无极大无关组

2)含非零向量的定有极大向量组

3)线性无关向量组的极大无关组就是其本身

例题

性质(向量组A的)

1)任一极大无关组与A等价 (定义)

2)任两极大无关组是等价 (传递性)

3)任两极大无关组包含相同个数的向量(5.)

向量组的秩

定h义

与矩阵的秩的定义

等价=>等秩(

线性无关<=>秩等于向量个数

线性相关<=>秩小于向量个数

相关定理

例题

错题

题目1

题目2

题目3

题目4

答案1

答案2

答案3

答案4

相关计算

秩的计算

行秩=列秩=矩阵的秩

向量组的秩:竖拼矩阵的秩

极大无关组计算

1.选取

在秩为r的矩阵中，

非零子式所在的列(行)

即是列(行)向量组的一个极大无关组

2.重要结论

3.计算

按列拼，化阶梯，

非零首元所在列

即为**一个**极大无关组

其余向量的表示

将极大无关组

所形成的矩阵

化为最简形

其余向量的分量

——对应系数

=>eg

4.9 解的结构

针对无穷多解

(有非零解)

回顾:

矩阵形式：Ax=b

所有解向量组成

解集合(解向量组)

错题

题目1

题目2

题目3(2变式)

答案1

答案2

答案3

齐次线性

性质

结论

解的结构(通解)

基础解系

基础解系计算

定理：

基础解系有n-r个

解向量 ||

(自由未知量个数)

步骤

1.系数矩阵

2.化为最简形(定r)

3.取自由未知量

4.列出同解方程组

(参数式)eg

5.列出一个基础解系

(向量式)eg 证明

另:x_{r+1}至x_n分量(自由未知量的值)所形成的行列式不等于零即可

一般取单位矩阵

非齐次线性

性质

1.η_1、η_2是Ax=b解向量

则$\eta_1-\eta_2$为Ax=0的解向量

2.η是Ax=b的解向量

ξ是Ax=0的解向量(*)

则η+ξ是Ax=b的解向量

结论

设$\eta_1 \ldots \eta_t$都是Ax=b的解向量

则当$k_1+\ldots+k_t=1$时,

$k_1\eta_1+\ldots+k_t\eta_t$也是Ax=b的解向量

解的结构(通解)

$x=\eta^*+k_1\xi_1+\ldots+k_{n-r}\xi_{n-r}$

说明:

非齐次通解计算

1.增广矩阵

2.化为最简形(定r)

3.找自由未知量

4.写出非齐次参数式通解(找特解)

5.写出对应齐次参数式通解

==》李莉莉李莉莉题《==

数值型eg

抽象型eg1 eg2 eg3 eg4

第一步先求n-r(A)

子式 → 秩的定义 → 与初等变换 → 与矩阵的逆 → 与其他运算 → 与方程组

子式

类比

拉普拉斯定理中的

代数余子式

是**行列式**！！！

非零子式

秩的定义

简单的说:

定义：(一个行列式)

规定：零矩阵的秩是0

得出一个结论

r(A)=1

<=> 非零矩阵A的行与列

成比例

<=>A可拆成两矩阵的

乘积

例题2

与初等变换

引理：

1.初等行变换不改变矩阵的秩

2.阶梯形矩阵非零首元个数等于该矩阵的秩

=>

(非零首元含参数：形式阶梯)

(1)矩阵A与B等价=>r(A)=r(B)

(2)设A为m*n阶矩阵，P、Q分别为m、n阶可逆矩阵，则例题1

r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)=r(A)

(3)矩阵A的标准形唯一，且左上角1的个数r=r(A)

(4)A、B都是同型矩阵：A、B等价<=>r(A)=r(B)

0矩阵相关

与矩阵的逆

(行满秩、列满秩、满秩)

A可逆<=>**|A|!=0<=>**

r(A)=n(满秩)

(注意理解)

A不可逆<=>|A|=0<=>

r(A)<n（降秩)

与其他运算

(1)0<=r(A_{m*n})<=min{m,n}

(2)r(A)=r(A^T)

(3)k!=0,则r(kA)=r(A)

(4)r(A+B)<=r(A)+r(B)***证明***

(5)r(AB)<=min{r(A),r(B)}***证明***

(6)若$A_{m*n}B_{n*l}$=0，则r(A)+r(B)<=n

证明 ***与向量组的秩相关***

例题1

与方程组

齐次方程组

无解	**r(A)+1=r($\bar{A}$)**	
有解	有唯一解	r(A)=n
r(A)=r($\bar{A}$)	有无穷多解	r(A)<n

非齐次方程组(A_{m*n})

仅有零解	r(A)=n	|A|!=0
有非零解	r(A)<n (m<n)	|A|=0

(克莱姆)

例题

错题集题目

2021年10月27日　16:31

(3) 设 $XA=2X+B$，其中 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&-1\end{pmatrix}$，求 X.

36. 设 $Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$P$ 为三阶非零矩阵，且 $PQ=O$，则(　)

(A) $t=6$ 时 P 的秩为 1;　(B) $t=6$ 时 P 的秩为 2;
(C) $t\neq 6$ 时 P 的秩为 1;　(D) $t\neq 6$ 时 P 的秩为 2.

34. 设 α,β 均为 n 维列向量，$A=\alpha\beta^T$，则(　)

(A) $r(A)=n$;　(B) $r(A)=1$;　(C) $r(A)\geq 1$;　(D) $r(A)\leq 1$.

14. 设矩阵 A,B,C 满足 $A=BC$，则 A 的列向量组(　)

(A) 可由 B 的列向量组线性表示;
(B) 不能由 B 的列向量组线性表示;
(C) 可由 C 的列向量组线性表示;
(D) 不能由 C 的列向量组线性表示.

3. 设 A 为 4×3 的矩阵，且 A 的秩 $r(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则矩阵 AB 的秩 $r(AB)=$________.

?

17. 下列结论正确的是(　).

(A) 等价的线性无关向量组所含的向量个数相等;
(B) 在一个向量组中，它的任意两个极大无关组不一定是等价的;
(C) 向量组 A 与 B 等价的充分必要条件是它们所含的向量个数相等;
(D) 等价的向量组的秩不一定相等.

15. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r，则(　)

(A) 必定 $r<s$;
(B) 向量组中任意少于 r 个向量的部分组都线性无关;
(C) 向量组中任意 r 个向量都线性无关;
(D) 向量组中任意 $r+1$ 个(如果有的话)向量都线性相关.

7. 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$，若 A 的伴随矩阵的

(A) $a=1$;　(B) $a=-\frac{1}{2}$;　(C) $a=0$;

?

14. 如果向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，则(　)

(A) 存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 成立;
(B) 对 β 的线性表示式唯一;
(C) 对 β 的线性表示式不唯一;
(D) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关.

29. 设有方程组为 $Ax=b$，且 $r(A)=r(A,b)=r$，则与该方程组同解的方程组为(　).

$Ax=b$ 有解

(A) 方程组的前 r 个方程组成的方程组;　(B) $A^Tx=b$;
(C) $QAx=b$（Q 为初等矩阵）;　(D) $PAx=Pb$（P 为可逆矩阵）

18. 已知向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则(　)

$s>r$

(A) 当 $r>s$ 时，向量组 A 线性相关;　(B) 当 $r>s$ 时，向量组 B 线性相关;
(C) 当 $r<s$ 时，向量组 A 线性相关;　(D) 当 $r<s$ 时，向量组 B 线性相关.

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $Ax=0$ 仅有零解的充分必要条件是(　)

(A) A 的行向量组线性相关;　(B) A 的行向量组线性无关;
(C) A 的列向量组线性相关;　(D) A 的列向量组线性无关.

6. 设 n 阶方阵 A 的秩为 r，证明存在秩为 $n-r$ 的方阵 B，使得 $AB=O$.

11. 设 η^* 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系. 证明：$\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关.

10. 设 A 是3阶非零矩阵，$B=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&5\\3&6&-1\end{pmatrix}$，且满足 $AB=O$，求方程组 $Ax=0$ 的通解.

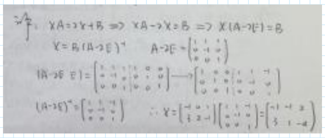
11. 设 η^* 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，证明：$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\eta^*+\xi_2,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$ 线性无关.

的秩为1,则

(D) $a=-2$.

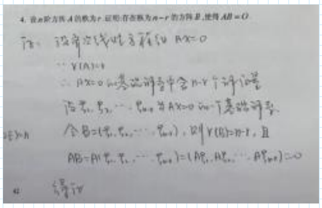
错题集答案

2021年10月27日 16:31



解：$XA=2X+B \Rightarrow XA-2X=B \Rightarrow X(A-2E)=B$

$X=B(A-2E)^{-1}$



4. 设n阶方阵A的秩为r，证明:存在秩为n−r的方阵B，使得AB=O.

证：设齐次线性方程组 $Ax=0$

$\because r(A)=r$

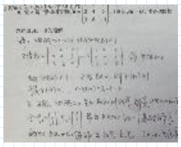
$\therefore Ax=0$的基础解系中含$n-r$个解向量

设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$为$Ax=0$的一个基础解系.

令$B=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r})$，则$r(B)=n-r$，且

$AB=A(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r})=(A\xi_1,A\xi_2,\cdots,A\xi_{n-r})=O$

得证



B

A

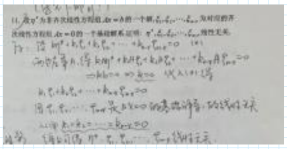
C D

D D

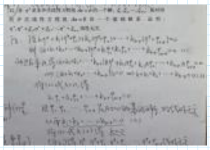
D

A

2
因为可逆矩阵可以化为初等矩阵的乘积
矩阵乘上初等矩阵后秩不变



11. 设η^*为非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$为对应的齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，证明：$\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关.



定义证明

2021年10月27日 16:31

含有自由未知量的方程是c个c元的方程组
用克莱姆法则判断：
若这个方程组的系数行列式不为零，则有唯一解。
（非自由未知量有唯一的通过自由未知量的表示法，）
即可不取首元对应x作为自由未知量，避免了系数行列式等于0的情况

证 (3) 倍加变换 $A \xrightarrow{r_i + k r_j} B$

2) 若B中子式包含r_i但不包含r_j

$B_r = \cdots = A_r + k A_r$

若B中子式$B_r \neq 0$，则A中子式A_r与A_r至少有一个非零。故$r(B) \le r(A)$，
由初等变换的可逆性，同理可得$r(A) \le r(B)$，
从而$r(A)=r(B)$

证 设A, B是两个$m \times n$矩阵

$A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \quad B=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$

$A+B=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \cdots, \alpha_n+\beta_n)$

$r(A+B)=r(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \cdots, \alpha_n+\beta_n)$

$\le r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 两个推论(见前)

$\le r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)+r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$

$=r(A)+r(B)$

推论 $r(A_1+A_2+\cdots+A_s) \le r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_s)$

证 $\because \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关

$\therefore$ 存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s, k$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k\beta=0 \qquad (*)$$

下证 $k \neq 0$:

假设 $k=0$，则存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

这与已知"$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关"相矛盾，$\therefore k \neq 0$.

由(*)式,得 $\beta=-\frac{k_1}{k}\alpha_1-\frac{k_2}{k}\alpha_2-\cdots-\frac{k_s}{k}\alpha_s$

$\therefore \beta$能由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示.

证 下证唯一性:

假设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$

$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_s\alpha_s$

两式相减得

$$(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+\cdots+(k_s-l_s)\alpha_s=0$$

$\because \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关,

$\therefore k_1-l_1=k_2-l_2=\cdots=k_s-l_s=0$

即$k_i=l_i \qquad i=1,2,\cdots,s$

$\therefore$ 表示式是唯一的.

命题4 矩阵乘积的秩不超过各因子的秩,即 $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$ $\Leftrightarrow r(AB) \le r(A)$，$r(AB) \le r(B)$

证 设$C_{m\times s}=A_{m\times n}B_{n\times s} \Rightarrow (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)B$ β1=B1$\sum_{i=0}^{n}\alpha 1$

即C的列向量组可由A的列向量组线性表示

则$r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) \le r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 故$r(AB) \le r(A)$

由$C_{m\times s}=A_{m\times n}B_{n\times s} \Rightarrow \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

即C的行向量组可由B的行向量组线性表示

则$r(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m) \le r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 故$r(AB) \le r(B)$

应用:与初等矩阵(初等变换)
eg1
eg2

证 一方面,由齐次线性方程组解的性质可知,表达式

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r$$

一定是齐次线性方程组的解向量
另一方面,设x是齐次线性方程组的任一解向量,则x一定可由基础解系表示,即

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r$$

证 设$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中任意$r$个线性无关的向量,

下证任意α_j $(j=1,2,\cdots,s)$都可由$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$线性表示.

由于向量组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$ 必线性相关,

(否则原向量组的秩就超过 r)

因此α_j 可由$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$线性表示.

(1) 证得 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关

(2) 证得方程组的任一解向量η都可由$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$线性表示由参数式可得

所以$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系.

5. 设A为$n\times n$矩阵($n \ge 2$)，A^*为A的伴随矩阵,证明:

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$$

其中$r(A)$表示矩阵的秩.

证：(1) 当 $r(A)=n$时，则$|A|\neq 0$，又 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$

$\therefore r(A^*)=n$

(2) 当 $r(A)=n-1$时，则A中至少有一个$n-1$阶子式非零，

故 $A^*\neq 0$，$\therefore r(A^*)\ge 1$

又$\because r(A)=n-1$，则 $|A|=0$，故 $AA^*=|A|E=0$

$\therefore r(A)+r(A^*)\le n$，即 $r(A^*)\le n-r(A)=1$

$\therefore r(A^*)=1$

(3) 当 $r(A)<n-1$时，则A的所有$n-1$阶子式全为零

故 $A^*=0$，$\therefore r(A^*)=0$

命题5

证 将

$AB=$

得 AB

即B的

而$Ax=$

因此 r

即 $r($

应用 ap

设A,B分别是$m\times n$和$n\times s$的矩阵，且$AB=O$，则

$r(A)+r(B)\le n$

n是前列后行

的按列分块为$B=(B_1,B_2,\cdots,B_s)$　则

$A(B_1,B_2,\cdots,B_s)=(AB_1,AB_2,\cdots,AB_s)=O=(0,0,\cdots,0)$

$B_j=0\quad(j=1,2,\cdots,s)$

每一列向量B_j都是齐次线性方程组$Ax=0$的解向量

$=0$的基础解系中含有$n-r(A)$个解向量

$(B)=r(B_1,B_2,\cdots,B_s)\le n-r(A)$

$A)+r(B)\le n$

plication

证　设A为$m\times n$矩阵，x为n维列向量，

则$Ax=0$与$(A^TA)x=0$都为n元齐次线性方程组．

下证：方程组$Ax=0$与$(A^TA)x=0$同解．

(1) 若x满足$Ax=0$，则有$A^T(Ax)=0$，即$(A^TA)x=0$．

(2) 若x满足$(A^TA)x=0$，则$x^T(A^TA)x=0$，

即$(Ax)^T(Ax)=0$，从而推知$Ax=0$．

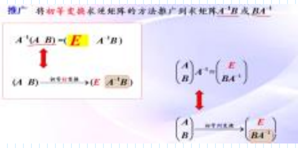
由(1),(2)知 方程组$Ax=0$与$(A^TA)x=0$同解．

因此$n-r(A^TA)=n-r(A)$，

从而$r(A^TA)=r(A)$．

定义定理

2021年10月27日 16:31



定义2 给定一个向量 β 和一个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

则称向量 β 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个线性组合，也称向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示(表出).

1. 定义

定义 对于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，如果存在不全为零的一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得下式成立

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=o \quad (*)$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关；否则称为线性无关.

即如果(*)式当且仅当数 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时才成立，则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

定义 设有两个向量组 Ⅰ: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 Ⅱ: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$.

(1) 若 Ⅰ 中每个向量都能由 Ⅱ 线性表示，则称向量组 Ⅰ 能由向量组 Ⅱ 线性表示.

(2) 若 Ⅰ 与 Ⅱ 可以相互线性表示，则称这两个向量组等价.

推论
当个数=维数时
|A|=0<=>线性相关
|A|!=0<=>线性无关

(s>=2)向量组线性相关<=>(存在)至少有一个向量可由其余所有向量线性表出
(s>=2)向量组线性无关<=>任何一个向量都不能由其余向量线性表出

向量组低维无关=>高维无关(每个向量添置分量)(位置对应)
向量组高维相关=>低维相关

存在部分(向量)组相关=>向量组整体相关
向量组整体无关=>任何部分(向量)组无关

向量组α1、α2...αs线性无关
α1、α2...αs、β线性相关
则β能由α1、α2...αs唯一地线性表出

Ⅰ:α1、α2...αs Ⅱ:β1、β2...βt

(1) Ⅰ 可由Ⅱ表示
(2)s>t
=> Ⅰ 线性相关

多的可由少的线性表示，则多的线性相关

推论一
(2) Ⅰ 线性无关
=> s<=t

推论二
(1) Ⅰ 与Ⅱ等价
(2) Ⅰ 、Ⅱ都线性无关
=>s=t

A:α1、...αr......αj
部分组α1、...αr满足
(1)α1、...αr线性无关
(2)A中其余向量(if存在)中任一向量αi
添加到该部分，α1、...αr、αi都线性相关
(2')其余任一向量αi都可以由α1、...αr线性表示
(2'')向量组中所有向量都可以由α1、...αr线性表示
则α1、...αr为向量组A的极大无关组

命题1 如果向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

(传递性+5.)

推论 等价的向量组的秩相等

反之不成立(两向量组的**维度相同**才能为充要条件)

命题2 若 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大无关组.

证明

命题2 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)\le r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+r(\beta_1,\cdots,\beta_t)$

(与命题1证法相似)

命题6 $r(A^TA)=r(A)$

证明

命题7 设 A 为 n 阶方阵，则 $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\ 1, & r(A)=n-1\\ 0, & r(A)\le n-2\end{cases}$

证明

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\quad \beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

$$\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_n$$

若 $\begin{cases}x_1=k_1\\x_2=k_2\\\cdots\cdots\\x_n=k_n\end{cases}$ 为方程组的一组解

则称 $x=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$ 为方程组的一个解向量

定义 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一组解向量，如果

无关性 (1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 线性无关；

表示性 (2) $Ax=0$ 的任一解向量都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 线性表示

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

注: 齐次线性方程组的基础解系就是解向量组的极大无关组

定义2 向量组的极大无关组中所含向量的个数，称为这个**向量组的秩**. rank

用 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 表示向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩.

注: (1) 由零向量组成的向量组没有极大无关组，规定它的秩为0.

(2) 任何一个含有非零向量的向量组一定有极大无关组，故其秩 ≥ 1

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 $\Longleftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Longleftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$

2. 形式表示的一个应用

若 $C_{m\times n}=A_{m\times s}B_{s\times n}$

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

则 C 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示，B 为系数矩阵.

若 $C_{m\times n}=A_{m\times s}B_{s\times n}$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}$$

则 C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示，A 为系数矩阵.

$$\begin{cases} x_1=-k_{1r+1}x_{r+1}-k_{1r+2}x_{r+2}-\dots-k_{1n}x_n \\ x_2=-k_{2r+1}x_{r+1}-k_{2r+2}x_{r+2}-\dots-k_{2n}x_n \\ \quad\vdots \\ x_r=-k_{rr+1}x_{r+1}-k_{rr+2}x_{r+2}-\dots-k_{rn}x_n \end{cases}$$

$$\xi_1=\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \\ x_n \end{array}\begin{pmatrix} -k_{1r+1} \\ -k_{2r+1} \\ \vdots \\ -k_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r\text{个} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n-r\text{个} \end{array}\quad \xi_2=\begin{pmatrix} -k_{1r+2} \\ -k_{2r+2} \\ \vdots \\ -k_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\quad \cdots\cdots \quad \xi_{n-r}=\begin{pmatrix} -k_{1n} \\ -k_{2n} \\ \vdots \\ -k_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

归纳总结

2021年10月27日 16:31

暂时摆烂

七、矩阵的三秩

定理 矩阵的行秩=列秩=矩阵的秩

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$$

证明建如下4张
PPT
过程较为复杂
感兴趣的同学
可以看下

下面给出定理“矩阵的行秩=列秩=矩阵的秩”的证明

引理 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

的行秩$<n$,那么它必有非零解.

逆否命题: 如果齐线性方程组只有零解, 则系数矩阵的行秩$\geq n$.

证

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad (1) \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵A的行向量组:

$\alpha_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$

$\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\alpha_r=(a_{r1},a_{r2},\cdots,a_{rn})$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\alpha_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$

不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为一个极大线性无关组

向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_m$等价

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases} \quad (2)$$

方程组(1)与(2) 同解

因为$r<n$, 所以(2)有非零解,

从而(1)有非零解.

定理1 矩阵的行秩=列秩.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

证 记矩阵A的行秩$=r$, 列秩$=r'$,

下证$r=r'$.

先证$r\leq r'$

矩阵A的行向量组为

$\alpha_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$

$\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\alpha_r=(a_{r1},a_{r2},\cdots,a_{rn})$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\alpha_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$

不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为一个极大线性无关组

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关

所以齐次线性方程组

$y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_r\alpha_r=0$只有零解

$$\text{即}\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{r1}y_r=0 \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{r2}y_r=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{rn}y_r=0 \end{cases}\text{只有零解}$$

八、向量组等价的判定*

定理3 设n维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$

记矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

则下列命题等价:

(1) 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示

(2) 矩阵方程 $AX=B$有解

令$X=(X_1,X_2,\cdots,X_t)$

(3) 非齐次线性方程组$AX_i=\beta_i \quad (i=1,2,\cdots,t)$

(4) $r(A)=r(A,B)$

推论1 若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示, 则

$r(B)\leq r(A)$ 即 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\leq r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

推论2 若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价, 则

充要条件

$r(A)=r(B)=r(A,B)$ 即 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r(\beta_1,\cdots,\beta_t)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$

即 $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{r1}y_r = 0 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{r2}y_r = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{rn}y_r = 0 \end{cases}$ 只有零解 $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$

由引理可知 上述齐次线性方程组的系数矩阵B的行秩$\geq r$

故在它的行向量组中可 以找到r个线性无关的向量 不妨设

则在这些向量上添加若干分量后所得的向量组 也线性无关

$(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{r1}, \cdots, a_{m1})$

$(a_{12}, a_{21}, \cdots, a_{r2}, \cdots, a_{m2})$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$(a_{1r}, a_{2r}, \cdots, a_{rr}, \cdots, a_{mr})$

它们正好是矩阵A的r个列向量

则矩阵A的列秩$r' \geq r$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

先证$r \leq r'$ 得证

同理可证$r \geq r'$

定理 矩阵的行秩=列秩=矩阵的秩

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$$

$m \times n$的矩阵A的秩$r(A) \leq \min\{m, n\}$

$r(A) = \min\{m, n\}$ 满秩矩阵

$r(A) = m$ 行满秩矩阵 $\Longleftrightarrow$ 行向量组线性无关

$r(A) = n$ 列满秩矩阵 $\Longleftrightarrow$ 列向量组线性无关

设A为n阶方阵,若$r(A) = n$, 则A为满秩矩阵

$\Longleftrightarrow$ 行、列向量组都线性无关

常用结论

2021年10月27日 16:31

则下列命题等价:

(1) 向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示

(2) 非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 有解

(3) $r(A)=r(A\ \beta)$.

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta \Leftrightarrow Ax=\beta, \text{其中} x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}$$

(1) 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示的充要条件是: $r(A)=r(A,B)$

记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s), B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

(2) 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价的充要条件是: $r(A)=r(B)=r(A,B)$

方法总结

2021年10月27日 16:31

出现**零矩阵**

1.定义法

2.r(A)=0<=>A=0

(r(A)>0<=>A!=0)

通常以线性相关作为切入口

出现线性无关可考虑用反证法

证明向量组线性相关第一步(若不用反证)

设$\sum_{i=0}^{n} k_i\alpha_i = 0$

看到向量组线性相关(等价)，想命题

例题

重要例题

2021年10月27日 16:31

例4 求矩阵X，使$XA=B$，其中$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

解 $XA=B\Rightarrow X=BA^{-1}$

$XA=B$
$\Leftrightarrow A^TX^T=B^T$

$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

$(A^T\ B^T)$

例2 证明：秩为r的矩阵可表成r个秩为1的矩阵之和

证 设矩阵A的秩$r(A)=r$ 则存在可逆矩阵P与Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&\ddots&\\&&&&0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0&&&&\\&\ddots&&&\\&&0&&\\&&&1&\\&&&&0\\&&&&&\ddots\\&&&&&&0\end{pmatrix}$$

$=C_1+C_2+\cdots+C_r$

其中$C_i\ (i=1,2,\cdots,r)$为主对角线上第i个元素是1其余元素全是0的矩阵

$\therefore A=P^{-1}(C_1+C_2+\cdots+C_r)Q^{-1}$

$=P^{-1}C_1Q^{-1}+P^{-1}C_2Q^{-1}+\cdots+P^{-1}C_rQ^{-1}=A_1+A_2+\cdots+A_r$

其中$r(A_i)=r(P^{-1}C_iQ^{-1})=r(C_i)=1$ 故得证

例 设A是三阶矩阵，将A的第1列与第2列交换得B，再把B的第2列的3倍加到第3列的C，求矩阵P，使得$AP=C$.

解 $A\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}B\xrightarrow{c_3+3c_2}C$

$B=AP_1$
$C=BP_2$ $\Rightarrow C=AP_1P_2$

$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$

例1 设A为n阶方阵，且$A^2=E$，证明：

$$r(A+E)+r(A-E)=n.$$

证 $\because A^2=E$

$\therefore (A+E)(A-E)=O$

$A_{m\times n}B_{n\times l}=O\Rightarrow r(A)+r(B)\le n$

$\therefore r(A+E)+r(A-E)\le n$

又$\because r(A+E)+r(A-E)\ge r[(A+E)+(E-A)]=r(2E)=n$

$\therefore r(A+E)+r(A-E)=n$

$r(A+B)\le r(A)+r(B)$

例3 设A为n阶矩阵，且$r(A)=1$，证明：

(1) $A=\alpha\beta^T$，其中$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$； (2) $A^2=kA$.

证 因$r(A)=1$

则A中一定有一个非零行，而其余的行都是它的倍数.

$$A=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}=\alpha\beta^T\quad \alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

$A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=kA$ 其中$k=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

6 设A是$m\times n$实矩阵

(1) 证明秩(A^TA)=秩(A);

(2) 设$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，b是$m\times 1$矩阵，证明：线性方程组$A^TAX=A^Tb$有解.

证：(1) 下面证明齐次线性方程组 $A^TAx=0$ 与 $Ax=0$ 同解。

一方面，若 $Ax=0$，则 $A^TAx=0$，即 $Ax=0$ 的解都是 $A^TAx=0$ 的解。

另一方面，若 $A^TAx=0$，两边左乘 x^T，得 $x^TA^TAx=0$，即 $(Ax)^T(Ax)=0$，令向量 $Ax=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，则 $(Ax)^T(Ax)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=0$，故 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$，得 $Ax=0$，可见 $A^TAx=0$ 的解也是 $Ax=0$ 的解。

所以 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解，从而它们的基础解系含有相同个数的解向量，即 $n-r(A)=n-r(A^TA)$，$r(A^TA)=r(A)$ 得证。

(2) 线性方程组 $A^TAx=A^Tb$ 有解 $\Leftrightarrow r(A^TA\ A^Tb)=r(A^TA)$

由(1)知 $r(A^TA)=r(A)=r(A^T)$

又因 $r(A^TA\ A^Tb)=r(A^T(A\ b))\le r(A^T)$，$r(A^TA\ A^Tb)\ge r(A^TA)=r(A^T)$ $\Rightarrow r(A^TA\ A^Tb)=r(A^T)$

$\therefore r(A^TA\ A^Tb)=r(A^TA)$

从而 线性方程组 $A^TAx=A^Tb$ 有解

例 问λ取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

有唯一解？有无穷多个解？无解？

(1) 当$\lambda\ne1$且$\lambda\ne-2$时，方程组有唯一解．

(2) 当$\lambda=1$时，方程组有无穷多解．

(3) 当$\lambda=-2$时，方程组无解.

法一，形式阶梯形法(阶数为3时不推荐)

法二，克莱姆法则+代值用增广矩阵(阶数大于4时不推荐)

例 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\-5\\5\end{pmatrix}$，问：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关？

(2) α_4能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出？若能,则求其表达式

解 $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\-1&0&3&-5\\1&1&-2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&-1&4&-5\\0&2&-3&5\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&-1&4&-5\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关 (2) $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$

例 设向量组$\alpha_1=(1-1\ 1\ -1)^T$ …

$\beta_1=(2,0,1,1)^T,\beta_2=(1,1,0,2$ …

证明向量组α_1,α_2与β_1,β_2,β_3等 …

证 令矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2)$，$B=(\beta_1$ …

$(A,B)=$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}1&3&2&1&3\\-1&1&0&1&-1\\1&1&1&0&2\\-1&3&1&2&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_1]{\substack{r_4+r_1\\r_3+r_1}}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&2\\0&4&2\\0&2&1\\0&4&2\end{array}\right.$$

因 $r(A)=r(A,B)=2$ 又因二阶 …

故 $r(A)=r(B)=r(A,B)$ 故向 …

例 已知A为三阶矩阵，且$|A|=-2$，将A按列分块为$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为三维列向量，令$B=(\alpha_3-2\alpha_1,3\alpha_2,\alpha_1)$，则$|B|=$______.

解 $|B|=|\alpha_3-2\alpha_1,3\alpha_2,\alpha_1|$

$=|\alpha_3,3\alpha_2,\alpha_1|=3|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1|=-3|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=-3|A|=6$

另解

$$B=(\alpha_3-2\alpha_1,3\alpha_2,\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&3&0\\1&0&0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&3&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$|B|=\left|A\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&3&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right|=|A|\begin{vmatrix}-2&0&1\\0&3&0\\1&0&0\end{vmatrix}=6$$

中的一组极大无关组为?

中的单位向量组

$$\begin{pmatrix}2\\3\\ \vdots\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\ \vdots\\4\end{pmatrix}$$

$\alpha_4\ \alpha_5$

$\alpha_4=3\alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3$

$\alpha_5=2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3$

例 求解方程组 $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\frac{1}{2} \end{cases}$

解 对增广矩阵作初等行变换

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(取x_2, x_4为自由未知量)

原方程组的同解方程组为 $\begin{cases} x_1=1/2+x_2+x_4 \\ x_3=1/2+2x_4 \end{cases}$ 导出组的同解方程组为 $\begin{cases} x_1=x_2+x_4 \\ x_3=2x_4 \end{cases}$

方程组的一个特解为 $\eta^*=\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix}$ 导出组的一个基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$

原方程组的全部解为 $x=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2$ (k_1, k_2为任意常数)

例 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3,已知η_1,η_2,η_3是其的三个解向量,且

$$\eta_1+\eta_2=(1,1,0,0)^T,\ \eta_3=(0,0,1,1)^T$$

求该方程组的通解.

解 设方程组为$Ax=b$

(1) $Ax=b$ 的一个特解为 $\eta^*=\eta_3$

(2) 再求$Ax=0$ 一个基础解系

$n-r(A)=4-3=1$

$\xi=\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)-\eta_3$为$Ax=0$一个基础解系

由(1)(2)得$Ax=b$ 的通解为 $x=\eta^*+k\xi$ (k为任意常数)

结论 设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$都是方程组$Ax=b$的解向量,则当$k_1+k_2+\cdots+k_s=$ 时,$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$也是方程组$Ax=b$的一个解.

例 已知$\eta_1=(0,1,0)^T$,$\eta_2=(-3,2,2)^T$是非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-1 \\ 3x_1+x_2+4x_3=-1 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$$

$n-r(A)$

的两个解,求此方程组的通解.

解 方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&4\\a&b&c\end{pmatrix}$

(1) 由矩阵A的元素 $\Rightarrow r(A)\ge 2$

由方程组的解不唯一 $\Rightarrow r(A)<3$

$\Rightarrow$ $r(A)=2$

$n-r(A)=3-2=1$

(2) 导出组的一个基础解系 $\xi=\eta_1-\eta_2$

方程组的一个特解 $\eta^*=\eta_1$

$,\alpha_2=(3\ 1\ 1\ 3)^T$

$)^T,\beta_3=(3,-1,2,0)^T$

价.

$,\beta_2,\beta_3)$

$$\begin{pmatrix} \cdots & 1 & 3 \\ \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-\frac{1}{2}r_2]{r_3-r_1} \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

子式$\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\ne 0$ 即$r(B)=2$

量组α_1,α_2与β_1,β_2,β_3等价

例 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$,其中

α_1 是任一非零向量,$\alpha_2=(2,1,0,0)$,$\alpha_3=(4,1,4,0)$,$\alpha_4=(1,0,2,0)$,若向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示 试证:向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关

证 $\because \alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

又$\because \beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示

$\therefore r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)<4$

从而$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关

19. 设n阶矩阵A的各行元素之和均为零,且A的秩为$n-1$,则线性方程组$Ax=0$的通解为____________________.

解 $n-r(A)=n-(n-1)=1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Ax=0$的一个基础解系为$\xi=(1,1,\cdots,1)^T$

$\Rightarrow Ax=0$的通解为 $k\xi$ (k为任意常数)

例 设4阶矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$,其中列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关而$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$. 求齐次线性方程组$Ax=0$的通解

提示 (1) $r(A)=3$ $n-r(A)=4-3=1$

(2) $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4 \Rightarrow 2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4=0$

$Ax=0$ 一个基础解系 $\xi=(2,-1,1,1)^T$

$Ax=0$ 的通解 $x=k\xi$ (k为任意常数)

第3题

设A为三阶矩阵,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的三维列向量,且

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2,\ A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=\alpha_3+\alpha_1$$

$|$.

$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2,\ A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=\alpha_3+\alpha_1$

$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$

$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

取行列式 $|A||\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2$

笔记部分

2021年10月6日 18:05

合同
相似
等价

5.1 二次型 → 二次型 → 非退化 线性变换 → 合同关系 → 5.2 标准形 → 性质 → 配方法 → 初等变换 → 化标准型 → 5.3 规范形与惯性定理 → 复数域 → 实数域 → 惯性th → 5.3 正定性 → 定义法 → 桥梁 → 正惯性法 → 顺序主子式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

二次型的标准形不唯一

5.1 二次型

及 矩阵

二次型

令

令$a_{ij}=a_{ji}=1/2x_ix_j$的系数
$x_ix_j=x_jx_i$

A为对称矩阵

A是二次型的矩阵

线性变换

令
X=CY

称

$X_1…x_n$到
$Y_1…y_n$
的一个非退化线性变换

(可逆=非退化)

合同关系

C为可逆矩阵
则A与B合同
转换
性质

性质

数域P

任意一个二次型
经过可逆线性变换
标准型(只含平方项)

推论

任意一个对称矩阵合同于对角矩阵

合同<=>**可经过相同的行列初等变换**

配方法

1.含平方项
直接配方法
eg
2.不含平方项
平方差造方
eg
3.缺元
啥法

初等变换

$B=C^TAC$中的C为可逆矩阵
可$C=P_1P_2…P_m$
则

结论
C^TAC对A的**行列做相同的初等变换**

推论
任意一个对称矩阵都**可经过相同的行列初等变换**为一个对角矩阵

化标准型

出现吧!**E**

当$C^TAC=\Lambda$为对角矩阵时

E变为C
此时满足
X=CY
$f=Y^T\Lambda Y$(标准型)

eg1
eg2

Tip

5.3 规范形与惯性定理

--讨论唯一性

实数域上的规范形为
$f=z_1^2-z_2^2+z_3^2$? ×

注意先正后负!!!

复数域

标准形->规范形(复系数)
方法:$(/\sqrt{d})$
化成:
$f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2$

规范形唯一
由二次型的**秩**确定
eg

1、合同于

2、
复对称矩阵合同
<=>两者**秩**相同

实数域

标准形->规范形(实系数)
方法:$(/\sqrt{d})$
化成:

规范形

正惯性指数:p:正平方项个数
负惯性指数:q=**r-p**
符号差:2p-r
(r=p+q)

贯通性:
显形式:规范形或标准形
显形r、**p、q**

eg1
eg2

1、合同于

2、
实对称矩阵合同
<=>两者**r、p**相同

惯性th

*实系数化成规范形,**规范形**是、*
唯一的
由r、p决定

5.3 正定性

--实数域
函数角度

定义法

二次型f

1、**不全为0**的c1…cn
都有f(c1,…cn)>0
则f是正定的
2、任意**X**!=0,
都有$f=X^TAX>0$
则f是正定的
称**A**是正定矩阵

A是实**对称**矩阵

推论 几何

桥梁

f~di定理
必要性证明

正定性定定理
证明

二次型~标准形~规范形

正惯性法

f正定<=>
1.r=peg
2.标准形系数都大于0
2'推论
3.规范形系数都为1
3'$f=C^TAC$,A与E合同
3"$A=D^TD$(D可逆)
(*)正定矩阵行列式>0
(**必要条件**)

顺序主子式

主子式:
行号列号相同的子式
顺序主子式
形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n阶矩阵有n个顺序主子式

$f=X^TAX$正定<=>A的所有**顺序主子式>0**

---

1. 矩阵合同
(1) 矩阵合同的定义
A与B合同 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵C,使得 $B=C^TAC$
(2) 合同矩阵的一个等价刻画
A与B合同 $\Leftrightarrow$ A可经过有限次相同的行列初等变换化为B

VS

2. 矩阵等价
(1) 矩阵等价的定义
A与B等价 $\Leftrightarrow$ A可经过有限次的初等变换化为B
(2) 等价矩阵的一个等价刻画
A与B等价 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P及Q,使得 $B=PAQ$.

先证明**对称**

判定法小结 → 正定矩阵

三法总结

六法和篇

性质

A,B同阶正定矩阵=>

1.A+B是正定矩阵

2.kA是正定矩阵(k>0)

3.kA+lB正定矩阵(k,l>0)

证明

4.当AB=BA，AB是

5.A^T正定

6.A^{-1}存在且正定矩阵

7.A的主对角元全>0

证明

eg

8.A的行列式>0

式

错题集题目部分

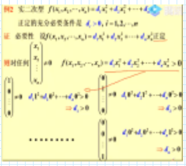
2021年10月6日　　21:46

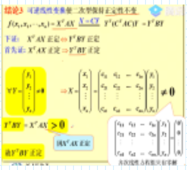
错题集答案部分

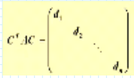
2021年10月7日 11:41

定理证明

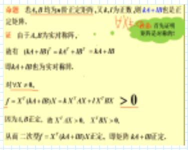
2021年10月8日 10:21

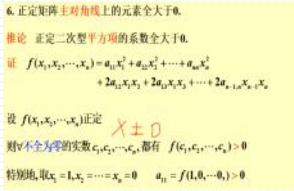






di>0





例 5. 证明：数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\ge 3$时，$nt\le 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\ge \tan(n-1)t+\tan t\ge\cdots\ge n\tan t$$

从而，$\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\le\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\ge 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\le(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\ge 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\le\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列$\left\{L_n\right\}$收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi。$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S= $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，证明：

$\left\{x_n\right\}$单调增加，$\left\{y_n\right\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

证 由平均值不等式($a_k>0$，$k=1,2,3,\cdots,n$)

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\le\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\le\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\left\{x_n\right\}$单调增加，$\left\{y_n\right\}$单调减少。

又 $2=x_1\le x_n<y_n\le y_1=4$,

即数列$\{x_n\},\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$，所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

记 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

说明： e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{1}{b_{n-1}}$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$$

当 $b_n>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\ b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\ k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k}=a$ ，$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty$，$0<b\le\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\dfrac{1+2a}{1+a}$；

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\dfrac{1+2b}{1+b}$。

这两个方程有相同的解 $a=b=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，兔群逐季增长率趋于$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

归纳总结

2021年10月7日 11:42

常用结论

2021年10月8日 10:15

即找出变换前后二次型的矩阵之间的关系:

作可逆线性变换 $X=CY$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX \xlongequal{X=CY} Y^TBY$$

$\boxed{B=C^TAC}$ A与B合同

结论: (1) 二次型经过可逆线性变换后还是二次型.

(2) 它们的矩阵是合同的.

"合同"是矩阵之间的一种关系,它具有如下性质:

(1) 反身性: 对任意方阵A,有$A\simeq A$.

(2) 对称性: 若$A\simeq B$,则$B\simeq A$.

(3) 传递性: 若$A\simeq B, B\simeq C$则$A\simeq C$.

$$\begin{cases} z_1=\sqrt{d_1}\,y_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_r=\sqrt{d_r}\,y_r \\ z_{r+1}=y_{r+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_n=y_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\dfrac{1}{\sqrt{d_1}}z_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_r=\dfrac{1}{\sqrt{d_r}}z_r \\ y_{r+1}=z_{r+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n=z_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1=\sqrt{d_1}\,y_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_r=\sqrt{d_r}\,y_r \\ z_{r+1}=y_{r+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_n=y_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\dfrac{1}{\sqrt{d_1}}z_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_r=\dfrac{1}{\sqrt{d_r}}z_r \\ y_{r+1}=z_{r+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n=z_n \end{cases}$$

情形1: $a_{ii}\ (i=1,2,\cdots,n)$中至少有一个不为零,不妨设$a_{11}\neq 0$.

$$令\begin{cases} y_1=x_1+\sum_{j=2}^{n}a_{11}^{-1}a_{1j}x_j \\ y_2=x_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n=x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=y_1-\sum_{j=2}^{n}a_{11}^{-1}a_{1j}y_j \\ x_2=y_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n=y_n \end{cases}$$

可逆

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}y_1^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}b_{ij}y_iy_j$$

先消x1,再消x2...(配方法)

情形2: 所有$a_{ii}=0$,但至少有一个$a_{1j}\neq 0\ (j=2,3,\cdots,n)$,不失一般性,设$a_{12}\neq 0$.

$$令\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n=y_n \end{cases}$$

二次型中没有平方项
先"制造"平方项

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= 2a_{12}x_1x_2+\cdots=2a_{12}(y_1+y_2)(y_1-y_2)+\cdots \\ &= 2a_{12}y_1^2-2a_{12}y_2^2+\cdots \end{aligned}$$

y_1^2的系数不为零, 即变成了情形1

……继续

情形3: $a_{11}=a_{12}=a_{13}=\cdots=a_{1n}=0$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

不显含x_1

$$令\begin{cases} y_1=x_1 \\ 其它同上 \end{cases}$$

定义2' 实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$

如果对于任意一个实向量 $X=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$,都有

$$X^TAX\geq 0$$

并且$X^TAX=0$当且仅当 $X=0$

则称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为正定的.

方法总结

2021年10月8日 10:47

1. 定义法 ------抽象型

2. 正惯性指数法------数值型、抽象型

3. 顺序主子式法 ------数值型

1. 定义法 ------计算函数值

n元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$正定

$\Leftrightarrow$ 对任意非零实向量$X^T=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\neq 0$,都有

$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)=X^TAX>0.$

2. 正惯性指数法 ------化标准形 (配方法,初等变换法,……)

n元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$正定

$\Leftrightarrow f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正惯性指数$p=n$

3. 顺序主子式法 ------计算行列式

n元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$正定

$\Leftrightarrow A$的顺序主子式全大于零

五、正定性的判定方法小结

1. n 元实二次型 f 正定 $\Longleftrightarrow$ 对任意非零实向量

$X^T=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\neq 0$,都有$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)=X^TAX>0.$

2. n 元实二次型 f 正定 $\Longleftrightarrow$ f 的正惯性指数 $p=n$

3. 实对称矩阵A为正定矩阵 $\Longleftrightarrow$

存在可逆矩阵C,使得$C^TAC=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$,其中$d_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

4. 实对称矩阵A为正定矩阵 $\Longleftrightarrow$ A与单位矩阵 E 合同

5. 实对称矩阵A为正定矩阵 $\Longleftrightarrow$ 存在可逆矩阵D,使得$A=D^TD$

6. 实对称矩阵A是正定矩阵 $\Longleftrightarrow$ A的顺序主子式全 >0

重要例题

2021年10月8日 11:37

定义 二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$经过可逆线性变换,化成只含有平方项的形式,称为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的一个标准形.

如果经过可逆变换 $X=CY$ 能将$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 化为:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX=Y^T(C^TAC)Y=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

$$=(y_1\ \ y_2\ \ \cdots\ \ y_n)\begin{pmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

等价于能使C^TAC为对角矩阵:$C^TAC=\begin{pmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{pmatrix}$

$$f=X^TAX\ \overset{X=CY}{=\!=\!=}\ d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

$$\Updownarrow$$

$$C^TAC=\begin{pmatrix}d_1&&&\\&d_2&&\\&&\ddots&\\&&&d_n\end{pmatrix}$$

定理1 数域P上任意一个二次型都可以经过可逆线性变换化为标准形(只含有平方项).

推论 数域P上任意一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵.

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

情形1:$a_{ii}\ (i=1,2,\cdots,n)$中至少有一个不为零,不妨设$a_{11}\neq 0$.

令$\begin{cases}y_1=x_1+\sum\limits_{j=2}^{n}a_{11}^{-1}a_{1j}x_j\\y_2=x_2\\\cdots\cdots\\y_n=x_n\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=y_1-\sum\limits_{j=2}^{n}a_{11}^{-1}a_{1j}y_j\\x_2=y_2\\\cdots\cdots\\x_n=y_n\end{cases}$

例1 化二次型为标准形,并写出所用的可逆线性变换.

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$

解 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3)-3x_2^2+4x_3^2-6x_2x_3$

$=[x_1^2-2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2]-3x_2^2+4x_3^2-6x_2x_3-(x_2-x_3)^2$

$=(x_1-x_2+x_3)^2-4x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$

$=(x_1-x_2+x_3)^2+(-4x_2^2-4x_2x_3)+3x_3^2$

$=(x_1-x_2+x_3)^2-4\left[x_2^2+x_2x_3+\left(\frac{x_3}{2}\right)^2\right]+3x_3^2+x_3^2$

$=(x_1-x_2+x_3)^2-4\left(x_2+\frac{x_3}{2}\right)^2+4x_3^2$

$=(x_1-x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2+4x_3^2$

$f=y_1^2-y_2^2+4y_3^2$

令$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3\\y_2=2x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$

即$\begin{cases}x_1=y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{3}{2}y_3\\x_2=\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3\\x_3=y_3\end{cases}$

上面所作的可逆线性变换可用矩阵表示:

$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3\\y_2=2x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$\begin{cases}x_1=y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{3}{2}y_3\\x_2=\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3\\x_3=y_3\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

例2 将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-3x_2x_3$化为标准形,并写出所用的可逆线性变换.

先构造平方项

解 令$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$

$f(x_1,x_2,x_3)$

$=(y_1-y_2)(y_1+y_2)+(y_1+y_2)y_3-3(y_1-y_2)y_3$

$=y_1^2-y_2^2-2y_1y_3+4y_2y_3$

$=(y_1^2-2y_1y_3+y_3^2)-y_2^2+4y_2y_3-y_3^2$

$=(y_1-y_3)^2-y_2^2+4y_2y_3-y_3^2$

$=(y_1-y_3)^2-(y_2^2-4y_2y_3+4y_3^2)-y_3^2+4y_3^2$

$=(y_1-y_3)^2-(y_2-2y_3)^2+3y_3^2$

$=z_1^2-z_2^2+3z_3^2$

再令$\begin{cases}z_1=y_1-y_3\\z_2=y_2-2y_3\\z_3=y_3\end{cases}$

即$\begin{cases}x_1=z_1+z_2+3z_3\\x_2=z_1-z_2-z_3\\x_3=z_3\end{cases}$

上面所作的可逆线性变换可用矩阵表示:

$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$\begin{cases}z_1=y_1-y_3\\z_2=y_2-2y_3\\z_3=y_3\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$\begin{cases}x_1=z_1+z_2+3z_3\\x_2=z_1-z_2-z_3\\x_3=z_3\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$

例2 在实数域上化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$为规范形,并写出所作的可逆线性变换.

初等变换法

解

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&6\\\hline 1&-\frac{1}{2}&3\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&6\\\hline \frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{2}&3\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&6\\\hline \frac{1}{\sqrt2}&-\frac{\sqrt2}{2}&3\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{\sqrt2}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\\\hline \frac{1}{\sqrt2}&-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\0&0&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\\\hline \frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{\sqrt2}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt6}&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\\hline \frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{\sqrt2}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt6}&0\end{pmatrix}$$

经过可逆线性变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{\sqrt2}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt6}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

规范形为 $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的正惯性指数为1,求$a$的取值范围.

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$

$=(x_1^2+2ax_1x_3+a^2x_3^2)-x_2^2+4x_2x_3-a^2x_3^2$

$=(x_1+ax_3)^2-(x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2)+4x_3^2-a^2x_3^2$

$=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$

$4-a^2\le 0\quad\Rightarrow a\ge 2$ 或 $a\le -2$

例3 运用初等变换法,将对称矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}$化为对角矩阵,并写出相应的可逆矩阵$C$.

解 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+c_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-3\\-2&-3&0\\\hline 1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\cdots$

$\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-2\\0&-2&-2\\\hline 1&-\frac{1}{2}&1\\1&\frac{1}{2}&1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\cdots$

先作列变换 后作行变换

NJUPT

合同的

例3' 化二次型 $2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$ 为标准形,并写出所用的可逆线性变换.

解 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\\ \hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&6\\ \hline 1&-\frac{1}{2}&3\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

经过可逆线性变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&3\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

标准形为

$$f=2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+6y_3^2$$

例2 在复数域上化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$ 为规范形,并写出所作的可逆线性变换.

初等变换法

解

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&6\\ \hline 1&-\frac{1}{2}&3\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&6\\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}&3\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&6\\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{2}}{2}i&3\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{2}}{2}i&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{2}}{2}i&\frac{3}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{2}}{2}i&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

经过可逆线性变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{2}}{2}i&\frac{3}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{2}}{2}i&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

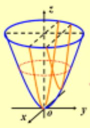
规范形为 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$

例如 设 $f(x,y)$ 是二元正定二次型

则 $z=f(x,y)$ 表示的曲面

经过原点,且全在 xOy 坐标面的上方.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$



例1 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-x_3^2+2x_2x_3$

$f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-x_3^2+2x_3x_2$

都不是正定的.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+10x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\qquad f=y_1^2+y_2^2$$

2022年3月17日 10:23

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \ldots + c_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \ldots + c_{nn}y_n \end{cases}$$