⑰ # 电磁场中牛顿第三定律成立条件的研究

77-79　　　　　　　　O441.4

何辉群　　　　郑宏兴
（宁夏广播电视大学）　　（宁夏工学院）

A **摘　要**　本文就稳恒状态和非稳恒状态下电荷系统的相互作用，阐述了电磁场中牛顿第三定律成立的条件，丰富了电磁相互作用的内容

关键词　电流元　电荷系统
分类号　O241

电磁场　牛顿第三定律

0　引言

从描述两电流元之间相互作用的安培定律[1]很容易看出：两电流元之间的相互作用一般不满足牛顿第三定律. 比如处在同一平面内的一对互相垂直的电流元之间的相互作用力 $d\vec{f}_{12}\neq d\vec{f}_{21}$.

由于稳恒条件不存在孤立的电流元，因此，无法用实验来确定它们的相互作用，只能从闭合载流回路的实验中倒推出来.

在非稳恒情形下，可以有孤立电流元. 如单个运动电荷，它们的相互作用力可以用实验来确定. 下面分两种情况进行论证.

1　稳恒状态下电荷系统的相互作用

对于稳恒电流系统之间的相互作用如图1. 一般地，$d\vec{f}_{12}\neq d\vec{f}_{21}$. 但由电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 和 $I_2 d\vec{l}_2$ 之间相互作用力的叠加就能证明闭合电流 I_1 和 I_2 的相互作用满足 $\vec{f}_{21}=-\vec{f}_{12}$，即牛顿第三定律成立.

证明如下：

设导线周围的介质为空气，由安培定律：

$$\vec{f}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{I_1 I_2 d\vec{l}_2\times(d\vec{l}_1\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3}\qquad(1)$$

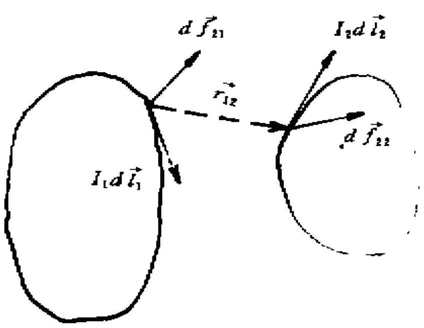

图　1

1995－11－20收到.　　作者：男，1957年4月生，甘肃人，讲师，1982年开始在电大任力学课教师

同理

$$\vec{f}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{L_2}\oint\limits_{L_1}\frac{I_1I_2\mathrm{d}\vec{l}_1\times(\mathrm{d}\vec{l}_2\times\vec{r}_{21})}{r_{21}^3} \tag{2}$$

按三矢量叉乘积的运算规则，(1) 式变为

$$\vec{f}_{12}=\frac{I_1I_2\mu_0}{4\pi}\left[\oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2}\left(\frac{\vec{r}_{12}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2}{r_{12}^3}\right)\mathrm{d}\vec{l}_1-\oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}\right] \tag{3}$$

而积分 $\oint\limits_{L_2}\frac{\vec{r}_{12}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2}{r_{12}^3}=\oint\limits_{L_2}\frac{\mathrm{d}r_{12}}{r_{12}^2}=0$ 因此 $\vec{f}_{12}=-\frac{I_1I_2\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$ (4)

同理 $$\vec{f}_{21}=-\frac{I_1I_2\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{L_1}\oint\limits_{L_2}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} \tag{5}$$

由图 1 可以看出，$\vec{r}_{12}=-\vec{r}_{21}$，所以(4)、(5) 两式仅差一个负号. 这就证明了闭合电流的相互作用满足$\vec{f}_{12}=-\vec{f}_{21}$.

2 非稳恒状态下电荷系统的相互作用

在非稳恒状态下，将无法用实验测量的两个电流元之间的作用化为可以用实验测量的两个运动的带电粒子间的相互作用.

电流元$I_1\mathrm{d}\vec{l}_1$可以写成$e_1\vec{v}_1\mathrm{d}V_1$，这里$e_1$是电荷体密度，$v_1$是带电粒子定向运动速度，$\mathrm{d}V_1$是电流元占据的体积.

同理，$I_2\mathrm{d}\vec{l}_2=e_2\vec{v}_2\mathrm{d}V_2$. 此时，两个电流元的相互作用力可表达为：

$$\mathrm{d}\vec{f}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(e_2\vec{v}_2\mathrm{d}v_2)\times(e_1\vec{v}_1\mathrm{d}v_1\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

$$\mathrm{d}\vec{f}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(e_1\vec{v}_1\mathrm{d}v_1)\times(e_2\vec{v}_2\mathrm{d}v_2\times\vec{r}_{21})}{r_{21}^3}$$

显然，$d\vec{f}_{12}\neq-d\vec{f}_{21}$. 说明两个电荷体系的机械动量之和不守恒.

事实上，我们应该把带电粒子的机械动量和电磁场动量一并考虑进去. 下面证明整个系统的动量守恒.

设体系的机械动量为$\vec{G}_m$，则 $$\frac{\mathrm{d}\vec{G}_m}{\mathrm{d}t}=\vec{F}=\int\limits_{\infty}\vec{f}\,\mathrm{d}V \tag{8}$$

这里，$\vec{F}$是作用在电荷体系上的力的总和，$\vec{f}$为洛仑兹力，它的场量形式为$\vec{f}=e\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}$，$e$为电荷密度，$\vec{j}$为电流密度，$\vec{E}$、$\vec{B}$分别为电磁场. 由麦克斯韦方程：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho \qquad \nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{j}$$

(8) 式变为

$$\frac{\mathrm{d}G_m}{\mathrm{d}t}=\int\limits_{\infty}[\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}+\mu_0(\nabla\times\vec{H})\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B}]\mathrm{d}V \tag{9}$$

而 $$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\times \vec{B}=\frac{d}{dt}(\vec{D}\times \vec{B})-\vec{D}\times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\frac{d}{dt}(\vec{D}\times \vec{B})+\varepsilon_0 \vec{E}\times (\nabla \times \vec{E}) \tag{10}$$

由(9)、(10) 得：

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{G}_m}{dt}+\frac{d}{dt}\int_\infty(\vec{D}\times \vec{B})dV &= \varepsilon_0\int_\infty[(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E}+(\nabla \times \vec{E})\times \vec{E}]dV+\mu_0\int_\infty[(\nabla \times \vec{H})\times \vec{H}]dV \\ &= \varepsilon_0\int_\infty[(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E}+(\nabla \times \vec{E})\times \vec{E}]dV+\mu_0\int_\infty[(\nabla \times \vec{H})\times \vec{H}+(\nabla \times \vec{H})\times \vec{H}]dV \\ &= \varepsilon_0\int_\infty[(\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{2}E^2\vec{I}]dV+\mu_0\int_\infty\nabla \cdot [\vec{H}\vec{H}-\frac{1}{2}H^2\vec{I}]dV \\ &= \int_\infty[\vec{D}\vec{E}-\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\vec{I}+\vec{B}\vec{H}-\frac{1}{2}\mu_0H^2\vec{I}]\cdot d\vec{S}\end{aligned} \tag{11}$$

(11) 式中的 $\vec{I}$ 为二阶单位张量. 第二个等式用到了 $\nabla \cdot \vec{B}=0$，第三个等式用到了

$$(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E}+(\nabla \times \vec{E})\times \vec{E}=(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E}-[\frac{1}{2}\nabla(\vec{E}\cdot \vec{E})-(\vec{E}\cdot \nabla)\vec{E}]$$

$$=\nabla \cdot \vec{E}\vec{E}-\frac{1}{2}\nabla(\vec{E}\cdot \vec{E})=\nabla \cdot (\vec{E}\vec{E})-\frac{1}{2}\nabla \cdot E^2\vec{I}$$

相距有限的两个电流元(电荷体系) 在无限大界面上：

$$\int_\infty[\vec{D}\vec{E}-\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\vec{I}+\vec{B}\vec{H}-\frac{1}{2}\mu_0H^2\vec{I}]\cdot d\vec{S}\longrightarrow 0$$

即 $$\frac{dG_m}{dt}+\frac{d}{dt}\int_\infty(\vec{D}\times \vec{B})dV=0 \tag{12}$$

而电磁场动量密度 $\varepsilon_0(\vec{E}\times \vec{B})=\vec{D}\times \vec{B}$，(12) 式的第二项的积分 $\int_\infty(\vec{D}\times \vec{B})dV$ 即为电荷体系电磁场的总动量 $\vec{G}_{EM}$，故(12) 式可写为：

$$\frac{d\vec{G}_m}{dt}+\frac{d\vec{G}_{EM}}{dt}=0 \tag{13}$$

(13) 式表明整个电荷体系的总动量是守恒的，即满足牛顿第三定律.

3 讨　　论

稳恒条件下不存在孤立电流元，它的受力只能从(1)，(2) 两式的结论倒推出来. 非稳恒状态下，它们的相互作用力可以用实验确定.

电磁场本身也是物质，在稳恒条件下，场的动量保持不变，电磁场动量随时间变化，运动电荷之间的电磁相互作用不满足牛顿第三定律，这表明它们的动量之和不守恒. 但它们不是封闭系统，这时每个运动电荷与电磁场之间还要交换动量，电荷动量的增减，正好由电磁场动量的改变给予补偿，(13) 式正说明了这一点.

4 结　　论

封闭体系中，牛顿第三定律总是成立的.

参考文献

郭硕鸿. 电动力学. 高等教育出版社，1979