笔记部分

2021年10月6日 18:05

矢量不能直接求导,要用投影算

1.1 yd描述 → 重要量 → 俩方程 → 重要题型 → 1.2 圆周yd → 重要量 → 自然坐标 → 求加速度 → 一般的 → 1.3 相对运动 → 物理量

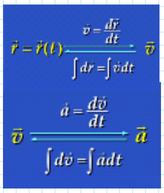
1.1 yd描述

直角坐标系

位置矢量

错题

- 题目1
- 题目2
- 题目3
- 题目4
- 答案1
- 答案2
- 答案3
- 答案4



重要量

位置矢量(位矢)

r=x(t)i+y(t)j+z(t)k

位移

△r=r1-r2

速度(速率)

平均速度

v=△r/t

加速度

俩方程

运动方程

轨迹方程

重要题型

第一类

第二类

答案

- 题目1
- 答案1

1.2 圆周yd

极坐标系

答案

- 题目1
- 答案1

重要量

详细

角位置(极角)θ

角位移△θ

角速度ω

角加速度α

与直角坐标系中的量

自然坐标

原点:质点位置

坐标轴:(e_t,e_n)

t:切向坐标轴(**v方向**)

n:法向坐标轴

求加速度

$a=a_t+a_n$

$\omega r = v = \frac{ds}{dt}$

$a_t=\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t$

$a_n=v\omega\mathbf{e}_n$

eg1

角加速度不变

一般的

曲线运动

公式

Tips

有时a_n不好求,

可用$a=\sqrt{an^2+at^2}$

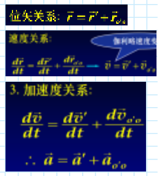
eg1

1.3 相对运动

位矢关系

定要画图

物理量



3.3

1.3 相对运动

错题集题目部分

2021年10月6日 21:46

11 质点沿 x 轴运动，其加速度和位置的关系为 $a=2+6x^2$，a 的单位为 $m\cdot s^{-2}$，x 的单位为 m。质点在 $x=0$ 处，速度为 $10m\cdot s^{-1}$，试求质点在任何坐标处的速度值。

1. 质点的质量为 m，置于光滑球面的顶点 A 处(球面固定不动)，如图所示。当它由静止开始下滑到球面上 B 点时，它的加速度的大小为 D

A $a=2g(1-\cos\theta)$.　　B $a=g\sin\theta$.

C $a=g$　　D $a=\sqrt{4g^2(1-\cos\theta)^2+g^2\sin^2\theta}$

一质点沿 x 方向运动，其加速度随时间变化关系为：

$a=3+2t(SI)$，如果初始时刻质点的速度 $v_0=5m/s$，则 t

=3时速度大小为

5. 对于沿曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：

A 切向加速度必不为零；$a_n=\frac{v^2}{\rho}\neq 0$！

B 法向加速度必不为零（拐点处除外）；

C 由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零；

D 若物体作匀速率运动，其总加速度必为零；×

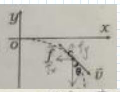
E 若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，它一定作匀变速率运动。

6. 一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为

A $\frac{dr}{dt}$　　B $\frac{d\vec{r}}{dt}$

C $\frac{d|\vec{r}|}{dt}$　　D $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

4. 质量为 m 的质点在某高度水平抛出，所受到的阻力为 $\vec{f}=-k\vec{v}$，如图所示，则质点运动的微分方程为 [redacted]



(A) $-m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}$　　$-m\frac{d^2y}{dt^2}=mg+k\frac{dy}{dt}$

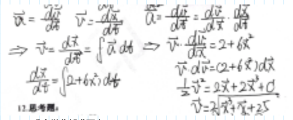
(B) $m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}$　　$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg-k\frac{dy}{dt}$

(C) $m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}$　　$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg+k\frac{dy}{dt}$

(D) $m\frac{d^2x}{dt^2}=k\frac{dx}{dt}$　　$-m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg+k\frac{dy}{dt}$

错题集答案部分

2021年10月7日 11:41


$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\vec{x}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$

$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \int \vec{a}\,dt \Rightarrow \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{d\vec{x}} = 2 + 6\vec{x}^2$

$\frac{d\vec{x}}{dt} = \int (2+6\vec{x}^2)\,dt$

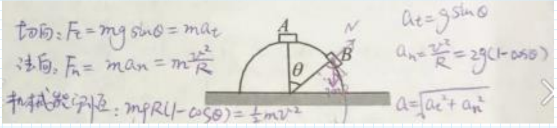
$\vec{v} \cdot d\vec{v} = (2+6\vec{x}^2)\,d\vec{x}$

$\frac{1}{2}\vec{v}^2 = 2\vec{x} + 2\vec{x}^3 + C$

$\vec{v} = 2\sqrt{\vec{x}^3 + \vec{x} + 25}$

12.思考题：

2022.4.4求个微分都求不来..


切向：$F_t = mg\sin\theta = ma_t$

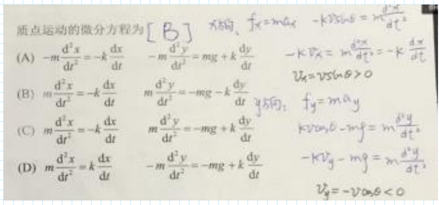
法向：$F_n = ma_n = m\frac{v^2}{R}$

机械能守恒：$mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2$

$a_t = g\sin\theta$

$a_n = \frac{v^2}{R} = 2g(1-\cos\theta)$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$


质点运动的微分方程为 [B]

(A) $-m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}$ $-m\frac{d^2y}{dt^2} = mg + k\frac{dy}{dt}$

(B) $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}$ $m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - k\frac{dy}{dt}$

(C) $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}$ $m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + k\frac{dy}{dt}$

(D) $m\frac{d^2x}{dt^2} = k\frac{dx}{dt}$ $-m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + k\frac{dy}{dt}$

x方向、$f_x = ma_x$ $-kv\sin\theta = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$-kv_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}$

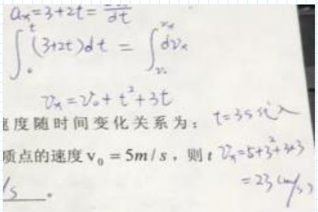
$v_x = v\sin\theta > 0$

y方向：$f_y = ma_y$

$kv\cos\theta - mg = m\frac{d^2y}{dt^2}$

$-kv_y - mg = m\frac{d^2y}{dt^2}$

$v_y = -v\cos\theta < 0$


$a_x = 3 + 2t = \frac{dv_x}{dt}$

$\int_0^t (3+2t)\,dt = \int_{v_0}^{v_x} dv_x$

$v_x = v_0 + t^2 + 3t$

速度随时间变化关系为： t=3s代入

质点的速度 $v_0 = 5m/s$，则 $v_x = 5 + 3^2 + 3 \times 3$

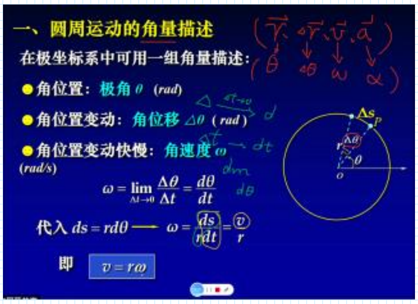
$= 23\ (m/s)$

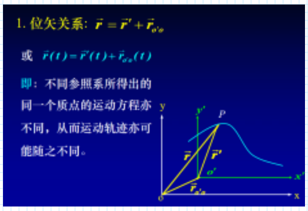
/s 。

B D

定理证明

2021年10月8日 10:21





例 5. 证明：数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\geq 3$时，$nt\leq 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\geq \tan(n-1)t+\tan t\geq\cdots\geq n\tan t$$

从而，$\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\leq\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\geq 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\leq(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\geq 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\leq\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列$\{L_n\}$收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi。$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S$=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，证明：

$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n$.

证 由平均值不等式($a_k>0$，$k=1,2,3,\cdots,n$)

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\leq\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\leq\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少。

又 $2=x_1\leq x_n<y_n\leq y_1=4$,

即数列$\{x_n\},\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$，所以，$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n$.

记 $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

说明： e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$$

当 $b_n>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\ b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\ k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\ \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to+\infty}b_{2k}=a$ ，$\lim\limits_{k\to+\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty$，$0<b\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\frac{1+2a}{1+a}$；

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\frac{1+2b}{1+b}$。

这两个方程有相同的解 $a=b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

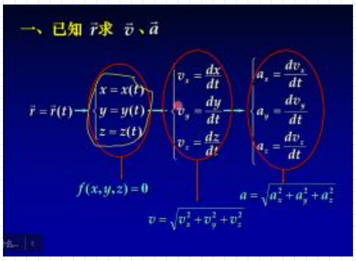
在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，兔群逐季增长率趋于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

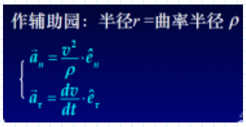
归纳总结

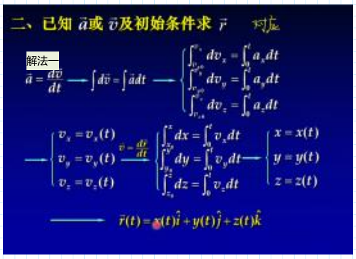
2021年10月7日 11:42

常用结论

2021年10月8日 10:15



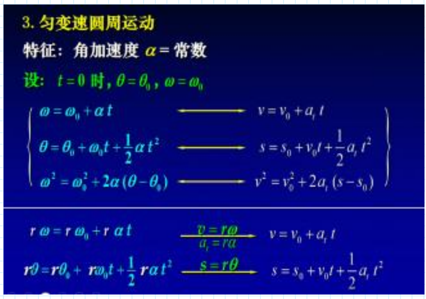




解法一

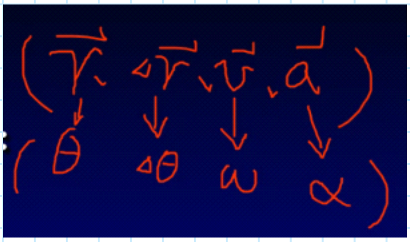
解法二

间接求导



方法总结

2021年10月8日 10:47



重要例题

2021年10月8日　11:37

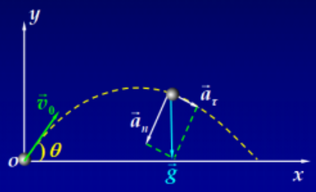
课堂练习 某质点作斜抛运动：$\theta = 30°$，$v_0 = 19.6 m/s$

求其在 $t = 1.5s$ 时刻的切向/法向加速度的大小。

解 $\vec{a} = -g \cdot \hat{j}$ $\quad g = 9.8 m/s^2$

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\theta \\ y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta \\ v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$$



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t \sin\theta + (gt)^2}$$

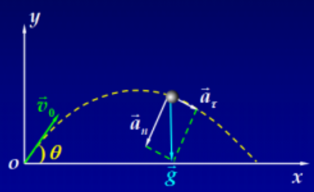
$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{gt - v_0 \sin\theta}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 g t \sin\theta}} g = \frac{2g}{\sqrt{13}} \approx 5.44(m/s^2)$$

$$g = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}$$

$$= \frac{3g}{\sqrt{13}}$$

$$\approx 8.16(m/s^2)$$



例 一质点作半径为R的圆周运动，其路程：$s = \frac{1}{2} k R t^2$

k为常数， 求：切向/法向加速度和加速度的大小。

解 速率： $v = \frac{ds}{dt} = kRt$

切向加速度： $a_\tau = \frac{dv}{dt} = kR$

法向加速度： $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(kRt)^2}{R} = k^2 R t^2$

加速度： $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(kR)^2 + (k^2 R t^2)^2}$

(解毕)

·9·

笔记部分

2021年10月6日 18:05

2.1 牛顿运动定律 → 牛一 → 牛二 → 牛三 → 2.2 应用 → 力求运动 → 运动求力 → 综合

2.1 牛顿运动定律

错题

题目1

答案1

牛一

牛顿第一定律给出惯性的概念。

- 维持物体运动的是惯性；
- 改变物体运动的是力。

惯性系

牛二

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

只适应惯性系

质量是物体惯性的量度

牛三

$$\vec{F} = -\vec{F}'$$

性质相同

作用两个物体

力求运动

eg1

eg2

运动求力

eg1

综合

错题集题目部分

2021年10月6日 21:46

8. 一质量为 1 kg 的物体，置于水平地面上，物体与地面之间的静摩擦系数μ_0=0.20，滑动摩擦系数μ=0.16，现对物体施一水平拉力 $F=t+0.96$(SI)，则 2 秒末物体的速度大小

错题集答案部分

2021年10月7日 11:41

$v=$ 0.892 m/s (g取9.8 m/s²)

或 0.8448 m/s (g取10 m/s²)

定理证明

2021年10月8日 10:21

4. 牛顿第一定律只适用于惯性参照系。

- 满足牛顿第一定律的参照系为惯性参照系
- 静止或匀速直线运动的参照系为惯性系。

例 5. 证明：数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\geq 3$时，$nt\leq 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\geq \tan(n-1)t+\tan t\geq\cdots\geq n\tan t$$

从而，$\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\leq\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\geq 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\leq(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\geq 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\leq\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列$\{L_n\}$收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi。$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S= $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,证明：

$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

证 由平均值不等式$(a_k>0，k=1,2,3,\cdots,n)$

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\leq\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\leq\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少。

又 $2=x_1\leq x_n<y_n\leq y_1=4$,

即数列$\{x_n\},\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$，所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

记 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

说明： e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{1}{b_{n-1}}$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$$

当 $b_n>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\ b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\ k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\ \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k}=a$ ，$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty$，$0<b\le\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\dfrac{1+2a}{1+a}$；

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\dfrac{1+2b}{1+b}$。

这两个方程有相同的解 $a=b=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，兔群逐季增长率趋于$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

归纳总结

2021年10月7日 11:42

常用结论

2021年10月8日　10:15

方法总结

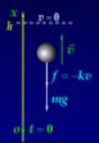
2021年10月8日　10:47

重要例题

2021年10月8日 11:37

例 质量为m的物体以初速度v_0竖直向上抛出，若空气阻力$f=-kv$，v为物体t时刻速率。求上升最大高度及所需时间。

[解法1] 建立坐标系如图



$$-mg+f=m\frac{dv}{dt} \qquad f=-kv$$

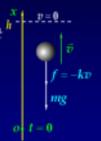
$$-\int_0^t\frac{dt}{m}=\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{mg+kv}$$

$$v=(\frac{mg}{k}+v_0)e^{-kt/m}-\frac{mg}{k} \qquad (1)$$

至最高点处: $v=0$，可解出:

$$t_0=\frac{m}{k}\ln(1+\frac{kv_0}{mg}) \qquad (2)$$

由(1)式及 $v=\frac{dx}{dt}$ 得:



$$\int_0^x dx=\int_0^t[(\frac{mg}{k}+v_0)e^{-kt/m}-\frac{mg}{k}]dt$$

$$x=-\frac{m}{k}(\frac{mg}{k}+v_0)(e^{-kt/m}-1)-\frac{mg}{k}t$$

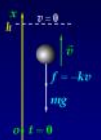
将(2)式代入上式得上升高度为:

$$h=\frac{m}{k}v_0-\frac{m^2g}{k^2}\ln(1+\frac{kv_0}{mg})$$

(解毕)

[解法2] $-mg-kv=m\frac{dv}{dt}$

$$-mg-kv=m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=mv\frac{dv}{dx}$$



$$dx=-\frac{mvdv}{mg+kv}$$

$$\int_0^h dx=-\frac{m}{k}\cdot\int_{v_0}^{0}(1-\frac{mg}{mg+kv})dv$$

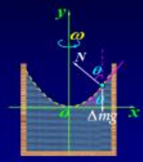
$$h=\frac{m}{k}v_0-\frac{m^2g}{k^2}\ln(1+\frac{kv_0}{mg})$$

(解毕)

例 如图所示,求以角速度 ω 旋转水箱中水的表面形状。

解 [定]取水面上某滴水质元为研究对象，建立坐标系如图。

[画]设水滴坐标为(x,y)，质量为Δm，受力图如图。



[列] $\begin{cases} N\cos\theta-\Delta mg=0 \\ N\sin\theta=\Delta ma=\Delta mx\omega^2 \end{cases}$

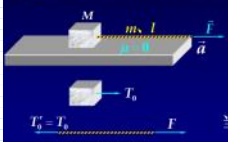
[解] 由上式可解得: $tg\theta=\frac{\omega^2}{g}x$

$$\xrightarrow{tg\theta=\frac{dy}{dx}} \quad \int_0^y dy=\int_0^x\frac{\omega^2}{g}xdx$$

$y=\frac{\omega^2}{2g}x^2$ 由对称性可知,水面为旋转抛物面。 (解毕)

例 匀质绳：m、l，水平，桌面光滑，物体质量为M，水平作用力F，设绳子长度不变，求(1)绳作用在物体上的力；(2)绳上任意点的张力。

解 (1) 分别以 M 与 m 作为对象，可列出方程:



$$\begin{cases} T_0=Ma \\ F-T_0=ma \end{cases} \longrightarrow T_0=\frac{M}{M+m}F$$

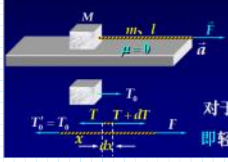
当 $M>>m$ 时，$T_0\approx F$

$$a=\frac{T_0}{M}=\frac{F}{M+m}$$

(2) 求绳上任意点的张力:

设线密度$\eta=\frac{m}{l}$，以 dx 段绳为对象，则:

$$(T+dT)-T=(dm)a=(\eta dx)a \longrightarrow \int_T^F dT=\int_x^l \eta a dx$$



$$T=F-\eta a(l-x)$$

$$T(x)=(M+\frac{m}{l}x)\frac{F}{M+m}$$

对于轻绳，$M<<m$，则$T\approx F$。

即轻绳内部张力处处相等。

笔记部分

2021年10月6日 18:05

$|dr|!=dr$

3.1 动量定理 → 冲量 → 质点下 → 质点系 → 3.2 动量守恒 → F=0 → 外<<内 → 某方向 → 3.2 动能定理 → 功 → 特点 → 功率 → 方法 → 动能th → 3.4 势能 → 保守力 → 势能 → 势能定理 →

3.1 动量定理

状态量

a、v、p、p

过程量

I、△v、△r

冲量

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

质点下

平均冲力(积分中值)

eg1

质点系

$$\int_{t_1}^{t_2} (\sum F_{i外}) dt = P - P_0 = \Delta P$$

3.2 动量守恒

错题

题目1

题目2

答案1

答案2

F=0

任一方向动量守恒

外<<内

动量近似守恒

eg1

某方向

该方向动量守恒

功

元功:dW=Fcosθ·|dr|

=F·dr

一对力的功

与参考系无关

证明

故

一般将坐标系原点建立在其中一个物体上

eg1

特点

标量,"+""-"

相对量,与参考系有关

方法

坐标系

确定元功

统一积分变量

$$W = \int_a^b F|d\vec r|\cos\theta$$

$$W = \int_a^b (F_x\hat i + F_y\hat j)\cdot(dx\hat i + dy\hat j) = \int_a^b F_x dx + F_y dy$$

eg1

保守力

做功于**路径**无关

$$\oint_l \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = 0$$

势能

1.相对量

2.质点系。势能属于系统

3.保守力做功

3.1 动量定理

无限集

有界集

映射

三种势能 → 3.4 机械能E → 功能原理 → 机械能eq → 3.5 能量守恒 → 碰撞

三种势能

- 重力势能
- 弹性势能
- 万有引力势能

3.4 机械能E

错题

- 题目1
- 题目2
- 题目3
- 题目4
- 答案1
- 答案2
- 答案3
- 答案4

功能原理

$$\sum_{i=1}^{n} W_{外i} + \sum_{i=1}^{n} W_{非保内i} = \Delta E$$

$$E = E_k + E_p$$

机械能eq

$$\sum_{i=1}^{n} W_{外i} + \sum_{i=1}^{n} W_{非保内i} = 0$$

机械能守恒

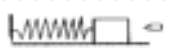
3.5 能量守恒

碰撞

- 完全弹性
- 非完全弹性
- 非弹性
- 牛顿碰撞定律

错题集题目部分

2021年10月6日　21:46

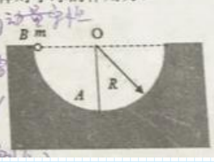
如图所示的装置中， 
木块B与水平桌面间
的接触是光滑的，子弹A沿水平方向射入
木块后留在木块内，将弹簧压缩到最短，
现将子弹、木块和弹簧合在一起作为研究
对象(系统)，则此系统在从子弹开始射入
到弹簧被压缩至最短的整个过程中(　)
A:动量守恒，机械能守恒
C:动量不守恒，机械能守恒
B:动量守恒，机械能不守恒
D:动量不守恒，机械能不守恒

在两个质点组成的系统中，若质点之间只有万有引力作用，且此系统所受外力的矢量和为零，则系统（ ）
A.动量和机械能一定守恒
B.动量与机械能一定都不守恒
C.动量不一定守恒，机械能一定守恒
D,动量一定守恒，机械能不一定守恒

一质量为 60 kg 的人起初站在一条质量为 300 kg，且正以 2 m/s
$300\times1+60\times(v+1)$
的速率向湖岸驶近的小木船上，湖水是静止的，其阻力不计．现
(m/s)
在人相对于船以一水平速率 v 沿船的前进方向向河岸跳去，该人起跳后，船速减为原来的一半，$v=$[redacted]。

4. 一人站在有光滑固定转轴的转动平台上,双
起二哑铃,在该人把此二哑铃水平收缩到胸
哑铃与转动平台组成的系统的:
[redacted] 机械能守恒，角动量守恒[redacted]
机械能守恒，角动量不守恒；
机械能不守恒，角动量守恒；[redacted]
机械能不守恒，角动量不守恒。

四、一质量为 M 的具有半径为 R 的半球形凹槽的物体静止在光滑的水平面上，凹槽表面也光滑，现在 B 点放置一质量为 m 的小球，释放后小球处于最低位置 A 时物体对小球的作用力。
(m/s)
{小球，凹槽} 水平方向动量守恒
设小球处于A点时小球、凹槽
的速率(相对地面)分别为 v、V



8. 人从 10m 深的井中匀速提水，桶
若每升高 1m 要漏掉 0.2kg 的水，则把
的过程中，人力所作的功为[redacted]

臂伸直水平地举
前的过程中，人、
[redacted]

离开水面时装有水 10kg。
这桶水从水面提高到井口
[redacted]

错题集答案部分

2021年10月7日 11:41

D D

6

{人,船} 动量守恒 4.（本题 2 分） $\vec{v}_{人-地} = \vec{v}_{人-船} + \vec{v}_{船-地}$

一质量为 60 kg 的人起初站在一条质量为 300

$(300+60)\times 2 = 300\times 1 + 60\times(v+1)$

的速率向湖岸驶近的小木船上，湖水是静止的

$v = 6$ (m/s)

在人相对于船以一水平速率 v 沿船的前进方向

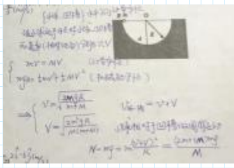
的过程中，人力所作的功为 900J 或 882J

($g=10m/s^2$) ($g=9.8m/s^2$)

桶里的水：$m=10-0.2y$

拉力为重力：$T=mg=(10-0.2y)g$

拉力做功：$W_T=\int \vec{T}\cdot d\vec{r}=\int_0^{10}(10-0.2y)g\,dy=900$ (J)



4. 一人站在有光滑固定转轴的转动平台上,双臂伸直水平地举起二哑铃,在该人把此二哑铃水平收缩到胸前的过程中，人、哑铃与转动平台组成的系统的：（ C ）

（A）机械能守恒，角动量守恒；系统{人，哑铃、转台}

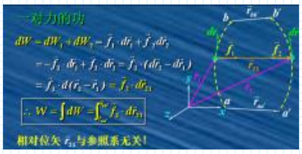
（B）机械能守恒，角动量不守恒；

（C）机械能不守恒，角动量守恒；人力（非保守内力）做功

（D）机械能不守恒，角动量不守恒。

定理证明

2021年10月8日 10:21



例 5. 证明：数列$\left\{ n\sin\frac{180^\circ}{n} \right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\ge 3$时，$nt\le 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\ge \tan(n-1)t+\tan t\ge\cdots\ge n\tan t$$

从而，$\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\le\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\ge 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\le(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\ge 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\le\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列$\{L_n\}$收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi。$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S= $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，证明：

$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$。

证 由平均值不等式($a_k>0$，$k=1,2,3,\cdots,n$)

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\le\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\le\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少。

又 $2=x_1\le x_n<y_n\le y_1=4$,

即数列$\{x_n\},\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$，所以，$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$。

记 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

说明： e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$

$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$

当 $b_n>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\ b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\ k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k}=a$ ，$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty$，$0<b\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\frac{1+2a}{1+a}$；

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\frac{1+2b}{1+b}$。

这两个方程有相同的解 $a=b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，兔群逐季增长率趋于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

归纳总结

2021年10月7日 11:42

常用结论

2021年10月8日 10:15

方法总结

2021年10月8日 10:47

牛顿的碰撞定律： 在一维对心碰撞中，碰撞后两物体的分离速度 $v_2 - v_1$ 与碰撞前两物体的接近速度 $v_{10} - v_{20}$ 成正比，比值由两物体的材料性质决定。

$$\boxed{e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}}$$

e 为恢复系数

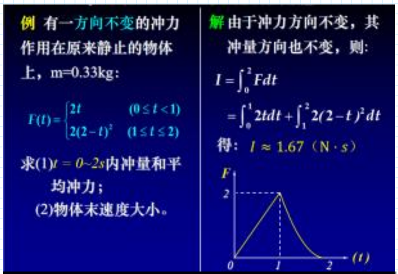
$e = 0$，则 $v_2 = v_1$，为完全非弹性碰撞。

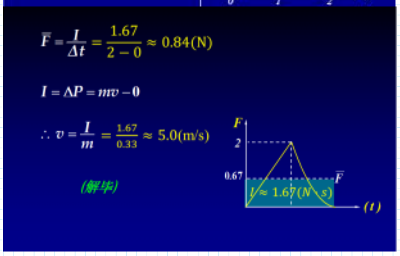
$e = 1$，则分离速度等于接近速度，为完全弹性碰撞。

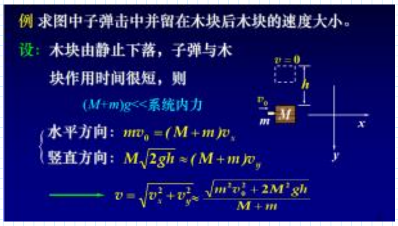
一般非弹性碰撞碰撞：$0 < e < 1$

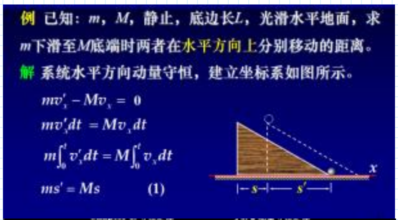
重要例题

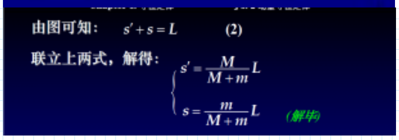
2021年10月8日 11:37

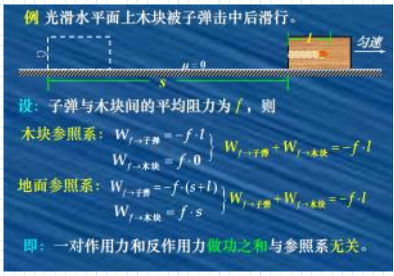


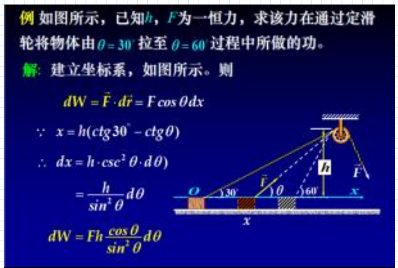


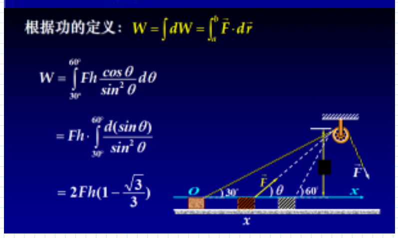












笔记部分

2021年10月6日 18:05

4.1 定轴转动

→ 描述量 → 有界集 → 与线量 → α不变 →

- 定轴转动
  - 错题
    - 题目1
    - 题目2
    - 题目3
    - 答案1
    - 答案2
    - 答案3
- 描述量
  - $\theta, \Delta\theta, \omega, \alpha$
  - ω方向
  - 右手四指沿
  - 刚体转动方向
  - 右旋时的大拇指
  - 指向 图
- 有界集
- 与线量
  - $v = r\omega$
  - $a_t = r\alpha$
  - $a_n = r\omega^2$
- α不变
  - $\omega = \omega_0 + \alpha t$
  - $\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
  - $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
  - eg

4.2(1) 转动惯量

→ 刚体E_k → 转动惯量 → 分立质点 → 质量均匀 → 结论 →

- 刚体E_k
  - $E_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{i} \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2$
- 转动惯量
  - $J = \sum_{i} \Delta m_i r_i^2$
- 分立质点
  - $J = \sum_{i} m_i r_i^2$
  - eg
- 质量均匀
  - $J = \int r^2 dm$
  - 一、杆模型
  - 平行轴定理
  - $J = J_c + md^2$
  - 图
  - 二、圆类
  - 注意！微元时通常不破坏原图形的对称性
  - Eg-球->圆壳
- 结论
  - 常用结论

4.2(2) 转动定律

→ 力矩 → 转动定律 →

- 力矩
  - $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$
  - 图
  - 对转轴力矩
  - $M_z = \sum_{i} M_{iz}$
  - $= \sum_{i} r_i F_{i\perp} \sin\varphi_i$
  - eg
- 转动定律
  - $M_z = J\alpha$
  - (类比F=ma)
  - **注意**
  - 1、M_z与α**方向**一致
  - 2、M_z、J、α对同一轴
  - eg1
  - eg2
  - eg3
  - eg4

4.3 角动量

→ 质点th → 刚体th → 质量均匀 →

- 质点th
  - $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$
  - **角动量定理**(与O的选取有关)
  - $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (F=$\frac{dp}{dt}$)
  - $\int_{t_0}^{t} \vec{M} dt = \vec{L} - \vec{L}_0$
  - 冲量矩
  - 角冲量
  - **角动量守恒**(与O的选取有关)
  - 一群案例
- 刚体th
  - 刚体对轴角动量
  - **L=Jω(L_z)**
  - 刚体对o点角动量
  - 推导
  - **角动量定理**
  - $M = \frac{dL}{dt}$
  - 确定对象
  - 受力分析
  - 确定角量
  - 方程求解
  - eg1
  - eg2
  - **角动量守恒**
  - 时
  - L为常数
  - 或Jω为常数(非刚体)
  - eg1
  - eg2
- 质量均匀

4.4
力矩做功

$$W=\int_{0}^{\theta} M d\theta$$

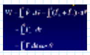
错题

题目1

答案1

推导

图



理解

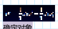
外力对刚体做的功

=外力矩对刚体做得功

力矩功率

$$P=M\omega$$

转动
动能定理



确定对象

受力分析

确定角量

方程求解

eg1

eg2

错题集题目部分

2021年10月6日　21:46

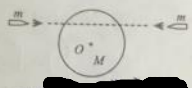
六、在留声机的转盘绕通过盘心垂直盘面的轴以角速度ω做匀速转动。放上唱片后，唱片将在摩擦力作用下随转盘一起转动.设唱片的半径为R，质量为m，它与转盘间的摩擦系数为μ，求：(1) 唱片与转盘间的摩擦力矩；(2) 唱片达到角速度ω时需要多长时间；(3)在这段时间内，转盘的驱动力矩做了多少功？

有两个半径相同，质量相等的细圆环A和B。A环的质量分布均匀，B环的质量分布不均匀。它们对通过环心并与环面垂直的轴的转动惯量分别为J_A和J_B，则 [redacted]

A $J_A>J_B$　　B $J_A<J_B$

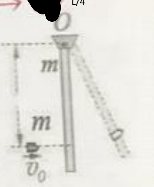
C $J_A=J_B$　　D 不能确定J_A、J_B哪个大

2. 一圆盘正绕垂直于盘面的水平光滑固定轴O转动，如图射来两个质量相同，速度大小相同，方向相反并在一条直线上的子弹，子弹射入圆盘并且留在盘内，则子弹射入后的瞬间，圆盘的角速度ω [redacted]



A 增大　　B 不变　　C 减小　　D 不能确定

8. 一长为l，质量为m 的竿可绕支点O自由转动，一质量同为m的子弹以水平速度v_0射入竿内距支点为[redacted] 改为 [redacted] L/4处，与竿一起转动，求(1) 两物体开始一起转动时竿的角速度ω和子弹速度v；(2)竿的最大偏转角θ_m。



(1)子弹射入前后，{子弹，竿}角动量守恒

$$mv_0\cdot\frac{2}{3}l=\frac{1}{3}ml^2\omega+m\left(\omega\cdot\frac{2}{3}l\right)\cdot\frac{2}{3}l$$

错题集答案部分

2021年10月7日 11:41

解：(1) 将唱片分割成许多薄圆环（细圆环）

细圆环质量 $dm=\sigma\cdot 2\pi r dr$ 　面密度 $\sigma=\frac{m}{\pi R^2}$

细圆环所受摩擦力矩：$dM=r\cdot\mu dm\, g=\mu r g\sigma 2\pi r dr$

唱片所受摩擦力矩：$M=\int dM=\int_0^R \mu r g\sigma 2\pi r dr=2\pi\mu g\sigma\int_0^R r^2 dr$

$=\frac{2}{3}\pi\mu g\sigma R^3=\frac{2}{3}\mu mgR$

(2) 对唱片应用转动定律：$M=J\alpha$ 　$\alpha=\frac{M}{J}=\frac{\frac{2}{3}\mu mgR}{\frac{1}{2}mR^2}=\frac{4\mu g}{3R}$

$\alpha=$ 常量 　唱片作匀加速转动

$\omega=\omega_0+\alpha t=0+\alpha t \longrightarrow t=\frac{\omega}{\alpha}=\frac{3R\omega}{4\mu g}$

(3) 唱片放上转盘的最初一段时间内，两者有相对运动，有摩擦力

此摩擦力对于唱片是动力，唱片转速从0开始增大；

此摩擦力对于转盘是阻力，转盘的转速有减小的趋势，为维

持转盘转速为 ω 不变，驱动力克服阻力做功

一段时间后，唱片与转盘相对静止，有共同的角速度 ω

在此过程，转盘始终以 ω 匀速转动，角加速度为0，合外力矩为0

对转盘：$M_{驱}=M_{摩}=\frac{2}{3}\mu mgR$（驱动力矩，大小相等，方向相反）

驱动力对转盘做功：$W=M_{驱}\cdot\Delta\theta=\frac{2}{3}\mu mgR\cdot\omega t=\frac{1}{2}mR^2\omega^2$

c

c

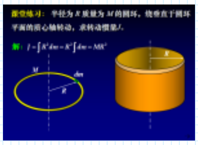
$$M=-\left(\frac{1}{2}mgl\sin\theta+mg\frac{l}{4}\sin\theta\right) \quad \alpha\text{-}f$$

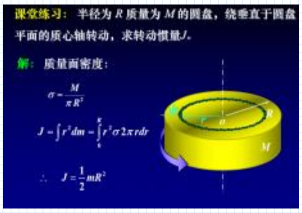
$$+\int_0^{\theta_m} M\,d\theta=0-\left[\frac{1}{2}J_{杆}\omega^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{l}{4}\right)^2\omega^2\right]$$

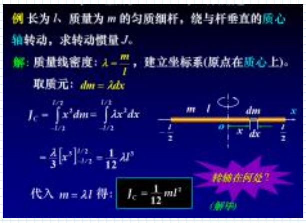
$$\cos\theta_m=1-\frac{2v_0^2}{19gl}$$

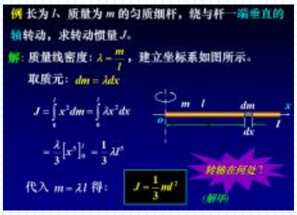
定理证明

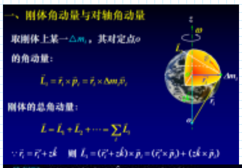
2021年10月8日 10:21

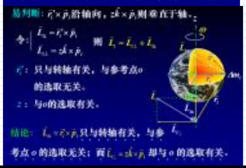


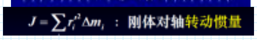












例 5. 证明：数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\geq 3$时，$nt\leq 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\geq \tan(n-1)t+\tan t\geq\cdots\geq n\tan t$$

从而，$\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\ \leq\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\geq 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\leq(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\geq 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\leq\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列$\{L_n\}$收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi。$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S= $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,证明：

$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

证 由平均值不等式($a_k>0$，$k=1,2,3,\cdots,n$)

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\leq\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\leq\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少。

又 $2=x_1\leq x_n<y_n\leq y_1=4,$

即数列$\{x_n\},\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$， 所以，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

记 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

说明： e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$$

当 $b_n>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\ b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\ k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k}=a$ ，$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty$，$0<b\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\frac{1+2a}{1+a}$；

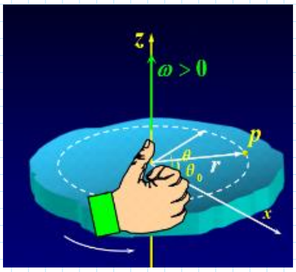
由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\frac{1+2b}{1+b}$。

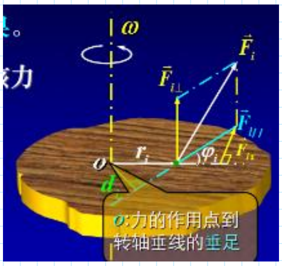
这两个方程有相同的解 $a=b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，兔群逐季增长率趋于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

图

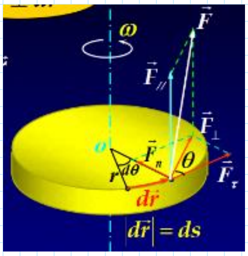
2022年3月16日 19:26





$$M_z = \sum_{i=1}^{n} F_{i//} d_i \quad 或 \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} r_i F_{i\tau}$$

$$= \sum_i r_i F_{i//} \sin\varphi_i$$



归纳总结

2021年10月7日 11:42

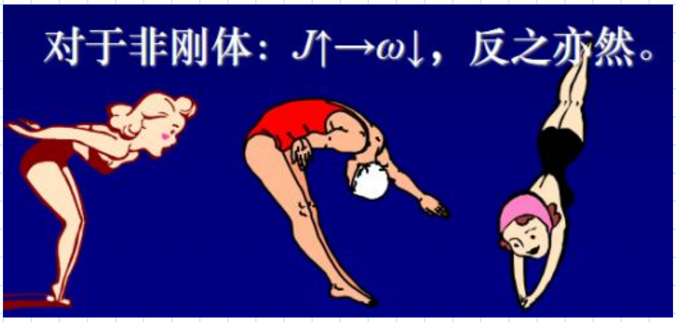
常用结论

2021年10月8日 10:15

质心用c表示 (转动轴)

形状	圆柱(c)	大圆柱-小圆柱(c)	圆环(c)	圆柱壁(厚度忽略)(c)	球(c)	球壳(c)	杆(c)	杆(端)
转动惯量(J)	$\frac{mr^2}{2}$。	$\frac{m}{2}({r_1}^2+{r_2}^2)$	mr^2。	mr^2。	$\frac{2mr^2}{5}$	$\frac{2mr^2}{3}$	$\frac{ml^2}{12}$。	$\frac{ml^2}{3}$。

质量皆均匀分部

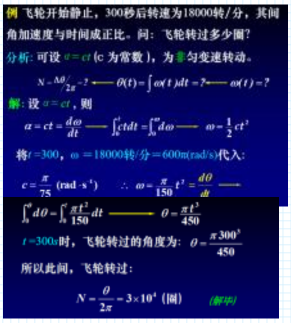


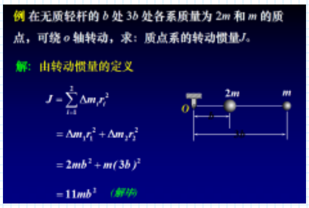
方法总结

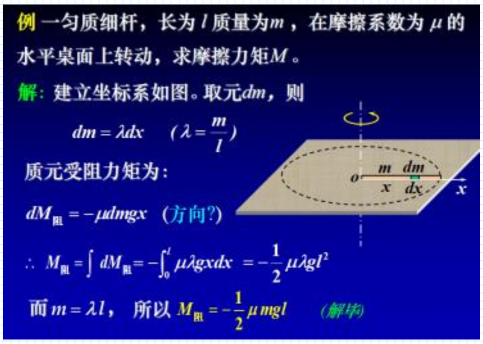
2021年10月8日 10:47

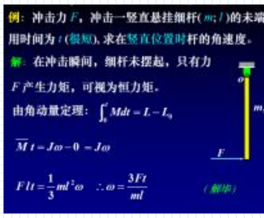
重要例题

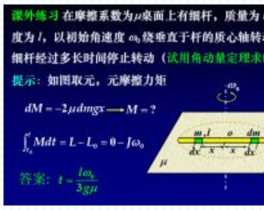
2021年10月8日 11:37

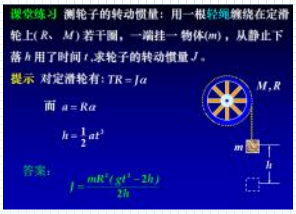


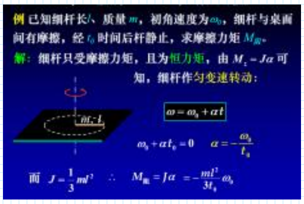


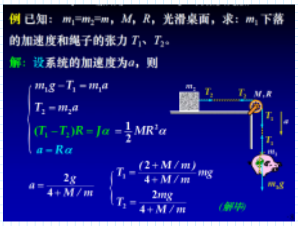


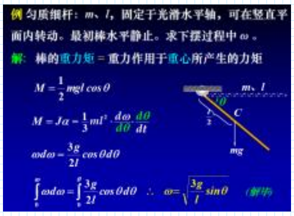


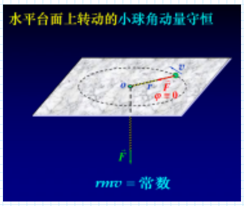


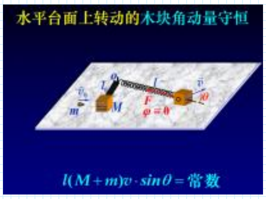


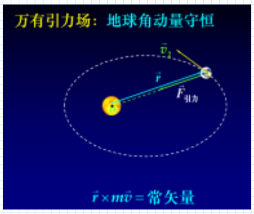


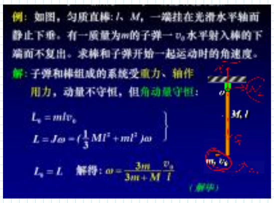




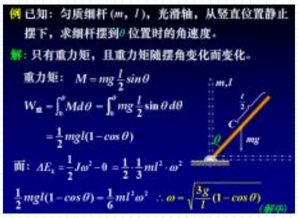




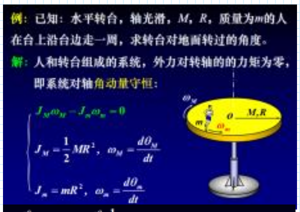




例：如图，匀质直棒：l、M，一端挂在光滑水平轴而静止下垂。有一质量为m的子弹一v_0水平射入棒的下端而不复出。求棒和子弹开始一起运动时的角速度。
解：子弹和棒组成的系统受重力、轴作用力，动量不守恒，但角动量守恒：
$L_0 = mlv_0$
$L = J\omega = (\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2)\omega$
$L_0 = L$　解得：$\omega = \frac{3m}{3m+M}\frac{v_0}{l}$
（解毕）
o
M, l
m, v_0

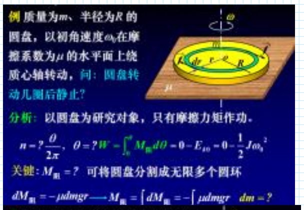


例 已知：匀质细杆（m，l），光滑轴，从竖直位置静止摆下，求细杆摆到θ位置时的角速度。
解：只有重力矩，且重力矩随摆角变化而变化。
重力矩：$M = mg\frac{l}{2}\sin\theta$
$W_{重} = \int_0^\theta Md\theta = \int_0^\theta mg\frac{l}{2}\sin\theta d\theta$
$= \frac{1}{2}mgl(1-\cos\theta)$
而：$\Delta E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 - 0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\cdot\omega^2$
$\frac{1}{2}mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$　$\therefore \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$
（解毕）
m, l
$\frac{l}{2}$
C
θ
mg

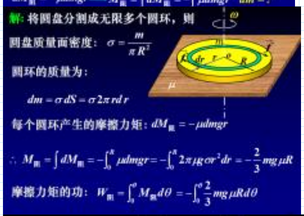


例：已知：水平转台，轴光滑，M，R，质量为m的人在台上沿台边走一周，求转台对地面转过的角度。
解：人和转台组成的系统，外力对转轴的的力矩为零，即系统对轴角动量守恒：
$J_M\omega_M - J_m\omega_m = 0$
$J_M = \frac{1}{2}MR^2$，$\omega_M = \frac{d\theta_M}{dt}$
$J_m = mR^2$，$\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt}$
ω_M
m
o
M, R
ω_m

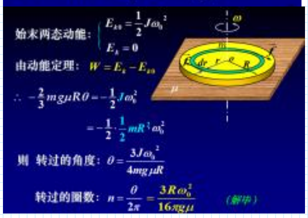
$\int_0^{\theta_m} mR^2 d\theta_m = \int_0^{\theta_M}\frac{1}{2}MR^2 d\theta_M$
$\therefore\ m\theta_m = \frac{1}{2}M\theta_M$　(1)
人在台上走一周时：
$\theta_m + \theta_M = 2\pi$　(2)
联立(1)、(2)式解得：
$\theta_M = \frac{2m}{2m+M}2\pi$
（解毕）
ω_M
m
o
M, R
ω_m



例 质量为m、半径为R的圆盘，以初角速度ω_0在摩擦系数为μ的水平面上绕质心轴转动，问：圆盘转动几圈后静止？
分析：以圆盘为研究对象，只有摩擦力矩作功。
$n = ?\ \frac{\theta}{2\pi}$，$\theta = ?\ W = \int_0^\theta M_{阻}d\theta = 0 - E_{k0} = 0 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$
关键：$M_{阻} = ?$　可将圆盘分割成无限多个圆环
$dM_{阻} = -\mu dmgr \longrightarrow M_{阻} = \int dM_{阻} = -\int\mu dmgr$　$dm = ?$
ω
m
dr
r
o
R
f
μ



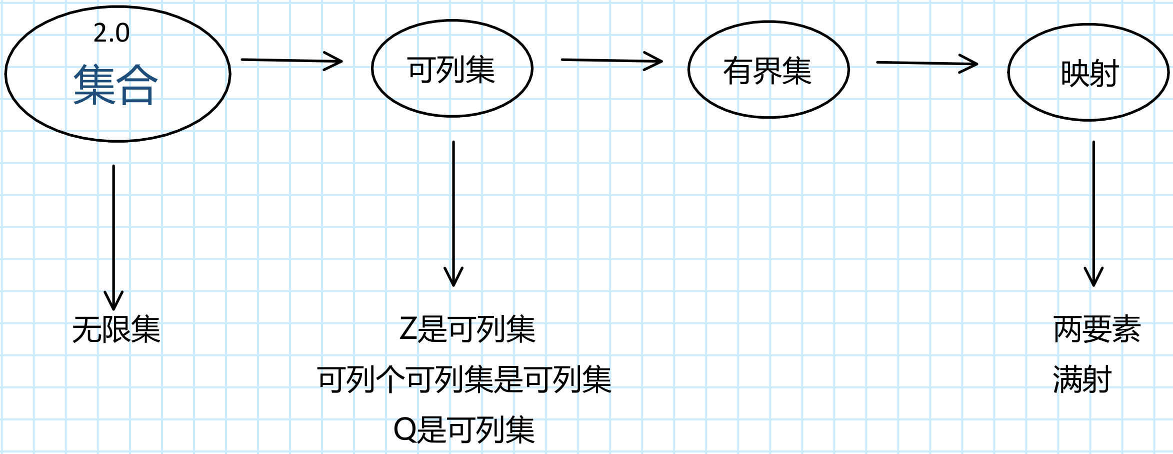
解：将圆盘分割成无限多个圆环，则
圆盘质量面密度：$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$
圆环的质量为：
$dm = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$
每个圆环产生的摩擦力矩：$dM_{阻} = -\mu dmgr$
$\therefore M_{阻} = \int dM_{阻} = -\int_0^R \mu dmgr = -\int_0^R 2\pi\mu g\sigma r^2 dr = -\frac{2}{3}mg\mu R$
摩擦力矩的功：$W_{阻} = \int_0^\theta M_{阻}d\theta = -\int_0^\theta\frac{2}{3}mg\mu Rd\theta$
ω
m
dr
r
o
R
f
μ



始末两态动能：$E_{k0} = \frac{1}{2}J\omega_0^2$，$E_k = 0$
由动能定理：$W = E_k - E_{k0}$
$\therefore -\frac{2}{3}mg\mu R\theta = -\frac{1}{2}J\omega_0^2$
$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega_0^2$
则 转过的角度：$\theta = \frac{3J\omega_0^2}{4mg\mu R}$
转过的圈数：$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{3R\omega_0^2}{16\pi g\mu}$
（解毕）
ω
m
dr
r
o
R
f
μ

笔记部分

2021年10月6日　18:05



错题

[题目]

[答案]

错题集题目部分

2021年10月6日 21:46

错题集答案部分

2021年10月7日 11:41

定理证明

2021年10月8日 10:21

例 5. 证明：数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\ge 3$时，$nt\le 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\ge\tan(n-1)t+\tan t\ge\cdots\ge n\tan t$$

从而，$\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\le\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\ge 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\le(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\ge 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\le\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列$\{L_n\}$收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi。$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S$=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，证明：

$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n$。

证 由平均值不等式($a_k>0$，$k=1,2,3,\cdots,n$)

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\le\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\le\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少。

又 $2=x_1\le x_n<y_n\le y_1=4$,

即数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\}$,$\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$， 所以，$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n$.

记 $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$$

说明： e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{1}{b_{n-1}}$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$$

当 $b_n>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\ b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\ k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k}=a$ ，$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty$，$0<b\le\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\dfrac{1+2a}{1+a}$；

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\dfrac{1+2b}{1+b}$。

这两个方程有相同的解 $a=b=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，

兔群逐季增长率趋于$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

归纳总结

2021年10月7日 11:42

常用结论

2021年10月8日 10:15

方法总结

2021年10月8日　　10:47

重要例题

2021年10月8日 11:37

笔记部分

2021年10月6日 18:05

注意!!T和t的区别！！！

$t(^\circ C) = T(K) - 273.15$

前提 → 方均速率 → 状态eq → 压强eq → 温度eq → E均分th → 分子速率 → v分布f → 三种 分子速率

前提：

理想气体

平衡态

标准状态

$0^\circ C, 1atm$

$1atm = 1.013\times10^5 Pa$

方均速率：

平衡式

$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$

状态eq：

$pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT$

$pV = \frac{N}{N_A}RT$

$p = nkT$

压强eq：

$p = \frac{1}{3}nm\overline{v^2}$

$= \frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_{kt}$

$= \frac{1}{3}\rho\overline{v^2}$

温度eq：

$\bar{\varepsilon}_{kt} = \frac{3}{2}kT$

eg

E均分th：

刚性分子自由度

系统内能 $E = N\cdot\bar{\varepsilon}$

$E = \nu\cdot\frac{i}{2}RT$

eg1

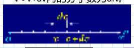
eg2

分子速率：

分布函数

设系统分子总数N;

v->v+dv内的分子数为dN_v

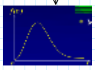


$\frac{dN_v}{N} = f(v)dv$

$f(v) = \frac{dN_v}{Ndv}$

显然 $\int_0^\infty f(v)dv = 1$

v分布f：



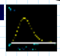
应用:

1.求v1~v2内分子个数

2.求微观学量g(v)统计平均

$\overline{g(v)} = \int_0^\infty g(v)f(v)dv$

三种分子速率：



1.**最概然速率**$v_p = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$

2.平均速率$\bar{v} = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}}$

3.方均根速率$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$

eg

下列物理量的含义:

(1) $f(v)dv$ (2) $Nf(v)dv$

(3) $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$ (4) $\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$

(5)f(v)

映射

错题集题目部分

2021年10月6日 21:46

错题集答案部分

2021年10月7日 11:41

定理证明

2021年10月8日 10:21

例 5. 证明：数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\ge 3$时，$nt\le 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\ge \tan(n-1)t+\tan t\ge\cdots\ge n\tan t$$

从而，$\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\le\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\ge 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\le(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\ge 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\le\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列$\{L_n\}$收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi。$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S= $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，证明：

$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

证 由平均值不等式($a_k>0$，$k=1,2,3,\cdots,n$)

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\le\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\le\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少。

又 $2=x_1\le x_n<y_n\le y_1=4$,

即数列$\{x_n\},\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$，所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

记 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

说明： e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$$

当 $b_n>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\ b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\ k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\ \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k}=a$ ，$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty$，$0<b\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\frac{1+2a}{1+a}$；

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\frac{1+2b}{1+b}$。

这两个方程有相同的解 $a=b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，兔群逐季增长率趋于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

归纳总结

2021年10月7日 11:42

常用结论

2021年10月8日　10:15

(1) $f(v)dv=\dfrac{dN}{N}$：$v\sim v+dv$ 内的分子数占分子总数的百分比。

或：一个分子速率出现在 $v\sim v+dv$ 内的概率。

(2) $Nf(v)dv=dN$：表示在速率v附近，dv速率区间内出现的分子个数。

(3) $\int_{v_1}^{v_2}f(v)dv=\dfrac{\Delta N}{N}$：表示速率在$v_1\sim v_2$区间内分子出现的概率或占总数的百分比。

(4) $N\int_{v_1}^{v_2}f(v)dv=\Delta N$：表示速率在$v_1\sim v_2$区间内的分子个数。

(5)

表示在速率 v 附近，单位速率区间内的分子数占总分子数的百分比。

表示在速率 v 附近，单位速率区间内的分子出现的概率，即概率密度。

方法总结

2021年10月8日 10:47

刚性分子	平动自由度 t	转动自由度 r	总自由度 i
单原子分子	3	0	3
双原子分子	3	2	5
多原子分子	3	3	6

重要例题

2021年10月8日 11:37