微积分复习

Chapter 3 多重积分

△ Poisson $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

△ 多重积分性质 线性性、区域可加性、保序性、中值定理 注意Ω不要忘！

△ 换元记得 Jacobi 行列式值加绝对值！（∵无方向）

△ 积分方法：

二重积分：交换顺序 $\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$

一重→二重 $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_0^1 x^t dt$

变量替换 $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v)) \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$

极坐标 $dxdy = r dr d\theta$

三重积分：柱坐标系 $dxdydz = r dr d\theta dz$

球坐标系 $= \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\varphi d\theta$

变量替换 $|J| \neq 0$！

Chapter 4 曲线、曲面积分

第一类曲线积分 $L: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$

$\int_L f(x,y) dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt.$

△ $dl = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} dt.$ ☆ $\alpha < \beta$！

第二类曲线积分，$\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

$\int_{L^+} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{L^+} \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = \int_\alpha^\beta (X x'(t) + Y y'(t) + Z z'(t)) dt$

△ $d\vec{l} = \vec{\tau} dl = (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$ $\overset{\shortparallel}{X dx + Y dy + Z dz}$

第一型曲面积分 $S: \begin{cases} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{cases}$

$$dS = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

第二型曲面积分

$$\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= \iint_S X\,dy\wedge dz + Y\,dz\wedge dx + Z\,dx\wedge dy$$

看 $\vec{n}$ 方向 $= \pm\iint_{D_{uv}} (XA+YB+ZC)\,du\,dv$

$$(Xf'_x + Yf'_y - Z)\,dx\,dy \quad \underline{f(x,y,z)=0}$$

平面. Green 公式. $V(x,y) = (X(x,y), Y(x,y))$

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = \nabla\cdot V \qquad \nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{rot} V = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k} = \nabla\times V \qquad \operatorname{grad} u = \nabla u$$

空间. $V(x,y,z) = (X,Y,Z)$.

∇ 梯度 数→向

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$\nabla\cdot$ 散度 向→数

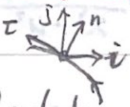
$$\operatorname{rot} V = \nabla\times V$$

$\nabla\times$ 旋度 向→向.

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Green ①有界复连通闭域 ②∂D取正向 ③$X.Y$一阶偏导连续!

例. 证 $\oint_L \cos(\vec{i}, \vec{n})\,dl = 0$.



$$\oint_L -\cos(\vec{i}, \vec{\tau}) = \oint_L -dx = \iint 0\,dx\,dy = 0. \quad (\because X=-1, Y=0)$$

例. 循环常数 2π. $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ ③!

例. $\oint_{L^+} -y\,dx = \oint_{L^+} x\,dy = \sigma(D)$

$\vec{v}\cdot\vec{\tau}\,dl$

环流量：$\vec{v}$沿L的～ $\oint_L \vec{v}\cdot d\vec{\tau} = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D \mathrm{rot}\,\vec{v}(x,y)\,dxdy$

↓

旋度　　·P 圆半径→0. 环流量密度→旋度.

↘ 旋转方向. 强度　∵平面 ∴方向都是$\vec{k}$.　ω: 叉乘.

通量　$\vec{v}$通过L的～ $\oint_L \vec{v}\cdot\vec{n}\,dl = \iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)dxdy$　div.

↓

散度

Green的div形式：(每点~~通量~~散度之和为曲线通量)

$\oint_L \vec{v}\cdot\vec{n}\,dl = \iint_D \mathrm{div}\,\vec{v}\;dxdy$　分别= $\oint_L$ ~~Xdx+Y~~ $Xdy - Ydx$. $\iint \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\,dxdy$

rot　　(每点旋度之和为曲线环流量)

$\oint_L \vec{v}\cdot d\vec{\tau} = \iint_D \mathrm{rot}\,\vec{v}(\cdot\vec{k})\,dxdy$.　$\oint_L Xdx + Ydy$　$\iint \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\,dxdy$

求势函数：1. 积分与路径无关　　$u(x,y) = \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + C(y)$

再同对y偏导.

2. 凑微分

3. 求不定积分

$\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$

4. 积分因子

$\frac{ydx - xdy}{xy} = d\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)$

$\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = d\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$

$\frac{ydx - xdy}{x^2-y^2} = \frac{1}{2}d\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$

$Pdx + Qdy = 0$

$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \varphi(x)$ 则积分因子 $e^{\int\varphi(x)dx}$

$\frac{Q'_x - P'_y}{P} = \psi(y)$　　$e^{\int\psi(y)dy}$

Δf

$$\oint_L \frac{\partial f}{\partial n} ds = \oint_L \nabla f \cdot \vec{n}\, ds = \iint div(\nabla f)\, dxdy = \iint \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy$$

高斯公式. ①$\vec{v}$连续可微 ②闭曲线 ③外侧

$$\oiint_{S外} X dy\wedge dz + Y dz\wedge dx + Z dx\wedge dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dV.$$

或 $\oiint_{S外} \vec{v}\, d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{v}\, dV$ 要连续!

斯托克斯公式.（正方向:右手系）

$$\oint_{\partial S} Xdx + Ydy + Zdz = \iint_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\wedge dy$$

或 $\oint_{\partial S} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot\vec{n}\, dS = \iint_S rot\,\vec{v}\cdot d\vec{S}$

~~空间~~ 平面. ~~空间~~.

① D 连续向量场: 则等价 有势场 ← 可微函数 f

保守场 ← 向量场 $\vec{v}$ $\quad \nabla f = \vec{v}$

$rot\,\vec{v} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0.$

② D 连续可微 则等价 无旋场 ← 旋度 $rot\,\vec{v}$

（单连通）

空间. 均可拓展

Def 无源场 $div\,\vec{v} = 0$

调和场 保守+无源 $\Longrightarrow \Delta u = 0.$

Chapter 5 常数项级数

e.g. 判 $\sum[e-(1+\frac{1}{n})^n]^2$ 敛散.

$\lim\limits_{n\to\infty}[e-(1+\frac{1}{n})^n]^2/n^p$? 思路. Taylor

$e-(1+\frac{1}{n})^n = e-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e[1-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}]$

$\sim -e[n\ln(1+\frac{1}{n})-1+o(n\ln(1+\frac{1}{n})-1)]$

$\sim -e[n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))-1+o(\quad)]$

$\sim -e[-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})+o(\frac{1}{n})] \sim \frac{e}{2n}+o(\frac{1}{n})$

$\frac{e-(1+\frac{1}{n})^n}{\frac{1}{n}} \to \frac{e}{2}$. 原式 $\to (\frac{e}{2})^2\cdot\frac{1}{n^2}$ 敛.

e.g. $\sum \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$ 敛散? $n!\sim\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n-2}}{e\,n^{n-2}} < \frac{(1+\frac{1}{n})^{n-2}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}$ 设为 $\frac{v_{n+1}}{v_n}$

于是 $\frac{u_n}{u_2} = \frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\frac{u_3}{u_2} < \frac{v_n}{v_{n-1}}\cdots = \frac{v_n}{v_2} = \frac{4}{n^2}$.

$\therefore$ 敛!

e.g. $\sum \frac{1}{n^p \ln^q n}$ $\begin{cases} p>1 & 敛 \\ p<1 & 散 \\ p=1 & \int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^q} \begin{cases} q>1 & 敛 \\ q\le 1 & 散 \end{cases} \end{cases}$

e.g. $\sum\frac{e^n n!}{n^n}$ $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} \ge 1$. 故发散.

e.g. $\sum(\cos\frac{1}{n})^{n^3}$ $\quad \sqrt[n]{u_n} = e^{n^2\ln\cos\frac{1}{n}} \to e^{-\frac{1}{2}} < 1$ 收敛

e.g. $\sum a_n$ 敛. 证存在收敛的正项 $\sum b_n$, s.t. $\lim\frac{b_n}{a_n} = +\infty$.
(正项)

Pf. 设 $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$. 则 r_n 单调减于0. 令 $b_n = \frac{a_n}{r_n^p}$ $(p<1)$

则 $\lim\frac{b_n}{a_n} = +\infty$. 且 $\sum b_n$ 收敛.

$\sum\limits_1^n b_k \le \sum\limits_1^n \int_{r_{k+1}}^{r_k}\frac{dx}{x^p} < \int_0^S\frac{dx}{x^p} < +\infty$

$\quad \| $

$(r_n - r_{n+1})\cdot\frac{1}{r_n^p}$

正项级数判敛

1. 求 $\{S_n\}$ 是否~~有界~~收敛. $\lim u_n \neq 0$ 则散 } 均可. 不需正项
2. 柯西收敛原理 $\left|\sum_{n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$
3. 比较判敛 $u_n \leq v_n$ (从一定 N 起)
4. 比阶判敛 (3的极限形式) Cal. $n^p u_n$
5. 达朗贝尔判敛 $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, > 1$ 附带: >1 时 $e\ u_n \to +\infty$
6. 达朗贝尔非极限形式. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r < 1 \ / \geq 1$ 附带: ≥ 1 时 $e\ u_n \neq 0$.
7. 柯西根值判敛 $\lim \sqrt[n]{u_n} < 1, > 1$
8. 、、、非极限形式. $\sqrt[n]{u_n} \leq r < 1 \ / \geq 1$
9. 拉贝判别法. $\lim\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right] < 1$ 散, > 1 敛
10. 、、、非极限形式. $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \geq p > 1$ 敛, ≤ 1 散
11. 柯西积分判敛. $u_n = f(n)$, $f(n)$ 在 $[1, +\infty)$ 单减, 非负, 连续.
    $\sum u_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 同敛散.

任意项级数判敛

1. 交错级数 Leibniz. (Note. $|S| \leq u_1$, $|r_n| \leq u_{n+1}$) ☆ 5-3 PPT P8
   Pf. $\{S_{2n}\}$ 单增, $\leq u_1$ 有界.
2. Dirichlet ① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列有界
   ② $\{b_n\}$ 从某个 n_0 起单调趋于 0. $\Rightarrow \sum a_n b_n$ 收敛
3. Abel ① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
   ② $\{b_n\}$ 从某个 n_0 起单调有界 $\Rightarrow \sum a_n b_n$ 收敛

Rem. $\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$

Chapter6 函数项级数

达朗贝尔用 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$. <1 绝敛. >1 发散 ($\because \to \infty$)

1. 柯西准则 $\forall x\ |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$

   Col. $\sum u_n(x)$ 致敛必要条件: $\{u_n(x)\}$ 致敛到 0 (否则 Cauchy. 可令 $p=1$)

2. 优级数判别 (Weierstrass) $|u_n(x)| \leq M_n$, $\sum M_n$ 敛. ⇒ 致敛 (绝对)

3. Dirichlet ① $\sum a_n(x)$ 部分和数列一致有界

   ② $\{b_n(x)\}$ 对 $\forall x$, 关于 n 单调 且在 E 上一致趋于 0

4. Abel ① $\sum a_n(x)$ 一致收敛

   ② $\{b_n(x)\}$ 对 $\forall x$, 关于 n 单调 且在 E 上一致有界.

一致收敛函数项级数的和函数

1. $\sum u_n(x)$. 每项连续. 一致收敛 ⇒ 则 $S(x)$ 连续 且可逐项取 lim (极限. 求和可交换)

2. $\sum u_n(x)$. 每项连续. 一致收敛 ⇒ 则 $S(x)$ 可积, 且可逐项积分 (积分. 求和)

3. $\sum u_n(x)$. 每项连续可导, 导函数连续! $\sum u_n'(x)$ 一致收敛. 且 $\sum u_n(x)$ 点点收敛 ⇒ 其实一点足够.

   ⇒ 则 $S(x)$ 可导 且可逐项求导 (求导. 求和)

   附带: $\{S_n'(x)\}$ 一致收敛即 $\sum u_n'(x)$. 一致收敛. $S'(x)$ 连续.

   看 P275 证明

△ 6.2 ODE 证明和 PPT 后半跳过了.

幂函数

Abel第一定理：$\{a_n x_0^n\}$有界，则$\sum a_n x^n$在$(-|x_0|, |x_0|)$绝对收敛，内闭一致收敛。

第二定理：若$\sum a_n x^n$在端点ρ收敛，则$\forall 0<r<\rho$，级数在$[-r,\rho]$一致收敛。

一：Pf 优函数　二：Pf Abel　综合$\Rightarrow \sum a_n x^n$在收敛域上内闭一致收敛

幂级数的和函数$S(x)$

①在收敛域内连续②可化意义积分、求导，且收敛半径不变。

Taylor级数．$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$（不一定收敛到$f(x)$）

若$\exists M$ s.t. $\forall n, \forall x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$，有$|f^{(n)}(x)| \le M$

则$f(x)$在区间内可展成Taylor级数．展开形式唯一．

幂级数展开$\to$收敛到自己；Taylor级数$\to$只要按定义求．

$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$　证明？范围？

$$\begin{cases} \alpha \le -1 & x \in (-1,1) \\ -1<\alpha<0 & x \in (-1,1] \\ \alpha > 0 & x \in [-1,1] \end{cases}$$

Chapter 7

Fourier级数．Fourier系数：不需验证相等．

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$．　$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$

$\boxed{2l}$周期　不是l!!!

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx$．　$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$

背：x^2在$[-1,1]$ Fourier级数．展开？

$a_0 = \frac{2}{3}$．$a_n = \int_{-1}^{1} x^2 \cos n x\,dx = (-1)^n \frac{4}{(n\pi)^2}$

$x^2 \sim \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$．　在$[-\pi,\pi]$？正余？

Fourier级数逐点收敛的判别法

1. Dini判别法

f以2π为周期. $f\in R[-\pi,\pi]$. $x_0\in[-\pi,\pi]$. 若$\exists S\in\mathbb{R}$, $\exists\delta>0$. s.t.

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S}{t}\in R[0,\delta]$$

则f的Fourier级数在x_0点收敛于S.

2. Lipschitz判别法

若$\exists\delta>0$. $L>0$. $\alpha>0$. s.t. $|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\le Lt^\alpha$, $|f(x_0-t)-f(x_0-0)|\le Lt^\alpha$ $\forall t\in(0,\delta)$

则称f在x_0附近满足广义α阶Lipschitz条件.

+ f 2π周期. $f\in R[-\pi,\pi]$. $x_0\in[-\pi,\pi]$.

则f的Fourier级数在x_0点收敛于$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$

3. f在$[a,b]$上分段可微

若存在分割. 在每小段开区域可微, 在端点左.右极限与广义导数存在. (单侧)

那么Fourier级数收敛于$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$, $\forall x_0\in[a,b]$

若.连续则收敛于本身

4. f在$[a,b]$分段单调且有界. 则Fourier级数收敛于$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$

f 2π为周期. 在$[-\pi,\pi]$可积. $c_k=(f,\varphi_k)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)\right)^2dx=0.$$

Parseval等式. $$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx.$$

Chapter 1 多元函数和微分

有界闭域上的连续函数: 有界最值. 介值性质

多元函数 $f(X)$ 的一致连续 $\Leftrightarrow$ 任两 $\{X_n\}\{Y_n\}$, $\lim\|X_n-Y_n\|=0$ 时, $\lim(f(X_n)-f(Y_n))=0$

$f(X)$ 在 X_0 附近被 ρ^k 控制 / 是 ρ^k 的高阶无穷小 / 是 k阶无穷小函数.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \text{函数连续} \\ \text{连续可微}(C^{(1)}) & \longrightarrow & \text{可微} & \begin{array}{c}\nearrow \\ \not\swarrow \\ \searrow \\ \not\nwarrow\end{array} & \not\Updownarrow \\ (\text{偏导函数连续}) & \not\longleftarrow & & & \text{偏导数存在} \end{array}$$

$z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处梯度方向垂直于过 (x,y) 的等值线

求方向导数时方向的向量单位化! $\dfrac{\partial f}{\partial n}=\nabla f\cdot\vec{n}$

$$\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\leqslant 2.$$

链式法则 $\dfrac{\partial(y_1,\cdots,y_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\dfrac{\partial(y_1,\cdots,y_m)}{\partial(u_1,\cdots,u_k)}\cdot\dfrac{\partial(u_1,\cdots,u_k)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$

前提: y对u可微. u对x可微 $\rightarrow$ y对x可微

有偏导 $\rightarrow$ 有偏导

可交换求偏导顺序简化运算!

隐函数: 想 $z=z(x,y)$ 类似形式. 设法直接求偏导.

$\boxed{C^{(1)}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial(y_1,\cdots,y_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=-\left(\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right)$

逆向量值函数. $C^{(1)}$

$Y=f(X)$. 若Jacobi $J(f(X_0))$ 可逆 则在 $Y_0=f(X_0)$ 附近可逆.

有 g s.t. $X=g(Y)$. g 也为 $C^{(1)}$.

把 $f(x,y,z)\geq g(x,y,z)$ 转化为 $\begin{cases}\min f(x,y,z)\\ s.t.\ g(x,y,z)=C\end{cases}$ 求 $\min\geq C\ (\forall C)$

Chapter 2 含参积分

$$f(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x,y)\,dy$$

$$\Rightarrow f'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\,dy+g(x,\beta(x))\beta'(x)-g(x,\alpha(x))\alpha'(x)$$

记得换元时的 $r^2\sin\varphi$ ！

看清题目求的积分是什么！空间、曲面、曲线？

二维、曲线切向量 $\vec{n}=(1,\frac{dy}{dx})=(1,-\frac{F_x}{F_y})$