相对论与牛顿第三定律的局限性

邵建军

（湖北教育学院物理系，湖北　武汉　430060）

摘要：本文讨论了电磁相互作用、引力相互作用在各种情况下是否服从牛顿第三定律的问题，并指出牛顿第三定律的局限性与相对论的关系以及牛顿第三定律与守恒定律的关系。

关键词：牛顿第三定律；相对论；守恒定律

中图分类号：O 442　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007－1687(2003)02－0013－06

作者简介：邵建军(1960～)，男，湖北教育学院物理系，副教授。

1.两个电流元之间的相互作用为什么不能服从牛顿第三定律

牛顿第三定律的内容如下：两个物体之间的作用力和反作用力，在同一直线上，大小相等而方向相反。这个定律表明，作用力和反作用力总是同时以大小相等，方向相反的方式成对地出现，它们同时出现，同时消失，没有主次之分。并且任何一个真实力，总存在相应的反作用力，当然，对虚假的非真实的惯性力是不存在有对应的反作用力的。广义相对论中惯性力与引力不可分辨正是牛顿第三定律不成立的结果。

众所周知两个电流元之间的相互作用明显不服从牛顿第三定律，因为

$$d\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R_{12}^3}[dl_2 \times (dl_1 \times \boldsymbol{R}_{12})] = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R_{12}^3}[dl_1(dl_2 \cdot \boldsymbol{R}_{12}) - \boldsymbol{R}_{12}(dl_1 \cdot dl_2)] \quad (1)$$

而 $$d\boldsymbol{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R_{12}^3}[dl_1 \times (dl_2 \times \boldsymbol{R}_{21})] = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi R_{21}^3}[dl_2(dl_1 \cdot \boldsymbol{R}_{21}) - \boldsymbol{R}_{21}(dl_1 \cdot dl_2)] \quad (2)$$

故 $d\boldsymbol{F}_{21} \neq -d\boldsymbol{F}_{12}$；按照牛顿第三定律，任何真实力都应成对出现并服从牛顿第三定律。而上述的 $d\boldsymbol{F}_{21}$ 与 $d\boldsymbol{F}_{12}$ 显然是真实力却不能服从牛顿第三定律。这的确是令人吃惊的问题。首先指出(1)(2)两式实质上都已经作了非相对论近似，那为什么会违背牛顿第三定律呢？美国物理学家 $J.D.$ 杰克逊对上述问题提出了一个错误的解决方案。他错误地认为(1)式和(2)式给出的电流元之间的相互作用力实质上对孤立的电流元是不成立的，杰克逊认为不存在孤立的电流元，而仅适用于两个闭合的稳恒电流圈之间的相互作用。这里我们要指出三点：第一，孤立的电流元的确不存在，但两个运动的电荷总是可以存在的；它们之间的相互作用力是真实的力但它们同样地不满足牛顿第三定律。这就证明杰克逊的观点是错误的。第二，电流元与运动的带电粒子的情形也的确不是完全相同。对电流元或电流线圈来讲在电流元和电流线圈上仅有电流而无净电荷即电流元和电流线圈上是近似认为电中性的，因此，电流元之间仅有磁相互作用而无两点电荷间的库仑力的相互作用。而两运动的点电荷之间既有库仑力也有磁相互作用(安培力)。第三，对于两闭合的稳恒电流圈之间的相互作用力的确如杰克逊所指出的那样大小相等，方向相反，因为

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[\oint_{l_1} dl_1 \oint_{l_2} \frac{dl_2 \cdot \boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}} - \oint_{l_1}\oint_{l_2} \frac{\boldsymbol{R}_{12}(dl_1 dl_2)}{R_{12}^3}\right] = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[\oint_{l_1} dl_1 \oint_{S_2} \nabla \times \frac{\boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}^3} \cdot d\boldsymbol{S} - \oint_{l_1}\oint_{l_2} \frac{\boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}^3}(dl_1 dl_2)\right] = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left[-\oint_{l_1}\oint_{l_2} \frac{\boldsymbol{R}_{12}(dl_1 dl_2)}{R_{12}^3}\right] \quad (3)$$

同理 $$\boldsymbol{F}_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2} \frac{\boldsymbol{R}_{21}(dl_1 \cdot dl_2)}{R_{21}^3} \quad (4)$$

收稿日期：2002－11－12

由于 $\boldsymbol{R}_{21} = -\boldsymbol{R}_{12}$，故 $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$。

我们认为(1)式(2)式能够适用于电流元之间的相互作用，但是为什么它们又不能服从牛顿第三定律呢？前面已经指出(1)和(2)式已经作了非相对论近似。为了把问题弄清，我们来讨论一下两运动点电荷之间的电磁相互作用，它们是明显不能满足牛顿第三定律的，假设 q_1 在 $\boldsymbol{x}_{q_1}(t')$ 处产生的在$(\boldsymbol{x}_2, t_2)$处的场为

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x}_2, t_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{(\boldsymbol{n} - \frac{\boldsymbol{v}_1(t'_1)}{c})(1 - \beta_1^2)}{(1 - \beta_1\cos\theta_1)^3},$$

$$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x}_2, t_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2 c^2} \frac{\boldsymbol{v}_1(t'_1) \times \boldsymbol{n}(1 - \beta_1^2)}{(1 - \beta_1\cos\theta_1)^3}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x}_2, t_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r c^2} \frac{\boldsymbol{n} \times [(\boldsymbol{n} - \frac{\boldsymbol{v}_1(t'_1)}{c}) \times \dot{\boldsymbol{v}}_1(t'_1)]}{(1 - \beta_1\cos\theta_1)^3},$$

$$\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{x}_2, t_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r} \frac{\boldsymbol{n} \times \{\boldsymbol{n} \times [(\boldsymbol{n} - \frac{\boldsymbol{v}_1(t'_1)}{c}) \times \dot{\boldsymbol{v}}_1(t'_1)]\}}{(1 - \beta_1\cos\theta_1)^3}. \quad (6)$$

其中 θ_1 为 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{v}_1(t_2)$ 的夹角。故 q_2 在 t_2 时刻受到的力为

$\boldsymbol{F}_{21} = q_2(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2) + q_2\boldsymbol{v}_2(t_1) \times (\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2)$，当 $\frac{v_1(t'_1)}{c} \approx 0, \frac{v_2(t_1)}{c} \approx 0$ 时有：

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x}_2, t_2) = \frac{q_1\boldsymbol{n}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \ \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x}_2, t_2) = \frac{\boldsymbol{v}_1(t'_1)}{c^2} \times \boldsymbol{E}_1; \quad (7)$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_1 \times [\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{v}}_1(t')]\frac{r}{c^2};$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{E}_1 \times \{\boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{v}}_1(t')]\}\frac{r}{c^3}; \quad (8)$$

如果 $\dot{v}_1(t') \approx 0$，则 $F_{21} = q_2E_1(x_2, t_2) + q_2\frac{v_2(t_2)}{c} \times [\frac{v_1(t'_1)}{c} \times E_1(x_2, t_2)]$; (9)

如果$\frac{v_1(t'_1)}{c} \approx 0, \frac{v_2(t_1)}{c} \approx 0$，则只要有电场力，磁场力便可忽略。故在非相对论近似下，两点电荷之间的相互作用满足牛顿第三定律：因为 $\dot{v}_2(t'_2) \approx 0$, $\frac{v_2(t'_2)}{c} \approx 0, \frac{v_1(t_2)}{c} \approx 0, \boldsymbol{F}_{12} \approx -\boldsymbol{F}_{21}$。(1)式和(2)式中只取了部分非相对论近似，若完全取非相对论近似应有 $d\boldsymbol{F}_{12} \approx -d\boldsymbol{F}_{21} \approx 0$。以上看出在相对论中牛顿第三定律有明显的局限性。

2. 如何理解两静止点电荷之间的相互作用力满足牛顿第三定律

真空中静止点电荷 q_1 对另一个静止点电荷 q_2 的作用力的大小和 q_1q_2 的乘积成正比，和它们之间的距离 r 的二次方成反比，作用力的方向在两个点电荷的连线上 $\boldsymbol{F} = k\frac{q_1q_2}{r_3}\boldsymbol{r}, k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 N \cdot m^2/c^2$，式中 $\boldsymbol{r}$ 为 q_1 到 q_2 的矢径。实际静点电荷间的作用力是通过传播静电场来传递的。q_1 点电荷在 t' 时刻均匀地向四周外以光速 c 传送库仑场，在 t' 时刻 q_1 的库仑场对 q_1 电荷本身没有反冲力，即静止电荷的自有场对自身没有阻尼力。等到 $t = t' - \frac{r}{c}$ 时刻 q_1 在 t' 时刻产生的自有场传送到了 q_2 所在的位置，则 $t = t' - \frac{r}{c}$ 时刻 q_2 受到了一个孤单的作用力，因为 q_2 对 q_1 产生的自有场并没有作用力。然而在 t' 时刻 q_2 也向外传送静电场，等到 $t = t' - \frac{r}{c}$ 时刻，q_2 的场也传送至 q_1 所在位置，对 q_1 施加了一个作用力。q_2 的自有场与 q_1 电荷之间仅存在这个孤单作用力，因为 q_1 对 q_2 的自有场无作用力。所以，从实际效果上看，两静止的点电荷之间的相互作用力在 t 时刻满足牛顿第三定律。即 t 时刻 q_1 受到 F 作用力，t 时刻 q_2 受到 $-\boldsymbol{F}$ 作用力。这里，在 t' 到 t 这段时间内两点电荷都没有移动才能保证 t 时刻与 t' 时毫无差异而保证 t 时刻 q_1q_2 满足牛顿第三定律。其中持续静止的条件是必要的。

3. 分析自有场以光速 c 向外传送的推迟特性[1]

对于(5)式表示的自有场部分，其中矢径是由 t'_1 时刻粒子所在位置与场点 $\boldsymbol{x}_2$ 构成的，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_{q_1}(t'_1)$ 其中瞬时速度 $v_1 = v_1(t'_1)$; $t'_1 = t_2 - \frac{r}{c}$; (5)式代表的是 $\boldsymbol{x}_2$ 点处 t_2 时刻的自有场，所以从(5)式中能明显看出自有场的推迟特性。然而我们通常所熟悉的自有场形式并不是推迟形式的。通常的自有场即匀速运动的带电粒子 q_1 的电磁场是用 t_2 时刻 q_1 粒子所在位置 $\boldsymbol{x}_{q_1}(t_2)$ 与场点 $\boldsymbol{x}_2$ 构成矢径 $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_{q_1}(t_2)$ 来表示 t_2 时刻 $\boldsymbol{x}_2$ 处的场。设 θ_0 为 r_0 与 $v_1(t_2)$ 的夹角，$\boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0}$，为了从非推迟形式的自有场导出(5)式表示的自有场。下面用电磁场变换来推导出匀速运动带电粒子的推迟形式场。

在 $\sum'$ 系上观察时，粒子 q_1 静止固定在 $\sum'$ 系的原点 0′ 上，则 $\sum'$ 系中便只有静电场，其电磁强度

为 $\boldsymbol{E}'_1 = \frac{q_1 \boldsymbol{r}'_0}{4\pi\varepsilon_0 r'^3_0}$; $\boldsymbol{B}' = 0$;(10) 其中 $r'_0 = x'_0$,为$\sum'$系中场点 $\boldsymbol{x}'_2$ 与$\sum'$的原点 O' 构成的矢径。$\sum'$与$\sum$系的坐标轴平行且四维原点重合,x' 由沿 x 轴正方向以 $\boldsymbol{v}_1$ 运动。则在$\sum$系中看,带电粒子连同$\sum'$系一起以 $\boldsymbol{v}_1$ 运动。由电磁场变换关系可得:

$$\boldsymbol{E}_{1/\!/} = \boldsymbol{E}'_{1/\!/},\ \boldsymbol{E}_{1\perp} = \gamma_1 \boldsymbol{E}'_{1\perp},$$

$$\boldsymbol{B}_{1/\!/} = 0,\ \boldsymbol{B}_{1\perp} = \gamma_1 \frac{\boldsymbol{v}_1}{c^2}\boldsymbol{E}'_{1\perp}; \tag{11}$$

由于运动方向上运动线度收缩:$\boldsymbol{r}'_{0/\!/} = \gamma_1 \boldsymbol{r}_{0/\!/}$,

$$\boldsymbol{r}'_{0\perp} = \boldsymbol{r}_{0\perp}; \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_{q_1}(t_2)$,即在$\sum'$系中在 t_2 时刻同时由 $\boldsymbol{x}_2$ 点和 $\boldsymbol{x}_{q_1}(t_2)$ 点构成矢径 γ_0,$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c_2}}}$ 于是

在$\sum$系中$(\boldsymbol{x}_2, t_2)$点的场为:

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{1\perp} + \boldsymbol{E}_{1/\!/} = \gamma_1 \boldsymbol{E}'_{1\perp} + \boldsymbol{E}'_{1/\!/} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r'^3_0}(\gamma_1 \boldsymbol{r}'_{0\perp} + \boldsymbol{r}'_{1/\!/}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r'^3_0}(\gamma_1 \boldsymbol{r}_{0\perp} + \gamma_1 \boldsymbol{r}_{0/\!/}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r'^3_0}\gamma_1 \boldsymbol{r}_0$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma_1 \frac{\boldsymbol{r}_0}{[(\gamma_1 \boldsymbol{r}_{0/\!/})^2 + (\boldsymbol{r}_{0\perp})^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma_1 \frac{\boldsymbol{r}_0}{[(\gamma_1 \boldsymbol{r}_{0/\!/})^2 + r_0^2 - (\boldsymbol{r}_{0/\!/})^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma_1 \frac{\boldsymbol{r}_0}{[r_0^2 + (\gamma_1^2 - 1)r_0^2\cos^2\theta_0]^{3/2}}$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma_1 \frac{\boldsymbol{r}_0}{[r_0^2 + \frac{v_1^2/c^2}{1 - v_1^2/c^2}r_0^2\cos^2\theta_0]^{3/2}}$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_0}{r_0^3}\frac{1-\beta_1^2}{(1-\beta_1^2\sin^2\theta_0)^{3/2}}$$

$$= \frac{q_1 \boldsymbol{n}_0}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\frac{1-\beta_1^2}{(1-\beta_1^2\sin^2\theta_0)^{3/2}}; \tag{13}$$

其中 $\beta_1 = \frac{v_1(t_2)}{c}$;$\theta_0$ 为 $\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{v}_2(t_2)$ 的夹角,由(13)可得:

$$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x}_2, t_2) = \frac{\boldsymbol{v}_1(t_2)}{c^2} \times \boldsymbol{E}_{1\perp} = \frac{\boldsymbol{v}_1(t_2) \times \boldsymbol{E}_1}{c^2}$$

$$= \frac{(q_1 \boldsymbol{v}_1(t_2)) \times \boldsymbol{n}_0(1-\beta_1^2)}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2(1-\beta_1^2\sin^2\theta_0)^{3/2}}; \tag{14}$$

在(13),(14)中$(\boldsymbol{x}_2, t_2)$处的场用 t_2 时刻粒子 q_1 位置与场点 $\boldsymbol{x}_2$ 的矢径来表达,故(13)、(14)为自有场的非推迟形式。$(\boldsymbol{x}_2, t_2)$处的场实际是粒子在较早的时刻产生的,$t'_1 = t_2 - \frac{r}{c}$,即 $r = c(t_2 - t'_1)$;$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_{q_1}(t'_1)$;且 $\boldsymbol{x}_{q_1}(t_2) - \boldsymbol{x}_{q_1}(t'_1) = (t_2 - t'_1)\boldsymbol{v}_1(t_2) = \frac{r}{c}\boldsymbol{v}_1(t_2)$;$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$,$\boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0}$;因为 $\boldsymbol{r}_0$,$\boldsymbol{r}$ 与 $\frac{r}{c}\boldsymbol{v}_1(t_2)$ 构成一个三角形,故 $r_0^2 = r^2 + (\frac{r}{c}v_1)^2 - 2r(\frac{r}{c}v_1)\cos\theta_0$;

$$r_0^2(1-\beta_1^2\sin^2\theta_0) = r_0^2 - r_0^2\beta_1^2\sin^2\theta_0 = r_0^2 - r^2\beta_1^2\sin^2\theta_1$$
$$= r^2 + \beta_1^2 r^2 - 2r^2\beta_1\cos\theta_1 - r^2\beta_1^2\sin^2\theta_1$$
$$= r^2 + \beta_1^2 r^2\cos^2\theta_1 - 2r^2\beta_1\cos\theta_1$$
$$= (r - \beta_1 r\cos\theta_1)^2 \tag{15}$$

并且有:
$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r} - r\frac{\boldsymbol{v}_1}{c} \tag{16}$$

于是得到推迟形式的自由场正好为前面的(5)式。

4. 两变速运动的点电荷之间的相互作用为什么不能满足牛顿第三定律

当带电粒子 q_1 有显著的变速运动时,它将辐射电磁波[2][3][4],其辐射场由(6)式表示。辐射场对产生辐射场的粒子本身将有瞬时辐射阻尼力作用,另外,带电粒子 q_2 产生的自有场与辐射场也同时对 q_1 有相应的电磁作用。牛顿第三定律仅适用两个物体之间的相互作用力。所以对两变速运动的点电荷之间的相互作用牛顿第三定律自然不能适用。那么当 q_1 变速而产生辐射场时,辐射场对 q_1 有瞬时辐射阻尼力,但瞬时辐射阻尼力并不存在相应的反作用力,即此时粒子 q_1 并没有对辐射场施加有任何作用力,因为辐射场是突然产生的场物质,场是非常特殊的物质形态,场可以在空间叠加,而不可能对场施加推力,所以辐射场与产生此场的粒子之间牛顿第三定律不成立。在辐射场为零或很弱的情形下,即 $\dot{\boldsymbol{v}}_1(t') \approx 0$ 时,再取低速的非相对论近似,则两点电荷间的相互作用满足牛顿第三定律,在上述近似下相互作用明显与速度 v 无关可引入电势能概念($V(\boldsymbol{x}) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$)来描述。相互作用就好象用一根绳子拉着两个电荷或用一根橡皮筋连着两个电荷,从而作用力与反作用力是同时存在同时消失。

关于两个匀速运动的带电粒子之间的相互作用力是否服从牛顿第三定律问题,在本文的第一节中已作讨论,结论是取非相对论近似后牛顿第三定律适用。在相对论情形,两个带电粒子由于相隔一定的距离,一般牛顿第三定律总是不能满足的。但是,如果两个带电粒子的加速度都为零,并且两个粒子的运动速度方向都在两个粒子的连线上,则牛顿第三定律成立,不过这里也是部分地取了非相对论近似,即没有计入自有场的推迟效应。另外,如果两个带电粒子的加速度都为零,并且两个粒子的运动速度恒相等作相互平行的匀速直线运动,但方向都不在两粒子的连线上,此时,它们的相互作用不服从牛顿第三定律。然而,变换到它们都静止的$\sum'$系中牛顿第三定律又成

立了(此时在 $\sum'$ 系中牛顿第三定律成立也是已经取了不计库仑场的推迟效应近似)。一般牛顿第三定律不成立表明两个点电荷作为一个系统不是孤立系统，这样对两点电荷这样的非孤立系统守恒定律自然不成立。把自有场、辐射场和两点电荷全部包括进去便可看作孤立系统，此时守恒定律成立。

在任意运动带电粒子的电磁场中场量与 r^2 成反比的部分为自有场，这一部分主要存在于粒子附近，当粒子静止时它就是库仑场，当粒子运动时它和速度有关，可由库仑场作电磁场变换得到。能流密度 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)\times(\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2)$，其中 $\boldsymbol{H}_1=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{H}_2=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_2$，能流密度 $\boldsymbol{S}$ 是用观察时间 t_2 计算的单位时间内垂直通过单位横截面的电磁能量。在 t' 时刻粒子处于 $\boldsymbol{x}_{q_1}(t'_1)$ 此刻产生的自有场和辐射场都以光速 c 向外传播，t'_1 时刻产生的场在 t_2 时刻同时到达以 $\boldsymbol{x}_{q_1}(t'_1)$ 为球心，半径为 $r=(t_2-t'_1)c$ 的球面上，所以在 t'_1 的单位时间内通过以上球面的辐射总功率为：$P(t'_1)=\oint\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\frac{\partial t_2}{\partial t'_1}r^2d\Omega$

$=P_1(r,t'_1)+P_2(r,t'_1)+P_3(r,t'_1)$；其中

$$P_1(r,t'_1)=\oint(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{n}\frac{\partial t_2}{\partial t'_1}r^2d\Omega$$

$$=\oint\left[\boldsymbol{E}_1\times\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\mu_0c}\times\boldsymbol{E}_1\right)\right]\cdot\boldsymbol{n}\frac{\partial t_2}{\partial t'_1}r^2d\Omega$$

$$=\oint\left[E_1^2\frac{\boldsymbol{n}}{c}-\frac{(\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{n})}{c}\boldsymbol{E}_1\right]\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{\mu_0}\frac{\partial t_2}{\partial t'_1}r^2d\Omega$$

$$=\oint\left[E_1^2\frac{1}{c}-\frac{(\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{n})^2}{c}\right]\frac{r^2}{\mu_0}\frac{\partial t_2}{\partial t'_1}d\Omega$$

$$=\oint\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0r}\right)^2\frac{(1-\beta_1^2)^2}{c\mu_0}\left[\frac{1+\beta_1^2-2\beta_1\cos\theta_1}{(1-\beta_1\cos\theta_1)^5}-\frac{1}{(1-\beta_1\cos\theta_1)^3}\right]d\Omega$$

$$=\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0r}\right)^2\frac{(1-\beta_1^2)^2 2\pi}{c\mu_0}\left[(\beta_1^2-1)\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1-\beta_1x)^5}+2\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1-\beta_1x)^4}-\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1-\beta_1x)^3}\right]$$

$$=\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0r}\right)^2\frac{8\pi}{3c\mu_0}\frac{\beta_1^2}{1-\beta_1^2}\tag{17}$$

$$P_2(r,t'_1)=\oint\left\{[(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2)+(\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)]\cdot\boldsymbol{n}\frac{\partial t_2}{\partial t'_1}\right\}r^2d\Omega=\oint\frac{q_1^2(1-\beta_1^2)}{4\pi\varepsilon_0r^2(1-\beta_1\cos\theta_1)^6}\frac{1}{4\pi cr}\Big\{\left(\boldsymbol{n}-\frac{\boldsymbol{v}_1}{c}\right)\times\Big\{\boldsymbol{n}\times\left[\boldsymbol{n}\times\left[\left(\boldsymbol{n}-\frac{\boldsymbol{v}_1}{c}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}_1\right]\right]\Big\}+\left[\boldsymbol{n}\times\left[\left(\boldsymbol{n}-\frac{\boldsymbol{v}_1}{c}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}_1\right]\right]\times\left(\frac{\boldsymbol{v}_1}{c}\times\boldsymbol{n}\right)\Big\}\cdot\boldsymbol{n}\frac{\partial t_2}{\partial t'_1}r^2d\Omega$$

$$=\frac{q_1^2(1-\beta_1^2)}{16\pi^2\varepsilon_0rc}\oint\frac{2}{(1-\beta_1\cos\theta_1)^5}\left\{\dot{v}_{1/\!/}\cos\theta_1+\dot{v}_{1\perp}\sin\theta_1\cos\phi_1)(\beta_1^2-\beta_1\cos\theta_1)+v\dot{v}_{1/\!/}\frac{1}{c}(1-\beta_1\cos\theta_1)\right\}d\Omega$$

$$=\frac{q_1^2(1-\beta_1^2)}{16\pi^2\varepsilon_0rc}\oint\frac{2}{(1-\beta_1\cos\theta_1)^5}\{\dot{v}_{1/\!/}\beta_1\}(1-\cos^2\theta_1)\sin\theta_1d\theta_1d\phi_1$$

$$=\frac{q_1^2(1-\beta_1^2)2\pi}{16\pi^2\varepsilon_0rc}2\dot{v}_{1/\!/}\beta_1\oint\frac{1-\cos^2\theta_1}{(1-\beta_1\cos\theta_1)^5}\sin\theta_1d\theta_1$$

$$=\frac{q_1^2(1-\beta_1^2)\beta_1\dot{v}_{1/\!/}}{4\pi\varepsilon_0rc}\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{(1-\beta_1x)^5}dx$$

$$=\frac{q_1^2\beta_1\dot{v}_{1/\!/}}{3\pi\varepsilon_0rc(1-\beta_1^2)}\tag{18}$$

$$P_3(t'_1)=\oint(\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_2)\cdot\boldsymbol{n}\frac{\partial t_2}{\partial t'_1}r^2d\Omega=\oint\frac{1}{\mu_0c}[\boldsymbol{E}_2\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_2)]\cdot\boldsymbol{n}\frac{\partial t_2}{\partial t'_1}r^2d\Omega$$

$$=\oint\frac{q_1^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}E_2^2\frac{\partial t_2}{\partial t'_1}r^2d\Omega$$

$$=\oint\frac{q_1^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}\frac{\left|\boldsymbol{n}\times\left[\left(\boldsymbol{n}-\frac{\boldsymbol{v}_1}{c}\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}_1\right]\right|^2}{(1-\beta_1\cos\theta_1)^5}d\Omega$$

$$=\oint\frac{q_1^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}\left[\frac{\dot{v}_{1/\!/}^2\sin^2\theta_1}{\left(1-\frac{v_1}{c}\cos\theta_1\right)^5}+\frac{\dot{v}_{1\perp}^2\left(1-\frac{v_1}{c}\cos\theta_1\right)^2-\left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right)\sin^2\theta_1\cos^2\phi_1\dot{v}_{1\perp}^2}{\left(1-\frac{v_1}{c}\cos\theta_1\right)^5}-\frac{2\dot{v}_{1/\!/}\dot{v}_{1\perp}\sin\theta_1\cos\phi_1\cos\theta_1}{\left(1-\frac{v_1}{c}\cos\theta_1\right)^5}\right]\sin\theta_1d\theta_1d\phi_1$$

$$=\oint\frac{q_1^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}\left[\frac{\dot{v}_{1/\!/}\sin^2\theta_1}{(1-\beta_1\cos\theta_1)^5}+\dot{v}_{1\perp}^2\left\{\frac{1}{(1-\beta_1\cos\theta_1)^3}-\frac{(1-\beta_1^2)\sin^2\theta_1\cos^2\phi_1}{(1-\beta_1\cos\theta_1)^5}\right\}\right]\sin\theta_1d\theta_1d\phi_1$$

$$=\frac{q_1^2\dot{v}_{1/\!/}^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\gamma_1^6+\frac{q_1^2\dot{v}_{1\perp}^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\gamma_1^4$$

$$=\frac{q_1^2\gamma_1^6}{6\pi\varepsilon_0c^3}\left[\dot{v}_{1/\!/}^2+\left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right)\dot{v}_{1\perp}^2\right]$$

$$=\frac{q_1^2\gamma_1^6}{4\pi\varepsilon_0c^3}\left[\dot{v}^2-\left(\frac{\boldsymbol{v}_1\times\dot{\boldsymbol{v}}_1}{c}\right)^2\right]\tag{19}$$

其中(17)式表示粒子在 t'_1 时刻产生的自有场在 t_2 时刻 t'_1 的单位时间内通过以 $\boldsymbol{x}_{q_1}(t'_1)$ 为球心半径为 $r=(t_2-t'_1)c$ 的球面 S_r 的能量。由于这一部分的能流与半径有关，所以(17)式并不代表着真正的电磁能量的辐射。通过球面的能流量是否与 r 有关是关键性的。因为如果自有场也像电偶极辐射的形式向外泼水

般地传播的话,则通过球面的能流应该与 r 无关。(17)式与 r 有关,表明自有场是不可能泼水般地泼出去的,自有场像影子一样与粒子本身无法分离。

假设我们考虑的粒子是电子,对电子我们可以经典地认为具有经典半径 $r_e=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2}$,假设电子内部的负电荷是均匀分布的。电子内部的负电荷能聚集在一起肯定有其他更强的非电磁相互作用参与。也就是说一种纯电磁的电子模型必然有某种缺陷。迄今为止并未发现电子具有激发态(内部结构),一个电子发射或吸收一个光子之后,仍然是一个普通电子,只不过它的动能不同而已。所以当有电磁能量通过电子的经典外表面时,电子的动能将有相应的改变。然而(17)式是从点电荷的自有场计算的,当 $r\to 0$ 时自有场发散,(17)式也发散,所以我们不能用(17)式来分析自有场对 $r\to 0$ 时的任何性质。(17)式与 r^2 成反比,与 v_1^2 成正比($\beta_1\approx 0$),显然,当电子匀速向右运动时整个空间中的自有场与粒子一起以速度 v_1 向右运动。在 t_2 时刻电子处在 $x_{q_1}(t_2)$ 处,t'_1 时刻产生的自有场在 t_2 时刻刚好传到 S_r 球面上。显然 S_r 右半球面上自有场较左半球面上的自有场要强。所以在电子以 v_1 运动时;整个空间中的自有场以 $\boldsymbol{v}_1$ 向右平移,由于右边强的自有场流出了 S_r 而左边弱的自有场流入了 S_r,故(17)式中能流大于零,并且当 $v_1=0$ 时(17)式为零,正好表明自有场不再移动的缘故。对自有场能量密度,$w=\frac{1}{2}\epsilon_0 E_1^2+\frac{1}{2\mu_0}B_1^2$,其中两项不等。(17)式与粒子的加速度毫无关系。

(18)式也与 r 有关,表明自有场与辐射场组成的能流同样不能代表真正的电磁能量的辐射。在(18)式中取 $r\to 0$ 时发散,表明用(18)速时由于粒子的速度变化要引起自有场分布的改变。当 $\dot{v}_1=0$ 时,自有场无须重新分布,故(18)式为零.当 $v_1=0$ 时,无任 $\dot{v}_1$ 多大(18)式也为零,所以(18)式不代表电磁辐射。

(19)式与 r 无关,所以它才真正代表着电磁能量的辐射。并且(19)式恰好为洛伦兹不变量,这正好与相对性原理符合。因为 $w_\mu=\frac{dU_\mu}{d\tau}=(\gamma\frac{d}{dt}(\gamma\boldsymbol{v}),ic\gamma\frac{d\gamma}{dt})=(\gamma^2\boldsymbol{a}+\gamma^4\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{c^2}\boldsymbol{v},i\gamma^4\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{c})$;故 $w_\mu w_\mu=\gamma^6[\dot{v}^2-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}})^2]$;

运动带电粒子的瞬时辐射阻尼力必须与粒子的瞬时速度矢量反方向,这是能量守恒定律对带电粒子瞬时辐射阻尼力的基本要求。当带电粒子向外辐射能量时,瞬时阻尼力对粒子必须作负功以保持能量守恒,在无其它外力作用情况下,带电粒子辐射能量必减小其动能。$\boldsymbol{F}_S\cdot\boldsymbol{v}=-P_{总}(t'_1)=-\frac{8\pi}{3c\mu_0}(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r})^2\frac{\beta_1^2}{1-\beta_1^2}-\frac{q_1^2\beta_1\dot{v}_{1/\!/}}{3\pi\epsilon_0 rc(1-\beta_1^2)^2}-\frac{q_1^2\gamma_1^6}{6\pi\epsilon_0 c^3}[\dot{v}_1^2-(\frac{\boldsymbol{v}_1\times\dot{\boldsymbol{v}}_1}{c})^2]$

$$\boldsymbol{F}_S=-\frac{8\pi}{3c\mu_0}(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r})^2\frac{\beta_1^2}{1-\beta_1^2}\frac{\boldsymbol{v}_1}{v_1^2}-\frac{q_1^2\beta_1}{3\pi\epsilon_0 cr(1-\beta_1^2)}\frac{\dot{\boldsymbol{v}}_1}{v_1}-\frac{q_1^2\gamma_1^6}{6\pi\epsilon_0 c^3}[\dot{\boldsymbol{v}}_1^2-(\frac{\boldsymbol{v}_1\times\dot{\boldsymbol{v}}_1}{c})^2]\frac{\boldsymbol{v}_1}{v_1^2};$$

其中与 r 有关的项不能计入,则

$$\boldsymbol{F_S}\approx-\frac{q_1^2\gamma_1^6}{6\pi\epsilon_0 c^3}[\dot{v}_1^2-(\frac{\boldsymbol{v}_1\times\dot{\boldsymbol{v}}_1}{c})^2]\frac{\boldsymbol{v}_1}{v_1^2}。$$

5.相对论与牛顿第三定律的局限性

引力相互作用的推迟作用特征与电磁相互作用类似,对两静止的质点之间的引力相互作用,虽然作用力与反作用力大小相等方向相反,且作用在同一条直线上,但由于越过一定空间距离的相互作用需要一定的传递时间,从而导致作用力与反作用力不能同时产生同时消失,按照狭义相对论同时是相对的,作用力和反作用力同时存在与同时消失不可能对所有惯性系成立,可见牛顿第三定律在相对论力学中只要作用力与反作用力的作用点不重合便与狭义相对性原理相矛盾。另外,对相隔一定距离的两运动的质点之间的引力相互作用,假设在某惯性系 $\sum'$ 中其作用力与反作用力方向在同一直线上。那么,在任何其它惯性系中相应的作用力与反作用力肯定不在同一直线上,因而再次出现牛顿第三定律与狭义相对性原理之间的矛盾。

在 $\sum'$ 系中由 $u'_1=0$ 和 $u'_2=0$,四维引力矢量为 $\boldsymbol{K}'_1=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2_1}{c^2}}}\boldsymbol{F}'_1=\boldsymbol{F}'_1$,$K'_{1\mu}=(\boldsymbol{K}'_1,0)$,$K'_{2\mu}=(\boldsymbol{K}'_2,0)$,$\boldsymbol{F}_{1/\!/}=\boldsymbol{F}'_{1/\!/}$,$\boldsymbol{F}_{1\perp}=\boldsymbol{F}'_{1\perp}\frac{1}{\gamma}$,其中下标"$/\!/$"表示平行于 x 轴,下标"$\perp$"表示垂直于 x 轴。由于 $\boldsymbol{F}'_1$ 与 $\boldsymbol{F}'_2$ 的方向在两质点的连线上,于是有 $\frac{F'_{1/\!/}}{F'_{1\perp}}=\frac{\Delta r'_{/\!/}}{\Delta r'_{\perp}}$,其中 $\Delta r'_{/\!/}=|x'_1-x'_2|$,$\Delta r'_{\perp}=\sqrt{(y'_1-y'_2)^2+(z'_1-z'_2)^2}$;这样在 $\sum$ 系中 $\frac{F_{1/\!/}}{F_{1\perp}}=\gamma^2\frac{\Delta r_{/\!/}}{\Delta r_{\perp}}\neq\frac{\Delta r_{/\!/}}{\Delta r_{\perp}}$,即 $\sum$ 系中 $\boldsymbol{F}_1$ 的方向不在两质点的连线上。同样,$\frac{F_{2/\!/}}{F_{2\perp}}=\gamma^2\frac{\Delta r_{/\!/}}{\Delta r_{\perp}}\neq\frac{\Delta r_{/\!/}}{\Delta r_{\perp}}$,在 $\sum$ 系中 $\boldsymbol{F}_2$ 的方向也不在两质点的连线上。但是,当我们取非相对论近似,则 $\gamma^2=1$,$\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$ 便都在两质点的连线上,并且,取了非相对论近似推迟作用时间也可忽略了,

即$\frac{r}{c} \approx 0$这样，结论是非相对论近似下牛顿第三定律成立。在相对论力学中，只有当作用力与反作用力的作用点重合情形牛顿第三定律才能成立。

6. 守恒定律与牛顿第三定律的关系

动量守恒定律、能量守恒定律和角动量守恒定律是指一孤立系统的总动量、总能量和总角动量在系统的内力作用下是不会改变的。对于有万有引力相互作用的两个质点系统，严格地讲在两质点的运动过程中，由于两质点之间通过中间媒介场来传递相互作用的推迟作用效应，两质点间的作用力与反作用力并不服从牛顿第三定律。在这种严格的意义上实质是指中间媒介场也具有动量、能量和角动量，并且中间媒介场的总动量、总能量和总角动量是随时间变化的。即此种情况下仅仅两质点不构成孤立系统。

假如中间媒介场的总动量、总能量和总角动量不随时间变化或近似地可以认为不随时间变化，则等价于近似认为两质点可以作为一个孤立系统，作为孤立系统的两个质点之间的引力相互作用服从牛顿第三定律，这里等价于取了非相对论近似。而当不能把两个质点当作孤立系统时相应地牛顿第三定律便不成立，此时是指相对论情形。以此对应地有对于孤立系统能量、动量和角动量守恒定律成立，非孤立系统则能量，动量和角动量守恒定律不成立。可见，在非相对论力学中，牛顿第三定律是动量守恒、能量守恒和角动量守恒定律的必然推论。然而，从第4节和第5节中的讨论可知，在相对论情形下，牛顿第三定律一般是不成立的。而动量守恒定律、能量守恒定律和角动量守恒定律，对于孤立系统便总是成立。所以，牛顿第三定律的使用是有局限性和近似性的，而守恒定律则是普适的。

参考文献：

[1]邵建军.运动带电粒子新的辐射阻尼力与电磁相互作用.培训与研究,1998(5):14.

[2] A. O. Barut. Electrodynamics and Classical Theory of Fields & Particles(New York: Dover Publications, Inc, 1980:184

[3] G. N. Plass. Classical Electrodynamics Equations of Motion with Radiative Reactions. Rev. Mod. Phys. 33, (1961):37

[4] J. A. Wheeler and R. P. Feynman. Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation. Revs. Mod. Phys. 17, (1945):157.

Limitations of Newton's Third Law and the Relativity

SHAO Jian-jun

(Department of Physics, Hubei University of Education, Wuhan Hubei 430060, China)

Abstract: It discussed whether the electromagnetic retarded interaction and the gravitational interaction obey the Newton's third law or not; The relation between the limitations of Newton's third law and the relativity is pointed out, and also the relation between the Newton's third law and the law of conservation of energy and momentum is discussed.

Key words: Newton's third law; relativity; law of conservation of energy and momentum