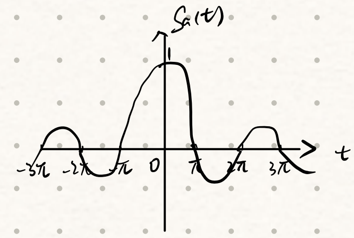
12.21

Chapter 1. 信号的基本概念与数学基础

by

第1讲.

- $Sa(t)=\frac{\sin(t)}{t}$, $\int_{-\infty}^{0}Sa(t)dt=\int_{0}^{+\infty}Sa(t)dt=\frac{\pi}{2}$. 偶函数, 过零点 $k\pi$ 且 $k\neq0$.



△欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x \Rightarrow e^{i\pi}+1=0$

$$\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}(e^{ix}-e^{-ix})\\ \cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\end{cases}$$

△函数分解 正交向量组, 正交基, 标准正交基 正交函数集 $[t_1,t_2]$上, $\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt=\begin{cases}0 & i\neq j\\ k_i & i=j\end{cases}$. 完备的正交函数集.

12.22

第2讲 信号的基本运算

△常规运算 $\begin{cases}\text{线性}\\ \text{乘除}\end{cases}$ 每个点取值作运算.

△波形变换

- 时移: $f(t)\to f(t-b)$, $b>0$ 右移
- 反褶: $f(t)\to f(-t)$. 注意 $g(t)=f(1-t)$的反褶是$f(1+t)$! 标信号$=0$位置
- 压扩(尺度): $f(t)\to f(at)$. $a<0$需反褶. $|a|>1$ 压缩, <1 扩张.

△数学运算.

Def.(信号的能量) $\begin{cases}\text{连续时间信号 } E[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\|f(t)\|^2dt\\ \text{离散时间信号 } E[f(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|f(n)\|^2.\end{cases}$ Def.(能量(有限)信号)

Def.(信号的功率) $\begin{cases}\text{连续时间信号 } P[f(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\|f(t)\|^2dt\\ \text{离散时间信号 } P[f(n)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\|f(n)\|^2.\end{cases}$ Def.(功率(有限)信号)

△相互运算

Def.(卷积). 或 $f(t)*g(t)$

$\begin{cases}\text{连续时间信号 } (f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)g(\tau)d\tau\\ \text{离散时间信号 } (f*g)(m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)g(m-n)\end{cases}$ 卷积存在条件: f,g可积函数, 卷积结果有界.

一个信号的反褶信号在时间轴上滑动过程中, 与另一信号重合部分相乘而得新信号的面积随t的变化.

Prop.(卷积的性质)

1. 交换律 $f_1*f_2=f_2*f_1$
2. 分配律 $f_1*(f_2+f_3)=f_1*f_2+f_1*f_3$ 用于并联系统分析
3. 结合律 $(f_1*f_2)*f_3=f_1*(f_2*f_3)$ 用于串联系统分析

卷积的微分: $\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*[\frac{d}{dt}f_2(t)]=[\frac{d}{dt}f_1(t)]*f_2(t)$

卷积的积分: $\int_{-\infty}^{t}(f_1*f_2)(\lambda)d\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda=(\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)d\lambda)*f_2(t)$ 注意都是函数!

$\Rightarrow$ f_1,f_2为$\mathbb{R}$上无限阶连续可导函数 则 $(f_1*f_2)^{(n)}(t)=f_1^{(m)}(t)*f_2^{(n-m)}(t)$.
其中$m,n,n-m$取正整数时为导数阶次, 取负整数时为重积分次数.

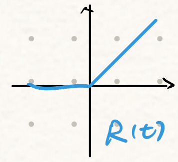
12.23

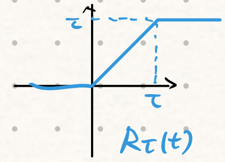
Def.(相关). $R_{f_1f_2}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2^*(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau+t)f_2^*(\tau)d\tau$. →可检测准周期信号的准周期

Prop.(相关的性质) $R_{f_1f_2}(t)=R^*_{f_2f_1}(-t)$. $R_{f_2f_1}(t)=f_1^*(-t)*f_2(t)$

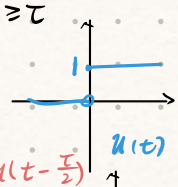
△奇异信号

Def.（单位斜变信号） $R(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\ge 0\end{cases}$ $R_\tau(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & 0\le t<\tau\\ \tau, & t\ge\tau\end{cases}$

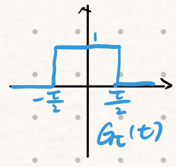




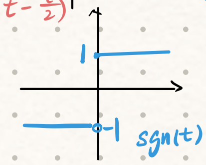
Def.（单位阶跃信号） $u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$ $u(t)=\frac{d}{dt}R(t)$



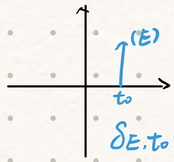
Def.（单位矩形脉冲） $G_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|\le\frac{\tau}{2}\\ 0, & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$ 脉宽 $G_\tau(t)=u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})$



Def.（符号函数信号） $sgn(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0\\ -1, & t<0\end{cases}$ $sgn(t)+1=2u(t)$



Def.（单位冲激信号） 狄拉克定义式 $\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\\ \delta(t)=0\ (t\ne 0)\end{cases}$



$\delta_{E,t_0}(t)=E\delta(t-t_0)$

Prop.

1. 搬移抽样特性 $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$
2. 抽样特性 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\phi(t)dt=\phi(t_0)$
3. 对称性 $\delta(t)=\delta(-t)$
4. 时域压扩性 $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)\ (a\ne 0)$
5. 积分 $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$

例. $x(-2t+1)=2\delta(t-1)$. 求 $x(t)=?$

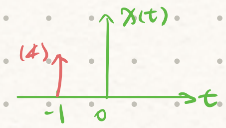
$t'=-2t+1 \Rightarrow t=\frac{1-t'}{2}$

$x(t)=2\delta(-\frac{t}{2}-\frac{1}{2})$

$=2\frac{1}{|-\frac{1}{2}|}\delta(t+1)$

$=4\delta(t+1)$

$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})$



Chapter 2 信号的分解

第1讲 FS.

Def（平方可积函数）. $x(t)\in L^2(\mathbb{R})$，若 $x(t)$ 为实函数且 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt<\infty$

一些分类方法：

信号的直流分量	$f_{DC}(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt$	→ 信号的均值
信号的交流分量	$f_{AC}(t)=f(t)-f_{DC}(t)$	
信号的偶分量	$f_e(t)=Ev[f(t)]=\frac{f(t)+f(-t)}{2}$	
信号的奇分量	$f_o(t)=Od[f(t)]=\frac{f(t)-f(-t)}{2}$	
信号的实部分量	$f_r(t)=\mathrm{Re}[f(t)]=\frac{1}{2}(f(t)+f^*(t))$	
信号的虚部分量	$f_i(t)=\mathrm{Im}[f(t)]=\frac{1}{2j}(f(t)-f^*(t))$	

Def（函数正交）. $f_1(t)$. $f_2(t)$ 在 (t_1,t_2) 正交，若

$$\langle f_1,f_2\rangle=\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2^*(t)dt=0.$$

Def.（正交函数集） $[t_1,t_2]$ 上非零函数序列 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$.

对 $\forall i,j$，有 $(\varphi_i,\varphi_j)=\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt=\begin{cases}0, & i\ne j\\ K_i, & i=j\end{cases}$ K_i 为实常数

Def（标准正交函数集）.（完备正交函数集）.

Def（函数的正交分解）.

当 $f(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 有连续一阶导和逐段连续的二阶导时，可用完备的正交函数集 $\{\varphi_i(t)\}$ 表示. 即.

$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\varphi_i(t)$. 其中 c_i 为常数. 且有 $c_i=\frac{(f(t),\varphi_i(t))}{(\varphi_i(t),\varphi_i(t))}=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i^*(t)dt$

Thm（帕斯瓦尔定理）

$$\int_{t_1}^{t_2}\|f(t)\|^2dt=\sum_{i=1}^{\infty}\|c_i\|^2K_i$$

信号的正交变换：

- **概念梳理**

1、信号的级数展开 $x(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}c_i\varphi_i(t)$

求系数 c_i：信号变换

2、函数的正交分解 $f(t)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\varphi_i(t)$ $\{\varphi_i(t)\}$ 为完备正交函数集

求系数 c_i：$c_i=\frac{(f(t),\varphi_i(t))}{(\varphi_i(t),\varphi_i(t))}=\frac{(f(t),\varphi_i(t))}{k_i}=\frac{1}{k_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i^*(t)d_t$

3、信号的正交变换，亦称为Karhunen-Loeve变换

$\varphi_i(t)$ 为标准的完备正交基 $c_i=\int_{t_1}^{t_2}x(t)\varphi_i^*(t)dt$

4、如果信号为符合狄义赫利条件的周期函数，则正交分解的系数 c_i 形式会很漂亮（见下一节）

24

Thm (周期信号的正交分解)

一个周期内！ 若全域皆是无穷

满足 Dirichlet 条件(有限间断点、极值点、绝对积分为有值)的周期函数都可在完备正交基函数上展开成无穷级数

Algo. (FS) 傅里叶级数展开 周期信号

三角形式

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)dt \\ a_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos n\omega_1 t\, dt \\ b_n = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin n\omega_1 t\, dt \end{cases}$$

复指数形式

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - jb_n}{2}e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2}e^{-jn\omega_1 t}\right]$$

$$= F(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} + F(-n\omega_1)e^{-jn\omega_1 t}\right]$$

简写为 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$

注意负号！

$$\begin{cases} F(n) = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \\ F_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad n>0, \quad \frac{a_n + jb_n}{2} \quad n<0, \quad a_0 \quad n=0. \end{cases}$$

Prop (FS的性质)

1. 偶周期信号的 FS 是偶对称的实数序列. $\because b_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0} f(t)\sin n\omega_1 t\, dt = 0$
2. 奇周期信号的 FS 是奇对称的纯虚序列 $\because a_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos n\omega_1 t\, dt = 0.$
3. 帕斯瓦尔定理：周期信号的平均功率是 $P = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} \|f(t)\|^2 dt = \|a_0\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\|a_n\|^2 + \|b_n\|^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$

   对比 $\int_{t_1}^{t_2}\|f(t)\|^2 dt = \sum_{i=1}^{\infty}\|C_i\|^2 k_i$. 此处 C_i 即 F_n, k_i 为 T_1 ($\int_{T_1} e^{-jn\omega_1 t}e^{jn\omega_1 t} = T_1$).
4. 周期信号的傅里叶频谱 仅在离散的 $n\omega_1$ 点有值，间隔为 $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T_1$

   F_n 为双边谱. 两边频谱幅度相加才是实际幅度！ 信号功率为 $\sum_{n=-\infty}|F_n|^2$.

周期矩形脉冲信号 $f(t)$. 宽度为 τ. 幅度为 E. 周期为 T_1. ⇒ 谱线包络线为 $\frac{E\tau}{T_1}Sa(\frac{\omega\tau}{2})$. 能量主要集中在第一个零点内

对比非周期 $E\tau Sa(\frac{\tau}{2}\omega)$

由于周期性. $\frac{1}{T_1} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}d\omega$.

第2讲 FT

Algo. (FT). 傅里叶变换 非周期信号

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

(IFT) 注意系数！ 注意对 ω 积分！

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

FT存在的充要条件：时域信号绝对可积.

$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ → 相频密度

幅频密度

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} x_{T_1}(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

	FS	FT
被分析对象	周期信号	非周期信号
频率定义域	离散频率，谐波频率处	连续频率，整个频率轴
函数值意义	频率分量的数值	频率分量的密度值

Prop. (FT的性质)

1. 唯一性 若两函数的 FT/IFT 相等，则它们也相等.
2. 可逆性 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \Longleftrightarrow \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$.

若将非周期 $f(t)$ 以 T_1 为周期延拓 $\tilde{f}(t)$. 则

$\tilde{f}(t)$ 的 FS: $F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$. 数值 密度

$f(t)$ 的 FT: $F(n\omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$ $\Rightarrow F_n = \frac{1}{T_1}F(n\omega_1)$

例：

$\triangle$ $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

用 IFT 证！正难则反. $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$

推论： $\mathcal{F}[\cos\omega_0 t] = \mathcal{F}[\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})] = \pi(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0))$

$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t] = \mathcal{F}[\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})] = \frac{\pi}{j}(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0))$

典型信号的 FT.

1. 矩形脉冲信号 $G_\tau(t) \longleftrightarrow \tau Sa(\frac{\tau\omega}{2})$

$F(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}dt = -\frac{1}{j\omega}(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{j\omega\frac{\tau}{2}}) = \frac{2}{\omega}\sin(\frac{\omega\tau}{2}) = \tau Sa(\frac{\tau\omega}{2})$

脉高为 E, 脉宽为 τ. $f(t) = EG_\tau(t)$ $F(\omega) = E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$ 原点处函数值等于矩形脉冲的面积($E\tau$)

12.24

2. 冲激信号 $\delta(t) \leftrightarrow 1$

$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$.

直流信号 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$.

$\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega=1$.

3. 单位阶跃信号 $u(t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$ 　直接积分 习题课1, P11

$\because \delta(t)\leftrightarrow 1 \quad \therefore \quad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,dt \leftrightarrow (j\omega)^{-1}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)=(j\omega)^{-1}+\pi\delta(\omega)$

4. 指数信号 $e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega+a}$

$F(\omega)=\int_{0}^{\infty}e^{-at}\cdot e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{j\omega+a}\quad(a>0)$. $\begin{cases}|F(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\\ \angle F(j\omega)=-\arctan\frac{\omega}{a}\end{cases}$

Prop. (FT的性质)

1. 唯一性 若两函数的FT/IFT相等,则它们也相等.
2. 可逆性 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)\Leftrightarrow\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=f(t)$.
3. 线性性 $\mathcal{F}[\sum_n a_n f_n(t)]=\sum_n a_n\mathcal{F}[f_n(t)]$
4. 反褶共轭 反: $f(-t)\leftrightarrow F(-\omega)$ 共: $f^*(t)\leftrightarrow F^*(-\omega)$ 反&共: $f^*(-t)\leftrightarrow F^*(\omega)$
5. IFT和FT的对偶性 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\{\mathcal{F}_\omega[F^*(\omega)]\}^*$

   $F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$. 证: $f(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$. 交换变量$t.\omega$. 即得 $2\pi f(-\omega)=\mathcal{F}[F(\omega)]$
6. FT的尺度变换特性 $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$ 注意一个压缩另一个扩展!
7. FT的时移特性 $f(t-t_0)\leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$ 注意两边都是负号; $f(at-t_0)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}(F(\frac{\omega}{a})e^{-j\omega\frac{t_0}{a}})$ 　对比自变量.
8. FT的频移特性 $f(t)e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$ 注意左边正号! $\frac{1}{|a|}(f(\frac{t}{a})e^{jt\frac{\omega_0}{a}})\leftrightarrow F(a\omega-\omega_0)$
9. FT的微积分运算 时域微分 $\frac{d}{dt}f(t)\leftrightarrow j\omega F(\omega)$ 　积分 $\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\leftrightarrow(j\omega)^{-1}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$

   频域微分 $\frac{d}{d\omega}F(\omega)\leftrightarrow -jtf(t)$ 　积分 $\int_{-\infty}^{\omega}F(\lambda)d\lambda\leftrightarrow(jt)^{-1}f(t)+\pi f(0)\delta(t)$
10. FT的卷积运算 $f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$

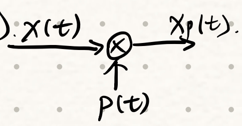
    $f_1(t)\cdot f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$ 　e.g. 加窗. $F(\omega)=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*\tau Sa(\frac{\tau\omega}{2})$
11. FT的相关性定理 $F[R_{f_1f_2}(t)]=F[f_1(t)]F^*[f_2(t)]$
12. 帕斯瓦尔 $\int_{-\infty}^{\infty}\|f(t)\|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|F(\omega)\|^2d\omega$

第3讲. 采样

Def. (采样). 采样周期 T_s, 频率 $f_s=\frac{1}{T_s}$, 角频率 $\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}=2\pi f_s$.

在某些离散时间点上提取连续时间信号值.

Def. (理想冲激串采样).



$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$.

$x_p(t)=x(t)p(t)=\sum x(nT_s)\delta(t-nT_s)$.

$\Rightarrow X_p(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)$

$p(t)$ 周期信号, FS: $F_n=\frac{1}{T_s}\int_{T_s}p(t)e^{-jn\omega_1 t}dt=\frac{1}{T_s}$. 因此 $p(t)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_1 t}$. 又 $e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$P(\omega)=\frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$.

$X_p(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum X(\omega)*\delta(\omega-n\omega_s)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(\omega-n\omega_s)$. 以$\omega_s$为周期在频域延拓(乘系数$\frac{1}{T_s}$).

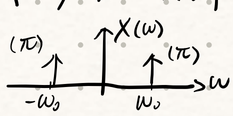
Thm. (Nyquist 采样定理).

当满足 1. $x(t)$最高频率分量为ω_m 2. 采样频率 $\omega_s\geq 2\omega_m$ 时,

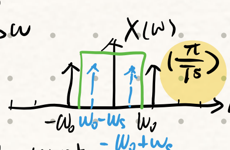
可通过理想低通滤波器从 $X_p(\omega)$ 中不失真地分离出 $X(j\omega)$. 即 $x(t)$ 可唯一地由其样本 $x(nT_s)$ 确定.

例. 混叠.

$x(t)=\cos\omega_0 t$



当 $\omega_0<\omega_s<2\omega_0$ 时, 频谱混叠.



注意系数

当理想低通截止频率 $\omega_s-\omega_0<\omega_c<\omega_0$ 时.

恢复信号为 $x_r(t)=\cos(\omega_s-\omega_0)t$

在采样点值相同!

$x(nT_s)=\cos(n\omega_0 T_s)$

$\Rightarrow x_r(nT_s)=\cos(n(\omega_s-\omega_0)T_s)=\cos(-n\omega_0 T_s)=x(nT_s)$

check this. P50

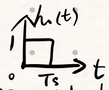
第4讲. 采样 → DTFT

Def. (内插) 从样本值重建某一函数的过程

Def. (理想内插). 以理想低通滤波器(频域矩形脉冲)的单位冲激响应(Sa函数形态)为内插函数.

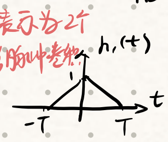
$$x(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,\delta(t-nT_s) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,h(t-nT_s)$$

P6 **Def.** (零阶保持内插). $h_0(t)$ 为矩形脉冲.



P7 **Def.** (一阶保持内插) 线性内插. $h_1(t)$ 为三角形脉冲.

可表示为2个矩形脉冲卷积



P12. $\omega_s = 2\omega_m$ 时 工程上不足以恢复信号 $x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$ 在 $\omega_s = 2\omega_0$ 时.

$x(t) = \cos\varphi\cos\omega_0 t - \sin\varphi\ \sin\omega_0 t$.

$x(nT_s) = \cos\varphi\ \cos\omega_0 nT_s$ 与对 $x_1(t) = \cos\varphi\cos\omega_0 t$ 采样结果一样.

Def. (频域采样). $P(\omega) = \sum_k \delta(\omega - k\omega_s) \Rightarrow p(t) = \frac{1}{\omega_s}\sum_n \delta(t-nT_s)$

$\therefore x_p(t) = x(t) * p(t) = \frac{1}{\omega_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT_s)$ 以 T_s 为周期在时域延拓(乘系数 $\frac{1}{\omega_s}$)

Chapter 3 离散时间信号的傅里叶分析.

○ 若满足 Nyquist 定理 $\hat{F}(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum F(\omega - n\omega_s)$. 有: $T\hat{F}(\omega) = F(\omega)$ $(-\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s)$.

否则. $T\hat{F}(\omega) = F(\omega) + F(\omega-\omega_s) + \cdots \approx F(\omega)$

△ 用 FT 公式推导 $\hat{F}(\omega)$.

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,p(t)\,e^{-j\omega t}dt = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} f(nT_s)\,\delta(t-nT_s)\,e^{-j\omega t}dt = \sum_n f(nT_s)\,e^{-j\omega nT_s}.$$

△ 用 FS 公式推导 $f(nT_s)$.

$$f(nT_s) = \frac{1}{\omega_s}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \hat{F}(\omega)\,e^{jn\omega T_s}d\omega$$

对照 FS 公式. $f(t) = \sum F_n e^{jn\omega_1 t}$.

$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)\,e^{-jn\omega_1 t}dt$.

Def. (频率归一化). { 时间间隔归一的离散信号为数字信号. 数字信号 DTFT 归一化频谱为数字频谱.

Algo. (DTFT) 离散时间傅里叶变换

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,e^{-j\omega nT}$$

⇓

$$X(\omega) = \mathrm{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\,e^{-jn\omega}$$

(IDTFT)

$$f(nT) = \frac{1}{\omega_s}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \hat{F}(\omega)\,e^{jn\omega T}d\omega$$

⇓

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\,e^{j\omega n}d\omega$$

FS和DTFT 有积分的那边有系数 分解正号, 变换负号.

Def. (模拟频率. 数字频率).

ω - FT　Ω - DTFT

Nyquist 区间: $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}] \Rightarrow [-\pi, \pi]$.

$\Omega = 2\pi f / f_s = \omega / f_s$. 即 $\omega = \Omega f_s$.

Prop. (DTFT 性质).

1. 频域周期函数 $X(\omega) = X(\omega + 2\pi)$
2. 线性性 $\mathrm{DTFT}[\sum_k a_k \cdot x_k[n]] = \sum_k a_k \cdot \mathrm{DTFT}[x_k(n)]$
3. 平移. 时域 $\mathrm{DTFT}[x(n-n_0)] = X(\omega)e^{-j\omega n_0}$ 频域 $\mathrm{DTFT}[e^{j\omega_0 n}x(n)] = X(\omega - \omega_0)$
4. 反褶. 共轭. $\mathrm{DTFT}[x(-n)] = X(-\omega)$ $\mathrm{DTFT}[x^*(n)] = X^*(-\omega)$
5. 时域扩展 $x_{(a)}(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{a}), & \frac{n}{a} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{others}. \end{cases}$ $(a \in \mathbb{Z}, a \ne 0)$. 则 $\mathrm{DTFT}[x_{(a)}(n)] = X(a\omega)$.
6. 频域微分 $\mathrm{DTFT}[nx(n)] = j[\frac{d}{d\omega}X(\omega)]$? Proof.

7. 卷积 时域 $DTFT[x_1(n)*x_2(n)] = X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$

Def. 回周卷积. 积分限制在一周期内.

频域 $DTFT[x_1(n)\cdot x_2(n)] = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega)\otimes X_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega')\, X_2(\omega-\omega')\,d\omega'$

8. 帕斯瓦尔 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X_\omega(\omega)|^2 d\omega$

Def (回周卷积).

1. 周期为N的离散信号 $x(n), y(n)$: $x(n)\otimes y(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(m)\,y(n-m)$

2. 周期为T的连续信号 $x(t), y(t)$: $x(t)\otimes y(t) = \int_T x(t')\,y(t-t')\,dt'$

习题课 1.

1. 证 $\int_{-\infty}^{\omega} F(\lambda)\,d\lambda \leftrightarrow \pi f(0)\,\delta(t) + (jt)^{-1} f(t)$

$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + (j\omega)^{-1}$

$\int_{-\infty}^{\omega} F(\lambda)\,d\lambda = F(\omega) * u(\omega)$ 注意卷积 $u(t)$ 相当于 $\int_{-\infty}^{t}$ 积分!

$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)*u(\omega)] = \mathcal{F}[F(\omega)]\cdot\mathcal{F}[u(\omega)]$ ✗ 时域卷积没有系数! 对比 $f_1(t)\cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$.

默认是 $t \leftrightarrow \omega$. $\mathcal{F}(\cdots t) = \cdots\omega$!!! 反了. $f \xrightarrow{FT} F$. $t \xrightarrow{FT} \omega$. (在 $\leftrightarrow$ 中).

$F(\omega)*u(\omega) \leftrightarrow 2\pi\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]\cdot\mathcal{F}^{-1}[u(\omega)]$.

由于 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$, 则 $F(-t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$.

$F(\omega)*u(\omega) \leftrightarrow f(t)\cdot\mathcal{F}^{-1}[2\pi u(\omega)] = f(t)\cdot U(-t) = f(t)\cdot(\pi\delta(-t) - (jt)^{-1}) = \pi f(0)\,\delta(t) - (jt)^{-1} f(t)$.

2. (1) $f(t) = \sin t\,\sin(2t) + e^{3jt}$ 的 FS.

$f(t) = \frac{1}{2}[\cos(t-2t) - \cos(t+2t)] + e^{3jt}$

$= \frac{1}{4}[e^{jt} + e^{-jt} - e^{3jt} - e^{-3jt}] + e^{3jt}$

$= \frac{3}{4}e^{3jt} - \frac{1}{4}e^{-3jt} + \frac{1}{4}e^{jt} + \frac{1}{4}e^{-jt}$ ← 级数

☆ 或第一步就用 $\sin \to e$

$\frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})\cdot\frac{1}{2j}(e^{2jt} - e^{-2jt}) + e^{3jt}$

$= -\frac{1}{4}(e^{3jt} - e^{jt} - e^{-jt} + e^{-3jt}) + e^{3jt}$ 注意符号

(2) $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$. $\Rightarrow \frac{1}{2\pi}F(-t) \leftrightarrow f(\omega)$.

$\mathcal{F}^{-1}[f(\omega)] = \frac{1}{2\pi}F(-t)$

直接 → $\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi[\frac{3}{4}\delta(\omega-3) - \frac{1}{4}\delta(\omega+3) + \frac{1}{4}\delta(\omega-1) + \frac{1}{4}\delta(\omega+1)]$

利用 $e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$\therefore f(\omega)$ 的 iFT 为 $\frac{3}{4}\delta(-t-3) - \frac{1}{4}\delta(-t+3) + \frac{1}{4}\delta(-t-1) + \frac{1}{4}\delta(-t+1)$

$= \frac{3}{4}\delta(t+3) - \frac{1}{4}\delta(t-3) + \frac{1}{4}\delta(t+1) + \frac{1}{4}\delta(t-1)$

☆ f偶→F偶. f奇→F奇. 若f偶. $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$ 若f奇. $F(t) \leftrightarrow -2\pi f(\omega)$.

3. 求 $t<0$ 处有对称的信号!

非周期的FT - 物理信号 → 实信号!

$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$.

$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$ $X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$ $\varphi(\omega) = \arctan\frac{X(\omega)}{R(\omega)}$

频谱实部偶对称 虚部奇对称. 相位奇对称.

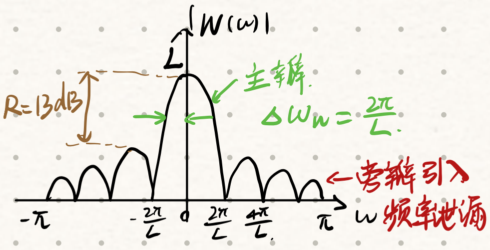
幅度偶对称!

注意画图.

第5讲. 有限长DTFT→DFT

12.2

Algo. (有限长DTFT) 有限长离散时间傅里叶变换



宽为L的矩形窗 $W(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le L-1\\ 0, & n\ge L\end{cases}$

加窗后 $x_L(n)=x(n)W(n)=\begin{cases}x(n), & 0\le n\le L-1\\ 0, & n\ge L\end{cases}$

频谱 $X_L(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_L(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{L-1}x_L(n)e^{-j\omega n}$

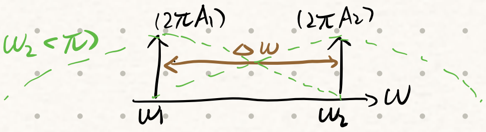
又由DTFT卷积定理,(P6 第二行) $X_L(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)\otimes W(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\omega')W(\omega-\omega')d\omega'$

$W(\omega)=\sum_{n=0}^{L-1}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-jL\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(L-1)/2}$. $\omega=0$时值为L!

○讨论:频谱分辨率

$x(n)=A_1e^{j\omega_1 n}+A_2e^{j\omega_2 n}$ $(0<\omega_1<\omega_2<\pi)$

$\Rightarrow X(\omega)=2\pi(\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega-\omega_2))$



$L\Delta\omega\ge 2\pi$ "不确定原理"

加窗后可分辨条件: $\Delta\omega\ge\Delta\omega_W=\frac{2\pi}{L}$ 即窗宽L和最小频率间隔满足: $L\ge\frac{2\pi}{\Delta\omega}$

Algo. (DFT) 离散傅里叶变换

Def. (序列DFT). 序列长度为L,求其DTFT谱上$[0,2\pi]$区间均匀分布的N个谱值.

$x(n)$ $n=0,1,\cdots,L-1$
$\Downarrow$
$X(k)$ $k=0,1,\cdots,N-1$

$\omega_k=k\cdot\frac{2\pi}{N}$. (即求DTFT的$X(\omega_k)$,现在是$X(k)$).

$X(\omega_k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-j\omega_k n}=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

设 $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$,则 $X(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)W_N^{nk}$, $k=0,1,\cdots,N-1$

$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$ $n=0,1,\cdots,L-1$

矩阵形式:

$L\times N$ $A_{kn}=W_N^{kn}$

$N\times 1$ $X=[X_0\cdots X_{N-1}]^T$

$L\times 1$ $x=[x_0,\cdots,x_{L-1}]^T$

$\Rightarrow X=Ax$. $x=A^{-1}X$.

○讨论: N与L关系.

① $N>L$, 在$x(n)$后补0使长度为L, DFT结果一样: $x_D=[x_0,x_1,\cdots x_{L-1},0,0,\cdots,0]\Rightarrow X_D(\omega_k)=X(\omega_k)$

② $N<L$ 定义$x(n)$关于N的回绕序列 $\tilde{x}(n)=\sum_{m=0}^{\infty}x(mN+n)$. $DFT[x(n)]=DFT[\tilde{x}(n)]$

L_1 $x_1(n)$ L_2 $x_2(n)$ L_3 $x_3(n)$ ……

$\searrow\ \downarrow\ \swarrow$

$\tilde{x}(n)$ N

$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-nk}X(k)$ IDFT↑↓DFT $X(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)W_N^{nk}$

$X(k)$ N

多

L固定, N由程序决定
{ $N\ge L$时才能唯一确定$x(n)$
太大浪费资源

第6讲. DFT

Prop. (DFT频谱特点)

$N=4$.

-3 -2 -1 0 1 2 3
1 2 3

1. 离散的,周期的

环绕意义 $X^*(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x^*(n)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$

2. 实序列的DFT共轭对称 $X(-k)=X^*(k)$ 关于$\frac{N}{2}$共轭对称(N偶) $X(\frac{N}{2}+k)=X^*(\frac{N}{2}-k)$

3. 线性变换 $DFT[ax(n)+by(n)]=aDFT[x(n)]+bDFT[y(n)]$.

4. 帕斯瓦尔. $\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$ $(L=N)$ 不等时?为什么都用分解式算,有大? 对比三个.

5. 奇偶虚实. DFT奇偶性不变,实函数的DFT实部偶,虚部奇,模偶,相位奇 见上证.

虚 奇 偶 偶 奇

[可推: 若一个实奇函数DFT,则变成 虚 奇函数. ⇒ _偶不变, _奇变(_是实虚)

6. 反褶共轭 时反→频反. 时共→频反+共, 时反+共→频共 (与前一样)

7. 频移时移 $DFT[W_N^{-nl}x(n)] = X(k-l)$. $(L=N)$ 注意条件？为什么要.

$DFT[x(n-m)] = W_N^{mk}X(k)$ 证明: P9-10

8. DFT和IDFT对偶: $DFT[X(n)] = N\widetilde{x(-k)}$ $(L=N)$ 不能再用↔了! 因为不是一一对应了!

9. 卷积 $DFT[x(n) * y(n)] = DFT[x(n)]\cdot DFT[y(n)] \Rightarrow IDFT[X(n)\cdot Y(n)] = \widetilde{x(n)*y(n)}$

△卷积的四级 P19. $IDFT[X(n)\,Y(n)] = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\,\widetilde{y(n-m)} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\,y((n-m))_N$ ←表循环移位

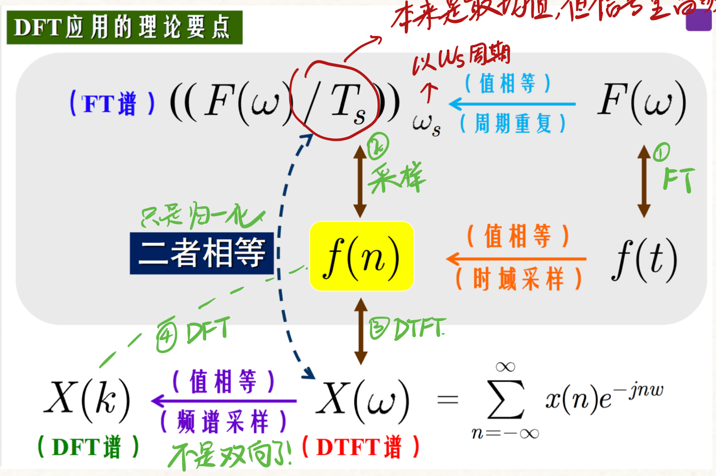
Def (圆卷积). $x(n) \otimes y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\, y((n-m))_N$

对比 DTFT 没有~! $DTFT[x_1(n)\cdot x_2(n)] = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) \otimes X_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega')X_2(\omega-\omega')d\omega'$

可以理解成 $F_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$

本来是取均值,但信号里高频没有.

☆总结



FT、DTFT、DFT变换的性质

	FT	DTFT	DFT
线性性	是		
时域反褶	频域共轭		
时域共轭	频域共轭+反褶		
对称性	$\mathscr{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$	$DTFT[X(n)] = 2\pi x(-\omega)$	$DFT[X(n)] = Nx(-k)$
时域平移	$\mathscr{F}[f(t-t_0)] = \mathscr{F}[f(t)]e^{-j\omega t_0}$	$DTFT[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0}X(\omega)$	$DFT[x(n-m)] = W_N^{mk}X(k)$
频域平移	$\mathscr{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega-\omega_0)$	$DTFT[e^{j\omega_0 n}x(n)] = X(\omega-\omega_0)$	$X(k-l) = \sum_{n=0}^{N-1}[x(n)W_N^{-nl}]W_N^{nk}$
时域卷积	$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)] = \mathscr{F}[f_1(t)]\cdot\mathscr{F}[f_2(t)]$	$DTFT[x_1(n)*x_2(n)] = X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$	$DFT[x(n)*y(n)] = X(k)\cdot Y(k)$
频域卷积	$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f_1(t)]*\mathscr{F}[f_2(t)]$	$DTFT[x_1(n)\cdot x_2(n)] = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega)\otimes X_2(\omega)$	$DFT[x(n)\cdot y(n)] = \frac{1}{N}X(k)\otimes Y(k)$

时域	非周期连续	非周期离散	有限长离散
频域	非周期连续	周期连续	有限长离散

其实有限长相当于周期!
视为以N为周期的序列中的主值区间

非周期: 不一定要周期.
有周期也行. e.g. $\cos\omega_0 t \to \pi(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$

① 用DFT算非周期的FT: $X(k) = X(\omega_k) = (F(\omega)/T_s)|_{\omega=\omega_k} = F(\omega_k)/T_s$.

逐点绘制: $F(\omega_k) = T_s X(k)$. $\omega_k = ?$

$\Omega = \omega\cdot\frac{2\pi}{\omega_s}$ $\Rightarrow \omega = \frac{\omega_s}{2\pi}\cdot\Omega$

$\omega_k = \frac{2\pi}{N}\cdot k$ $= \frac{\omega_s}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{N}k = \frac{\omega_s k}{N}$

$\omega_s\cdot\frac{k}{N}$ 吗.

② 用IDFT算非周期的IFT: $IDFT[F(\omega_k)] = IDTFT[((F\omega))_{\omega_s}]$
$= T_s\cdot IDTFT[((F\omega)/T_s)_{\omega_s}] = T_s\cdot f(n)$ 妙! $\Rightarrow f(n) = \frac{1}{T_s}\cdot IDFT[F(\omega_k)]$.

③ 用DFT算周期的FS $X(k) = X(\omega)|_{\omega=\omega_k} = F_0(\omega)/T_s|_{\omega=\omega_s}$ (F_0为$x(t)$ FT所得)
$= F_0(k\frac{\omega_s}{N})/T_s = F_0(k\omega_1)/T_s$. ($\omega_1$为$\frac{2\pi}{T_1}$, 在$F_n$中的$n\omega_1$)
$F_k = \underbrace{\frac{1}{T_1}F_0(k\omega_1)}_{\text{前面证过}} = \frac{1}{T_1}(T_s X(k)) = \frac{1}{N}X(k)$ (一个周期抽样N点,题设).

第7讲. FFT

$$X_N(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_{\frac{N}{2}}^{rk} + W_N^k\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_{\frac{N}{2}}^{rk}$$

$\begin{cases} g(r) = x(2r) \\ h(r) = x(2r+1) \end{cases}$ $r = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$

$$= \underbrace{G_{\frac{N}{2}}(k) + W_N^k H_{\frac{N}{2}}(k)}_{\text{周期为}\frac{N}{2}}$$ $k = 0,1,2,\cdots\frac{N}{2}-1$ ←受制于G,H下标.

$X(\frac{N}{2}+k) = G(\frac{N}{2}+k)_{\frac{N}{2}} + H(\frac{N}{2}+k)_{\frac{N}{2}} \cdot W_N^{(\frac{N}{2}+k)}$

$= G(k) - W_N^k H(k)$ 　 $k=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1$

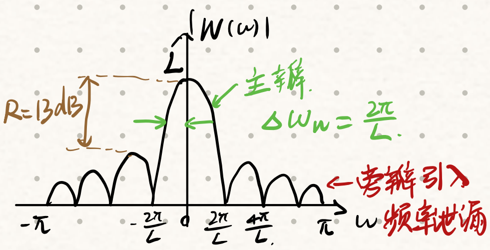
本质是周期有别!

复数加法: $N\log_2 N$ 次

乘法: $\frac{1}{2}N\log_2 N$ 次 (加减其实一样啊!)

FFT 蝶形... 　 To Be Filled.

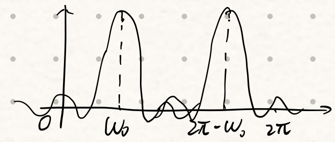
P16~21 例. 求 $x(n)=\cos(\frac{2\pi n}{N})$ 前N. 2N. N+1. N-1点的DFT形状.



⇒ $X'(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * W(\omega)$

考虑 L 和 N 的关系,

算 DFT 的第k点对应的频率是多少.

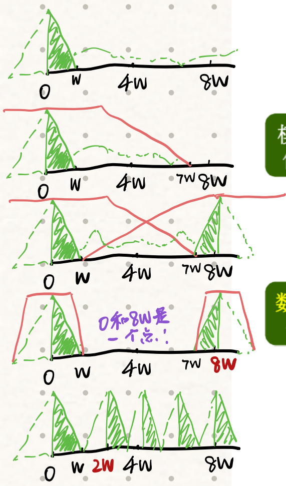


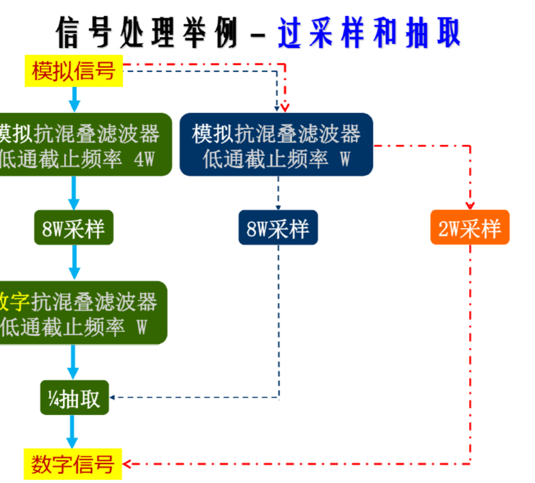
P24 例. 无.

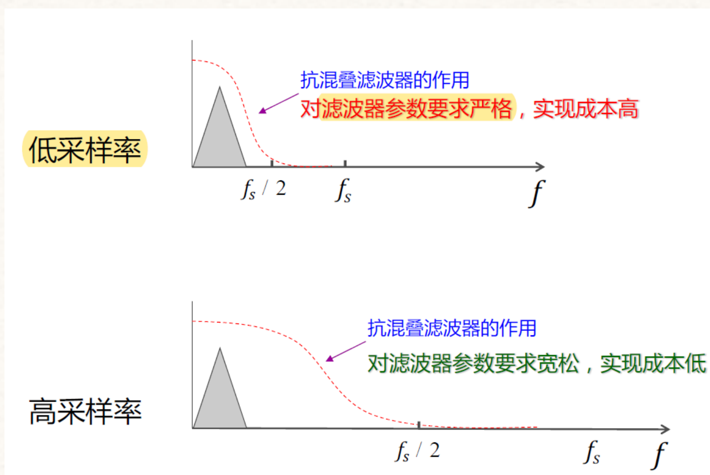
△ 过采样和抽取、提升采样率和插零

Def (抗混叠滤波器) 　 现实信号无用的高频频率不混叠有用部分

- 现实情况下的信号的频域总会有无用的高频分量，为防止它们与需要的部分发生混叠，因此需要将它们滤去;
- 低采样率的抗混叠滤波器对参数要求严格，实现成本高，高采样率的抗混叠滤波器对参数要求宽松，实现成本低;
- 为了成本低选择使用高采样率的抗混叠滤波器，但是这样会得到更多样本，加重后续数字信号处理的负担。解决方法是1/4抽取(二次采样)，第一步以$8W$采样率取$4N$个点，第二步再从$4N$个点中取N个点，这样等同于$2W$采样率;

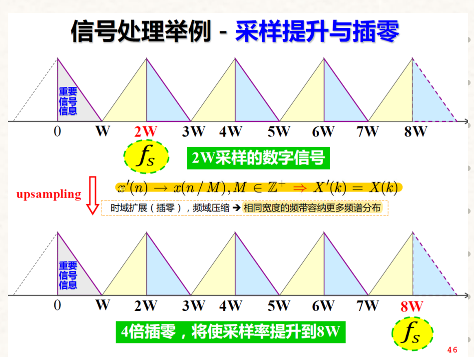




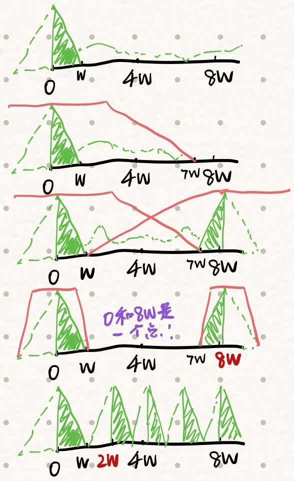


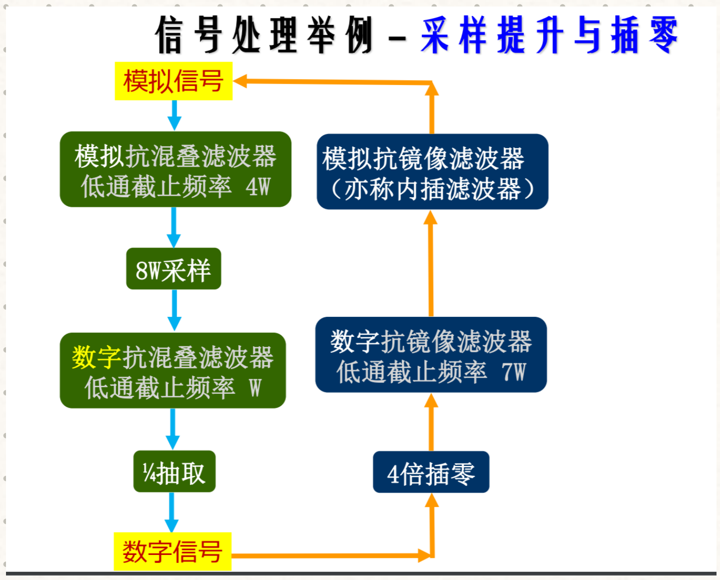
Def (抗镜像滤波器) 　 数字处理中引入的高频周期镜像信号去掉.

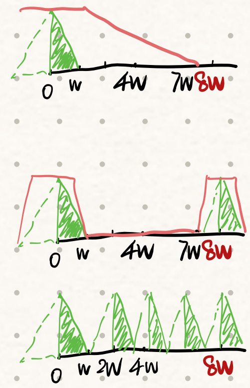
- 数字信号转换为模拟信号时(一般用零阶保持器实现)产生的是一个具有阶梯特性的模拟信号，这样会引入高频分量。需要将其过滤掉;
- 截止频率越高，模拟抗镜像滤波器越是容易实现。因此为了提高截止频率，需要对数字信号的采样率进行提升(相对来说滤波器的截止频率就提高了)。在原数字序列中插零: $x(n) \to x(n/M), M \in \mathbb{Z}^+$，这样相同宽度的频带可以容纳更多的频谱分布，再经过一个数字抗镜像滤波器将中间的信号滤去。



12.28







Chapter 4.

第1讲

数字滤波器的实现方式: 1. 用流图计算滤波器的输出
2. 用差分方程计算滤波器的输出
3. 用卷积过程计算滤波器的输出 ?
4. 用DTFT直接改变信号频谱

Def. (系统). 滤波器是一种系统.

- 连续时间系统
- *离散时间系统

仅讨论

- 线性系统: 满足叠加性, 齐次性.
- 时不变系统: 无论何时收到输入, 输出都相同.

} 线性时不变系统. LTI系统

- 因果系统: 输出只取决于现在以前的输入. 所有实际系统都是因果的!
- 稳定系统: 若输入有界, 输出也有界. BIBO原则

Def. (系统的描述)

① 差分方程. $\sum_{k=0}^{N} b_k\, y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} a_r\, x(n-r)$

② 流图

Def. (系统的响应).

① 零输入响应 只取决于系统起始状态

② 零状态响应 系统起始状态为零时给输入激励信号的响应

③ 脉冲(冲激)响应 输入为单位脉冲 $\delta(n)$ 时的响应 注意包含了整个时间轴输入信息了!

不是∞!!

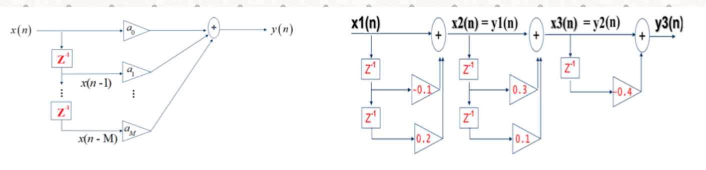
$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

Def. (有限脉冲响应FIR和FIR滤波器) $y(n) = \sum_{k=0}^{M} a(k)\, x(n-k)$
脉冲响应在有限个非零采样值后下降到零. finite impulse response

Def. (无限脉冲响应IIR和IIR滤波器) $y(n) = \sum_{k=0}^{M} a(k)\, x(n-k) + \sum_{k=1}^{N} b(k)\, y(n-k)$
脉冲响应永远不会消失. infinite impulse response

Def. (高阶滤波器) P29-31. 多个二级滤波器节的级联, 系数变大, 对量化误差敏感度↓

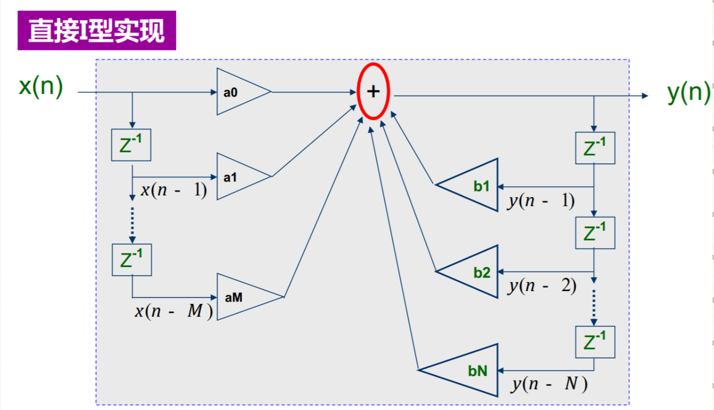
FIR

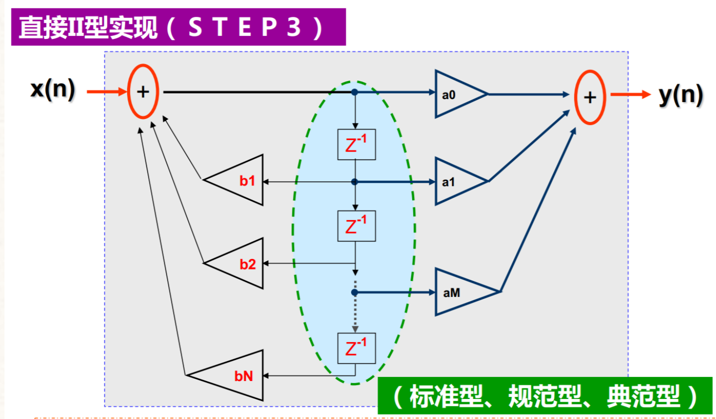


要求：
（1）减少存储
（2）减少运算（乘法、加法）
（3）减少有效字长效应（滤波器的系数必须量化，而处理器的有效比特数有限而产生的影响）

IIR

证明等价: P36





减少对输入输出的存储.

第2讲.

Thm. 若系统的脉冲响应 $h(n)$. 输入信号 $x(n)$

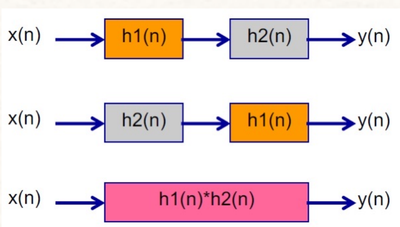
$\delta(n) \to h(n)$. 而 $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,\delta(n-k)$

根据LTI系统的线性、时不变特性, $x(n) \to y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,h(n-k)$. 即 $y(n) = x(n) * h(n)$ 对于FIR比较好用

Thm. 某LTI系统稳定的充要条件是: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = P < \infty$ 证明P7-8. trivial

Prop. (系统级联)

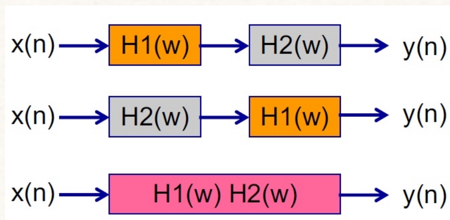
① 系统串联. 脉冲响应函数作卷积.



假设中间是 $x_2(n)$, 则
$x_2(n) = x(n) * h_1(n)$
$y(n) = x_2(n) * h_2(n)$
$\Rightarrow y(n) = x(n) * (h_1(n) * h_2(n))$.
卷积的交换. 结合律!

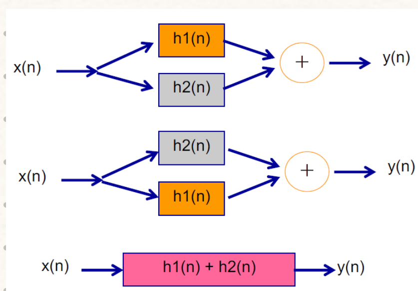
也解释了IIR的II型为什么等价.(顺序可交换).

频率响应函数作乘法.



$DTFT[h_1(n) * h_2(n)] = H_1(\omega)\,H_2(\omega)$

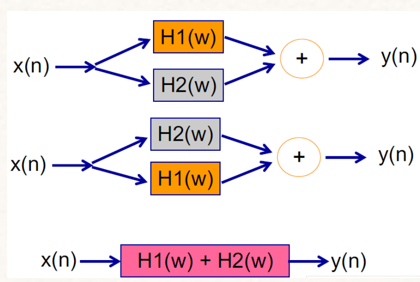
② 系统并联. 脉冲响应函数作加法.



$y(n) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$
$= x(n) * (h_1(n) + h_2(n))$

加法的交换. 结合律.

频率响应函数作加法.



$DTFT[h_1(n) + h_2(n)] = H_1(\omega) + H_2(\omega)$

Def.(频率响应)(频响)

$H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega n}$ 即 $DTFT[h(n)]=H(\omega)$. 通常是复值函数 $\Rightarrow H(\omega)=|H(\omega)|\cdot e^{j\varphi(\omega)}$ 幅频响应 相频响应

是周期函数,关于 $\omega=0$ 和 $\omega=\frac{\omega_s}{2}$ 对称. why?

$H(\omega)=Y(\omega)/X(\omega)$. 证: $y(n)=x(n)*h(n)$, 两边同DTFT得 $Y(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega)$

△差分方程系数与滤波器频响关系.

$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k) \xrightarrow{DTFT} Y(\omega)\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-j\omega k}=X(\omega)\sum_{k=0}^{M} a_k e^{-j\omega k}$.

$\Rightarrow H(\omega)=\sum_{k=0}^{M} a_k e^{-j\omega k} / \sum_{k=0}^{N} b_k e^{-j\omega k}$ 典例P17-18

Alg.(Z变换)

DTFT: $X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\boxed{e^{-j\omega n}}$ 变换核取值从单位圆扩展到整个复平面. $e^{-j\omega n}\Rightarrow z^{-n}$.

ZT: $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ $x(n)\xleftrightarrow{ZT}X(z)$. $Z[x(n)]=X(z)$.

Def.(单/双边Z变换). 单: $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$ 双: $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$ 幂级数形式

Def.($X(z)$的收敛域). 使 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$ 收敛的z的取值范围,简称ROC.

Prop. 1.一般是圆环 2.不含极点,且常以其为边界 3.ROC内ZT函数是解析的.

① 有限长序列 $X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$. ROC至少是 $0<|z|<\infty$. 若 $n_1,n_2\le 0$,则0可以; $n_1,n_2\ge 0$,则∞可以

② 右边序列 $X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$. ROC: $R_{x_1}<|z|<\infty$. 其中 $R_{x_1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(n)|}$. 若 $n_1\ge 0$,则∞可以

③ 左边序列 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$. ROC: $0<|z|<R_{x_2}$. 其中 $R_{x_2}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(-n)|}}$. 若 $n_2\le 0$,则0可以

④ 双边序列. 若 R_{x_1}, R_{x_2} 存在且 $R_{x_2}>R_{x_1}$,则ROC: $R_{x_1}<|z|<R_{x_2}$. 否则ROC为空集

△单位冲激序列的ZT $\delta(n)=\begin{cases}1, n=0\\0, n\ne 0\end{cases}$ $Z[\delta(n)]=\sum_n \delta(n)z^{-n}=\delta(0)z^{-0}=1$. ROC: $0\le|z|\le\infty$.

△单位阶跃序列的ZT $u(n)=\begin{cases}1, n\ge 0\\0, n<0\end{cases}$ $Z[u(n)]=\sum_n u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}$ ROC: $|z|>1$

△矩形脉冲序列的ZT $G_N(n)=\begin{cases}1, 0\le n<N\\0, 其它\end{cases}$ $Z[G_N(n)]=\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$ ROC: $0<|z|\le\infty$

△单位指数序列的ZT $Z[a^n u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}$ $|z|>|a|$

$Z[-a^n u(-n-1)]=\sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n}=\begin{cases}\frac{1}{1-az^{-1}} & |z|<|a|\\ 0 & z=0\end{cases}$ $-\frac{z}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{a}}=\frac{1}{1-az^{-1}}$.

12.29

第3讲.

Prop.(ZT的性质)

① 线性性 $Z[\sum_{k=1}^{K} a_k x_k(n)]=\sum_{k=1}^{K} a_k X_k(z)$ $z=e^{j\omega}$ 没变正负号!

② 时域平移性 $Z[x(n-m)]=z^{-m}X(z)$ 对比 W_N 是 $e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

③ 时域扩展性 $x_{(a)}(n)=\begin{cases}x(\frac{n}{a}), & \frac{n}{a}\in\mathbb{Z}\\0, & 其它\end{cases}$ $(0\ne a\in\mathbb{Z})$ 条件!! 则 $Z[x_a(n)]=X[z^a]$, $R_1<|z^a|<R_2$

DTFT$[x_a(n)]=X(a\omega)$. $\omega\to a\omega$ 对应 $z=e^{j\omega}\to z^a=e^{ja\omega}$

④ 奇偶性 若序列偶对称,则 $X(z)=Z[x(n)]=Z[x(-n)]=X(\frac{1}{z})$ $\Rightarrow$ 若一个奇/偶对称序列有一个

奇 $X(z)=Z[x(n)]=-Z[x(-n)]=-X(\frac{1}{z})$ 零点 z_0,则必有零点 $\frac{1}{z_0}$ (极)

$\omega \to -\omega$ 对应 $z = e^{j\omega} \to \frac{1}{z} = e^{j(-\omega)}$

⑤ 时域共轭性 $Z[x^*(n)] = X^*(z^*)$ $R_1 < |z| < R_2$

若序列为实序列，则 $X(z) = Z[x(n)] = Z[x^*(n)] = X^*(z^*)$ → 若实序列有一零点 z_0，则必有零点 z_0^*（极）

$X^*(z^*) = \sum (x(n) e^{j\omega n})^* = \sum x^*(n) e^{-j\omega n} = X^*(z^*)$.

⑥ 尺度变换

$Z[a^n x(n)] = X(\frac{z}{a})$ $R_{x_1} < |\frac{z}{a}| < R_{x_2}$

$Z[a^{-n} x(n)] = X(az)$ $R_{x_1} < |az| < R_{x_2}$

$Z[(-1)^n x(n)] = X(-z)$ $R_{x_1} < |z| < R_{x_2}$

$Z[e^{jn\omega_0} x(n)] = X(e^{-j\omega_0} z)$ $R_{x_1} < |z| < R_{x_2}$. 用复指数序列调制序列的相位.

⑦ Z域微分 $Z[n x(n)] = -z \frac{d}{dz} Z[x(n)]$. $R_1 < |z| < R_2$. ROC唯一可能变的是 $0/\infty$.

右 $= \sum -z \cdot (-n) \cdot x(n) \cdot z^{-n-1} = \sum x(n) \cdot n \cdot z^{-n}$.

$Z[n^m x(n)] = [-z \frac{d}{dz}]^m Z[x(n)]$ $R_1 < |z| < R_2$.

⑧ 初值定理. 因果序列. $x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$

⑨ 终值定理. 因果序列. $\lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1} (z-1) X(z)$?

⑩ 时域卷积 $Z[x(n) * y(n)] = Z[x(n)] \cdot Z[y(n)]$. 至少是原ROC交集. 零极点相抵时可能扩大.

⑪ 帕斯瓦尔 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) Y^*(\frac{1}{z^*}) z^{-1} dz$.

Algo. (逆Z变换)

① $X(z) = \frac{A_1}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1-p_2 z^{-1}} + \cdots + \frac{A_m}{1-p_m z^{-1}}$. $A_i = [(1-p_i z^{-1}) X(z)]_{z=p_i}$

② $X(z) = A_0 + \frac{A_1}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1-p_2 z^{-1}} + \cdots + \frac{A_m}{1-p_m z^{-1}}$ $A_0 = X(z)|_{z=0}$.

③. $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$.

① remove/restore. $W(z) = \frac{1}{D(z)}$. $X(z) = N(z) W(z)$. $Z[a^n u(n)] = \frac{1}{1-az^{-1}}$. $|z|>|a|$.

$X(z) = \frac{6+z^{-5}}{1-0.25z^{-2}}$. $W(z) = \frac{0.5}{1-0.5z^{-1}} + \frac{0.5}{1+0.5z^{-1}}$ $w(n) = 0.5(0.5)^n u(n) + 0.5(-0.5)^n u(n)$

$X(z) = (6+z^{-5}) W(z) \Rightarrow x(n) = 6w(n) + w(n-5)$ ← 时移

② 多项式除法.

$X(z) = -16z^{-1} - 4z^{-3} + \frac{19}{1-0.5z^{-1}} - \frac{13}{1+0.5z^{-1}}$

$x(n) = -16\delta(n-1) - 4\delta(n-3) + 19(0.5)^n u(n) - 13(-0.5)^n u(n)$ ← $Z[\delta(n)] = 1$.

典例: P23-24.

复习时算一遍. P38-39. P23若干习题

Def. (传递函数). $H(z) = Y(z)/X(z) = Z[h(n)]$ 级联

$H(z) = \frac{\sum a_r z^{-r}}{\sum b_k z^{-k}}$. $\sum b_k y(n-k) = \sum a_r x(n-r)$ 例P32

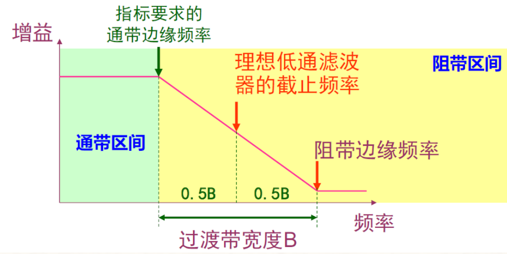
Thm. 因果系统 ⟺ H(z)的ROC是某圆外部区域，保括∞

稳定系统 ⟺ 包含单位圆

12.30.
第4讲.

理想低通滤波器的截止频率，由于单位冲激响应被截短成了有限项，所以滤波器的频率响应特性会发生改变。根据经验，在设计滤波器时，**理想低通滤波器的截止频率**不使用**通带边缘频率**，而是使用**过渡带中点的频率**。即：

理想低通滤波器的截止频率（设计用） =
设计指标要求的通带边缘频率 + (过渡带宽度) / 2



Algo.（FIR数字滤波器的设计）.

理想低通的h(n):无限长,有负值 ⇒ FIR的单位冲激响应序列h'(n)有限长,因果.

$h(n) = \frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi}$ ☆ Proof? 背!

$h'(n) = h(n)w(n)$ 再平移.

$h'(n) = h(n-\square)w(n-\square)$.

低通

低通FIR滤波器的设计步骤

1. 在过渡带宽度中间，选择理想低通滤波器的截止频率 f_c(Hz) = 设计指标要求的通带边缘频率 + (过渡带宽度) / 2
2. 计算截止频率的**数字频率**，并代入
   $$h(n) = \frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi} \qquad \omega_c = 2\pi f_c / f_s$$
   背!
3. 从表中选择满足阻带衰减及其他要求的窗函数，计算窗内非零项的数目，选择奇数项（好处：脉冲响应完全对称，相位没有失真），计算出窗函数的表达式 向上取整
4. 用窗函数与h(n)相乘，计算有限长脉冲响应
5. 将脉冲响应右移(N-1)/2，使第一个非零值在n=0处

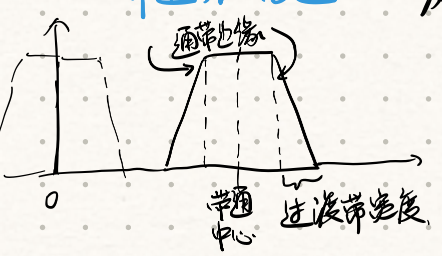
范围从$[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$到$[-\pi,\pi]$. 又 $\omega = 2\pi f$.

$\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega_s} = \Omega \Rightarrow \omega / f_s = \Omega$.

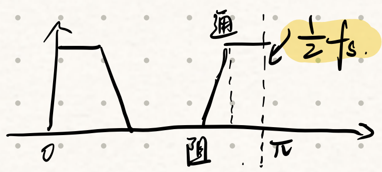
$\Omega_c = \omega_c / f_s = 2\pi f_c / f_s$.

看例题!

带通和高通. 频域平移 $h'(n) = h(n)w(n)\cos(n\omega_0)$



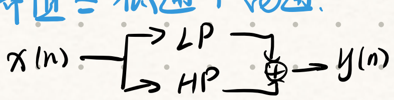
带通中心频率为f_0. 则 $\omega_0 = 2\pi\frac{f_0}{f_s}$, 余弦函数 $\cos(n\omega_0)$



注意 $\frac{1}{2}f_s$ 与 π 的对应关系. 这里 $\omega_0 = \pi$. 即 $\cos(n\pi)$

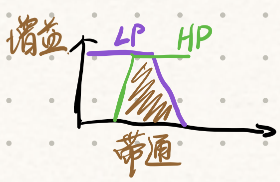
6 8 11

带阻 = 低通 + 高通.



$h_{BS}(n) = h_{LP}(n) + h_{HP}(n)$

带通 = 低通 * 高通.



$x(n) \to LP \to HP \to y(n)$.

$h_{BP}(n) = h_{LP}(n) * h_{HP}(n)$

$H_{BP}(n) = H_{LP}(n) \cdot H_{HP}(n)$