微积分A　　晏平. 周四8:00~10:00, 荷二219.

数学作业纸写作业, 需装订
11月9日(周六) 19:20-21:20

17世纪后半叶 直观微积分 Newton & Leibniz
19世纪上半叶 极限理论 Cauchy & Weierstrass
19世纪下半叶 实数的连续性 Cantor & Dedekind
(确界原理)

第一章 实数与极限

1.1 实数系

Thm. 有理数在$\mathbb{R}$中稠密性. ?

$\forall a,b\in\mathbb{Q},\ a<b,\ \exists r\in\mathbb{Q},\ s.t.\ a<r<b$

Def. 上界. 下界. 有界. 无界

任何~~数~~实数都是空集的上界/下界.

Def. 最大值. 最小值

A为$\mathbb{R}$的非空子集, 若$\lambda\in A$且λ为A的一上界, 则λ为A的最大值

记为 $\lambda=\max A=\max\limits_{x\in A}x$　　$\mu=\min A=\min\limits_{x\in A}x$　　supremum infimum

Def. 上确界 sup A. 下确界 inf A.　inf? ✓　~~superior~~ ~~inferior~~

$\xi=\sup A=\sup\limits_{x\in A}x$.　$\eta=\inf A=\inf\limits_{x\in A}x$　　即 最小上界

△ $\xi=\sup A \iff \xi$是A的上界, 且$\forall\varepsilon>0,\ \exists x\in A,\ s.t.\ x>\xi-\varepsilon$

$\eta=\inf A \iff \eta$　下　$x<\eta+\varepsilon$

Thm. 确界原理 - 实数的连续性　? 公理 ✓

非空有上(下)界的集合必有上(下)确界.

Ex. $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2\le 2\}$.

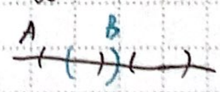
$\sup A=\max A=\sqrt{2},\ \inf A=\min A=-\sqrt{2}$

$B=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2\le 2\}$

$\sup B=\sqrt{2},\ \inf B=-\sqrt{2}$, max B与min B不存在.

Remark. 若非空集合A无上界(下), 则记 $\sup A=+\infty$
$\inf A=-\infty$

$A\cap B\neq\varnothing$: $\sup(A\cap B)\le\min\{\sup A,\sup B\}$



1.2. 数列极限的概念

$\{a_n\}$: $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 必须有无穷多项!

Def. 若$\exists A\in\mathbb{R}$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$, s.t. 当$n>N$时, 有$|a_n-A|<\varepsilon$, N依赖$\varepsilon$选出

则称$\{a_n\}$有极限A / $\{a_n\}$收敛于A. 记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 或 $a_n\to A\ (n\to\infty)$

若$\{a_n\}$无极限, 称其发散.

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\{a_n\}$中只有有限项落在$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$之外. 等价定义

① Ex. $0<|q|<1$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$

Proof. $\forall\varepsilon>0$ 为使 $|q^n-0|<\varepsilon$, 因$0<|q|<1$, 只要 $n>\log_{|q|}\varepsilon$ 即可.

取 $N=[\log_{|q|}\varepsilon]+1$. 当$n>N$时, 有$n>\log_{|q|}\varepsilon$, 即$|q^n-0|<\varepsilon$

由极限定义可知 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

② Ex. $a_n=\dfrac{2n^2+n+2}{n^2-3}$ 证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$

Proof. $|a_n-2|=\dfrac{n+8}{n^2-3}$ P5.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}e^{a_n}=e^A$, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln A$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits^n a_i}{n}=A$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left\{\dfrac{\sum\ln a_i}{n}\right\}=\exp\{\lim\ln a_i\}=\exp\{\ln\lim a_i\}=A$

注意: 需满足 $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A>0$. ✓

Question: $a_n>0$, $A=0$ 时结论是否成立? 如何证明??

Def. 称$\{a_n\}$发散到$+\infty$, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 若$\forall M>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, 当$n>N$时, $a_n>M$

$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}<\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

证明: $\dfrac{a_1+\cdots+a_4}{4}=\dfrac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}$

$\geq \cancel{\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}}}$

$\geq\dfrac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}\geq\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}}$

$=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$

2^n 反推: 多余数取 $\dfrac{\sum a_i}{n}$.

(9.18)

1.3 收敛列的性质

Prop 1. 收敛列的极限唯一.

~~Co~~ Collary 若 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a \neq b = \lim\limits_{k\to\infty} a_{m_k}$, 则 a_n 发散.? e.g. $(-1)^n$

Prop 4. 收敛列一定有界.

Def. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 则 $\{a_n\}$ 为无穷小数列

(9.20)

Prop 7. 极限的四则运算 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛.

$\lim(ca_n) = c\lim a_n$, $\forall c \in \mathbb{R}$

$\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$

$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

$\lim b_n \neq 0$ 时. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$

推广: $(+\infty)+(+\infty)$ 可
$0\cdot(+\infty)$ 不可 $\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} & 奇 \\ n & 偶 \end{cases}$

$\frac{1}{n^2}$, $\begin{cases} n & 奇 \\ n^3 & 偶 \end{cases}$

(3) 证: $\{b_n\}$ 收敛有界, $\exists M>0$, s.t. $|b_n|<M$ $\forall n$.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N_1, N_2$ s.t.

$|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall n > N_1$

$|b_n - b| < \varepsilon$, $\forall n > N_2$

$\left(a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n,\ b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \right)$

当 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时.

$$|a_n b_n - ab| \le |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab|$$
$$\le |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|$$
$$< \varepsilon \cdot M + |a|\cdot\varepsilon = (M+|a|)\varepsilon$$

(4) $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n\cdot b - b_n\cdot a}{b\cdot b_n}\right| \le ?$ $\ge ?$

$\varepsilon_0 = \frac{|b|}{2}$, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时 $|b_n - b| < \varepsilon_0$.

此时 $|b_n| = |b_n - b + b| \ge |b| - |b_n - b|$
$> |b| - \varepsilon_0 = \frac{|b|}{2}$.

Prop 8. 夹挤原理

EX. 证 $b>0$, $a>1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n} = 0$ (幂函数增长 $\lor$ < 指数函数)

法一: $\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left(\ln\frac{n^b}{a^n}\right) = \exp\left(\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n^b}{a^n}\right) = 0$. ~~$\exp(\ln\lim\frac{n^b}{a^n})$~~ (不要懂)

$$\ln\frac{n^b}{a^n} = \ln\frac{(\sqrt[n]{n})^{nb}}{(\sqrt[b]{a})^{nb}} = nb(\ln\sqrt[n]{n} - \ln\sqrt[b]{a}) = +\infty\cdot(0 - \ln\sqrt[b]{a}) = -\infty$$

法二: (1) $b=k$ 为 $\boxed{整数}$ 时. 令 $d = a-1$, 则 $d>0$.

$$0 < \frac{n^k}{a^n} < \frac{n^k}{(1+d)^n} < \frac{n^k}{C_n^{k+1} d^{k+1}} = \frac{n^k\cdot(k+1)!}{n\cdot(n-1)\cdots(n-k)d^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{n(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})d^{k+1}}$$

由夹挤原理, …… $=0$.

$\lim \cdots = 0$. 极限趋于1, 或用 $1-\frac{k}{n} > \frac{1}{2}$ 分子加 2^k 均可.

(2) $b=0$ 不是整数时.

$0 < \frac{n^b}{a^n} < \frac{n^{[b]+1}}{a^n}$, 由(1)和夹挤原理 …… $=0$.

重要极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=0\ (a>1, \cancel{b>0})$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$

1.4 单调数列

Def. 单调递增，严格~

Thm. (单调收敛原理) 单调有界必收敛.

Proof. $\{a_n\}$ 单增且有上界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sup\{a_n\}$

Rem. $\{a_n\}$ 有上界，从某项后单增 $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ 收敛，但极限不一定是 $\sup\{a_n\}$

$\{a_n\}\uparrow$，无上界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\}=+\infty$

Lemma (Bernoulli 不等式) 设 $x\geq-1$，$n\in\mathbb{N}^*$，则 $(1+x)^n\geq1+nx$.

proof 可用归纳法. $(1+x)^{n+1}\geq(1+nx)(1+x)\geq1+(n+1)x$.

Ex. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在. ①证单↑ ②证有上界.

思路？

① $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}$

$(n\geq2)\quad=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\geq\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n^2-n+1}{n^2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n^3+1}{n^3}>1$

② $a_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k\frac{1}{n^k}=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}$

$\leq1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\leq2+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=2+\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=3-\frac{1}{n}<3.$

Rem. $\lim(1+\frac{1}{n})^n=e$

$\lim n\ln(1+\frac{1}{n})=1$

$\lim\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=1$，$\lim\frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}=1$，只需证 $\lim(1-\frac{1}{n})^{-n}=e$

☆ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$ 如何证明？ HINT 假一 $\geq$？ $a_n>c_n$，$\lim a_n\geq\lim c_n$，$e\geq b_m$

Ex. 设 $b\in\mathbb{R}$，$a>1$，证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=0$.

令 $x_n=\frac{n^b}{a^n}$. $\lim\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^b=\frac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty}\exp\{b\ln\frac{n+1}{n}\}=\frac{1}{a}<1$

不须证每项单调性，只需某项后单调!

由极限保序性，$\exists N$ s.t. $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$，$\forall n>N$. $\{x_n\}$ 有下界 0 且某项后单减

$\Rightarrow\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

又 $x_{n+1}=\frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^b x_n$.

两边取极限: $x=\frac{1}{a}\cdot1\cdot x\Rightarrow x=0$.

☆ ① 证极限存在. ② 用递推式两边取极限，解方程.

e.g. $x_n=(-1)^n$. $x_{n+1}=-x_n$ 设极限为 x.

$x=-x\Rightarrow x=0$. $\boxed{\times}$

$\triangleq$ $\overset{def}{=}$ $:=$

均表示定义为某式.

Ex. $a_1=1$, $a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Proof. $a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$

$y(x)=1+\frac{1}{x}\ (x>0)$ ↓.

$$\begin{matrix} a_1=1 & \longrightarrow & a_2 & \longrightarrow & a_3 \\ \wedge & & \vee & & \wedge \\ a_3=\frac{3}{2} & \longrightarrow & a_4 & \longrightarrow & a_5 \end{matrix}$$

$a_{2n}\downarrow$ $a_{2n+1}\uparrow$, 且 $1\le a_n\le 2$.

由单调收敛原理可设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=b$.

$a_{n+2}=1+\frac{a_n}{1+a_n}$ 两边取极限　由极限的保序性 $1\le a\le 2$, $1\le b\le 2$.

令 $n=2m\to+\infty$, 得 $a=1+\frac{a}{1+a}$, $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍)

同理, 令 $n=2m+1\to\infty$ 得 $b=a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ (记为A)

$(1+\frac{1}{n})^n=1+\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k\frac{1}{n^k}=1+\frac{(n-1)\cdots(n-k)}{k!\cdot n^k}<\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n<A$ 　即 $e\le A$

任取m. 对 $n>m$. $(1+\frac{1}{n})^n>1+\sum\limits_{k=1}^{m}C_n^k\frac{1}{n^k}=1+\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})$ 设为 C_n

$\lim\limits_{n\to\infty}C_n=\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$ 　$\because (1+\frac{1}{n})^n>C_n$

$\therefore \lim(1+\frac{1}{n})^n>\lim C_n$ 即 $e>\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$

$\forall m$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<e$ 故 $A\le e$ $\Rightarrow A=e$

$\lim(1+\frac{1}{n})^n=e$, $\lim n\ln(1+\frac{1}{n})=1$, $\lim\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=1$, $\lim\frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}=1$

9.25

Thm. Stolz定理

(1) $\begin{cases}\{b_n\}\text{严格}\uparrow\\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A\end{cases}\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$

(2) $\begin{cases}\{b_n\}\text{严格}\downarrow(\text{或}\uparrow)\\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A\end{cases}\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$

proof (1) $|\frac{a_n}{b_n}-A|=|\frac{a_n-Ab_n}{b_n}|$ → 目标: 证其≤? ; $\to+\infty$

$\lambda_n\triangleq\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}-A\to 0$.

$\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n>N$, 有 $|\lambda_n|<\varepsilon$.

$$\begin{cases} a_n-Ab_n=a_{n-1}-Ab_{n-1}+\lambda_n(b_n-b_{n-1})\\ \quad\vdots\\ a_{N+1}-Ab_{N+1}=a_N-Ab_N+\lambda_{N+1}(b_{N+1}-b_N)\end{cases}$$

Σ得

$a_n-Ab_n=a_N-Ab_N+\lambda_n(b_n-b_{n-1})+\cdots+\lambda_{N+1}(b_{N+1}-b_N)$

$b_n\uparrow$ 则 $|a_n-Ab_n|\le|a_N-Ab_N|+\varepsilon(b_n-b_N)$

$|\frac{a_n}{b_n}-A|\le|\frac{a_N-Ab_N}{b_n}|+\varepsilon|\frac{b_n-b_N}{b_n}|$, $\forall n>N$

$b_n\uparrow+\infty$, 则 $\exists M>N$, s.t.

$\frac{|a_N-Ab_N|}{|b_n|}<\varepsilon$, $\frac{|b_n-b_N|}{|b_n|}\le 1+|\frac{b_N}{b_n}|\le 2$, $\forall n>M$

于是 $|\frac{a_n}{b_n}-A|\le 3\varepsilon$.

(2) $\forall\varepsilon>0, \exists N, s.t.$

$$A-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<A+\varepsilon, \forall n>N$$

$\{b_n\}$严格↓，则

$(A-\varepsilon)(b_{n-1}-b_n)<a_{n-1}-a_n<(A+\varepsilon)(b_{n-1}-b_n)$

$\Rightarrow (A-\varepsilon)(b_{n+m-1}-b_{n+m})<\cdots\cdots \quad \forall n>N, \forall k>0.$

求和，$(A-\varepsilon)(b_n-b_{n+k})<a_n-a_{n+k}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{n+k})$

任意固定 $n>N$，令 $k\to+\infty$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ 得，

$$(A-\varepsilon)b_n\leq a_n\leq(A+\varepsilon)b_n, \forall n>N.$$

$b_n\downarrow 0$，故 $b_n>0$。

$$A-\varepsilon\leq\frac{a_n}{b_n}\leq A+\varepsilon, \forall n>N.$$

Rem. Stolz 其他条件不变，$\lim\frac{a_n}{b_n}=A \not\Rightarrow \frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$

考虑 $\lim\frac{\sin n}{n}$ 与 $\lim(\sin(n+1)-\sin n))$

$=2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{2n+1}{2}$

1.5 实数系的n个基本定理

以下五个定理相互等价

Thm.(确界原理) 非空有上界的集合必有上确界。

Thm.(单调收敛原理) 单增有上界的数列必收敛。

Thm.(闭区间套定理) 若闭区间列 $[a_n,b_n]$ 满足

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

则 $\exists!\ \xi\in\mathbb{R}$ s.t. $\xi\in\bigcap\limits_{n\geq1}[a_n,b_n]$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$

Thm.(Bolzano-Weirstrass 定理) 有界列必有收敛子列

Thm.(Cauchy 收敛原理) 收敛列 $\Leftrightarrow$ Cauchy 列

闭区间套 proof. $a_n\uparrow, b_n\downarrow$ $a_1\leq a_n\leq b_n\leq b_1$

$\therefore \lim a_n, b_n$ 存在. $\because \lim(b_n-a_n)=0$.

$\therefore \lim a_n=\lim(b_n-a_n)+\lim b_n=\lim b_n\triangleq\xi$

若 $\exists a_k>\xi$ 由 $\{a_n\}\uparrow$，有 $a_n\geq a_k, \forall n>k$.

令 $n\to\infty$，k固定，两边取极限 $\xi\geq a_k$ 矛盾. $\Rightarrow a_n\leq\xi, \forall n$.

故 $\exists\ \xi\in\bigcap\limits_{n\geq1}[a_n,b_n]$ 同理 $b_n\geq\xi$.

证唯一性：若 η 满足 $a_n\leq\eta\leq b_n, \forall n$

由极限保序性 $\lim a_n\leq\eta\leq\lim b_n$ 即 $\xi\leq\eta\leq\xi \Rightarrow \xi$ 唯一 □.

N.B. 必须闭区间 eg. $(0,\frac{1}{n})$

Def.(Cauchy 列) $\{x_n\}$ 为柯西列 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$, s.t. $\forall n>N, m>N$, 有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$. s.t. $\forall n>N, p\in\mathbb{N}, |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

不是 $\Leftrightarrow \exists\varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n,m>N$, s.t. $|x_n-x_m|>\varepsilon$

Lemma. Cauchy列必为有界列

Cauchy优势：不涉及具体的极限 A，只涉及两项间的差。

9.27

Ex. $\lim_{n\to\infty}|x_n-x_{n+p}|=0,\ \forall p\in\mathbb{N} \overset{?}{\Rightarrow} \{x_n\}$为Cauchy列

No! 反例 $\{\sqrt{n}\}$ $\{\ln n\}$

Ex. $|x_n-x_{n+p}|\le \frac{p}{n},\ \forall p,n\in\mathbb{N} \overset{?}{\Rightarrow} \{x_n\}$为Cauchy列

No! $|x_n-x_{n+p}|\le\frac{p}{n}\cdots<\varepsilon$ 反例 $\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\}$

Ex. $|x_n-x_{n+p}|\le\frac{p}{n^2},\ \forall p,n\in\mathbb{N} \overset{?}{\Rightarrow} \{x_n\}$为Cauchy列

✓. $p=1$时条件最强 $|x_n-x_{n+1}|\le\frac{1}{n^2},\ \forall n$ 最强e.g. $\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{2}{n^2}$

$|x_n-x_{n+p}|\le\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)^2}$

$\le\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+p-1}<\frac{1}{n-1}$，……

Ex. $\exists M>0$, s.t. $\sum_{k=1}^{n}|x_{k+1}-x_k|\le M,\ \forall n \Rightarrow \{x_n\}$为Cauchy列

Proof. 令 $y_n=\sum_{k=1}^{n}|x_{k+1}-x_k|$, $n\in\mathbb{N}$

y_n单增，有上界 $M \Rightarrow y_n$收敛 $\Rightarrow y_n$为Cauchy列

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N$, s.t. $0\le y_{n+p}-y_n\le\varepsilon,\ \forall n>N,\ \forall p$.

$\therefore |x_{n+p}-x_n|\le y_{n+p-1}-y_n\le\varepsilon,\ \forall n>N+1,\ \forall p$. □

Ex. $0\le x_{n+m}\le x_n+x_m$. 则 $\inf_{n\ge1}\{\frac{x_n}{n}\}$存在，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\inf_{n\ge1}\{\frac{x_n}{n}\}$

Proof. $0\le\frac{x_n}{n}\le x_1$，则 $\inf_{n\ge1}\{\frac{x_n}{n}\}=A$存在.（有下界故有下确界）

$x_2\le 2x_1$

$x_3\le x_2+x_1\le 3x_1$

$A\Rightarrow$ 不用构造列……考虑 A 定义.

$\forall\varepsilon>0,\ \exists m$, s.t. $A\le\frac{x_m}{m}<A+\varepsilon$, ~~$\forall\varepsilon>0$~~

$\forall n>m$，有 $n=km+r$,（$k,r\in\mathbb{N}$且 $0\le r<m$）

☆ 则 $x_n\le kx_m+x_r$（记 $x_0=0$）

$\frac{x_n}{n}\le\frac{kx_m}{km+r}+\frac{x_r}{n}\le\frac{x_m}{m}+\frac{x_r}{n}$

（取 ~~x_{max}~~ $x_0\cdots x_r$ 中最大值，令 n 充分大）

$\exists N>m$, s.t. $\max_{0\le r<m}\{\frac{x_r}{n}\}<\varepsilon,\ \forall n>N$.

故 $A\le\frac{x_n}{n}\le A+2\varepsilon,\ \forall n>N$. □

Ex. $0<a<1$, $b\in\mathbb{R}$. 则 $x-a\sin x=b$ 有唯一解.

Proof $\boxed{\text{存在性}}$ 令 $x_0=b$, $x_{n+1}=b+a\sin x_n$. 欲征 $\{x_n\}$ 收敛到方程的解.

$$|x_{n+p}-x_n| = a|\sin x_{n+p-1}-\sin x_{n-1}|$$
$$\le a|x_{n+p-1}-x_{n-1}| \le \cdots$$
$$\le a^n|x_p-x_0|$$
$$(\le a^n(|b|+a+|x_0|)\ \ x_0\text{选取若任意})$$
$$= a^n|a\sin x_{p-1}| \le a^{n+1}$$

$|\sin x|\le|x|\le|\tan x|$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$|\sin\alpha-\sin\beta|\le 2|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}|$

$\le 2\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}=\alpha-\beta$

$0<a<1$. 故 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

$0\le|\sin x_n-\sin\xi|\le|x_n-\xi|$, 由夹挤原理. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin\xi$.

在 $x_{n+1}=b+a\sin x_n$ 中, 令 $n\to\infty$ 得

$\xi=b+a\sin\xi$, 则 ξ 为方程解.

$\boxed{\text{唯一性}}$ 设 $\eta=b+a\sin\eta$, 则

$|\xi-\eta|=a|\sin\xi-\sin\eta|\le a|\xi-\eta| \cancel{<|\xi-\eta|\ \text{矛盾}}$.

由 $0<a<1$ 得 $\xi=\eta$.

第二章 函数

2.1 函数的极限

Def. 函数在一点的极限 例.

$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$

$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

Def $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty\ (-\infty,\infty)$

$\forall M>0\ \exists\delta>0$, s.t. $f(x)>M$. $x\in U(x_0,\delta)$

$f(x)<-M$

$|f(x)|>M$.

Def. 函数在无穷远点的极限

设 $|x|>a$ 时 f 有定义, $A\in\mathbb{R}$. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$, s.t.

$|f(x)-A|<\varepsilon$. $\forall|x|>M$. 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

2.2 函数极限的性质

夹逼 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$\because |\sin x|\le|x|\le|\tan x|$

$\therefore \cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ 故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

prop. 单调收敛原理

$f(x)$ 在 (a,b) 单增 $\underbrace{}_{有上界}$ 则 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_{a<x<b} f(x)$

Proof. 上确界 $A = \sup\{f(x) : x\in(a,b)\}$

$\forall \varepsilon>0, \exists x_1\in(a,b)$ s.t. $f(x_1) > A-\varepsilon$

且 $f(x) \leq A$. $\forall x\in(a,b)$

$f\uparrow$. 则 $\forall x\in(x_1,b)$. 有 $A-\varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq A$.

故 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$.

prop. 复合函数极限 P44

9.29

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = A\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A.$$

proof. $\forall \varepsilon>0, \exists R>0$ s.t. $|f(u)-A|<\varepsilon, \forall u>R$

对此 R, $\exists \delta>0$, s.t. $g(x)>R$, $\forall x\in U(x_0,\delta)$

从而 $|f(g(x))-A|<\varepsilon$. $\forall x\in U(x_0,\delta)$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^b}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a y^{\frac{1}{b}}}{y} = \frac{1}{b}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln y}{\ln a}}{y} = \frac{1}{b\ln a}\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}.$$

$(a>1, b>0)$. = 成立 仅当后面算出极限.

$\Rightarrow$ 也 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$. $0 < \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln([x]+1)}{[x]} \leq \frac{\ln 2}{[x]} + \frac{\ln[x]}{[x]}$, $\forall x>1$.

夹挤得. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$. $\lim = 0+0=0$.

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^b} = 0$. 幂函数 > 对数函数

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} x^b \log_a x = 0 \ (a>1, b>0)$.

$$\boxed{u(x)^{v(x)} = a^b}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x} = 0 \ (a>1, b>0)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{b\ln x - x\ln a} = \lim_{x\to+\infty} e^{\left(\frac{b\ln x}{x} - \ln a\right)\cdot x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\ln a\cdot x} = e^{-\infty} = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

函数极限的柯西收敛原理 P47 (1) $\Leftrightarrow$ (3)

用数列极限来研究函数的极限 (2) $\Leftrightarrow$ (3)

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A$，则 $\exists \varepsilon_0, \forall n\in\mathbb{N}, \exists x_n \in U(x_0,\frac{1}{n})$, s.t.

$|f(x_0)-A| > \varepsilon_0$.

此时 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. 但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ 矛盾于 $|f(x_n)-A|>\varepsilon_0$.

Thm $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=b$, a^b有意义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$.

Proof. $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim v(x)\lim \ln u(x)} = e^{b\ln a} = a^b$ □

$\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x>0,x_0>0)}} \ln x = \ln x_0$ 函数中成立证明

$\forall \{x_n\}\to x_0$, 有 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x_n} = e^{x_0}$, $\ln x_n = \ln x_0$

Rem. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{u(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} u(x)}$

2.4 无穷小量与无穷大量

Def. 无穷小量. 无穷大量. $f(x)\to\infty\ (x\to x_0)$

Def. 高阶无穷小量 $f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0\right)$

小写o

同阶 $=c$. $=1$: 等价

$f(x)\sim g(x)$

若 $\exists M>0, \delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 有 $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<M$.

则记为 $f(x)=O(g(x))\ (x\to x_0)$ 大写O. → 有界量.

Prop. $x\to x_0$ 时 $f(x)=o(1)$, $g(x)=O(1)$，则 $f(x)g(x)=o(1)$ 无穷小×有界=无穷小

背. $(1+x)^a-1\sim ax$.

Rem. $x\to x_0$ 时, $f(x)$, $g(x)$ 等价无穷小量，则 $f(x)=g(x)+o(g(x))$, $x\to x_0$.

看PPT例题!

10.9

$o(x^3)=o(x^2)$ ✓ $(x\to 0)$

$o(x^2)\ \cancel{=}\ o(x^3)$ 等号有方向!

$o(x)+o(x^2)=o(x)$

$o(x^2)\cdot o(x^3)=o(x^5)$

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim e^{\frac{\ln\sin x}{\ln x}}=\lim e^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}+\ln x}{\ln x}}=e^{\frac{\ln 1}{\ln x}+1}=e^{0+1}=e.$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim e^{\sin x\ln x}=\lim e^{\frac{\sin x}{x}\cdot x\ln x}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}(e^x+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\left((1+e^x+2x-1)^{\frac{1}{e^x+2x-1}}\right)^{\frac{e^x+2x-1}{x}}=e^{\lim 2+\frac{e^x-1}{x}}=e^3$$

等价因子替换法.

$$\lim\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(x+1)}\ \cancel{=}\ \lim\frac{x-x}{x^2\ln(x+1)}=0$$

$$=\lim\frac{x}{x^2\ln(x+1)}-\lim\frac{x}{x^2\ln(x+1)}$$

lim 存在才可相减.

10.11 2.6 闭区间上连续函数的性质 / 2.5 函数的连续与间断

f 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow$ f 在 x_0 左.右连续

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

第一类间断点 $\begin{cases}\text{可去} \sim \lim\limits_{x\to x_0}f(x)\text{ 存在}\\ \text{跳跃}\ \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\end{cases}$

第二类 … $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 不存在或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 不存在

有时默认 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 连续. def $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

Thm. 单调函数的间断点一定是跳跃间断点.

Proof. 设 $f(x)\nearrow$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在, 且 $\leq f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\sup\limits_{x<x_0}f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在, 且 $\geq f(x_0)$.

连续的四则运算. P59. 复合 …

闭区间上连续函数的性质　　$f\in C(a,b)$ 表示 f 在 (a,b) 上~~每一点~~连续

f 在 (a,b) 上连续

$+f$ 在 a 右连，在 b 左连 $\Rightarrow f\in C[a,b]$

Thm（零点定理）$f\in C[a,b]$，$f(a)\cdot f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f(\xi)=0$.

不妨设 $f(a)<0<f(b)$，二分区间

$f(\frac{a+b}{2})<0$ 取右，≥ 0 取左 $\Rightarrow f(a_1)<0$，$f(b_1)\geq 0$.　$b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$

闭区间套（$b_n-a_n\to 0$，$[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$）

$\Rightarrow \exists\xi\in\bigcap\limits_{n\geq 1}[a_n,b_n]\subset[a,b]$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$

$f\in C[a,b]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)$　$\Rightarrow f(\xi)=0$.

数列极限保序 $f(\xi)\leq 0$　$f(\xi)\geq 0$

Thm（介值定理）$f\in C[a,b]$，$f(a)\neq f(b)$，则对 $\forall$ 介于 $f(a)$，$f(b)$ 间的 c，

$\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f(\xi)=c$

$g(x)=f(x)-c$　用上一定理

Thm　f 在 (a,b) 单调，$f\in C(a,b)\Leftrightarrow J$ 构成一区间.

J: f 的值域

记 $<a,b>$ 为 (a,b)，$[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)$ 中的一个.

Thm（有界性定理）$f\in C[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 有界.

Def (1) 内点 $x_0\in A\Rightarrow\exists\delta>0$, s.t. $N(x_0,\delta)\subset A$

(2) 开集 $A\Rightarrow\forall x_0\in A$，有 x_0 为 A 的内点

(3) 闭集 $A\Rightarrow\mathbb{R}\setminus A$ 为开集

$(-\infty,+\infty)$ 开闭　$\varnothing$ 闭、开

$[a,+\infty)$ 闭　　$(-\infty,a)$ 开

$(-\infty,a]$ 闭　　$(a,+\infty)$ 开

Thm（最大最小值定理）$f\in C[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 上有最大、最小值. ~~$\exists\xi$ 开~~

Def（一致连续）f 在区间 I 上有定义，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t.

$|f(u)-f(v)|<\varepsilon$，$\forall|u-v|<\delta$，$u,v\in I$

不一致连续不一定值取到无穷！e.g. $\sin\frac{1}{x}$

10.16 f在I上不一致连续

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0, \forall \delta>0, \exists u,v\in I$, s.t. $|u-v|<\delta$, $|f(u)-f(v)|>\varepsilon_0$.

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0, \forall n\in\mathbb{N}, \exists u_n, v_n\in I$, s.t. $|u_n-v_n|<\frac{1}{n}$, $|f(u_n)-f(v_n)|>\varepsilon_0$.

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0$, $\exists I$中点列$\{u_n\}$, $\{v_n\}$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0$, $|f(u_n)-f(v_n)|>\varepsilon_0$

Thm.(一致连续性) $f\in C[a,b]$, 则f在$[a,b]$上一致连续. 闭区间!

Proof. 反证. 假设f在$[a,b]$不一致连续 则$\exists \varepsilon_0>0$及$[a,b]$中点列$\{x_n\}\{y_n\}$ s.t.
$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$. $|f(x_n)-f(y_n)|>\varepsilon_0$, $\forall n$. (*)

由列紧性定理,(Bolzano-Weirstrass), $\{x_n\}$有收敛子列, 设$\lim\limits_{j\to\infty}x_{n_j}=\xi\in[a,b]$

而$\lim\limits_{j\to\infty}(x_{n_j}-y_{n_j})=0 \Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty}y_{n_j}=\xi$

由f的连续性得$\lim\limits_{j\to\infty}f(x_{n_j})=\lim\limits_{j\to\infty}f(y_{n_j})=f(\xi)$ 与(*)矛盾.

第三章 函数的导数

3.1 导数与微分的概念

Def. 导数，左右导数

$$f'(x_0) \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Thm. f 在 x_0 可导 $\Rightarrow$ f 在 x_0 连续

Proof. 记 $\rho(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0} \rho(x) = 0$.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \rho(x)(x-x_0)$$

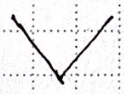
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x\to x_0} f'(x_0)(x-x_0) + \lim_{x\to x_0}\rho(x) \lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f(x_0).$$

$\therefore f(x)$ 在 x_0 连续

Ex. $f(x) = x^2 D(x)$ 可导性质？ $D(x)$ 为 Dirichlet 函数.

$f'(0) = 0$. 其余点不连续 $\longrightarrow$ 不可导.

Ex. 连续不一定可导. $f(x) = |x|$. $x=0$ 处.



Def. 记 $\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ 若存在常数 α. s.t.

$$\Delta f(x_0) = \alpha \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

则称 f 在 x_0 可微 并称 $df(x_0) \triangleq \alpha\Delta x \triangleq \alpha dx$ 为 f 在点 x_0 的微分.

可推广到多元函数

Thm. f 在 x_0 可微 $\Leftrightarrow$ f 在 x_0 可导. P72.

☆

$f(x) = (\arcsin x)^2$ 求 $f^{(n)}(0)$ 　　重算!

$f' = 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\, f' = 2\arcsin x$

$\cancel{f''} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} f' + \sqrt{1-x^2}\, f'' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow -x f' + (1-x^2) f'' = 2$ 　　$\therefore n=0$ 不对

左右求 n 次导 ($n \geq 1$) 　$-x f^{(n+1)} - n f^{(n)} + (1-x^2) f^{(n+2)} - n\cdot 2x f^{(n+1)} - 2\frac{n(n-1)}{2} f^{(n)} = 0$

$\Rightarrow (1-x^2) f^{(n+2)} - (2n+1) x f^{(n+1)} - n^2 f^{(n)} = 0 \quad (n \geq 1).$

$x=0$ 时. $f^{(n+2)} = n^2 f^{(n)}$ 　　$f'(0) = 0$. $f''(0) = 2$ 　不可用 $f(0)$!

$$\therefore f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 2k-1 \\ 2^{2k-1} ((k-1)!)^2 & n = 2k. \end{cases}$$

10.18

3.2 求导法则

Thm. f, g 在 x_0 可导, $c \in \mathbb{R}$, 则

(1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(2) $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

(3) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(4) $g(x_0) \neq 0$ 时. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)) / g^2(x_0)$

特别地, 当 $g(x_0) \neq 0$ 时 $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

$\Leftrightarrow$ (1) $d(f+g) = df + dg$

(2) $d(cf) = c\,df$

(3) $d(fg) = g\,df + f\,dg$

(4) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$

Thm. 复合函数求导的链式法则

$\varphi(x)$ 在 x_0 可导, $f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 可导 则 $h(x) = f(\varphi(x))$ 在 x_0 可导, 且

$$h'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$$

$(f \circ g \circ h)(x) \triangleq f(g(h(x)))$

$(f \circ g \circ h)'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$

$$\left(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$f(x) = u(x)^{v(x)}$

$f'(x) = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' = u(x)^{v(x)} \cdot \left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

$= u(x)^{v(x)} \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) u(x)^{v(x)-1} u'(x)$

记忆: $(a^{v(x)})' = a^{v(x)} \cdot \ln a \cdot v'(x)$

$(u(x)^b)' = b\,u(x)^{b-1} \cdot u'(x)$

初等函数的导函数仍是初等函数.

Ex. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$

$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Ex. f 在 $[a,b]$ 可导, f' 在 $[a,b]$ 一定连续吗? 不一定.

② $f \in C[a,b]$, 在 (a,b) 可导. $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 一定存在? 不一定 $x\sin\frac{1}{x}$

Thm. 反函数求导. 若 f 在 (a,b) 严格单调且连续, $x_0\in(a,b)$, $f'(x_0)\neq 0$.

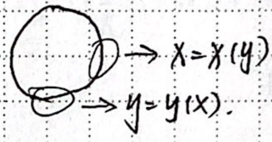
则 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导, 且

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Proof. $(f^{-1})'(y_0)=\lim\limits_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}$

Def. (隐函数) $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数

P.80. 隐函数求导



3.3 高阶导数.

二阶导: $y''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)\triangleq(f'(x))'$

三阶导: $y'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$ . . .

n阶. . . .

Def. $f\in C^n(a,b)$: f 在 (a,b) 上 n 阶可导, 且 $f^{(n)}\in C(a,b)$

$f\in C^n[a,b]$: f [a 有 1…n阶右导. b 有 1…n阶左导. $f^n\in C[a,b]$] 条件.

Thm. 高阶导数运算规则 P.85.

☆Ex. $y=(\arcsin x)^2$. 求 $y^{(n)}(0)$

$y'=2\arcsin x/\sqrt{1-x^2}$. $\quad\sqrt{1-x^2}\,y'=2\arcsin x$

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}y'+\sqrt{1-x^2}\,y''=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$xy'+(x^2-1)y''=-2$$

取n阶导 $(y'+xy''+2xy''+(x^2-1)y'''=0.)$

$$xy^{(n+1)}+ny^{(n)}+(x^2-1)y^{(n+2)}+n\cdot 2x\,y^{(n+1)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2y^{(n)}=0.$$

$x=0\Rightarrow$ $\cancel{ny^{(n)}}$ $y^{(n+2)}=n^2y^{(n)}$

$\because y'(0)=0,\ y''(0)=2$

$$\therefore y^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=2k-1\\ 2^{2k-1}((k-1)!)^2 & n=2k.\end{cases}$$

Ex. $x^2+xy+y^2=1$ 求 $y''(x)$.

$2x+y+xy'+2y\cdot y'=0\Rightarrow y'=\frac{-(2x+y)}{x+2y}$

$y''=\cdots$ 表达式中仅 x 和 y

$2+y'+y'+xy''+2(y'^2+yy'')=0$

反函数求导: ① 看成隐函数 ②

参数 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}$.

10.23

§第4章　导数应用

4.1 微分中值定理

· (Fermat Thm) 费马定理：x_0是极值点 $f'(x_0)$存在，则$f'(x_0)=0$.

· $f,g\in C[a,b]$. f,g在(a,b)可导，则

(Rolle) 罗尔定理：若$f(a)=f(b)$，则$\exists\xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)=0$.

(Lagrange) 拉格朗日定理：$\exists\xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(Cauchy) 柯西定理：若$g'(t)\neq0$，则$\exists\xi\in(a,b)$, s.t. $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

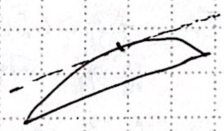
(Darboux Thm) 达布定理：

f在$[a,b]$上可导，$f'_+(a)\neq f'_-(b)$ 则对介于$f'_+(a)$与$f'_-(b)$间的任意实数λ,

$\exists\xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)=\lambda$.

def.(驻点) $f'(x_0)=0$. x_0为$f(x)$驻点.

△证明 P90-92 上述定理.



拉格朗日：构造 $h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$h(a)=f(a),\ h(b)=f(a)\Rightarrow h(a)=h(b)$.

由罗尔，得证.

Rem. $f\in C[a,b]$, f在(a,b)可导.　闭？

(1) $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(a-b)$

(2) $\forall x,x_0\in[a,b]$ $\exists$介于x,x_0间的ξ s.t.

$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$

(3) $\forall x_0,x_0+\Delta x\in[a,b]$, $\exists\theta\in(0,1)$, s.t.

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$

10.25

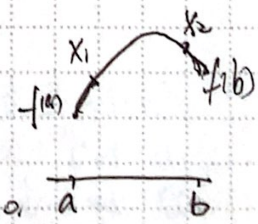
柯西中值定理：

$h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$. 则 $h(a)=h(b)$

由拉格朗日. $\exists\eta\in(a,b)$, s.t. $g(b)-g(a)=g'(\eta)(b-a)\neq0$.

$h(x)$在(a,b)可导，$[a,b]$连续. $h(a)=h(b)=f(a)$. 由Rolle定理

$\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $h'(\xi)=0$. 即 $f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0$.



达布定理：

(1) 若$f'_+(a)f'_-(b)<0$，则$\exists\xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)=0$.

Proof. 不妨设 $f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$, $f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$

由极限的保号性. $\exists x_1,x_2\in(a,b)$, s.t. $\cancel{f(x)}$ $f(x_1)>f(a)$, $f(x_2)>f(b)$.

前面只是说明ξ不在端点

于是f在$[a,b]$上最大值在某点$\xi\in(a,b)$上取到. 由Fermat定理 $f'(\xi)=0$.

(2) $f'_+(a)\neq f'_-(b)$ 则对$\forall$介于两值间的λ. 令

$$g(x)=f(x)-\lambda x$$

则由(1)中结论. $\exists\xi\in(a,b)$. s.t. $g'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=\lambda$.

Ex. 若$f'(0)=0$, $x\in(a,b)\Leftrightarrow f(x)$在$(a,b)$为常数

右$\Rightarrow$左易, 左$\Rightarrow$右: $f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)$
(拉格朗日) $=0$.

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$\alpha>0$ 连续

>1 可导

Ex. $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \quad (x>-1, x\neq0)$.

Proof. $\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln1=f(x)-f(0)=\cancel{f(\theta x)}\,f'(\theta x)\cdot x=\frac{x}{1+\theta x}$
$f(x)=\ln(1+x)$. (拉格朗日)

$(\alpha(x)e^{\beta(x)})'=\underline{(\alpha'(x)+\alpha(x)\beta'(x))}e^{\beta(x)}$ 熟悉形式!

Ex. $f.g\in C[a,b]$, $f.g$在(a,b)可导. $f(a)=f(b)=0$.

证明: $\exists\xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$.

Proof. 令 $h(x)=f(x)e^{g(x)}$. 则h在(a,b)可导. $h(a)=h(b)=0$.

由Rolle, $\exists\xi\in(a,b)$. s.t. $h'(\xi)=(f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi))e^{g(\xi)}=0$

$\Rightarrow$ — — — — $=0$.

构造辅函: 见PPT.

4.2 洛必达法则 L'Hospital

Thm. $f.g.$在$(x_0,x_0+\rho)$中可导, $g'(x)\neq0$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. 则

(1) (0/0型) $f.g\to0$ (2) (∞/∞型) $g\to\infty$

Rem. x_0^+. x_0^-. x_0. 均成立 $A=+\infty/-\infty/\infty$均成立.

Ex. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x^2}e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}((1+\frac{1}{x})^x)^x e^{-x}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to\infty}e^xe^{-x}=1$. 错误!

洛必达. $=\lim\limits_{x\to\infty}\exp\{x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x\}=\exp\{\lim\limits_{x\to\infty}(x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x)\}$

$\overset{☆}{=}\exp\{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}\}=\exp\{\lim\limits_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}\}=\exp\{\lim\limits_{t\to0}\frac{-\frac{1}{(t+1)}}{2}\}$
$=e^{-\frac{1}{2}}$

Stolz是洛必达的离散版本.

1) $b_n\uparrow+\infty$

2) $b_n\downarrow$, $a_n.b_n\to0$. 单调可导数不为0. $g'(x)\neq0$.

洛 $g'(x)\neq 0$?

10.30

4.3 泰勒公式

Thm.(带Peano余项的Taylor公式)

f在x_0处有n阶导数,则当$x\to x_0$时

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right)$$

$x_0=0$时,称之为Maclaurin公式.

Proof. $R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$

则$R_n^{(k)}(x)$在x_0邻域中可导. $k=0,1,2,\cdots,n-1$

$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0.$

$\lim_{x\to x_0}R_n(x)=\lim_{x\to x_0}R_n'(x)=\cdots=\lim_{x\to x_0}R_n^{(n-1)}(x)=0.$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\text{洛}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)-\overset{=0}{R_n^{(n-1)}(x_0)}}{n!\,(x-x_0)}=\frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!}\ \text{导数定义}=0.$$

→不能再洛必达
∵只有x_0处有n阶导
不保证x_0邻域有n阶导.

Thm.(带Lagrange余项的Taylor公式)

f在(a,b)上$n+1$阶可导,$f^{(n)}\in C[a,b]$,$x_0,x\in[a,b]$,则存在介于x_0,x间的ξ s.t.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$x_0\ \cdots\ \xi_2\ \xi_1\ x$

拉格朗日中值定理: $n=0$时特殊形式.

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-\overset{=0}{R_n(x_0)}}{(x-x_0)^{n+1}-\underset{=0}{(x_0-x_0)^{n+1}}}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-(n+1)(x_0-x_0)^n}$$

分母导数在(x,x_0)开区间内处处非0.✓
柯西中值定理

$$\cdots=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}\overset{?}{=}\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

多项式$n+1$次导为0.

Thm.(Taylor多项式的唯一性) f在x_0处有n阶导数,存在n次多项式$Q_n(x)$, s.t.

$f(x)=Q_n(x)+o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0)$ ↘用多项式反推n阶导.

则$Q_n(x)=P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$

$f(x)=P_n(x)+\alpha(x)$ $\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^n}\to 0\ (x\to x_0)$

$=Q_n(x)+\beta(x)$ $\frac{\beta(x)}{(x-x_0)^n}\to 0\ (x\to x_0)$.

$$\Rightarrow\frac{Q_n(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{(x-x_0)^n}\to 0\ (x\to x_0)$$

记 $Q_n(x)-P_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+\cdots+b_n(x-x_0)^n\to 0\ (x\to x_0)$

令$x\to x_0$,得$b_0=0$.

$b_1(x-x_0)+\cdots+b_n(x-x_0)^n=o((x-x_0)^n)$

$b_1+\cdots+b_n(x-x_0)^{n-1}=o((x-x_0)^{n-1})\Rightarrow b_1=0$. 类推. 得证.

Ex. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$, $x \to 0$.

$+ \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$ $\xi \in (0, x)$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$, $x \to 0$.

Ex. $\frac{1}{2x - x^2}$ 在 $x=1$ 处带 Peano 余项的 Taylor 公式及 $f^{(100)}(1)$.

Rem. 间接展开法求 Taylor 公式

$f(x) = \frac{1}{1-(x-1)^2} = 1 + (x-1)^2 + (x-1)^4 + \cdots + (x-1)^{2n} + o((x-1)^{2n})$ $x \to 1$.

$\because$ 复合函数中 $f(g(x))$ 外层函数连续（可 Taylor 说明 C）$\therefore$ 可间接展开.

$n = 50$ 时. $f^{(100)}(1) \cdot \frac{(x-1)^{100}}{100!} = (x-1)^{100}$, $x \to 1$

$\Rightarrow f^{(100)}(1) = 100!$

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$ $(x \to 0)$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ $(x \to 0)$

Ex. 求 $e^{\sin^2 x}$ 在 $x=0$. 4 阶 Peano.

$e^{\sin^2 x} = 1 + \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^4 x + o(\sin^4 x)$

11.1 $= 1 + (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))^2 + \frac{1}{2}(x + o(x))^4$ 展到合适位置.

Ex. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax^k} - \cos x^2}{x^8}$ 存在, 求 a.k

上面 Taylor 展开, $\because$ 极限存在 $\therefore$ 分子不含小于 8 次的项!

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) / \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\xi + \frac{2n+1}{2}\pi)$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

11.1 $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

4.4 函数的增减与极值问题

P109

Thm. $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$, 则 $f^{(2n)}(x_0) > (<) 0 \Rightarrow x_0$ 为 f 极小(大)值点.

解 $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x - x_0)^{2n} + o((x-x_0)^{2n})$

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{(2n)!(f(x) - f(x_0))}{(x-x_0)^{2n}} = f^{(2n)}(x_0) > (<) 0$

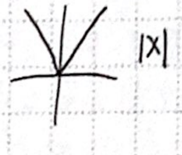
Thm. $f'(x_0)=\cdots=f^{(2n)}(x_0)=0$, $f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0$，则 x_0 不是极值点。

Pf. 不妨设 $f^{(2n+1)}(x_0)>0$.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1}+o((x-x_0)^{2n+1})$$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}$ ……

e.g.



Thm $f'(x_0)=\cdots=f^{(2n)}(x_0)=0$. $f^{(2n)}$ 在 x_0 连续（不一定可导！），$f^{(2n+1)}(x)$ 在 x_0 两侧异号

则 $f^{(2n+1)}(x)\begin{cases}\le(<)0, & x<x_0\\ \ge(>)0, & x>x_0\end{cases}$ $\Rightarrow$ x_0 是 f 的（严格）极小值点。

Pf. 拉格朗日余项的 2n 阶泰勒展开. / 柯西中值定理 (2n)次.

用条件：在 x_0 连续

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2n+1}}=\cdots=\frac{f^{(2n)}(\xi)-f^{(2n)}(x_0)}{(2n+1)!\,(x-x_0)}$$

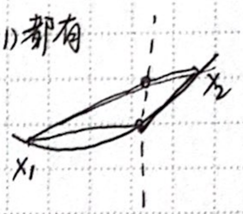
$$=\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}\quad \xi\in(x,x_0)\ /\ (x_0,x)$$

4.5 函数的凸凹性

Def. f 在区间 I 上有定义. 若 $\forall x_1,x_2\in I$, $\forall\lambda\in(0,1)$ 都有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

则称 f 为 I 的下凸函数.

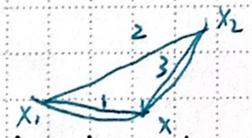


Thm. （任意取 n 个点 也可 P117.
数归即可.（验证在定义域内））

$\forall n$ 个点 $\in I$. $(x_1,\cdots,x_n)$ 及 n 个正数满足 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$.

都有 $f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$

$\Leftrightarrow$ f 为区间 I 上的下凸函数.



Thm. 〃 〃 〃 〃 〃 〃

$\Leftrightarrow$ $\forall x_1,x_2\in I$ 及 $x\in(x_1,x_2)$，有 $\underset{1}{\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}}\le\underset{2}{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}\le\underset{3}{\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}}$.

事实上，…… $\Leftrightarrow$ ①≤② $\Leftrightarrow$ ②≤③ $\Leftrightarrow$ ①≤③

Pf. $\forall x_1,x,x_2\in I$, $x_1<x<x_2$, 记 $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$. 则.

$$\lambda=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\in(0,1)\qquad 1-\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

f 下凸 $\Leftrightarrow$ $f(x)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

$\Leftrightarrow$ $f(x)-f(x_1)\le(\lambda-1)(f(x_1)-f(x_2))$

$$=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(f(x_2)-f(x_1))$$

即 $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Thm. f 在 $[a,b]$ 连续. (a,b) 可导. 证明见 P118.

f 在 $[a,b]$ 下凸 $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ 在 (a,b) 单增

Corllary. 开区间上的（上.下）凸函数每一点都连续.

闭区间 左右端点处不一定可导. e.g.

若拐点 x_0 且存在 $f''(x_0)$，则 $f''(x_0)=0$

Ex. $x_1 \cdots x_n > 0$，则 $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$

Proof. 即证 $\frac{\ln x_1+\cdots \ln x_n}{n} \leq \ln \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$

即证 $\ln x$ 上凸

$f'(x)=\frac{1}{x}$ $\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$.

4.6 函数作图

Def. 竖直渐近线、水平渐近线、斜渐近线 (P120)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \text{ 且 } \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b.$$

11.8

第5章 黎曼积分

5.1 Riemann 积分的几何意义与概念

1.分割
2.标志点
3.取极限
4.存在

Def. 设 f 为闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 若存在实数 I, s.t. 对 $[a,b]$ 的任一个分割 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 对任意 $\{\xi_i\}$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $1\le i\le n$. [只要 $|T|=\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i-x_{i-1}\}\to 0$, 就有 $\lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=I$.]

则称 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 称 I 为 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分.

记为 $I=\int_a^b f(x)dx$. $a.b.f.x$ 为积分下限. 上限. 被积函数. 积分变量

即 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$. 只要 $|T|<\delta$, 任取 ξ_i 都有 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-I\right|<\varepsilon$.

Def. $[a,b]$ 上全体 Riemann 可积函数记为 $R[a,b]$

f 在 $[a,b]$ 黎曼可积时, 记作 $f\in R[a,b]$.

Rem. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f$

$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$, $\int_a^a f(x)dx=0$.

曲边梯形面积 $\int_a^b |f(x)|dx$. 有向面积 $\int_a^b f(x)dx$

· 积分存在的条件

$\Delta x_i\triangleq x_i-x_{i-1}$, $M\triangleq\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m\triangleq\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$M_i\triangleq\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i\triangleq\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

$U(f,T)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ 分割 T 的达布上和(大和) 上界: $M(b-a)$

$L(f,T)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$ 下 (小和) 下界 $m(b-a)$

$\sigma(f,T)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 黎曼和.

$\omega_i=M_i-m_i$, $U(f,T)-L(f,T)=\sum\omega_i\Delta x_i$

Lemma 1. f 在 $[a,b]$ 有界. T_k 是在 T 中加入 k 个新分点, 得到的分割 (其余定义与前同), 则

Proof. 略

$$0\le U(f,T)-U(f,T_k)\le k|T|(M-m)$$
$$0\le L(f,T_k)-L(f,T)\le k|T|(M-m)$$

Lemma 2. f 在 $[a,b]$ 有界. T_1. T_2 为 $[a,b]$ 任意两个分割. 则 (Proof. 合并分点)

$$L(f,T_1)\le U(f,T_2)$$

Def. f 在 $[a,b]$ 有界, 分别称 有下界 $L(f,T)$. 故有 inf.

$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\{U(f,T): T$ 为 $[a,b]$ 分割$\}$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的 上积分

$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup\{L(f,T): T$ 为 $[a,b]$ 分割$\}$ 下积分

Lemma 3. $L(f,T) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le U(f,T)$

$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le U(f,T_2)$ $(\forall T_2)$? 故 $\underline{\int}$ 为 $\{U(f,T)\}$ 下界，而 $\overline{\int}$ 为 $\{U(f,T)\}$ 下确界

(可反证)

Thm. f在$[a,b]$有界，则以下命题等价.

(1) $f\in R[a,b]$

(2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists T$为$[a,b]$分割 s.t. $U(f,T)-L(f,T)<\varepsilon$

(3) $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

△ $a=b \iff \forall\varepsilon>0,\ |a-b|<\varepsilon$

(3)⇒(1) 欲证 $I-\varepsilon \le L(f,T)\le \sigma(f,T)\le U(f,T)\le I+\varepsilon$

记 $I=\underline{\int}=\overline{\int}$　　设有K个点 $a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b$

由上积分定义(上确界), $\forall\varepsilon>0$ 存在 T_0 使 $0\le U(f,T_0)-I<\frac{\varepsilon}{2}$

设T为任意一分割满足 $|T|<\delta_1$

合并 T_0, T 分点得 T'

$0\le U(f,T)-I\le U(f,T')+K|T|(M-m)-I$

$\le U(f,T_0)+K|T|(M-m)-I<\varepsilon$

$<\frac{\varepsilon}{2}+K(M-m)|T|$　　只需 $|T|<\boxed{\frac{\varepsilon}{2K(M-m)}}$

下界同理，有 δ_2. 取 $|T|<\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 得证.

· 可积函数类

黎曼可积⇒有界证明?

Thm. $f\in C[a,b] \Rightarrow f\in R[a,b]$

Thm. f在$[a,b]$上有界且只有有限个间断点(不连续点)，则$f\in R[a,b]$

Def(零测集) 数集 $E\subset\mathbb{R}$，若 $\forall\delta>0$，∃一列开区间 (α_i,β_i) s.t.

$E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$，且 $\forall n\in\mathbb{N}$，有 $\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\delta$，则称$E$为~

(开覆盖)

~~Thm. 间断点构成~~

Ex. $\mathbb{Q}$为零测集

只需将正有理数排成一序列.(可排序列⇒零测集 Proof. 135)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \\ \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

? Thm. 有界函数f在$[a,b]$黎曼可积 $\overset{充要}{\iff}$ f在$[a,b]$的间断点构成的集合E为零测集

Thm. 若f在$[a,b]$单调，则 $f\in R[a,b]$

设单增f有界. $0\le U(f,T)-L(f,T)=\sum(f(x_i)-f(x_{i-1}))(x_i-x_{i-1})$

$\le |T|(f(b)-f(a))$

要其$<\varepsilon$.　　只需 $|T|<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

⇒单调函数闭区间间断点为零测集

§2 Riemann积分的性质

Prop 1 (线性性质)

$f.g\in R[a,b]$, 则 $\forall$ 常数 α,β, 函数 $\alpha f+\beta g\in R[a,b]$, 且

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

Prop 2. (积分区间的可加性)

$a<c<b$. $f\in R[a,b]\iff f\in R[a,c]$ 且 $f\in R[c,b]$, 此时

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Prop 3. f 在 $[-a,a]$ 上奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$.

f 在 偶 $=2\int_0^a f(x)dx$.

Prop 4. (单调性)

$f.g\in R[a,b]$. 且 $f(x)\le g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

$m\le f(x)\le M$ 则 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

Prop 5. (积分估值)

$f\in R[a,b]\Rightarrow |f|\in R[a,b]$. 且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$$

$|f|\in R[a,b]\not\Rightarrow f\in R[a,b]$! 反例 $f(x)=\begin{cases}1 & \mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0 & [0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Prop 6. $f.g\in R[a,b]\Rightarrow fg\in R[a,b]$

Pf. 1) 设 $f\ge0$. $g\ge0$ $\quad M_i=\sup f(x)\quad m_i=\inf f(x)$

$N_i=\sup g(x)\quad n_i=\inf g(x)$

$$U(fg,T)-L(fg,T)\le\sum(M_iN_i-m_in_i)\Delta x_i$$
$$=\sum M_i(N_i-n_i)\Delta x_i+\sum n_i(M_i-m_i)\Delta x_i$$
$$\le M[U(g,T)-L(g,T)]+N[U(f,T)-L(f,T)]$$

合并分点方法, 可控制式 $<\varepsilon$.

2) 对 $\forall f$. 记 $f^+(x)=\frac12[|f(x)|+f(x)]$ $\quad\begin{cases}f^\pm\ge0.\ f^\pm\in R[a,b]\\ f=f^+-f^-\end{cases}$

$f^-(x)=\frac12[|f(x)|-f(x)]$

于是 $fg=(f^+-f^-)(g^+-g^-)\in R[a,b]$

Thm 设 $f\in C[a,b]$. $f(x)\ge0$. $\int_a^b f(x)dx=0$. 求证: $f(x)\equiv0$.

Proof. 反证. 设 $f(x)$ 不恒为0 则 $\exists x_0\in[a,b]$, s.t. $f(x_0)>0$. 不妨设 $x_0\in(a,b)$

$f\in[a,b]$. 则 $\exists\delta>0$. s.t. $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0$. $\forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$.

而 $f(x)\ge0$ 于是

$$0=\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta}f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^b f(x)dx$$
$$\ge0+\frac{f(x_0)}{2}\cdot2\delta+0=f(x_0)\delta>0 \text{ 矛盾}.$$

Cor. $f.g\in C[a,b]$. $f(x)\ge g(x)$. $f\not\equiv g$. 则 $\int_a^b f(x)dx\ \underline{>}\ \int_a^b g(x)dx$.

不连续不一定 $\qquad$ 去掉等号.

$\because$ 函数修改有限点的值不改变黎曼积分

……修改零测集点的值会改变…… $f(x)\equiv0\Rightarrow D(x)=\begin{cases}1 & \mathbb{Q}\\ 0 & \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Thm.（Cauchy不等式）$f,g\in R[a,b]$，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)^2dx\cdot\int_a^b g(x)^2dx$$

trick 记 $A=\int f(x)^2$ $B=\int f(x)g(x)$ $C=\int g(x)^2$.

$0\le\int[tf(x)+g(x)]^2 = At^2+2Bt+C$

$\Delta=4B^2-4AC\le 0\Rightarrow B^2\le AC$.

11.15 Thm（积分第一中值定理）$f\in C[a,b]$，$g\in R[a,b]$，g不变号

则 $\exists\xi\in[a,b]$，s.t. $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$. (*)

特别地，当 $g(x)\equiv1$ 时，$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Proof. 不妨设 $g\ge0$. 设 f 在 $[a,b]$ 上最大、最小值为 M,m.

则 ~~m(b-a)≤~~ $m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx$.

若 $\int_a^b g(x)dx=0$，则 (*) 成立.

若 $\quad >0$，由连续函数介值定理 $\exists\xi\in[a,b]$，s.t.

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\in[m,M]$$

① Ex. $f\in R[a,b]$，$f\ge0$，$\int_a^b xf(x)dx=0$，则

$$\int_a^b x^2f(x)dx\le -ab\int_a^b f(x)dx.$$

Pf. 构 $(x-a)(b-x)f(x)\ge0$，$\forall x\in[a,b]$

$0\le\int_a^b(x-a)(b-x)f(x)dx=\cdots$

② Ex f 在 $[0,1]$ 可导，$f(1)=4\int_0^{\frac14}e^{1-x^3}f(x)dx$，则 $\exists\xi\in(0,1)$，s.t. $f'(\xi)=3\xi^2f(\xi)$

欲用Rolle，找两个相等 $g(x)$. 求导得 $e^{1-x^3}(f'(x)-3x^2f(x))$.

Pf. 由积分第一中值定理，$\exists\eta\in[0,\frac14]$ s.t.

$f(1)=4\cdot\frac14e^{1-\eta^3}f(\eta)=e^{1-\eta^3}f(\eta)$

令 $g(x)=e^{1-x^3}f(x)$，则 $g(\eta)=g(1)$ ~~$=f(1)$~~

由Rolle定理 $\exists\xi\in(\eta,1)$，s.t. $g'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=3\xi^2f(\xi)$

③ Ex. $f\in C[a,b]$，则

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2\le\left(\int_a^b|f(x)|dx\right)^2.$$

Proof. 由积分估值及Cauchy不等式

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2\le\left(\int_a^b\sqrt{|f(x)|}\cdot\sqrt{|f(x)|}|\cos x|dx\right)^2$$

④ Ex $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1x^ndx=0$.

Proof. 令 $a_n=\int_0^1x^ndx$，则 a_n 单减有下界0，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

$\forall\varepsilon>0$，$0\le\int_0^1x^ndx=\int_0^{1-\varepsilon}x^ndx+\int_{1-\varepsilon}^1x^ndx\le(1-\varepsilon)^{n+1}+\varepsilon$

因此 $0\le\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le\varepsilon$. 由 ε 任意性，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1x^ndx=0$.

5.3 微积分基本定理 — Newton-Leibniz公式

Def. 称F为f在区间I上的一个原函数,若 $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in I$.

Def. 称f在I上的原函数全体为f在I上的不定积分,记为$\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x)+C \text{ 其中}C\text{为任意常数}$$

原函数的线性性质 $\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$ 两边为集合,包含$+C$.

$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$. $\int f'(x)dx = f(x)+C$ 注意前者无$+C$后者有.

△ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$ $\int\frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$.

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$.

$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x+C = -\arccos x+C$

$\int\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x+C = -\text{arccot}\, x+C$

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$.

$\int\cos x\,dx = \sin x+C$, $\int\sin x\,dx = -\cos x+C$

$\int\sec^2 x\,dx = \tan x+C$, $\int\csc^2 x\,dx = -\cot x+C$

$\int\tan x\sec x\,dx = \sec x+C$. $\int\cot x\csc x\,dx = -\csc x+C$.

~~$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x+C$~~

Ex. $\int\frac{1}{\cos^2x\sin^2x}dx = \int\frac{1}{\cos^2x}dx+\int\frac{1}{\sin^2x}dx = \tan x-\cot x+C$.

Ex. $\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x})dx = \frac{1}{2a}\ln|\frac{a+x}{a-x}|+C$

Thm (微积分基本定理)

$f\in R[a,b]$, $F(x)=\int_a^b f(t)dt\ (a\le x\le b)$. 则

(1) $F\in C[a,b]$.

(2) 若f在x_0处连续,则F在x_0可导且$F'(x_0)=f(x_0)$

(3) 若$f\in C[a,b]$,则F是f在$[a,b]$上的一个原函数.

(Newton-Leibniz) 若G为f的任一原函数,则 $\int_a^b f(t)dt = G(b)-G(a) \triangleq G(x)\Big|_a^b$

Pf. P142.

Ex. f连续,u,v可导. $G(x)=\int_{v(x)}^{u(x)}f(t)dt$. 求$G'(x)$.

令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. 则 $F'(x)=f(x)$

$G(x)=F(u(x))-F(v(x))$

$\boxed{G'(x)=f(u(x))\cdot u'(x)-f(v(x))v'(x)}$

Ex. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt} \overset{\text{洛必达}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{2x^2}} =$

(分母→∞. 导数不加)

t替换为x!

~~$F(x)=\int_a^x f(x)dx$~~ $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

∴时 $F'(x_0)=f(x_0)$

☆ Ex. $\sigma_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+(2n+1)}$.

11.20

5.4 不定积分换元法与分部积分.

1. 换元积分法.

$$\int f'(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx \overset{u=\varphi(x)}{=} \int f'(u)\,du = f(u)+C = f(\varphi(x))+C \quad \text{第一换元法}$$

$$\int f'(\varphi(x))\,d(\varphi(x))$$

$$\int f'(u)\,du \underset{\text{可逆}}{\overset{u=\varphi(x)}{=}} \int f'(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \cancel{g(x)+C}\ g(\varphi^{-1}(u))+C. \quad \text{第二换元法}.$$

Ex. $\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C.$

记. $\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

☆ Ex. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)=\int a^2\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}a^2\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}a^2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$

$t=\arcsin\frac{x}{a}$. ∴ 原式 $=\frac{1}{2}a^2\left(\arcsin\frac{x}{a}+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C$

$=\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$. ?

Ex. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ 去根号 令 $x=\tan t$, $|t|<\frac{\pi}{2}$, 且 $t\neq 0$.

$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\cos t}{\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{\sin t}+C$

$=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

Ex. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 如何积分? 分 $x>0$. $x<0$ 积分. 课后练习.

2. 分部积分法.

$$\int u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\,dx.$$

或 $\int u(x)\,d(v(x))=u(x)v(x)-\int v(x)\,du(x)$

$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$

$\int x\cos x\,dx=\int x\,d\sin x=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x-\cos x+C$

$\int\ln x\,dx=x\ln x-\int x\,d\ln x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C$

$\int\arcsin x\,dx=x\arcsin x-\int x\,d\arcsin x=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$

Ex. $J_k=\int((x+a)^2+b^2)^{-k}dx$.

解. $J_1=\int\frac{dx}{(x+a)^2+b^2}=\frac{1}{b}\int\frac{1}{(\frac{x+a}{b})^2+1}d\frac{x+a}{b}=\frac{1}{b}\arctan(\frac{x+a}{b})+C$

$J_k=\int((x+a)^2+b^2)^{-k}d(x+a)$

$=\frac{x+a}{((x+a)^2+b^2)^k}+2k\int\frac{(x+a)^2}{((x+a)^2+b^2)^{k+1}}d(x+a)$

$=\cdots\cdots\underline{(x+a)^2+b^2-b^2}\cdots$

$=\frac{x+a}{((x+a)^2+b^2)^k}+2kJ_k-b^2\cdot 2k\int\frac{1}{((x+a)^2+b^2)^{k+1}}d(x+a)\cdots$

3. 联合积分法

$I=\int\frac{\cos^3x\,dx}{\sin x+\cos x}$, $J=\int\frac{\sin^3x\,dx}{\sin x+\cos x}$. IJ单独怎么算?

$I+J=\int(1-\frac{1}{2}\sin 2x)dx$

$I-J=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\cdot(1+\frac{1}{2}\sin 2x)dx$

$=\int\frac{1+\frac{1}{2}\sin 2x}{(\cos x+\sin x)^2}\cdot\cos 2x\,dx=\int\frac{1+\frac{1}{2}\sin 2x}{1+\sin 2x}d\sin 2x$.

5.5 有理函数与三角有理函数的不定积分

1. 有理函数 $\frac{p(x)}{q(x)}$ (p.q多项式)

Thm. 有理真分式 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 可分解成最简分式之代数和.

Ex. $\int\frac{dx}{1+x^2+x^4}$

$1+x^2+x^4=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$\frac{1}{1+x^2+x^4}=\frac{ax+b}{x^2+x+1}+\frac{cx+d}{x^2-x+1}$

$\Rightarrow=\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2-x+1}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$ arc…

$=\frac{1}{4}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)$

11.22

$\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})$

2. 三角有理式 $R(\sin x,\cos x)$: 有限次四则运算

$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$ 万能公式 $t=\tan\frac{x}{2}$

$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2}$

3. 可化为有理式的简单有理式.

1) $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,dx \quad (ad-bc\neq 0)$

令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 则 $x=\frac{b-dt^n}{ct^n-a}$.

2) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \quad (a\neq 0)$

· $\int R(x, \sqrt{(x+p)^2+q^2})\,dt$ 令 $x+p=q\tan t$ 调符号?

$\sqrt{(x+p)^2-q^2}$ 令 $x+p=q\sec t$

$\sqrt{q^2-(x+p)^2}$ 令 $x+p=q\sin t$.

Euler 第一替换: 若 $a>0$, 令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+t$

此时 $x=\frac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}\,t}$,

、、、、 $=\pm\frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{b\mp 2\sqrt{a}t}+t$

Euler 第二替换: 若 $c>0$ 令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$

Euler 第三替换 若 ax^2+bx+c 有相异实根 α, β.

令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\cdot t$

$a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2$

Rem. 初等函数的原函数不一定是初等函数

I.6 定积分的计算

Newton-Leibniz 公式 $\int_a^b F'(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b$

Thm 定积分的换元法 $f\in C[a,b]$, $\varphi\in \boxed{C^1[\alpha,\beta]}$ $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. $a\leq\varphi(t)\leq b$.

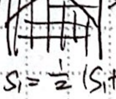
则 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Proof. f在$[a,b]$原函数 $F(x)$. $\frac{d}{dt}F(\varphi(t))=f(\varphi(t))\varphi'(t)$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$

$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$.

Rem. $\varphi\in C^1[\alpha,\beta]$, 不要求 $x=\varphi(t)$ 可逆.

$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx=\frac{1}{2}\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}+\frac{\sin^2 x}{(\frac{\pi}{2}-x)\cdot 2x}\right.=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x(\pi-2x)}$

S_1  S_2

$S_1=\frac{1}{2}(S_1+S_2)$

$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$

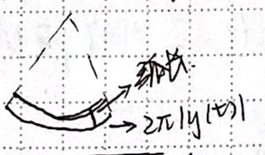
11.27

·旋转体的体积 $V=\pi\int_a^b f(x)^2 dx$. (绕x轴旋转)

·旋转面的面积: $S=2\pi\int_a^b |y(t)|\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$ 注意不能直接dt!

为什么可用弧长近似?

为什么前显式 后参数?



$S=2\pi|y(t)|\cdot$弧长.

$S=2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$ (显式)

·积分在物理中的应用

第六章 广义黎曼积分

6.1 广义黎曼积分的概念

Def.(无穷限积分) 若对 $\forall A>a$, $f\in R[a,A]$

若 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ 存在, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 为极限值 → 称积分收敛

若 不存在, 则称 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

~~Def(瑕积分)~~. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{A} f(x)dx+\int_A^{+\infty} f(x)dx$ (广义积分意义下, $\forall A$)

Cauchy主值意义下. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx$.

⇒ 上面限制更强. e.g. $\sin x$ 在Cauchy主值意义下收敛 不在广义积分意义下收敛.

Ex. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=\int_1^{+\infty}-\ln x\, d\frac{1}{x}=-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$

$=-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}=0-(-1)=1$.

Ex. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 收敛性? $p>1$时收敛 $p\le1$时发散.

Proof. $p=1$时 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty$

$p\ne1$时 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ +\infty, & p<1\end{cases}$

$\left(\int_{\alpha(x)}^{+\infty} f(t)dt\right)'=-f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$ ($\because \int_{\alpha(x)}^{a} f(t)dt=-f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$).

Def (瑕积分) → 不能沿用黎曼积分取点思想！否则可积到任意面积

f在$[a,b)$定义，在b点附近无界（此时称$x=b$是f的一个瑕点）

$\forall \delta\in(0,b-a)$，$f\in R[a,b-\delta]$，$\delta\to0^+$时，若下列极限存在

$\lim\limits_{\delta\to0^+}\int_a^{b-\delta}f(x)dx=I$，则称$f$在$[a,b)$上瑕积分收敛

Ex. $\int_0^1\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\ln x\,\big|_0^1=+\infty, & p=1\\ \frac{1}{1-p}x^{1-p}\,\big|_0^1=\end{cases}$

12.4

6.2 广义积分的收敛性

$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$. （$f\in R[a,b]$，$b>a$）

以下定理均有此前提！ f在$[a,+\infty)$上定义，对$\forall A>a$，$f\in R[a,A]$

1. 无穷限积分

① Thm (Cauchy) $\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists M>a$, s.t.

$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$, $\forall A_2>A_1>M$.

Thm. $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛 $\Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛（须保证$f\in R[a,b]$，$\forall b>a$）

Proof. $\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|\le\int_{A_1}^{A_2}|f(x)|dx$.

Def. (1) 若广义积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，则称广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$绝对收敛.

(2) 若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，但$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$条件收敛.

Rem. 绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛　　条件收敛 $\Rightarrow$ 收敛

② Thm (比较判别法一般形式) → 不能负到发散

$f,g\in R[a,b]$，$\forall b>a$　$|f(x)|\le g(x)$

(1) $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散，则$\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散

(2) $\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$绝对收敛

Proof. (2) 用 Cauchy $\int_{A_1}^{A_2}|f(x)|dx\le\int_{A_1}^{A_2}g(x)dx<\varepsilon$

(1) 用反证矛盾.

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}$收敛 $\Leftrightarrow p>1$　　$\int_0^1\frac{1}{x^p}$收敛 $\Leftrightarrow p<1$.

Thm. (比较判别法极限形式)

f,g在$[M,+\infty)$非负，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=C$，$f,g\in R[a,A]$ ($\forall A>a$)

(1) $C>0$，f,g在$[a,+\infty)$同收敛同发散.

(2) $C=0$，g收敛 $\Rightarrow f$收敛.　(3) $C=+\infty$　g发散 $\Rightarrow$ f发散.

Ex. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}$?

$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}$ 绝敛.

Ex. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x+e^x}$

$\int_1^{+\infty} \frac{\frac{x^2}{x+e^x}}{\frac{1}{x^2}} dx = 0$. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ 收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x+e^x}$ 绝敛.

Ex. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{\sqrt{x^3+2x+1}}$

$\int_1^{+\infty} \frac{\frac{\ln x \, dx}{\sqrt{x^3+2x+1}}}{\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}}$ $\cancel{= \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{4}}}}$ $x \to +\infty$ 时 $\frac{\cdots}{x^{\frac{5}{4}}} = 0$.

Thm (积分第二中值定理) (P.198)

$f \in R[a,b]$ g在$[a,b]$单调. 则 $\exists \xi \in [a,b]$ s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

Thm. (狄利克雷判别法)

(1) $f(x)$在$[a,+\infty)$单调

(2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(3) $\left|\int_a^{A} g(x)dx\right| < M$. $\forall A > a$.

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛

Thm. (阿贝尔判别法)

(1) $f(x)$在$[a,+\infty)$单调.

(2) $f(x)$在$[a,+\infty)$有界

(3) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛.

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

☆ Ex. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}$

$\left|\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}} = \left(\frac{1}{x^{\alpha}} - \frac{\cos 2x}{x^{\alpha}}\right)\cdot\frac{1}{2}$

散 敛.

$\alpha \geq 1$. 绝敛. $\alpha \leq 0$. 发散. $\alpha \in (0,1)$ 条敛

R-L. f在$[a,b]$上(广义)绝对可积，则

~~$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = 0$. $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0$~~

$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = 0$. $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0$

Ex. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} dx$. $(p>0)$ 收敛性?

$p \geq 1$时 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}$ 散 $\rightarrow \int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} dx$ 散

$0 < p < 1$时 $\boxed{\text{取} \forall q \in (p,1)}$ $\int_0^1 \frac{1}{x^q}$ 敛

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^p} \Big/ \frac{1}{x^q} = \ln x \cdot x^{q-p} = 0$. $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} dx$ 敛.

Ex. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}=\frac{\pi}{2}$ (见PPT)   12.6

Ex. $\int_0^1\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$ 的收敛性. 绝对收敛性?

解: $x=0$ 为瑕点

$\lim\limits_{\delta\to0^+}\int_\delta^1\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx=\lim\limits_{\delta\to0^+}\int_1^{\frac{1}{\delta}}\frac{1}{t}\sin t\,dt=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ 收敛.

$\lim\limits_{\delta\to0^+}\int_\delta^1\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|dx=\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$ 发散. (见前页)

Ex. $\int_0^1\frac{\cos x}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$ 收敛性?

$f(x)=\cos x$. $g(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$. $x=0$ 瑕点.

单调有界　　收敛　　Abel判别法 → 收敛.

Ex. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\,dx$ 的收敛性. $(p>0)$ 瑕积分+无穷积分.

Ex. Beta函数: $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ 的收敛性 $\Leftrightarrow$ $\alpha>0,\beta>0$

解 $\int_0^{\frac{1}{2}}b(x)\,dx$ 收敛且 $\int_{\frac{1}{2}}^1 b(x)\,dx$ 收敛

$\lim\limits_{x\to0}b(x)/x^{\alpha-1}=1$.　$\lim\limits_{x\to1}b(x)/(1-x)^{\beta-1}=1$.

$\Updownarrow$　　$\Updownarrow$

$1-\alpha<1$. $\alpha>0$.　$1-\beta<1$. $\beta>0$

Ex. Gamma函数: $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ 的收敛性 $\Leftrightarrow$ $\alpha>0$.

解: 瑕点 $x=0$ $\Rightarrow$ $1-\alpha<1$. $\alpha>0$.

无穷限 $\Rightarrow$ $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ 收敛. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{x^{-2}}=\frac{x^{\alpha+1}}{e^x}=0$. 收敛.

→ 随便一个 >1 的数都可以.

(Riemann-Lebesgue)

f在$[a,b]$上可积或广义绝对可积(即f与$|f|$均在$[a,b]$广义可积), 则

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0$、$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0$.

Proof. (第一式)

Case 1. f在$[a,b]$黎曼可积, 则f在$[a,b]$有界. 设 $|f(x)|\le M$.

任意给定λ, 令 $n=\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor$, n等分$[a,b]$.

$x_i=a+i\frac{b-a}{n}$, $i=0,1,2,\cdots,n$

(振幅) $\omega_i(f)=\sup\{f(\xi)-f(\eta):\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]\}$

f在$[a,b]$可积, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i=0$

于是 $\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right|=\left|\sum\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\cos\lambda x\,dx\right|$

$\le\left|\sum\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(x_i))\cos\lambda x\,dx\right|+\left|\sum\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x_i)\cos\lambda x\,dx\right|$

$\le\sum\omega_i(f)\Delta x_i+\sum\limits_{i=1}^n|f(x_i)|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,dx\right|$

$\le\sum\omega_i(f)\Delta x_i+n\cdot M\cdot\frac{2}{\lambda}$　　$\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}\le\frac{2}{\lambda}$

$=\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor}\omega_i(f)\Delta x_i+2M\cdot\frac{\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor}{\lambda}\longrightarrow0$ ($\lambda\to+\infty$时)

Case 2. f在$[a,b]$上广义绝对可积. 不妨设a为唯一瑕点. 绝对可积

则$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ s.t. f在$[a+\delta, b]$可积, 且 $\int_a^{a+\delta}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}$ (?)

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \le \left|\int_a^{a+\delta} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| + \left|\int_{a+\delta}^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \quad \text{(由Case 1)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\text{(可控. }\lambda>A\text{时)}} = \varepsilon.\ \forall \lambda > A.$$

Chap 7. 常微分方程

Def 1. 设$x(t)$是在某区间上有定义的未知函数, 则称含有$x=x(t)$及其导数 $x', x'', \cdots, x^{(n)}$的等式 $F(t, x, x', \cdots, x^{(n)})=0$. 为常微分方程(ODE).

最高阶为n: n阶ODE.

Def 2. 线性ODE: 未知函数x及其各阶导数均以一次方幂形式出现.

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t).$$

其中f称为自由项. 当$f(t)\equiv 0$时. 称为n阶齐次线性ODE.

ODE ─ 线性 ─ 齐次线性 / 非齐次线性; 非线性

Def 3. 微分方程的解. 一般解/通解. 特解. 平凡解/非平凡解. 可积/不可积.

非所有解. $x\equiv 0$. 解可用初等函数表示

$x=x(t)$.

Thm. (Cauchy-Picard) 存在唯一性定理 $\Rightarrow$ 解曲线不相交.

12.11

Thm 设$p(x)$, $q(x)$在区间I上连续, $x_0\in I$. 则对$\forall y_0\in\mathbb{R}$. 一阶线性常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y'(x)=p(x)y+q(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$ 在整个区间I上有唯一解

Ex. $p(x)$在I连续. $x_0\in I$. 若$y(x)$为初值问题 $y'(x)=p(x)y(x)$, $y(x_0)=0$ 解. 则$y(x)\equiv 0$.

Ex. 证初值问题 $\underline{y'=\sin y,\ y(0)=\frac{1}{2}}$ 的解$y(x)$在其存在区间I满足 $0<y(x)<\pi$. $\forall x\in I$

解 满足存在唯一条件(不证)

$y=0$, $y=\pi$ 为 $y'=\sin y$ 的解

$\because$ 解曲线不相交 $\Rightarrow$ $0<y(x)<\pi$. 可反证.

Thm. 设函数 $a_k(t)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 和 $f(t)$ 在区间I上连续. $t_0\in I$.

则对$\forall \xi_k\in\mathbb{R}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 定解问题

$$\begin{cases} x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t) \\ x(t_0)=\xi_0,\ x'(t_0)=\xi_1 \cdots\cdots x^{(n-1)}(t_{n-1})=\xi_{n-1} \end{cases}$$

在整个区间I上存在唯一解

$\rightarrow$ 针对初值问题!

同一时刻(t_0)

不能 $f(0)=\cdots$, $f(1)=\cdots$ etc.

7.2 一阶ODE的初等解法

1. 变量分离方程 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx.$ $\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$ ~~+C~~

Ex $\frac{dy}{dx}=y^2\cos x.$ $y(0)=1.$

分离变量得 $\frac{1}{y^2}dy=\cos x\,dx.$ 漏解! 为什么只漏常数?

$y=0.$ ~~本题~~不影响

$-\frac{1}{y}=\sin x+C$

$y=-\frac{1}{\sin x+C}$

$x=0.$ $y=1\Rightarrow C=-1$ $y=\frac{1}{1-\sin x}$

2. 可化为变量分离方程

1) 齐次方程 $\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})$

令 $u=\frac{y}{x}$ $y=ux.$ $dy=u\,dx+x\,du$

$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=g(u)$

$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$

2) 形如 $\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ 的方程

Case 1. $c_1=c_2=0.$ $\frac{dy}{dx}=\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}=g(\frac{y}{x})$

Case 2. $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0.$ 则 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$

$\frac{dy}{dx}=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=f(a_2x+b_2y).$

令 $u=a_2x+b_2y$ 则方程化为 $\frac{du}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}$

$=a_2+b_2f(u)$

$\frac{du}{a_2+b_2f(u)}=dx$

Case 3. $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq0.$ $c_1^2+c_2^2\neq0.$

两直线 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 相交于一点 $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

即 $\begin{cases}a_1(x-\alpha)+b_1(y-\beta)=0\\ a_2(x-\alpha)+b_2(y-\beta)=0\end{cases}$

令 $X=x-\alpha,$ $Y=y-\beta$ 变量替换

$\frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g(\frac{Y}{X}).$

$x^2|u^2+2u-1|=e^{c_1}$

$x^2(u^2+2u-1)=\pm e^{c_1}$??

3. 一阶隐方程

1) $y=f(x,y')$

令 $p=y'$，则 $y=f(x,p)$

两边对 x 求导，$p=\boxed{p,x,p'}\ G$

$G(p,x,p')=0$.

Ex. $x(y')^2-2yy'+9x=0$.

$y=\dfrac{x(y')^2+9x}{2y'}$

令 $p=y'(x)$ 则 $y=\dfrac{x}{2}p+\dfrac{9x}{2p}$

$p=\dfrac{p}{2}+\dfrac{x}{2}p'+\dfrac{9}{2}\dfrac{1}{p}+\dfrac{9}{2}x\cdot(-\dfrac{p'}{p^2})$.

$(\dfrac{1}{2}-\dfrac{9}{2p^2})(p-x\dfrac{dp}{dx})=0$

$\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{p}{x}$ 或 $p^2=9$. ?

$p=cx$.　　$p=3,\ p=-3$　（不能直接对 $p=y'(x)$ 积分!）

通：$y=\dfrac{9x}{2p}+\dfrac{xp}{2}$

$=\dfrac{9}{2c}+\dfrac{c}{2}x^2$,

$0\neq c\in\mathbb{R}$

特：$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+\frac{3x}{2}=3x \\ y=\ \ \ \ \ \ =-3x\end{cases}$　（需满足 $y=\dfrac{x}{2}p+\dfrac{9x}{2p}$）

2) $x=f(y,y')$

令 $p=y'(x)$ 则 $x=f(y,p)$　$\dfrac{dx}{dy}=f($

$=\dfrac{dy}{dx}$　~~$1=G(p,p',y)$~~　?

3) $F(x,y')=0$，没有 y.

令 $p=y'$，$F(x,p)=0$，设 $x=g(t)$，$y'=h(t)$

于是 $dy=p\,dx=h(t)g'(t)dt$

$\begin{cases} x=g(t) \\ y=\int h(t)g'(t)dt+C\end{cases}$

4) $F(y,y')=0$ 处理方法同3.

自治方程. Ex. $y^2+(y')^2=1$.

$y=\cos t$，$\dfrac{dy}{dx}=\sin t$　$\sin t=0$ 时.

$dx=\dfrac{1}{\sin t}dy=\dfrac{1}{\sin t}\cdot(-\sin t)dt=-dt$

$x=-t+C$.　$y=\cos t$

$\Rightarrow y=\cos(C-x)$，$C\in\mathbb{R}$

$y=\pm1$.

Rem. 不满足解的存在唯一性条件.

12.13

4. 恰当方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ $\exists\, du(x,y)$

Ex. $y\cos x\,dx+\sin x\,dy=0$

解 $y\,d\sin x+\sin x\,dy=0$

$d(y\sin x)=0$

通解为 $y\sin x=C$.

$$\frac{ydx-xdy}{xy}=d(\ln|\frac{x}{y}|)$$

$$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=d(\arctan(\frac{x}{y}))$$

Ex. $(\cos x+\frac{1}{y})dx+(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2})dy=0$.

$\cos x\,dx+\frac{1}{y}dy+\frac{ydx-xdy}{y^2}=0$.

$d\sin x+d\ln|y|+d(\frac{x}{y})=0$.

$d(\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y})=0$.

通解 $\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}=C$.

5. 积分因子.

Ex. $(x+y)dx+(y-x)dy=0$.

$\Leftrightarrow$ $(xdx+ydy)+(ydx-xdy)=0$.

同乘(积分因子) $\frac{1}{x^2+y^2}$, 得 $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0$.

即 $\frac{1}{2}d\ln(x^2+y^2)+d\arctan\frac{x}{y}=0$.

通解 $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{x}{y}=C$.

Ex. $(3x^3+y)dx+(2x^2y-x)dy=0$.

$(3x^3dx+2x^2ydy)+(ydx-xdy)=0$.

第二组有积分因子 $\frac{1}{x^2}$. $\frac{1}{y^2}$. $\frac{1}{x^2+y^2}$. 第一组选 $\frac{1}{x^2}$.

$(3xdx+2ydy)+(\frac{ydx-xdy}{x^2})=0$.

$d(\frac{3}{2}x^2+y^2)-d(\frac{y}{x})=0$ ...

6. 常数变易法.

$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)$ $\quad (\alpha(x)e^{\beta(x)})'=e^{\beta(x)}(\alpha'(x)+\beta'(x)\alpha(x))$

$(y'-p(x)y)=q(x) \Rightarrow e^{-\int p(x)dx}(y'-p(x)y)=q(x)e^{-\int p(x)dx}$

$=(ye^{-\int p(x)dx})'$

本质: 新变量 $C(x)=y/e^{\int p(x)dx}$

$$y=e^{\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int -p(x)dx}dx+C)$$

7. Bernouli 方程.

$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)y^n$, $y\neq 0,1$.

$y^{-n}\frac{dy}{dx}=p(x)y^{1-n}+q(x)$. 令$z=y^{1-n}$. 则

$\frac{dz}{dx}=(1-n)p(x)z+(1-n)q(x)$ 关于z的一阶线性ODE. 求z得y.

此外. 若$n>0$. Bernouli方程还有特解$y=0$.

8. Riccati方程 $\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$

若能找到一个解$\varphi(x)$. 令$z=y-\varphi(x)$. 则变为Bernouli方程.

$$z'+\varphi'=pz^2+2p\varphi z+p\varphi^2+qz+q\varphi+r.$$

$$\text{又}\because \varphi'=p\varphi^2+q\varphi+r$$

$$\therefore z'=pz^2+2p\varphi z+qz$$

$$z'=pz^2+(2p\varphi+q)z. \quad \text{Bernouli.}$$

求出z 通解 $y=z+\varphi(x)$ 特解 $y=\varphi(x)$

9. 变量替换法

Ex. $\frac{dy}{dx}+\frac{1+xy^3}{1+x^3y}=0$ x,y地位等. $\frac{dy}{dx}=-\frac{1+vy^2}{1+vx^2}=$

令$u=x+y$, $v=xy$. 则

$$\frac{du}{dv}=\frac{dx+dy}{xdy+ydx}=\frac{1+\frac{dy}{dx}}{y+x\frac{dy}{dx}}=\frac{vx^2-vy^2}{y+vx^2y-x-vxy^2}=\frac{uv}{v^2-1} \quad \text{变量分离.}$$

、、、

Ex. $x''(t)+x(t)=0$

令$y(t)=-x'(t)$. 则方程化为$\begin{cases}x'=-y\\ y'=x.\end{cases}$

再令$x=r(t)\cos\theta(t)$. $y=r(t)\sin\theta(t)$.

$$\begin{cases}r'\cos\theta-r\sin\theta\cdot\theta'=-r\sin\theta & ①\\ r'\sin\theta+r\cos\theta\cdot\theta'=r\cos\theta. & ②\end{cases}$$

$\cos\theta\cdot①+\sin\theta\cdot②$: $r'=0$. $\Rightarrow r=0$. 或 $\theta'=1\Rightarrow\theta=t+C_2$.

$\cos\theta\cdot②-\sin\theta\cdot①$: $r\theta'=r$. 即$x\equiv0$. $r=C_1$

即 $x=C_1\cos(t+C_2)$

7.3 可降阶的高阶常微分方程

7.4 线性常微分方程解的结构.

Thm 1 (叠加原理). 解集合为线性空间. (线性ODE).

Ex. $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}^1$互不相同. 证$e^{\lambda_1t},e^{\lambda_2t}\cdots e^{\lambda_mt}$在任意区间线性无关.

任取I. 设有常数$c_1,c_2,\cdots c_m$, s.t.

$$\sum c_ie^{\lambda_it}\equiv0.$$

两边对t求导. 则
$$\begin{cases}c_1e^{\lambda_1t}+\cdots+c_me^{\lambda_mt}\equiv0.\\ \lambda_1c_1e^{\lambda_1t}+\cdots+\lambda_mc_me^{\lambda_mt}\equiv0\\ \cdots\\ \lambda_1^{m-1}c_1e^{\lambda_1t}+\cdots+\lambda_m^{m-1}c_me^{\lambda_mt}\equiv0.\end{cases}$$

只需证 $\det\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & e^{\lambda_m t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_m e^{\lambda_m t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_m^{m-1} e^{\lambda_m t} \end{bmatrix} \neq 0$ → 范德蒙德

$$= e^{\sum \lambda_k t} \prod_{1\le i<j\le m} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0. \quad \forall t \in I.$$

故方程仅零解. 即 $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

~~Rem~~ 判断 $\varphi_1(t) \cdots \varphi_m$ 在 I 上线性相关的法则

<u>Def.</u> 定义函数组 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m \in C^{m-1}(I)$ 在 I 上的 Wronsky 行列式为

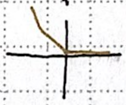
$$W(t) = W[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m](t) = \det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_m \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_m' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)} & \varphi_2^{(m-1)} & \cdots & \varphi_m^{(m-1)} \end{pmatrix}(t)$$

<u>Thm2</u> 函数组 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m \in C^{m-1}(I)$ 在 I 上线性相关的 $\boxed{\text{必要}}$ 条件为

$$W(t) = W[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m](t) = 0.$$

反例 $\varphi_1(t) = \begin{cases} 0 & t\le 0 \\ t^2 & t>0 \end{cases}$

$\varphi_2(t) = \begin{cases} t^2 & t\le 0 \\ 0 & t>0. \end{cases}$



显然两函数 $\varphi_1(t)$ $\varphi_2(t)$ 线性无关.

$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix}(t)$

$t>0$ 时 $\varphi_2 = \varphi_2' = 0$

$t\le 0$ 时 $\varphi_1 = \varphi_1' = 0$

故 $W(\varphi_1, \varphi_2)(t) \equiv 0$.

∵ t 变化时, $c_1 \cdots c_m$ 在变化

$c_1 \cdots c_m$ 为 t 的函数

而要求的 $c_1 \cdots c_m$ 为常数.

Rem. 当 $\varphi_1\ \varphi_2 \cdots \varphi_n \in C^n(I)$ 为 n 次齐次线性 ODE 的 n 个解时, Thm2 逆命题也成立.

12.18

Ex. $x'' + w^2 x = a$ 通解

特解 $x = \frac{a}{w^2}$, 齐次有两线无解 $\sin wt, \cos wt$.

通解 $x(t) = \frac{a}{w^2} + c_1 \sin wt + c_2 \cos wt$.

二阶线性 ODE 的常数变易法

Case 1. 已知齐次线性 ODE 的两线性无关解

$x_1(t)$, $x_2(t)$. $\quad x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$.

则设 $x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t)$ 通解具有如下形式:

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

$$x' = c_1 x_1' + c_1' x_1 + c_2 x_2' + c_2' x_2$$

限制: $c_1' x_1 + c_2' x_2 = 0$. 合理性?

$$x' = c_1 x_1' + c_2 x_2'.$$

$x'' = c_1 x_1'' + c_1' x_1' + c_2 x_2'' + c_2' x_2'$

代入,则 $c_1 x_1'' + c_1' x_1' + c_2 x_2'' + c_2' x_2' + p c_1 x_1' + p c_2 x_2' + q c_1 x_1 + q c_2 x_2 = f$.

$c_1' x_1' + c_2' x_2' = f(t)$.

与 $c_1' x_1 + c_2' x_2 = 0$ 联立,则

$$c_1'(t) = \frac{-x_2(t) f(t)}{W(t)} \qquad c_2'(t) = \frac{x_1(t) f(t)}{W(t)}.$$

Case 2. 已知齐次方程的一个非零解.

可降阶的高阶常微分方程.

1) 不显含未知量 y

2) 不显含自变量 x (自治方程组)

3) m 次齐次方程. 不化 x。$y, y' \cdots$ 均为1次.

$$x^2 y \frac{d^2y}{dx^2} - \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \Rightarrow 2\text{次齐次方程}.$$

$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow$

$1 \ 1 \ 1 \ 1$ 令 $u(x) = \frac{1}{y} y'$

12.20

7.5 高阶常~~微分~~系数线性常微分方程

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0.$$

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

Ex. $x'' + w^2 x = 0$.

$\lambda^2 + w^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i w \Rightarrow$ ~~$x_1(t) = e^{iwt}$~~ $\cos wt, \sin wt$

$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$.

非齐次: ---

Ex. $\begin{cases} x'(t) = -3x - y \\ y'(t) = x - y \quad (2) \end{cases}$ ~~$x''(t) = -3x'(t) - y'(t)$~~

$y = -3x - x'(t)$ 代入(2)

$y'(t) = -3x' - x''(t)$.

$\Rightarrow -3x' - x''(t) = x + 3x + x'(t)$

$x''(t) + 4x'(t) + 4x = 0$

$\lambda = -2$ 二重根. $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$

$y(t) = -3x - x'(t) = -(c_1 + c_2 + c_2 t)e^{-2t}$

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t} \\ y(t) = -(c_1 + c_2 + c_2 t)e^{-2t} \end{cases}$$

Thm (定积分的分部积分法)　　　　三角函数高次方?

$\int \cos^{n+1} x\, dx$?

Thm (带积分余项的Taylor公式)

$f\in C^{n+1}[a,b]$, $x_0\in[a,b]$, 则 $\forall x\in[a,b]$, 有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$ (不要求)

看课本!

5.7 积分的应用 — 微元法

· 平面图形的面积

微元法: $[x,x+\Delta x]$ 对应窄条面积 $\Delta S\approx|f(x)|\Delta x$

$f\in C[a,b]\Rightarrow \Delta S=|f(x)|\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0.$

Proof. $\frac{|\Delta S-|f(x)|\Delta x|}{\Delta x}\le\frac{|M(x,\Delta x)-m(x,\Delta x)|\Delta x}{\Delta x}$

$=|M(x,\Delta x)-m(x,\Delta x)|$ (*)

$\because f$ 一致连续 $\therefore \Delta x\to 0$时, (*)式$\to 0$.

$dS=|f(x)|dx$　　?

· 曲线的弧长

$L:\ x=x(t)\ \ y=y(t)\ \ z=z(t)\ \ t\in[\alpha,\beta]$

$[t,t+\Delta t]$ 对应弧段

$\Delta L\approx\sqrt{(x(t+\Delta t)-x(t))^2+(y(t+\Delta t)-y(t))^2+(z(t+\Delta t)-z(t))^2}$

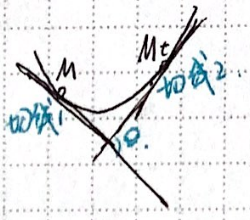
$=\sqrt{(x'(\xi))^2+(y'(\eta))^2+(z'(\zeta))^2}\,\Delta t$ (拉格朗日) x.y.z可导.

$\approx\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\Delta t$.

弧长微元 $dL=$ - - - - - - -

$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$

· 平面曲线的曲率. $L:\ x=x(t),\ y=y(t).\ t\in[\alpha,\beta]$.



曲率 $K\triangleq\lim\frac{|\theta|}{\sigma}$ 角度 / 弧长.

$\theta=\arctan\frac{y'(t+\Delta t)}{x'(t+\Delta t)}-\arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}$

$\sigma=\int_t^{t+\Delta t}\sqrt{(x'(\tau))^2+(y'(\tau))^2}\,d\tau$

$K=$ ____________ P.177.

P.178 Def. 曲率半径 曲率圆. 曲率中心

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int\left(\sqrt{x^2+a^2} - a^2\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} \cancel{+} - \frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \xrightarrow[t=\arcsin\frac{x}{a}]{x=a\sin t} \int a^2\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}a^2\int(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2\sin 2t + C$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\int\frac{d\cos x}{1+\cos x} + \int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = -\ln(1+\cos x) + \tan\frac{x}{2} + C$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x+\cos x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2} + \ln\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)\,dx + \frac{\pi}{4}\cdot\ln\sqrt{2}$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2$$