第8卷第2期 内江师专学报 No. 2, Vol. 8
总第27期 JOURNAL OF NEIJIANG TEACHERS COLLEGE Sum No. 27

运动电荷的相互作用力与牛顿第三定律

谢实崇
（物理系）

摘要

有的文献指出两运动的电荷的相互作用力$\vec{F}_{12}\neq-\vec{F}_{21}$，牛顿第三定律在这里不再成立。本文用经典电磁理论，证明了运动电荷和电磁场组成系统的动量守恒，说明两运动电荷的相互作用不服从牛整第三定律的原因是电磁场参与了动量交换，$\vec{F}_{12}$和$\vec{F}_{21}$不是一对作用力和仅作用力。

1 问题的提出

在有的力学书［1］［2］中提到“两个相互运动的宏观电荷……它们之间的相互作用力不遵守牛顿第三定律”。“对运动电荷之间的电磁作用力，一般第三定律不再成立。”为什么会有上述说法？如真的是不服从牛顿第三定律，又是什么原因？为了弄清上述问题，特讨论两运动电荷受力情况。

设真空中两点电荷q_1，q_2相距为$\vec{r}$，（$\vec{r}$由q_2指向q_1）分别以$\vec{V}_1$，$\vec{V}_2$运动。（$V_1\ll C$，$V_2\ll C$，C为光速，$\vec{V}_1$与$\vec{V}_2$的方向一般不同）

根据洛仑兹力公式

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B}) \tag{1}$$

点电荷激发场强公式

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{2}$$

运动电荷产生磁场公式[3]

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}q\frac{\vec{V}\times\hat{r}}{r^2} \tag{3}$$

其中$\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}$为$\vec{r}$方向的单位矢量。可得两电荷受力为

$$\vec{F}_{12}=q_1\left[\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}+\frac{\mu_0 q_2}{4\pi}\frac{\vec{V}_1\times(\vec{V}_2\times\hat{r})}{r^2}\right]$$

$$\vec{F}_{21}=q_2\left\{\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(-\hat{r})+\frac{\mu_0 q_1}{4\pi}\frac{\vec{V}_2\times[\vec{V}_1\times(-\hat{r})]}{r^2}\right\}$$

根据矢量运算公式

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

故运动电荷的相互作用力：

$$\vec{F}_{12}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}+\frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r^3}[(\vec{r}\cdot\vec{V}_1)\vec{V}_2-(\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2)\vec{r}] \qquad (4)$$

$$\vec{F}_{21}=-\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}+\frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi r^3}[-(\vec{r}\cdot\vec{V}_2)\vec{V}_1+(\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2)\vec{r}] \qquad (5)$$

∵ 一般情况下

$$(\vec{r}\cdot\vec{V}_1)\vec{V}_2\neq(\vec{r}\cdot\vec{V}_2)\vec{V}_1$$

∴ $$\vec{F}_{12}\neq-\vec{F}_{21} \qquad (6)$$

这就是为什么有的力学书认为这时有“作用力与反作用力不相等”的由来。

2 运动电荷的相互作用

我们必须注意，电磁场是客观存在的一种物质，运动电荷的相互作用是通过它们之间的电磁场来作用的。在力学中，牛顿第三定律成立的条件是没有与二物体相互作用的第三者存在；这里两电荷的相互作用，却存在电磁场这个第三者，所以我们应把电荷q_1、q_2及它们激发的电磁场构成一个封闭系统来研究。

在牛顿力学里，基本运动定律是用力的语言表述的，我们称这种描写方式为力的表象[4]。由于物体受的力等于它的动量的变化率，两个物体的作用和反作用相等表示动量在两个物体之间的传递，故用力的表象和用能量——动量表象是完全等价的。在现代物理学中，力的表象不适合于对电磁场的描写，但我们仍可以用能量守恒和动量守恒精确地描述包含电荷和电磁场的整个系统。下面，我们从动量守恒的角度来讨论此系统。

电磁场对电荷的作用力为

$$\vec{f}_i=q_i\vec{E}_i+q_i\vec{V}_i\times\vec{B}$$

单位体积受力为

$$\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B} \qquad (7)$$

电荷系统在单位时间内，单位体积得到的机械动量为

$$\frac{d\vec{G}_{电荷}}{dt}=\int_\tau\vec{f}\,d\tau=\int_\tau(\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B})d\tau \qquad (8)$$

注意到麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{J}\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}\tag{9}$$

$$\therefore\quad \frac{d\vec{G}_{电荷}}{dt}=\int[\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+\mu_0(\nabla\times\vec{H})\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B}]d\tau\tag{10}$$

$$\because\quad \int(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B})\,d\tau=\frac{d}{dt}\int\vec{D}\times\vec{B}\,d\tau-\int\vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\tau$$

$$=\frac{d}{dt}\int\vec{D}\times\vec{B}\,d\tau+\int\vec{D}\times(\nabla\times\vec{E})d\tau\tag{11}$$

将（11）代入（10）.

$$\frac{d\vec{G}_{电荷}}{dt}+\frac{d}{dt}\int\vec{D}\times\vec{B}\,d\tau=\varepsilon_0\int[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}]d\tau+\mu_0\int(\nabla\times\vec{H})\times\vec{H}d\tau\tag{12}$$

$$\because\quad \nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{E}=(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z})\vec{e}_x+(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x})\vec{e}_y-(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y})\vec{e}_z$$

$$(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ (\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}) & (\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}) & (\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y})\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}$$

$$=[E_z(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x})-E_y(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y})]\vec{e}_x$$

$$+[E_x(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y})-E_z(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x})]\vec{e}_y$$

$$+[E_y(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z})-E_x(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x})]\vec{e}_z$$

则(12)式右边第一个积分的x分量为：

$$F_x=\varepsilon_0\int[E_x\frac{\partial E_x}{\partial x}+E_x\frac{\partial E_y}{\partial y}+E_x\frac{\partial E_z}{\partial z}+E_z(\frac{\partial E_x}{\partial x}-\frac{\partial E_z}{\partial x})-E_y(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y})]d\tau$$

$$=\varepsilon_0\int[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}E_x^2-\frac{1}{2}E_z^2-\frac{1}{2}E_y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(E_xE_y)+\frac{\partial}{\partial z}(E_xE_z)]d\tau$$

$$=\int(\frac{\partial T_{e1}}{\partial x}+\frac{\partial T_{e2}}{\partial y}+\frac{\partial T_{e3}}{\partial z})d\tau=\int\nabla\cdot(T_{e1}\vec{e}_x+T_{e2}\vec{e}_y+T_{e3}\vec{e}_z)d\tau$$

其中

$$T_{11}=\frac{\varepsilon_0}{2}(E_x^2-E_y^2-E_z^2)=\varepsilon_0(E_x^2-\frac{1}{2}E^2)$$
$$T_{12}=\varepsilon_0 E_x E_y$$
$$T_{13}=\varepsilon_0 E_x E_z$$

由高斯公式

$$\int_\tau \nabla\cdot\vec{f}\,d\tau=\int\vec{f}\cdot\vec{ds}$$

$$\therefore\qquad F_x=\oint_S(T_{11}\vec{e_x}+T_{12}\vec{e_y}+T_{13}\vec{e_z})\cdot\vec{ds}$$

同理

$$F_y=\oint_S(T_{21}\vec{e_x}+T_{22}\vec{e_y}+T_{23}\vec{e_z})\cdot\vec{ds}$$

$$F_z=\oint_S(T_{31}\vec{e_x}+T_{32}\vec{e_y}+T_{33}\vec{e_z})\cdot d\vec{s}$$

其中

$T_{21}=\varepsilon_0 E_x E_y$ $\qquad T_{22}=\varepsilon_0(E_y^2-\frac{1}{2}E^2)$ $\qquad T_{23}=\varepsilon_0 E_y E_z$

$T_{31}=\varepsilon_0 E_x E_x$ $\qquad T_{32}=\varepsilon_0 E_y E_z$ $\qquad T_{33}=\varepsilon_0(E_z^2-\frac{1}{2}E^2)$

$$\therefore\qquad T_{ij}=D_i E_j-\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\delta_{ij}\qquad(i、j取1、2、3)$$

$$\vec{F}=F_x\vec{e_x}+F_y\vec{e_y}+F_z\vec{e_z}$$
$$=\oint_S(T_{11}\vec{e_x}\vec{e_x}+T_{12}\vec{e_x}\vec{e_y}+\cdots\cdots+T_{33}\vec{e_z}\vec{e_z})\cdot\vec{ds}$$
$$=\oint_S(\vec{D}\vec{E}-\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\vec{I}\vec{\ })\cdot d\vec{s}$$

式中$\vec{I}\vec{\ }$为单位并矢。

$$\therefore\qquad \varepsilon_0\int_\tau[(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+(\nabla\times\vec{E})\times\vec{E}]d\tau=\oint_S(\vec{D}\vec{E}-\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\vec{I}\vec{\ })\cdot d\vec{s}\qquad(13)$$

又因（12）右边第二个积分的x分量为

$$F_x'=\int[\mu_0 H_z(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x})-\mu_0 H_y(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y})d\tau$$
$$=\int[\frac{\partial}{\partial z}(\mu_0 H_x H_z)-\mu_0 H_x\frac{\partial H_z}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mu_0 H_z^2}{2}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mu_0 H_y^2}{2}$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}(\mu_0 H_x H_y)-H_x\frac{\partial(\mu_0 H_y}{\partial y}]d\tau$$

由 $\qquad\nabla\cdot\vec{B}=0$

$$\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial x}+\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial y}+\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial z}=0$$

得

$$-\mu_0 H_x\frac{\partial H_y}{\partial y}-\mu_0 H_x\frac{\partial H_z}{\partial z}=\mu_0 H_x\frac{\partial H_x}{\partial x}$$ 代入 F'_x 得

$$F'_x=\int\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_0 H_y^2}{2}+\frac{\mu_0 H_z^2}{2}\right)+H_x\frac{\partial(\mu_0 H_x)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(\mu_0 H_x H_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\mu_0 H_x H_z)\right]d\tau$$

$$=\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_0 H_x^2-\frac{\mu_0 H^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(\mu_0 H_x H_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\mu_0 H_x H_z)\right]d\tau$$

$$=\int\left(\frac{\partial T'_{11}}{\partial x}+\frac{\partial T'_{12}}{\partial y}+\frac{\partial T'_{13}}{\partial z}\right)d\tau=\oint_s(T'_{11}\vec{e}_x+T'_{12}\vec{e}_y+T'_{13}\vec{e}_z)\cdot d\vec{s}$$

其中

$$T'_{11}=\mu_0 H_x^2-\frac{1}{2}\mu_0 H^2$$
$$T'_{12}=\mu_0 H_x H_y$$
$$T'_{13}=\mu_0 H_x H_z$$

同理可得

$$F'_y=\oint_s(T'_{21}\vec{e}_x+T'_{22}\vec{e}_y+T'_{23}\vec{e}_z)\cdot d\vec{s}$$

$$F'_z=\oint_s(T'_{31}\vec{e}_x+T'_{32}\vec{e}_z+T'_{33}\vec{e}_z)\cdot d\vec{s}$$

其中

$$T'_{21}=\mu_0 H_x H_y \qquad T'_{22}=\mu_0 H_y^2-\frac{1}{2}\mu_0 H^2 \qquad T'_{23}=\mu_0 H_y H_z$$

$$T'_{31}=\mu_0 H_x H_z \qquad T'_{32}=\mu_0 H_y H_z \qquad T'_{33}=\mu_0 H_z^2-\frac{1}{2}\mu_0 H^2$$

$$\therefore\qquad \mu_0\int_\tau[(\nabla\vec{H})\times\vec{H}\,d\tau=\oint_s\left(\vec{B}\vec{H}-\frac{\mu_0 H^2}{2}\vec{\vec{I}}\right)\cdot d\vec{s} \qquad (14)$$

$\because$ 电磁应力张量 $\vec{\vec{T}}_E=\vec{D}\vec{E}-\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\vec{\vec{I}}$

磁场应力张量 $\vec{\vec{T}}_m=\vec{B}\vec{H}-\frac{\mu_0 H^2}{2}\vec{\vec{I}}$

故(12)式可写为

$$\frac{d\vec{G}_{电荷}}{dt}+\frac{d}{dt}\int_\tau\vec{D}\times\vec{B}\,d\tau=\oint_s(\vec{\vec{T}}_E+\vec{\vec{T}}_M)\cdot d\vec{s}$$

若封闭曲面 $S\to S_\infty$，则

$$\oint_s(\vec{\vec{T}}_E+\vec{\vec{T}}_M)\cdot d\vec{s}=0$$

$$\therefore\qquad \frac{d\vec{G}_{电荷}}{dt}+\frac{d}{dt}\int\vec{D}\times\vec{B}\,d\tau=0 \qquad (15)$$

同时，由于体积分在全空间进行，而在全空间内只有电荷和电磁场的相互作用，这个体系应满足动量守恒，即

$$\frac{d\vec{G}_{电荷}}{dt}+\frac{d}{dt}\int\vec{G}_{场}\,d\tau=0 \qquad (16)$$

对比（15）式和第（16）式，知

$$\vec{G}_{场}=\vec{D}\times\vec{B}$$

$\vec{G}_{场}$表示电磁场的动量密度。可见，当q_1，q_2相互作用过程中，把电荷的机械动量和电磁场的动量都考虑进去时，系统的动量守恒。

3 问题的理解

我们应如何理解两运动电荷的相互作用力$\vec{F}_{12}\neq-\vec{F}_{21}$呢？应注意到，这两个力并不是一对作用力和反作用力。电荷的相互作用是通过其激发的电磁场来实现的，电磁场是客观存在的一种物质，有一定的能量和动量，电磁场对两电荷的作用力分别是$\vec{F}_{12}$和$\vec{F}_{21}$，同时受到两电荷对它的反作用力$-\vec{F}_{12}$和$-\vec{F}_{21}$，现在$\vec{F}_{12}\neq-\vec{F}_{21}$，只说明电磁场所受的合力$-\vec{F}_{12}-\vec{F}_{21}\neq0$，因此场的动量发生变化：

$$\frac{d}{dt}\int\vec{D}\times\vec{B}\,d\tau\neq0.$$

由前面的证明知，对于运动电荷与电磁场组成的孤立系统总是满足动量守恒的，电磁场动量的改变，正好补偿了运动电荷动量的变化[5]。因为电磁场参与了动量的交换，两电荷受到的力$\vec{F}_{12}\neq-\vec{F}_{21}$应当是必然结果。

参考文献

〔1〕战永杰等，力学，长春：东北师范大学出版社，1989：67—68.
〔2〕王正清，普通物理，力学，北京：高等教育出版社，1990：67.
〔3〕梁烂彬等，电磁学，北京：高等教育出版社，1980：302.
〔4〕关洪，物理通报，1984年第1期：51～53.
〔5〕王忠亮、封小超，电磁学讨论，成都：四川教育出版社，1988：336～337.