荷二225 Tel: 62796912

复变函数 （杨晓京）

Complex Analysis

复数 { 实数 $\mathbb{R}$ { 有理数 $\mathbb{Q}$ { 整数 $\mathbb{Z}$; 分数 ; 无理数 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ { 代数数(整系数多项式零点) ; 超越数(非代数数) ; 虚数 i

自然数: $\mathbb{N}$ (不含0!)

函数 - 零点
方程 - 根

可数集 ⇒ 与自然数 $\mathbb{N}$ 或其一个子集可以构成一一对应关系的集合.

所有自然科学 ⇒ 公理 某一 ⇒ 公设. 不需要证明或不需证明

偶集合. $\mathbb{Q}$.

e的构造? Euler 1707-1783 存在A使 $(A^x)'=A^x$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$ ←更好

记得5

$\mathbb{C}$ $\{x+iy\}$. $x.y$ 代表 $\mathbb{R}$. z 代表复数. $\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot z_2^{-1}=z_1\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}$

(x,y)

极坐标形式 $z\neq0$ 时 定义 $z=re^{i\theta}$. 极坐标 $r>0$ $\theta\in[0,2\pi)$

$r=|z|\geq0$. $\theta=\arctan\frac{y}{x}$

$\arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2$ 除法 → 角度相减

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \xrightarrow{\text{复数}} z=z_0+re^{i\theta}$ $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

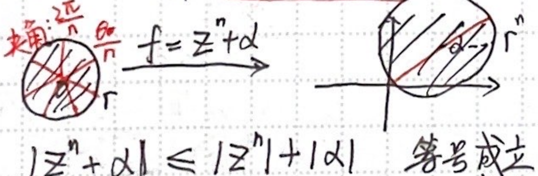
1-5例. $z^2=|z|^2$ 是否恒成立?

$z^2=|z|^2 \Leftrightarrow z^2=z\bar{z} \Leftrightarrow z(z-\bar{z})=0 \Leftrightarrow z=\bar{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

★50%概率考题

1-6例. 求 $\max|z^n+\alpha|$ 并给出取最大值时 z 的取值范围. 其中 n 为正整数. α 为复数.

(注: $z^n+\alpha$ 解为分圆多项式. 其 n 个零点构成正 n 边形的 n 个顶点) $|z|\leq r$



$|z^n+\alpha|\leq|z^n|+|\alpha|$ 等号成立 $\Leftrightarrow z^n=\lambda\alpha\ (\lambda>0) \Rightarrow r^n=\lambda|\alpha|$. 分类!

$\leq r^n+|\alpha|$ 等号成立 $\Leftrightarrow |z|=r$

① $\alpha=0$ 时 $|z^n+\alpha|=|z^n|=|z|^n \Rightarrow \max|z^n+\alpha|=r^n \Leftrightarrow z=re^{i\theta},\ \theta\in[0,2\pi)$

② $\alpha\neq0$ 时 $\alpha=|\alpha|e^{i\theta_0}$, $\theta_0=\arg\alpha\in[0,2\pi) \Rightarrow \lambda=\frac{r^n}{|\alpha|}>0$.

$\Rightarrow z^n=\frac{r^n}{|\alpha|}\alpha=\frac{r^n}{|\alpha|}|\alpha|e^{i\theta_0}=r^ne^{i\theta_0}$

注 $e^{\theta}=e^{\theta+2k\pi i}$ $k\in\mathbb{Z}$ $z^n=r^ne^{i\theta}=r^ne^{i\theta+2(k-1)\pi i}$

$|e^{i\theta}|=1$ $\Rightarrow z=z_k=re^{\frac{i[\theta+2(k-1)\pi]}{n}}$ $(k=1,2,\cdots,n)$

$=r(\cos\cdots+i\sin\cdots)$

○最小值? (=0 分类讨论)

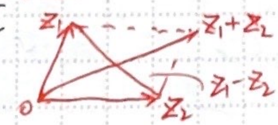
1-11例. 证明等式 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

平行四边形对角线的平方和等于对边的平方和.

解 $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$

$|z_1-z_2|^2=z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$

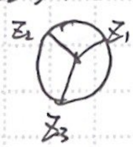
相加得 ……✓.



外接圆圆心作为原点 $\quad \frac{z_1+z_2+z_3}{3}=0$ 中线交点(质心)为原点.

1-19例. 若 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r$, $z_1+z_2+z_3=0$, 证明: $\Delta z_1z_2z_3$ 为正三角形.

原条件: 三角形的质心和外心重合.



解 $z_1+z_2+z_3=0 \Rightarrow z_1=0-(z_2+z_3)$

取模 $|z_1|=r=|z_2+z_3|$

由上题, $r^2+|z_2-z_3|^2=2(r^2+r^2)=4r^2$.

$|z_2-z_3|=\sqrt{3}r$

$|z_1-z_3|=\sqrt{3}r$, $|z_1-z_2|=\sqrt{3}r$ $\Big\rangle$ 三边长相同. 故为等边

$|z^n+\alpha|$ 最小值
规范？复习.

$Ax+By+C=0.$ $\begin{cases} x=\dfrac{z+\bar z}{2} \\ y=\dfrac{z-\bar z}{2i}=\dfrac{-(z-\bar z)i}{2} \end{cases}$

$$A\left(\frac{z+\bar z}{2}\right)+B\left(\frac{-(z-\bar z)i}{2}\right)+C=0.$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \Leftrightarrow z=z_0+re^{i\theta} \Leftrightarrow |z-z_0|=r \Leftrightarrow$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \Leftrightarrow z\bar z+\alpha\bar z+\bar\alpha z+c=0.$$

思考题.

例. $z_1 z_2 z_3 z_4$ 互异. 试判断四点是否共圆

$$\langle z_1,z_2,z_3,z_4\rangle=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\Big/\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z_1. z_2. z_3. z_4 \text{ 共线或共圆.}$$

例 $|z_k|=r.\ k=1,2,3.\ z_1+z_2+z_3=0. \Rightarrow \triangle z_1z_2z_3$ 是正△.

$z^n=r$. 为圆多项式.
证两边根对应.

任意三点, 无平移△到外接圆心为0条件.

令 $f_3(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\stackrel{?}{=}z^3-z_1z_2z_3$

$$=z^3-(z_1+z_2+z_3)z^2+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)z-z_1z_2z_3$$

充要. $\quad \| \quad 0 \qquad z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)$

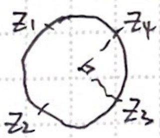
$\because |z_k|=r \quad \therefore z_k\bar z_k=r^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{z_k}=\dfrac{\bar z_k}{r^2} \qquad \| \quad z_1z_2z_3\cdot\dfrac{1}{r^2}\left(\underline{\bar z_1+\bar z_2+\bar z_3}\right)=0.$

$$f_3(z)=0 \Leftrightarrow z^3=z_1z_2z_3=r^3e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}=r^3e^{i\alpha}.$$

$$z=z_k=re^{\frac{i\alpha+2\pi(k-1)i}{3}},\ k=1,2,3.$$

$$|z_k|=r,\ \theta_{k_1}-\theta_{k_2}=\tfrac{2}{3}\pi.$$

若4个点, $|z_k|=r.\ k=1,2,3,4.\ \sum_{i=1}^{4}z_k=0.$



令 $f_4(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_4)=\prod_{i=1}^{4}(z-z_i)$ $\qquad d=z_1z_2z_3z_4\neq0.$

$$=z^4+az^3+bz^2+cz+d.$$

$a=\sum_{i=1}^{n}z_i\ \cancel{\neq0}\ (=0)$ $\qquad c=z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+z_1z_3z_4+z_2z_3z_4$

$$=z_1z_2z_3z_4\cdot\frac{1}{r^2}\left(\sum_{i=1}^{4}\bar z_i\right)=\frac{d}{r^2}\bar a \quad (a=0\Leftrightarrow c=0)$$

$$b=z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4$$

$f_4(z)=z^4+bz^2+d=0.$ 偶次项! 根成对.

$\underline{z_1=-z_3,\ z_2=-z_4.\ \text{为圆内接矩形.}}$

$+b=0$条件. 证 $b=0$ 即证为正方形. 下证.

$$b=\cancel{z_1z_2}-z_1^2-\cancel{z_1z_2}-\cancel{z_1z_2}-z_2^2+\cancel{z_1z_2}=-(z_1^2+z_2^2)$$

三角形只需一个条件
四边形要2个

$$b=0 \Leftrightarrow z_1=iz_2 \Leftrightarrow \text{正方形}(z_1\perp z_2)$$

$2n+1$: n个条件
$2n$: n个条件

如何证条件无法再少?

对应多项式
首尾对应的可化为1

$f(z)$在z_0处连续. $f(z_0)\neq 0$. 证明$\exists\delta>0$. 当$|z-z_0|<\delta$时, 有$f(z)\neq 0$.

令$\varepsilon=\cancel{|z_0|/2}\ \frac{1}{2}|f(z_0)|>0$.

$\Rightarrow \exists\delta>0$, 当$|z-z_0|<\delta$时, $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.

$|f(z)|-|f(z_0)|\le|f(z)-f(z_0)|<\frac{1}{2}|f(z_0)|$ 即. $\underbrace{\cancel{|f(z_0)|}\ \overset{0<}{\frac{1}{2}}|f(z_0)|<|f(z)|<\frac{3}{2}|f(z_0)|}$

$\cancel{|f(z)|+|f(z_0)|\ge|f(z)-f(z_0)|}$ $\quad \cancel{f(z_0)}\ |f(z_0)|-|f(z)|\overset{?}{<}\frac{1}{2}|f(z_0)|$

有理分式:

$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 其中$P(z)$. $Q(z)$为多项式.

$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k\quad(a_k\neq 0)$

内点: $z_0\in D$. 则D的内点$\Leftrightarrow\exists\delta>0$. $|z-z_0|<\delta$时$z\in D$.

开集: 内点构成的点集. (无边界.无孤立点!)

区域: 连通的开集. (连通: $\forall z_1,z_2\in D$且$z_1\neq z_2$, $\exists$折线L首尾相连$z_1 z_2$且$L\in D$).

有限个折线段的并 长度有限

为何定义不用曲线?

Chapter 2. 复函数

什么时候 函数 = 自己的Taylor级数?

C^∞ 不对! 反例: $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}\Rightarrow f\in C^\infty(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$

$f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}+\frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$

$\cdots\cdots$

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}$

(复数不分正负无穷) $=\lim_{t\to\infty}te^{-t^2}=0.$

$\Rightarrow$ 在R上均无穷阶连续!

$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\cdots=0.$

$\cdots$

$f(x)\neq\sum\frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}=0+\cdots+0+o(x^n)=o(x^n).$

Taylor为0! 但$f(x)$不是零函数!

$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=u+iv.\quad\begin{cases}u=e^x\cos y\\ v=e^x\sin y\end{cases}$

复数导数: $f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=a+ib.$ ($a,b\in R$. 均不为∞)

若$f(z)=u+iv$, $u,v\in C'$

那么 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

e.g. $f=e^z=(e^x\cos y+ie^x\sin y)$

$f'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=u+iv=f.$

$\cancel{(\because f=e^{x+iy}=e^x+ie^{\frac{\pi}{2}})}$

9.30

$u,v\in C^1$. $f(z)$在z点可导则有$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ 且有C-R条件 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$

若$u,v\in C^n$. 则$f^{(n)}(z)=\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+i\frac{\partial^n v}{\partial x^n}$, $n=1,2,\cdots$

[证: $f''(z)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})+i\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial x})$
$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. 用归纳法: $f^{(n+1)}(z)=\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}+i\frac{\partial^{n+1}v}{\partial x^{n+1}}$得证]

一阶如何证? C-R条件意义?

Def. $f(z)$在z_0解析(analytic)是指存在$\delta>0$, 当$|z-z_0|<\delta$时$f(z)$可导. (满足C-R条件).

Thm $f(z)$在z_0解析的充要条件是$f(z)$在z_0的一个$\boxed{\text{邻域}}$内等于其Taylor级数. 即$\exists\delta>0$, 当$|z-z_0|<\delta_0$时, $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z)(z-z_0)^n}{n!}$ (证明见教参)

只要可导($\Leftrightarrow C^1$且满足C-R条件), 就是C^∞可导.

P41. $f(z)$在z_0可导$\Leftrightarrow$ u,v在z_0可微, 且满足C-R方程$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

P42 解析 邻域内

e.g. $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

令$z=x+iy$. $\Rightarrow$ $f(z)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{z^2}}, & z\neq 0\\ 0. & z=0.\end{cases}$

当$z=yi$ $(x=0)$时, 有$f(yi)=\begin{cases}e^{\frac{1}{y^2}} & y\neq 0\\ 0 & y=0.\end{cases}$ 在$y=0$不连续$\Rightarrow$不可导

结论: $f(z)\neq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!}\equiv 0$.

e.g. $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=\underbrace{e^x\cos y}_{u}+i\underbrace{e^x\sin y}_{v}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

$(e^z)'=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z$. 直接求导(?) 处处满足C-R条件

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}{2}i\end{cases}$

定义

$\Rightarrow\begin{cases}\cos z=:\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\ \sin z=:\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\end{cases}$

复平面上的三角函数.
$\cos^2 z+\sin^2 z=1$. 但$|\cos z|$与$|\sin z|$可以是任何值.

写sin.

☆例 写出 $\cos(x+iy)$ 的实虚部并由此证明：$\forall A+iB\in\mathbb{C}$. $A.B\in\mathbb{R}$.
均存在无穷多 $x+iy$ 使 $\cos(x+iy)=A+iB$

证. 令 $Z=x+iy \Rightarrow \cos(x+iy)=[e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}]/2$

$$=\frac{1}{2}[e^{-y}e^{ix}+e^{y}e^{-ix}]=\frac{1}{2}[e^{-y}(\cos x+i\sin x)+e^{y}(\cos x-i\sin x)]$$

$$=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x+\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}i\sin x$$ （验证：$y=0$ 时为 $\cos x$）

$\Rightarrow Re[\cos(x+iy)]=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x$

$Im[\cos(x+iy)]=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\sin x$ （3分）

求解即令 $\begin{cases}\frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y})\cos x=A & ①\\ \frac{1}{2}(e^{-y}-e^{y})\sin x=B. & ②\end{cases}$

找到一个解就有无穷解
$\because$ x 关于 2π 循环.

（3分）

1/ $B=0$ 时 $\Leftrightarrow$ $y=0$ 或 $\sin x=0$.

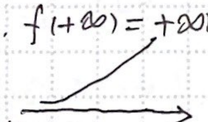
(a) $|A|\leq 1$ 可取 $y=0. \Rightarrow \cos x=A \Rightarrow x=\arccos A+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

(b) $|A|>1. \Rightarrow \sin x=0. \Rightarrow \cos x=\pm 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y})=\pm A$. 取为 $|A|. \Rightarrow \frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y})=|A|$.

设 $f(y)=\frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y})$, $y>0$. $f(0^+)=1$. $f(+\infty)=+\infty$.

$f'(y)=\frac{1}{2}(e^{y}-e^{-y})>0.(y>0)$



单增函数 $\Rightarrow$. $\exists y_A>0$. 使 $f(y_A)=|A|$ $(y_A>0)$

$f(-y_A)=|A|$

x 无穷多解（$A>0$：$2k\pi$，$A<0$：$2k\pi+\pi$）.

y 有2个解（y_A. $-y_A$）

（4分）

2/ $B\neq 0$ 由①②

$\Rightarrow \begin{aligned}\cos x&=\frac{2A}{e^{y}+e^{-y}}\\ \sin x&=\frac{2B}{e^{-y}-e^{y}}\end{aligned} \Rightarrow \frac{4A^2}{(e^{y}+e^{-y})^2}+\frac{4B^2}{(e^{-y}-e^{y})^2}=1$.

记 $g(y)=\frac{4A^2}{(\quad)^2}+\frac{4B^2}{(\quad)^2}$. $(y>0)$

$g(0^+)=+\infty$. $g(+\infty)=0$. $y>0$ 时 $g'(y)<0$. 单减

$\Rightarrow \exists$ 唯一解 $y_1>0$. 使 $g(y_1)=g(-y_1)=1$.

故 y 有2解. x 有无穷多解.

$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} C_k z^k = C_n \prod_{k=1}^{n}(z-z_k)\quad C_n\neq 0.$

写成Taylor和形式

解的积形式

$\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}=z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$?

$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\right)$

在复平面处处可导，且有零点，

(满足C-R条件)

$\Rightarrow$可写成乘积形式.

(必须有零点)

如果无零点只能写成和形式

$\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2(n-1)}}{(2n-1)!}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$

$=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)=1-\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\right)z^2+\cdots$

比较系数. $\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

$\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\prod_{p_k为素数}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^3}}\right)$

~~Riemann~~ 黎曼.(1826-1866)

零点落在...? 黎曼猜想

$\zeta(2k)$ $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$ $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}.$ $\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}.$ $\zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450}.$ $\zeta(10)=\frac{\pi^{10}}{93555}.$

$\zeta(2k)=C_k\pi^{2k}.\quad C_k\in Q^+\quad C_1=\frac{1}{6}.$

开卷. 求C_k递推公式

$\frac{\sin z}{z}=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$. 两边取对数. $\ln\sin z-\ln z=\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$

$\ln\sin z-\ln z=-\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{nk^{2n}\pi^{2n}}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{nk^{2n}\pi^{2n}}\right)$

$=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{n\pi^{2n}}\cdot\zeta(2n)$

两边对z求导.

$\frac{\cos z}{\sin z}-\frac{1}{z}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)z^{2n-1}}{\pi^{2n}}$

同乘z. $\frac{z\cos z}{\sin z}=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}C_n z^{2n}.$

$C_1=\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}.\quad C_1=\frac{1}{6}.\quad\cdots$

令 $z=\pi i\Rightarrow\frac{\sin(\pi i)}{\pi i}=\frac{e^{-\pi i}-e^{i\pi i}}{2\pi i}i=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}>0.$

右 $=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$???

$\ln z = \ln(|z|e^{i\arg z})$
$= \ln|z| + \ln(e^{i\arg z})$
$= \ln|z| + i\arg z$

$\ln e^{i\theta} = \ln e^{i\arg z} = i\theta = i\arg z$
$\ln(-x) = \ln(-1) + \ln x = \ln x + \pi i$, $x>0$.
$\ln(i) = \frac{\pi}{2} i$
$\ln(-i) = \ln(-1) + \ln(i) = \frac{3}{2}\pi i$

$\ln(3+4i) = \ln|3+4i| + i\arg(3+4i)$
$= \ln 5 + i\arg(3+4i)$ ✓

$f(z) \neq 0$. $\ln f(z) = \ln\underbrace{|f(z)|}_{u} + i\arg(\underbrace{f(z)}_{v})$
$(\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$

函数象：二维曲线、点.
不可能是直线.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow u$ 常数 $\Rightarrow v$ 常数.

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.
$|f'(z)|^2 = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 \geq 0$.

$\left|\frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x \Delta y}\right| = |J|$ $|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z)|^2$

10.7 图象为直线/圆周/点… $\Rightarrow$ 象的面积为 0 $\Rightarrow |J| = 0 \Rightarrow f'(z) = 0 \Rightarrow f$ 为常数

例1. $1^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln 1} = e^{\frac{1}{n}(\ln 1 + 2k\pi i)} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $k \in \mathbb{Z}$. $(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$

例2. 求 $1^{\sqrt{2}}$ (即求 $z^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$ 原象)

$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 1} = e^{\sqrt{2}(2k\pi i)} = e^{2\sqrt{2}k\pi i} = \cos 2\sqrt{2}k\pi + i\sin 2\sqrt{2}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

设 $z_k = e^{2\sqrt{2}k\pi i}$. 若 $z_k = z_n \Rightarrow e^{2\sqrt{2}(k-n)\pi i} = 1$

那么 $e^{2\sqrt{2}(k-n)\pi i} = e^{2m\pi i}$ $(m \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}(k-n)\pi i = 2m\pi i$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(k-n) = m \Leftrightarrow k-n = m = 0 \Rightarrow k = n$. 故 $k \neq n$ 时 $z_n \neq z_k$.

稠密分布. 且几乎均匀分布.

$a^b = e^{b\ln a} = e^{b(\ln a + 2k\pi i)}$ $k \in \mathbb{Z}$
约定 $a \neq 0$. $a \neq e$. $a = e$ 时 $e^b = e^{b+2k\pi i}$

$f(z) = u + iv$ 可导 $\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

1/ 若 $u = const$. (或 $v = const$) $f'(z) = 0$. $f(z) = const$

2/ 若 $|f| = const$. 或 $\arg f = const$. 令 $g(z) = \ln f(z) \Rightarrow g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$

f 不为 0.

$\because f(z) = |f(z)| \cdot e^{i\arg f(z)}$?

$g(z) = \underbrace{\ln|f(z)|}_{u} + \underbrace{i\arg f(z)}_{iv}$

3/ $au + bv = c$. $a.b.c$ 为实常数

~~$f(z) = u + iv$ 可导 $\Leftrightarrow$~~ $S = \iint_D du\,dv = \iint_D |J|\,dx\,dy$ $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z)|^2 \geq 0$.

若面积为 0 ~~$\Rightarrow$ 一点 $f'(z) \neq 0$~~ $\Rightarrow$ 若有一点 $|f'(z)| > 0 \Rightarrow$ 所有点 $f'(z) = 0$.

(反证) 因 $f'(z)$ 连续
邻域内 $|f'(z)| > 0$ 面积大于 0

Chapter 3 复积分

分段光滑曲线 C. 光滑曲线 L. $z=z(t)=x(t)+iy(t)=(x(t),y(t))$ $t\in[a,b]$

光滑: $z'(t)$ 连续且 $z'(t)\neq 0$ 则 $\forall t\in[a,b]$.

$$\oint_L f(z)dz=\oint_L(u+iv)(dx+idy)$$

闭曲线积分

$$=\oint_L udx-vdy+i\oint_L vdx+udy$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}.\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Green 公式: $\oint_C Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

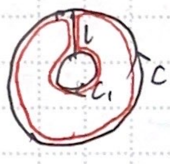
$$=\iint_D-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+i\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint 0\,dxdy+i\iint 0\,dxdy=(0,0)=0.$$ 由分复数和实数0.

$\Rightarrow$ Cauchy-Goursat 定理.

复合闭路定理.

若 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是简单闭曲线. $C_1\cdots C_n$ 互不相交互不包含且均在 C 内.
$f(z)$ 在由 $C, C_1, \cdots, C_n$ 围成的区域内可导. 在 $C, C_1, \cdots, C_n$ 上连续.
则有 $\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)dz.$



$L=C\cup L^+\cup L^-\cup C_1$ → 逆时针方向.

$$\oint_L=0=\oint_C+\oint_{C_1}+\left(\oint_{L^+}+\oint_{L^-}\right)=\oint_C+\oint_{C_1}\Rightarrow\oint_C=\oint_{C_1^+}$$

n=2,3,…时可同理类推.

e.g.

$$I_n=\oint\frac{dz}{(z-z_0)^n},\ n\in\mathbb{Z}.$$

C: $|z-z_0|=\text{const.}\Rightarrow z=z_0+re^{i\theta}$ θ 从 $0\to 2\pi$.

$dz=ire^{i\theta}d\theta$, $(z-z_0)^n=r^ne^{in\theta}$.

$2\pi\cdot\frac{i}{r^0}=2\pi i$

$$I_n=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}d\theta}{r^ne^{in\theta}}=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}\underbrace{e^{i(1-n)\theta}}_{=\cos(1-n)\theta+i\sin(1-n)\theta}d\theta=\begin{cases}2\pi i & n=1\text{时}\\ 0 & n\neq1\text{时}\end{cases},\ n\in\mathbb{Z}$$

Cauchy 高阶导数公式.

$$\oint_{|z|=r>0}\frac{\sin z}{z}dz=\sin 0\cdot 2\pi i=0.\qquad \oint\frac{\sin z}{z^2}dz=$$ (用此公式)

若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|=r$ 上连续. 在 $|z-z_0|<r$ 内处处可导. 则有.

$$2\pi i\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\oint_{|z-z_0|=r>0}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.\quad\forall n\in\mathbb{N}\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$\Leftrightarrow f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r>0}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

(∵解析)

证明: $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^k}{k!}$ 两边同除 $(z-z_0)^{n+1}$ 做积分. $2\pi i\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{k!}\oint\frac{1}{(z-z_0)^{n+1-k}}dz=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{k!}I_{n+1-k}=\cancel{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

仅 $k=n$ 时积分为 $2\pi i$ (由前 I_n 知)

用高阶导反推 I_n.

令 $f(z)=1\Rightarrow\oint\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\left\{\frac{f^{(n)}(z_0)2\pi i}{n!}=\begin{cases}0 & n=1\\2\pi i & n\neq1\end{cases}\right.$ ......

当 $n=0$ 时 $\frac{f^{(0)}(z_0)}{0!}=\frac{f(z_0)}{1}=\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\,\frac{1}{2\pi i}$ (∵ $dz=d(re^{i\theta})=ire^{i\theta}d\theta=i(z-z_0)d\theta$)

$$=\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta\cdot\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

即 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$ 平均值公式 (与半径无关)

最大模原理

若 $f(z)$ 在 $z_0\in D$ 中取最大模. ∂D $\bar D=D\cup\partial D$

$$|f(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta\leq\frac{1}{2\pi}\cdot2\pi|f(z_0)|=|f(z_0)|$$

取等: $|f(z_0+re^{i\theta})|=f(z_0)$ $\forall r>0$. $z_0+re^{i\theta}\in D$. 故 $z\in\bar D$ 时 $|f(z)|=const$.

有限覆盖定理 由前例题 $f(z)=const$.

故最大模一定在边界取到 (除非是常数)

调和函数

令 v 满足条件 C-R. ?设 $f(z)=u+iv$ 在 D 内可导在 $\bar D$ 上连续

$\Delta u=0$. $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\\\frac{\partial^2v}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\end{matrix}\Rightarrow\Delta=0.$

令 $g(z)=e^{f(z)}=e^{u+iv}\Rightarrow|g(z)|=e^u$ ($|e^{iv}|=1$)

$g'(z)=f'(z)e^{f(z)}=f'(z)g(z)\Rightarrow g$ 可导 g 在边界取最大模

$u=\ln|g(z)|$ $\Rightarrow u$ 在边界取最大值.

调和函数一定在边界上取最大和最小值.

$\boxed{\text{看笔记 10.14}}$

最小模: $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ (设 f 无零点) g 可导 (∵ $g'(z)=\frac{-f'(z)}{f^2(z)}$)

∴ $g(z)$ 最大模在边界取 ⇒ f 最小模在边界取!

代数学基本定理

设 $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}c_kz^k$. $c_n\neq0$.

$P_n(z)=c_n\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$ ⟺ $P_n(z)$ 至少有一个零点 z_1 $(n\geq1)$

⟺ $P_n(z)=(z-z_1)P_{n-1}(z)$ } 若 P_{n-1} 至少有1零点 $(n\geq2)$ 则可归纳

$=(z-z_1)(z-z_2)P_{n-2}(z)$

只需证任意多项式在复平面至少有1零点. ⋮

反证. 设 $P_n(z)\neq0$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

10.14

令 $f(z)=\frac{1}{P_n(z)} \Leftrightarrow f'(z)=\frac{-P_n'(z)}{P_n^2(z)}$ (因为 $P_n(z)\neq 0$, $f(z)$ 可导)

$z\to\infty$ 时 $f(z)\to 0$. 满足最大模原理:

$\max\limits_{|z|\le r}|f(z)|=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ 矛盾: $f(z)$ 中低外高. 但 $z\to\infty$ 时 $f(z)\to 0$

$\Rightarrow$ 只能恒为0 ~~⇒~~ ($\because$ 其实 $f(z)$ 不是处处可导 $P_n(z)$ 有零点)

↑注意是 n+1. 考(3')

Thm. $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ 令 $M(r)=\max\limits_{|z-z_0|=r}|f(z)|\Rightarrow |f^{(n)}(z_0)|\le\frac{n!M(r)}{r^n}$ ☆

Pf. 两边取模. $|f^{(n)}(z_0)|=|\frac{n!}{2\pi i}||\oint\limits_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz|=\frac{n!}{2\pi}\cdot|\oint\limits_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz|$

$\le\frac{n!}{2\pi}\oint\limits_{|z-z_0|=r}|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}||dz|$ × 复数. $z=z_0+re^{i\theta}$, $dz=ire^{i\theta}d\theta$, $|dz|=rd\theta$

$\le\frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M(r)}{r^{n+1}}\cdot r\,d\theta=\frac{n!M(r)}{r^n}$ □.

Thm. Liouville 定理: 有界的整函数是常数.

证. 令 $M(r)\overset{\le?}{=}M>0$. Def. 处处可导 或 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!}$, $\forall z\in\mathbb{C}$ 成立

用上式 $0\le|f^{(n)}(0)|\le\frac{n!M}{r^n}$ $(\forall r)$ $\therefore f^{(n)}(0)=0$.

也可用 Liouville 证代数学基本定理.

令 $f(z)=\frac{1}{P_n(z)}$ $|z|\le r$ 时 $|f(z)|\le|f(z_0)|$ 最大模原理

$|z|>r$ 时 $|f(z)|\le 1$ (可取足够大的 r)

用 Liouville → 有界 → 常数 → $z\to\infty$ 时 $f(z)\to 0$ 矛盾.

必考

例. 设 $f(z)$ 是整函数(处处可导)且存在 $M>0$(常数)及 $n\in N$ 使得 $\forall z\in\mathbb{C}$.

有 $|f(z)|\le M\sum\limits_{k=0}^{n}|z|^k$. 证明: $f(z)$ 是一次数不超过 n ($\le n$) 的多项式.

Pf. $M(r)\le M\sum\limits_{k=0}^{n}r^k$ ($M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$)

$f^{(n+k)}(0)=\frac{(n+k)!}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+k+1}}dz\Rightarrow 0\le|f^{(n+k)}(0)|\le\frac{(n+k)!M(r)}{r^{n+k}}\le\frac{(n+k)!M\sum\limits_{i=0}^{n}r^i}{r^{n+k}}$ $\xrightarrow{r\to\infty 时} 0$

故 $f^{(n+k)}(0)=0$.

例. 求 $J_n = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1-\cos 4z^5}{z^n} dz, \ n\in N$

法一: $= \frac{(1-\cos 4z^5)^{(n-1)}}{(n-1)!} 2\pi i$

$= ?$

法二: $\cos x = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad \forall x\in\mathbb{C}$

$$\frac{1-\cos 4z^5}{z^n} = \frac{1}{z^n}\cdot\left(1-\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m(4z^5)^{2m}}{(2m)!}\right) = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+1}4^{2m}}{(2m)!\, z^{n-10m}}$$

两边积分 $J_n = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}4^{2m}}{(2m)!}\boxed{\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{z^{n-10m}}dz}$ 与I定义同

I_{n-10m} 仅当 $n-10m=1$ 时 I 为 $2\pi i$ 其余为0.

$$\because J_n = \begin{cases}0, & n\ne 10m+1 \\ \frac{(-1)^{m+1}4^{2m}}{(2m)!}2\pi i, & n=10m+1.\end{cases} \quad (m=1,2,\cdots)$$

(-1) m上标???

$\| \ m=\frac{n-1}{10}$

<10时均为0!

$$J_n = \begin{cases}0, & n\ne 10m+1, \ m=1,2,\cdots \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{10}}4^{\frac{n-1}{5}}2\pi i}{(\frac{n-1}{5})!}, & n=10m+1时, \ m=1,2,\cdots\end{cases}$$

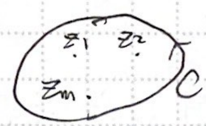
考题 $1-\cos 3z^4\cdots$

例. 求 $J_n = \oint\limits_{|z-z_0|=r}\frac{\sin z}{(z-z_0)^n}dz$

解: $= \frac{2\pi i}{(n-1)!}(\sin z)^{(n-1)}\Big|_{z=z_0} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\sin\left(z_0+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$

特例 令 $z_0=0 \Rightarrow J=J_n=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\sin\left(\frac{n-1}{2}\pi\right)$

$$\oint\limits_{|z|=r}\frac{\sin z}{z^n}dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\sin\left(\frac{n-1}{2}\pi\right)$$



$$f(z) = \sum_{k=1}^{n_1}\frac{C_k^1}{(z-z_0)^k}+\sum_{k=1}^{n_2}\frac{C_k^2}{(z-z_0)^k}+\cdots+\sum_{k=1}^{n_m}\frac{C_k^m}{(z-z_n)^k}+g(z)$$

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n_1}C_k^1 I_k+\sum_{k=1}^{n_2}C_k^2 I_k+\cdots+\sum_{k=1}^{n_m}C_k^m I_k + 0$$

g(z)在C上连续, C内可导 → 定理

$$= \left(\sum_{i=1}^{m}C_1^i\right)2\pi i$$

C_k 是什么?

$M(r) = \max\limits_{|z-z_0|=r}|f(z)|$ 证明 $M(r)$ 若不是常数, 则必严格单调增.

$M(r)=const$ 时

$r\to 0$ 得 $f(0)=const$

$\Rightarrow f(z)$ 为const (∵ $f(z)=f(0)$ 最大模原理)

$M(r_1)>M(r_2)$ ($r_1>r_2$ 时)

否则 $r=r_2$ 时 最大模在内部取到. 退化为常数情况? C上全为常 or $r<r_2$

Proof?

考

求 $I=\oint_{|z|=r>1}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz=\oint_{c_1}+\oint_{c_2}$ $\quad c_1\ \ 0<|z+1|=\varepsilon<<1$ $\quad c_2\ \ 0<|z|=\varepsilon<<1$

$=\frac{2\pi i}{0!}(z^3e^{\frac{1}{z}})\Big|_{z=-1}^{0}=\frac{-2\pi i}{e}+\oint_{c_2}$? 不好算.

减少奇点! 令 $t=\frac{1}{z}$. $dz=d(\frac{1}{t})=-\frac{dt}{t^2}$. $|z|=r \Leftrightarrow |t|=\frac{1}{r}<1$.

$$I=\oint_{|t|=\frac{1}{r}}\frac{-e^t}{t^3(1+\frac{1}{t})}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\oint_{|t|=\frac{1}{r}}\frac{e^t}{t^4(t+1)}dt=\frac{2\pi i}{3!}\left(\frac{e^t}{1+t}\right)^{(3)}\Big|_{t=0}$$

注意符号 顺时→逆时针变化

$=c_3\cdot 2\pi i \rightarrow$ Taylor系数

$f(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k=\sum_{k=0}^{+\infty}c_kt^k$ 下面只需求 c_3 即可.

Taylor 简便运算.

$f(t)=\frac{e^t}{1+t}=(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots)(1-t+t^2-t^3+\cdots)$

$=1+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+\cdots$

$=1-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+\cdots$ $\quad \underline{c_3=-\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow$ 原式 $=-\frac{2}{3}\pi i$

例: $J_{r,n}=\oint_{|z|=R>r}\frac{dz}{r^n+z^n}$ 解: ①设 $r=1$, 求 $I_{1,n}=\oint_{|z|=R>1}\frac{dz}{1+z^n}$

分析 $n=1$ 时 $I_{1,1}=\oint_{|z|=R>1}\frac{dz}{1+z}=I_1=2\pi i$ $\quad n\geq 2$ 时?

去奇点 分圆多项式!

~~$n=2$时~~ $\boxed{令\ t=\frac{1}{z}}\Rightarrow dz=-\frac{1}{t^2}dt$, $|t|=\frac{1}{|z|}=\frac{1}{R}<1$.

$$\Rightarrow I_{1,n}=-\oint_{|t|=\frac{1}{R}<1}\frac{1}{1+(\frac{1}{t})^n}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\oint_{|t|=\frac{1}{R}<1}\frac{t^{n-2}}{1+t^n}dt$$

$n=1$ 时. $\oint\frac{\overbrace{\frac{1}{1+t}}^{f(t)}}{t}=\frac{2\pi i}{0!}f(0)=2\pi i$

$n\geq 2$ 时 C-G定理 $=0$.

$\therefore I_{1,n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n\geq 2\end{cases}$

② $I_{r,n}=\frac{1}{r^n}\oint_{|z|=R>r}\frac{dz}{1+(\frac{z}{r})^n}=\frac{1}{r^{n-1}}\oint_{|\frac{z}{r}|=|\frac{R}{r}|>1}\frac{d(\frac{z}{r})}{1+(\frac{z}{r})^n}=\frac{1}{r^{n-1}}\oint_{|u|>1}\frac{du}{1+u^n}=\frac{1}{r^{n-1}}I_{1,n}$ 还是与r无关

$=\begin{cases}\frac{2\pi i}{r^{0}}=2\pi i, & n=1\\ 0, & n\geq 2\end{cases}$

求 $J_n = \oint_{|z-z_0|=r>0} \frac{\sin z}{(z-z_0)^n} dz = \frac{(\sin z)^{(n-1)}|_{z=z_0} \cdot 2\pi i}{(n-1)!} = \frac{\sin\left(z_0+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)}{(n-1)!}2\pi i$

$z_0=0$时 $\oint_{|z|=r>0}\frac{\sin z}{z^n}dz = \frac{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)2\pi i}{(n-1)!}$ 不能从积分是否为0判断是否可导 ?

10.21

Chapter 4 级数 Series

$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-z_0)^k$ 幂级数 power series

$f(z)$ 在z_1是否收敛? $\Leftrightarrow$ $f(z_1)$ 有限且唯一 $\to$ e.g. $\sum(-1)^n$

条件收敛. $f(z_1)$条敛 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1' \text{ 收敛} \\ 2' \text{ 不绝对收敛} \end{cases}$

绝对收敛 $f(z_1)$绝敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n||z_1-z_0|^n < +\infty$

e.g. $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $x\in[-1,1)$ $= -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots$

令 $x=-1$. $\ln 2 = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛.

e.g. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n} = ?$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\theta}{n} = ?$

$|z|=1$ 时 有些收敛.

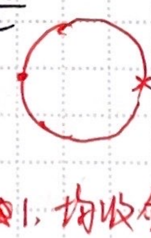
$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$. $\boxed{|z|<1 \text{ 收敛}}$ 设 $z = e^{i\theta}$ $\theta\in[0,2\pi)$

$|z|=1$时. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\theta n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n} + i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\theta}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}\Big|_{z=e^{i\theta}}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = -\ln(1-z) = -\ln(1-e^{i\theta}) = -\ln(1-\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$= -\ln\left(2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = -\ln\left[2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]$$
$$= -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) - \ln(-i)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) - \ln(-i) - \ln\left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right)$$
$$= -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) - \frac{i\theta}{2} + \frac{\pi}{2}i = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)i$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}$

$\ln(1-x)$ 在 -1 敛, 1 不敛. 考虑复平面内圆周.



$\theta=\frac{\pi}{2}$时. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n} = -\ln 2\sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}i$

…… 均可计算.

除了1, 均收敛.

$\theta=\pi$时. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ ✓

$$\frac{\ln(1-z)}{z} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}$$

$$\int_0^{z}\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$$ 开卷.

$$\int\frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = \sum\frac{x^{n-1}}{n}\,dx \cdots$$

power series $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \supset$ 包含关系 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ Taylor

$c_n = n^n$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^n z^n = g(z)$

$g(0) = c_0 = 0^0 = 1$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} n^n (z-z_0)^n = g(z)$

$g(z_0) = 1$

$z\neq 0$. $(nz)^n = a_n$ $\quad \sum a_n \to +\infty$

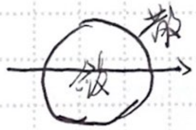
除了一个0点均不收敛.

Abel定理：若 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在 z_1 收敛 则 $\forall z: |z|<|z_1|$ 时. $f(z)$ 绝对收敛.

而若 $f(z)$ 在 z_1 发散时. 则对 $\forall z: |z|>|z_1|$ 时. $f(z)$ 发散

考题: 叙述Abel定理2' 收敛半径def 2' 举3例子 3×2'

收敛半径 $R(>0)$ 的定义 若存在 $R>0$. 使 $|z|<R$ 时 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 收敛.
而 $|z|>R$ 时 $f(z)$ 发散(不收敛). 则称 R 为 $f(z)$ 的收敛半径.



$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$. $\quad q\in(-1,1)$

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}$ $\quad q=x^2$. $|x|<1$.

$|x|>1$时 $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}\cdots$

分段函数 $\frac{1}{1+x^2} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k} & x\in(-1,1) \quad \cancel{f(z)的收} \\ \frac{1}{2} & x=\pm 1 \\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^{2n+2}} & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \end{cases}$ Lourent 级数

$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$, $z\in\mathbb{C}$ $\qquad 0! := 1$

$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!z^n}$, $z\neq 0$. 记 $f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}} - 1$. $\qquad 0^0 := 1$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{|n|!}$

10.28

问题：在收敛圆周 $|z|=R$ 上，$f(z)$ 是否收敛，$f(z)$ 是否解析？

1/ $f_1(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} z^n=\frac{z}{1-z}$. $|z|<1$, $R=1$ 当 $|z|=1$ 时，$|z^n|=1$ 通项不趋于 0，发散。

2/ $f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z)$. $|z|<1$. $R=1$. $f_2(z)$ 在 $z=-1$ 处收敛 $f_2(-1)=-\ln 2$，$f_2(z)$ 在 $z=1$ 处发散 $f_2(z)\to+\infty$. 当 $z=e^{i\theta}$ 时，若 $\theta\in(0,2\pi)$，$f_2(e^{i\theta})=\sum\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum\frac{\sin n\theta}{n}$
$=-\ln 2\sin\frac{\theta}{2}+i\frac{\pi-\theta}{2}$ 收敛

在收敛圆周上的点都是奇点（不解析）

2/续 $z=re^{i\theta}$. $0\le r<1$. $r\to 1$ 时 $f_2(z)=?$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n e^{in\theta}}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos n\theta}{n}+i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\sin n\theta}{n}=-\ln(1-re^{i\theta})=-\ln(1-r\cos\theta-ir\sin\theta)$$
$$=-\ln\sqrt{(1-r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}-i\arg z' \quad (z'=1-r\cos\theta-ir\sin\theta).$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)-i\arctan\frac{-r\sin\theta}{1-r\cos\theta}$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)+i\arctan\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}$$

$\theta\in(0,2\pi)$
$0\le r<1$

已有
$r=1,\theta=0$
不行

$r\to 1$ 时. $-\frac{1}{2}\ln(1-2\cos\theta+1)+i\arctan(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta})$
$=-\ln 2\sin\frac{\theta}{2}+i\arctan(\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}})$
$\parallel$
$\arctan(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2})=\frac{\pi-\theta}{2}$

开卷：$\sum\frac{r^n e^{i\theta n}}{n^2}=?$

求实部和虚部，找递推公式 $\sum\frac{r^n e^{in\theta}}{n^k}$, $k=1,2,\cdots$

Hint. $f(\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n^2}=?$ $g(\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\theta}{n^2}=?$ $\theta\in[0,2\pi)$

$g'(\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n}=-\ln 2\sin\frac{\theta}{2}$ $\theta\in(0,2\pi)$

$g(\theta)=g(0)+\int_0^\theta g'(\theta)d\theta=0-\int_0^\theta \ln 2\sin\frac{t}{2}dt=-\theta\ln 2-\int_0^\theta\ln\sin\frac{t}{2}dt$

$\therefore g(\theta)=-\theta\ln 2-\int_0^\theta\ln\sin\frac{t}{2}dt$. 不可再化简. $(\theta\in(0,2\pi))$, $g(0)=0.$ ✓

$f'(\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{\sin n\theta}{n}=-\frac{\pi-\theta}{2}\Rightarrow f(\theta)=f(0)+\int_0^\theta f'(t)dt$

$?\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ $\leftarrow$ $=\frac{\pi^2}{6}-\int_0^\theta\frac{\pi-t}{2}dt=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\theta(2\pi-\theta)}{4}$,
$\theta\in[0,2\pi)$

3/ $f_3(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 在 $|z|=1$ 时，$f_3(z)$ 绝对收敛.

$\sum|\frac{z^n}{n^2}|=\sum|\frac{1}{n^2}|=\frac{\pi^2}{6}<+\infty$. 但在圆周上仍处处不解析

Ex. $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-3)^n$. $f(-1)$ 收敛. $z=4$ 时 $f(z)$ 是否收敛？

令 $w=z-3$. $\quad w=-4 \quad w=1$. 绝敛

3/续. $f_3'(z)=\sum\frac{z^{n-1}}{n}=\frac{1}{z}\sum\frac{z^n}{n}=\frac{1}{z}f_2(z)$. 收敛半径 $R=1$.

e.g. $f_3\to f_2\to f_1$

Thm. 收敛半径在函数求导后不变. 求导会减小圆周上收敛的点.
积分反之.

如何求收敛半径 R？

$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$.

1/ 若 $\lim \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lambda$ (存在) $\Rightarrow R=\lambda \begin{cases} 0 \\ >0 \\ +\infty \end{cases}$

2/ 若 $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$ 存在，则 $=R$. 只是充分条件.

例 $f(z)=\sum z^n$. $R=1$

$z=w^2$ $g(w)=\sum w^{2n}$. $R=1$

但 1/2/ 下极限不存在

3/ $f(z)$ 有有限个奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_k$.

则 $R=|z_1|=\min_{1\le j\le k}\{|z_j|\}$ $f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}$?

4/ $f(z)$ 在 z_0 条件收敛 $\Rightarrow R=|z_0|>0$.

Pf. $f(z_0)$ 收敛 $\Rightarrow |z_0|\le R$ e.g. $f(z)=\sum \frac{z^n}{n}$.

$f(z_0)$ 不绝对收敛. 欲推 $|z_0|\ge R$. $z=-1$ 条敛 $\Rightarrow R=|z_0|=1$.

反证. 若 $|z_0|\lneqq R$

由收敛半径定义(或Abel定理). z_0 绝敛. 矛盾.

5/ $c_n=a_n+ib_n$ $a_n, b_n\in\mathbb{R}$

$\sum c_n z^n=\sum a_n z^n + i\sum b_n z^n = \underset{R_1}{f_1(z)} + \underset{R_2}{f_2(z)}$ 不是实虚部！$\because z$ 复

$R=\min\{R_1,R_2\}$

Pf 不妨设 $R_1\le R_2$ (否则考虑 $g(z)=-if(z)\Rightarrow g(z)=\sum b_n z^n - i\sum a_n z^n$) 不影响 R

$|a_n|\le|c_n|$ ($\because c_n=a_n+ib_n\Rightarrow |c_n|^2=|a_n|^2+|b_n|^2\ge|a_n|^2$)

$\Rightarrow |a_n z^n|\le|c_n z^n| \Rightarrow \sum|a_n z^n|\le\sum|c_n z^n|\Rightarrow |z|<R$ 时 $\sum a_n z^n$ 绝敛

有: $R_1\ge R$. (否则, $R_1<R$, $\sum\limits_{R_1<|z|<R} a_n z^n$ 绝敛. 矛盾)

$R_1\le R$. (否则 $R_1>R$. $\sum c_n z^n=\underset{\text{在}R_1\text{敛}}{\sum a_n z^n}+\underset{\text{在}R_1\text{敛}}{i\sum b_n z^n}$ 在 R_1 敛. 矛盾)

11.4

二项式 $(1+x)^n=1+C_n^1 x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^n x^n$ $x\in\mathbb{C}$

更一般地 $(1+z)^\alpha = 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}z^k$, $|z|<1$. $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

证: 令 $f(z)=(1+z)^\alpha \Rightarrow \frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, $k=1,2,\cdots$

$f(0)=1\Rightarrow f(z)=f(0)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

当 α 不是正整数时. 设 $\alpha\in(n,n+1)$, $n\in\mathbb{N}$. 则易知 $f^{(n+1)}(z)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+z)^{\alpha-n-1}$

而当 α 是正整数. $(1+z)^\alpha=(1+z)^n$. 是 n 次多项式. 处处可导 ~~在 $z_0=-1$ 不存在~~

$-1<\alpha-n-1<0\Rightarrow z_0=-1$ 是 $f(z)$ 的一个奇点 $\Rightarrow R=1$. 在 $z_0=-1$ 不存在 $(\to\infty)$

当 $\alpha=-n$, $n\in\mathbb{N}$ 时

$$\frac{1}{(1+z)^n}=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)z^k}{k!}\quad |z|<1$$

$$=1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}z^k=1+\sum_{k=1}^{+\infty}C_{n+k-1}^{n-1}(-z)^k.$$

$$\frac{1}{(r+z)^n}=\frac{1}{r^n(1+\frac{z}{r})^n}=\frac{1}{r^n}\left[1+\sum_{k=1}^{+\infty}C_{n+k-1}^{n-1}\frac{(-z)^k}{r^k}\right]\quad |z|<|r|\quad r\neq 0$$

$$=\frac{1}{r^n}+\sum_{k=1}^{+\infty}C_{n+k-1}^{n-1}\frac{(-z)^k}{r^{k+n}}$$

$$\frac{1}{(r-z)^n}=\frac{1}{r^n}+\sum_{k=1}^{+\infty}C_{n+k-1}^{n-1}\frac{z^k}{r^{k+n}}$$

开卷练题: $I_{n,m}=\oint\limits_{|z|=r>1}\frac{z^n e^{\frac{1}{z}}}{(1+z)^m}dz$.

逆时针

$$\cancel{I_{3,1}=\oint\limits_{|z|=r>1}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}}\ \underline{\underline{\text{令}\tfrac{1}{z}=t,\ dz=-\tfrac{dt}{t^2}}}\ -\oint\limits_{|t|=\frac{1}{r}<1}\frac{e^t}{t^n(1+\frac{1}{t})^m}\left(-\frac{dt}{t^2}\right)$$

$$=\oint\limits_{|t|=\frac{1}{r}}\frac{t^m e^t}{t^{n+2}(1+t)^m}dt=\oint\frac{e^t}{(1+t)^m}\left(\frac{1}{t^{n+2-m}}\right)dt$$

解析?

若 $n+2-m\le 0\Rightarrow \frac{e^t}{(1+t)^m}t^{m-n-2}$ 在 $|t|=\frac{1}{r}<1$ 内处处可导.

由 C-G 定理. $I_{n,m}=0$.

若 $n+2-m\ge 1\Rightarrow m\le n+1$ 时.

求导 → Taylor级数. $I_{n,m}=\frac{2\pi i}{(n+1-m)!}f^{(n+1-m)}(0)$ 可求出,但比较麻烦.

$$f(t)=\frac{e^t}{(1+t)^m}=\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{t^j}{j!}\right)\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}C_{m+k-1}^{m-1}(-t)^k\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}C_k t^k$$

$$\frac{f^{(n+1-m)}(0)}{(n+1-m)!}=C_{n+1-m}\qquad C_k=\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}b_j\ (k=0,1,2).$$

$$a_j=\frac{1}{j!}\quad b_k=\begin{cases}1 & k=0\\ (-1)^kC_{m+k-1}^{m-1}, & k>0\end{cases}$$

$$C_0=a_0b_0=1\cdot 1=1$$

$$C_k=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{(k-j)!}(-1)^jC_{m+j-1}^{m-1}\quad (k\ge 1)$$

$k=\cancel{n+2}\ n+1-m$ 时. 即求出 $I_{n,m}=C_{n+1-m}\cdot 2\pi i$

△开卷 $I_{r,n,m}=\oint\limits_{|z|=R>r>0}\frac{z^n e^{\frac{r}{z}}}{(1+z)^m}dz\quad (n,m\in \mathbb{N}=\{1,2,\cdots\})$

洛朗级数

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{(z-1)-(z-2)}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

1/ $0<|z|<1$, $1<|z|<2$. $|z|>2$

2/ $0<|z-1|<1$. $|z-1|>1$

用的公式为 $\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{+\infty}q^n$, $|q|<1$.

1/ 当 $|z|<1$ 时. $f(z)=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n+\frac{1}{(-2)(1-\frac{z}{2})}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$ T-级数 $f(z)$ 在 $z_0=0$ 解析. T Taylor 2 泰勒.

当 $1<|z|<2$ 时. $f(z)=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$

$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2}\sum\frac{z^n}{2^n}=-\sum\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum\frac{1}{z^{n+1}}$ L-级数. $|z|=1$ 上不收敛.

$|z|>2.\ f(z)=\frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}+\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}=\frac{-1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$

L-级数

2/ $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-1)^n$ ① $0<|t|<1$. ② $|t|>1$.

令 $t=z-1\Rightarrow z=t+1.\Rightarrow f(z)=\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n t^n$

① $\frac{-1}{1-t}-\frac{1}{t}=(-1)\sum t^n-\frac{1}{t}\to t^{-1}$

$=\sum_{n=-1}^{+\infty}(-1)(z-1)^n$

② $\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}=\frac{1}{t}(\frac{1}{1-\frac{1}{t}})-\frac{1}{t}$

$=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}t^{-n}-\frac{1}{t}$ $|z-1|>1$

$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{t^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n}$.

☆ Chapter 4 考试范围

Abel 定理 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n z^n$

当 $f(z_1)$ 收敛时. 则 $\forall z.\ |z|<|z_1|.\ f(z)$ 绝对收敛

当 $f(z_2)$ 发散时. 则 $\forall z.\ |z|>|z_2|.\ f(z)$ 发散.

收敛半径定义 $(R>0)$

$R=0$ $\quad |z|<R$ 时. $C_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$)

$R=+\infty$

当 $|z|<R$ 时. $f(z)$ 绝对收敛. 当 $|z|>R$ 时 $f(z)$ 发散. R 为 $f(z)$ 收敛半径

考10分或0分.

(残数 余数)

Chapter 5. 留数 (Residues)

☆ Chapter 5 出4题

奇点 Singularity: $f(z)$ 在 z_0 不解析. 则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个奇点.

分类 {
- 非孤立奇点. e.g. $f(z)=z\bar{z}=|z|^2$. 仅在0点可导. 处处不解析. $\mathbb{C}$ 均为 $f(z)$ 奇点
- 孤立奇点. e.g. $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ $z_0=0.\ z\neq0.\ \sin\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{z}=n\pi\ (n\in\mathbb{Z})$

  $z_n=\frac{1}{n\pi}$ 孤立.

  1/ 可去奇点 (removable singularity)

  $f(z)=\frac{\sin z}{z}.\ z_0=0.$ T-级数? $R=+\infty$

  2/ 极点 (pole) ?

  $\frac{1}{z-1}=f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=C_{-n}(z-z_0)^{-n}\cdots$ L-级数有最左项

  3/ 本性奇点 (essential singularity)

  $f(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!z^n}$ - L级数

等价判定法 {
- 可去奇点. $\lim_{z\to z_0}f(z)$ 存在, 有界, 定义为 $f(z_0)$
- 极点. $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$
- 本性奇点. $\lim_{z\to z_0}f(z)$ 不存在

$\frac{\sin z}{z}$ 0 处 $\to 1$

$\frac{\sin z}{z^n}$ 0 处 $\to +\infty$

$e^{\frac{1}{z}}$ $>0 \to +\infty$, $<0 \to 0$

11.11 Picard Great Theorem 本性奇点附近现象.

If $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$ has an essential singularity at z_0. and let U be any neighbourhood of z_0. then for any $w\in\mathbb{C}$ except for perhaps one value. the equation $f(z)=w$ has infinitely many solutions in U.

例子. $e^{\frac{1}{z}}$.

处处可导函数的定义 well-defined: 存在性. 唯一性. 稳定性)

Picard Little Therom $\Rightarrow$ Liouville定理 有界的整函数是常数. → 在$\mathbb{C}$上处处解析

若$f(z)$是处处可导的非常的函数. 则至多一个$w\in\mathbb{C}$使得$f(z)\neq w$.

即若存在$w_1\neq w_2$, 使 $g(z)=(f(z)-w_1)(f(z)-w_2)\neq 0$. 则$f(z)=\text{const}\ (=f(0))$

e.g. $f_1(z)=P_n(z)$ 多项式. 一定可以覆盖全平面.

$f_2(z)=\sin z=A+Bi=w$

$f_3(z)=e^z\neq 0$.

开卷: D是一个有界区域 $\bar{D}=D\cup\partial D$.

$f(z)$在$\bar{D}$解析. 则易知 $\max_{z\in\bar{D}}|f(z)|=\max_{z\in\partial D}|f(z)|=|f(z_0)|$

证明: 若$f(z)$不是常数函数. 则$f'(z_0)\neq 0$.

反证法

若不解析可提 不写次?

△解析函数零点的孤立性定理.

若$f(z)\not\equiv 0$. 且$f(z)$在z_0解析 $f(z_0)=0$. 则存在$n\in\mathbb{N}$. $\delta>0$. 当$|z-z_0|<\delta$时.

有$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$. $\varphi(z)$在z_0解析且$\varphi(z_0)\neq 0$.

证明: $f(z)$在z_0解析 $\Rightarrow f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$ Taylor(∵解析)

取第一项不为0的(一定有)

$$=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!}+o((z-z_0)^{n+1})$$

($f(z_0)=0$, $f'(z_0)=0$, $f^{(n)}(z_0)\neq 0$)

$$\Rightarrow f(z)=\frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!}+f^{(n+1)}(z_0)\cdots=(z-z_0)^n\left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)+\cdots\right]$$

$$=(z-z_0)^n\varphi(z).$$

$P_n(z)=(z-z_0)^{n_1}P_{n-n_1}(z)$

① $\varphi(z_0)=\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\neq 0$.

② 证$\varphi(z)$收敛半径>0.

$\varphi(z)=f(z)/(z-z_0)^n$ $\varphi'(z)=\frac{\cdots\cdots}{(z-z_0)^{2n}}$ 除z_0外都可导. z_0是$\varphi(z)$一个孤立奇点.

而极限 $\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ 存在. 有界. 因此z_0为$\varphi(z)$一可去奇点.

$\Downarrow$

$\varphi(z)$=其Taylor级数

$\varphi(z)$在z_0解析

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ $f(x_0)=g(x_0)=0$. $f(x)$. $g(x)$在x_0可导. L'Hospital

Cauchy $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ $\xi\in(x, x_0)$ 实函数

复数洛必达法则

$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim\limits_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$. $f(z_0)=g(z_0)=0$. f. g在z_0解析且$f\not\equiv 0$. $g\not\equiv 0$.

$= \begin{cases} 0 \\ \frac{f(z)}{g(z)}\text{有限} \\ \infty \end{cases}$

左: $f=(z-z_0)^n\varphi(z)$. → 零点孤立性定理应用

$g=(z-z_0)^m\psi(z)$.

$f/g=(z-z_0)^{n-m}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

$\xrightarrow[z\to z_0]{} \begin{cases} 0 & n>m \\ \varphi(z_0)/\psi(z_0) & n=m. \ (\neq 0\text{的}\mathbb{C}) \\ \infty & n<m \end{cases}$

右: $\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{n(z-z_0)^{n-1}\varphi(z)+(z-z_0)^n\varphi'(z)}{m(z-z_0)^{m-1}\psi(z)+(z-z_0)^m\psi'(z)}$

$=(z-z_0)^{n-m}\cdot\left[\frac{n\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{m\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)}\right]$

$\xrightarrow[z\to z_0]{} \begin{cases} 0 & n>m \\ \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} & n=m \\ \infty & n<m \end{cases}$ ✓.

解析函数的唯一性定理 一样

若$f(z)$. $g(z)$在区域D处处解析/处处可导, 且存在$z_k\to z_0\in D$. 使$f(z_k)=g(z_k)$

则 $f(z)\equiv g(z)$. $\forall z\in D$.

证明: 令$h(z)=f(z)-g(z)$. $\Rightarrow h(z)$在D处处可导. $h(z_0)=\lim\limits_{k\to+\infty}h(z_k)=0$.

$\Rightarrow z_0$是$h(z)$的一个非孤立零点 $\Rightarrow h(z)\equiv 0$. 什么是孤立零点?

解析函数无零因子 $f(z)\not\equiv 0$. $g(z)\not\equiv 0$. 但$f(z)g(z)\equiv 0$. $\Rightarrow f(z)$. $g(z)$互为零因子.

若$f(z)$. $g(z)$在z_0解析且$f(z)g(z)\equiv 0$. $\forall z: |z-z_0|<\delta$. $\Rightarrow f(z)\equiv 0$或$g(z)\equiv 0$.

证明: 若$f(z)\equiv 0$. 则命题得证, 若$f(z)\not\equiv 0$. 欲证$g(z)\equiv 0$.

$\exists z_1\in N_{z_0}$(邻域?) $=\{z \mid |z-z_0|<\delta\}$, $f(z_1)\neq 0$.

由Ex29. Ch1. 推出一点$\neq 0$. 邻域内$\neq 0$

$\Rightarrow \exists\delta_1<\delta$. 当$|z-z_1|<\delta_1$时 $f(z)\neq 0$

但$f(z_1)g(z_1)=0 \Rightarrow g(z_1)=0$ $g(z)=0$. $|z-z_1|<\delta_1$

$\Rightarrow z_1$是$g(z)$的一个非孤立零点 $\Rightarrow$ $g(z)\equiv 0$. 证毕.

11.18

非解析函数

$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$ $f(0)=0 \Rightarrow f(x)=x^n\varphi_n(x)$. $\varphi_n(x)\neq 0$.

$\varphi_n(x)=\frac{f(x)}{x^n}=\begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}, & x\neq 0, \\ ?, & x=0. \end{cases}$

$\lim_{x\to 0}\varphi_n(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{t^n}{e^{t^2}}=0 \Rightarrow \varphi_n(0)=0.$

不存在n. 使得提出0^n后~~还可~~不能再提取0.

$I=\oint_{|z|=r>1}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz \overset{复合闭路}{=} \oint_{C_1}+\oint_{C_2}$ $\oint_{C_2}=\oint_{|z+1|=\varepsilon>0}\frac{f(z)}{z-(-1)}dz=\frac{2\pi i}{0!}(e^{\frac{1}{z}}z^3)\Big|_{z=-1}=\frac{-2\pi i}{e}$

$\oint_{C_1}\overset{L-级数}{=}$ $\because 0$为孤立奇点. $\oint(\sum C_nz^n)dz$.
$|z|=\varepsilon>0$

除了=0不成立
其余点=L-级数

$=\sum_{-\infty}^{\infty}C_n\oint z^n dz$

$=\sum_{-\infty}^{\infty}C_n I_{-n}=C_{-1}\cdot 2\pi i$

$\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}=z^3(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots)$

$(1-z+z^2-z^3+\cdots)$

$=\cdots$ $C_{-1}=\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\cdots=?$ $e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\cdots$

$C_{-1}=e^{-1}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=e^{-1}-\frac{1}{3}.$

$I=-\frac{2\pi i}{e}+2\pi i(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\cdots)$

$=2\pi i(\frac{1}{e}-\frac{1}{3}-\frac{1}{e})=-\frac{2}{3}\pi i.$

☆ 求实积分 $I_{a,b}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$. $a>|b|>0$. $(=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta})$

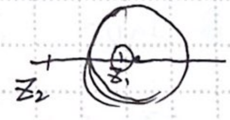
化 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin\theta)d\theta=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))dt$ 更一般地有. $\int_0^{2\pi}f(\cos\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}f(\sin\theta)d\theta$. $f\in[-1,1]$.

令$\theta=\frac{\pi}{2}-t$. $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)dt$

① $\boxed{b=0时}$. $I_{a,0}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a}=\frac{2\pi}{a}$

② $b\neq 0$时. 不妨设 $0<b<a$. (若$b<0$计算类似).

令$z=e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi)$. $dz=ie^{i\theta}d\theta=iz\,d\theta\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$.



$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\frac{1}{2}(z+z^{-1})=\frac{z^2+1}{2z}$.

$\sin\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})=\frac{1}{2}(z-z^{-1})=\frac{z^2-1}{2z}$

$I_{a,b}=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz(a+b\frac{z^2+1}{2z})}=\frac{2}{i}\oint\frac{dz}{bz^2+2az+b}=\frac{2}{bi}\oint\frac{dz}{z^2+\frac{2a}{b}z+1}=\frac{2}{bi}\oint\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$

$z^2+\frac{2a}{b}z+1=0.\Rightarrow z_1=\frac{-a}{b}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$

$0<b<a$ $z_2=\frac{-a}{b}-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}<-\frac{a}{b}<-1.$

$z_1z_2=1.\Rightarrow z_1=\frac{1}{z_2}>-1.$ $z_1\in(-1,0)$

$$\cancel{I_{a,b}}\ \oint_{C_1}\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}=\oint_{|z-z_1|=\varepsilon>0}\frac{f(z)dz}{z-z_1}=\frac{2\pi i}{0!}f^{(0)}(z_1)=\frac{2\pi i}{0!}\cdot\frac{1}{z_1-z_2}\qquad f(z)\to\frac{1}{z-z_2}$$

$$I_{a,b}=\frac{2}{bi}\cdot\frac{2\pi i\cdot b}{2\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.\qquad I_{a,b}=\begin{cases}\frac{2\pi}{a}. & b=0\\ \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}. & b\neq 0.\ |b|<a.\end{cases}$$

C_1的多种求法:

设$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$. 其中$P(z)$. $Q(z)$. 在z_0解析且$P(z_0)\neq 0$. $Q(z_0)=0$. 而$Q'(z_0)\neq 0$. (这个z_0是$f(z)$的一阶极点.)

$$\Rightarrow f(z)=\frac{P(z_0)+P'(z_0)(z-z_0)\cdots}{Q(z_0)+Q'(z_0)(z-z_0)\cdots}=\frac{P(z_0)+P'(z_0)(z-z_0)\cdots}{Q'(z_0)(z-z_0)\cdots}$$

$$=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}\frac{1}{z-z_0}+\frac{P'(z_0)}{Q'(z_0)}+\cdots\qquad\Rightarrow C_{-1}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

$=\mathrm{Res}[f.\ z_0]$. Residues.

$$求\ I_p=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}\left(=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\sin\theta+p^2}\right)=\frac{2\pi}{1-p^2}.\qquad p\in(-1,1).$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\underbrace{(1+p^2)}_{a}+\underbrace{(-2p)}_{b}\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{(1+p^2)^2-(-2p)^2}}=\frac{2\pi}{1-p^2}.$$

$$求\ I_{A,B}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta}\quad AB>0.\ A,B\in\mathbb{R}.\qquad \cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}.\ \sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}.$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{2\,d\theta}{A^2(1+\cos2\theta)+B^2(1-\cos2\theta)}=\int_0^{2\pi}\frac{d(2\theta)}{(A^2+B^2)+(A^2-B^2)\cos2\theta}=\int_0^{4\pi}\frac{dt}{(A^2+B^2)+(A^2-B^2)\cos t}$$

$$=2\int_0^{2\pi}\cdots=2\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{(A^2+B^2)^2-(A^2-B^2)^2}}=\frac{4\pi}{\sqrt{4A^2B^2}}=\frac{2\pi}{AB}$$

(求$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\cos\theta}$ 5~6分 放应用 4-5分).

例. 求. $I_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^1}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}=2\pi(a^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial I_1}{\partial a}=\int_0^{2\pi}\frac{(-1)d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}=-I_2$$

$$求\ I_2=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}=-\frac{\partial I_1}{\partial a}=2\pi(a^2-b^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot2a\cdot(-1)=2a\pi(a^2-b^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$I_n=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^n}\Longrightarrow\frac{\partial I_n}{\partial a}=(-n)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^{n+1}}=(-n)I_{n+1}.$$

即 $I_{n+1}=-\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial I_n}{\partial a}=\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)\cdots(-1)\cdot\frac{\partial^n I_n}{\partial a^n}$

11.18

$$I_{n,r} = \oint_{|z|=R>r} \frac{1}{r^n+z^n} dz \quad P(z)=1.\ Q(z)=r^n+z^n.\ \operatorname{Res}[f, z_k] = \frac{1}{n \cdot z_k^{n-1}} = \frac{-z_k}{nr^n}. \qquad r^n+z^n=0.\ z_k^n=-r^n\ \ \frac{-z_k}{r^n}=\frac{1}{z_k^{n-1}}$$

$$= 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f, z_k]\right)$$

$$= \frac{-2\pi i}{nr^n}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \begin{cases} \frac{-2\pi i}{nr}(-r) = 2\pi i, & n=1. \\ 0. & n\geq 2. \end{cases}$$

求 $$\oint_{|z|=R>r} \frac{z^{2n}}{r^n+z^n} dz = \oint \frac{z^{2n}-r^{2n}+r^{2n}}{r^n+z^n} dz = \underbrace{\oint (z^n-r^n) dz}_{0.\ C\text{-}G.} + \oint r^{2n} \cdot \frac{dz}{r^n+z^n}$$

$$= r^{2n} \cdot I_{n,r} = \begin{cases} 2\pi i r^2, & n=1 \\ 0, & n\geq 2 \end{cases}$$

另解：令 $t=\frac{1}{z}$. $\Rightarrow |z|=R>r \Rightarrow |t|=\frac{1}{z}<\frac{1}{r}$.

$$I = \oint_{|t|=\frac{1}{z}<\frac{1}{r}} \frac{1}{t^{2n}(r^n+\frac{1}{t^n})}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt.$$

$$= \oint \frac{t^{n-2}dt}{(r^n t^n+1)} \qquad n\geq 2.\ =0.\ (C\text{-}G) \qquad n=1、单独算.$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{2n}+1} = \frac{\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

推广 ⇒ 求 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+r^{2n}}$. $m,n\in\mathbb{N}$, $r>0$

$$I_{r,n} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{2n}+r^{2n}} = \frac{1}{r^{2n-1}} I_n.$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{2\pi\, C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-1}} = 2\pi \cdot \frac{\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}}{2^{2n-1}}$$

J