笔记部分

2021年10月6日 18:05

2021.12.19复习

1.1 向量及运算 → **位置关系** → **1.2 分解相关性** → **线性分解** → **线性相关性** → **1.3 坐标系** → **三定义** → **点坐标** → **直角坐标系** →* **坐标表示** → **射影*向量*** → **方向角(余弦)** → **1.4 向量的乘法** → **数量积** → **向量积** → **混合积** → **1.5 轨迹与方程** →

1.1 向量及运算

点<->有序数集
曲面<->F(x,y,z)
曲线<->M(x,y,z)
G(x,y,z)
的解

位置关系

共线=>**平移后**于同一直线
共面=>**平移后**于同一平面
垂直=>**平移后**垂直
α与β的夹角∠(α,β)

定义

α与β垂直(或正交)
<=>**α=0或β=0**,∠(α,β)=$\frac{\pi}{2}$

线性分解

若β=**k1α1 + k2α2 +⋯+ ksαS**
则β可线性分解

线性相关性

线性相关定义
三定理
5推论
1.α=0<=>α线性相关
2.α、β共线<=>α、β线性相关
3.α、β、γ共面<=>α、β、γ线性相关
4.R^3中任意4个向量总是线性相关的
5.R^3>=4个向量总是线性相关性的

1.3 坐标系

向量α $\xleftrightarrow[\;]{e1,e2,e3\quad 一一对应}$ 有序数组(x,y,z)

三定义

1.空间中任意三个有序的、不共面的向量e_1、e_2、e_3称为一组基(坐标向量)
2.定点O和一组基e_1、e_2、e_3组合体,称为仿射坐标
记作{O;e_1,e_2,e_3}
3.有序数对(x,y,z)称为α的坐标
α=(x,y,z)

点坐标

M $\xleftrightarrow{e1,e2,e3\quad 一一对应}$ 向量OM = (x,y,z)
(向径)

直角坐标系

单位向量、坐标轴
坐标平面xOy
八个卦限
Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ Ⅴ Ⅵ Ⅶ Ⅷ

坐标表示

设a(x_1,y_1,z_1);b(x_2,y_2,z_2)
c(x_3,y_3,z_3)
非零向量 略
共线 对应分量成比例
共面 $\begin{vmatrix} x1 & x2 & x3 \\ y1 & y2 & y3 \\ z1 & z2 & z3 \end{vmatrix} = 0$

四点共面 $\begin{vmatrix} x1 & y1 & z1 & 1 \\ x2 & y2 & z2 & 1 \\ x3 & y3 & z3 & 1 \\ x4 & y4 & z4 & 1 \end{vmatrix}=0$

解释:变形后按行展开,
就能产生奇迹
定比分点公式

射影*向量*

定义 在直角坐标系下{O;i,j,k}
(1)通过A作垂直于轴L的平面
此平面与轴L交与A'
则A'为A在L轴上的投影点
对B做相同操作
(2)**AB**向量对应**A'B'** 图
符号
$_L$**AB**=**A'B'**=x**e**(箭头省略)
A'B'为**AB**在L上的**射影向量**
x称为向量**AB**在L轴上的**射影**
射影向量的模=射影绝对值
x记作Prj_LAB
射影定理
Prj_La=|**a**|cosα 图
|Prj_La|=|**a**||cosα|
性质(线性性)

方向角(余弦)

定义
定理
{ *向量的模*
向量
单位向量

数量积

内积、点积
运算法则
运算性质
重要结论
坐标形式
几何意义

向量积

外积、叉积
运算法则 图
运算性质
重要结论
坐标形式
几何意义

混合积

好像没有别称
运算法则
运算性质
重要结论
坐标形式
几何意义 图
与线性关系

1.5 轨迹与方程

图形<=>向量<=>方程
{ *向量法*
坐标法

→ **1.3 坐标系**

曲面的方程 → 空间曲线方 → 球坐标 → 柱坐标

曲面的方程

一般方程

参数方程

球面的参数方程

空间曲线方

一般方程(不唯一)

$$\begin{cases} F1(x,y,z)=0 \\ F2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

参数方程

球坐标

M(ρ, φ, θ) 图

详细

球直关系

eg

特殊

ρ = 常数
=>球面
φ = 常数
=>半平面
θ = 常数
=>圆锥面

柱坐标

M(ρ,φ,u) 图

详细

柱直关系

特殊

ρ = 常数
=>圆柱面
φ = 常数
=>半平面
u = 常数
=>平面

柯西收敛

错题集题目部分

2021年10月6日 21:46

错题集答案部分

2021年10月7日 11:41

P45 10. 证明：若 $a_n > 0\ (n = 1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

证 由 $l>1$，可取 r：$1<r<l$． 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = l$，

对 $\varepsilon = \boxed{l-r} > 0, \exists N \in \mathbf{N}^+, \forall n > N, \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - l\right| < \varepsilon$

从而，$\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > l - \varepsilon = r > 1$， $a_n > r a_{n+1}$ $a_{n+1} < \frac{1}{r} a_n$

即 $0 < a_{n+1} < \dfrac{1}{r} a_n < \left(\dfrac{1}{r}\right)^2 a_{n-1} < \cdots < a_{N+1}\left(\dfrac{1}{r}\right)^{n-N}$

定理证明

2021年10月8日 10:21

略证

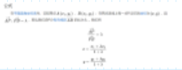
$a \times b = (x1i + y1j + z1k) \times (x2i + y2j + z2k)$

定义定理

2021年12月8日 20:27

Th1.若α!=0，则β与α共线<=>存在唯一实数x,使得β=xα
Th2.若α与β不共线，则γ与α、β共面<=>存在唯一实数对,使得γ=xα+yβ
Th3.若α,β,γ不共面，则空间中任一向量μ都可以唯一表示(分解)为μ=xα+yβ+zγ

定比分点公式



性质1 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a} + \mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{b}$

性质2 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$

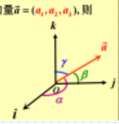
推论 四个点$P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$, $P_4(x_4,y_4,z_4)$ 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

5. 在数量积的坐标形式下 $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

(5) 向量方向余弦的坐标公式 设非零向量$\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$, 则

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$
$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$
$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$



推论1 $\cos^2$ …

推论2 在直 …
$a_1 =$ …

注: 任一个 …

六、方向角与方向余弦 直角坐标系$[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$下

定义 在直角坐标系$[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$中,向量$\vec{a}$与三个坐标向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$(或三个坐标轴)的夹角$\alpha,\beta,\gamma$称为向量$\vec{a}$的方向角
方向角的余弦$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$称为向量$\vec{a}$的方向余弦

$\alpha = \angle(\vec{a},\vec{i})$
$\beta = \angle(\vec{a},\vec{j})$
$\gamma = \angle(\vec{a},\vec{k})$

后续将证明 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

定理 在直角坐标系$[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$下,
设向量$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{a}$的方向角为α,β,γ,
则$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $a_y = |\vec{a}|\cos\beta$, $a_z = |\vec{a}|\cos\gamma$.

推论 在直角坐标系下,向量的坐标是其在x轴y轴z轴上的射影.

证 设$\overrightarrow{OM} = \vec{a}$
点M在x轴,y轴,z轴上的射影分别为点A,B,C
$\overrightarrow{OA}$ = 射影向量$_i\vec{a} = (\mathrm{Prj}_{\vec{i}}\,\vec{a})\vec{i} = (|\vec{a}|\cos\alpha)\vec{i}$
$\overrightarrow{OB}$ = 射影向量$_j\vec{a} = (\mathrm{Prj}_{\vec{j}}\,\vec{a})\vec{j} = (|\vec{a}|\cos\beta)\vec{j}$
$\overrightarrow{OC}$ = 射影向量$_k\vec{a} = (\mathrm{Prj}_{\vec{k}}\,\vec{a})\vec{k} = (|\vec{a}|\cos\gamma)\vec{k}$
$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$
$= (|\vec{a}|\cos\alpha)\vec{i} + (|\vec{a}|\cos\beta)\vec{j} + (|\vec{a}|\cos\gamma)\vec{k}$

$$\therefore |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

推论3 非零向量$\vec{a}$的同方向单位向量的坐标等于其方向余弦.

$$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}(a_1,a_2,a_3) = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$$

注: 向量的各方向余弦即为其单位向量的各坐标分量

当a、b、c向量组成右手系时,
(以a,b,c为棱的)平行六面体的体积V=(a, b, c)

$(a\times b)\cdot c = a\cdot(b\times c)$

设$M(x,y,z)\in R^3$

令$|\overrightarrow{OM}| = \rho$ $\quad\angle(i,\overrightarrow{OP}) = \varphi$ $\quad\angle(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OM}) = \theta$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\ge 0 \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi & -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ z = \rho\sin\theta & -\pi<\varphi\le\pi \end{cases}$$

$$M(x,y,z) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} M(\rho,\varphi,\theta)$$

则称(ρ,φ,θ)为点M的球坐标或空间极坐标

2. 球坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\ge 0 \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi & -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ z = \rho\sin\theta & -\pi<\varphi\le\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi & \rho\ge 0 \\ y = \rho\sin\varphi & -\pi<\varphi\le\pi \\ z = u & -\infty<u<+\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ u = z \end{cases}$$

设$M(x,y,z)\in R^3$

令$|\overrightarrow{OP}| = \rho$ $\quad\angle(i,\overrightarrow{OP}) = \varphi$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi & \rho\ge 0 \\ y = \rho\sin\varphi & -\pi<\varphi\le\pi \\ z = u & -\infty<u<+\infty \end{cases}$$

$$M(x,y,z) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} M(\rho,\varphi,u)$$

则称(ρ,φ,u)为点M的柱坐标或半极坐标

$\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

直角坐标系$\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$中，设**非零**向量$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，则

$|\vec{a}|\cos\alpha \quad a_2=|\vec{a}|\cos\beta \quad a_3=|\vec{a}|\cos\gamma$

个向量都可由它的**模**与**方向余弦**(或方向角)决定

模长：（在这里θ表示两向量之间的夹角（共起点的前提下）（0°≤θ≤180°），它位于这两个矢量所定义的平面上。）

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\bullet|\vec{b}|\bullet\sin\theta$$

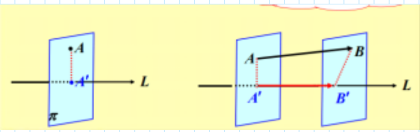
方向：a向量与b向量的向量积的方向与这两个向量所在平面垂直，且遵守右手定则。（一个简单的确定满足"右手定则"的结果向量的方向的方法是这样的：若坐标系是满足右手定则的，当右手的四指从a以不超过180度的转角转向b时，竖起的大拇指指向是c的方向。）

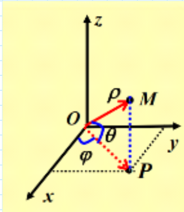
归纳总结

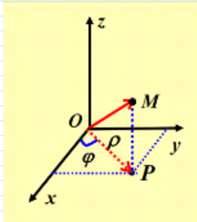
2021年10月7日 11:42

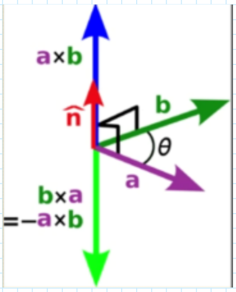
图

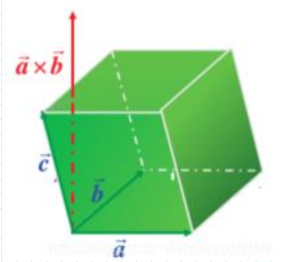
2021年12月10日 20:17

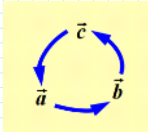












常用结论

2021年10月8日 10:15

方法总结

2021年10月8日 10:47

重要例题

2021年10月8日　11:37

例1 已知$\vec{a}=(1,-3,2)$, $\vec{b}=(2,0,-8)$, 求$\vec{a}\times\vec{b}$.

解

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} k$$

$$=24i+12j+6k$$

例 设点A的直角坐标为$(-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},\frac{1}{2})$, 求它的球坐标.

解

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho=1 \\ \cos\varphi=-\dfrac{1}{2}, \quad \sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta=\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \rho=1 \\ \varphi=-\dfrac{2\pi}{3} \\ \theta=\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

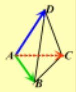
点A的球坐标为: $(1,-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6})$

例 设四面体 $ABCD$ 顶点的坐标为 $A(0,0,0)$, $B(6,0,6)$, $C(4,3,0)$, $D(2,-1,3)$,

求: (1) 此四面体的体积;

解 $\overrightarrow{AB}=(6,0,6)$　$\overrightarrow{AC}=(4,3,0)$　$\overrightarrow{AD}=(2,-1,3)$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-6$$



$\therefore$ 以$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体的体积为$V_1=6$

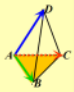
所求四面体的体积 $V=\frac{1}{6}V_1=1$

求: (1) 此四面体的体积;　(2) 此四面体在底ABC上的高.

解 $\overrightarrow{AB}=(6,0,6)$　$\overrightarrow{AC}=(4,3,0)$　$\overrightarrow{AD}=(2,-1,3)$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=-6$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}=-18i+24j+18k$$



此四面体在底ABC上的高为

$$h=\frac{|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}=\frac{6}{18\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{18}$$

例 已知向量α,β,γ满足$\alpha\times\beta+\beta\times\gamma+\gamma\times\alpha=0$, 证明: α,β,γ共面.

证 $(\alpha\times\beta)\cdot\gamma=[-(\beta\times\gamma+\gamma\times\alpha)]\cdot\gamma$

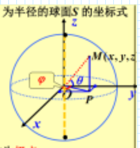
$$=-(\beta\times\gamma)\cdot\gamma-(\gamma\times\alpha)\cdot\gamma$$

$$=0$$

$\therefore \alpha,\beta,\gamma$共面

例 在直角坐标系下, 以原点为球心, R 为半径的球面S 的坐标式参数方程为:

$$\begin{cases} x=R\cos\theta\cos\varphi \\ y=R\cos\theta\sin\varphi \\ z=R\sin\theta \end{cases} \qquad -\pi<\varphi\le\pi, \quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$



球面上$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$对应的两点$(0,0,\pm R)$ 称为极点

除极点外,球面上其余所有的点与有序实数对(φ,θ)之间一一对应

这就是地球上确定地理位置的地理坐标:

φ为经度, θ为纬度.

东经和西经
北纬和南纬
北极和南极

笔记部分

2021年10月6日 18:05

空间直线上一点(射影，交点，对称点)

2.1 平面 → 平面方程 → 平面位置 → 平面度量 → 2.2 空间直线 → 直线方程 → 直线位置 → 直线度量 → 2.3 面与空线 → 线面位置 → 线面度量 → 异面直线 → 2.4 平面束 → 平行 → 有轴

平面方程

魂:**共面**

任意仿射坐标系

直角坐标系下

特殊

特殊平面方程

eg1

平面位置

给定两个平面

$\Pi 1: A_1x+B_1y+C_1z+D1=0$

$\Pi 2: A_2x+B_2y+C_2z+D2=0$

平行	$\frac{A1}{A2}=\frac{B1}{B2}=\frac{C1}{C2}!=\frac{D1}{D2}$
重合	$\frac{A1}{A2}=\frac{B1}{B2}=\frac{C1}{C2}=\frac{D1}{D2}$
相交	$!(\frac{A1}{A2}=\frac{B1}{B2}=\frac{C1}{C2})$
垂直	$\mathbf{n_1}\perp\mathbf{n_2}$

平面度量

平面夹角

点到平面的距离

平行平面间距离

详细公式

直线方程

魂:**共线**

1.对称式(标准式)

点方式

2.参数式

线关化参数

3.两点式

两点定直线

4.一般式

两面定直线

四种从一般式方程出发的转化方法

eggqg

直线位置

给定两个直线

$P_1(x1,y1,z1)$

$P_2(x2,y2,z2)$

$v1(X1,Y1,Z1)$

$v1(X2,Y2,Z2)$

$L1:\frac{x-x1}{X1}=\frac{y-y1}{Y1}=\frac{z-z1}{Z1}$

$L2:\frac{x-x2}{X2}=\frac{y-y2}{Y2}=\frac{z-z2}{Z2}$

共面	$(v1,v2,P_1P_2)=0$
平行	$v1//v2$且$!//P_1P_2$
重合	$v1//v2//P_1P_2$
相交	$v1!//v2$
异面	$(v1,v2,P_1P_2)!=0$

直线度量

角度$\in[0,\pi]$

距离Q为点

P为直线上一点

v是直线方向向量

1.点线距

$d=\frac{|PQ\times v|}{|v|}$

2.线线距

$d=\frac{|P1P2\times v|}{|v|}$

线面位置

魂:**交点个数**

1.面:一般式

线:标准式

则将线化为参数式

代入面的一般式

t解的个数

2.面:一般式

线:一般式

直接解方程组

通过矩阵的秩判断

解的个数

线面度量

角度$\in[0,\pi]$

距离:利用点到面的距离公式

异面直线

前提:

两直线异面

角度:

同直线度量

距离:

公垂线:

与两条直线都垂直的向量

方程求法

eg1

平行

$Ax+By+Cz+\lambda=0$

eg1

平行平面型

有轴

直线方程

一般式

$\lambda(A1x+B1y+C1z+D1)+\mu(A2x+B2y+C2z+D2)=0$

eg1

经过直线型

错题集题目部分

2021年10月6日 21:46

错题集答案部分

2021年10月7日 11:41

P45 10. 证明：若$a_n > 0(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

证 由$l>1$，可取r：$1<r<l$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = l$，

对$\varepsilon = \boxed{l-r} > 0, \exists N \in \mathbf{N}^+, \forall n > N$, $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - l\right| < \varepsilon$

从而，$\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > l - \varepsilon = r > 1$， $a_n > r a_{n+1}$ $a_{n+1} < \dfrac{1}{r} a_n$

即 $0 < a_{n+1} < \dfrac{1}{r}a_n < \left(\dfrac{1}{r}\right)^2 a_{n-1} < \cdots < a_{N+1}\left(\dfrac{1}{r}\right)^{n-N}$

定理证明

2021年10月8日 10:21

定理

(1) 任一平面的方程都可表成一个关于变量x,y,z的三元一次方程;

证(1) 因任一平面都可由定点$M_0(x_0,y_0,z_0)$

及方位向量$\vec{v}_1=\{X_1,Y_1,Z_1\}$, $\vec{v}_2=\{X_2,Y_2,Z_2\}$确定

故都可用**点位式**方程表示 $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0$

$\longleftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}}_{A}(x-x_0)+\underbrace{\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}}_{B}(y-y_0)+\underbrace{\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}}_{C}(z-z_0)=0$ (显然A,B,C不全为零)

$\longleftrightarrow Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$

$\longleftrightarrow Ax+By+Cz+D=0$ 其中$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$

这表明空间任一**平面**都可以用关于x,y,z的**三元一次方程**来表示.

NJUPT

定理

(1) 任一平面的方程都可表成一个关于变量x,y,z的三元一次方程;

(2) 反过来,任一关于变量x,y,z的三元一次方程都一个表示一平面.

证(2) 设$Ax+By+Cz+D=0$,其中A,B,C不全为零,

不妨假设$A\neq0$, 令$y=u$, $z=v$ 得$x=-\frac{D}{A}-\frac{B}{A}u-\frac{C}{A}v$

$$Ax+By+Cz+D=0 \longleftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{D}{A}-\frac{B}{A}u-\frac{C}{A}v \\ y=u \\ z=v \end{cases}$$

平面的参数式方程

表示过定点$M_0(-\frac{D}{A},0,0)$

方位向量为$\vec{v}_1=(-\frac{B}{A},1,0)$, $\vec{v}_2=(-\frac{C}{A},0,1)$所决定的平面.

定理1 两条异面直线之间的距离等于它们公垂线的长.

证 设异面直线L_1与L_2的公垂线段为PQ

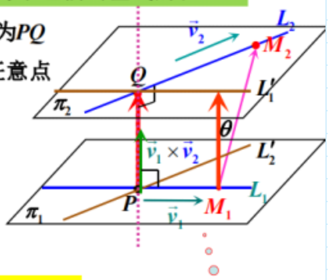
设M_1,M_2分别为直线L_1与L_2上的任意点

过点P作平行于L_2的直线L_2'

L_1, L_2'确定一个平面π_1 $\overrightarrow{PQ}\perp\pi_1$

过点Q作平行于L_1的直线L_1'

L_1', L_2确定一个平面π_2 $\overrightarrow{PQ}\perp\pi_2$



故$\overrightarrow{PQ}$是向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在公垂线上的射影向量

下证: $|\overrightarrow{PQ}|\leq|\overrightarrow{M_1M_2}|$

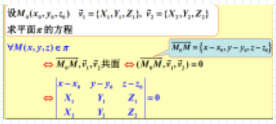
以P为始点作向量$\vec{v}_1\times\vec{v}_2$ 则$\vec{v}_1\times\vec{v}_2//\overrightarrow{PQ}$

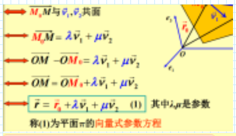
则$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{M_1M_2}||\cos\angle(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{PQ})|=|\overrightarrow{M_1M_2}||\angle(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{v}_1\times\vec{v}_2)|$

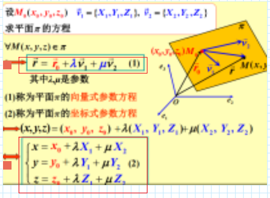
设$\angle(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{v}_1\times\vec{v}_2)=\theta$ 则$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{M_1M_2}||\cos\theta|\leq|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 得证

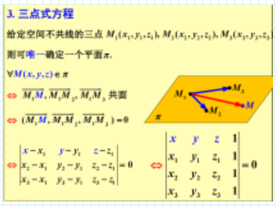
定义定理

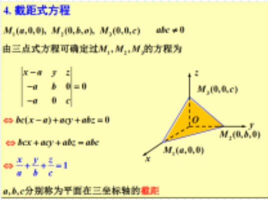
2021年12月8日　20:27

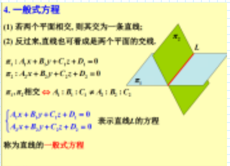


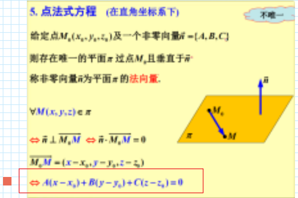












说明(2) 一般式方程中一次项系数即为平面的法向量坐标:　$\vec{n}=\{A,B,C\}$

给定点$M_0=(x_0,y_0,z_0)$及法向量$\vec{n}=\{A,B,C\}$

平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

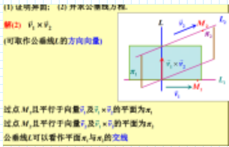
$$\Longleftrightarrow Ax+By+Cz+D=0$$

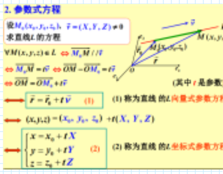
其中 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$

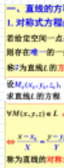
$\cos\theta=\cos\langle \mathbf{n1},\mathbf{n2}\rangle=\frac{n1\cdot n2}{|n1||n2|}$

$d=\frac{|Ax0+By0+Cz0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$d=\frac{|D1-D2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$







程（几种常见的方程形式）

或标准式方程）

不唯一

M_0及一个非零向量$\vec{v}$,

条直线L,经过M_0点且与$\vec{v}$平行,

向向量.

$\vec{v}=(X,Y,Z)\neq 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\,//\,\vec{v}$

$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0$

$=\dfrac{z-z_0}{Z}$

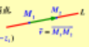
规定:分母为零时,
相应分子也为零.

式方程 或 标准式方程

3. 两点式方程

空间相异两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$

则可唯一确定一条直线L 经过M_1, M_2两点.



设向量 $\vec{v}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

则直线L 经过点M_1, 且以$\vec{v}=\overrightarrow{M_1M_2}$为方向向量.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$

规定:分母为零时,
相应分子也为零.

称为直线的两点式方程

归纳总结

2021年10月7日 11:42

图

2021年12月10日 20:17

常用结论

2021年10月8日　10:15

6. 特殊位置的平面方程

设平面方程为　$Ax+By+Cz+D=0$　　$\vec{n}=\{A,B,C\}$

(1) 过原点O　$Ax+By+Cz=0$　$(D=0)$

(2) 平行于x轴的平面 (垂直于yOz坐标面的平面)

此时 $\vec{n}\perp\vec{i}=\{1,0,0\}$　即$A=0$

$$By+Cz+D=0$$

过x轴的平面　$By+CZ=0$　$(D=0)$

(3) 垂直于z轴的平面 (平行于xOy坐标面的平面)

此时 $\vec{n}//\vec{k}=\{0,0,1\}$　即$A=0,B=0$

$Cz+D=0$　或表为 $z=a$

xOy平面　$z=0$　$(D=0)$

其它类推

方法总结

2021年10月8日 10:47

常用参数方程表示(直线参数式)

重要例题

2021年10月8日 11:37

例 已知平面π过点$P(3,2,-1)$，且平行于平面$x-2y=0$，求平面π的方程.

解 平面π的法向量为 $\vec{n}=(1,-2,0)$

故所求平面π的方程为

$$(x-3)-2(y-2)=0$$

即 $x-2y+1=0$

例 求直线$L:\begin{cases}x+y-z-1=0\\x+y+z+1=0\end{cases}$在平面$\pi: x+y+z=0$上的射影直线(或称投影直线)的方程.

解 定义 直线L在平面π上的射影直线，是由过L且与π垂直的平面(即射影平面)与平面π的交线.

设过直线$\begin{cases}x+y-z-1=0\\x+y+z+1=0\end{cases}$的平面的方程为

$$x+y-z-1+\lambda(x+y+z+1)=0$$

整理得 $(1+\lambda)x+(1+\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$ (*)

其法向量为 $\vec{n}=\{1+\lambda, 1+\lambda, -1+\lambda\}$

又平面$x+y+z=0$的法向量为$\vec{n}_1=\{1,1,1\}$

$\because \vec{n}\perp\vec{n}_1$ $\therefore (1+\lambda)+(1+\lambda)+(-1+\lambda)=0$ 解得 $\lambda=-\frac{1}{3}$

将其代入(*)式，得 $x+y-2z-2=0$ 即为L在π上的射影平面

例 把直线方程$\begin{cases}x-2y+z-1=0\\2x+y-2z+2=0\end{cases}$化为对称式方程.

解法一：求直线的方向向量以及在直线上取定一点

直线的方向向量为 $\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&1\\2&1&-2\end{vmatrix}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$

再在直线上任取一点 $(0,0,1)$

令$z=1$，求出$x=0, y=0$.

直线方向向量:
$v=n_1\times n_2$

由此可得直线的对称式方程为

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{5}$$

解法二：在直线上任取两点,再用两点式可得

先用高斯消元法

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&1\\2&1&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&1\\0&5&-4&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{3}{5}&-\frac{3}{5}\\0&1&-\frac{4}{5}&-\frac{4}{5}\end{array}\right)$$

即 $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}z\\y=-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}z\end{cases}$

令$z=1$,求出$x=0, y=0$. 令$z=6$,求出$x=3, y=4$.

$(0, 0, 1)$与$(3, 4, 6)$为直线上两点.

由此可得直线的两点式方程为 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{5}$

解法三：先用高斯消元法

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&1\\2&1&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&1\\0&5&-4&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{3}{5}&-\frac{3}{5}\\0&1&-\frac{4}{5}&-\frac{4}{5}\end{array}\right)$$

即 $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}z\\y=-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}z\end{cases}$

可得直线的参数式方程为 $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}t\\y=-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}t\\z=t\end{cases}$

直线的对称式方程为 $\frac{x+\frac{3}{5}}{3}=\frac{y+\frac{4}{5}}{4}=\frac{z}{5}$

解法四：由方程分别消去两个变量

消去z,得 $x=\frac{3}{4}y$

消去y,得 $x=\frac{3}{5}(z-1)$

由此可得直线的对称式方程为

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{5}$$

例 设直线$L_1:\frac{x-3}{4}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-1}$与$L_2:\frac{x}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z+2}{-1}$

(1) 证明异面； (2) 并求公垂线方程.

解(2) $\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&1&-1\\2&0&-1\end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$

过点M_1且平行于向量$\vec{s}_1$及$\vec{s}_1\times\vec{s}_2$的平面π_1

$\begin{vmatrix}x-3&y-3&z+1\\4&1&-1\\-1&2&-2\end{vmatrix}=0$ $\pi_1: y+z-2=0$

过点M_2且平行于向量$\vec{s}_2$及$\vec{s}_1\times\vec{s}_2$的平面π_2

$\begin{vmatrix}x&y&z+2\\2&0&-1\\-1&2&-2\end{vmatrix}=0$ $\pi_2: 2x+5y+4z+8=0$

例 设直线$L_1:\frac{x-3}{4}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-1}$与$L_2:\frac{x}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z+2}{-1}$

(1) 证明异面； (2) 并求公垂线方程.

解(2) $\pi_1: y+z-2=0$

$\pi_2: 2x+5y+4z+8=0$

公垂线方程L为$\begin{cases}y+z-2=0\\2x+5y+4z+8=0\end{cases}$

例 求经过点$M(2,-3,1)$,且与平面$2x+3y+z-1=0$平行的平面方程.

解 设所求平面为 $2x+3y+z+\lambda=0$

由于点$M(2,-3,1)$在平面上

代入得 $2\times2+3\times(-3)+1\times1+\lambda=0$

解得 $\lambda=4$

因此所求平面为 $2x+3y+z+4=0$

笔记部分

2021年10月6日 18:05

3.0 曲面 → 3.1 柱面 → 柱面eq → 射影 → 3.2 锥面 → 锥面eq → 3.3 旋转曲面 → xz曲面eq → 3.4 二次曲面 → 椭球面 → 双曲面 → 抛物面 → 3.5 直纹面 → 双曲抛物面 → 单叶双曲面 → 证明柱面 → 3.6 空间曲线 →

3.0 曲面

柱面
锥面
旋转曲面
二次方程
椭球面
双曲面
抛物面

3.1 柱面

定义 图
两要素:
准线(方向),
母线
准线不唯一
母线不唯一
(方向一定)

柱面eq

准线上存在一点(x0,y0,z0)

=t

面上任意一点(x,y,z)

让一个等式保持不动

特殊情况(母线平行于坐标轴)
F(x,y)母线平行于z轴
eg.y=x

射影

空间曲线的
(在xOy平面)
图
消去z:射影柱面$F_1(x,y)$
平面直坐vs空间直坐
再$\begin{cases} z=0 \\ F_1(x,y) \end{cases}$:射影曲线

3.2 锥面

定义 图
两要素:
顶点
准线
顶点唯一
准线不唯一

锥面eq

准线上存在一点(x1,y1,z1)

=t

面上任意一点(x,y,z)

让一个等式保持不动

eg1

3.3 旋转曲面

定义 图
两要素:
母线(不唯一)
轴
纬线(纬圆)
经线
注

xz曲面eq

M1(x1.y1,z1)∈L
Tip:
eg1
特殊的结论
推导

3.4 二次曲面

截痕法

椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
$(a,b,c>0)$
图

双曲面

单叶双曲面	方程	图
双叶双曲面	方程	图

抛物面

椭圆抛物面	方程	图
双曲抛物面	方程	图

(马鞍面)

3.5 直纹面

由直线族组成的
常用因式分解

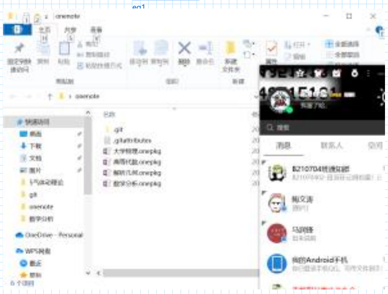
证明柱面

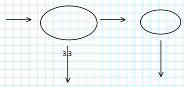
1.先因式分解
证明直纹面

3.6 空间曲线

利用空间曲线
射影柱面
表示空间曲线
eg

+投影方程(坐标平面)
掌握即可





锥面eq

柱面eq

可列集 有界集 映射

Z是可列集
可列个可列集是可列集
Q是可列集
错题
题目
答案

两要素
满射

错题集题目部分

2021年10月6日 21:46

错题集答案部分

2021年10月7日 11:41

定理证明

2021年10月8日 10:21

定义 给定空间曲线C,

动直线L沿曲线C平行移动所产生的曲面,称为柱面.

定曲线C称为柱面的准线，动直线 L称为柱面的母线.

定义 给定空间一点M_0，和一条不过M_0的曲线C,
所有过点M_0且与曲线C相交的直线 构成的曲面,

一、旋转曲面的定义

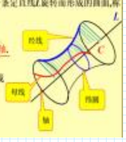
定义 空间内,由一条曲线C绕一条定直线L旋转而形成的曲面,称为旋转曲面.

曲线C称为旋转曲面的母线.

定直线L称为旋转曲面的(旋转)轴.

母线上任意一点旋转一周后形成一个圆，称为纬圆(或纬线).

过轴L的半平面与旋转曲面的交线，称为经线.



经线为平面曲线,可以作为母线;但母线C可以是空间曲线

(2) 旋转曲面的母线不唯一!

取yOz坐标面内的曲线C为母线，z轴为旋转轴.

$$C:\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$\forall M(x,y,z)\in S$

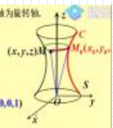
$\Longleftrightarrow \exists M_0(x_0,y_0,z_0)\in C$ 使得

$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\perp \vec{k}=(0,0,1)$

$|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{OM_0}|$

$$\begin{cases} z-z_0=0 \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2} \\ f(y_0,z_0)=0 \\ x_0=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ z_0=z \\ y_0=\pm\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0$ 为S的方程



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,b>0,c>0)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a>0,b>0,c>0)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \quad (a>0,b>0)$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (\text{其中}p\text{与}q\text{同号})$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \quad (a>0,b>0)$$ <=> $$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0)$$

例 5. 证明：数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛。

证 令$t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$，则当$n\ge 3$时，$nt\le 45^\circ$

$$\tan nt=\tan\left[(n-1)t+t\right]=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}$$

$$\ge\tan(n-1)t+\tan t\ge\cdots\ge n\tan t$$

从而，$\sin(n+1)t=\sin nt\cos t+\cos nt\sin t$

$$=\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\le\frac{n+1}{n}\sin nt$$

于是，当 $n\ge 3$ 时，

$$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\le(n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=L_{n+1}$$ 单调增加

又单位圆内接正n边形的面积

$$S_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

故当$n\ge 3$时，$L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\le\frac{4}{\cos 60^\circ}=8$

有上界

由单调收敛定理，数列 $\{L_n\}$ 收敛。

将这个极限用希腊字母π来记，就有

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}=\pi。$$

单位圆的半周长，即圆周率

说明：

1. 单位圆的面积S= $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=\pi$
2. 在弧度制下，上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=1.$$

2. e

例 6. 设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，证明：

$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

证 由平均值不等式($a_k>0$，$k=1,2,3,\cdots,n$)

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\le\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\le\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}$$

因此，$\{x_n\}$单调增加，$\{y_n\}$单调减少。

又 $2=x_1\le x_n<y_n\le y_1=4$,

即数列$\{x_n\},\{y_n\}$都有界，于是$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。

而$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

记 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$

说明：e=2.718281828459... 是一个无理数

令$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，则b_n-1表示兔群在第$n+1$季度的增长率

则 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=1+\dfrac{1}{b_{n-1}}$

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{b_{n-1}}$$

当 $b_n>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

当 $b_n<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$时，$b_{n+1}>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\{b_n\}$并不是单调数列，但是

$$b_{2k-1}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),\ b_{2k}\in\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},+\infty\right),\ k=1,2,3,\cdots,$$

$$b_{2k+2}-b_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k}}}-b_{2k}\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k}\right)}{1+b_{2k}}<0$$

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0$$

所以，$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列，

$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列

因而都是收敛数列，极限存在

设$\lim\limits_{k\to+\infty}b_{2k}=a$ ，$\lim\limits_{k\to+\infty}b_{2k-1}=b$,则有

$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\le a<+\infty$，$0<b\le\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$，得到 $a=\dfrac{1+2a}{1+a}$；

由 $\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$，得到 $b=\dfrac{1+2b}{1+b}$。

这两个方程有相同的解 $a=b=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负值舍去）

在不考虑兔子死亡的前提下，经过较长一段时间，

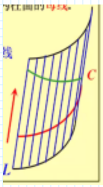
兔群逐季增长率趋于$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$。

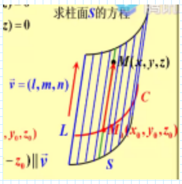
归纳总结

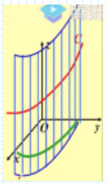
2021年10月7日 11:42

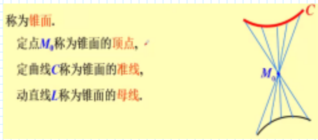
图

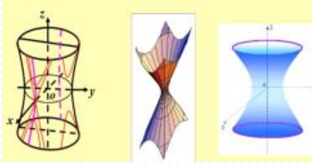
2022年2月22日 8:58

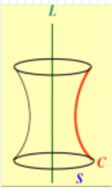


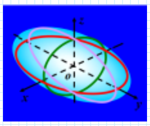


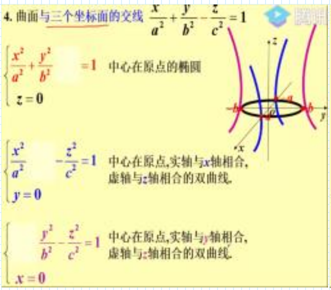


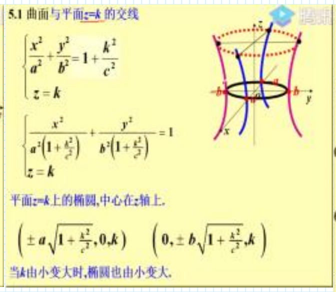


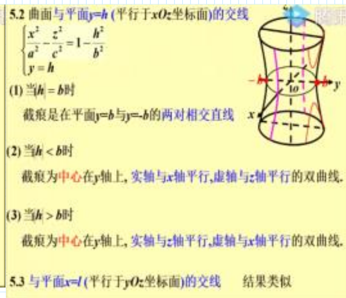


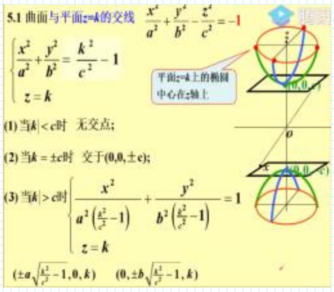


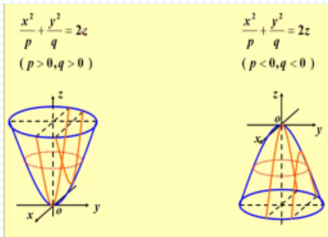


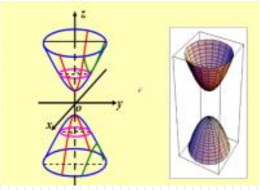


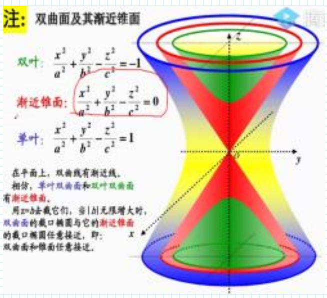


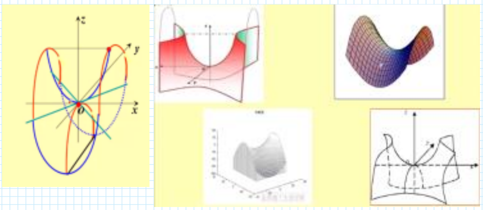






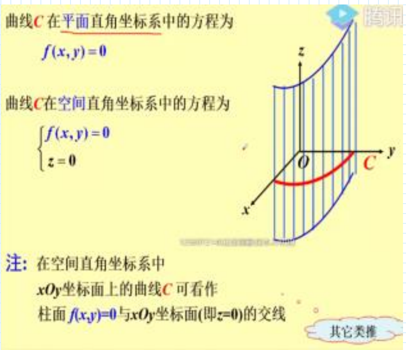

z
y
x
o

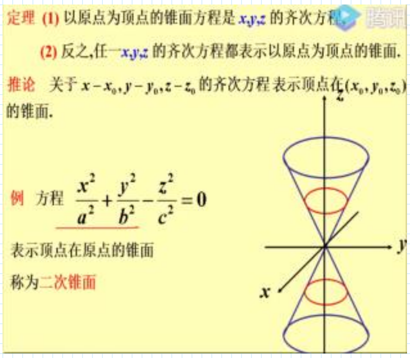

注: 双曲面及其渐近锥面
双叶: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
渐近锥面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
单叶: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
在平面上，双曲线有渐近线。
相仿，单叶双曲面和双叶双曲面有渐近锥面。
用z=h去截它们，当|h|无限增大时，双曲面的截口椭圆与它的渐近锥面的截口椭圆任意接近，即：双曲面和锥面任意接近。
z
y
x

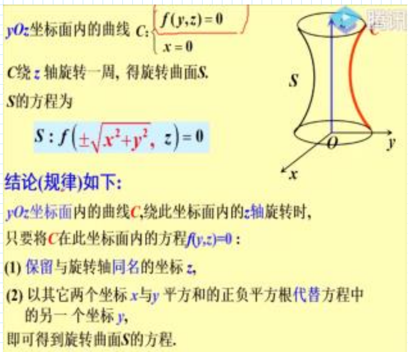

z
y
x
O

常用结论

2021年10月8日 10:15







方法总结

2021年10月8日 10:47

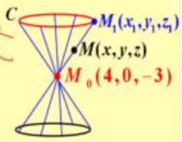
重要例题

2021年10月8日 11:37

例 求顶点为(4,0,-3), 准线为 $C:\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1\\ z=0\end{cases}$ 的锥面S方程.

解 $\forall M(x,y,z)\in S$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x_1-4}{x-4}=\dfrac{y_1}{y}=\dfrac{z_1+3}{z+3}=t\\ \dfrac{x_1^2}{25}+\dfrac{y_1^2}{9}=1\\ z_1=0\end{cases}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{25}\left(\frac{4z+3x}{z+3}\right)^2+\frac{1}{9}\left(\frac{3y}{z+3}\right)^2=1$$ 为所求锥面方程

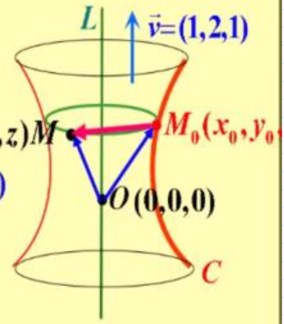
例 求曲线 $C\begin{cases}y=x^2\\ x+z=0\end{cases}$ 绕直线 $L:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ 旋转生成的旋转曲面S的方程.

解 $\forall M(x,y,z)\in S$

$\Leftrightarrow \exists M_0(x_0,y_0,z_0)\in C$ 使得

$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\perp\vec{v}=(1,2,1)$

且 $|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{OM_0}|$



$$\begin{cases}(x-x_0)+2(y-y_0)+(z-z_0)=0\\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\\ y_0=x_0^2\\ x_0+z_0=0\end{cases}$$ 消去 x_0,y_0,z_0

$$x^2+y^2+z^2=(x+2y+z)+\left(\frac{x+2y+z}{2}\right)^2$$ 为所求旋转曲面S方程

例 描绘曲线 $C:\begin{cases}2x^2+z^2+4y=4z & (1)\\ 2x^2+3z^2-4y=12z & (2)\end{cases}$

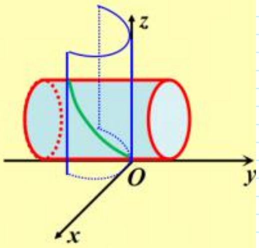
解 (1)+(2)得 $x^2+z^2-4z=0$

$\Rightarrow x^2+(z-2)^2=4$

为曲线C在xOz平面上的射影柱面

3×(1)−(2)得 $x^2=-4y$

为曲线C在xOy平面上的射影柱面



$$C:\begin{cases}x^2+(z-2)^2=4\\ x^2=-4y\end{cases}$$