笔记部分

2021年10月6日 18:05

矢量不能直接求导,要用投影算

1.1 yd描述 → 重要量 → 俩方程 → 重要题型 → 1.2 圆周yd → 重要量 → 自然坐标 → 求加速度 → 一般的 → 1.3 相对运动 → 物理量

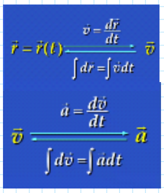
1.1 yd描述

直角坐标系

位置矢量

错题

- [题目1]
- [题目2]
- [题目3]
- [题目4]
- [答案1]
- [答案2]
- [答案3]
- [答案4]



重要量

位置矢量(位矢)

r=x(t)i+y(t)j+z(t)k

位移

△**r=r1-r2**

速度(速率)

平均速度

v=△**r/t**

加速度

俩方程

运动方程

轨迹方程

重要题型

第一类

第二类

答案

- [题目1]
- [答案1]

1.2 圆周yd

极坐标系

答案

- [题目1]
- [答案1]

重要量

[详细]

角位置(极角)θ

角位移△θ

角速度ω

角加速度α

[与直角坐标系中的量]

自然坐标

原点:质点位置

坐标轴:(e_t,e_n)

t:切向坐标轴(**v方向**)

n:法向坐标轴

求加速度

a=a$_t$**+a**$_n$

$\omega r = v = \frac{ds}{dt}$

a$_t$=$\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t$

a$_n$=vω$\mathbf{e}_n$

[eg1]

[角加速度不变]

一般的

曲线运动

[公式]

Tips

有时a_n不好求,

可用a=$\sqrt{an^2+at^2}$

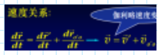
[eg1]

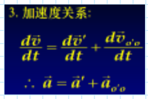
1.3 相对运动

[位矢关系]

定要画图

物理量





3.3

1.3 相对运动

错题集题目部分

2021年10月6日　21:46

11. 质点沿 x 轴运动，其加速度和位置的关系为 $a=2+6x^2$，a 的单位为 $m\cdot s^{-2}$，x 的单位为 m。质点在 $x=0$ 处，速度为 $10\,m\cdot s^{-1}$，试求质点在任何坐标处的速度值。

1. 质点的质量为 m，置于光滑球面的顶点 A 处(球面固定不动)，如图所示。当它由静止开始下滑到球面上 B 点时，它的加速度的大小为 D

A $a=2g(1-\cos\theta)$.　　B $a=g\sin\theta$.

C $a=g$　　D $a=\sqrt{4g^2(1-\cos\theta)^2+g^2\sin^2\theta}$

一质点沿 x 方向运动，其加速度随时间变化关系为：$a=3+2t(SI)$，如果初始时刻质点的速度 $v_0=5m/s$，则 t

=3时速度大小为

5. 对于沿曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：

A 切向加速度必不为零；$a_n=\frac{v^2}{\rho}\neq 0$！

B 法向加速度必不为零（拐点处除外）；

C 由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零；

D 若物体作匀速率运动，其总加速度必为零；×

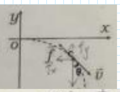
E 若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，它一定作匀变速率运动。

6. 一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为

A $\frac{dr}{dt}$　　B $\frac{d\vec{r}}{dt}$

C $\frac{d|\vec{r}|}{dt}$　　D $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

4. 质量为 m 的质点在某高度水平抛出，所受到的阻力为 $\vec{f}=-k\vec{v}$，如图所示，则



质点运动的微分方程为 [redacted]　x方向、

(A) $-m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}$　　$-m\frac{d^2y}{dt^2}=mg+k\frac{dy}{dt}$

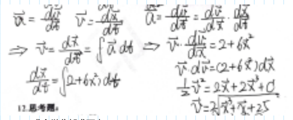
(B) $m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}$　　$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg-k\frac{dy}{dt}$

(C) $m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}$　　$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg+k\frac{dy}{dt}$

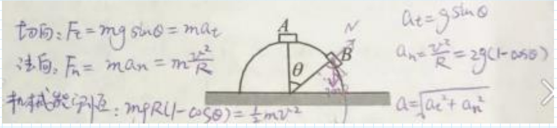
(D) $m\frac{d^2x}{dt^2}=k\frac{dx}{dt}$　　$-m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg+k\frac{dy}{dt}$

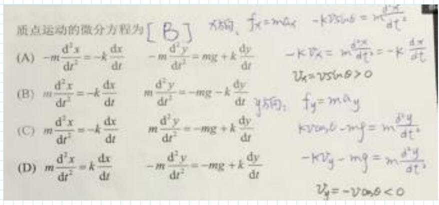
错题集答案部分

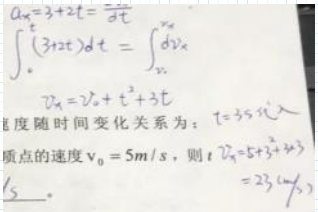
2021年10月7日　11:41



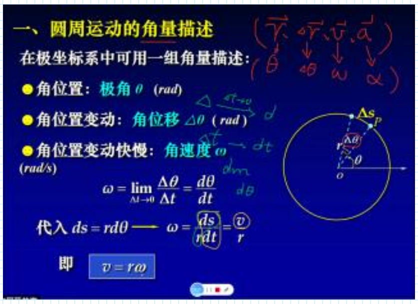
2022.4.4求个微分都求不来..

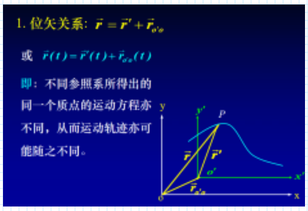






B　　D


一、圆周运动的角量描述
在极坐标系中可用一组角量描述：
●角位置：极角 θ (rad)
●角位置变动：角位移 Δθ (rad)
●角位置变动快慢：角速度 ω
(rad/s)
$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$
代入 $ds = rd\theta$ —— $\omega = \frac{ds}{rdt} = \frac{v}{r}$
即 $v = r\omega$
Δs
P
r
Δθ
θ
o


1. 位矢关系：$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{o'o}$
或 $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_{o'o}(t)$
即：不同参照系所得出的同一个质点的运动方程亦不同，从而运动轨迹亦可能随之不同。
y
y'
P
$\vec{r}$
$\vec{r}'$
o'
x'
$\vec{r}_{o'o}$
o
x

例 5. 证明：数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\ge 3$时，$nt\le 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\ge \tan(n-1)t+\tan t\ge\cdots\ge n\tan t$$

从而，$\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\le\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\ge 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\le(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\ge 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\le\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列 $\{L_n\}$ 收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi。$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S= $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，证明：

$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。

证 由平均值不等式($a_k>0$，$k=1,2,3,\cdots,n$)

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\le\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\le\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少。

又 $2=x_1\le x_n<y_n\le y_1=4$，

即数列$\{x_n\},\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$， 所以，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。

记 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$$

说明： e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{1}{b_{n-1}}$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$$

当 $b_n>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\quad b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\quad k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k}=a$ ，$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty$，$0<b\le\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\dfrac{1+2a}{1+a}$；

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\dfrac{1+2b}{1+b}$。

这两个方程有相同的解 $a=b=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

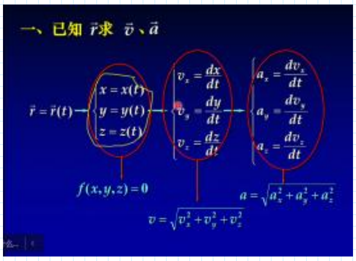
在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，兔群逐季增长率趋于$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

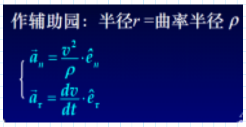
归纳总结

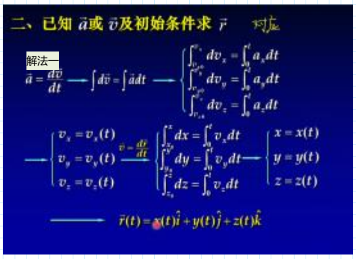
2021年10月7日 11:42

常用结论

2021年10月8日　10:15



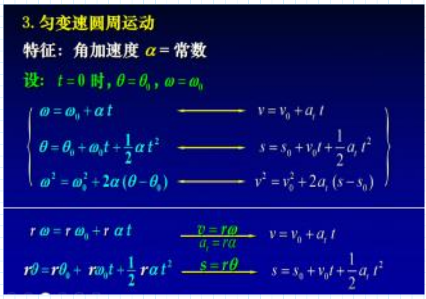




解法一

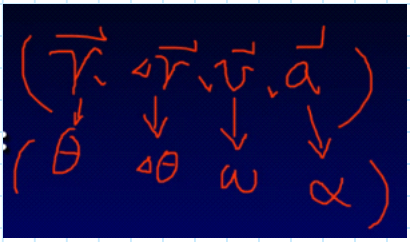
解法二

间接求导



方法总结

2021年10月8日 10:47



例 一质点作半径为R 的圆周运动，其路程：$s=\frac{1}{2}kRt^2$

k为常数， 求：切向/法向加速度和加速度的大小。

解 速率：$v=\frac{ds}{dt}=kRt$

切向加速度：$a_\tau=\frac{dv}{dt}=kR$

法向加速度：$a_n=\frac{v^2}{r}=\frac{(kRt)^2}{R}=k^2Rt^2$

加速度：$a=\sqrt{a_\tau{}^2+a_n^2}=\sqrt{(kR)^2+(k^2Rt^2)^2}$

(解毕)

·9·

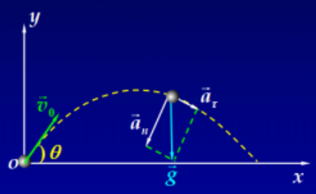
课堂练习 某质点作斜抛运动：$\theta=30°$，$v_0=19.6m/s$

求其在 $t=1.5s$ 时刻的切向/法向加速度的大小。

解 $\vec{a}=-g\cdot\hat{j}$ $\quad g=9.8m/s^2$

$$\begin{cases} x=v_0t\cos\theta \\ y=v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x=\frac{dx}{dt}=v_0\cos\theta \\ v_y=\frac{dy}{dt}=v_0\sin\theta-gt \end{cases}$$



$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta+(gt)^2}$$

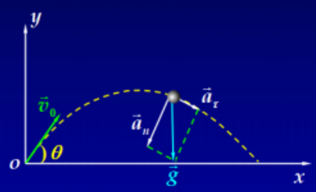
$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{gt-v_0\sin\theta}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2-2v_0gt\sin\theta}}g=\frac{2g}{\sqrt{13}}\approx5.44(m/s^2)$$

$g=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$

$a_n=\sqrt{g^2-a_\tau^2}$

$=\frac{3g}{\sqrt{13}}$

$\approx8.16(m/s^2)$



笔记部分

2021年10月6日 18:05

2.1 牛顿运动定律 → 牛一 → 牛二 → 牛三 → 2.2 应用 → 力求运动 → 运动求力 → 综合

2.1 牛顿运动定律

错题

[题目1]

[答案1]

牛一

牛顿第一定律给出惯性的概念。

- 维持物体运动的是惯性；
- 改变物体运动的是力。

[惯性系]

牛二

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

只适应惯性系

质量是物体惯性的量度

牛三

$$\vec{F} = -\vec{F}'$$

性质相同

作用两个物体

力求运动

[eg1]

[eg2]

运动求力

[eg1]

综合

错题集题目部分

2021年10月6日 21:46

8.一质量为 1 kg 的物体，置于水平地面上，物体与地面之间的静摩擦系数$\mu_0=0.20$，滑动摩擦系数$\mu=0.16$，现对物体施一水平拉力 $F=t+0.96$(SI)，则 2 秒末物体的速度大小

错题集答案部分

2021年10月7日 11:41

$v=$ 0.892 m/s（g取9.8 m/s^2）

或 0.8448 m/s（g取10 m/s^2）

定理证明

2021年10月8日 10:21

4. 牛顿第一定律只适用于惯性参照系。

- 满足牛顿第一定律的参照系为惯性参照系
- 静止或匀速直线运动的参照系为惯性系。

例 5. 证明：数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\ge 3$时，$nt\le 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\ge \tan(n-1)t+\tan t\ge\cdots\ge n\tan t$$

从而，$\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\le\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\ge 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\le(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\ge 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\le\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列$\{L_n\}$收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi。$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S= $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,证明：

$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n$.

证 由平均值不等式($a_k>0$，$k=1,2,3,\cdots,n$)

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\le\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\le\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少。

又 $2=x_1\le x_n<y_n\le y_1=4$,

即数列$\{x_n\},\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$， 所以，$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n$.

记 $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

说明： e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$$

当 $b_n>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\ b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\ k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\ \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to+\infty}b_{2k}=a$ ，$\lim\limits_{k\to+\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty$，$0<b\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\frac{1+2a}{1+a}$；

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\frac{1+2b}{1+b}$。

这两个方程有相同的解 $a=b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，兔群逐季增长率趋于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

归纳总结

2021年10月7日　11:42

常用结论

2021年10月8日　　10:15

方法总结

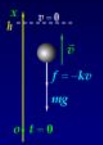
2021年10月8日　　10:47

重要例题

2021年10月8日 11:37

例 质量为m的物体以初速度v_0竖直向上抛出，若空气阻力$f=-kv$，v为物体t时刻速率。求上升最大高度及所需时间。

[解法1] 建立坐标系如图



$$-mg+f=m\frac{dv}{dt} \qquad f=-kv$$

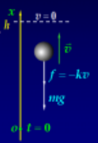
$$-\int_0^t\frac{dt}{m}=\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{mg+kv}$$

$$v=(\frac{mg}{k}+v_0)e^{-kt/m}-\frac{mg}{k} \qquad (1)$$

至最高点处：$v=0$，可解出：

$$t_0=\frac{m}{k}\ln(1+\frac{kv_0}{mg}) \qquad (2)$$

由(1)式及 $v=\frac{dx}{dt}$ 得：



$$\int_0^x dx=\int_0^t[(\frac{mg}{k}+v_0)e^{-kt/m}-\frac{mg}{k}]dt$$

$$x=-\frac{m}{k}(\frac{mg}{k}+v_0)(e^{-kt/m}-1)-\frac{mg}{k}t$$

将(2)式代入上式得上升高度为：

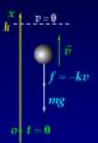
$$h=\frac{m}{k}v_0-\frac{m^2g}{k^2}\ln(1+\frac{kv_0}{mg})$$

(解毕)

[解法2] $-mg-kv=m\frac{dv}{dt}$

$$-mg-kv=m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=mv\frac{dv}{dx}$$

$$dx=-\frac{mvdv}{mg+kv}$$



$$\int_0^h dx=-\frac{m}{k}\cdot\int_{v_0}^{0}(1-\frac{mg}{mg+kv})dv$$

$$h=\frac{m}{k}v_0-\frac{m^2g}{k^2}\ln(1+\frac{kv_0}{mg})$$

(解毕)

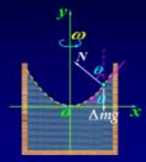
例 如图所示，求以角速度 ω 旋转水箱中水的表面形状。

解 [定]取水面上某滴水质元为研究对象，建立坐标系如图。

[画]设水滴坐标为(x,y)，质量为Δm，受力图如图。

[列] $\begin{cases} N\cos\theta-\Delta mg=0 \\ N\sin\theta=\Delta ma=\Delta mx\omega^2 \end{cases}$

[解] 由上式可解得： $tg\theta=\frac{\omega^2}{g}x$

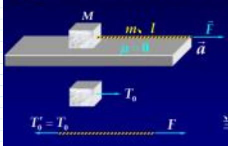


$$tg\theta \xrightarrow{tg\theta=\frac{dy}{dx}} \int_0^y dy=\int_0^x\frac{\omega^2}{g}xdx$$

$y=\frac{\omega^2}{2g}x^2$ 由对称性可知，水面为旋转抛物面。 (解毕)

例 匀质绳：m、l，水平，桌面光滑，物体质量为M，水平作用力F，设绳子长度不变，求(1)绳作用在物体上的力；(2)绳上任意点的张力。

解 (1) 分别以 M 与 m 作为对象，可列出方程：



$$\begin{cases} T_0=Ma \\ F-T_0=ma \end{cases}$$

$$\longrightarrow T_0=\frac{M}{M+m}F$$

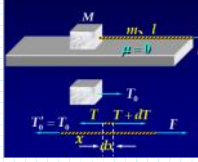
当 $M>>m$ 时， $T_0\approx F$

$$a=\frac{T_0}{M}=\frac{F}{M+m}$$

(2) 求绳上任意点的张力：

设线密度$\eta=\frac{m}{l}$，以 dx 段绳为对象，则：

$$(T+dT)-T=(dm)a=(\eta dx)a \longrightarrow \int_T^F dT=\int_x^l \eta adx$$



$$T=F-\eta a(l-x)$$

$$T(x)=(M+\frac{m}{l}x)\frac{F}{M+m}$$

对于轻绳，$M<<m$，则$T\approx F$。

即轻绳内部张力处处相等。

笔记部分

2021年10月6日 18:05

|dr|!=dr

3.1 动量定理 → 冲量 → 质点下 → 质点系 → 3.2 动量守恒 → F=0 → 外<<内 → 某方向 → 3.2 动能定理 → 功 → 特点 → 功率 → 方法 → 动能th → 3.4 势能 → 保守力 → 势能 → 势能定理 →

3.1 动量定理

状态量

a、**v**、**p**、p

过程量

I、△**v**、△**r**

冲量

$\vec I=\int_{t_1}^{t_2}\vec F dt$

质点下

平均冲力(积分中值)

eg1

质点系

$\int_{t_1}^{t_2}(\sum \vec F_{i外})dt=\vec P-\vec P_0=\Delta\vec P$

3.2 动量守恒

错题

题目1

题目2

答案1

答案2

F=0

任一方向动量守恒

外<<内

动量近似守恒

eg1

某方向

该方向动量守恒

功

元功:dW=**F**cosθ·|d**r**|

=**F**·d**r**

$W=\int dW=\int \vec F\cdot d\vec r$

一对力的功

与参考系无关

证明

故

一般将坐标系原点建立在其中一个物体上

eg1

特点

标量,"+""-"

相对量,与参考系有关

方法

坐标系

确定元功

统一积分变量

$W=\int_a^b F|d\vec r|\cos\theta$

$W=\int_a^b(F_x\hat i+F_y\hat j)\cdot(dx\hat i+dy\hat j)=\int_a^b F_xdx+F_ydy$

eg1

保守力

做功于**路径**无关

$\oint_l \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}=0$

势能

1.相对量

2.质点系。势能属于**系统**

3.保守力做功

势能定理

$W_{保}=-\Delta E_p$

3.1 动量定理

无限集

有界集

映射

三种势能 → 3.4 机械能E → 功能原理 → 机械能eq → 3.5 能量守恒 → 碰撞

三种势能
- 重力势能
- 弹性势能
- 万有引力势能

3.4 机械能E
- 错题
  - 题目1
  - 题目2
  - 题目3
  - 题目4
  - 答案1
  - 答案2
  - 答案3
  - 答案4

功能原理

$$\sum_{i=1}^{n} W_{外} + \sum_{i=1}^{n} W_{非保内} = \Delta E$$

$$E = E_k + E_p$$

机械能eq

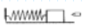
$$\sum_{i=1}^{n} W_{外} + \sum_{i=1}^{n} W_{非保内} = 0$$

机械能守恒

碰撞
- 完全弹性
- 非完全弹性
- 非弹性
- 牛顿碰撞定律

错题集题目部分

2021年10月6日 21:46

如图所示的装置中， 
木块B与水平桌面间的接触是光滑的，子弹A沿水平方向射入木块后留在木块内，将弹簧压缩到最短．现将子弹、木块和弹簧合在一起作为研究对象(系统)，则此系统在从子弹开始射入到弹簧被压缩至最短的整个过程中(　)

A.动量守恒，机械能守恒

C.动量不守恒，机械能守恒

B.动量守恒，机械能不守恒

D:动量不守恒，机械能不守恒

在两个质点组成的系统中，若质点之间只有万有引力作用，且此系统所受外力的矢量和为零，则系统（）

A.动量和机械能一定守恒

B.动量与机械能一定都不守恒

C.动量不一定守恒，机械能一定守恒

D,动量一定守恒，机械能不一定守恒

一质量为 60 kg 的人起初站在一条质量为 300 kg，且正以 2 m/s

$300\times1+60\times(v+1)$

的速率向湖岸驶近的小木船上，湖水是静止的，其阻力不计．现

(m/s)

在人相对于船以一水平速率 v 沿船的前进方向向河岸跳去，该人起跳后，船速减为原来的一半，v=[redacted]。

4. 一人站在有光滑固定转轴的转动平台上,双
起二哑铃,在该人把此二哑铃水平收缩到胸
哑铃与转动平台组成的系统的:

[redacted] 机械能守恒，角动量守恒[redacted]

机械能守恒，角动量不守恒；

机械能不守恒，角动量守恒；[redacted]

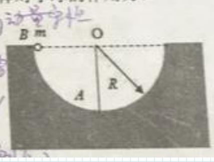
机械能不守恒，角动量不守恒。

四、一质量为 M 的具有半径为 R 的半球形凹槽的物体静止在光滑的水平面上，凹槽表面也光滑，现在 B 点放置一质量为 m 的小球，释放后小球处于最低位置 A 时物体对小球的作用力。

(m/s)

{小球，凹槽} 水平方向动量守恒

设小球处于A点时小球、凹槽的速率(相对地面)分别为v、V



8. 人从 10m 深的井中匀速提水，桶
若每升高 1m 要漏掉 0.2kg 的水，则把
的过程中，人力所作的功为[redacted]

臂伸直水平地举
前的过程中，人、
[redacted]

离开水面时装有水 10kg。
这桶水从水面提高到井口
[redacted]

错题集答案部分

2021年10月7日 11:41

D D

6

{人,船}动量守恒

4.（本题 2 分） $\vec{v}_{人-地}=\vec{v}_{人-船}+\vec{v}_{船-地}$

一质量为 60 kg 的人起初站在一条质量为 300

$(300+60)\times 2=300\times 1+60\times(v+1)$

的速率向湖岸驶近的小木船上，湖水是静止的

$v=6$ (m/s)

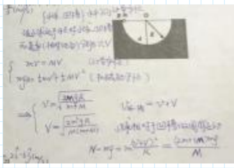
在人相对于船以一水平速率 v 沿船的前进方向

的过程中，人力所作的功为 900J 或 882J
($g=10m/s^2$) ($g=9.8m/s^2$)

桶里的水：$m=10-0.2y$

拉力等于重力：$T=mg=(10-0.2y)g$

拉力做功：$W_T=\int \vec{T}\cdot d\vec{r}=\int_0^{10}(10-0.2y)g\,dy=900$ (J)



4. 一人站在有光滑固定转轴的转动平台上,双臂伸直水平地举起二哑铃,在该人把此二哑铃水平收缩到胸前的过程中，人、哑铃与转动平台组成的系统的：（ C ）

（A）机械能守恒，角动量守恒；系统{人,哑铃,转台}

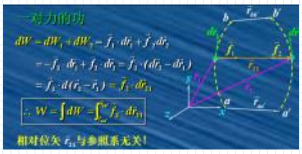
（B）机械能守恒，角动量不守恒；

（C）机械能不守恒，角动量守恒；人力(非保守内力)做功

（D）机械能不守恒，角动量不守恒。

定理证明

2021年10月8日 10:21



例 5. 证明：数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\ge 3$时，$nt\le 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\ge \tan(n-1)t+\tan t\ge\cdots\ge n\tan t$$

从而，$\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\ \le\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\ge 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\le(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\ge 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\le\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列 $\{L_n\}$ 收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi.$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S= $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，证明：

$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n$.

证 由平均值不等式($a_k>0$，$k=1,2,3,\cdots,n$)

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\ \le\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\ \le\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少。

又 $2=x_1\le x_n<y_n\le y_1=4$,

即数列$\{x_n\},\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$， 所以，$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n$.

记 $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

说明： e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$$

当 $b_n>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\quad b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\quad k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty$，$0<b\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\frac{1+2a}{1+a}$；

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\frac{1+2b}{1+b}$。

这两个方程有相同的解 $a=b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，兔群逐季增长率趋于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

归纳总结

2021年10月7日 11:42

常用结论

2021年10月8日 10:15

方法总结

2021年10月8日 10:47

牛顿的碰撞定律： 在一维对心碰撞中，碰撞后两物体的分离速度 $v_2 - v_1$ 与碰撞前两物体的接近速度 $v_{10} - v_{20}$ 成正比，比值由两物体的材料性质决定。

$$\boxed{e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}}$$

e 为恢复系数

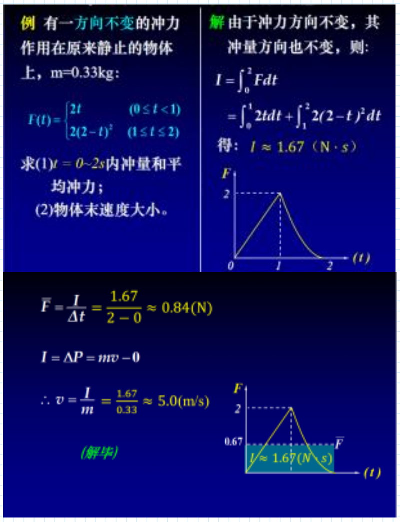
$e = 0$，则 $v_2 = v_1$，为完全非弹性碰撞。

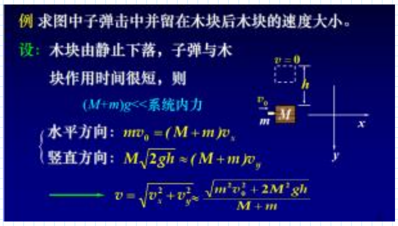
$e = 1$，则分离速度等于接近速度，为完全弹性碰撞。

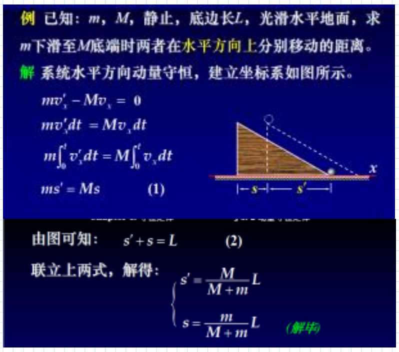
一般非弹性碰撞碰撞：$0 < e < 1$

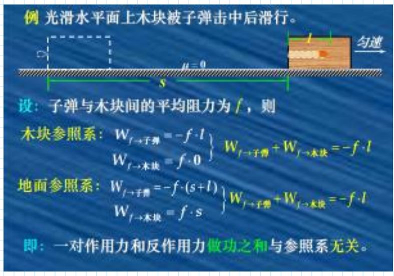
重要例题

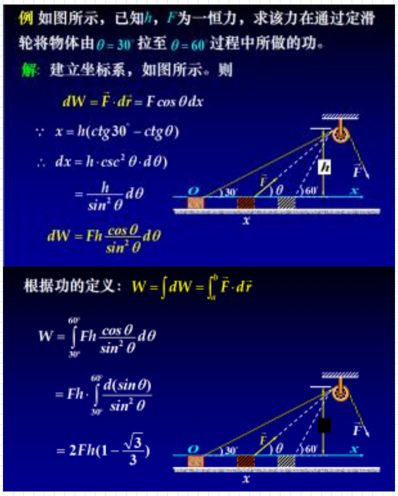
2021年10月8日 11:37











笔记部分

2021年10月6日 18:05

4.1 定轴转动

错题

- 题目1
- 题目2
- 题目3
- 答案1
- 答案2
- 答案3

描述量

$\theta, \Delta\theta, \omega, \alpha$

ω方向

右手四指沿
刚体转动方向
右旋时的大拇指
指向 图

有界集

与线量

$v = r\omega$

$a_t = r\alpha$

$a_n = r\omega^2$

α不变

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

eg

4.2(1) 转动惯量

刚体E_k

$E_k = \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2$

转动惯量

$J = \sum \Delta m_i r_i^2$

分立质点

$J = \sum m_i r_i^2$

eg

质量均匀

$J = \int r^2 dm$

一、杆模型

平行轴定理

$J = J_c + md^2$

图

二、圆类

注意！微元时通常不破坏原图形的对称性

Eg-球->圆壳

结论

常用结论

4.2(2) 转动定律

力矩

$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

图

对转轴力矩

$M_z = \sum M_{iz} = \sum r_i F_{i\perp} \sin\varphi_i$

eg

转动定律

$M_z = J\alpha$

(类比F=ma)

注意

1、M_z与α**方向**一致

2、M_z、J、α对同一轴

eg1
eg2
eg3
eg4

4.3 角动量

质点th

角动量定理(与O的选取有关)

$M = \frac{dL}{dt}$ $(F=\frac{dp}{dt})$

$\int_{t_0}^{t} M dt = L - L_0$

冲量矩

角冲量

角动量守恒(与O的选取有关)

一群案例

刚体th

刚体对轴角动量

$L=J\omega(L_z)$

刚体对o点角动量

推导

角动量定理

$M = \frac{dL}{dt}$

确定对象
受力分析
确定角量
方程求解

eg1
eg2

角动量守恒

时
L为常数
或Jω为常数(非刚体)

eg1
eg2

质量均匀

4.4
力矩做功

推导

力矩功率

转动
动能定理

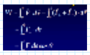
$$W=\int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta$$

错题

题目1

答案1

图

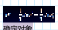


理解

外力对刚体做的功

=外力矩对刚体做得功

$$P = M\omega$$



确定对象

受力分析

确定角量

方程求解

eg1

eg2

错题集题目部分

2021年10月6日 21:46

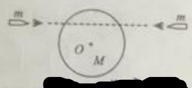
六、在留声机的转盘绕通过盘心垂直盘面的轴以角速度ω做匀速转动。放上唱片后，唱片将在摩擦力作用下随转盘一起转动．设唱片的半径为R，质量为m，它与转盘间的摩擦系数为μ，求：（1）唱片与转盘间的摩擦力矩；（2）唱片达到角速度ω时需要多长时间；(3)在这段时间内，转盘的驱动力矩做了多少功？

有两个半径相同，质量相等的细圆环A和B。A环的质量分布均匀，B环的质量分布不均匀。它们对通过环心并与环面垂直的轴的转动惯量分别为J_A和J_B，则 [redacted]

A $J_A>J_B$　　B $J_A<J_B$

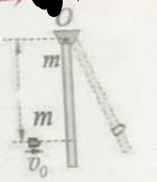
C $J_A=J_B$　　D 不能确定J_A、J_B哪个大

2. 一圆盘正绕垂直于盘面的水平光滑固定轴O转动，如图射来两个质量相同，速度大小相同，方向相反并在一条直线上的子弹，子弹射入圆盘并且留在盘内，则子弹射入后的瞬间，圆盘的角速度ω [redacted]



A 增大　　B 不变　　C 减小　　D 不能确定

8. 一长为l，质量为m的竿可绕支点O自由转动。一质量同为m的子弹以水平速度v_0射入竿内距支点为[redacted] 改为 [redacted] L/4 处，与竿一起转动，求(1) 两物体开始一起转动时竿的角速度ω和子弹速度v；(2)竿的最大偏转角θ_m。



(1)子弹射入前后，{子弹，竿}角动量守恒

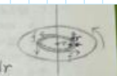
$$mv_0\cdot\frac{2}{3}l=\frac{1}{3}ml^2\omega+m(\omega\cdot\frac{2}{3}l)\cdot\frac{2}{3}l$$

错题集答案部分

2021年10月7日　11:41

解：(1) 将唱片分割成许多薄圆环（细圆环）

细圆环质量，$dm=\sigma\cdot 2\pi r dr$　　面密度：$\sigma=\frac{m}{\pi R^2}$



细圆环所受摩擦力矩：$dM=r\cdot\mu dm g=\mu r g\sigma 2\pi r dr$

唱片所受摩擦力矩：$M=\int dM=\int_0^R \mu r g\sigma 2\pi r dr=2\pi\mu g\sigma\int_0^R r^2 dr$

$=\frac{2}{3}\pi\mu g\sigma R^3=\frac{2}{3}\mu m g R$

(2) 对唱片应用转动定律：$M=J\alpha$　$\alpha=\frac{M}{J}=\frac{\frac{2}{3}\mu m g R}{\frac{1}{2}mR^2}=\frac{4\mu g}{3R}$

$\alpha=$常量　唱片作匀加速转动

$\omega=\omega_0+\alpha t=0+\alpha t\longrightarrow t=\frac{\omega}{\alpha}=\frac{3R\omega}{4\mu g}$

(3) 唱片放上转盘的最初一段时间内，两者有相对运动，有摩擦力

此摩擦力对于唱片是动力，唱片转速从0开始增大；

此摩擦力对于转盘是阻力，转盘的转速有减小的趋势，为维

持转盘转速为ω不变，驱动力克服阻力做功

一段时间后，唱片与转盘相对静止，有共同的角速度ω

在此过程，转盘始终以ω匀速转动，角加速度为0，合外力矩为0

对转盘：$M_{驱}=M_{摩}=\frac{2}{3}\mu m g R$（驱力矩，大小相等，方向相反）

26

∴ 驱动力对转盘做功：$W=M_{驱}\cdot\Delta\theta=\frac{2}{3}\mu m g R\cdot\omega t=\frac{1}{2}mR^2\omega^2$

c

c

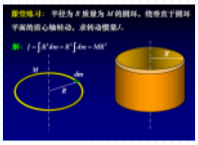
$$M=\left(\frac{1}{2}mgl\sin\theta+mg\frac{l}{4}\sin\theta\right)\quad d\theta$$

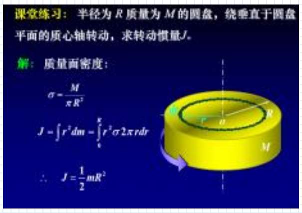
$$+\int_0^{\theta_m}M\,d\theta=0-\left[\frac{1}{2}J_{杆}\omega^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{l}{4}\right)^2\omega^2\right]$$

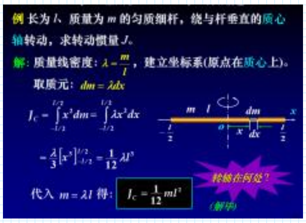
$$\cos\theta_m=1-\frac{2v_0^2}{19gl}$$

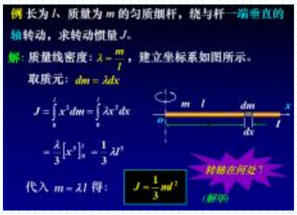
定理证明

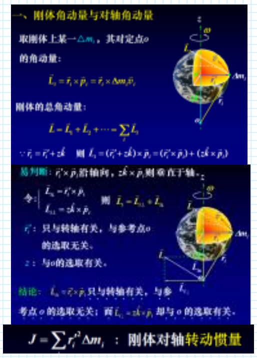
2021年10月8日 10:21











例 5. 证明：数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\geq 3$时，$nt\leq 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\geq \tan(n-1)t+\tan t\geq\cdots\geq n\tan t$$

从而，$\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\leq\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\geq 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\leq(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\geq 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\leq\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列$\{L_n\}$收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi。$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S= $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，证明：

$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

证 由平均值不等式($a_k>0$，$k=1,2,3,\cdots,n$)

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\leq\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\leq\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少。

又 $2=x_1\leq x_n<y_n\leq y_1=4$,

即数列$\{x_n\},\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

记 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

说明： e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$$

当 $b_n>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\ b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\ k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\ \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k}=a$ ，$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty,\ 0<b\le\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\frac{1+2a}{1+a}$；

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\frac{1+2b}{1+b}$。

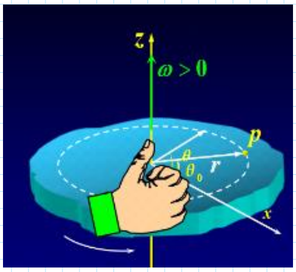
这两个方程有相同的解 $a=b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

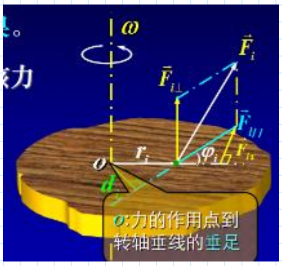
在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，

兔群逐季增长率趋于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

图

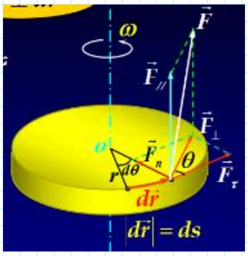
2022年3月16日 19:26





$$M_z = \sum_{i=1}^{n} F_{i//} d_i \quad 或 \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} r_i F_{i\tau}$$

$$= \sum_i r_i F_{i//} \sin\varphi_i$$



归纳总结

2021年10月7日 11:42

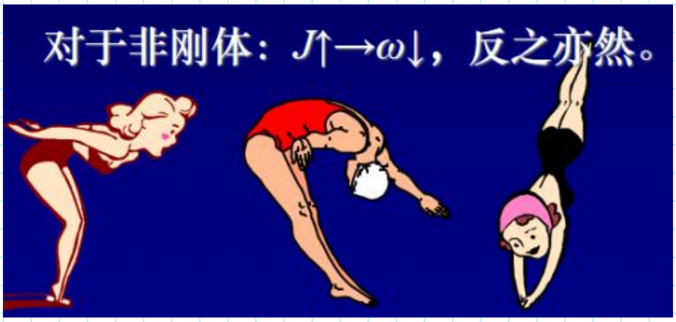
常用结论

2021年10月8日 10:15

<u>质心用c表示 (转动轴)</u>

形状	圆柱(c)	大圆柱-小圆柱(c)	圆环(c)	圆柱壁(厚度忽略)(c)	球(c)	球壳(c)	杆(c)	杆(端)
转动惯量(J)	$\frac{mr^2}{2}$。	$\frac{m}{2}(r_1{}^2+r_2{}^2)$	mr^2。	mr^2。	$\frac{2mr^2}{5}$	$\frac{2mr^2}{3}$	$\frac{ml^2}{12}$。	$\frac{ml^2}{3}$。

质量皆均匀分部

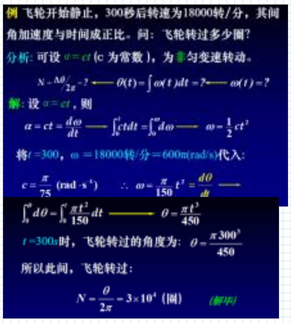


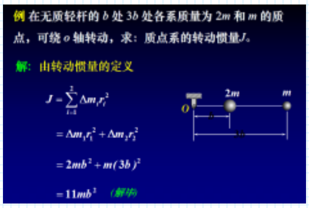
方法总结

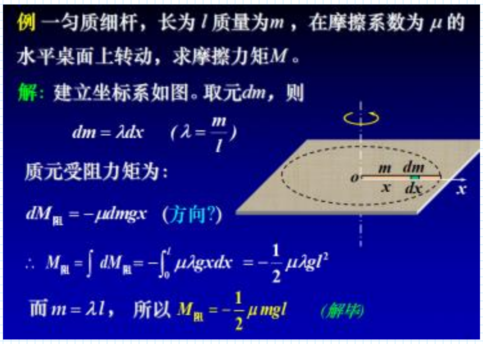
2021年10月8日 10:47

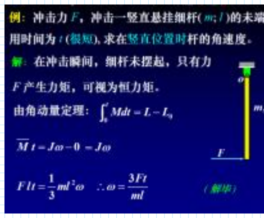
重要例题

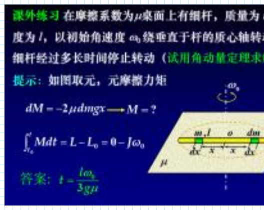
2021年10月8日 11:37

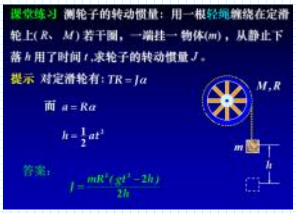


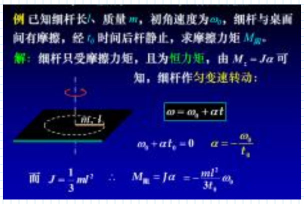


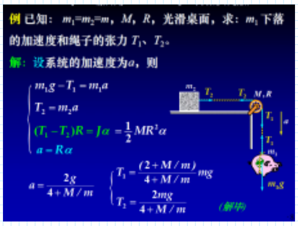


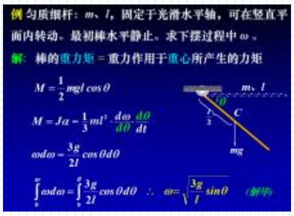


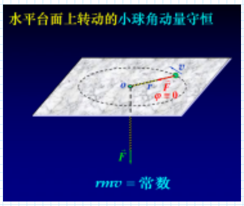


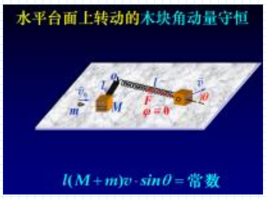


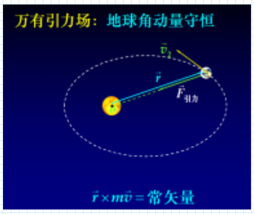


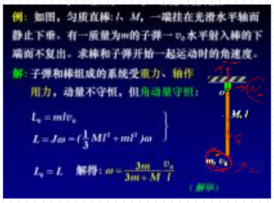


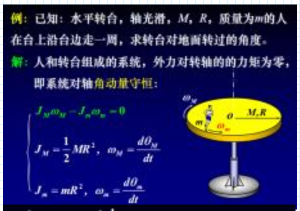


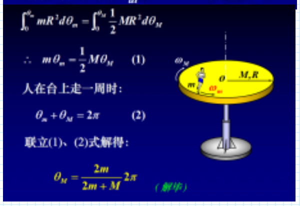


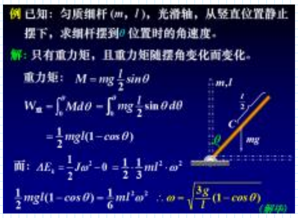


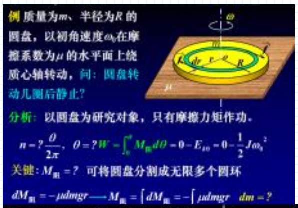


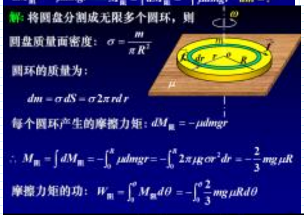

例：如图，匀质直棒：l、M，一端挂在光滑水平轴而静止下垂。有一质量为m的子弹一v_0水平射入棒的下端而不复出。求棒和子弹开始一起运动时的角速度。
解：子弹和棒组成的系统受重力、轴作用力，动量不守恒，但角动量守恒：
$L_0 = mlv_0$
$L = J\omega = (\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2)\omega$
$L_0 = L$ 解得：$\omega = \frac{3m}{3m+M}\frac{v_0}{l}$
M, l
m, v_0
（解毕）

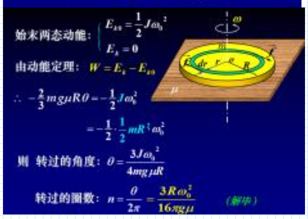

例：已知：水平转台，轴光滑，M，R，质量为m的人在台上沿台边走一周，求转台对地面转过的角度。
解：人和转台组成的系统，外力对转轴的的力矩为零，即系统对轴角动量守恒：
$J_M\omega_M - J_m\omega_m = 0$
$J_M = \frac{1}{2}MR^2$，$\omega_M = \frac{d\theta_M}{dt}$
$J_m = mR^2$，$\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt}$
ω_M
M,R


$\int_0^{\theta_m} mR^2 d\theta_m = \int_0^{\theta_M} \frac{1}{2}MR^2 d\theta_M$
$\therefore\ m\theta_m = \frac{1}{2}M\theta_M$ (1)
人在台上走一周时：
$\theta_m + \theta_M = 2\pi$ (2)
联立(1)、(2)式解得：
$\theta_M = \frac{2m}{2m+M}2\pi$
（解毕）
ω_M
M,R


例 已知：匀质细杆 (m，l)，光滑轴，从竖直位置静止摆下，求细杆摆到θ 位置时的角速度。
解：只有重力矩，且重力矩随摆角变化而变化。
重力矩：$M = mg\frac{l}{2}\sin\theta$
$W_{重} = \int_0^\theta Md\theta = \int_0^\theta mg\frac{l}{2}\sin\theta d\theta$
$= \frac{1}{2}mgl(1-\cos\theta)$
而：$\Delta E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 - 0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\cdot\omega^2$
$\frac{1}{2}mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$ $\therefore \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$
m,l
C
mg
（解毕）

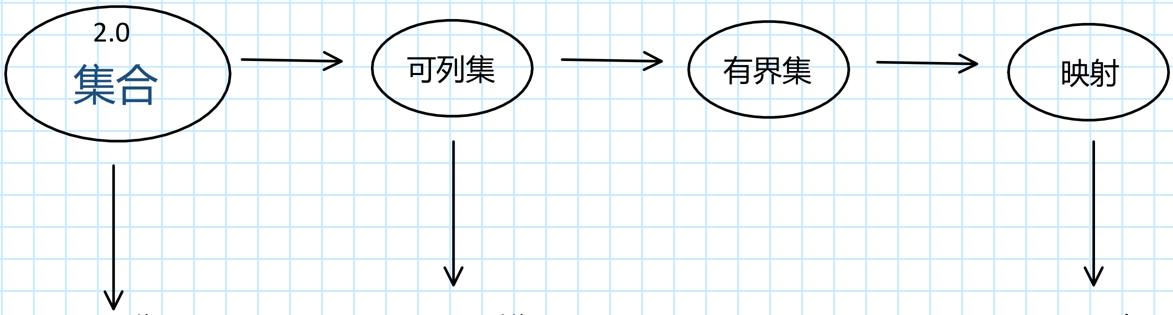

例 质量为m、半径为R 的圆盘，以初角速度ω_0在摩擦系数为μ 的水平面上绕质心轴转动，问：圆盘转动几圈后静止？
分析：以圆盘为研究对象，只有摩擦力矩作功。
$n = ?\ \frac{\theta}{2\pi}$，$\theta = ?\ W = \int_0^\theta M_{阻}d\theta = 0 - E_{k0} = 0 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$
关键：$M_{阻} = ?$ 可将圆盘分割成无限多个圆环
$dM_{阻} = -\mu dmgr \longrightarrow M_{阻} = \int dM_{阻} = -\int \mu dmgr$ $dm = ?$


解：将圆盘分割成无限多个圆环，则
圆盘质量面密度：$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$
圆环的质量为：
$dm = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$
每个圆环产生的摩擦力矩：$dM_{阻} = -\mu dmgr$
$\therefore M_{阻} = \int dM_{阻} = -\int_0^R \mu dmgr = -\int_0^R 2\pi\mu g\sigma r^2 dr = -\frac{2}{3}mg\mu R$
摩擦力矩的功：$W_{阻} = \int_0^\theta M_{阻}d\theta = -\int_0^\theta \frac{2}{3}mg\mu R d\theta$


始末两态动能：$E_{k0} = \frac{1}{2}J\omega_0^2$，$E_k = 0$
由动能定理：$W = E_k - E_{k0}$
$\therefore -\frac{2}{3}mg\mu R\theta = -\frac{1}{2}J\omega_0^2$
$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega_0^2$
则 转过的角度：$\theta = \frac{3J\omega_0^2}{4mg\mu R}$
转过的圈数：$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{3R\omega_0^2}{16\pi g\mu}$
（解毕）

笔记部分

2021年10月6日 18:05



无限集

Z是可列集

可列个可列集是可列集

Q是可列集

错题

[题目]

[答案]

错题集题目部分

2021年10月6日 21:46

错题集答案部分

2021年10月7日 11:41

定理证明

2021年10月8日 10:21

例 5. 证明：数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\ge 3$时，$nt\le 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\ge \tan(n-1)t+\tan t\ge\cdots\ge n\tan t$$

从而，$\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\le\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\ge 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\le(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\ge 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\le\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列$\{L_n\}$收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi。$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S$=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，证明：

$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

证 由平均值不等式($a_k>0$，$k=1,2,3,\cdots,n$)

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\le\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\le\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少。

又 $2=x_1\le x_n<y_n\le y_1=4$,

即数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\}$,$\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$，所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

记 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

说明： e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{1}{b_{n-1}}$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$$

当 $b_n>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\quad b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\quad k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\ \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty$，$0<b\le\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\dfrac{1+2a}{1+a}$；

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\dfrac{1+2b}{1+b}$。

这两个方程有相同的解 $a=b=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，兔群逐季增长率趋于$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

归纳总结

2021年10月7日 11:42

常用结论

2021年10月8日　　10:15

方法总结

2021年10月8日 10:47

重要例题

2021年10月8日 11:37

笔记部分

2021年10月6日 18:05

注意!!T和t的区别！！！

$$t(^\circ C)=T(K)-273.15$$

前提 → 方均速率 → 状态eq → 压强eq → 温度eq → E均分th → 分子速率 → v分布f → 分子速率

前提

理想气体

平衡态

标准状态

$0℃, 1atm$

$1atm=1.013\times10^5 Pa$

方均速率

平衡式

$$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$$

状态eq

$$pV=\frac{m'}{M}RT=\nu RT$$

$$pV=\frac{N}{N_A}RT$$

$$p=nkT$$

压强eq

$$p=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}$$

$$=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_{kt}$$

$$=\frac{1}{3}\rho\overline{v^2}$$

温度eq

$$\bar{\varepsilon}_{kt}=\frac{3}{2}kT$$

eg

E均分th

刚性分子自由度

系统内能 $E=N\cdot\bar{\varepsilon}$

$$E=\nu\cdot\frac{i}{2}RT$$

eg1

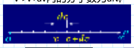
eg2

分子速率

分布函数

设系统分子总数N;

v->v+dv内的分子数为dN_v

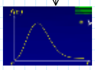


$$\frac{dN_v}{N}=f(v)\,dv$$

$$f(v)=\frac{dN_v}{Ndv}$$

显然 $\int_0^\infty f(v)dv=1$

v分布f



应用:

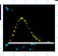
1.求v1~v2内分子个数

2.求微观学量g(v)统计平均

$$\overline{g(v)}=\int_0^\infty g(v)f(v)dv$$

三种

分子速率



1.**最概然速率**$v_p=\sqrt{\frac{2KT}{m}}$

2.平均速率$\bar{v}=\sqrt{\frac{8KT}{\pi m}}$

3.方均根速率$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3KT}{m}}$

eg

下列物理量的含义:

(1) $f(v)dv$ (2) $Nf(v)dv$

(3) $\int_{v_1}^{v_2}f(v)dv$ (4) $\int_{v_1}^{v_2}Nf(v)dv$

(5)f(v)

映射

错题集题目部分

2021年10月6日 21:46

错题集答案部分

2021年10月7日 11:41

定理证明

2021年10月8日 10:21

例 5. 证明：数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\geq 3$时，$nt\leq 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\geq \tan(n-1)t+\tan t\geq\cdots\geq n\tan t$$

从而， $\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\leq\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\geq 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\leq(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\geq 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\leq\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列 $\{L_n\}$ 收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi。$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S= $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，证明：

$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

证 由平均值不等式($a_k>0$，$k=1,2,3,\cdots,n$)

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\leq\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\leq\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少。

又 $2=x_1\leq x_n<y_n\leq y_1=4$,

即数列$\{x_n\},\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$， 所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

记 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

说明： e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{1}{b_{n-1}}$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$$

当 $b_n>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\ b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\ k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to+\infty}b_{2k}=a$ ，$\lim\limits_{k\to+\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty$，$0<b\le\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\dfrac{1+2a}{1+a}$；

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\dfrac{1+2b}{1+b}$。

这两个方程有相同的解 $a=b=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，兔群逐季增长率趋于$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

归纳总结

2021年10月7日 11:42

常用结论

2021年10月8日 10:15

(1) $f(v)dv = \frac{dN}{N}$: v~$v+dv$ 内的分子数占分子总数的百分比。

或：一个分子速率出现在 v~$v+dv$ 内的概率。

(2) $Nf(v)dv = dN$: 表示在速率v附近，dv速率区间内出现的分子个数。

(3) $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \frac{\Delta N}{N}$: 表示速率在$v_1 \sim v_2$区间内分子出现的概率或占总数的百分比。

(4) $N\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \Delta N$: 表示速率在$v_1 \sim v_2$区间内的分子个数。

(5)

表示在速率 v 附近，单位速率区间内的分子数占总分子数的百分比。

表示在速率 v 附近，单位速率区间内的分子出现的概率，即概率密度。

方法总结

2021年10月8日　10:47

刚性分子	平动自由度 t	转动自由度 r	总自由度 i
单原子分子	3	0	3
双原子分子	3	2	5
多原子分子	3	3	6

重要例题

2021年10月8日 11:37