线性代数　荆文甲（近春园西254室）

9.9

公理化方法　　周二 5-6 p.m. 周三课后

定义 定理 证明　　wjjing@tsinghua.edu.cn

操作 运算　　习题课：周六第六大节 新水405

空间几何　Strang Chap 1.　中　Chap. 3.

线性空间　内积空间

线代结构运算 内积

线性变换 映射

线性方程组 $Ax=b$

§第一章　空间几何（欧氏几何）

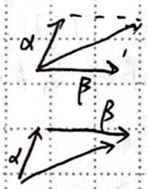
Def 1.（向量）空间中的有向线段 即有大小和方向的量

（三维）几何空间 $\mathbb{V}=\{$有向线段$\}$　?

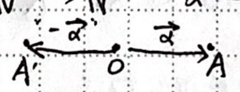
$\boxed{\text{加法}}$ $\mathbb{V}\times\mathbb{V} := \{(\vec{\alpha},\vec{\beta}): \vec{\alpha}\in\mathbb{V}, \vec{\beta}\in\mathbb{V}\}$　　:= 定义为

$\mathbb{V}\times\mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$

? 良好定义 $(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \longmapsto \vec{\alpha}+\vec{\beta}$　$\begin{cases}\text{平行四边形法则}\\ \text{三角形法则}\end{cases}$　不同?



$\boxed{\text{负向量}}$ $\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{V}$　$\vec{\alpha}\longrightarrow -\vec{\alpha}$



Ex. Strang P9. T13-14

$\boxed{\text{减法}}$ $\vec{\alpha}-\vec{\beta} := \vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$

Def 2.（数乘）　$\mathbb{R}\times\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{V}$

$k\in\mathbb{R}, \vec{\alpha}\in\mathbb{V} \longmapsto$ "$k\vec{\alpha}$"

$k>0$, "$k\vec{\alpha}$"是与$\vec{\alpha}$同向, 大小为$k|\vec{\alpha}|$

$k<0$,　反向,　$|k|\cdot|\vec{\alpha}|$

$k=0$,　零向量

定理!

Thm. $\mathbb{V}$为几何空间, $\mathbb{R}$为实数集, 其上的加法与数乘, 零向量$\vec{0}$, 负向量如前定义, 则加法与~~乘法~~数乘满足

(A0)　$\vec{\alpha}\in\mathbb{V}, \vec{\beta}\in\mathbb{V}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}\in\mathbb{V}$

(A1)　$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$　交换律

(A2)　$\vec{0}+\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$

(A3)　$\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$

(A4)　$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

(M0) $\forall k\in\mathbb{R}, \forall \vec{\alpha}\in\mathbb{V},\ k\vec{\alpha}\in\mathbb{V}$

(M1) $(kl)\vec{\alpha} = k(l\vec{\alpha}) = l(k\vec{\alpha})\quad \forall k,l\in\mathbb{R}, \vec{\alpha}\in\mathbb{V}$

(M2) $k(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = (k\vec{\alpha})+(k\vec{\beta}),\ \forall k\in\mathbb{R}, \forall \vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathbb{V}$ 分配律 in $\mathbb{V}$

(M3) $(k+l)\vec{\alpha} = (k\vec{\alpha})+(l\vec{\alpha})$ in $\mathbb{R}$

(M4) $1\cdot\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$

Def 3 (线性组合) $\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathbb{V}$, $c,d\in\mathbb{R}$, $c\vec{\alpha}+d\vec{\beta}$ 为 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 以 (c,d) 为系数的一个～.

Def 4. (两向量共线) 称 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 共线, 如果它们平行于同一直线
(认为 $\vec{0}$ 平行于所有直线)

Def 5. (三向量共面) 称 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ～, 如果它们平行于同一平面

Thm. $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$ 当且仅当存在不全为零的 $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ s.t. $k_1\vec{\alpha}+k_2\vec{\beta}=\vec{0}$

subject to 使得…满足

证明: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftarrow$

(1) 若其中有 $\vec{0}$, 不妨设 $\vec{\alpha}=\vec{0}$, 知 $1\vec{\alpha}=\vec{0}$ 推: $(1+\vec{0}$ 唯一条件) $-\vec{\alpha}$

$1\vec{\alpha}+0\vec{\beta}=\vec{0} \Rightarrow$ (1) 成立.

若 $\vec{\alpha}\neq 0, \vec{\beta}\neq 0, \vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$

同向: $|\vec{OA}|\,\vec{OA} + |\vec{OB}|\,\vec{OB}=\vec{0}$ 反向同理.

(2) 不妨 $k_1\neq 0$, 则 $k_1\vec{\alpha}=-k_2\vec{\beta}$

$\vec{\alpha}=-\frac{k_2}{k_1}\vec{\beta}$

$\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 不共线 $\Leftrightarrow$ $k_1\vec{\alpha}+k_2\vec{\beta}=0$ 仅当 $k_1=k_2=0$.

9.11

Thm. $\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在不全为0的 $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$ s.t. $k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+k_3\vec{\alpha_3}=0$

证: $\Rightarrow$ ① 若其中两共线 $(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2})$, 令 $k_3=0$ 后用上Thm.

② 若两两不共线, $\exists\ \vec{\alpha_3}=k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}$

$\Rightarrow k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}-\vec{\alpha_3}=\vec{0}$.

$\Leftarrow$ 不妨设 $k_3\neq 0$. RHS $\Rightarrow \vec{\alpha_3}=-\frac{k_1}{k_3}\vec{\alpha_1}-\frac{k_2}{k_3}\vec{\alpha_2}$

$\therefore \vec{\alpha_3}$ 在 $\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2}$ 所在平面上.

$\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2},\vec{\alpha_3}$ 不共面 $\Leftrightarrow$ $k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+k_3\vec{\alpha_3}=0 \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$

9.11

Ex: $k\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow k=0$ 或者 $\vec{\alpha}=\vec{0}$ （左推右：$|k\vec{\alpha}|=0$. $|k|\cdot|\vec{\alpha}|=0$）

Ex: 设 $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$，则 $\forall\vec{\beta}$, $\vec{\beta}\parallel\vec{\alpha}$, $\exists!\, x\in\mathbb{R}$, s.t. $\vec{\beta}=x\vec{\alpha}$

exists a unique $\Rightarrow \vec{\beta}=x_1\vec{\alpha}=x_2\vec{\alpha}$ RHS

LHS $\Rightarrow (x_1-x_2)\vec{\alpha}=\vec{0} \Rightarrow x_1=x_2$

($\because \vec{\alpha}\neq\vec{0}$ $\therefore x_1=x_2$.) ?

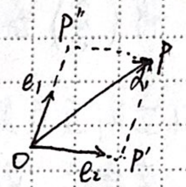
Def. 两个向量共线（见前）

三个向量共面

Lemma（引理）

Lem. 设 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ 不共线. 设 $\vec{\alpha}$ 在 $\vec{e_1}$ 与 $\vec{e_2}$ 确定的平面上，则 $\exists!\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$,

s.t. $\vec{\alpha}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}$



存在性略

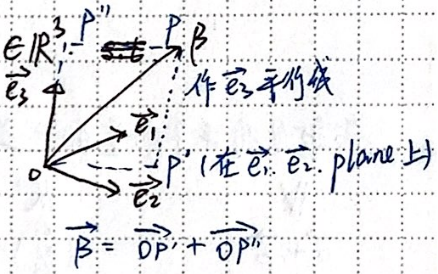
唯一性：$(x_1-x_1')\vec{e_1}+(x_2-x_2')\vec{e_2}=\vec{0}$

由上面Thm逆否（蓝）得：$x_1-x_1'=x_2-x_2'=0$.

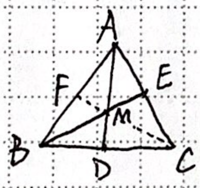
Thm. 设 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ 不共面，则 $\forall\vec{\beta}\in\mathbb{V}$, $\exists!\,(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$,

s.t. $\vec{\beta}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3}$.

唯一性同理. 存在性如图.



Ex.



D, E为中点.

求证 1) $\vec{AM}=\frac{2}{3}\vec{AD}$ 2) F为AB中点.

证1) $\vec{AM}=x\vec{AD}$, $\vec{BM}=y\vec{BE}$

$\vec{0}=\vec{AM}+\vec{ME}+\vec{EA}$ 化为 $\vec{AB}$, $\vec{AC}$.

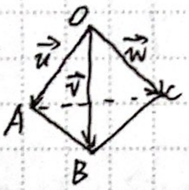
$\vec{0}=x\cdot(\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC})+(1-y)(-\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC})-\frac{1}{2}\vec{AC}$

$\vec{0}=(\frac{x}{2}-1+y)\vec{AB}+(\frac{x}{2}-\frac{y}{2})\vec{AC}$

$\because \vec{AB}$, $\vec{AC}$ 不共线 $\therefore \frac{x}{2}-1+y=\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=0$

$\therefore x=y=\frac{2}{3}$.

练习. △ 2) 设 $\vec{CF}=x\vec{CM}$

Ex.


求 $\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})$.

仿射坐标系. (V上)

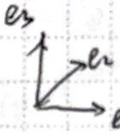
Def (O, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$), 其中O为原点, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 不共面的3向量. 为V的一个~.

根据定理知, $\forall \vec{\alpha} \in V$, $\exists! (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ s.t. $\vec{\alpha} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$

称 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 为 $\vec{\alpha}$ 在~下的坐标.

Def. (空间直角坐标系) $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 单位向量, 互相垂直.

左手系. 右手系.



手指移过 e_1, e_2

拇指方向与 e_3 重合.

仿射坐标系下向量的运算 $V \Longleftrightarrow \mathbb{R}^3$ -- 映射 (单射 & 满射)

$\downarrow$ $f(x) \neq f(y)$ $\quad$ $\downarrow$ 每个像都有原像

V

$\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

$k\vec{\alpha}$

$\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$

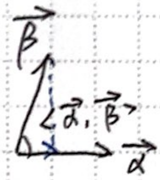
同理.

$\vec{\alpha} \sim \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} \sim \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$\vec{\alpha} = x_1\vec{e_1} + \cdots$, $\vec{\beta} = y_1\vec{e_1} + \cdots$

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1+y_1)\vec{e_1} + \cdots$

V上的两个向量的数量积 (双线性运算?) (点乘)



$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} := \begin{cases} |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle, & \vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \text{或} \vec{\beta} = \vec{0} \end{cases}$

分类! 否则无夹角概念

线性运算概念?

Thm.（内积的性质）

(1) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}\geq 0$ 并且：$\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\vec{0}$

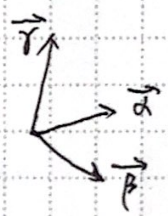
(2) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$

(3) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})+(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$

证明：(1) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|^2$

(2) 由定义得. 显然

(3) ?



Ex. $|\vec{\alpha}|=\sqrt{\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}}$

$\cos\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}$ （如果 $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$）

仿射坐标系下数量积的运算.

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3})\cdot(y_1\vec{e_1}+y_2\vec{e_2}+y_3\vec{e_3})=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_iy_j\,\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}$

$\cancel{=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}$

$(x_1,x_2,x_3)\ \boxed{\quad}\ \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 度量矩阵 ?

在直角系下. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ 仅在直角系成立!

Schwarz inequality $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ 3维 or n维?

Triangle inequality $|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$

Ex. 仿射坐标系下. $\vec{u}\sim\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\sim\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\sim\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}\sim\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

（解线性方程组） 问 ? $\exists\ c,d,f$ s.t. $\vec{b}=c\vec{u}+d\vec{v}+f\vec{w}$?

9.16

几何向量空间

加法,数乘 (M1 − M4),(A1 − A4) → 线性空间

数量积 (I1 − I3) → 内积空间

不共面,坐标向量,坐标 ⇝ 线性无关,基,坐标

$\mathbb{R}^n$

① 方程组 (*)
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases}$$
(a_{ij}) 系数

(x,y,z) 未知数

(d_1,d_2,d_3) 右端项

(*)的解集 $\{(x,y,z):$ (*)成立$\}$

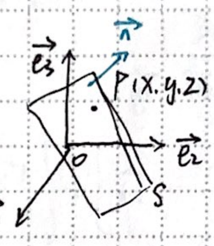
② row point of view

(3D) 几何意义

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

③ column point of view

② 求三平面交点 ?



平面方程(右手直角系)

法向量 $\vec{n}$ 垂直于平面且 $\vec{n}\neq\vec{0}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P} = 0$,其中 P_0 为固定点,$P_0 \in S$

设 $P_0 = P_0(x_0, y_0, z_0)$,$\vec{n} \sim (A,B,C)$,$\forall P(x,y,z)$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = 0 \rightarrow \underline{Ax + By + Cz = d}$$
平面方程 与①形式相同

其中 $d = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

点到平面的距离 → 有符号,$\vec{n}$ 为单位法向量

$d = \overrightarrow{P_0Q}\cdot\vec{n}$ 否则 $d = \overrightarrow{P_0Q}\cdot\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

假设 $|\vec{n}| = 1$,$d = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{bmatrix} = Ax + By + Cz - d$

△点 $Q(x_1,y_1,z_1)$ 到平面 $Ax+By+Cz=d$ 距离为:$\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1-d}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

3×1矩阵 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 1×3矩阵 $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$

(1×3)×(3×1) $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

(3×3)×(3×1) $\begin{bmatrix} - & \vec{a_1} & - \\ - & \vec{a_2} & - \\ - & \vec{a_3} & - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | \\ \vec{b} \\ | \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \vec{a_1}\cdot\vec{b} \\ \vec{a_2}\cdot\vec{b} \\ \vec{a_3}\cdot\vec{b} \end{bmatrix}$

③ ?

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{c_1} & \vec{c_2} & \vec{c_3} \\ | & | & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} := x\begin{bmatrix} | \\ \vec{c_1} \\ | \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} | \\ \vec{c_2} \\ | \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} | \\ \vec{c_3} \\ | \end{bmatrix}$$

$(3\times3)\times(3\times1)$ (3×1)

$$(m\times n)\quad \begin{array}{c|c} & 1\ \ 2\ \cdots\ n \\ \begin{array}{c}1\\2\\ \vdots \\ m\end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$m\times n$ 矩阵 A. (a_{ij}) $M_{m\times n}$

$A=B$: $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}$ 且 $a_{ij}=b_{ij}$, $\forall i=1,2,\cdots m$
$B=(b_{ij})\in M_{m\times n}$ $j=1,2,\cdots n$

②

<u>Def</u>. $A\in M_{m\times n}$, $B\in M_{n\times k}$, 那么 $AB\in M_{m\times k}$

$$AB := \begin{bmatrix} - \vec{a_1} - \\ \vdots \\ - \vec{a_m} - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{b_1} & \cdots & \vec{b_k} \\ | & & | \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \vec{a_1}\cdot\vec{b_1} & \cdots & \vec{a_1}\cdot\vec{b_k} \\ \vdots & & \\ \vec{a_m}\cdot\vec{b_1} & \cdots & \vec{a_m}\cdot\vec{b_k} \end{bmatrix}$$

$\vec{a_i}\in\mathbb{R}^n$ $\vec{b_j}\in\mathbb{R}^n$

③ 即 $C=(c_{ij})$, $c_{ij}=\vec{a_i}\cdot\vec{b_j}$

$$AB = \begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{a_1} & \cdots & \vec{a_n} \\ | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{b_1} & \cdots & \vec{b_k} \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ A\vec{b_1} & \cdots & A\vec{b_k} \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$\vec{a_l}\in\mathbb{R}^m$ $\vec{b_j}\in\mathbb{R}^n$

$A\vec{b_j}=\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\vec{a_i}$ (见上)

验证两def得矩阵相同.

row point of view $c_{ij}=\vec{a_i}\cdot\vec{b_j}=\sum_{k=1}^{n}(\vec{a_i})_k(\vec{b_j})_k=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

column ? $c_{ij}=(A\vec{b_j})_i=\sum_{l=1}^{n}b_{lj}(\vec{a_l})_i=\sum_{l=1}^{n}b_{lj}a_{il}$

$Ax=b$. $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

③ 如何组合 A 中的列,使结果为 b.

共面: $\begin{bmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 有非 $(0,0,0)$ 解.

Gaussian Elimination 高斯消元法

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+2y=11 \end{cases} \underset{3(1)+(2)\to(2)}{\overset{\boxed{-3(1)+(2)\to(2)}}{\rightleftarrows}} \begin{cases} x-2y=1 \\ 8y=8 \end{cases}$$

证明操作不改变解集:
可逆操作, 解互相包含.

反向代入
backward substitution $\Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \Rightarrow x=3 \\ y=1 \end{cases}$

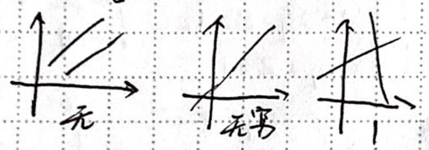
(O1)	$k(i)+(j)\to(j)$	operation 1	(其中 $i\neq j$)	
(O2)	$k(i)\to(i)$ $(k\neq 0)$	i行 $\times k$	(其中 $k\neq 0$)	
(O3)	$(i)\leftrightarrow(j)$	i,j行互换		

基本行变换
fundamental row operation

例. $\begin{cases} x-2y=1 \\ 4x-8y=3 \end{cases} \xrightarrow{-4(1)+(2)\to(2)} \begin{cases} x-2y=1 \\ 0y=-1 \end{cases}$ 无解

例 $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-4y=2 \end{cases} \xrightarrow{-2(1)+(2)\to(2)} \begin{cases} x-2y=1 \\ 0y=0 \end{cases} \longrightarrow$ y任意 (free) 解为 $\begin{cases} x=1+2k \\ y=k,\ k\in\mathbb{R} \end{cases}$

②



求交点...

③ $(1,4)$ $(-2,-8)$ 组合为 $(1,3)$

9.18

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

矩阵 形状 (行, 列数)
$m\times n$ 的矩阵
$A=(a_{ij})_{m\times n}\in M^{m\times n}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵形式 A 系数矩阵

$\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $n\times 1$ 矩阵
列向量

$\vec{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

$m\times n$ 矩阵 乘以 $n\times 1$ 矩阵 $A\vec{x}\in M^{m\times 1}$ 列向量.

$(A\vec{x})_i = A\vec{x}$ 的第 i 行 $:= \sum_{l=1}^{n} a_{il}x_l$

行观点解释 $\begin{bmatrix} \vec{a_1} \\ \vdots \\ \vec{a_m} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \vec{a_1}\cdot\vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a_m}\cdot\vec{x} \end{bmatrix}$

列观点解释 $\begin{bmatrix} \vec{b_1} \cdots \vec{b_n} \end{bmatrix} \longrightarrow x_1\vec{b_1}+\cdots+x_n\vec{b_n}$.

矩阵加法 $(A+B)_{ij} := a_{ij}+b_{ij}$ 其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ $\}$ $(A_1)-(A_4)$, $(M_1)-(M_4)$ 线性空间.

矩阵数乘 $(kA)_{ij} := ka_{ij}$ $k\in\mathbb{R}$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, 定义映射 $f: \cancel{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m}\ M^{n\times 1}\to M^{m\times 1}$

$$f(\vec{x}) := A\vec{x}$$

称 $f: X\to Y$, X, Y 线性空间 (可定义加法,数乘,满足 A1-4 M1-4 性质的)

且满足 $\begin{cases} f(k\vec{x}) = k(f(\vec{x})) \\ f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x})+f(\vec{y}) \end{cases}$ 为一个线性的映射. Def

(定义域内的加法(数乘)可变换至值域内的加~(数~))

线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$. 求线性映射的原像.

例. $\begin{cases} x+y+z=7 \\ x-y-z=5 \\ -x-y+z=3 \end{cases}$

$\xrightarrow{-(1)+(2)\to(2)}$ $\xrightarrow{(1)+(3)\to(3)}$ $\begin{cases} 1x+1y+1z=7 \\ 0x-2y-2z=-2 \\ 0x+0y+2z=10 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=6 \\ -2y-10=-2 \Rightarrow y=-4 \\ z=5 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x+y-2z=5 \\ 2x+2y-z=12 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cdots \\ -3z=-2 \\ -3z=-2 \\ -2y=-6 \end{cases} \to \begin{cases} x+y+z=7 \\ -2y=-6 \\ -3z=-2 \\ -3z=-2 \end{cases} \to \begin{cases} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 0=0 \end{cases}$

总结 见上页. 基本行变换是可逆的.

Thm. 基本行变换将线性方程组变为它的一个同解方程组(解集相同).

obs. 消元时,唯有 A 和 $\vec{b}$ 在改变.

def 称 $[A|\vec{b}]\in M^{m\times(n+1)}$ 为 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的增广矩阵.

(D3) $\neq 0$.　　pivot 枢轴

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

若1列全0则往右.

↓ 无解

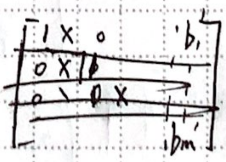
echelon form 阶梯形

有无矛盾行 $[0\ 0\ 0 \cdots 0 \,\vdots\, b\neq 0]$

- Y → 无解
- N → 看 $r=n$
  - $(r=n)$ Y → 唯一解
  - N $(r<n)$ → 无pivot的列对应的未知数是自由的,把它们作为参数反代求出对应pivot的值.

其中 r 为pivot总个数
n 为未知数个数

Ex. $r\leq n$.
$r\leq m$.



~~Ex 1 x 0 x 0~~
~~0 0 1 x 0~~

Thm. $A\vec{x}=\vec{0}$ 方程 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

如果 $m<n$，总有非零解（∴有无穷多解）

eg. $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$ 总线性相关.

$$\begin{cases}x_1=-2\\x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k\\x_3=k\end{cases}$$ 也可表示为 $\vec{x}=\begin{bmatrix}-2\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$

delta小写?

科罗内克符号 δ $\delta_{ij}:=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$

9.23 复数域 $\uparrow$ §3.1 数域 (number field)

Def 设 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$, 如果 $\mathbb{F}$ 满足

(i) $0, 1 \in \mathbb{F}$

(ii) $\mathbb{F}$ 关于(复数)的加、减、乘、除(除数非0)是封闭的.

$\forall a, b \in \mathbb{F}$, $a \pm b$, $a \times b$, $\frac{a}{b}\ (b \neq 0) \in \mathbb{F}$

则称 $\mathbb{F}$ 为一个数域.

Ex. $\mathbb{Z}$ × $\mathbb{Q}$ ✓ $\mathbb{R}$ ✓ $\mathbb{C}$ ✓

× · $\mathbb{F} = \{\sqrt{p} : p \in \mathbb{Q}\}$ $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{F}$

设 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{s}$ $s \in \mathbb{Q}$ ~~$p, q \in \mathbb{Z}, (p,q)=1, q \neq 0$~~

$5 + 2\sqrt{6} = s \Rightarrow \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ ($\because \mathbb{Q}$ 对减除法封闭)

验证 $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$? 反证? $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$

$(q \neq 0,\ p, q \in \mathbb{Z},\ \gcd(p, q) = 1)$

$q^2 6 = p^2 \Rightarrow 6 | p^2 \Rightarrow 6 | p$

$\Rightarrow 36 | p^2 \Rightarrow 6 | q^2 \Rightarrow 6 | q$

$\Rightarrow \gcd(p, q) \geq 6$ 矛盾

✓ · $\mathbb{F} = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$

(i) $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{F}$, $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{F}$

(ii) $+, -$ 封闭

$\forall p, q \in \mathbb{F}$ $p = a_1 + b_1\sqrt{2}$, $a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$

$q = a_2 + b_2\sqrt{2}$, $a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$

$pq = \underbrace{a_1a_2 + 2b_1b_2}_{\mathbb{Q}} + \underbrace{(a_1b_2 + a_2b_1)}_{\mathbb{Q}}\sqrt{2}$

$\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$ 即 a_2, b_2 不同时为0) $= \dfrac{(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 - b_2\sqrt{2}) \in \mathbb{F}}{(a_2^2 - 2b_2^2) \in \mathbb{Q}}$

Thm. 如果 $\mathbb{F}$ 是一个数域, 则 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$

Proof. 含1. 对 $\pm$ 封闭 $\Rightarrow$ 含 $\mathbb{Z}$. 对 $\times$ / 封闭 $\Rightarrow$ 含 $\mathbb{Q}$

Ex. 如果 $i \in \mathbb{F}$, $\mathbb{F}$ 对 $+, -, \times, \div$ 封闭. 则 $\{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{F}$

$\frac{i}{i} = 1$, $1 - 1 = 0$

§ 矩阵的运算

$M^{m \times n}(\mathbb{R})$, $M_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \times n$ 矩阵的集合 $M_{m,n}(\mathbb{F})$

Def. $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ 定义 $A + B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$

$(A + B)_{ij} \triangleq a_{ij} + b_{ij}$

Def. $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $k \in \mathbb{F}$. 定义 $kA \in M_{m,n}(\mathbb{F})$

$(kA)_{ij} \triangleq k a_{ij}$

$O_{m \times n} \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $(O_{m \times n})_{ij} = 0$

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ $-A := (-a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{F})$

Thm $M_{m,n}(\mathbb{F})$ 上的加法和数乘满足 (A1)~(A4), (M1)~(M4) 背

Rem $M^{m \times 1}(\mathbb{F})$ 与 $\mathbb{F}^m = \{m$ 个有序的 $k_1, k_2, \cdots, k_m : k_i \in \mathbb{F}\}$ 一一对应.

方阵: $m=n$

$O_{n\times n}$ $\quad O_n$ $\quad$ 零矩阵

$I_n=(a_{ij})$ $\quad$ 单位矩阵 $\quad a_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

若 $A=(a_{ij})_{n\times n}=cI_n=\begin{bmatrix}c & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & c\end{bmatrix}$，称A为纯量矩阵

对方阵 $\begin{bmatrix}\diagdown\end{bmatrix}$

对角矩阵: $A=(a_{ij})_{n\times n}$，如果 $a_{ij}=0, \forall i\neq j$ $\quad \begin{bmatrix}d_1 & & & 0\\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n\end{bmatrix}$

上三角矩阵: $\begin{bmatrix}\diagdown\!\!\!\diagup\end{bmatrix}_{n\times n}$ $\quad$ 如果 $a_{ij}=0, \forall i>j$

(下三角) $\quad (\forall i<j)$

矩阵的乘法

$A=(a_{ij})_{m\times n}\in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $\vec{x}\in\mathbb{F}^n$ 列向量

$A\vec{x}\in\mathbb{F}^m$ $\quad (A\vec{x})_i \triangleq \sum_{l=1}^{n} a_{il}x_l$

Def. 如果 $\overset{(a_{ij})}{A}\in M_{m,n}(\mathbb{F})$, $\overset{(b_{ij})}{B}\in M_{n,k}(\mathbb{F})$

定义 $AB\in M_{m,k}(\mathbb{F})$，其中

$(AB)_{ij}\triangleq \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$

① $AB=\begin{bmatrix}-\vec{a_i}-\\ \text{第}i\text{行}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|\\ \vec{b_j}\\ |\\ \text{第}j\text{列}\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\\ i\\ \\ \end{array}\!\!\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \blacksquare & \\ & j & \end{bmatrix}_{m\times k}=\begin{bmatrix}\vec{a_1}\cdot\vec{b_1} & \cdots & \vec{a_1}\cdot\vec{b_k}\\ \vdots & & \vdots\\ \vec{a_m}\cdot\vec{b_1} & \cdots & \vec{a_m}\cdot\vec{b_k}\end{bmatrix}$ $\quad$ $\vec{a_i}$为A的i行，$\vec{b_j}$为B的j列

② $(AB)=\begin{bmatrix}| & | & & |\\ A\vec{b_1} & A\vec{b_2} & \cdots & A\vec{b_k}\\ | & | & & |\end{bmatrix}$

Ex $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1\\6&5&4\\9&8&7\end{bmatrix}$ $\quad$ Hint: column point of view

Thm 如果下列所有矩阵乘法有意义的话，那么

(1) $(A+B)C=AC+BC$

(2) $A(B+C)=AB+AC$ $\qquad A\vec{e_j}=?$

Proof (2): $A\in M_{m,n}$ $\quad B,C\in M_{n,k}$ ← 先证同型 $\quad A(B+C)\in M_{m,k}(\mathbb{F})$, $AB+AC\in M_{m,k}(\mathbb{F})$

$(LHS)_{ij}=\sum_l a_{il}(b_{lj}+c_{lj})$

$=\sum_l a_{il}b_{lj}+\sum_l a_{il}c_{lj}=(AB)_{ij}+(AC)_{ij}=(RHS)_{ij}$

$\vec{e_j}^T=[0,0,\cdots,\underset{j}{1},0,0,\cdots 0]$ $\qquad \underset{(1\times m)}{\vec{e_j}^T}\underset{(m\times n)}{A}\Rightarrow[-\vec{a_j}-]_{1\times n}$ $\quad$ A的第j行.

$(\vec{e_j}^TA)_s=\sum_{l=1}^{m}(\vec{e_j})^T_{1l}a_{ls}=\sum_{l=1}^{m}\delta_{lj}a_{ls}=a_{js}$

(3) $\underset{m\times n}{A}(\underset{n\times k}{B}\underset{k\times p}{C})=(AB)C$

? $\boxed{\text{ex.}}$ $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&2&3\\6&5&9\\9&8&15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&8&15\\15&13&24\\3&2&3\end{bmatrix}$ 例?

9.25

(4) $(kA)(lB)=(kl)(AB)$ $\forall k,l\in\mathbb{F}$ $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B\in M_{n\times k}(\mathbb{F})$

(1) 证: $\sum_{l=1}^{k}(AB)_{il}C_{lj}=\sum_{l=1}^{k}\left(\left(\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sl}\right)C_{lj}\right)=\sum_{s=1}^{n}a_{is}\left(\sum_{l=1}^{k}b_{sl}C_{lj}\right)=\sum_{s=1}^{n}a_{is}(BC)_{sj}$

$A\vec{e_j}=A\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}=$ A的第j列

$\vec{e_j}^TA=[0\cdots1\cdots0]A=$ A的第j行.

Ex. $A\in M_{m,n}(\mathbb{F})$ $AI_n=[A\vec{e_1}\cdots A\vec{e_n}]=A$ I_k: $k\times k$单位矩阵.

$I_mA=\begin{bmatrix}\vec{e_1}^TA\\ \vdots\\ \vec{e_m}^TA\end{bmatrix}=A$

$\forall\vec{b}\in\mathbb{F}^n$, $I_n\vec{b}=\vec{b}$

Ex. $\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}[2\ 1\ 2]=\begin{bmatrix}2&1&2\\-6&-3&-6\\4&2&4\end{bmatrix}$, $[2\ 1\ 2]\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}=[3]$

N.B. 矩阵乘法没有交换律. $A\in M_{m,n}$ $B\in M_{n,k}$

① $A.B$良定义 $\underset{(k\neq m)}{\not\Rightarrow}$ BA良定义

② 即使$k=m$, BA与AB不一定同型 $(n\times n, m\times m)$

③ 即使$m=n=k$, AB. BA同型 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

AB与BA也不一定相同. $AB=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ $BA=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

Def. 如果 $A\in M_n(\mathbb{F})$, $B\in M_n(\mathbb{F})$, 满足 $AB=BA$

称A与B可交换 (commutable)

Ex. (1) I_n与$A\in M_n(\mathbb{F})$可交换

$A.B\in M_n(\mathbb{F})$均为对角矩阵 $\begin{bmatrix}c_1&&\\&\ddots&\\&&c_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&&\\&\ddots&\\&&d_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1d_1&&\\&\ddots&\\&&c_nd_n\end{bmatrix}$

Def. 方阵的乘幂 $A\in M_n(\mathbb{F})$

$A^k\in M_n(\mathbb{F})$, $A^k=\begin{cases}I_n & (k=0)\\ (A^{k-1})A & (k\geq1)\end{cases}$

Thm. $A\in M_n(\mathbb{F})$, 有 $A^kA^l=A^{k+l}$ $k,l\in\mathbb{N}^*$

$(A^k)^l=A^{kl}$ $k,l\in\mathbb{N}$

证明: 用A^k的定义以及数学归纳法.

Ex. $\left(\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}[2\,1\,2]\right)^{2019}=\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}\left([2\,1\,2]\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}\right)^{2018}[2\,1\,2]=\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}[3^{2018}][2\ 1\ 2]$

$=\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}[2\,1\,2]\cdot3^{2018}=\cdots$

Def. 方阵的多项式 设f是一个数域$\mathbb{F}$上的多项式

$f(x):=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k$, 其中$a_i\in\mathbb{F}$

对$A\in M_n(\mathbb{F})$, 定义

$f(A):=a_0I_n+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_kA^k$.

9.25

Ex: $f(x) = (x+1)(x-1)$

$f(A) = (A-\mathrm{I})(A+\mathrm{I}) = A^2 + A - A - \mathrm{I}^2 = A^2 - \mathrm{I}$

Ex: f, g 多项式 $\Rightarrow f(A)g(A) = g(A)f(A)$

但 $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $f(A)g(B) = g(B)f(A)$ 不一定成立.

Ex: $(A+B)^n \overset{?}{=} \sum_{l=0}^{n} C_n^l A^l B^{n-l}$ X. (A.B 可交换时成立).

$(x+y)^n = \sum_{l=0}^{n} C_n^l x^l y^{n-l}$

$(\mathrm{I}+A)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^i$ ✓

ex. $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(A+B)^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A^2 + B^2 + \underline{2AB} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + \underline{AB + BA} + B^2$.

☆矩阵乘积 → 映射的复合

$A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$: $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ | $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n$, $\vec{x} \mapsto B\vec{x}$.

$B \in M_{n,k}(\mathbb{F})$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^k \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "A\circ B"'] & \mathbb{F}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$

$(A\vec{y})_i = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \vec{y}_l$

$\vec{x} \in \mathbb{F}^k$ $\quad (A\circ B)(\vec{x}) \in \mathbb{F}^m$

$((A\circ B)(\vec{x}))_i = (A(B\vec{x}))_i = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot (B\vec{x})_l$

先做后面 $\quad = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \left(\sum_{s=1}^{k} b_{ls} x_s\right) = \sum_{s=1}^{k} \Big(\underbrace{\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{ls}}_{(AB)_{is}}\Big) x_s$

① $A \cdot \vec{x}$ ② A: 映射 ③ AB → B为列向量时与①不矛盾.

映射观点.结合律. $$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^p \arrow[r, "C"] \arrow[r, bend right, "C"'] \arrow[rr, bend right=50, "BC"'] & \mathbb{F}^k \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "AB"'] & \mathbb{F}^n \arrow[r, "A"] \arrow[r, bend right=50, "A"'] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$ $(AB)C = A(BC)$.

Ex. Markov 马尔可夫链 $\quad$ ① ② ③ ④

p_{ij}: 在位置 j 时下一时刻到 i 概率.

$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 当前分布.

概率转移矩阵 $\quad \vec{x} = (x_j)$ x_j 是在于 ⓙ 的概率.

下一步的状态 $\vec{y} = P\vec{x}$. 映射

n步后: $\vec{y} = P^n \vec{x}$.

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\quad \vec{x}\longmapsto A\vec{x}\quad \text{旋转}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overset{\cos\alpha}{x}\\ \underset{\sin\alpha}{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\theta - y\sin\theta\\ x\sin\theta+y\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\theta)\end{bmatrix}$$

def. 矩阵的转置

定义: $A\in M_{m,n}(F)$, 定义A^T, 称为A的转置(transpose)

为$\in M_{n,m}(F)$, 其元素 $A^T=(a'_{ij})$, 其中 $a'_{ij}=a_{ji}$

9.30

1×1 矩阵有时可以等同于一个数. $\underset{\text{矩乘}}{\vec{x}^T\vec{y}} = \underset{\text{点积}}{\vec{x}\cdot\vec{y}}$

Ex. 三维几何向量空间 $\mathbb{V}$ $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

仿射系 $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $\vec{\beta} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j (\vec{e_i}\cdot\vec{e_j})$

$M = \begin{bmatrix} \vec{e_1}\cdot\vec{e_1} & \cdots & \vec{e_1}\cdot\vec{e_3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e_3}\cdot\vec{e_1} & \cdots & \vec{e_3}\cdot\vec{e_3} \end{bmatrix}$ 度量矩阵 $M_{ij} = \vec{e_i}\cdot\vec{e_j}$

$\therefore \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = [x_1, x_2, x_3]\, M \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ 右手系下 $M = I_3$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{x}^T\vec{y}$.

Thm. (1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(AC)^T = C^T A^T$

证 (3): $A \in M_{m,n}$ $C \in M_{n,k}$ $AC \in M_{m,k}$, $(AC)^T \in M_{k,m}$

$A^T \in M_{n,m}$ $\overset{(c'_{ij})}{C^T} \in M_{k,n}$ $C^T A^T \in M_{k,m}$

$(AC)(i,j) = \sum_{l=1}^{n} a_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{n} a'_{li} c'_{jl} = (C^T A^T)(j,i)$

$(AC)^T(i,j) = (AC)(j,i) = (C^T A^T)(i,j)$

矩阵转置的映射观点

$A \in M_{m,n}$ 作为一个 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 的线性映射 ?

A: $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$

记 $\mathbb{R}^m$ 上的标准内积, $\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle_{\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m} = \vec{y}^T \vec{z} \in \mathbb{R}$

$\langle \vec{y}, A\vec{x} \rangle := \vec{y}^T (A\vec{x})$

Thm. $A^T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 满足

$\langle \vec{y}, A\vec{x} \rangle_{\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m} = \langle A^T\vec{y}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall y \in \mathbb{R}^m$

$LHS = \vec{y}^T(A\vec{x}) = (\vec{y}^T A)\vec{x} = (A^T\vec{y})^T \vec{x} = RHS$

$A^T y \quad x \quad \mathbb{R}^n \underset{A^T}{\overset{A}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^m \quad y \quad Ax$

Def. (对称矩阵) ~~称~~如果 $A^T = A$，称 A 为一个 ~.
(反对称矩阵) 如果 $A^T = -A$，称 A 为一个 ~
$\Rightarrow$ 均为方阵. 反中对角线为0. 自由元有 $1+2+\cdots n$ / $0+1+\cdots(n-1)$ 个.

Ex. $\forall A \in M_n(F)$，可以分解为 $A = A_1 + A_2$，A_1 对称，A_2 反对称
$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T)$，$A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T)$

Ex. 如果 $\forall \vec{x} \in R^n$，$\forall \vec{y} \in R^m$，有 $\vec{y}^T A \vec{x} = 0 \Rightarrow A = 0$
考察 $\vec{x} = \vec{e_j}$，$\vec{y} = \vec{e_i}$

Ex. $A \in M_n$ 为对称矩阵，$\forall x \in F^n$，~~$\forall y \in F$~~ 有 $\vec{x}^T A \vec{x} = 0$.
证明：$\forall x \in F^n$，$\forall y \in F^n$，有 $\vec{x}^T A \vec{y} = 0$.

$\langle \vec{x}+\vec{y}, A(\vec{x}+\vec{y}) \rangle \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F^n$

$$\begin{cases} (x^T + y^T) A (x+y) = 0 \\ x^T A x = 0 \\ y^T A y = 0 \\ A = A^T \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x^T A y + y^T A x = 0 \\ x^T A y = y^T A^T x = y^T A x \\ x^T A y = 0 \end{array}$$

$x^T A y = (x^T A y)^T$
1x1矩阵 = 自己的转置

Ex. 考察矩阵 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

① 求与 A 可交换的 B 的集合. 即 $\{B : AB = BA\}$

$\left\{ B : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B = B \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

设 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{13} \\ \vdots & & \\ b_{31} & \cdots & b_{33} \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{11} \end{bmatrix}$ (求可交换矩阵时可减去纯量矩阵)

$A = \lambda I + N \iff [N, B] = 0$
$[A, B] = AB - BA = 0$

② $A^{2019} = (\lambda I + N)^{2019} = \sum C_n^{\ell} (\lambda I)^{n-\ell} \cdot N^{\ell}$

N: nilpotent matrix.

$N^0 = I \quad N^1 = N \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N^3 = 0.$

矩阵的逆（方阵的逆）

$A \in \mathbb{M}_{m,n}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \vec{x} \mapsto A\vec{x}$

$f: X \to Y.$

f为单射. 如果$\forall x, y \in X$, $x \neq y$, 有$f(x) \neq f(y)$
（如果$f(x) = f(y)$, 则$x = y$）.

f为满射. 如果$\forall p \in Y$, $\exists x \in X$, 使$f(x) = p$.

f为$X \to Y$的一个双射（一一对应）. 如果f既是单射又是满射

$f^{-1}: Y \to X$

$p \mapsto x$, s.t. $f(x) = p$.

Ex: $m<n$. $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$不是单射

$A \in \mathbb{M}_{m,n}$. $A\vec{x} = \vec{0}$有无穷多解

Ex: $m>n$. $A \in \mathbb{M}_{m,n}$则$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$不是满射

即$\exists \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, s.t. $A\vec{x} = \vec{b}$无解

称B为A的一个逆.

Def（方阵可逆与逆矩阵）

对于$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$, 我们称A是$\boxed{可逆}$的, 如果$\exists B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$

s.t. $AB = I_n \quad BA = I_n$ （invertible）

如果不存在这样的B, 称A为$\boxed{不可逆}$的或$\boxed{奇异}$的（singular）

I_n 恒同映射 $\quad AB = I_n$（右逆） $BA = I_n$（左逆）

广义, A不为方阵时也存在（可能存在）.

Ex. I_n是I_n的一个逆.

Thm. 如果$A \in \mathbb{M}_n$是可逆的, 则A的逆是唯一.

若B,C均为逆 $\quad AB = BA = I_n \Rightarrow (AB)C = BAC = C$ 双边!

$B(AC) = B$

10.9 $\begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{bmatrix}$ 对角方阵可逆仅当$c_i \neq 0$ ($\forall i$), 且逆为$\begin{bmatrix} c_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & c_n^{-1} \end{bmatrix}$

Ex $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 可逆当且仅当$ad - bc \neq 0$, 此时

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

背!

逆矩阵特性. 10.9

Thm. 对于 $A\in M_n(\mathbb{F})$. 以下命题等价:

(1) A 是可逆的
(2) 线性映射 $\vec{x}\mapsto A\vec{x}$ 是单射 $\Leftrightarrow$ $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解
(3) 对矩阵 A 进行 Gauss 消元, 主元个数 $r=n$
特别的, A 的标准阶梯型 (Gauss 上三角后约当 主元上方均为 0) 为 I_n.
(4) $\vec{x}\mapsto A\vec{x}$ 是满射
(5) 存在 $B\in M_n(\mathbb{F})$. s.t. $AB=I_n$ 且 B 为 A 的逆. (只需验证单边)

Rem. 对 $\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$,

① $\vec{x}\mapsto A\vec{x}$ 是满射, 意思是: $\forall\vec{b}\in\mathbb{F}^n$, $\exists\vec{x}\in\mathbb{F}^n$, s.t. $A\vec{x}=\vec{b}$.
即线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$. 对 $\forall\vec{b}\in\mathbb{F}^n$ 有解

② 类似的. $\vec{x}\mapsto A\vec{x}$ 为单射 $\Leftrightarrow$ $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解
$\because A\vec{x_1}=A\vec{x_2} \Leftrightarrow A(\vec{x_1}-\vec{x_2})=0$. 可从左推右
设 $A\vec{x_1}=A\vec{x_2}$, 则 $A(\vec{x_1}-\vec{x_2})=\vec{0}$. 由于方程只有零解. 故 $\vec{x_1}=\vec{x_2}$. 从右推左.

Proof of Thm. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1)

(1) $\Rightarrow$ (2): 欲证 $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解. 已知 A 可逆.
A^{-1} 存在. 在 $A\vec{x}=\vec{0}$ 两端左乘 A^{-1}
$\Rightarrow A^{-1}(A\vec{x})=A^{-1}\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$

(2) $\Rightarrow$ (3): 反证 + 前 Thm. 若 $r\neq n$, $\because$ ~~存在~~ 则 $r<n \Rightarrow A\vec{x}=\vec{0}$ 有无穷解 矛盾.

(3) $\Rightarrow$ (4): 如果 (3) 成立, 则 $\forall\vec{b}\in\mathbb{F}^n$ (或只需 $r=n$. 故无矛盾行 $\Rightarrow$ 有解)
$[A\ \ \vec{b}] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I_n\ \ \vec{b}']$ 即解 $I_n\vec{x}=\vec{b}'$
$\therefore \vec{x}$ 有解 $\therefore \vec{x}\mapsto A\vec{x}$ 为满射.

(4) $\Rightarrow$ (5): 欲证 $\exists B=[\vec{b_1}\ \vec{b_2}\ \cdots\ \vec{b_n}]$, $AB=[A\vec{b_1}\cdots A\vec{b_n}]=[\vec{e_1}\ \vec{e_2}\cdots\vec{e_n}]$
即求 $\exists b_i$, s.t. $A\vec{b_i}=\vec{e_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$
$\because$ 满射 $\therefore$ ✓

(5) $\Rightarrow$ (1): 已知 $\exists B\in M_n(\mathbb{F})$, s.t. $AB=I_n$. 欲证 $BA=I_n$.
Claim: $B\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解
$\because B\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow A(B\vec{x})=A\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$.
Claim: $\exists C\in M_n(\mathbb{F})$, s.t. $BC=I_n$.
$\because B$ 满足 (2). 而已证 (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5)
现知: $AB=I_n$. $BC=I_n$. 欲证 $A=C$.
$\because (AB)C=A(BC) \Leftrightarrow C=A$.
那么 $AB=I_n$, $BA=I_n$. 即 (1) 成立. □

求逆的 Gauss - Jordan 消元法.

$A\vec{b_1}=\vec{e_1}, \cdots, A\vec{b_n}=\vec{e_n}$

$[A\ \vec{e_1}\ \vec{e_2}\ \cdots\ \vec{e_n}]$ 由于消元操作仅依赖 A 系数矩阵.

$n\times 2n$ 矩阵. 可同时解 n 个方程. 若 $r<n$ ×

否则 Jordan ⇒ A 变为 I_n. 后 n 列为 $\vec{b_1}, \cdots, \vec{b_n}$.

即 $[A \mid \vec{e_1}\ \vec{e_2} \cdots \vec{e_n}] \xrightarrow{G-J} [I_n \mid \underbrace{\vec{b_1}\ \vec{b_2} \cdots \vec{b_n}}_{B=A^{-1}}]$

Ex. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 是否可逆? 不可逆.

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\vec{0}$ 是否仅零解? $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ex. 杨辉三角矩阵 (Pascal) 是否可逆?

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \quad \therefore 逆为 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Thm</u>. (1) $A\in M_n(\mathbb{F})$, 若 A 可逆, 则 A^{-1} 可逆 且 $(A^{-1})^{-1}=A$.

(2) A, B 可逆. $A, B\in M_n(\mathbb{F})$

则 AB 可逆 且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_n \arrow[r, shift left, "B"] \arrow[rr, bend left, "AB"] & \mathbb{F}_n \arrow[l, shift left, "B^{-1}"] \arrow[r, shift left, "A"] & \mathbb{F}_n \arrow[l, shift left, "A^{-1}"] \arrow[ll, bend left, "B^{-1}A^{-1}"] \end{tikzcd}$$

(3) A 可逆, 则 A^T 可逆, 且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

$(A^T)(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=I^T=I$

$(A^k)^l=A^{kl}$, $A^{-l}=(A^l)^{-1}$, $k, l\in\mathbb{Z}$

Ex. 已知 AB 可逆. $A, B\in M_n(\mathbb{F})$. 问: A. B 可逆? ✓. 证明作练习.

矩阵的 L-U 分解

初等行变换: (①1) $i \neq j$ $\quad kr_i + r_j \to r_j$

(①2) $k \neq 0$ $\quad kr_i \to r_i$

(①3) $\quad r_i \leftrightarrow r_j$

① $$E_{ij}(k) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & k & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

对应着初等行变换矩阵.

$$A \xrightarrow{kr_i + r_j \to r_j} E_{ij}(k)A$$

$$A \xrightarrow{kr_i \to r_i} E_i(k)A.$$

② $$E_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} i$$

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E_{i\leftrightarrow j}A$$

③ $$E_{i\leftrightarrow j} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & 1 & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

A可逆 作 G-J 消元将 I_n 过程: $\cdots\cdots E_2E_1A = I$

$(E_{i\leftrightarrow j})^{-1} = (E_{i\leftrightarrow j})$,

$(E_i(k))^{-1} = E_i(\frac{1}{k})$

$(E_{i,j}(k))^{-1} = E_{i,j}(-k)$

$AB = 0 \Leftrightarrow A=0$ 或 $B=0$? ~~不全A!~~ $\qquad$ 10.14

① A不可逆 $\quad AB = A[\vec{b_1}, \cdots \vec{b_n}]$

$= [(A\vec{b_1}), \cdots, (A\vec{b_n})]$ $\quad$ 从无穷多解中

$= [\vec{0}, \cdots, \vec{0}]$ $\quad$ ↑ 选1.

$\Leftrightarrow A\vec{b_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{b_i}$ 满足 $A\vec{x} = \vec{0}$

② A可逆 $\Leftrightarrow B = A^{-1}0 = 0$.

$A^2 + 3A - 7I = 0$. $\quad A + aI$ 是否可逆? $(a \in \mathbb{R})$

方阵的LU分解 (Strang, 讲义)

Assumption (NP): 方阵 $A\in M_n(F)$, A可以通过(O1)进行Gauss消元化为可逆上三角(不换行). No permutation

Thm. 若A满足(NP), 则∃ L (下三角, 对角元为1) 和 U (上三角), 可逆, s.t. $A=LU$.

Rem. Gauss消元实际上就是LU分解

解 $A\vec{x}=\vec{b}$, $LU\vec{x}=\vec{b}$

等价于解 $L\vec{y}=\vec{b}$ 和 $U\vec{x}=\vec{y}$

Thm.(初等矩阵可逆) $E^{(n)}_{i,j}(\lambda)$. 如果 $i\neq j$, $(E^{(n)}_{i,j}(\lambda))^{-1}=E^{(n)}_{i,j}(-\lambda)$

$E^{(n)}_{i}(\lambda)$ 如果 $\lambda\neq 0$, $(E^{(n)}_{i}(\lambda))^{-1}=E^{(n)}_{i}(\frac{1}{\lambda})$

$P^{(n)}_{i,j}$ 可逆, $(P^{(n)}_{i,j})^{-1}=P^{(n)}_{i,j}$

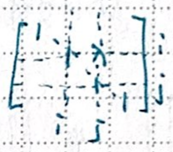
$A\in M_{m,n}$

Thm (O1): $A\xrightarrow{\lambda r_i+r_j\to r_j}E^{(m)}_{i,j}(\lambda)A$

行变换 (O2) $A\xrightarrow{\lambda r_i\to r_i}E^{(m)}_{i}(\lambda)A$

(O3) $A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}P^{(m)}_{i,j}A$

Rem. r = row, c = column



类似的, (O1') $A\xrightarrow{\lambda c_i+c_j\to c_j}AE^{(n)}_{j,i}(\lambda)$

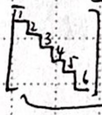
列变换 (O2') $A\xrightarrow{\lambda c_i\to c_i}AE^{(n)}_{i}(\lambda)$

(O3') $A\xrightarrow{c_i\leftrightarrow c_j}AP^{(n)}_{i,j}$

Ex. 初等行,列变换不改变可逆性.

Ex. 上(下)三角方阵可逆当且仅当对角元不为0. (高斯消 view 化)

Proof. ($A=LU$) (NP) A可逆, 不换行消元

Gauss $A\xrightarrow{初等行变换}$  上三角 1-6: 主元. U: 可逆

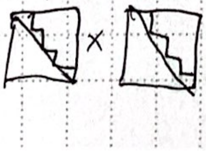
$\underbrace{E_{n-1,n}\cdots E_{2,n}\cdots E_{2,3}E_{1,n}\cdots E_{1,2}}_{可逆}A=U$

$A=\underbrace{E_{1,2}^{-1}\cdots E_{1,n}^{-1}E_{2,3}^{-1}\cdots E_{2,n}^{-1}\cdots E_{n-1,n}^{-1}}_{L}U$

$A=\underline{E_{1,2}(-\lambda_{21})}\cdots\cdots U$

下三角, 对角元为1 (∵ $i<j$ 不换行)

⇒ A也为下三角, 对角元为1



☆ 乘积 由于顺序可直接填!

$$\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ -\lambda_{n-2,n-1} & & \\ -\lambda_{n-2,n} & -\lambda_{n-1,n} & 1\end{bmatrix}$$

Gauss

Ex. $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&2\\3&4&5\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-3r_1+r_3\to r_3\\ \lambda_{31}}]{\substack{\lambda_{21}\\ -2r_1+r_2\to r_2}} \begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&4&2\end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{\lambda_{32}\\ -2r_2+r_3\to r_3}} \begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

$\lambda_{32}\to$ 始终 $j>i$

$L=\begin{bmatrix}1&&\\2&1&\\3&2&1\end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 验 $LU=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&2\\3&4&5\end{bmatrix}$

$A=LU=LDV$

下三角 上三角 D三对角 V上三 且 L,V 对角元均为1

$\begin{bmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&&\\&u_{22}&\\&&\ddots\ u_{nn}\end{bmatrix}$ U可逆：$u_{ii}\neq0 \Rightarrow U=\underbrace{\begin{bmatrix}u_{11}&&0\\&\ddots&\\0&&u_{nn}\end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix}1&\frac{u_{12}}{u_{11}}&\cdots&\frac{u_{1n}}{u_{11}}\\&\ddots&&\\&&&1\end{bmatrix}}_{V}$

Thm LU分解. LDU分解.　　上例中 $D=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$ $V=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

Thm A满足(NP). $A=LDU$. D可逆 L,U对角为1 并且 LDU分解唯一.

对称可逆矩阵的 LDL^T 分解

Col $A\in M_n$ 对称, 可逆, (NP). 则∃L,D
L为下三角, 对角元为1. D为对角矩阵, 对角元≠0. s.t. $A=LDL^T$

Ex $\begin{bmatrix}1&4&5\\4&2&6\\5&6&3\end{bmatrix}$ LDU分解 $\xrightarrow[-5r_1+r_3\to r_3]{-4r_1+r_2\to r_2} \begin{bmatrix}1&4&5\\0&-14&-14\\0&-14&-22\end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_3\to r_3} \begin{bmatrix}1&4&5\\0&-14&-14\\0&0&-8\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}1&&\\4&1&\\5&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&-14&\\&&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&5\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}=LDL^T$

Proof A可作唯一 LDU分解 下三.对.上三 其中D可逆 L,U对角=1

Claim: $U=L^T$

$A=LDU$. $A=A^T \Rightarrow A=U^TD^TL^T=U^TDL^T$

$\Rightarrow LDU=U^TDL^T$ 两边均为LDU分解,又分解唯一

下三角,对角1　上三角,对角1　$\Rightarrow L=U^T$, $U=L^T$

留作Ex.

⇐ 由LDU分解的唯一性. $L=U^T$

若需换行.

$P_n\cdots E\cdot P\cdot E\, P_1=A$. 可找置换矩阵$P$ s.t. $PA=LU$

$P\cdots P=A$　交换 P,E? ~~但可逆~~

分块矩阵

$A=\begin{bmatrix}\vec{\alpha_1} & \vec{\alpha_2} & \cdots & \vec{\alpha_n}\end{bmatrix}$ $\quad A=\begin{bmatrix}\vec{a_1}\\ \vdots\\ \vec{a_n}\end{bmatrix}$ 也是分块矩阵.

$$A=\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} & \\ \hline \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_r \\ m\times n \end{array} \end{array}$$

$\left\{\begin{array}{l} r,\ (m_1, m_2, \cdots, m_r) \\ l,\ (n_1, n_2, \cdots, n_l) \\ \Rightarrow \text{划分方法} \end{array}\right.$

A.B 同型 划分方法一样 $\Rightarrow A+B=\cdots$ 显然

$KA \qquad\qquad \Rightarrow KA=\cdots$

AB乘法? A划分方法为 $(m_1, m_2, \cdots, m_r)$ $(n_1, n_2, \cdots, n_l)$

$\overset{\|}{M_{m,n}}\ \overset{\|}{M_{n,k}}$ B划分方法为 $(n_1, n_2, \cdots, n_l)$ $(k_1, k_2, \cdots, k_t)$,

则 AB 可按 $(m_1, m_2, \cdots, m_r)$ $(k_1, k_2, \cdots, k_t)$ 划分.

且 $\underset{\text{子块}}{(AB)_{p,q}}=\sum_{j=1}^{l} A_{p,j}B_{j,q}$

$$\begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \begin{array}{c} n_1 \\ n_1 \end{array} \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{14} \\ B_{21} & \cdots & B_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$\to A_{21}B_{13}+A_{22}B_{23}$

分块初等变换（初等块行变换）

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \xrightarrow{Q(br)_1+(br)_2} \begin{bmatrix} A & B \\ QA+C & QB+D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

10.16

$$E_{1,2}^{(m,n)}(K)=\begin{bmatrix} I_m & \\ K & I_n \end{bmatrix} \quad K\in M_{n,m}$$

$$E_1^{(m,n)}(K)=\begin{bmatrix} K & \\ & I_n \end{bmatrix} \quad K\in M_m$$

$$P^{(m,n)}\cancel{(K)}=\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix}$$

Ex. G-J消元求A的逆 $A\in M_n$

$$[A\ \ I] \xrightarrow{G} [\ddots\ \ B'] \xrightarrow{J} [I\ \ \overset{A^{-1}}{\overset{\|}{B''}}]$$

$$\underbrace{E_L\cdots E_2E_1}_{F,\text{可逆}}[A\ \ I]=[FA\ \ FI]=[I\ \ B]$$

$FA=I,\ F=A^{-1},\ F=B.$

Ex. AB可逆 求 $\begin{bmatrix} A & D \\ & B \end{bmatrix}$ $D\in M_{m,n}$ 逆

NB. 左乘∴行变换

$$\begin{bmatrix} A & D & I_m & 0 \\ 0 & B & 0 & I_n \end{bmatrix} \xrightarrow{B^{-1}(br)_2\to(br)_2} \begin{bmatrix} A & D & I_m & 0 \\ 0 & I_n & 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \xrightarrow{-D(br)_2+(br)_1\to(br)_1} \begin{bmatrix} A & 0 & I_m & -DB^{-1} \\ 0 & I_n & 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$A^{-1}(br)_1\to(br)_1$

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 & A^{-1} & -A^{-1}DB^{-1} \\ 0 & I_n & 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

逆

§4. 线性空间(一)

数域$\mathbb{F}$上的线性空间

Def 1 (线性空间) = 对于$\mathbb{F}$, 称一个非空集合X为$\mathbb{F}$上的一个线性空间, 如果

X上有加法和数乘 (加法: $\alpha,\beta\in X \mapsto \alpha+\beta\in X$. 数乘 $k\in\mathbb{F}, \alpha\in X \mapsto k\alpha\in X$)

满足: (A1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, $\forall\alpha,\beta\in X$ "="表示同一个元素.

(A2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(A3) 存在$\theta\in X$, s.t. $\theta+\alpha=\alpha$, $\forall\alpha\in X$. 称θ为一个零向量.

(A4) $\forall\alpha\in X$, $\exists$"$-\alpha$"$\in X$ s.t. "$-\alpha$"$+\alpha=\theta$ (负向量, 反向量)

(M1) $1\alpha=\alpha$, $\forall\alpha\in X$

(M2) $l(k\alpha)=(kl)\alpha$, ($\forall\alpha\in X$, $\forall k,l\in\mathbb{F}$)

(M3) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$ ($\forall\alpha,\beta\in X$, $\forall k\in\mathbb{F}$)

(M4) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$ ($\forall\alpha,\beta\in X$, $\forall k,l\in\mathbb{F}$)

要素: $\mathbb{F}$, X, $(+\ \cdot)$

Ex. $X=\mathbb{R}$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $a+b$, ka. $\mathbb{R}$是$\mathbb{R}$上的一个线性空间.

$X=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $\alpha+\beta$, $k\alpha$. $\mathbb{R}^n$是$\mathbb{R}$上的一个线性空间

$\mathbb{V}$三维几何向量空间 over $\mathbb{R}$

$M_2(\mathbb{R})$, 矩阵加法, 数乘 over $\mathbb{R}$

Ex. $\mathbb{R}$上, $X=C(\mathbb{R},\mathbb{R})=\{f\mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f$在$\mathbb{R}$上连续$\}=\{\mathbb{R}$上的实值连续函数$\}$

f,g $\quad f+g:=\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $x\mapsto f(x)+g(x)$

$kf:=\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $x\mapsto k(f(x))$

Ex. 1) θ唯一 $\quad\theta_1,\theta_2$满足(A3), 则$\theta_1+\theta_2=\theta_1=\theta_2$ $\quad\Rightarrow$ "$-\alpha_1$" = "$-\alpha_2$"

2) 负向量唯一 $\quad$"$-\alpha_1$"$+\alpha$ = "$-\alpha_2$"$+\alpha=\theta$. 同加"$-\alpha_1$" $\Rightarrow$ "$-\alpha_1$"$+\theta$ = "$-\alpha_2$"$+\theta$.

3) $0\alpha=\theta$, $\forall\alpha\in X$ $\quad 0\alpha+0\alpha=(0+0)\alpha=0\alpha$. 同加"$-0\alpha$" $\Rightarrow 0\alpha+\theta=\theta\Rightarrow 0\alpha=\theta$

如? 4) $k\theta=\theta$, $\forall k\in\mathbb{F}$

5) $(-1)\alpha=-\alpha$, $\forall\alpha\in X$ $\quad$ 见作后2面

6) $k\alpha=\theta\Leftrightarrow k=0$或$\alpha=\theta$

Def 2. (线性组合) 设$\mathbb{V}$是$\mathbb{F}$上的线性空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是$\mathbb{V}$上的一组向量

$k_1,k_2,\cdots,k_m\in\mathbb{F}$, 称 $\alpha:=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$为

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的一个~, 称$k_1,k_2,\cdots,k_m$为<u>系数</u>

线性 如果β可以写作$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合, 称$\beta$可被$\alpha_1\cdots\alpha_m$<u>线性表出</u>.

Def 3. (线性相关) $\mathbb{V}$ over $\mathbb{F}$, $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$是向量组

称这个向量组是~的, 如果$\exists$不全为零的$k_1,k_2\cdots k_m\in\mathbb{F}$

s.t. $\quad k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\theta\quad(*)$

如果不存在这样的非平凡组合, 称它们线性无关.

(即(*)推出$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$)

Ex. α线性相关当且仅当$\alpha=\theta$.

Ex. $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta$.

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$ 只有$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$解 $\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

Ex. $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\alpha_1(x)=e^{x}$, $\alpha_2(x)=e^{-x}$ 线性相关/无关?

Def 4. (维数) V over $\mathbb{F}$. (最多几个向量线性无关)

(1) 如果$V=\{\theta\}$, 称V为零维的. $\dim V=0$. (dimension)

(2) 如果$\exists n\in\mathbb{N}, n\geq 1$ s.t. 一方面V上存在$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$线性无关,
另一方面V上任意$n+1$个向量都线性相关, 则称V为n维的. $\dim V=n$.

(3) 如果$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1$, 都存在$V$上的$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关
称V为无穷维的, 记 $\dim V=\infty$

Thm. V over $\mathbb{F}$. 如果n是正整数, $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$是$V$上的线性无关的向量组,
满足$\forall\beta\in V$, β都能被$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性表出, 则 $\dim V=n$.

Ex. $\mathbb{F}^n$ (over $\mathbb{F}$). $\dim\mathbb{F}^n=n$.

proof. 取$\alpha_i=e_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 线性无关 ($\because [I_n]\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\k_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$仅全零解)

$\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}=\sum x_ie_i$. $\forall\beta$可被线性表出.

☆Ex. ① $M_2(\mathbb{C})$ over $\mathbb{C}$, 求$\dim(M_2(\mathbb{C}))$? 4
over $\mathbb{C}$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

证线性无关: $k_1[\ \ ]+k_2[\ \ ]\cdots\cdots=\begin{bmatrix}k_1&k_2\\k_3&k_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, 则$k_1=\cdots=k_4=0$.

证$\forall\beta\in\cdots$可被线性表出. 略.

② $M_2(\mathbb{C})$ over $\mathbb{R}$ 是一个线性空间. 求 $\dim(M_2(\mathbb{C}))$? 8
over $\mathbb{R}$

在②中必须$\in\mathbb{R}$!

proof of Thm. 只需证任意$n+1$个向量线性相关. (*)

考察 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_{n+1}\beta_{n+1}=\theta$是否有不全为0的解.

已知$\forall j\in\{1,2,\cdots,n+1\}$, β_j可以被$\alpha_1\cdots\alpha_n$表出.

即存在$x_{1j},x_{2j}\cdots x_{nj}\in\mathbb{F}$, s.t. $\beta_j=\sum_{\ell=1}^{n}x_{\ell j}\alpha_\ell$

(*) $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n+1}k_j\beta_j=\theta \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n+1}k_j\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell x_{\ell j}$

$\Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell\left(\sum_{j=1}^{n+1}x_{\ell j}k_j\right)=0$.

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n+1}x_{\ell j}k_j=0$. (**) , $\forall\ell$ 星星式:)

$$X=\begin{bmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1(n+1)}\\ \vdots&&\\x_{n1}&\cdots&x_{n(n+1)}\end{bmatrix}$$ (**)即 $X\begin{bmatrix}k_1\\ \vdots\\k_{n+1}\end{bmatrix}=\vec{0}$.

$X\in M_{n\times(n+1)}$, 必有非零解.

Ex. 4) $k\theta=\theta,\ \forall k\in F$

~~$k\theta = k\theta+\theta = k\theta+1\theta = (k$~~

$k\theta = k(\alpha + "-\alpha") = k(\alpha+(-1)\alpha) = k\alpha + (-k)\alpha = (k+(-k))\alpha = 0\alpha = \theta$

用 "$-\alpha$" $=(-1)\alpha$ (证: $\alpha+(-1)\alpha=0$ 又负向量唯一).

~~"$-\alpha$" + α + "$-\alpha$" = "$-\alpha$"~~

10.21

Thm. V 线性空间, 则

(1) 如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 无关, 则它的部分组 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s}$ (当然 $\{i_1,\cdots,i_s\}\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$) 无关.

(2) 如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 相关, 则 $\forall \beta_1,\cdots,\beta_s$, 有 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_s$ 相关.

Proof. (2) 为 (1) 的逆否命题.

只证 (1). 用反证. 假设部分组 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s}$ 相关, 则 $\exists k_{i_1},\cdots,k_{i_s}$ 不全为 0,

s.t. $0\alpha_{j_1}+\cdots+0\alpha_{j_{m-s}} + k_{i_1}\alpha_{i_1}+k_{i_2}\alpha_{i_2}+\cdots+k_{i_s}\alpha_{i_s}=\theta$.

$\alpha_1\cdots\alpha_m$ 相关, 矛盾.

Ex. 线性空间维数唯一.

若 n_1, n_2 均为维数 ($n_1<n_2$)　$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{n_2}$ 无关

$\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_{n_1+1}$ 无关, 与 n_1 为维数矛盾.

Thm. $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$, $m\ge 2$ 线性相关 $\Leftrightarrow \exists i\in\{1,2,\cdots,m\}$

s.t. α_i 可被其它向量表出.

Proof. $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=\theta$ (设 $k_i\neq 0$)　(去 $k_i\alpha_i$)

两边同加 $k_i\alpha_i \Rightarrow \alpha_i = -\frac{1}{k_i}(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m)$

Thm. V 线性空间, $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 无关, 而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 相关.

则 β 可被 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 表出, 且表法唯一.

Proof. (1) $\beta,\alpha_1\cdots\alpha_m$ 相关, $\exists$ 不全为 0 的 $k_1,\cdots k_m, k$.

s.t. $k\beta+\sum k_i\alpha_i=\theta$.

Claim. $k\neq 0$. 反证. 否则 $\sum\alpha_i k_i=\theta$, $\alpha_1\cdots\alpha_m$ 相关, 矛盾

$\therefore \beta = -\frac{1}{k}(\sum k_i\alpha_i)$ $\boxed{\text{可被表出}}$

(2) 若 $\beta = k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m$

$\beta = l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m$

相减 $\theta=(k_1-l_1)\alpha_1+\cdots+(k_m-l_m)\alpha_m$.

$\because \alpha_1\cdots\alpha_m$ 无关 $\therefore k_i=l_i$ $\boxed{\text{表法唯一}}$

Col. $\dim V = n\in\mathbb{N}>0$, 且 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是一组基.

那么 $\forall\beta\in V\ \exists!\ \vec{x}\in F^n$, $\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$.

s.t. $\beta = x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$

坐标映射 V $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 一组基

$\dim V = n$.

$\mathscr{X}: V\longrightarrow F^n$

$\beta\in V \longmapsto \mathscr{X}(\beta)=\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$

s.t. $\sum x_i\alpha_i=\theta$.

称 $\mathscr{X}(\beta)$ 是 β 在基下的坐标.

$\mathscr{X}$ 为一一映射

Ex: $\mathscr{X}(\alpha+\beta)=\mathscr{X}(\alpha)+\mathscr{X}(\beta)$ 事实上,$\mathscr{X}$映射不改变线性关系

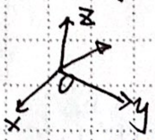
$\mathscr{X}(k\alpha)=k\mathscr{X}(\alpha)$

$\mathscr{X}(k_1\alpha_1+\cdots k_m\alpha_m)=k_1\mathscr{X}(\alpha_1)+\cdots+k_m\mathscr{X}(\alpha_m)$

~~s.t.~~ $\cancel{k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m}$ 不改变线性相关/无关

§ ~~册~~2 线性子空间

Ex. $\mathbb{V}$



$\mathbb{V}_1$:{在x轴上的向量} 为一个线性空间.

Def. 子空间 $\{\theta\}$, $\{V\}$ 平凡子空间. 其余:非平凡子空间

Thm. V线性空间, $W\subseteq V$, 则W是子空间$\Leftrightarrow W$对加法和数乘封闭.

Ex. $\mathbb{V}$上的子空间W

$\dim W=0$ $\{\theta\}$

$\dim W=1$ 过原点的一条直线

$\dim W=2$ 过原点的一个平面

Ex. $M_2(\mathbb{R})$ over $\mathbb{R}$

W是可逆矩阵的集合(×)对加法不封闭 $I+(-I)\notin W$

W是上三角矩阵的集合(√)

W是反对称矩阵的集合(√) 迹: def(tr(A))

W是迹为0矩阵的集合(√) $\boxed{tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}}$

$W\overset{\text{def}}{=}\{B\in M_2(\mathbb{R}):[A,B]=0\}$ $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ $\boxed{[A,B]=AB-BA}$ def $[A,B]$

$[A,B_1]=0,[A,B_2]=0\Rightarrow[A,B_1+B_2]=0$

$[A,B_1+B_2]=A(B_1+B_2)-(B_1+B_2)A=[A,B_1]+[A,B_2]=0$. (√)

§4.2 向量组张成的空间(spanned subspace)

Def. $\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}:=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m, k_i\in\mathbb{F}\ (i=1,2,\cdots,m)\}$

Ex. $\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$是子空间. ($V$ over $\mathbb{F}$. $\alpha_1\cdots\alpha_m\in V$)

Def. (极大线性无关组 ~~向量组的秩~~). V over $\mathbb{F}$. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是一组向量. 如果 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_s}$是它的部分组, 并且

(1) $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_s}$无关

(2) 其他的α_j都可以被(1)中的部分组表出.

则称 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_s}$为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的一个极大无关组

10.23

Thm. $\alpha_1\cdots\alpha_m$为V上的向量组,如果$\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_r}$是它的一个极大无关组,则

$$r=\dim(\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\})$$

称r为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$向量组的秩(rank)　　def(秩)

Proof. 记$W=\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$.

设$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r}$为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$的极大无关组.

① 有$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$无关.(r个无关向量)

② 任给$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r+1}$,证明它们相关.

$\forall j$, α_j可被$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r}$表示

$\beta_j\in W$,故$\beta_j=\sum_{l=1}^{r}k_{lj}\alpha_{i_l}=[\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_r}]\begin{bmatrix}k_{l_1}\\ \vdots\\ k_{l_r}\end{bmatrix}$

极大组$\Rightarrow$ $\forall\alpha_j$可被极大组表出

$\forall\beta\in\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots\alpha_m\}$, β可被$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$表出

$\therefore$ β可被极大组表出

$\therefore$ $r=\dim(\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\})$　　(定理4.2)前二面

Ex: $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

$\alpha_1(x)=1$　$\alpha_2(x)=x$　$\alpha_3(x)=2x+1$　$\alpha_4(x)=e^x$

极大无关组　　α_1无关

α_1与α_2关系:　$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2=\theta$

$c_1+c_2x=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow c_1=c_2=0\Rightarrow$无关

α_3与α_1,α_2关系　$\alpha_3=2\alpha_2+\alpha_1\Rightarrow$相关

α_4与$\{\alpha_1,\alpha_2\}$　$c_1+c_2x+c_3e^x=0$　$\forall x\in\mathbb{R}$

令$x\to-\infty$　$\lim_{x\to-\infty}(c_1+c_2x)=0\Rightarrow c_1=c_2=0\Rightarrow c_3=0\Rightarrow$无关

$\mathbb{R}^n$空间　特别处?

over $\mathbb{R}$, n维的, $\vec{e_1},\vec{e_2}\cdots\vec{e_n}$ 其中$\vec{e_i}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix}\to i$ 为一组基,称为自然基(标准基)

$\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}$在自然基下的坐标是它自己

$\alpha_1\cdots\alpha_m$线性相关$\Rightarrow A=[\vec{\alpha_1}\cdots\vec{\alpha_m}]$　$A\vec{x}=\vec{0}$有非零解.

$A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$　　$A=\begin{bmatrix}| & | & & |\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ | & | & & |\end{bmatrix}$　$\alpha_j\in\mathbb{R}^m$

$=\begin{bmatrix}- & \gamma_1^T & -\\ & \vdots & \\ - & \gamma_m^T & -\end{bmatrix}$　$\gamma_j\in\mathbb{R}^n$

$A:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 线性映射

$\vec{x}\in\mathbb{R}^n\mapsto A\vec{x}=\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_j$

Def. 1) A的列空间 (column space)

$C(A)=Col(A)=span\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n\}\subseteq\mathbb{R}^m$ 是$\mathbb{R}^m$的子空间

称A的列秩为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的秩 (rank)

2) A的行空间 (row space)

$Row(A)=span\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots\gamma_m\}\subseteq\mathbb{R}^n$ 是$\mathbb{R}^n$的子空间

称A的行秩为 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots\gamma_m$ 的秩 (rank)

$Row(A)=Col(A^T)$

3) A的(化)零空间 (Null space)

$Null(A)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n: A\vec{x}=\vec{0}\}$

Rem. Null(A)是$\mathbb{R}^n$的子空间.

$\because \vec{y},\vec{x}\in Null(A)$, $\vec{x}+\vec{y}\in Null(A)$ ✓

$c\in\mathbb{R}$ $\quad c\vec{x}\in Null(A)$ ✓

Col(A)与Null(A)的基与维数

$Col(A)=span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\}=\{\vec{b}\in\mathbb{R}^m: A\vec{x}=\vec{b}\text{有解}\}$

$=\mathbb{R}^n$的象$\{A\vec{x}:\vec{x}\in\mathbb{R}^n\}$

$Null(A)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n: A\vec{x}=\vec{0}\}$

Ex. $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$ $\quad Col(A)=\mathbb{R}^2$ dim=2

$Null(A)=\{\vec{0}\}$ dim=0

$A=\begin{bmatrix}1&3&4\\2&4&6\end{bmatrix}$ $\quad Col(A)=\mathbb{R}^2$ dim=2

$Null(A)=\left\{\begin{bmatrix}-k\\-k\\k\end{bmatrix}, k\in\mathbb{R}\right\}=\left\{k\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}: k\in\mathbb{R}\right\}$. dim=1.

$\begin{bmatrix}1&3&4\\2&4&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&4\\0&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{matrix}x_1+k\\x_2+k=0\end{matrix}$

Rem 求Col(A)的一组基 求$\alpha_1\cdots\alpha_n$的极大组. 求Null(A)

求~~Null(A)~~都可以用对A $\xrightarrow{G-J}$ rref(A)=R 行简化阶梯型

row reduced echolen form

$A=\begin{bmatrix}1&3&1&2\\0&0&1&4\\1&3&1&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=R.$

Rem. 主元为1. 主元上、下、前都为0

①主元列是$\mathbb{R}^m$自然基的前r个, 其中r=主元数.

②非主元列可被它前面的主元列表出.

Thm. 对A进行初等行变换 不改变列之间的线性关系.

$A=\begin{bmatrix}\alpha_1&\cdots&\alpha_n\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}\alpha_1'&\cdots&\alpha_n'\end{bmatrix}=A'$?

那么如果

$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0\Leftrightarrow k_1\alpha_1'+\cdots+k_n\alpha_n'=0.$

Proof. $A\begin{bmatrix}k_1\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=\vec{0}\Rightarrow EA\begin{bmatrix}k_1\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=\vec{0}.$

$EA[\;]=\vec{0}\Rightarrow E^{-1}EA[\;]=A[\;]=\vec{0}.$

Col: (1) $Null(A)=Null(A')$

(2) 如果 $\alpha_j = c_1\alpha_{i_1}+c_2\alpha_{i_2}+\cdots c_s\alpha_{i_s}$

则 $\alpha_j' = c_1\alpha_{i_1}'+c_2\alpha_{i_2}'+\cdots c_s\alpha_{i_s}'$

在 $R=rref(A)$ 中，记主元列为第 $i_1, i_2, \cdots i_r$ 列

非主元列 $j_1, j_2, \cdots, j_{n-r}$ 列

则 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 的极大无关组.

$\dim(Col(A))=$ 主元个数 r.

<u>求 $Null(A)$</u> 即求 $A\vec{x}=\vec{0}$ 解集 即求 $R\vec{x}=\vec{0}$ 解集.

Ex. $A=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\1&2&3&1&2\\0&0&0&1&0\end{bmatrix} \xrightarrow{G\text{-}J} R=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&\boxed{1}&0&\boxed{1}\\0&1&\boxed{1}&0&\boxed{\frac{1}{2}}\\0&0&\boxed{0}&1&\boxed{0}\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}i_1&i_2&j_1&i_3&j_2\end{matrix}\end{array}$ 取反放到对应位 + j 中 0/1

$$\begin{cases}x_1=-k_1-k_2\\x_2=-k_1-\frac{1}{2}k_2\\x_3=k_1\\x_4=0\\x_5=k_2.\end{cases}\qquad Null(A)=Null(R)=k_1\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}}_{\vec{y_1}}+k_2\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\0\\0\\1\end{bmatrix}}_{\vec{y_2}}$$

对于自由的 j_l $\vec{y_1}, \vec{y_2}, \cdots \vec{y_{n-r}}$ 个 $A\vec{x}=\vec{0}$ i.e. $Null(A)$

<u>Claim</u>. $\vec{y_1}, \vec{y_2}, \cdots \vec{y_{n-r}}$ 线性无关且为 $Null(A)$ 的一组基.

$\vec{y_l}=\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\\0\\ \vdots\end{bmatrix}$ $\to i_1$, $\to i_2$, $\to j_l$, $\to i_r$; $j_k \neq l$; $-\alpha_{j_l}'$

$\because$ 第 j_l 行仅 $\vec{y_l}$ 为 1 其余为 0.

<u>10.28</u> 特别零解 $\vec{y_1}, \vec{y_2}, \cdots \vec{y_{n-r}}$ 线性无关

<u>Thm.</u> $Null(A)=span\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \cdots \vec{y_{n-r}}\}$ 且 $\vec{y_1}, \cdots, \vec{y_{n-r}}$ 为一组基.

<u>Proof.</u> ① $\vec{y_1}, \vec{y_2}, \cdots \vec{y_{n-r}} \in Null(A)$. 线性无关

② $\forall \vec{x}\in Null(A)$, $\exists (c_1, \cdots, c_{n-r})$ s.t. $\vec{x}=c_1\vec{y_1}+\cdots+c_{n-r}\vec{y_{n-r}}$

如果 $\vec{x}\in Null(A)$ 那么 $A\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow R\vec{x}=0$. $R=rref(A)$

用 G-J 消元求解时，令自由变量 $k_1=x_{j_1}, \cdots k_{n-r}=x_{j_{n-r}}$

给定 $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\in Null(A)=Null(R)$ 记非主元变量为 $j_1, j_2, \cdots, j_{n-r}$.

考察 $\vec{x}'=x_{j_1}\vec{y_1}+x_{j_2}\vec{y_2}+\cdots+x_{j_{n-r}}\vec{y_{n-r}}$

claim: $\vec{x}=\vec{x'}$

Proof: 令 $\vec{z}=\vec{x}-\vec{x'}\in Null(A)$

$\vec{z}=\begin{bmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{bmatrix}$ 非主元部分为 0.

$R\vec{z}=z_{i_1}\alpha_{i_1}'+z_{i_2}\alpha_{i_2}'+\cdots z_{i_r}\alpha_{i_r}'=z_{i_1}\vec{e_1}+\cdots+z_{i_r}\vec{e_r}=0$

$\Rightarrow z_{i_1}=z_{i_2}=\cdots=z_{i_r}=0$.

$\Rightarrow \vec{z}=\vec{0}$

$\Rightarrow \dim(Null(A)) = n-r. \quad \dim(Col(A)) = r.$

Ex. 假设 $Null = span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ 求 rref(A). (A有5行)

解 $A \in M_{5,4} \quad r = n - \dim(Null(A)) = 4-2 = 2.$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>$A\vec{x} = \vec{b}$ 通解</u>　　解集

解法: $[A \mid \vec{b}] \xrightarrow{G\text{-}J} [R \mid \vec{b'}]$

可解: 无矛盾行 $\Leftrightarrow \vec{b'}$ 可被主元列表出 $\Leftrightarrow \vec{b} \in Col(A)$

$\vec{b'}$ particular solution (令所有自由变量 $x_{j_1}, \cdots x_{j_{n-r}} = 0$ 得出的).

e.g. $\xrightarrow{G\text{-}J} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \vec{x_{ps}} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix}2\\6\\0\\0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\leftarrow x_{i_1}\\ \leftarrow x_{i_2} \text{ 主元}.\\ \\ \\ \end{array} \quad \vec{\eta_1} = \begin{bmatrix}-2\\-3\\1\\0\end{bmatrix} \quad \vec{\eta_2} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$

<u>通解</u> $= \{\vec{x_{ps}} + \vec{z} : \vec{z} \in Null(A)\}$

$= \{\vec{x_{ps}} + c_1\vec{\eta_1} + \cdots + c_{n-r}\vec{\eta_{n-r}} ; c_i \in \mathbb{R}\}$

<u>Thm.</u> 假设 $A\vec{x} = \vec{b}$ 有解 (i.e. $\vec{b} \in Col(A)$), 设 $\vec{\eta_0}$ 为一个解.

假设 $Null(A) = span\{\vec{z_1}, \vec{z_2}, \cdots, \vec{z_{n-r}}\}$

则解集 $S = \underbrace{\{\vec{\eta_0} + c_1\vec{z_1} + \cdots + c_{n-r}\vec{z_{n-r}} : c_i \in \mathbb{R}\}}_{W}$

Proof. ① $S \subseteq W$ ② $W \subseteq S$

②: $\forall \beta \in W$, $A\beta = A(\vec{\eta_0} + c_1\vec{z_1} + \cdots c_{n-r}\vec{z_{n-r}})$

$= \vec{b} + c_1(A\vec{z_1}) + \cdots + c_{n-r}(A\vec{z_{n-r}}) = \vec{b} \Rightarrow \beta \in S.$

①: $\forall \gamma \in S$ 则 $A\vec{\gamma} = \vec{b}$, 令 $\vec{z} = \vec{\gamma} - \vec{\eta_0}$

$A\vec{z} = A(\vec{\gamma} - \vec{\eta_0}) = \vec{0}$, $\vec{z} \in Null(A)$ 可写成 $c_1\vec{\eta_1} + \cdots + c_{n-r}\vec{\eta_{n-r}}$

$\therefore \gamma \in W$.

注意: 解集 S 不一定是子空间!

(如果 $\vec{b} \neq \vec{0}$, S 不是子空间. 如果 $\vec{b} = \vec{0}$, S 是子空间)

A的列秩 $\mathrm{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} | & & | \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ | & & | \end{bmatrix}$

行秩 $\mathrm{rank}\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m\}$ $\qquad = \begin{bmatrix} - \gamma_1^T - \\ \vdots \\ - \gamma_m^T - \end{bmatrix}$

Thm. A的行秩与列秩相等

列~~秩~~秩 $A \xrightarrow{G-J} \mathrm{rref}(A)$

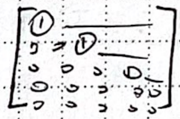
行~~列~~秩 $A^T \xrightarrow{G-J} \mathrm{rref}(A^T)$

"$A \xrightarrow{列变换} \mathrm{rref}(A)$"

Lem. 对A进行初等行变换或列变换，不改变列秩.

$A \in M_{m,n}$

$E_L^{(m)} \cdots E_1^{(m)} A = \mathrm{rref}(A) = R$



$A^T E_1^{(m)T} \cdots E_L^{(m)T} = R^T$

A的列秩 = R的列秩 ?

A^T的列秩 = R^T的列秩 = A的行秩 $\Rightarrow$ 只需证R的列秩 = R的行秩

"主元"个数 "前r行线性无关".

10.30

I/A的秩性质

Thm. A的列秩 = A的行秩

Lem. 初等行、列变换不改变A的列秩

Pf Thm. A的列秩 = R的列秩

A^T的列秩 = R^T的列秩

Pf Lem. 1) $\boxed{A = [\alpha_1 \cdots \alpha_n] \xrightarrow{初等行} A' = [\alpha_1' \cdots \alpha_n']}$

Thm. 初等行变换不改变列的线性关系

2) Claim1. $\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $\boxed{\xrightarrow{初等列} A' = [\alpha_1' \cdots \alpha_n']}$

α_j'可被$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$表出

Claim2. $\mathrm{span}\{\alpha_1', \cdots, \alpha_n'\} \subseteq \mathrm{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$

初等列变换可逆，故 $\cdots \supseteq \cdots$

$\therefore \mathrm{span}\{\alpha_1', \cdots, \alpha_n'\} = \mathrm{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$

取维数 A'的列秩 = A的列秩

Ex. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T)$

~~Thm.~~ II/A的秩与$A\vec{x} = \vec{0}$, $A\vec{x} = \vec{b}$.

$A \in M_{m,n}$, $\mathrm{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Def. $\mathrm{rank}(A) = m$. 行满秩 (full row rank)

$\mathrm{rank}(A) = n$. 列满秩

$\mathrm{rank}(A) = m = n$ 满秩方阵

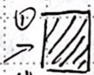
☆Ex. A行满秩 $\Longleftrightarrow$ $Col(A)=\mathbb{R}^m$ （$\because \dim(Col(A))=rank(A)=m$ 且 $Col(A)\subseteq\mathbb{R}^m$）

Ex. $A\vec{x}=\vec{0}$ 有唯一解（只有$\vec{0}$解）$\Longleftrightarrow$ A是列满秩 $rank(A)=n$

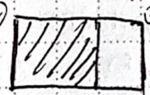
有无穷多解（有非$\vec{0}$解）$\Longleftrightarrow$ A列不满秩

Ex. A的秩与m.n的关系

行满秩 ↑ 列满秩 ↑



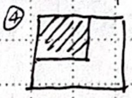
① $rank(A)=m=n$. A方阵满秩 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有且有唯一解



② $rank(A)=m<n$ $A\vec{x}=\vec{b}$ 有且有无穷多解

③ $rank(A)=n<m$ $A\vec{x}=\vec{b}$ 要么无解

要么有唯一解



④ $rank(A)=r<\min\{m,n\}$ $A\vec{x}=\vec{b}$ 要么无解

要么有无穷多解

上述矩阵的$rref(A)$

① $R=I_n$ ② $R=[I_m \ \ F_{m\times(n-r)}]$ （可能列顺序调换）

③ $R=\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ ④ $R=\begin{bmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ （②.④ 在此假设主元列在前）

$$[I_m \ \ F_{m\times(n-r)}]\begin{bmatrix} I_m & -F \\ & I_{n-r} \end{bmatrix}=[I_m \ \ 0]$$

$\forall A$, 可找 $\underset{\text{可逆}}{P_{m\times m}}A_{m\times n}\underset{\text{可逆}}{Q_{n\times n}}=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相抵标准型

Ex. $rank(A)=1$, $(A\in M_{m,n})$ 则 $\exists \beta\in\mathbb{R}^m$, $\alpha\in\mathbb{R}^n$ s.t. $A=\beta\alpha^T$

$A=[\gamma_1\cdots\gamma_n]$ 存在β为$\gamma_1\cdots\gamma_n$的极大无关组（一组基）

即 $\forall l\in\{1,\cdots,n\}$, $\gamma_l=c_l\beta$

令 $\alpha=[c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]^T$

Ex. $rank A=1$ 求A^{18}

$A=\beta\cdot\alpha^T \Rightarrow A^{18}=\beta\cdot(\alpha^T\beta)^{17}\cdot\alpha^T$

III/ Thm (1) $A\in M_{m,n_1}$ $B\in M_{m,n_2}$, 则

$\max\{rank(A),rank(B)\}\le rank([A \ \ B]_{m\times(n_1+n_2)})\le rank(A)+rank(B)$

$A=[\alpha_1\cdots\alpha_{n_1}]$ $B=[\beta_1\cdots\beta_{n_2}]$ $\in\mathbb{R}^m$

令 $r_1=rank(A)$, $r_2=rank(B)$.

存在$\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{ir_1}$为 ~~A极~~ $Col(A)$极大无关组

Claim. 对$\forall\gamma\in span\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n_1},\beta_1\cdots\beta_{n_2}\}$, γ可以被$\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{ir_1},\beta_{i_1}\cdots\beta_{ir_2}$表出

$\dim(span\{\alpha_1\cdots\alpha_{n_1},\beta_1\cdots\beta_{n_2}\})=\dim(span(\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{ir_1},\beta_{i_1}\cdots\beta_{ir_2}))\le r_1+r_2$

(2) $\text{rank}(A+B) \le \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

(3) $r(A)+r(B)-n \le r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$ $A\in M_{m,n}$ $B\in M_{n,p}$

右边 $\dim(Null(AB)) = p - \text{rank}(AB)$

$\dim(Null(B)) = p - r(B)$

$Col(AB) \subseteq Col(A)$

$r(AB) \le r(A)$

Claim $Null(B) \subseteq Null(AB)$

($\because B\vec{x}=0 \Rightarrow AB\vec{x}=0$)

$\therefore \dim(Null(B)) \le \dim(Null(AB))$

$\therefore r(AB) \le r(B)$ 同理 $r(AB) \le r(A)$ (转置即可)

$\longrightarrow r(B^TA^T) \le r(A^T)$

8:00-10:00 6A016

11.4

Ex. $\begin{cases} \mathbb{R}^n\text{中有 } \alpha_1 \cdots \alpha_s \text{ 线性无关} \\ \mathbb{R}^m\text{中有 } \beta_1 \cdots \beta_s \text{ (不需线性无关)} \end{cases}$ 则向量组 $\gamma_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \cdots \gamma_s = \begin{bmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \end{bmatrix}$ 线性无关

☆ Ex. V 线性空间 $\dim(V) = n \in \mathbb{N} > 0$ 已知 $\alpha_1 \cdots \alpha_s \in V$ 是一组线性无关的向量则：可以将它扩充为 V 的一组基 即存在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-s}$ 使 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-s}$ 是 V 的一组基

Proof. $\because \dim(V) = n$ 故存在 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ 为 V 的一组基

考察 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$

用筛选法选出极大组：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s, \varepsilon_{j_1}, \varepsilon_{j_t}$

$\text{span}(\alpha_1 \cdots \alpha_s, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = \text{span}(\alpha_1 \cdots \alpha_s, \varepsilon_{j_1}, \cdots \varepsilon_{j_t}) = V$

$\Rightarrow t = n-s$.

Ex. $\mathbb{R}^3$. $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 扩充为一组基

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 筛选法

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \times \quad\;\;\; \times$

Ex. $W_1 \subseteq W_2$ 子空间 证 $\dim(W_1) \le \dim(W_2)$

Pf. 取 $\alpha_1 \cdots \alpha_{\dim(W_1)}$ 为 W_1 一组基 ~~扩充~~

$\alpha_1, \cdots \alpha_{\dim(W_1)}$ 为 W_2 中元素且线性无关

可将 $\alpha_1 \cdots \alpha_{\dim(W_1)}$ 扩充为 W_2 的一组基 故 $r_1 \le r_2$ ✓

11.4 §子空间的交与和

W_1, W_2 是 V 的子空间

$W_1\cap W_2 := \{\alpha : \alpha\in W_1 \text{ 且 } \alpha\in W_2\}$ def. W_1 与 W_2 的交

Thm. $W_1\cap W_2$ 是 V 的子空间，也是 W_1, W_2 的线性子空间.

Pf. 验 $W_1\cap W_2$ 非空，且对加法、数乘封闭

① $\theta\in W_1$ 且 $\theta\in W_2 \Rightarrow \theta\in W_1\cap W_2$

② $\beta_1\in W_1\cap W_2$, $\beta_2\in W_1\cap W_2$

$\beta_1\in W_1, \beta_2\in W_1 \Rightarrow \beta_1+\beta_2\in W_1$

$\beta_1\in W_2, \beta_2\in W_2 \Rightarrow \beta_1+\beta_2\in W_2$ $\Rightarrow \beta_1+\beta_2\in W_1\cap W_2$

③ $\cancel{c\beta_1\in}$ $\beta\in W_1\cap W_2$ $c\beta\in W_1\cap W_2$

Ex. $W_1\cup W_2$ 不一定是 V 的子空间

△ 可逆矩阵 A $A^k\neq 0$ (∵ 可逆×可逆=可逆)

$W_1+W_2 := \{\alpha:\alpha=\alpha_1+\alpha_2, \text{其中 } \alpha_1\in W_1, \alpha_2\in W_2\}$ def. W_1 与 W_2 的和

Thm. W_1+W_2 是 V 的子空间，W_1, W_2 是 W_1+W_2 的线性子空间.

Pf. ① $\theta=\theta+\theta\in W_1+W_2$

② $\beta\in W_1+W_2$, $\gamma\in W_1+W_2$ $\quad \beta+\gamma=\underbrace{(\beta_1+\gamma_1)}_{\in W_1}+\underbrace{(\beta_2+\gamma_2)}_{\in W_2}$

$\Rightarrow \beta=\beta_1+\beta_2$, $\beta_1\in W_1$, $\beta_2\in W_2$

$\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, $\gamma_1\in W_1$, $\gamma_2\in W_2$ $\quad\Rightarrow \beta+\gamma\in W_1+W_2$

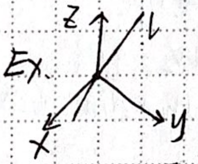
③ 、、、

Ex. $W_1\cap W_2=W_2\cap W_1$

$W_1+W_2=W_2+W_1$

定义 $W_1\cap W_2\cap\cdots\cap W_r$, $W_1+W_2+\cdots+W_r$ 子空间

Ex.



W_1 = "x轴" $\quad W_1+W_2+W_3=V$

2 y $\quad W_1+W_2+W_4=V$

3 z

4 l

(l 不在 oxy 平面内,
不与 x.y.z 轴重合)

☆ Thm (维数定理) W_1, W_2 是 V 的线性子空间，并且 $\dim(V)=n<\infty$，则

$$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)$$

Pf. 记 $\dim(W_1)=r$, $\dim(W_2)=s$, $\dim(W_1\cap W_2)=t$. (假设 $t>0$)

$W_1\cap W_2\subseteq \begin{matrix}W_1\\W_2\end{matrix}\subseteq W_1+W_2$

$\dim(W_1\cap W_2)=t>0 \Rightarrow$ 存在 $\alpha_1\cdots\alpha_t$ 为 $W_1\cap W_2$ 的一组基

$W_1\cap W_2\subseteq W_1 \Rightarrow$ 扩充 $\alpha_1\cdots\alpha_t$ 为一组基 $\alpha_1\cdots\alpha_t\,\beta_1\cdots\beta_{r-t}$ 为 W_1 一组基

同理扩充 $\alpha_1\cdots\alpha_t$ 为 W_2 一组基 $\alpha_1\cdots\alpha_t\,\gamma_1\cdots\gamma_{s-t}$

Claim. $\alpha_1\cdots\alpha_t, \beta_1\cdots\beta_{r-t}, \gamma_1\cdots\gamma_{s-t}$ 将是 W_1+W_2 的一组基 (E)

需验证 (1) $\forall \underset{\text{(eta)}}{\eta}\in W_1+W_2$, η 可被 (E) 表出 (2) (E) 线性无关

证 (1). $\eta\in W_1+W_2 \Rightarrow \eta=\eta_1+\eta_2$，其中 $\eta_1\in W_1$, $\eta_2\in W_2$

$\exists c_1\cdots c_r$ $\eta_1 = c_1\alpha_1+\cdots+c_t\alpha_t+c_{t+1}\beta_1+\cdots c_r\beta_{r-t}$

$\exists d_1\cdots d_s$. $\eta_2 = d_1\alpha_1+\cdots+d_t\alpha_t+d_{t+1}\gamma_1+\cdots d_s\gamma_{s-t}$

$\Rightarrow \eta=$ ……可被 (E) 表出

(2) 假设：$k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t+l_1\beta_1+\cdots+l_{r-t}\beta_{r-t}+p_1\gamma_1+\cdots+p_{s-t}\gamma_{s-t}=\theta$

(*) $k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t+l_1\beta_1+\cdots+l_{r-t}\beta_{r-t}=-p_1\gamma_1-\cdots-p_{s-t}\gamma_{s-t}$

LHS $\in W_1$. RHS $\in W_2$ $\Rightarrow$ LHS = RHS $\in W_1\cap W_2$

RHS $=-(p_1\gamma_1+\cdots+p_{s-t}\gamma_{s-t})=q_1\alpha_1+\cdots+q_t\alpha_t$

$\Rightarrow$ LHS of (*) $=q_1\alpha_1+\cdots+q_t\alpha_t$

$\Rightarrow (k_1-q_1)\alpha_1+\cdots(k_t-q_t)\alpha_t+l_1\beta_1+\cdots+l_{r-t}\beta_{r-t}=\theta$ $(i=1\sim t)$

又因 $\alpha_1\cdots\alpha_t$. $\beta_1\cdots\beta_{r-t}$ 为 W_1 的基 $\Rightarrow k_i=q_i$, $l_j=0$ $(j=1\sim r-t)$

同理可证 $p_j=0 \Rightarrow k_i=0$. 故线性无关

11.6

W_1+W_2 中的向量 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_1\in W_1$, $\alpha_2\in W_2$ 为分解式

Ex. V W_1 xy平面 W_2 yz平面.

$W_1\cap W_2=$ y轴

$\theta=\theta+\theta$ 分解式 $\Rightarrow$ W_1+W_2 中向量有 ∞ 多种分解式

取y轴一向量 $\alpha\neq 0$. 则 $\theta=k\alpha+(-k\alpha)$ 分解式.

W_1+W_2 中的向量分解式.

Def (直和) (direct sum) 如果 W_1+W_2 中任意向量的分解方法唯一. 则称 W_1+W_2 为一个直和. 记为 $W_1\oplus W_2$

Thm (直和判定定理) V 线性空间. 对于它的子空间. 下列命题等价:

(1) W_1+W_2 为直和　(2) θ 的分解方式唯一　(3) $W_1\cap W_2=\{\theta\}$

如果 W_1. W_2 有限维, (1)(2)(3) 等价于 (4) $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim(W_2)$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) 显然. 对 θ 用定义　id est 换句话说

(2) $\Rightarrow$ (3) 反证. 假设 (2) 成立 (3) 不成立, i.e. $W_1\cap W_2\neq\{\theta\}$

$\Rightarrow \exists\alpha\neq\theta$, $\alpha\in W_1\cap W_2$

故 $\theta=\theta+\theta=\alpha+(-\alpha)$, 其中 $\alpha\in W_1$, $-\alpha\in W_2$

(3) $\Rightarrow$ (1) 若 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2$. $\alpha_1\beta_1\in W_1$ $\alpha_2\beta_2\in W_2$

$\underset{W_1}{\underset{\cap}{\alpha_1-\beta_1}}=\underset{W_2}{\underset{\cap}{\alpha_2-\beta_2}} \Rightarrow \alpha_1-\beta_1$ 与 $\alpha_2-\beta_2\in W_1\cap W_2$

$\Rightarrow \alpha_1-\beta_1=\alpha_2-\beta_2=\theta$.

设 $\dim W_1<\infty$. $\dim W_2<\infty$. 来证 (3) $\Leftrightarrow$ (4).

(3) $\Rightarrow$ (4) $\dim(W_1+W_2)+\underset{0}{\underset{\|}{\dim(W_1\cap W_2)}}=\dim W_1+\dim W_2$

故 (4) 成立.

(4) $\Rightarrow$ (3) $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2=\dim(W_1\cap W_2)=0$

$\Rightarrow W_1+W_2=\{\theta\}$

Ex. $M_2(\mathbb{R})$ $W_1=\{A\in M_2: tr(A)=0\}$ W_1+W_2 直和?

$W_2=\{cI: c\in\mathbb{R}\}$

~~$W_1\cap W_2$~~ 假设 $A\in W_1\cap W_2$. $\exists c\in\mathbb{R}$ s.t. $A=cI$.

$\Rightarrow tr(A)=tr(cI)=2c=0\Rightarrow c=0\Rightarrow A=\theta$

Ex. $V=\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ W_1(偶函数) W_2(奇函数).

W_1+W_2 是直和. $W_1\oplus W_2=V$

Col. W_1, W_2 是 V 两个有限维子空间.

$\varepsilon_1\cdots\varepsilon_s$ 是 W_1 的基 $\eta_1\cdots\eta_t$ 为 W_2 的基.

则 W_1+W_2 为直和 $\Leftrightarrow$ $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_s, \eta_1\cdots\eta_t$ 线性无关

Pf. $W_1+W_2=span\{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_s,\eta_1\cdots\eta_t\}$

W_1+W_2 直和 $\Leftrightarrow \dim span\{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_s,\eta_1\cdots\eta_t\}=s+t$

$\Leftrightarrow \varepsilon_1\cdots\varepsilon_s, \eta_1\cdots\eta_t$ 线性无关

Col. V 有限维线性空间. W 为非平凡子空间.

则 $\exists U$ 为子空间 s.t. $V=W\oplus U$

Pf. W 基: $\alpha_1\cdots\alpha_s$. 扩张为 V 的基: $\alpha_1\cdots\alpha_s, \underline{\beta_1\cdots\beta_{n-s}}$

作为 U 的基.

Def 称 $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 为一个直和, 如果其中任意向量分解式唯一. $W_1+W_2+\cdots$ 直和.

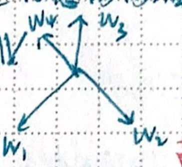
$\underset{\dim=n}{V}=span\{\varepsilon_1\}\oplus span\{\varepsilon_2\}\oplus\cdots\oplus span\{\varepsilon_n\}$

V 基: $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$

Thm (1) $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 是直和 $\Leftrightarrow$ (2) 分解式唯一 $\Leftrightarrow$ ☆(3) $\forall i\in\{1,\cdots,s\}$, $W_i\cap(\sum_{j\neq i}W_j)=\{\theta\}$

(4)(如果 $W_1\oplus\cdots\oplus W_s$ 有限维) $\dim(W_1+\cdots W_s)=\dim W_1+\cdots+\dim W_s$

(3) 不是任意两两相交为 θ!

e.g. 

$W_{1,2,3}$: xyz轴

W_4: 过0直线.

$W_1+W_2+W_3+W_4$ 不是直和.

但任意两子空间相交为 $\{\theta\}$.

可用线性空间在基下的坐标 $\mathbb{R}^n$ 将问题转化到 $\mathbb{R}^n$ 上.

$\mathbb{R}^n$ 典型算例

$W_1=span\{\alpha_1\cdots\alpha_s\}$ $W_2=span\{\beta_1\cdots\beta_t\}$

$W_1+W_2=span\{\alpha_1\cdots\alpha_s,\beta_1\cdots\beta_t\}$

$=Col\left(\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_s & \beta_1 & \cdots & \beta_t\end{bmatrix}\right)\Rightarrow rref(A)$

Ex. $\mathbb{R}^3$: $\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\beta_1=\begin{bmatrix}-1\\3\\0\end{bmatrix}$ $\beta_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}$

$W_1=span(\alpha_1,\alpha_2)$ $W_2=span(\beta_1,\beta_2)$

求 $W_1+W_2=span(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=Col(A)\Rightarrow$ $A=\begin{bmatrix}-1&1&-1&-1\\1&1&3&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}-1&1&-1&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}=rref(A)$ $\therefore W_1+W_2=\mathbb{R}^3$.

Ex. 续

求 $W_1 \cap W_2$ 一组基？ $\dim(W_1\cap W_2) = \dim(W_1+W_2) + \dim W_1 + \dim W_2 = 2+2-3=1$

$\begin{bmatrix} 1 & & & -1 \\ & 1 & & -1 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\beta_2 = -\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1$

$\underset{W_1}{\underset{\cap}{\alpha_1+\alpha_2}} = \underset{W_2}{\underset{\cap}{\beta_1-\beta_2}}$ $\therefore W_1\cap W_2 = \mathrm{span}\{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$

$\dim(W_1\cap W_2) = s+t-r = \dim(\mathrm{Null}(A))$

故可从每一非主元列（共 $s+t-r$ 个）得到一个 $W_1\cap W_2$ 的基

Chap 5. 线性空间（二）

$\mathbb{V}$ $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{\beta}\|\cdot\cos\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle$ 在 $\mathbb{V}$ 上数量积 (1) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}\geq 0$ 且仅当 $\alpha=\theta$ 取等

$\mathbb{R}^n$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (2) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$

(3) $(k\vec{\alpha_1}+l\vec{\alpha_2})\cdot\vec{\beta}$

$= k\vec{\alpha_1}\cdot\vec{\beta} + l\vec{\alpha_2}\cdot\vec{\beta}$

不是 $\mathbb{C}$！

Def（内积空间）

内积

称数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间 $\mathbb{V}$ 为一个内积空间，如果在 $\mathbb{V}$ 上可以定义内积运算，即把 $\alpha,\beta\in\mathbb{V} \longmapsto \langle\alpha,\beta\rangle\in\mathbb{R}$

且满足：(1) $\langle\alpha,\alpha\rangle\geq 0$

(2) $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\beta,\alpha\rangle$

(3) $\langle k\alpha+l\beta,\gamma\rangle = k\langle\alpha,\gamma\rangle + l\langle\beta,\gamma\rangle$

11.11

Ex. $C([-1,1];\mathbb{R})$ $\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$

$\langle\sum_{i=1}^{s}\alpha_i, \sum_{j=1}^{t}\beta_j\rangle = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\langle\alpha_i,\beta_j\rangle$

$\langle\theta,\alpha\rangle = 0$ Pf: $\langle\theta,\alpha\rangle = \langle\theta+\theta,\alpha\rangle = \langle\theta,\alpha\rangle + \langle\theta,\alpha\rangle$

长度，夹角，距离

☆ Thm（Cauchy-Schwarz）$\mathbb{V}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的内积空间，则 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{V}$ 有

$\boxed{|\langle\alpha,\beta\rangle| \leq \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}\sqrt{\langle\beta,\beta\rangle}}$

$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \leq (\int_{-1}^{1} f(x)^2)^{\frac{1}{2}}(\int_{-1}^{1} g(x)^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

且等号成立当且仅当 α 与 β 线性相关

Pf. 若 $\alpha=\theta$ 或 $\beta=\theta$，等号成立

对 $\alpha\neq\theta$ 和 $\beta\neq\theta$，考察 $f(x) := \langle\lambda\alpha+\beta, \lambda\alpha+\beta\rangle$ $\lambda\in\mathbb{R}$

$f(x) = \lambda^2\langle\alpha,\alpha\rangle + 2\lambda\langle\alpha,\beta\rangle + \langle\beta,\beta\rangle$ 为二次式

另一方面，$f(x)\geq 0$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$（正定性）

$f(x)=0$ 至多有一个根 $\Rightarrow \Delta = 4\lambda^2\langle\alpha,\beta\rangle^2 - 4\lambda^2\langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle \leq 0$

即 $|\langle\alpha,\beta\rangle| \leq \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}\sqrt{\langle\beta,\beta\rangle}$

Def.(赋范线性空间) V over $\mathbb{R}$ 线性空间. 称一个把 $\alpha\in V$ 映到 $[0,+\infty)$ 的映
映射为一个范数 (norm), 且满足下列性质:

范数

(1) (正定性) $\|\alpha\|\geq 0, \forall\alpha\in V$ 且 $\|\alpha\|=0 \Leftrightarrow \alpha=\theta$ (长度)

(2) $\|k\alpha\| = |k|\cdot\|\alpha\|$

(3) $\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\|+\|\beta\|$

称 V 配上以上 $\|\cdot\|$ 为赋范线性空间.

若 V 为内积空间, 则定义 $\|\alpha\| := \sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ 内积诱导的范数

$\angle\{\alpha,\beta\} = \arccos\left(\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}\right)$ $\left(\because \frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}\in[-1,1]\right)$ (夹角)

Def.(正交) 称 $\alpha\perp\beta$, 如果 $\langle\alpha,\beta\rangle=0$ (orthogonal)

Ex. $\theta\perp\alpha, \forall\alpha\in V$

Def.(度量空间) X 为非空集合, 称二元映射

距离

(距离空间) 把 $\alpha,\beta\in X$ 映到 $d(\alpha,\beta)\in[0,+\infty)$

满足 (1) $d(\alpha,\beta)\geq 0$ 且 $d(\alpha,\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$

(2) $d(\alpha,\beta) = d(\beta,\alpha)$

(3) $d(\alpha,\beta) \leq d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$ 为距离

$d(\alpha,\beta) := \|\alpha-\beta\|$ 内积诱导的距离

内积在一组基下的度量矩阵 (有限维)

Q: V 内积, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 一组基 ($\dim V=n$)

$\mathbb{X}$ $\alpha\in V \mapsto \mathbb{X}(\alpha)$ 为 α 的坐标 ($\mathbb{X}(\alpha)\in\mathbb{R}^n$)

$\langle\alpha,\beta\rangle$ $\mathbb{X}(\alpha)$ $\mathbb{X}(\beta)$ 关系?

$\mathbb{X}(\alpha)=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}, \mathbb{X}(\beta)=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$ $\quad \alpha = x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n$, $\beta = y_1\varepsilon_1+\cdots+y_n\varepsilon_n$.

$\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i, \sum_{j=1}^n y_j\varepsilon_j\rangle = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i y_j\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle$

Def 度量矩阵 $M=\begin{bmatrix}\langle\varepsilon_1,\varepsilon_1\rangle & \cdots & \langle\varepsilon_1,\varepsilon_n\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle\varepsilon_n,\varepsilon_1\rangle & \cdots & \langle\varepsilon_n,\varepsilon_n\rangle\end{bmatrix}$

$\langle\alpha,\beta\rangle = \vec{x}^T M\vec{y}$

若 $M=I_n$, $\langle\alpha,\beta\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$.

$\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=\delta_{ij}$ i.e. $\varepsilon_i\perp\varepsilon_j$ (若 $i\neq j$) 且 $\|\varepsilon_i\|=1$ $\quad \|\varepsilon_i\|=1$

这样的一组基叫作一组标准正交基 (orthonormal basis)

Ex. $\mathbb{R}^4$ 标准内积, $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$ 为一组标准正交基.

子空间的正交，正交补

Def V 内积空间. $\alpha\in V$, W子空间, V子空间　(子空间的正交)

称 $\alpha\perp W$ 若 $\alpha\perp\beta,\ \forall\beta\in W$

称 $V\perp W$ 若 $\forall\alpha\in V,\ \alpha\perp W$　　W中与平面垂直不同! eg

V中 $V=\{xy平面\}$ $W=\{yz平面\}$

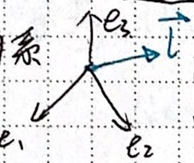
选y轴上向量可举反例 ⇒ $V\perp W$错

Def (正交补) W为V的子空间, 定义

$W^\perp := \{\alpha\in V : \alpha\perp W\}$

称为W的正交补 (orthogonal complements)

Ex 直角系



$W=\mathrm{span}\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$

$W^\perp=\mathrm{span}\{\vec{e_3}\}$

$(\mathrm{span}\{\vec{l}\})^\perp$ = 过原点以$\vec{l}$为法向量的平面

Thm. 对~~有~~限维线性空间 W子空间 $(W^\perp)^\perp=W$　证? (见后文)

Ex. $W\perp V \iff V\perp W$　　$W\perp W^\perp$

$\{\theta\}^\perp = V$　　$V^\perp=\{\theta\}$

$W\perp V \Rightarrow W\cap V=\{\theta\}$

$W+V$是直和

$W\subseteq V \Rightarrow V^\perp\subseteq W^\perp$

{W,V有限维　$W\perp V \iff \varepsilon_i\perp\eta_j,\ \forall i,j$

$\varepsilon_1\cdots\varepsilon_s$为$W$基, $\eta_1\cdots\eta_t$为V基)

Thm. (线性代数基本定理) (FTLA)　fundemental theorem of Linear Algebra

$Col(A)\in\mathbb{R}^m$　　$Col(A^T)\in\mathbb{R}^n$　　$A\in M_{m\times n}$

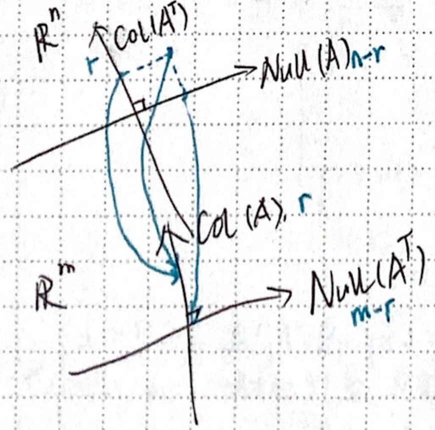
$Null(A^T)\in\mathbb{R}^m$　　$Null(A)\in\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^m = Col(A)\oplus Null(A^T)$　且 $(Col(A))^\perp = Null(A^T)$

且 $(Null(A^T))^\perp = Col(A)$

$\mathbb{R}^n = Col(A^T)\oplus Null(A)$　且 $(Col(A^T))^\perp = Null(A)$

且 $(Null(A))^\perp = Col(A^T)$



11.13

☆复习!

Proof.

Step 1. $Col(A) \perp Null(A^T)$

任取 $\vec{y} \in Col(A)$, $\vec{z} \in Null(A^T)$. check $\vec{y} \perp \vec{z}$

$\Rightarrow \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, s.t. $\vec{y} = A\vec{x}$, $A^T\vec{z} = \vec{0}$

$\vec{y}^T\vec{z} = (A\vec{x})^T\vec{z} = \vec{x}^T A^T \vec{z} = 0$.

Step 2. $\mathbb{R}^m = Col(A) \oplus Null(A^T)$

$\because Col(A) \cap Null(A^T) = \{\theta\}$

$\dim Col(A) + \dim Null(A^T) = m$.

$W \perp V$

$W \cap V = \{\theta\}$

否则 $\alpha \cdot \alpha = \theta$, $\alpha \neq \theta$ 矛盾.

Step 3. $(Col(A))^\perp = Null(A^T)$

obs 1. $Null(A^T) \subseteq (Col(A))^\perp$

①中已证. $\forall \vec{z} \in Null(A^T)$, 有 $\vec{z} \perp Col(A)$

Claim. $(Col(A))^\perp \subseteq Null(A^T)$

任取 $\vec{y} \in (Col(A))^\perp \Rightarrow \vec{y}^T \vec{\alpha_i} = 0$ ($\forall \vec{\alpha_i}$ 为A的列)

$\Rightarrow \vec{y}^T [\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n] = [0\ 0 \cdots 0] = \vec{0}^T$

$\Rightarrow \vec{y} \in Null(A^T)$

Step 4. $(Null(A^T))^\perp = Col(A)$

obs 2. 由①中 $Col(A) \subseteq (Null(A^T))^\perp$

Claim. $(Null(A^T))^\perp \subseteq Col(A)$

☆ 任取 $\vec{y} \in (Null(A^T))^\perp$ 则 $\vec{y} \perp Null(A^T)$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$

$\exists!$ $\vec{y_1} \in Col(A)$, $\vec{y_2} \in Null(A^T)$, s.t. $\vec{y} = \vec{y_1} + \vec{y_2}$

$\langle \vec{y_2}, \vec{y_2} \rangle = \langle \vec{y_2}, \vec{y} - \vec{y_1} \rangle = \langle \vec{y_2}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{y_2}, \vec{y_1} \rangle = 0$

$\Rightarrow \vec{y_2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} = \vec{y_1} \in Col(A) \Rightarrow (Null(A^T))^\perp \subseteq Col(A)$

☆

Ex. $\mathbb{R}^n$ 上, W子空间, 则 $(W^\perp)^\perp = W$

Pf. 不妨 $W \neq \{\theta\}$ (否则显然)

$\dim W = s \geq 1$. $s \leq n$.

有W的一组基. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_s$

$W = Col(A)$, 其中 $A = [\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_s]$

$(W^\perp)^\perp = ((Col(A))^\perp)^\perp = (Null(A^T))^\perp = Col(A)$

Ex. $W = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\3\\2\end{bmatrix}\right\}$ 求 $W^\perp$ 的一组基

$W = Col\left(\begin{bmatrix}1&1\\2&3\\2&3\\3&2\end{bmatrix}\right)$ $W^\perp = Null\left(\begin{bmatrix}1&2&2&3\\1&3&3&2\end{bmatrix}\right) \to \begin{bmatrix}1&2&2&3\\0&1&1&-1\end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix}1&0&0&5\\0&1&1&-1\end{bmatrix}$

基 $\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-5\\1\\0\\1\end{bmatrix}$

Ex. $P \subseteq \mathbb{R}^4$. $P = \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} : 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0\right\}$. 求 $P^\perp$.

$A = [2\ 1\ 3\ 4]$ $P = Null(A)$

Ex. $Nul(A^TA) = Nul(A)$ 列相同

Pf. $\vec{x} \in RHS \Rightarrow A\vec{x} = 0 \Rightarrow A^TA\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in LHS \Rightarrow RHS \subseteq LHS$

$\vec{y} \in LHS \Rightarrow A^TA\vec{y} = 0 \overset{?}{\Rightarrow} A\vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} \in RHS \Rightarrow LHS \subseteq RHS$

① $\vec{y}^TA^TA\vec{y} = (A\vec{y})^T(A\vec{y}) = 0,\ A\vec{y} = \vec{0}$

② $A\vec{y} \in Col(A),\ A\vec{y} \in Nul(A^T) \Rightarrow A\vec{y} = \vec{0}$

行相同

Ex. $Col(AA^T) = Col(A)$ → 对称矩阵

Pf. $Col(AA^T) = ((Col(AA^T))^{\perp})^{\perp} = (Nul(AA^T))^{\perp} = \cancel{Col(AA^T)}\ (Nul(A^T))^{\perp} = Col(A)$

Cor. $\mathbb{R}^m$ 上, W子空间, 则 $\mathbb{R}^m = W \oplus W^{\perp}$

Pf. $W = Col(A)$ ($A = [\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_s]$, ε为W的基)

Thm. 在$\mathbb{R}^n$上, W子空间 则根据Cor.

$\exists!\ \vec{x}_{\parallel}, \vec{x}_{\perp}$ s.t. $\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}$ ($\vec{x}_{\parallel} \in W$, $\vec{x}_{\perp} \in W^{\perp}$)

称 $\vec{x}_{\parallel}$ 为 $\vec{x}$ 在 W 上的投影. ($\vec{x}_{\parallel} \perp \vec{x}_{\perp}$)

投影矩阵

假设 $W = Col(A)$. $A \in M_{n,s}$ $s = \dim W$

A为一个 $n\times s$ 的 $\boxed{\text{列满秩}}$ 矩阵

例如 $A = [\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_s]$ ($\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_s$ 为W的$\boxed{\text{一组基}}$) 需要线性无关!

$\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}$ $\begin{cases} \vec{x}_{\parallel} \in Col(A), \text{ i.e. } \exists\, \vec{y} \in \mathbb{R}^s \text{ s.t. } \vec{x}_{\parallel} = A\vec{y} \\ \vec{x}_{\perp} \in Nul(A^T) \end{cases}$

$\vec{x} = A\vec{y} + \vec{x}_{\perp}$

两端左乘 A^T → $A^T\vec{x} = A^TA\vec{y} + A^T\vec{x}_{\perp} = A^TA\vec{y}$

$$\boxed{A^TA\vec{y} = A^T\vec{x}}$$

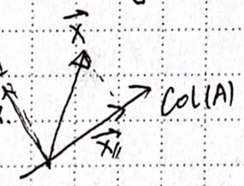
Claim. A列满秩 $\Rightarrow A^TA$可逆

Pf. $\dim(Col(A^TA)) = \dim(Col(A^T)) = rank(A^T) = rank(A) = s$

$\overset{\parallel}{rank}(A^TA) \Rightarrow A^TA$ 为列满秩方阵 可逆

$\Rightarrow \vec{y} = (A^TA)^{-1} \cdot A^T \cdot \vec{x} \Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} \vec{x}_{\parallel} &= \overbrace{A(A^TA)^{-1}A^T}^{P}\vec{x} \\ \vec{x}_{\perp} &= (I - A(A^TA)^{-1}A^T)\vec{x} \end{aligned}}$

Ex.



$\vec{x}_{\parallel} = \alpha(\alpha^T\alpha)^{-1}\alpha^T\vec{x} = \dfrac{\alpha\alpha^T\vec{x}}{\|\alpha\|^2} = \hat{\alpha} \cdot \langle \hat{\alpha}, \vec{x} \rangle$ 单位

Ex. 投影矩阵 $P^2 = P$ [几何意义]

Pf. $A\underbrace{(A^TA)^{-1}A^TA}(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA^{-1})A^T$

△ 对称矩阵一定可被分成 AA^T 吗?

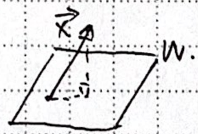
$Col(AA^T) = Nul(AA^T)$ 说明什么?

Ex. $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}$ ① $\vec{b}\in Col(A)$? ② 求 $\vec{b_{\parallel}}, \vec{b_{\perp}}$ s.t. $\vec{b_{\parallel}}=A\vec{y}$, $\vec{y}\in\mathbb{R}^2$.

$A^TA\vec{y}=A^T\vec{b}$ 不在 Col(A) 的 ($\vec{b_\perp}$) 在 Null(A^T)

$A^TA=\begin{bmatrix}3&3\\3&5\end{bmatrix}$ $A^T\vec{b}=\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|c}3&3&6\\3&5&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&1&2\\0&2&-6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&0&5\\0&1&-3\end{array}\right]$ 故 $\vec{y}=\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$



Thm (勾股定理 Pythagoras) 毕达哥拉斯

V 内积空间, $\alpha,\beta\in V$, $\alpha\perp\beta$

则 $\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$. (事实上 $\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\cdots\cdots$)

Ex. 在 $\mathbb{R}^n$ 中 W 子空间, $\vec{x}=\vec{x_\parallel}+\vec{x_\perp}$, $\vec{x_\perp}\in W^\perp$, $\vec{x_\parallel}\in W$.

$\|\vec{x}\|^2=\|\vec{x_\parallel}\|^2+\|\vec{x_\perp}\|^2$

Thm 在 $\mathbb{R}^n$ 中 W 子空间, $\vec{x}=\vec{x_\parallel}+\vec{x_\perp}$ ($\vec{x_\parallel}\in W$, $\vec{x_\perp}\in W^\perp$)

则 $\|\vec{x}-\vec{x_\parallel}\|=\min\limits_{\vec{z}\in W}\|\vec{x}-\vec{z}\|=\|\vec{x_\perp}\|$

$d(\vec{x},\vec{x_\parallel})=\min\limits_{\vec{z}\in W}d(\vec{x},\vec{z})$ 且min仅在 $\vec{z}=\vec{x_\parallel}$ 处取到.

Cor. $A\in M_{n,s}$ 列满秩, $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{b}=\underset{Col(A)}{\vec{b_\parallel}}+\vec{b_\perp}$

则 $\|\vec{b_\perp}\|^2=\min\limits_{\vec{y}\in\mathbb{R}^s}\|\vec{b}-A\vec{y}\|^2$

且min仅在 $\vec{y_*}=(A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$ 处取得.

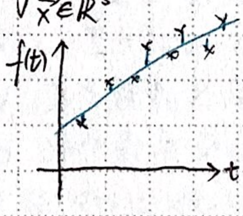
Pf of Thm $\forall\vec{z}\in W$. 计算 $\|\vec{x}-\vec{z}\|^2=\|\underbrace{(\vec{x_\parallel}-\vec{z})}_{W}+\underbrace{\vec{x_\perp}}_{W^\perp}\|^2$ 且仅在 $\vec{z}=\vec{x_\parallel}$ 时取等.

$=\|\vec{x_\parallel}-\vec{z}\|^2+\|\vec{x_\perp}\|^2\geq\|\vec{x_\perp}\|^2$

最小二乘法 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的最小二乘解是 $\vec{x_*}=\operatorname{argmin}\limits_{\vec{x}\in\mathbb{R}^s}\|A\vec{x}-\vec{b}\|^2$

($A\in M_{n,s}$ 列满秩, $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$)

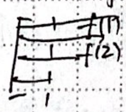
$\boxed{(A^TA)\vec{x_*}=A^T\vec{b}}$



数据拟合 $f(t)$ $t\mapsto f(t)$

$(d_i=f(t_i))$

线性拟合 $f(t)=a+bt$



$\begin{bmatrix}1&t_1\\1&t_2\\\vdots&\vdots\\1&t_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{bmatrix}$, 求 $A\vec{x}=\vec{d}$ 最小二乘解.

$A^TA\begin{bmatrix}a_*\\b_*\end{bmatrix}=A^T\vec{d}$.

$\begin{bmatrix}a^*\\b^*\end{bmatrix}=\operatorname{argmin}\|A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}-\vec{d}\|^2$

11.18

Grand-Schmidt 正交化

投影中选取空间不同的基结果是否不同?

$\mathbb{R}^n$? 矩阵意义?

$W \subseteq \mathbb{R}^n$ 上, $A=[\alpha_1 \cdots \alpha_s]$ $\quad P=A(A^TA)^{-1}A^T$

$B=[\beta_1 \cdots \beta_s]$ $\quad B(B^TB)^{-1}B^T = (AC)((AC)^T(AC))^{-1}(AC)^T$

$\exists C$ s.t. $B=AC$. $C \in M_s$ (B在A下的坐标)

$[\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_s] = [A\vec{c_1}\ A\vec{c_2} \cdots A\vec{c_s}]$

Claim. C可逆 $\quad s=r(B)=r(AC)\leq r(C)=s \Rightarrow r(C)=s$.

如果 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 两两正交. $A=[\alpha_1 \cdots \alpha_s]$ A^TA 为对角矩阵.

— — — 且都是单位向量 A^TA 为 I_s.

$A^TA=I_s$ 时. $P=A(A^TA)^{-1}A^T = AA^T$

$$PX = \begin{bmatrix} | & & | \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_s \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_1^T- \\ \vdots \\ -\alpha_s^T- \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} | & & | \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_s \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \alpha_1, \vec{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \alpha_s, \vec{x} \rangle \end{bmatrix}$$

$$= \langle \alpha_1, \vec{x} \rangle \alpha_1 + \cdots + \langle \alpha_s, \vec{x} \rangle \alpha_s$$

正交矩阵

Def. $Q \in M_n$, 称Q为一个正交矩阵 (orthogonal matrix) 如果 $Q^TQ=I_n$

Rem. $Q=[\gamma_1\ \gamma_2 \cdots \gamma_n]$ $\quad (Q^TQ)_{ij} = \gamma_i^T\gamma_j = \langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}$

$\Rightarrow \gamma_1 \cdots \gamma_n$ 两两正交且为单位向量

Ex. V中 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 两两正交. 则它们线性无关. $(\alpha_1 \cdots \alpha_s \neq \theta)$

$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = \theta$

两边同与 α_1 做内积, $k_1\underbrace{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle}_{\langle \alpha_1,\alpha_1\rangle > 0} = \langle \theta, \alpha_1 \rangle = 0 \Rightarrow k_1=0$.

故 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0 \Rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性无关

Thm. 在 $\mathbb{R}^n$ 上, 以下命题等价. (标准正交基)

正交矩阵性质

(1) $Q^TQ=I$, Q的列 $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组 ONB

(2) $Q^{-1}=Q^T$

(3) $QQ^T=I$ $\quad$ Q的行 $\eta_1 \cdots \eta_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组 ONB.

(4) Q保持长度. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$

(5) Q保持内积. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. $\langle Q\vec{x}, Q\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Px 与 xP 关系?

P $\Leftrightarrow$ $P^2=P$ 且 $P^T=P$?

Pf. (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) 可逆矩阵性质. 下证 (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1)

(1) $\Rightarrow$ (4) $\quad \|Q\vec{x}\|^2 = \langle Q\vec{x}, Q\vec{x} \rangle = \vec{x}^TQ^TQ\vec{x} = \vec{x}^T\vec{x} = \|x\|^2$

(4) $\Rightarrow$ (5) $\quad \|Q(\vec{x}+\vec{y})\|^2 = \langle Q(\vec{x}+\vec{y}), Q(\vec{x}+\vec{y}) \rangle$

$= \|Q\vec{x}\|^2 + 2\langle Q\vec{x}, Q\vec{y} \rangle + \|Q\vec{y}\|^2$

$\because \|(\vec{x}+\vec{y})\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle Q\vec{x}, Q\vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$

$\therefore \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle Q\vec{x}, Q\vec{y} \rangle$. $\quad x^TQ^TQy = x^Ty$?

(5) $\Rightarrow$ (1) $\quad (Q^TQ)_{ij} = \langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = \langle Q\vec{e_i}, Q\vec{e_j} \rangle = \langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle = \delta_{ij}$

V 到 W 投影矩阵 P，到 $W^\perp$ 投影矩阵 $\tilde{P}$，$P+\tilde{P}=I$　　$I-2P$ 反射矩阵

$x' = \vec{x}_{/\!/} - \vec{x}_\perp$　　　　$\vec{x} \mapsto \vec{x}_{/\!/} - \vec{x}_\perp$

$= (2\tilde{P}-I)\vec{x} = (I-2P)\vec{x}$　　$P+\tilde{P}=I$ （$\because Px + \tilde{P}x = x_{/\!/} + x_\perp = x$）正交矩阵，Pf?

不需是 $\mathbb{R}^n$！

Grand-Schmidt 假设 V 为一个有限维 $\dim V = s$ 的内积空间，$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_s$ 一组基

则 G-S 正交化过程生成 V 的一组 ONB.

一　$\eta_1 = \varepsilon_1$

二　$\eta_2 = \varepsilon_2 - \dfrac{\langle \varepsilon_2, \eta_1 \rangle}{\langle \eta_1, \eta_1 \rangle}\eta_1$　　obs. ① $\eta_2 \perp \eta_1$.

$\langle \eta_2, \eta_1 \rangle = \langle \varepsilon_2, \eta_1 \rangle - \dfrac{\langle \varepsilon_2, \eta_1 \rangle}{\langle \eta_1, \eta_1 \rangle}\langle \eta_1, \eta_1 \rangle = 0$

② $\mathrm{span}\{\eta_1, \eta_2\} = \mathrm{span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

左 $\subseteq$ 右，且左右 dim 均为 2. →（正交则线性无关）

三　$\eta_3 = \varepsilon_3 - \left[\dfrac{\langle \varepsilon_3, \eta_1 \rangle}{\langle \eta_1, \eta_1 \rangle}\eta_1 + \dfrac{\langle \varepsilon_3, \eta_2 \rangle}{\langle \eta_2, \eta_2 \rangle}\eta_2\right]$　　① $\eta_3 \perp \mathrm{span}\{\eta_1, \eta_2\}$

② $\mathrm{span}\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\} = \mathrm{span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$

一般地，第 k 步　$\eta_k = \varepsilon_k - \left[\dfrac{\langle \varepsilon_k, \eta_1 \rangle}{\langle \eta_1, \eta_1 \rangle}\eta_1 + \cdots + \dfrac{\langle \varepsilon_k, \eta_{k-1} \rangle}{\langle \eta_{k-1}, \eta_{k-1} \rangle}\eta_{k-1}\right]$

则 $\eta_k \perp \mathrm{Span}\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{k-1}\}$ 且 $\mathrm{Span}\{\eta_1, \cdots \eta_k\} = \mathrm{Span}\{\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_k\}$

n 步后 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 两两正交 且 $\mathrm{Span}\{\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_s\} = \mathrm{Span}\{\eta_1 \cdots \eta_s\} = V$

最后，令 $\eta_i' = \dfrac{\eta_i}{\|\eta_i\|} = \dfrac{\eta_i}{\sqrt{\langle \eta_i, \eta_i \rangle}}$ 则 $\eta_1' \cdots \eta_s'$ 为 V 的 ONB　　η_i 不为 0?

Ex. $\mathbb{R}^3$　$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}$ 求 ONB.

G-S 过程.　$\eta_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

$\langle \eta_1, \eta_1 \rangle = 2$，$\langle \eta_1, \varepsilon_2 \rangle = 1$　$\eta_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\eta_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$

$\langle \eta_2, \eta_2 \rangle = \frac{3}{2}$，$\langle \eta_1, \varepsilon_3 \rangle = 2$，$\langle \eta_2, \varepsilon_3 \rangle = 1$.　$\eta_3 = \begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$

$\eta_1' = [\quad]$，$\eta_2' = [\quad]$，$\eta_3' = [\quad]$　　$= \begin{bmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\end{bmatrix}$　　$\langle \eta_3, \eta_3 \rangle = \cdots$

Cor. $A \in M_{n,s}(\mathbb{R})$ 列满秩的，则 $\exists\, Q \in M_{n,s}(\mathbb{R})$

其列向量都为单位向量且两两正交，$\exists\, R \in M_s(\mathbb{R})$ 上三角，可逆.

s.t. $A = QR$. 特别的，若 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 且可逆，则 $\exists Q$ 正交矩阵，R 为上三角可逆

s.t. $A = QR$.（QR 分解，事实上可唯一确定）

$\varepsilon_k = \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{\langle \varepsilon_k, \eta_i \rangle}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle}\eta_i + \eta_k = \sum_{i=1}^{k-1} \langle \varepsilon_k, \eta_i' \rangle \eta_i' + \langle \eta_k, \eta_k' \rangle \eta_k'$

$\langle \varepsilon_k, \eta_k' \rangle = \langle \eta_k, \eta_k' \rangle$（两边与 η_k' 内积）

$\Rightarrow \varepsilon_k = \sum_{i=1}^{k} \langle \varepsilon_k, \eta_i' \rangle \eta_i'$ 故 R 为上三角.

$(A^TA)\vec{y}=A^T\vec{b}$ $A=QR$ $Q^TQ=I_s$.

$\Rightarrow R^TQ^TQR\vec{y}=R^TQ^T\vec{b}$

$R^TR\vec{y}=R^TQ^T\vec{b}$ (R^T可逆)

$R\vec{y}=Q^T\vec{b}$.

11.20

Chap 6 矩阵的行列式

n阶行列式：$\mathbb{R}^n$上n个向量所构成的"平行2n面体"的"有向面积"

§6.1 几何向量中的有向体积、$\mathbb{V}$

Def. 两个几何向量 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的向量积/叉积/外积（记作 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$）仍为一几何向量

大小 $\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|=\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|\sin\angle\{\vec{\alpha},\vec{\beta}\}$

（$\angle\{\vec{\alpha},\vec{\beta}\}$ 为 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的夹角（$\le 180°$））

方向 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 与 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 都垂直，且使 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 符合右手系

Rem. 若 α、β 中任一为 $\vec{0}$，则 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{0}$

若 α、β 共线，$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{0}$

Thm. (1) $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 共线

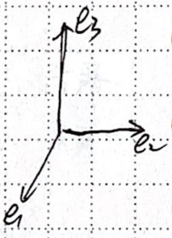
(2) $\vec{0}\times\vec{\alpha}=\vec{0}$. $\forall\vec{\alpha}$

(3) $\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|\le\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\|$. 等式成立 $\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

(4) 若 e_1、e_2、e_3 是 $\mathbb{V}$ 上右手直角坐标系的单位向量，则 $\vec{e_1}\times\vec{e_2}=\vec{e_3}$

$\vec{e_2}\times\vec{e_3}=\vec{e_1}$

$\vec{e_3}\times\vec{e_1}=\vec{e_2}$



Thm. $\forall\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in\mathbb{V}$, $\forall k\in\mathbb{R}$，有

(1) $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=-\vec{\beta}\times\vec{\alpha}$

线性性 { (2) $(k\vec{\alpha})\times\vec{\beta}=k(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})$

(3) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\times\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\times\vec{\gamma}+\vec{\beta}\times\vec{\gamma}$ Proof?

用坐标计算向量积

取仿射坐标系 $\{O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$

设 $\vec{\alpha}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3}$，$\vec{\beta}=y_1\vec{e_1}+y_2\vec{e_2}+y_3\vec{e_3}$

$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=(x_2y_3-x_3y_2)\,\vec{e_2}\times\vec{e_3}+(x_3y_1-x_1y_3)\,\vec{e_3}\times\vec{e_1}+(x_1y_2-x_2y_1)\,\vec{e_1}\times\vec{e_2}$.

特别地，若仿射坐标系是右手直角坐标系，则

$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{e_1}+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{e_2}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{e_3}$.

$\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|=\sqrt{(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}$

特别地，若 $x_3=y_3=0$.

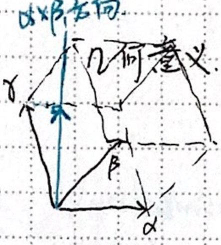
面积 $=\sqrt{(x_1y_2-x_2y_1)^2}=|x_1y_2-x_2y_1|$ "有向"面积.

§6.1.2.

Def.（混合积）三维几何空间 $\mathbb{V}$ 上，定义映射 $D: V\times V\times V \to \mathbb{R}$ 顺序！

$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}) \to D(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ 称为 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 的混合积.

几何意义.



平行六面体的有向体积.

$\underbrace{\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|}_{\text{底面积}}\ \underbrace{\|\vec{\gamma}\|\cos\angle\{\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\vec{\gamma}\}}_{\text{高}}$

当 $\alpha.\beta.\gamma$ 成右手系. $\angle\{\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\vec{\gamma}\} < 90^\circ \Rightarrow D(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}) = |V|$ （体积）

左 $> 90^\circ \Rightarrow \qquad = -|V|$

Rem. 若 α,β,γ 成右手系，则 β,γ,α 与 γ,α,β 也为右手系.

Cor. $D(\alpha,\beta,\gamma) = D(\beta,\gamma,\alpha) = D(\gamma,\alpha,\beta)$

$D(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha\times\beta)\cdot\gamma = D(\beta,\gamma,\alpha) = (\beta\times\gamma)\cdot\alpha = \alpha\cdot(\beta\times\gamma)$

混合积：相邻两个向量顺序先做向量积，再与第三个向量作数量积

Thm (1) 对换有序向量组 $(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$ 中任意两向量的位置，则混合积符号改变

$D(\alpha,\beta,\gamma) = -D(\beta,\alpha,\gamma) = \cdots$ etc. 交错性.

$D(\alpha,\beta,\gamma) = -D(\alpha,\gamma,\beta) = D(\beta,\gamma,\alpha)$

(2) 混合积对第三个向量有线性性

$D(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}_1+\vec{\gamma}_2) = D(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}_1) + D(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}_2)$

$D(\vec{\alpha},\vec{\beta},k\vec{\gamma}) = kD(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$

Rem. 、、、、、1.2个 - - - - -

(3) 右手直角坐标系的单位向量 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$. $D(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=1$.

Ex. $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\times\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\times\vec{\gamma} + \vec{\beta}\times\vec{\gamma}$ （前页遗留证明）

Proof. Claim. 对 $\forall\,\vec{\eta}\in\mathbb{V}$，有 $[(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\times\vec{\gamma} - \vec{\alpha}\times\vec{\gamma} - \vec{\beta}\times\vec{\gamma}]\cdot\vec{\eta} = 0$.

左 $= D(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\eta}) - D(\vec{\alpha},\vec{\gamma},\vec{\eta}) - D(\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\eta}) = 0$.

$\Rightarrow (\vec{\alpha}+\vec{\beta})\times\vec{\gamma} - \vec{\alpha}\times\vec{\gamma} - \vec{\beta}\times\vec{\gamma} = 0$.

§6.1.3 混合积在直角坐标系下的坐标表示，

取仿射坐标系 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$

设 $\vec{\alpha} = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3$

$\vec{\beta} = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3$

$\vec{\gamma} = a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3$

$D(\alpha,\beta,\gamma) = D(\sum a_{1l}\vec{e}_l, \sum a_{2l}\vec{e}_l, \sum a_{3l}\vec{e}_l)$

$= \sum_i\sum_j\sum_k a_{1i}a_{2j}a_{3k}D(e_i,e_j,e_k)$ 若 i,j,k 有相等则为0

剩下有 $3!$ 种.

右手直角坐标系：$D(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$
$\qquad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$

三阶行列式 Def：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

11.25 排列（交换群）→ 置换群？对称群？

Def（排列）：记 $I_n = \{1,2,\cdots,n\}$，称 $\sigma: I_n \to I_n$ 为 I_n 的一个排列（permutation），
如果 σ 为一个一一对应。$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$
/sigma/
$\sigma = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3) \cdots \sigma(n))$

（Rem. σ 定义是对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的一个重排）

Ex. σ, ω 都是一个排列，$\sigma\circ\omega$ 也是一个排列

Ex. I_4 $\quad\sigma(2,4,1,3)\quad \omega=(4\ 2\ 1\ 3)$
$\sigma\circ\omega = (3\ 4\ 2\ 1)$
$\sigma\circ\sigma^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4) \Rightarrow \sigma^{-1} = (3\ 1\ 4\ 2)$ → i 在 σ 中的位置

1	2	3	4
4	2	1	3
3	4	2	1

Def（逆序，逆序数）：对于 I_n 的一个排列 σ，$\sigma = (\sigma(1)\ \sigma(2) \cdots \sigma(n))$
称 $(\sigma(i)\ \sigma(j))$ 为 σ 的一个逆序对，如果 $i<j$ 但 $\sigma(i)>\sigma(j)$
称所有逆序对的个数为 σ 的逆序数，记为 $\tau(\sigma)$
$\tau(\sigma)$ 为奇数：σ 为奇排列；$\tau(\sigma)$ 为偶数：σ 为偶排列

Def（对换）对于 I_n，称 σ 为一个对换，如果 $\exists\, i<j$, s.t. $\sigma(i)=j$，$\sigma(j)=i$，而
$\forall\, l \neq \{i,j\}$，$\sigma(l)=l$.

$\eta\circ\sigma_{i,j} = \eta(1)\ \eta(2) \cdots \underset{i\text{th}}{\eta(j)} \cdots \underset{j\text{th}}{\eta(i)} \cdots \eta(n-1)\ \eta(n)$.

$\boxed{\eta\ \text{/eta/}}$

Thm 对 I_n 的任何一个排列 η 和任何一个对换 ~~σ~~ $\sigma_{i,j}$ $(i<j)$
有 $(-1)^{\tau(\eta)} = -(-1)^{\tau(\eta\circ\sigma_{i,j})}$

Proof. Step 1. $j=i+1$
$\eta\circ\sigma_{i,j} = \eta(1)\ \eta(2) \cdots \eta(i+1)\ \eta(i)\ \eta(i+2) \cdots \eta(n)$
逆序对仅增加1或减少1.

Step 2. 对更普遍的情况
$\eta\circ\sigma_{i,j} = \eta\circ(\sigma_{j-1,j}\circ\sigma_{j-2,j-1}\cdots\circ\sigma_{i,i+1}$
$(\sigma_{i,i+1} \cdots\cdots \circ \sigma_{j-2,j-1})$
共 $2(j-i)-1$ 次复合.

i — — — j
↓ $\quad j-i$ 次
— — — j i
↓ $\quad j-i-1$ 次
j — — — i

Thm I_n 上的排列 $\sigma^{\neq(1,2,\cdots,n)}$ 存在不多于 $n-1$ 个对换 $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \cdots \sigma^{(N)}$
s.t. $\sigma = \sigma^{(1)}\circ\sigma^{(2)}\circ\cdots\sigma^{(N)}$

长度为 i 的圈 → $i-1$ 次对换

Proof $\sigma^{(1)}$：把1换到位置1，$\sigma^{(2)}$：把2换到位置2 $\quad$ ($\sigma^{(i)}$ 可为单位元 iota?)
$\sigma\circ\sigma^{(1)}\circ\sigma^{(2)}\cdots\circ\sigma^{(n-2)} = \iota\circ\sigma^{(n-1)} \Rightarrow \sigma = \iota\circ\sigma^{(n-1)}\circ\sigma^{(n-2)}\cdots\sigma^{(1)}$

$M_n(\mathbb{R})$的行列式 (determinant)

$$A \in M_n(\mathbb{R}) = [\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\det: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \longrightarrow \mathbb{R}$

det性质: (◯1) 交错性 (alternating) $\det(\alpha_1, \cdots, \underset{i\text{th}}{\alpha_i}, \cdots \underset{j\text{th}}{\alpha_j}, \cdots \alpha_n) = -\det(\alpha_1, \cdots \alpha_j, \cdots \alpha_i, \cdots \alpha_n)$

(◯2) 多列线性 (multi-linear)

$\forall i,\ \det(\alpha_1, \alpha_2, \cdots k\alpha_i, \cdots \alpha_n) = k\det(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_i, \cdots, \alpha_n)$

$\det(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}, \cdots \alpha_n) = \det(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_i^{(1)}, \cdots \alpha_n) + \det(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_i^{(2)}, \cdots \alpha_n)$

(◯3) $\det(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}) = 1$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + \cdots + a_{n1}\vec{e_n}, \cdots, a_{1n}\vec{e_1} + a_{2n}\vec{e_2} + \cdots + a_{nn}\vec{e_n}) \\
&= \det\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\vec{e_{i_1}}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2}\vec{e_{i_2}}, \cdots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}\vec{e_{i_n}}\Big) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} \det\Big(\vec{e_{i_1}}, \sum_{i_2}, \cdots, \sum_{i_n}\Big) \\
&= \cdots = \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2} \sum_{i_3=1}^{n} a_{i_3,3} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} \det(\vec{e_{i_1}}, \cdots, \vec{e_{i_n}}) \\
&= \sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_n} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n} \det(\vec{e_{i_1}}, \vec{e_{i_2}}, \cdots, \vec{e_{i_n}})
\end{aligned}$$

Lem. $\det(\cdots \alpha, \cdots, \alpha \cdots) = 0$ 即如果 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$ 中含有相同的向量

则 $\det(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = 0$. (Proof. 用◯1, $\det(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = -\det(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$).

$\Rightarrow \det(A) = \sum\limits_{\sigma \in P_{(n)}} a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \det(\vec{e_{\sigma(1)}}, \vec{e_{\sigma(2)}}, \cdots, \vec{e_{\sigma(n)}})$

所有排列

$\det(\vec{e_{\sigma(1)}}, \cdots, \vec{e_{\sigma(n)}}) = (-1)^N \det(\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}) = (-1)^N$ (N为对换次数)

其中对换次数 N 的奇偶性与σ的奇偶性相同

即 $\sigma \circ \sigma^{(1)} \circ \sigma^{(2)} \circ \cdots \sigma^{(N)} = \iota = (1\ 2\ 3\ \cdots\ n)$ 两边取逆序对.

$(-1)^N \cdot (-1)^{\tau(\sigma)} = (-1)^{\tau(\iota)} = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{i_1, \cdots, i_n} (-1)^{\tau(i_1, \cdots, i_n)} a_{i_1,1}\, a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n}\end{aligned}}$$

每一行选一个元素

Ex. $\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{n1} \\ & a_{22} & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

$$\det\begin{bmatrix} 10 & 8 & 2 & 0 & 7 \\ 18 & 3 & 16 & 9 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2019 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

11.27

Thm 交换A的两列，则行列式变号

把A的i列的k倍加到第j列（i≠j），行列式不变

A的i列乘以μ，则行列式变为 μ det A.

Pf. det = det A + det（两列相同）
= det A

Thm. $\det A = \det A^T$

Proof. $\det A = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$

固定σ. $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$ $\quad \iota = (1, 2, \cdots, n)$

设 $\sigma = \sigma^{(1)} \circ \sigma^{(2)} \circ \cdots \circ \sigma^{(N)}$（对换的复合）

那么 $\sigma^{-1} = \sigma^{(N)} \circ \cdots \sigma^{(2)} \circ \sigma^{(1)} \Rightarrow \sigma \circ \sigma^{-1} = \iota$ $\quad$ 设 $\sigma^{-1} = \eta$

$a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$

$\det A = \sum_{\eta \in P_n} (-1)^{\tau(\eta)} a_{1\eta(1)} a_{2\eta(2)} \cdots a_{n\eta(n)}$

$= \sum_{\eta \in P_n} (-1)^{\tau(\eta)} a^T_{\eta(1),1} a^T_{\eta(2),2} \cdots a^T_{\eta(n),n} = \det A^T.$

Ex. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$ $= 6$

$\begin{matrix} - & - & - & + & + & + \\ 3 & 8 & 9 & 6 & 2 & 18 \end{matrix}$

或 $= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-2) = 6.$

Ex. $\begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & b \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} (n-1)a+b & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & b-a & 0 & \\ \vdots & \vdots & b-a & \vdots \\ (n-1)a+b & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} = [(n-1)a+b] \cdot (b-a)^{n-1}$

Thm A可逆 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ （A奇异 $\Leftrightarrow \det A = 0$）

Proof. $A \xrightarrow{G-J} \mathrm{rref}(A)$ 且 $\det(\mathrm{rref}(A)) = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$.

A可逆 $\Rightarrow \mathrm{rref}(A) = I \Rightarrow \det(\mathrm{rref}(A)) = 1 \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$.

A不可逆 $\Rightarrow \mathrm{rank}(A) < n \Rightarrow \mathrm{rref}(A)$ 有 $n - \mathrm{rank}(A)$ 个零行 $\Rightarrow \det(\mathrm{rref}(A)) = 0$
$\Rightarrow \det A = 0$.

Thm $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ （*）

Pf. Case 1: A不可逆 ⇒ AB不可逆 ⇒ $\det(AB) = 0$ （*）成立.

Case 2: A可逆 ⇒ $\mathrm{rref}(A) = I$, ~~$A E_1 \cdots E_N = I$~~

$E_N \cdots E_1 A = I \Rightarrow A = E_1^{-1} \cdots E_{N-1}^{-1} E_N^{-1}$

$AB = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_N^{-1} B.$

$\det(AB) = (-1)^k \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdots \frac{1}{\lambda_M} \det B = \det A \det B$

$(\because (-1)^k \lambda_1 \cdots \lambda_M \det A = 1.)$

将A看作初等变换作用于B.

Ex. A可逆 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

$\det(A_1 A_2 \cdots A_N) = |A_1||A_2| \cdots |A_N|$

Q正交 $(Q^TQ = I)$: $|Q| = ?$ ⇒ ~~det~~ $|Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2 = 1 \Rightarrow |Q| = \pm 1.$

行列式的展开公式

降阶.

Def (余子阵. 余子式. 代数余子式) $A=(a_{ij})\in M_n\ (n\geq 2)$.

(i,j). a_{ij} 的余子阵是 A 中划去 i 行 j 列所剩余的 $n-1$ 阶子阵 (M_{ij})

称 $\det M_{ij}$ 为 a_{ij} 的余子式

称 $(-1)^{i+j}\det M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式 (cofactor) (记为 C_{ij})

Ex. $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}$ $\det M_{11}=1$ $C_{11}=1$ $\det M_{12}=4$ $C_{12}=-4$ $\det M_{13}=2$ $C_{13}=2$. $\sum a_{1i}C_{1i}=1\times1+2\times(-4)+3\times2=-1$

$\det A=[\cdots]=-1$.

Thm. (行列式的 Laplace 展开公式) 拉普拉斯展开

$A\in M_n$. 任取 $i\in I_n$

则 $|A|=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{ij}$

$=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}C_{ij}$

Proof. (*) $\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det M_{ij}$ (M_{ij} 是 (i,j) 余子式).

① $i=1$. 来化 $\begin{vmatrix}a_{11}&0\cdots0\\a_{21}&\\\vdots&B\\a_{n1}&\end{vmatrix}=a_{11}\det B$.

$LHS=\sum_{j_1\cdots j_n\in P_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

$=\sum_{j_2\cdots j_n\in P_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

$=a_{11}\cdot\det B=a_{11}\det M_{11}$

$\begin{vmatrix}0\cdots0&a_{1j}&0\cdots0\\ &a_{2j}&\\ &\vdots&\\ &a_{nj}&\end{vmatrix}$ 换列 $\to=a_{1j}\det M_{1j}\cdot(-1)^{j-1}$

由行列式的线性性, $\det A=\det\begin{vmatrix}a_{11}&0\cdots0\\ &\end{vmatrix}+\det\begin{vmatrix}0&a_{12}&\cdots0\\ &\end{vmatrix}+\cdots+\det\begin{vmatrix}0&\cdots&a_{1n}\\ &\end{vmatrix}$

$\det A=a_{11}(-1)^{1+1}\det M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}\det M_{12}+\cdots+a_{1n}(-1)^{1+n}\det M_{1n}$.

② $i\neq1$. 调换 i 和 $i-1$ 行, $i-1$ 和 $i-2$ 行 …… 共换 $i-1$ 次

$\det A=a_{i1}(-1)^{i+1}\det M_{i1}+\cdots+a_{in}(-1)^{i+n}\det M_{in}$.

Ex. V 上 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. $\vec{\alpha}$ $\vec{\beta}$ 在 $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ 下坐标 (x,y,z).

$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$

Cor. $\sum_{l=1}^{n} a_{il} C_{jl} = \delta_{ij} \det A$

pf. $i=j$ 为 Laplace 展开. $i \neq j$. 考察 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} / / / / / \\ a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in} \\ / / / / / / \end{bmatrix} \to j\text{th}$

$$\det \tilde{A} \xlongequal{\text{用第}j\text{行展开}} \sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{jl} \tilde{C}_{jl} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} C_{jl} = 0 \ (i,j \text{行重复}).$$

Def (伴随矩阵) $A \in M_n$. $A^* = (a^*_{ij})$. $a^*_{ij} = C_{ji}$ 是 a_{ji} 的 cofactor.

A^* 是由 A 的 cofactor 组成的矩阵的转置.

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il} C_{jl} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} a^*_{lj} = (AA^*)_{ij} = \delta_{ij} \det A.$$

$$\Rightarrow \quad AA^* = \det A \cdot I_n$$

Thm. $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$.

e.g. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Ex. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} \\ / / / & & / / / \\ \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & -n & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 0 & \cdots & & -n & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & -n & & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n+1} (-n)^{n-2} (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}$$

$$= \frac{n^{n-1}(n+1)}{2} \cdot (-1)^{\cdots}$$

12.2

Ex. $\det\begin{bmatrix} A & \\ & B\end{bmatrix} = \det A \det B$ $\quad \det\begin{bmatrix} A & \\ C & B\end{bmatrix} = \det A \det B$

Proof $\det\begin{bmatrix} A & \\ & I_n\end{bmatrix} = \det A \Rightarrow \begin{bmatrix} A & \\ & B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \\ & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & \\ & B\end{bmatrix}$

Ex. $\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B\end{bmatrix} = \det A \det D-CA^{-1}B$.

Cramer's rule 克莱姆法则

Thm. A为方阵(n阶). $\vec{b}\in F^n$. 则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解 (若A可逆)

$\vec{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\quad x_j = \frac{D_j}{|A|}$

其中 $D_j = \det\begin{bmatrix} \cdots & \vec{b} & \cdots \end{bmatrix}$ ($\vec{b}$ 在 j列, 其余为 A的列) 且其为唯一解

Cor. 若 $A\vec{x}=\vec{0}$ 有解, 则 $\det A = 0$. (反证法).

Proof of Thm.

$$D_j = \begin{vmatrix} \vdots & b_1 & \vdots \\ & b_2 & \\ & \vdots & \\ & b_n & \end{vmatrix} = \sum_{l=1}^{n} b_l C_{lj}$$

(j列)

$$(A\vec{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{D_j}{|A|} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{l=1}^{n} b_l C_{lj} \frac{1}{|A|}$$

(验证 $A\vec{x}=\vec{b}$).

$$= \frac{1}{|A|}\sum_{l=1}^{n} b_l \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{lj} = \frac{1}{|A|}\sum_{l=1}^{n} b_l \sum_{j=1}^{n} |A|\,\delta_{il}$$

$$\cancel{= \frac{1}{|A|}\sum_{l=1}^{n} b_l |A| = \sum_{l=1}^{n} b_l} = \frac{1}{|A|}\cdot b_i |A| = b_i$$

Ex. $\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & b & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & b & & & a & \\ b & & & & & a \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\frac{a}{b} I \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & & & & b \\ & & & & b & \\ & & & b & & \\ & & b & a & & \\ & b & & & a & \\ b & & & & & a \end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} & & 0 & b-\frac{a^2}{b} \\ & & b & a \\ & b & & & a \\ b & & & & & a \end{vmatrix} = (b^2-a^2)^3\cdot(-1)^3 = (a^2-b^2)^3.$$

Strang Chap 6. Chap 7. 特征值、特征向量、对角化（方阵）

SVD 奇异值分解（一般矩阵） 看书！

Chap 8 线性变换

$A \in M(\mathbb{R})$ $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^n$上的线性变换.

$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$

$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ $\lambda\in\mathbb{R}, \vec{x}\in\mathbb{R}^n$ 即变换后仍在原方向.

$\boxed{\vec{x}\neq 0!}$

Def. 称满足 $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ ($\lambda\in\mathbb{R}$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$且$\vec{x}\neq\vec{0}$) 的λ和$\vec{x}$为A的一对特征对.
其中λ为特征值(eigen-value), $\vec{x}$为λ的特征向量(eigen-vector)

Rem. 若存在n个线性无关的特征向量$\vec{x_1},\vec{x_2},\dots,\vec{x_n}$无关, 即

$A\vec{x_i}=\lambda_i\vec{x_i}$ $i=1,2,\dots,n$.

则$\vec{x_1},\vec{x_2},\dots,\vec{x_n}$构成$\mathbb{R}^n$的一组基. 故$\forall x = k_1\vec{x_1}+k_2\vec{x_2}+\cdots+k_n\vec{x_n}$

$A\vec{x} = k_1A\vec{x_1}+\cdots+k_nA\vec{x_n} = k_1\lambda_1\vec{x_1}+\cdots+k_n\lambda_n\vec{x_n}$.

那么~~故~~ $A\begin{bmatrix}\vec{x_1}&\cdots&\vec{x_n}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\vec{x_1}&\cdots&\lambda_n\vec{x_n}\end{bmatrix} = X\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}}_{\Lambda} = X\underbrace{\Lambda}_{\text{对角阵}}$

$\Rightarrow X^{-1}AX=\Lambda$ 对角阵.

$A=X\Lambda X^{-1}$ A的对角化. $\Rightarrow$ 简化A^n运算

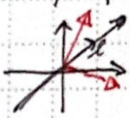
$A^n = X\begin{bmatrix}\lambda_1^n&&&\\&\lambda_2^n&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^n\end{bmatrix}X^{-1}$

$A^nX = X\Lambda^n \Rightarrow A^n$特征向量保持.

Ex. $\mathbb{R}^3$ P为投影矩阵 (W平面).

$\lambda=1$. $\vec{x}\in W$ ($\vec{x}\neq\vec{0}$) ; $\lambda=0$. $\vec{x}\in \mathrm{span}\{\vec{n}\}$ 法向量.

Ex. $\mathbb{R}^2$ P为投影到W的矩阵



R反射矩阵: $R\vec{x}+\vec{x}=2P\vec{x}$.

$R=(2P-I)$

R的特征值/向量: $\lambda=1$. $\vec{x}\in W$ ($\vec{x}\neq\vec{0}$)

$\lambda=-1$ $\vec{x}\perp W$. ($\vec{x}\neq\vec{0}$)

<u>特征值与特征向量求法</u> $A\in M_n(\mathbb{R})$

求λ和$\vec{x}$: $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ ($\vec{x}\neq\vec{0}$) $\Leftrightarrow$ $(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{0}$.

必要条件: $A-\lambda I$不可逆

$\underbrace{\det(\lambda I-A)}_{f_A(\lambda)}=0$. $\lambda\in\mathbb{R}$

Claim. $f_A(\lambda)$为一个λ的多项式.

Proof $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|$

$=\sum_{\sigma\in P}(-1)^{\tau(\sigma)}(\lambda\delta_{\sigma(1),1}-a_{\sigma(1),1})(\lambda\delta_{\sigma(2),2}-a_{\sigma(2),2})\cdots(\lambda\delta_{\sigma(n),n}-a_{\sigma(n),n})$

$=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_n\lambda^n$

$a_n=1$. $a_0=(-1)^n\det A$. $a_{n-1}=-\mathrm{tr}A$. $\cdots$ a_i可求.

特征值 $\subseteq \{f_A(\lambda)=0\}$.

<u>Thm</u> (代数学基本定理). $f(\lambda)$是一个复系数的n次多项式.

$$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_n\lambda^n.\quad a_i\in\mathbb{C}$$

则 $f(\lambda)$在$\mathbb{C}$上有n个根(包含重数) $(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$, 代数重数 k_i. $k_1+\cdots+k_s=n$.

$$f(\lambda)=a_n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n).\qquad \text{(不作证明)}.$$

$$f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n).$$

$\Rightarrow a_{n-1}=-\sum_{i=1}^n\lambda_i$, 又 $a_{n-1}=-\mathrm{tr}A.\Rightarrow \mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^n\lambda_i$

$\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$?

$(\because f_A(0)=\det(-A)=(-1)^n\det A$
$=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)$

<u>12.4</u>

求特征值/向量: (1) 求$f_A(\lambda)=0$的$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$.

(2) 求 $(\lambda I-A)\vec{x}=\vec{0}$ 的 $\vec{x}\neq\vec{0}$.

即求 $Null(\lambda I-A)$.

<u>Rem.</u> 不一定能找到与代数重数相同多的<u>线性无关</u>的特征向量.

<u>Ex.</u> $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ $\quad\lambda_1=1,\lambda_2=1+\sqrt{2},\lambda_3=1-\sqrt{2}$

Ex. $A=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ $(\sin\theta\neq0)$

$$f_A(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda-\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\lambda-\cos\theta\end{bmatrix}=(\lambda-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=0.$$

$$\lambda_1=\cos\theta+i\sin\theta,\ \lambda_2=\cos\theta-i\sin\theta.\ (\sin\theta\neq0)$$

<u>Rem.</u> 如果 $\mathbb{F}\neq\mathbb{C}$. 即使计算重数也不一定有n个特征值.

若 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. ~~$f_A(\lambda)$~~ $\lambda_1I-A=\begin{bmatrix}i\sin\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&i\sin\theta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}i&1\\-1&i\end{bmatrix}$

Def. 如果$\lambda\in\mathbb{F}$是$A\in M_n(\mathbb{F})$的特征值, 则我们称$Null(\lambda I-A)$为<u>属于λ的特征子空间</u>(characteristic space) (它是$\mathbb{F}^n$的子空间)
称 $\dim(Null(\lambda I-A))$为<u>λ的几何重数</u>(geometric multiplicity).

§ <u>方阵的相似对角化</u>

如果$A\in M_n(\mathbb{F})$且能找到n个线性无关的特征向量(记为$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$)
$(A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n)$ 则$\exists\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n$(计重数) s.t. $A\beta_i=\lambda_i\beta_i$ $i=1,2,\cdots,n$.

$$A[\beta_1\cdots\beta_n]=[\lambda_1\beta_1\cdots\lambda_n\beta_n]=\underbrace{[\beta_1\cdots\beta_n]}_{X\text{(可逆)}}\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\ddots\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

$AX = X\Lambda \Rightarrow A = X\Lambda X^{-1}$, $X^{-1}AX=\Lambda$ 称这n个线性无关的向量把A对角化.

Def (相似矩阵). $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, 称A相似于B, 如果 $\exists X \in M_n(\mathbb{F})$, X可逆 s.t.
$\underline{X^{-1}AX = B}$. 特别地, A可对角化 $\Leftrightarrow$ A相似于一对角矩阵.

Rem. "相似"是一种等价关系, 满足自反性, 对称性, 传递性.

在F上A可以对角化 $\Leftrightarrow$ A相似于对角阵 $\Leftrightarrow$ 在F上A有n个线性无关特征向量
(1) 求特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 互不相同.
(2) 对每个 λ_i, 求 $Null(\lambda_i I - A)$ 的一组基
(3) 把这些基拼起来 如果够n个 则可以对角化
若不够n个, 则A在F上不可对角化.

Application: $\begin{cases} D_{n+1} = aD_n + bD_{n-1} \\ 已知 D_1, D_2 \end{cases}$, 求 D_n 通项公式. ($D_i \in \mathbb{C}$)

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\vec{x_n} = \begin{bmatrix} D_{n+1} \\ D_n \end{bmatrix}$ $\vec{x_n} = \begin{bmatrix} aD_n + bD_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix} = A\vec{x_n} = A^2\vec{x_{n-1}} = \cdots = A^{n-1}\vec{x_1}$

若 $A = X\begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}X^{-1}$, 则 $\vec{x_n} = X\begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & \\ & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix}(X^{-1}\vec{x_1})$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} \lambda_1 + \lambda_2 = a, \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A = -b \end{matrix}$? 故 $A = \begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & -\lambda_1\lambda_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

λ_1, λ_2 为A的特征值.

$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} -\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\vec{x_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 I - A = \quad$ 、、、 $\quad$ 、、、 $\vec{x_2} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$

若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. $X = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 即可将A对角化.

$A^{n-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & \\ & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix}(X^{-1}\vec{x_1}) \to$ 是 $\vec{x_1}$ 在基 $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 下的坐标.

即 $X^{-1}\vec{x_1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

s.t. $\vec{x_1} = c_1\vec{x_1} + c_2\vec{x_2}$

$D_n = [1 \ 1]\begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & \\ & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$= [\lambda_1^{n-1} \ \ \lambda_2^{n-1}]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1}$

Lem. $A \in M_n(\mathbb{C})$ $k \in \mathbb{C}$ 是A的特征值, 几何重数为s, 则它的代数重数 $\geq s$.

Proof. 根据假设知, $\exists \beta_1 \cdots \beta_s$ 线性无关 且 $A\beta_i = k\beta_i$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$.
若 $s = n$ ✓.
若 $s < n$, 可以把 $\beta_1 \cdots \beta_s$ 补成 $\mathbb{C}^n$ 的一组基.

$AB = A[\beta_1 \cdots \beta_s \ \beta_{s+1} \cdots \beta_n] = [k\beta_1 \cdots k\beta_s \ A\beta_{s+1} \cdots A\beta_n]$

$= BC = [\beta_1 \cdots \beta_n]C$. $\quad C = \begin{bmatrix} k & & & \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kI_s & C_1 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$

$(\lambda I-A)B=\lambda IB-AB=\lambda B-BC=B(\lambda I-C)$

$$\begin{bmatrix}(\lambda-k)I_s & -C_1\\ 0 & \lambda I_{n-s}-C_2\end{bmatrix}$$

两边取行列式 $f_A(\lambda)|B|=|B|\,|(\lambda-k)I_s|\,|\lambda I_{n-s}-C_2|$

$f_A(\lambda)=(\lambda-k)^s f_{C_2}(\lambda)$ 故 k 至少是 $f_A(\lambda)$ 的 s 重根

$\boxed{\text{Lem.}}$ 若 $\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_s$ 为 A 的互不相同特征值，而 $\beta_1\cdots\beta_s$ 分别属于 $\lambda_1\cdots\lambda_s$ 的特征向量，则它们线性无关。

Proof. 归纳法. $s=1$ ✓ $s=2$ ✓

假设 $s=m-1$ 成立，来证 $s=m$ 成立. $\lambda_1\cdots\lambda_{m-1},\lambda_m$ 互不相同.

$\Rightarrow \beta_1\cdots\beta_{m-1}$ 线性无关.

反证法. 若 $\beta_1\cdots\beta_m$ 相关，则 $\beta_m=\sum_{i=1}^{m-1}k_i\beta_i$ (1)

$A\beta_m=\sum_{i=1}^{m-1}k_i(A\beta_i)$

$\Rightarrow \lambda_m\beta_m=\sum_{i=1}^{m-1}k_i\lambda_i\beta_i$ (2)

$\lambda_m(1)-(2)$: $\vec{0}=\sum_{i=1}^{m-1}k_i(\lambda_m-\lambda_i)\beta_i$

$\because \lambda_m-\lambda_i$ 不为 0 ~~⋯⋯~~, $\beta_1\cdots\beta_{m-1}$ 线性无关

$\therefore k_1=k_2=\cdots=k_{m-1}=0 \Rightarrow \beta_m=\vec{0}$ 与 β_m 为特征向量矛盾.

Thm. $A\in M_n(F)$ 有 n 个互不相同的特征值，则 A 可以对角化.

$\boxed{\text{Lem.}}$ $\lambda_1\cdots\lambda_s$ 为 A 的互不相同的特征值，记 $W_1,W_2\cdots W_s$ 为属于 $\lambda_1\cdots\lambda_s$ 的特征子空间，则 $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 为直和.

Proof 证明 θ 的分解方法唯一.

$\theta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\quad \alpha_i\in W_i$

则 $\alpha_i=0$ (Pf. 假设 $\alpha_1\cdots\alpha_t\neq\theta$. 反证法.

α_i 为 λ_i 的特征向量 $\alpha_1\cdots\alpha_t$ 线性无关

故此假设矛盾.)

$\boxed{\text{Thm.}}$ $A\in M_n(\mathbb{C})$, A 可对角化当且仅当对于每个 $\lambda_1\cdots\lambda_s$ (不重) $\in\mathbb{C}$.

λ_i 的几何重数 = λ_i 的代数重数

Pf.

若为 $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{C}$. 则要求每个 λ_i 都 $\in\mathbb{F}$.

① $\Rightarrow$ $A[\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_n]=[\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \ \lambda_n\end{bmatrix}$ λ_1 有 g_1 行，λ_i 有 g_i 行. g_i 为几何重数.

12.9

eigen-value / vector $(\lambda, \vec{x})$ $\qquad A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \ (\vec{x} \neq \vec{0})$

eigen-polynomical $\qquad f_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{j=1}^{s} (\lambda - \lambda_j)^{n_j} = (\lambda-\lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda-\lambda_j)^{n_j}$

n_j：代表重数

eigen-space for λ_i: $Null(\lambda_i I - A)$

$g_i := \dim(Null(\lambda_i I - A))$：几何重数

A可对角化 $\Leftrightarrow$ $\exists X$ 可逆 s.t. $X^{-1}AX = \Lambda$，Λ 对角

$\Leftrightarrow n_i = g_i \ \forall i = 1, 2, \cdots, s$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ n个线性无关的特征向量

Ex Markov Chain

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_k = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_{k+1} = P\vec{u}_k$$

$0 \le p_{ij} \le 1, \ \sum_{l=1}^{n} p_{lj} = 1.$

$P\vec{u} = \vec{u}$：P的稳态分布

即以1为eigen-value的eigen-vector

$$P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \qquad P^T \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(I - P^T) = 0.$$

每行相加均为1

取转置，$\det(I - P) = 0$，

1是P的特征值. (?)

性质：若Markov Chain为连通图（不可约），则属于1的eigen-vector仅有1个.

若P可对角化 $P = X\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s \end{bmatrix}X^{-1}$，$|\lambda_1|, \cdots |\lambda_s| < 1$.

则 $\lim_{k\to\infty} P^k = X\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}X^{-1}$ $\qquad X = [\vec{w}_1 \cdots \vec{w}_n]$

$\lim_{k\to\infty} P^k u_0 = ?$

$\vec{w}_1$：属于1的eigen-vector

即P的稳态分布

最终一定趋于稳态！

Ex $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A^2 + 2A - 3I = \vec{0}$ 求A特征值.

$(A + 3I)(A - I) = \vec{0}$.

(A的eigen-value集合)

若 $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ s.t. $(A - I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow 1 \in \sigma(A)$

若不存在 $\vec{x} \neq \vec{0}$ s.t. 上式成立，$1 \notin \sigma(A)$. $(A - I)\vec{e} \neq \vec{0}$

$(A + 3I)\vec{y} = 0$. 其中 $\vec{y} = (A - I)\vec{e} \neq \vec{0} \Rightarrow 3 \in \sigma(A)$

故 $\sigma(A) \subseteq \{1, 3\}$

~~Ex~~ Ex.（接上）若1, 3为eigen-value, $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_3$

Ex. Cayley-Hamilton Theorem $A\in M_n(\mathbb{C})$ (且A可对角化)

$f_A(A)=O$ (O矩阵) 凯莱-哈密尔顿定理 事实上不需此条件 拓展证明?

Proof $f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$

$f_A(A)=(A-\lambda_1 I)^{n_1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{n_s}$

只需证对 $\forall\vec{x}\in\mathbb{C}^n$, $f_A(A)\vec{x}=\vec{0}$ 即可证 $f_A(A)=O$

$\vec{x_1},\cdots\vec{x_n}$ 特征向量 线性无关 只需证 $f_A(A)\vec{x_i}=\vec{0}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ ✓

Ex. A在$\mathbb{C}$上不可对角化

$$AX=X\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & 1 & \\ & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & \lambda_1 \\ & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & \ddots\end{bmatrix}$$

$$n_1\left\{\begin{bmatrix}\overbrace{\lambda_1 \ \ \ddots \ \ \lambda_1}^{g_1} & \\ & \begin{matrix}\lambda_1 & 1 \\ & \ddots \\ & & \lambda_1\end{matrix}\end{bmatrix}\right.$$

λ_1上方有1 n_1-g_1个

$A\vec{x_1}=\lambda_1\vec{x_1}$

$\cdots\cdots$

$A\vec{x_{g_1}}=\lambda_1\vec{x_{g_1}}$ Jordan标准型

$A\vec{x_{g_1+1}}=\vec{x_{g_1}}+\lambda_1\vec{x_{g_1+1}}$

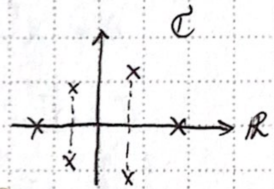
$\cdots\cdots$

实对称矩阵的对角化

$A\in M_n(\mathbb{F})$ $\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$

$A\in M_n(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 内积空间 $\langle x,y\rangle=\vec{x}^T\vec{y}$

~~Ex.~~ $A\in M_n(\mathbb{R})\Longrightarrow \sigma(A)=\{A在\mathbb{C}上的特征值\}$

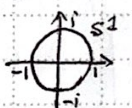


在复平面上关于实轴对称

即 $a+bi\in\sigma(A)\Rightarrow a-bi\in\sigma(A)$

Ex. 正交矩阵 $Q\in M_n(\mathbb{R})$ $Q^TQ=I_n$

(1) $\sigma(Q)\in S^1$



复数域上的内积 范数 $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ 不相等!

$\langle x,y\rangle=\overline{\vec{x}}^T\vec{y}$. $\|\vec{x}\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$

$\langle Q\vec{x},Q\vec{x}\rangle=\overline{(Q\vec{x})}^T(Q\vec{x})=\overline{\vec{x}}^T\vec{x}=\langle\vec{x},\vec{x}\rangle$

$\because \|Q\vec{x}\|=|\lambda|\|\vec{x}\|$ $\therefore|\lambda|=1$.

(2) $\det Q=\{1,-1\}$ $(\because(\det Q)^2=1)$

设 $|Q|=-1\Rightarrow -1\in\sigma(A)$

$-1=\det Q=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_s$ 复数一对/1 均乘积大于0. □

Thm (spectral theorem for $Sym^{n\times n}=\{A: A\in M_n(\mathbb{R}), A=A^T\}$)

对于任意的 $A\in Sym^{n\times n}$, 则 $\exists Q\in M_n(\mathbb{R})$, $Q^TQ=I_n$

s.t. $AQ=Q\Lambda$ Λ是一个实对角矩阵 (Q正交)

i.e. 实对称矩阵的特征值均为实数, 且可找到一组ONB(标准正交基), 使得基向量均为特征向量.

Lem A实对称, 则 $\sigma(A)\in\mathbb{R}$.

Pf. 证若 $\lambda\in\sigma(A)$, 则 $\lambda=\overline{\lambda}$.

本页续：spectral theorem of Sym.

对 λ, $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$, s.t. $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. $(\vec{x} \in \mathbb{C}^n)$

则 $A\bar{\vec{x}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{x}}$ 且 $\bar{\vec{x}}^T A \vec{x} = \lambda \bar{\vec{x}}^T \vec{x} = \boxed{\lambda \|\vec{x}\|^2}$

(取共轭)

取共轭: $\vec{x}^T A \bar{\vec{x}} = \boxed{\bar{\lambda}\|\vec{x}\|^2}$

$$\vec{x}^T A \bar{\vec{x}} = (\vec{x}^T A \bar{\vec{x}})^T = \bar{\vec{x}}^T A \vec{x}$$

数的转置

$\Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda})\|\vec{x}\|^2 = 0$.

$\vec{x} \neq 0$ $\therefore \lambda = \bar{\lambda}$.

Proof of Thm. 归纳法. 对阶数归纳

① $n=1$ ✓ $Q = [1]$

② 假设 $n=m-1$ 成立. 考察 $n=m$ 时情况

任给 $A \in M_m(\mathbb{R})$, $A = A^T$

已知A的特征值 $\lambda_1 \cdots \lambda_s$ (不计重数) 均为实数.

对于 $\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda I - A)\vec{\alpha} = \vec{0}$. 不妨设 $\|\vec{\alpha}\| = 1$.

则可以把 $\vec{\alpha}_1$ 补成一组 ONB. $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots \vec{\alpha}_n$

记 $X = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & \cdots & \vec{\alpha}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ $AX = X\begin{bmatrix} \lambda_1 & c_2 \cdots c_n \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{bmatrix}$ $c_2 \cdots c_n \in \mathbb{R}$, $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$.

$\because X$ 正交 $\therefore X^T = X^{-1}$

~~A~~ $X^T A X = \begin{bmatrix} \lambda_1 & c_2 \cdots c_n \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{bmatrix}$ 欲对A归纳.

$(X^T A X)^T = X^T A X$. $X^T A X$ 对称!

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 \\ c_2 & \\ \vdots & A_1^T \\ c_n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & c_2 \cdots c_n \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0 \\ A_1 = A_1^T. \end{array}$$

$X^T A X = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{bmatrix}$, $A_1 \in Sym^{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$

对于 A_1. $\exists Q_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ $Q_1^T Q_1 = I_{n-1}$, s.t. $Q_1^T A_1 Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ 实对角.

$Q = X\begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & Q_1 \\ 0 & \end{bmatrix}$ 欲证Q正交, $Q^T A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ ✓.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & Q_1^T \\ 0 & \end{bmatrix} \underset{X^T X}{I} \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & Q_1 \\ 0 & \end{bmatrix}}\quad \left(= \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & Q_1^T \\ 0 & \end{bmatrix} \underset{X^{-1}AX}{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & Q_1 \\ 0 & \end{bmatrix}\right)$$

Lem 求Q, s.t. $Q^T A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$. $(A \in \mathbb{R}^n, Sym)$?不确定

方法: (1) $f_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdots \lambda_s$ (不重)
$n_1 \cdots n_s$

(2) 求 λ_i 的 eigen-space. 一定可找到 n_i 个无关向量.

(3) 正交化.

☆Lem. $A\in Sym^{n\times n}(\mathbb{R})$ 若λ_1,λ_2是A的不同特征值 $\Rightarrow E_{\lambda_1}\perp E_{\lambda_2}$

Proof. $(\lambda_1 I - A)\vec{x_1}=\vec{0}, \forall \vec{x_1}\neq\vec{0}$ (E_{λ_i}是λ_i- eigen-space)

$(\lambda_2 I - A)\vec{x_2}=\vec{0}, \forall \vec{x_2}\neq\vec{0}$

相同 $\left.\begin{array}{l}\vec{x_2}^T A\vec{x_1}=\lambda_1\langle\vec{x_2},\vec{x_1}\rangle\\ \vec{x_1}^T A\vec{x_2}=\lambda_2\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle\end{array}\right\}\Rightarrow 0=(\lambda_1-\lambda_2)\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle\Rightarrow\langle\vec{x_1},\vec{x_2}\rangle=0$

实对称才有此性质!

若$A\in Sym(\mathbb{C})$ 即 $A^{+}=A$

则可找到Q s.t. $Q^{+}Q=I_n$ (酉矩阵 unitary)

且 $A=Q\Lambda Q^{+}$ (?)

12.11

$A=\alpha\beta^T$

$A\vec{x}=\alpha\beta^T x=\alpha\cdot\langle\beta,x\rangle=\begin{cases}0 & \vec{x}\perp\vec{\beta}\\ \langle\beta,x\rangle\alpha & \vec{x}\not\perp\vec{\beta}\end{cases}$

$\Rightarrow \forall\vec{x}\in(\mathrm{span}\{\beta\})^{\perp}\quad A\vec{x}=0\vec{x}$ dim: $n-1$. e.g. $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[0\ 1]$

Case 1 $\alpha\perp\beta$. 没有其他特征值 不可对角化

Case 2 $\langle\alpha,\beta\rangle\neq0$. α是以$\langle\alpha,\beta\rangle$为特征值的特征向量 可对角化

A对角化 $A[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n]=[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$

看法1: $\begin{cases}A=X\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}X^{-1}\\ A\vec{x}=X\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}(X^{-1}\vec{x})\\ \quad=\sum c_i\lambda_i\alpha_i\end{cases}$

$(X^{-1}\vec{x})$ 是$\vec{x}$在$\alpha_1\cdots\alpha_n$下的坐标 $\left(\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=X^{-1}\vec{x}\right)$

看法2: $A=X\cdot\Lambda\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}-\eta_1-\\\vdots\\-\eta_n-\end{bmatrix}}_{X^{-1}}=\sum\lambda_i[\alpha_i][-\eta_i-]$

η_i是A的左特征向量. $X^{-1}A=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}X^{-1}$

$\begin{bmatrix}-\eta_1-\\\vdots\\-\eta_n-\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}-\lambda_1\eta_1-\\\vdots\\-\lambda_n\eta_n-\end{bmatrix}$

Strang P275

Thm. 假设A.B均可对角化, 则$AB=BA$ $\Leftrightarrow$ 存在P s.t. $P^{-1}AP$. $P^{-1}BP$ 为对角矩阵.

$\Leftrightarrow$ ∃ n个线性无关的向量,它们同时是A和B的特征向量.

Proof. (习题课8) 仅假设A有n个互不相同的eigen-value

① $\Leftarrow$ $P^{-1}AP=\Lambda_1,\ P^{-1}BP=\Lambda_2$

$A=P\Lambda_1P^{-1}, B=P\Lambda_2P^{-1}$

$AB=P\Lambda_1\Lambda_2P^{-1},\ BA=P\Lambda_2\Lambda_1P^{-1}$

对角阵可交换. V.

② $\Rightarrow$ 设P将A对角化 P可逆 $P^{-1}AP=\Lambda_1$ 对角.

证明: $P^{-1}BP$ 也是对角

$$\Lambda_1 P^{-1}BP=(P^{-1}AP)P^{-1}BP=P^{-1}ABP=P^{-1}BAP=(P^{-1}BP)(P^{-1}AP)=(P^{-1}BP)\Lambda_1$$

$\Rightarrow P^{-1}BP$ 与 Λ_1 可交换. Claim. $P^{-1}BP$ 为对角阵.

Ex. 若Λ是对角阵, 且 $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$ $i\neq j$ 有 $\lambda_i\neq\lambda_j$.

则可与Λ交换的只能是对角阵.

$$\Lambda C=C\Lambda$$

$$\lambda_i C_{ij}=C_{ij}\lambda_j \Rightarrow \begin{cases} i\neq j \text{时} & C_{ij}=0 \\ i=j \text{时} & \text{无要求} \end{cases} \quad \square$$

二次型

Motivation 1. 二次曲面 $x^2+y^2+2xy+3yz=1$

Motivation 2. 奇点分类

$$\vec{y}^T A\vec{y}=\sum_{i=1}^n y_i(A\vec{y})_i=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n y_i a_{ij} y_j$$

a_{ii} 是 y_i^2 的系数

A对称 $\Leftarrow$ $a_{ij}=a_{ji}=\frac{1}{2}\cdot(y_iy_j$的系数$)$

$A\in Sym(\mathbb{R})$ $\quad \vec{x}^TA\vec{x}$ 实二次型.

Def. (正定二次型 / 正定矩阵) 对于实对称矩阵A, 我们称A是正定的, 也称二次型 $Q(\vec{x}):=\vec{x}^TA\vec{x}$ 是正定的, 若 $\forall \vec{x}\neq\vec{0}$, 总有 (positive definite)

$$Q(\vec{x})=\vec{x}^TA\vec{x}>0.$$

Thm $A\in Sym^{n\times n}(\mathbb{R})$, 则下列命题等价.

(1) A正定

(2) A的所有特征值均为正数

(3) $\exists C\in M_n(\mathbb{R})$, C可逆. s.t. $A=C^TC$

(4) $\exists B\in M_{p,n}(\mathbb{R})$, B列满秩 s.t. $A=B^TB$

Proof. (1)$\Rightarrow$(2) A实对称 $\exists Q\in M_n(\mathbb{R})$, $Q^TQ=I$ s.t. $Q=[q_1\cdots q_n]$

$AQ=Q\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$ $\quad Aq_j=\lambda_jq_j$

$\because A$正定 $\therefore q_j^TAq_j=\lambda_j\cdot q_j^Tq_j=\lambda_j\|q_j\|^2>0\Rightarrow\lambda_j>0$.

(2)$\Rightarrow$(3) $A=Q\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}Q^T$

已知 $\lambda_i>0$, $\sqrt{\lambda_i}>0$. $\quad A=\underbrace{Q\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}}_{C^T}\underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}Q^T}_{C}$

$=C^TC$ 又$\because Q$可逆, 对角可逆 $\Rightarrow C$可逆.

(3)$\Rightarrow$(4) 令$B=C$. (其中$p=n$) 得证.

(4)$\Rightarrow$(1) 若$\vec{x}\neq\vec{0}$. $\vec{x}^TA\vec{x}=\vec{x}^T(B^TB)\vec{x}=\|B\vec{x}\|^2$

$\because B$列满秩 $\therefore B\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}$ 故A正定.

Cor. A正定 $\Rightarrow \det A>0$. $(\because \det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)$

Def. (顺序主子式) $A\in M_n(F)$. A的~是A的前m行前m列所组成的子阵的行列式.
记为 $|A_m|$. $(m=1,2,\cdots,n)$

Thm. A实对称, 则 A正定 $\Leftrightarrow |A_m|>0$, $m=1,2,\cdots,n$

Proof. $\Rightarrow$ A正定, 那么 A_m正定.
$(\because \vec{y}^T A_m \vec{y} = [\vec{y}^T\ \vec{0}^T] A \begin{bmatrix}\vec{y}\\ \vec{0}\end{bmatrix}>0)$
$\because A_m$正定 $\therefore |A_m|>0$.

$\Leftarrow$ 归纳法证明, 对A的阶归纳.
① A 1阶: ✓. [x] 特征值为x ✓.
② $n=k-1$时成立. 考察 $n=k$时.

$$A=\begin{bmatrix} A_{k-1} & \beta \\ \beta^T & a_{kk}\end{bmatrix}$$ 其中 $A_{k-1}\in M_{k-1}(\mathbb{R})$ 对称, $\beta\in\mathbb{R}^{k-1}$, $a_{kk}\in\mathbb{R}$.

obs 1. A_{k-1}的所有顺序主子式 >0.
归纳假设: A_{k-1}正定.
$\exists C\in M_{k-1}(\mathbb{R})$, C可逆 s.t. $C^TA_{k-1}C=I$

$$\begin{bmatrix} C^T & \\ & 1\end{bmatrix} A \begin{bmatrix} C & \\ & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} C^T & \\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{k-1} & \beta \\ \beta^T & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & \\ & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} C^TA_{k-1} & C^T\beta \\ \beta^T & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & \\ & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & C^T\beta \\ \beta^TC & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$(\because A_{k-1}=\tilde{C}^T I \tilde{C}$
令 $C=\tilde{C}^{-1}$.
$(\tilde{C}^T)^{-1}A_{k-1}\tilde{C}^{-1}=I$.
$C^TA_{k-1}C=I)$.

$$\begin{bmatrix} I_{k-1} & \\ -\beta^TC & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & C^T\beta \\ \beta^TC & a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & C^T\beta \\ 0 & a_{nn}-\beta^TCC^T\beta\end{bmatrix}$$
$$\cdots\cdots\begin{bmatrix} I_{k-1} & -\beta^TC \\ & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & a_{nn}-\beta^TCC^T\beta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{k-1} & \\ -\beta^TC & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C^T & \\ & 1\end{bmatrix}=G.\ G\text{可逆}.$$
$$G^TAG=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & a_{nn}-\beta^TCC^T\beta\end{bmatrix}.$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_{k-1} & \\ & \frac{1}{\sqrt{\cdots}}\end{bmatrix}}_{\text{可逆}} G^TAG\begin{bmatrix} I_{k-1} & \\ & \frac{1}{\sqrt{\cdots}}\end{bmatrix}=I_k.\ A_k\text{正定}.$$

Def (负定). $A\in Sym^n(\mathbb{R})$. A负定 (neg-def) 即
$\forall \vec{x}\neq\vec{0}$. $Q_A(\vec{x})=\vec{x}^TA\vec{x}<0$.
A负定 $\Leftrightarrow$ $-A$正定
$|A_1|<0$. $|A_2|>0$. $|A_3|<0\cdots$

Def.(半正定) $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$. $\vec{x}^TA\vec{x}\geq 0$. e.g $\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$ $x_1^2+x_2^2+0\cdot x_3^2$

N.B. 此时无顺序主子式判定定理!

$|A_m|\geq 0 \not\Rightarrow A$ 半正定.

e.g. $\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{bmatrix}$ $|A_m|\geq 0$ 但不是半正定. $(x_1^2-x_3^2)$.

$Q_A(\vec{x})=\vec{x}^TA\vec{x}=(\vec{x}^TQ)\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}(Q^T\vec{x})$ ~~A=Q...~~ ✓

⇒ $Q^T\vec{x}$ 是 $\vec{x}$ 在新基 $q_1\cdots q_n$ 下的坐标. $(Q=[q_1\cdots q_n])$

$\vec{y}=Q^T\vec{x}$. $Q_A(\vec{x})=\vec{y}^T\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}\vec{y}$

$=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$ ⇒ 简化函数.

Ex. $\vec{x}^T\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\vec{x}$. $5x^2+5y^2+8xy=1$ 看Strang书

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$. ⇒ $9x'^2+y'^2=1$. 为椭圆.

二次型的主轴化. $\xRightarrow{A实对称}A=Q\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}Q^T$ (Q直角坐标系)

二次型的规范化 ⇒ $A=C^T\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&-1&&\\&&&\ddots&\\&&&&0\end{bmatrix}C$ (C与C^T可逆)

$(C=Q\begin{bmatrix}\sqrt{|\lambda_1|}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{|\lambda_n|}\end{bmatrix})$

$\begin{array}{l}p\{\\r-p\{\end{array}\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&-1&&\\&&&\ddots&\\&&&&0\end{bmatrix}$ $n-r$

$r=\text{rank}(A)$.

$p=A$的正惯性系数

$r-p=A$的负惯性系数

唯一.

此时 $Q_A(\vec{x})=\vec{x}^TA\vec{x}$

$=\vec{x}^T(C^T\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}C)\vec{x}$

$\vec{y}=C\vec{x}$. $=\vec{y}^T\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}\vec{y}$

$\vec{y}$为新基下$\vec{x}$坐标.

(C^{-1}列向量) $\Delta\ y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$

∴ 基不为直角. 但二次型规范.

下证A的正惯性系数唯一. (=正的特征值个数).

Proof. $\vec{y}=C_1\vec{x}$. $Q(\vec{x})=\vec{y}_1^2+\cdots+\vec{y}_p^2-\vec{y}_{p+1}^2-\cdots-\vec{y}_r^2$ $A=C_1^T\begin{bmatrix}p阶\ 1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$

$\vec{y}=C_2\vec{x}$. $Q(\vec{x})=\vec{z}_1^2+\cdots+\vec{z}_q^2-\vec{z}_{q+1}^2-\cdots-\vec{z}_r^2$.

~~假设 $q>p$~~. C_1 $\eta_1\cdots\eta_n$ 新基 C_2 $\xi_1\cdots\xi_n$.

$W_1=\text{span}\{\eta_1\cdots\eta_p\}$ $\dim W_1=p$. $W_1\cap W_2=\{0\}$

$W_2=\text{span}\{\xi_{q+1}\cdots\xi_n\}$ $\dim W_2=n-q$.

$\alpha\in W_1\cap W_2$. $\alpha\in W_1$ $Q(\alpha)=y_1^2+\cdots+y_p^2 \geq 0$. 取等仅当$\alpha=0$.
$(y_1,\cdots,y_n)$为α在基1下的坐标

$\alpha\in W_2$ $Q(\alpha)=-z_{q+1}^2-\cdots-z_p^2\leq 0$. 取等仅当$\alpha=0$.
$(z_1,\cdots,z_n)$为α在基2下的坐标

$\Rightarrow \dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2\leq n$
$p+(n-q)$ $p\leq q$. 同理 $q\leq p\Rightarrow p=q$.

A正定: $\forall X\in\mathbb{R}^n$, $X\neq\vec{0}$, $Q_A(X)>0$.
$\Leftrightarrow$ 所有特征值>0 $\Leftrightarrow$ A相合于I_n. i.e.
$\Leftrightarrow A=B^TB$ with $\exists C$可逆 $C^TAC=I_n$.
B列满秩 $\Leftrightarrow$ 所有顺序主子式>0.

· A实对称, 则$\exists C$正交. $C^TC=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$

$\exists C$可逆 $C^TC=\begin{bmatrix}I_p&&\\&-I_{r-p}&\\&&0\end{bmatrix}$

12.16

Chap 8 线性映射与线性变换

1) linear mapping. linear transformation } Strang chap 8.1-8.5
2) 相似对角化. 新观点
3) SVD Chap 7

Def 1. 设U和V为$\mathbb{R}$上的两个线性空间. 称 $\mathcal{L}: U\rightarrow V$ (定义域 目标域) 为一个从U到V的线性映射, 如果 $\mathcal{L}(k\alpha+l\beta)=k(\mathcal{L}(\alpha))+l(\mathcal{L}(\beta))$ (保持线性关系). 若U=V一般称U→U线性映射 $\forall\alpha,\beta\in U$. $k,l\in\mathbb{R}$ (其他数域) 为一个线性变换.

Ex. $\mathcal{L}(\theta_U)=\theta_V$, $\mathcal{L}(-\alpha)=-\mathcal{L}(\alpha)$
Pf. $\mathcal{L}(1\cdot\theta_U+(-1)\cdot\theta_U)=1\cdot\mathcal{L}(\theta_U)+(-1)\mathcal{L}(\theta_U)$
$\mathcal{L}(\theta_U)=\theta_V$

Ex. 判断是否线性映射. $U=M_2(\mathbb{R})$
(1) $V=\mathbb{R}$ $A\mapsto tr(A)$ ✓
(2) $V=\mathbb{R}$ $A\mapsto\det A$ × $|kA|=k^2|A|$
(3) $V=\mathbb{R}$ $A\mapsto \text{rank} A$ ×
(4) $V=M_2(\mathbb{R})$ $A\mapsto A^T$ ✓

Ex. $U=\mathbb{R}^n$. $V=\mathbb{R}^m$, $A\in M_{m,n}$. $\vec{x}\mapsto A\vec{x}$ ✓ 线映

Ex. $U=\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $V=\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 实值函数. R上连续
$U\rightarrow V$ $\mathcal{L}: f\mapsto f'$
$f(x)$ $(\mathcal{L}f)(x)=f'(x)$ ✓

$R: f \in V \mapsto (Rf)(x) = \int_0^x f(s)\,ds \Longrightarrow \in U$

$(Rf)'(x) = f(x)$

$R(kf + lg) = kR(f) + lR(g)$ ✓

<u>Def.</u> U, V over $\mathbb{R}$. U 同构于 V, 若 $\exists \varphi: U \to V$ 线性映射, 并且 φ 是一个双射.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, shift left, "\varphi"] & V \arrow[l, shift left, "\varphi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

EX. 同构关系是一个等价关系

<u>线性映射的矩阵</u>

$\mathcal{L}: U \to V$ 线性映射 U是有限维的, $\dim U = n$

取U的一组基 $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ 只需知道 $\{\mathcal{L}\varepsilon_j\}$

$\mathbb{X}$ 坐标映射

在基下的坐标 $\mathbb{X}\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\quad \alpha = x_1\varepsilon_1 + \cdots x_n\varepsilon_n$. $(\mathbb{X}^{-1})$

$\mathbb{X}: U \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ 同构映射

任取 $\alpha \in U$, 则记 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, 则 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$

计算 $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\sum_{j=1}^n x_j\varepsilon_j) = \sum_{j=1}^n x_j \mathcal{L}(\varepsilon_j)$

如果V也是有限维的, $m = \dim V$. 取V的一组基 $\eta_1\ \eta_2 \cdots \eta_m$

每个 $\mathcal{L}(\varepsilon_j) \in V$. 记 $\mathbb{Y}\mathcal{L}(\varepsilon_j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$. $\quad \mathbb{Y}$: 坐标映射.

$$\mathcal{L}(\alpha) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij}\eta_i = \sum_{i=1}^m \eta_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

$$\mathbb{Y}\mathcal{L}(\alpha) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{bmatrix} = A\mathbb{X}(\alpha)$$

☆

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, shift right, "\mathbb{X}"'] & V \arrow[d, shift right, "\mathbb{Y}"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[u, shift right, "\mathbb{X}^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[u, shift right, "\mathbb{Y}^{-1}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\mathbb{X}"] & \mathcal{L}\alpha \arrow[d, "\mathbb{Y}"] \\ \mathbb{X}\alpha \arrow[r, "A"] & \mathbb{Y}(\mathcal{L}\alpha) \end{tikzcd}$$

$A(\mathbb{X}\alpha)$

A称为线映$\mathcal{L}$在给定基下的矩阵.

$$\mathcal{L}(\alpha) = \mathbb{Y}^{-1}A(\mathbb{X}\alpha)$$

EX. $U\ V$ linear space over $\mathbb{R}$

$L = \{\mathcal{L}: \mathcal{L}$是$U$到$V$的线性映射$\}$

$\begin{cases} (\mathcal{L} + \mathcal{T})(\alpha) = \mathcal{L}\alpha + \mathcal{T}\alpha \\ (k\mathcal{L})(\alpha) = k(\mathcal{L}\alpha) \end{cases}$ 是一个线性空间 over $\mathbb{R}$

U m维 V n维 则 $L \underset{\text{同构}}{\cong} M_{m,n}(\mathbb{R})$

Ex. $U=V=\mathbb{R}^2$. $\mathcal{L}(\alpha)=\alpha$

(i) $\vec{e_1}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\vec{e_2}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

(ii) $\eta_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\eta_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

($\mathbb{X}$. $\mathbb{Y}$ 均以 η_1. η_2 为基)

(iii) U基 $\vec{e_1}$. $\vec{e_2}$. V基 η_1. η_2. $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$

$\vec{e_1}\mapsto\vec{e_1}$. 坐标 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$\vec{e_2}\mapsto\vec{e_2}$ 坐标 $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$?

Convention 线性变换 $U=V$, 一般对目标域和定义域取相同的基.

Ex. $P_n=\{$不高于n次的实多项式$\}=\{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 : a_i\in\mathbb{R}\}$

$\dim=n+1$.

$\mathcal{L}$ 微分算子. 即 $P_n\mapsto P_n'$

P_n上取基. $\varepsilon_1\equiv1$. $\varepsilon_2(x)=x$, ... $\varepsilon_{n+1}(x)=x^n$.

$\mathcal{L}(f)=f'$ $P_n\to P_n$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&0&2&\ddots&\vdots\\ \vdots&\vdots&0&\ddots&n\\ 0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\quad (A\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)})$$

$\mathcal{L}$: U到U线性变换. 取U的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$.

$\mathcal{L}$的矩阵为A. 则 $\mathbb{X}\mathcal{L}(\alpha)=A(\mathbb{X}\alpha)$

Question: 取不同的基. $\mathcal{L}$在新基下的矩阵A'与A有什么关系? 相似

在n维空间U上. $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ 为一组基 $\mathbb{X}$

$\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_n$ 为一组基 $\mathbb{Y}$ (坐标映射)

如果记 $\mathbb{X}\eta_j$ 为新基的第j个列向量在原基下的坐标.

写成 $(C_{1j}, C_{2j} \cdots C_{nj})^T$

则 $(\eta_1\ \eta_2 \cdots \eta_n)=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n)\,C$

$\eta_j=\sum C_{ij}\varepsilon_i$ 称C为从原基到新基的过渡矩阵

C可逆. $\boxed{\mathbb{Y}\alpha=C^{-1}\mathbb{X}\alpha}$ 注意顺序!

Proof. $\alpha=(\eta_1\ \eta_2\cdots\eta_n)\mathbb{Y}\alpha$

$=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)\underbrace{C(\mathbb{Y}\alpha)}_{\mathbb{X}\alpha}$

$\mathbb{X}\mathcal{L}(\alpha)=A(\mathbb{X}\alpha) \Leftrightarrow C\mathbb{Y}(\mathcal{L}(\alpha))=AC(\mathbb{Y}\alpha)$

$\mathbb{Y}\mathcal{L}(\alpha)=A'(\mathbb{Y}\alpha)$ $\Updownarrow$

$\mathbb{Y}(\mathcal{L}(\alpha))=\underbrace{C^{-1}AC}_{A'}(\mathbb{Y}\alpha)$.

12.18

用线性映射的观点来理解相似对角化

$A \in M_n(\mathbb{R})$ $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\mathcal{A}\vec{x} := A\vec{x}$

$\mathcal{A}: U \to U$

取一组基 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n)$ $\mathcal{A}$的矩阵：A

$\mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha \quad \alpha \neq \theta_U$

假设可以找到$\alpha_1 \cdots \alpha_n$为一组基

且 $\mathcal{A}\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$

则$\mathcal{A}$在$\alpha_1 \cdots \alpha_n$下的矩阵为 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

↑ i列

$\mathcal{A}\alpha_i$ 在 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$下坐标

Rem. A是$\mathcal{A}$在自然基下的矩阵

如果换基

$\vec{e_1} \cdots \vec{e_n}$ $\vec{p_1} \cdots \vec{p_n}$ 列

自然基 过渡矩阵 $P = [\vec{p_1} \cdots \vec{p_n}]$

$\mathcal{A}$在$\vec{p_1} \cdots \vec{p_n}$下的矩阵为 $P^{-1}AP$

△ 矩阵对角化就是在新基下 $(\vec{p_1} \cdots \vec{p_n})$

使$\mathcal{A}$的矩阵为 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

motive 找好的新基

取 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ $\mathcal{A} \rightsquigarrow A$

对A进行对角化 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

good bases B given by $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n)P$

§ 奇异值分解 7.2, 7.4

坐映 $\mathcal{A}: U \to V$ $\dim U = n$, $\dim V = m$

$\mathcal{X}$ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n)$ $(\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_m)$ $\mathcal{Y}$ $\mathcal{A}$的矩阵 $A \in M_{m\times n}$

$Q \in M_n$ 过渡 $(\varepsilon_1', \cdots \varepsilon_n')$ $(\eta_1', \cdots \eta_m')$ $P \in M_m$ 过渡

$\mathcal{X}'$ $\mathcal{Y}'$

$\mathcal{A}$在新基下矩阵 $P^{-1}AQ = \underline{\underline{B}}$

两组

$\alpha \in U$, ~~$\mathcal{A}\alpha$~~ $\mathcal{Y}(\mathcal{A}\alpha) = A(\mathcal{X}\alpha) \iff P\mathcal{Y}'(\mathcal{A}\alpha) = AQ(\mathcal{X}'\alpha)$

$\mathcal{Y}'(\mathcal{A}\alpha) = B(\mathcal{X}'\alpha)$ $\quad \mathcal{Y}'(\mathcal{A}\alpha) = P^{-1}AQ(\mathcal{X}'\alpha)$

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{Y}(\mathcal{A}\alpha) = P\mathcal{Y}'(\mathcal{A}\alpha) \\ (\mathcal{X}\alpha) = Q(\mathcal{X}'\alpha) \end{array}\right\}$

$B = \underline{P^{-1}AQ}$ 能否简化$P^{-1}AQ$?

Ex. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ $\mathcal{A}$在自然基下的矩阵为$A \in M_{m,n}$

总存在新基 $\vec{q_1} \cdots \vec{q_n}$ $\mathcal{A}$的矩阵为 $\begin{bmatrix} I_r & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} \end{bmatrix}$ ← 相抵标准型

$\vec{p_1} \cdots \vec{p_m}$. $r = \mathrm{rank}(A)$

Ex. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$内积空间

good base (1) $\vec{q_1} \cdots \vec{q_n}$ ONB. $P^TAQ = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sigma_r \end{bmatrix}$

s.t. (2) $\vec{p_1} \cdots \vec{p_m}$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

Thm (SVD) 对于 $A\in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $r=\mathrm{rank}(A)$.

则 $\exists\, \vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n\in\mathbb{R}^n$ ONB. $\mathbb{V}$ 前r列 V_r (n×r矩阵)

$\exists\, \vec{u}_1,\vec{u}_2,\cdots,\vec{u}_m\in\mathbb{R}^m$, ONB U 前r列 U_r (m×r矩阵)

$\exists\, \Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$ $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r>0$.

s.t. $U^TA\mathbb{V}=\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $A=U\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^T$

且 $A=\underset{(m\times r)}{U_r}\ \underset{(r\times r)}{\Sigma}\ \underset{(r\times n)}{V_r^T}$ (SVD)

Obs. $A^TA=V\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^TU\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^T$

$=V\begin{bmatrix}\Sigma^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^T\Rightarrow A^TAV=V\begin{bmatrix}\Sigma^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$=V\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^2 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{bmatrix}$ 特征值 向量.

Proof. 考察 A^TA 矩阵 $A^TA\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ 实对称的, 半正定的 (定义)

$\exists\, V$ $V^TV=I_n$, s.t. $V^T(A^TA)V=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$

不妨假设 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0$.

记 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$. $\sigma_1^2\geq\sigma_2^2\geq\cdots\geq\sigma_n\geq 0$. ($\sigma_1^2\geq\sigma_2^2\geq\cdots\geq\sigma_r^2>0$, $\sigma_{r+1}=\cdots=\sigma_n=0$)

其中为正的有r个. (半正定, 故 $p=r=\mathrm{rank}(A^TA)=\mathrm{rank}(A)$)

$\mathrm{Col}(A^TA)=\mathrm{Col}(A^T)$

$\mathrm{Null}(A^TA)=\mathrm{Null}(A)$

总结: $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^n$, ONB of $\mathbb{R}^n$. $A^TA\vec{v}_j=\sigma_j^2\vec{v}_j$ 其中

$\sigma_1^2\geq\cdots\geq\sigma_r^2>0$, $\sigma_{r+1}=\cdots=\sigma_n=0$.

找 $\vec{u}$? 令 $\tilde{u}_j=A\vec{v}_j$ $1\leq j\leq \boxed{r}$

$AA^T\tilde{u}_j=A(A^TA\vec{v}_j)=A(\sigma_j^2\vec{v}_j)=\sigma_j^2\tilde{u}_j$

$\tilde{u}_j$: $1\leq j\leq r$ 是 AA^T 的属于 σ_j^2 的特征向量.

但 $\|\tilde{u}_j\|^2=\vec{v}_j^TA^TA\vec{v}_j=\sigma_j^2\|v_j\|=\sigma_j^2\Rightarrow\|\tilde{u}_j\|=\sigma_j$

$\langle\tilde{u}_j,\tilde{u}_l\rangle=(A\vec{v}_j)^T(A\vec{v}_l)=\vec{v}_j^TA^TA\vec{v}_l=\sigma_l^2\vec{v}_j^T\vec{v}_l=\sigma_l^2\cdot\delta_{j,l}$.

$\Rightarrow\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_r$ 两两正交 $\|\tilde{u}_j\|=\sigma_j$

故 令 $\vec{u}_j=\frac{1}{\sigma_j}\tilde{u}_j=\frac{1}{\sigma_j}A\vec{v}_j$ 则 ON. 前r个.

总结: $\vec{u}_1,\cdots\vec{u}_r$, ON.

$\sigma_j\vec{u}_j=A\vec{v}_j$, $j=1,2,\cdots,r$. ($\vec{u}_j$ 的def)

$AA^T\vec{u}_j=\sigma_j^2\vec{u}_j$.

$AA^T_{m\times m}$ 实对称矩阵 半正定 也有r个正特征值

~~故~~ 故找到 m-r个属于0的 AA^T 的特征向量 且ON

记为 $\vec{u}_{r+1} \cdots \vec{u}_m$.

那么 $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m$ 构成 R^m 的一组ONB 且 $AA^T\vec{u}_j = \sigma_j^2 \vec{u}_j \quad (1\sim r)$

$AA^T\vec{u}_j = \vec{0}. \quad (r+1 \sim m)$

$$U^TAV = \begin{bmatrix} - \vec{u}_1 - \\ \vdots \\ - \vec{u}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ A\vec{v}_1 & \cdots & A\vec{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_r^T \\ U_{m-r}^T \end{bmatrix} [U_r\Sigma \quad 0]$$

$\vec{v}_{r+1} \cdots \vec{v}_n \quad A^TA\vec{v}_j = \vec{0}. \quad A\vec{v}_j = \vec{0}$

$$= \begin{bmatrix} U_r^TU_r\Sigma & 0 \\ U_{m-r}^TU_r\Sigma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 为 A 的 $\boxed{\text{奇异值}}$ (A^TA 特征值开方)

$A = U G V^T = U_r \Sigma V_r^T = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T + \sigma_2 \vec{u}_2 \vec{v}_2^T + \cdots + \sigma_r \vec{u}_r \vec{v}_r^T$

若A大但rank小，可用r个秩为1的矩阵还原.

Ex. $A \in \mathcal{L}(R^n, R^m)$

(1) A^TA 找特征值 $\sigma_1^2 \geq \cdots \geq \sigma_r^2 > 0$.

(2) $\forall j = 1, \cdots, r$. 求 $\vec{v}_j$. ONB

(3) $\vec{u}_j = \frac{1}{\sigma_j} A\vec{v}_j$ ONB

(4) $A = U_r \Sigma V_r^T$

Rem. $\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1} \cdots \vec{v}_n$ ONB of R^n

$\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1} \cdots \vec{u}_m$ ONB of R^m.

Obs. (i) $\vec{u}_j$ $j = 1, \cdots, r$ 在 Col(A)中.

dim Col(A) = r. 故 $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_r$ 为 ONB of Col(A)

(ii) $A\vec{v}_j = 0$ $j \geq r+1$. 在 Null(A) 中.

dim(Null(A)) = n-r. 故 $\vec{v}_{r+1} \cdots \vec{v}_n$ 为 ONB of Null(A)

(iii) $\vec{u}_j$ $j = r+1, \cdots, m$ 为 ONB of Null(A^T)

(iv) $\vec{v}_j$ $j = 1, \cdots, r$ 为 ONB of Col(A^T)

几何意义

$A = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T \quad |U|, |V| = \pm 1.$

$\Rightarrow |U| = 1. \ |V| = 1$

det = 1 旋转

-1 -- + 反射.

A = 旋转. 拉伸. 旋转^2.

任何一个矩阵对向量的作用都是旋^2. 拉. 旋^1

$A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ $\quad \|A\|_{op}$ $\quad$ operator norm 算子范数

1 **Def.** $\langle A, B\rangle_{FB} = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ij}$ 内积，

Frobenius

$$\|A\|_{FB} = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$$

$\sigma_1 = A$ 的最大奇异值 $= \max\left(\|A\vec{x}\|_2 / \|\vec{x}\|_2\right)$ $\quad (\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle})$

2 **Def.** $\|A\|_{op} = \max\limits_{\vec{x} \neq \vec{0}} \dfrac{\|A\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2}$，则 $\|\cdot\|_{op}$ 是 $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ 上的一个范数

(1) $\|A\|_{op} \geq 0$ 且 $\|A\|_{op} = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

(2) $\|kA\|_{op} = |k|\, \|A\|_{op}$

$\|A\|_{op,2}$ 算子范数用了2范数

(3) $\|A+B\|_{op} \leq \|A\|_{op} + \|B\|_{op}$

$$\begin{aligned}
\|A\vec{x}\|_2^2 = (A\vec{x})^T (A\vec{x}) &= \vec{x}^T A^T A \vec{x} \\
&= \vec{x}^T (V_r \Sigma U_r^T U_r \Sigma V_r^T) \vec{x} \\
&= \vec{x}^T V_r \Sigma^2 V_r^T \vec{x} \\
&= (V_r^T \vec{x})^T \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix} (V_r^T \vec{x})
\end{aligned}$$

应该用的是 $U\begin{pmatrix}\Sigma & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}V$，不是 $U_r \Sigma_r V_r$

x 在 V 下的坐标？ r+1 到 n 呢？

$$\begin{aligned}
&= \sigma_1^2 y_1^2 + \cdots + \sigma_r^2 y_r^2 \qquad \vec{y} = V_r^T \vec{x}. \\
&\leq \sigma_1^2 (y_1^2 + \cdots + y_r^2) \\
&\leq \sigma_1^2 (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \sigma_1^2 \|y\|_2^2 = \sigma_1^2 \|x\|_2^2
\end{aligned}$$

故 $\|A\vec{x}\|_2 \leq \sigma_1 \|\vec{x}\|_2$ $\quad$ (2) 显然.

(3) Pf. $\|(A+B)\vec{x}\|_2 = \|A\vec{x} + B\vec{x}\|_2 \leq \|A\vec{x}\|_2 + \|B\vec{x}\|_2 \leq (\|A\|_{op} + \|B\|_{op}) \|x\|_2$

$\therefore \|A+B\|_{op} = \max \dfrac{\|(A+B)\vec{x}\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_{op} + \|B\|_{op}$

$\|AB\|_{op} \leq \|A\|_{op} \|B\|_{op}$.

Pf. $\|AB\vec{x}\|_{o_2} \leq \|A\|_{op} \|B\vec{x}\|_2 \leq \|A\|_{op} \|B\|_{op} \|\vec{x}\|_2$.

$\dfrac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}_{\max} = \sigma_1(A)$. 在 $\vec{x} \in \sigma_1$ 的奇异向量时取得.

12.23

Ex. (Eckhard-Young-Mirsky Thm) $\quad A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \vec{u_j} \vec{v_j}^T$

$A^{(k)} = \arg\min \|A - B\|_{op,2}$ $\qquad A^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \vec{u_j} \vec{v_j}^T$, $\mathrm{rank}(A^{(k)}) = k$.

Proof. $(k < r)$

(1) $\|A - A^{(k)}\|_{op} = \sigma_{k+1}(A)$

(2) 对 $\forall B$, $\mathrm{rank}(B) = k$. 证 $\|A - B\|_{op} \geq \sigma_{k+1}$ $\qquad$ (满秩分解)

$r(B) = k$. $\exists$ ~~两~~ X, Y 列满秩, $X \in \mathbb{M}_{m,k}$, $Y \in \mathbb{M}_{n,k}$, s.t. $B = XY^T$

(3) Claim $\exists \gamma = \mathrm{span}\{\vec{v_1}, \cdots \vec{v_{k+1}}\}$, 且 $Y^T \gamma = \vec{0}$

$\|(A-B)\gamma\| = \|A\gamma - XY^T\gamma\| = \|A\gamma\| \geq \sigma_{k+1}$.

$\mathbb{R}^n$??

Claim $\Leftrightarrow$ $\mathrm{span}\{\vec{v_1}, \cdots \vec{v_{k+1}}\} \cap \mathrm{Null}(Y^T) \neq \{0\}$ 均为$\mathbb{R}^n$中.　　为什么分成 X Y?

反证 若 _ $\cap$ _ $= \{0\}$. 左 $\dim = k+1$. 右 $\dim = n-k$.

$\dim$ 左 $+ \dim$ 右 $= n+1 > n$. 矛盾.

故得证.

Ex. A方阵 可逆 $A = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix} V^T$

$$A^{(n-1)} = \underset{\det B \neq 0}{\arg\min} \|A - B\|$$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ 复数域上 Matrix的SVD分解

(A^+A) 厄尔米特 有实 eigen-value

$\exists\ U, V,\ U^+U = V^+V = I_n$, s.t. $A = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^+$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -2i & 2 \end{bmatrix}$ 求SVD

$$A^+A = \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 2i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3i \\ 3i & 5 \end{bmatrix}$$

求特征值 $\lambda_1 = 8$. $\lambda_2 = 2$. $\sigma_1 = 2\sqrt{2}$, $\sigma_2 = \sqrt{2}$

$\vec{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$　　$\vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{u_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} A \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\vec{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} A \vec{v_2} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \\ & \sqrt{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

极式分解 (Polar decomposition)　　复数域上的半正定?

Thm $A \in M_n(\mathbb{R})$ 方阵. $r = \mathrm{rank}(A) > 0$ 则$\exists Q$正交 $(Q^TQ = I_n)$. $\exists S \in M_n(\mathbb{R})$.

S半正定. $p(S) = r$. s.t. $A = QS = KQ$.

正惯性系数.　　(K半正定)

~~Ex $z = e^{i\theta}$~~

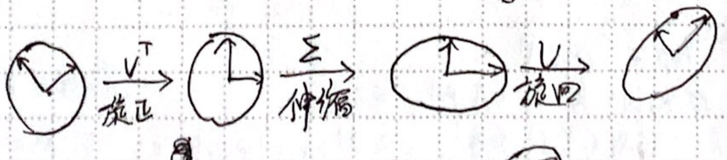
Proof. $A = UV^TV \begin{bmatrix} \Sigma & \\ & 0 \end{bmatrix} V^T = (UV^T)\left(V \begin{bmatrix} \Sigma & \\ & 0 \end{bmatrix} V^T\right)$

正交　　半正定 ($\begin{bmatrix} \Sigma & \\ & 0 \end{bmatrix}$相合).

$A = \left(U \begin{bmatrix} \Sigma & \\ & 0 \end{bmatrix} U^T\right)(UV^T)$

半正定　　正交　　有时旋转为 旋转+反射

SVD.



Polar

Ex. 半正定 S (实对称), ∃P, s.t. $P^2=S$ 且 P 实对称半正定. $P=\sqrt{S}$.

~~S~~ 设 S 特征值为 $\sigma_1^2, \cdots, \sigma_n^2$

∃正交定 U, s.t. $S=U\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2\end{bmatrix}U^T$

$$S=\left(U\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n\end{bmatrix}U^T\right)\left(U\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n\end{bmatrix}U^T\right)$$

故 S 存在.

且 S 唯一. (证明?)

Cor. Polar decomposition 中 $A=QS$. S 唯一, $=\sqrt{A}$?

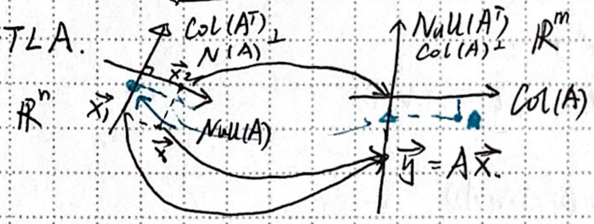
A 可逆时 Q 也唯一

$Q=\arg\min \|A-P\|_{op}$ ($\forall P^TP=I_n$)

Q: 离 A 最近的正交矩阵

SVD 定义 广义逆 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

FTLA.



$A=U_r\Sigma V_r^T$

伪逆 $A^+=V_r\Sigma^{-1}U_r^T=V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & \\ & 0\end{bmatrix}U^T$

非 A^T! $A^+A=V_r\Sigma^{-1}\underbrace{U_r^TU_r}_{I}\Sigma V_r^T$ 非方阵正交 取决于 T 的顺序!

$=V_rV_r^T$ 投影矩阵到 $(N(A))^\perp$

$AA^+=U_rU_r^T$ 投影到 $Col(A)$

最小二乘. 求 $|A\vec{x}_*-b|_{min}$ 的 $\vec{x}_*$

若 A 不可逆 $\vec{x}_*=A^+\vec{b}$. 且 $\|x_*\|$ 最小

可逆时 $\vec{x}_*=(A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$

Def. $A: U\to V$ 线性映射. 称 $AU=\{A\alpha: \alpha\in U\}$

为 U 的 image 象. 记为 $Im(A)$ 或 $range(A) \subseteq V$

称 $\{\alpha\in U: A\alpha=\theta_V\}\subseteq U$ 为 $ker(A)\subseteq U$ 核 kernel

Ex range(A) 为 V 的子空间.

ker(A) 为 U 的子空间.

Ex. $\mathbb{D}: C^1([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$.

$\ker(\mathbb{D}) = ?$ $f \in C^1$, $\mathbb{D}f = \theta$.

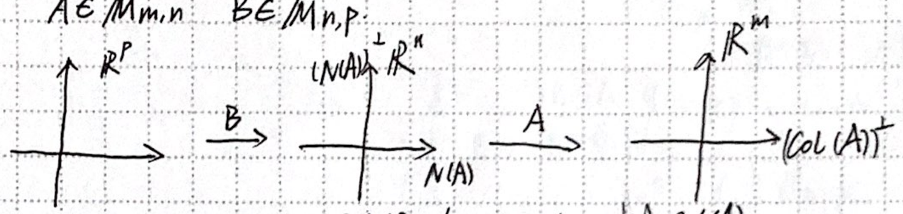
$\ker(\mathbb{D}) = \{f : f(x) \equiv c, c \in \mathbb{R}\}$.

12.25

$\mathrm{Ran}(\mathbb{D}) = C([0,1])$ 全集.

Ex. $\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - n$

$A \in M_{m,n}$ $B \in M_{n,p}$.



$Col(B) = (Col(B) \cap N(A)^\perp) \oplus (Col(B) \cap N(A))$

$Col(AB) = A(Col(B) \cap N(A)^\perp)$

$\dim(Col(AB)) = \dim(Col(B) \cap N(A)^\perp)$

$\mathrm{rank}(AB) = \dim(Col(B)) - \dim(Col(B) \cap N(A))$

$= \cancel{\mathrm{rank}(B)}$

$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(AB) + \dim(Col(B) \cap N(A))$

$\leq \mathrm{rank}(AB) + \dim(N(A))$

$= \mathrm{rank}(AB) + n - \mathrm{rank}(A)$.

Ex. $C([0,1],\mathbb{R})$ $f \mapsto Rf = \int_0^x f(s)ds$.

$\ker(R) = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) : F(x) = \int_0^x f(s)ds = 0, \forall x \in [0,1]\} = \{\theta\}$

$\mathrm{range}(R) = \cancel{C^1([0,1],\mathbb{R})}$

$\{F \in C^1([0,1];\mathbb{R}) : F(0) = 0\}$

~~Ex.~~ $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(U,V)$ W是U子空间. $\mathcal{A}|_W : W \to V$, $\alpha \mapsto \mathcal{A}\alpha$

Thm. $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ 是 n, m 维线性空间. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$

取$\mathcal{U}$的基 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$. 取$\mathcal{V}$的基 $\eta_1, \cdots, \eta_m$

记 $A \in M_{m,n}$ 为 $\mathcal{A}$ 在所取基下的矩阵.

(1) $\mathrm{range}(\mathcal{A})$ 同构于 $Col(A)$ 且 $\mathbb{Y}|_{\mathrm{range}(\mathcal{A})}$ 为一个同构.

(2) $\ker(\mathcal{A})$ 同构于 $Null(A)$ 且 $\mathbb{X}|_{\ker(\mathcal{A})}$ 为一个同构.

Pf. ① $\mathbb{Y}|_{\mathrm{range}(\mathcal{A})}$ 为 $\mathrm{range}(\mathcal{A})$ 到 $Col(A)$ 的映射.

$\exists \beta \in \mathcal{U}, \alpha = \mathcal{A}\beta$ $\quad \mathbb{Y}(\alpha) = \mathbb{Y}(\mathcal{A}\beta)$

$= A(\mathbb{X}\beta) \in Col(A)$ ✓

② 单射 ✓ ③ 满射 $\forall \vec{y} \in Col(A)$, $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\vec{y} = A\vec{x}$. ?

Cor. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ 则 $\dim \mathcal{U} = \dim(\ker(\mathcal{A})) + \dim(\text{range}(\mathcal{A}))$

($\mathcal{U}$有限维) 证: $\dim(Null(A))$ 　 $\dim(Col(A))$ 　 任取基 $A \in M_n$.

Cor. 同上条件. $\mathcal{A}$是单射 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$是满射 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$是双射

证 $\ker(\mathcal{A}) = \{\theta\}$ 　 $\text{range}(\mathcal{A}) = \mathcal{U}$

Ex $\mathcal{U} = \text{span}\{1, \sin x, \sin 2x \cdots \sin nx, \cos x, \cdots, \cos nx\} \subseteq C(\mathbb{R})$.

也线性无关?

$\mathbb{L} = \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ 　 $\mathbb{L}f = f''$ 　 $\mathbb{L} = \mathbb{D} \circ \mathbb{D}$

求 $\mathbb{L}$ 的特征向量 $\mathbb{L}f = \lambda f$.

即求 $\ker(\mathbb{L} - \lambda \mathcal{I})$

$(\mathbb{L} - \lambda \mathcal{I})[1] = -\lambda$?

$(\mathbb{L} - \lambda \mathcal{I})[\sin(kx)] = -k^2 \sin kx - \lambda \sin x$

$$K = \begin{bmatrix} -\lambda & & & & & & \\ 0 & -\lambda-1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ & & & -\lambda-n^2 & & & \\ 0 & & & & -\lambda-1 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & -\lambda-n^2 \end{bmatrix}$$

$\lambda \notin \{0, -1^2, \cdots, -n^2\} \Rightarrow Null(K) = \{\vec{0}\}$

$\lambda = 0 \Rightarrow Null(K) \overset{\text{span}}{=} \{\vec{e_1}\}$

$\lambda = \{-1^2, -2^2, \cdots, -n^2\} \Rightarrow Null(K) \underset{\text{span}}{=} \{\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+n+1}\}$

$-k^2$.

8.6 内积空间上的线性映射

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ 　 $\mathcal{U}$是一个实内积空间

Def. $\mathcal{U}$是 n 维实内积空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$ 为一组基.

$M \in M_n$, $M = (m_{ij})$ 　 $m_{ij} = \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$

称 M 为内积在所选基下的度量矩阵.

Obs. M 实对称. M 正定. 由内积正定性可得M正定性

$\langle \alpha, \beta \rangle_{\mathcal{U}} = (X\alpha)^T M (X\beta)$

$M = I \Leftrightarrow \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 为 ONB

Ex. $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \longrightarrow \eta_1 \cdots \eta_n$.

$M' = P^T M P$. 相合变换

伴随算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ 线性算子, 则

$\langle \beta, \mathcal{A}\alpha \rangle = \langle \mathcal{A}^t \beta, \alpha \rangle$, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{U}$

取 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ 为一组 ONB. A 为 $\mathcal{A}$ 在基下矩阵.

$\langle \mathcal{A}^t \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \langle \varepsilon_i, \mathcal{A}\varepsilon_j \rangle = \vec{e_i}^T M A \vec{e_j} = a_{ij}$

$\mathcal{A}^t \varepsilon_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_j$, $(A^t)_{ij} = a_{ji}$

$\mathcal{A}$在基下矩阵为 A. $\mathcal{A}^t$在基下矩阵为 A^T.

Def 若 $\mathcal{A}=\mathcal{A}^t$, $\mathcal{A}$为自伴算子 (self-adjoint op)

线性代数基本定理

Thm $\mathcal{U}$ 有限维实内积空间. 则 $\forall \mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$

有: $\mathcal{U}=\ker(\mathcal{A})\oplus \mathrm{range}(\mathcal{A}^t)$

$=\ker(\mathcal{A}^t)\oplus\mathrm{range}(\mathcal{A})$

且这两个空间互为正交补

Cor (Fredholm Alternative) $\mathcal{A}\in \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$

$\mathcal{U}$ 有限维空间. 实内积空间. 则 $\forall \beta\in\mathcal{U}$.

(i) $\exists\, \alpha\in\mathcal{U}$, s.t. $\beta=\mathcal{A}\alpha$

(ii) $\beta\notin\ker(\mathcal{A}^t)$, i.e. $\exists\,\gamma$, s.t. $\mathcal{A}^t\gamma=\theta$ 且 $\langle\gamma,\beta\rangle\neq 0$.

两个中有一成立.

线性空间
- (A1)-(A4), (M1)-(M4)
  - 线性组合, 线性相关/无关. 极大无关组. 秩
  - 线性空间的维数和基
  - 子空间. span. 交. 和. 直和
- $\mathbb{R}^n$
  - 找线性相关. 极大无关组 (rref(A))
  - rank(A)
  - A的四个基本子空间 $\boxed{\text{FTLA}}$
- 内积空间
  - $\langle\alpha,\beta\rangle\in\mathbb{R}$ (定义). C-S定理, 长度. 夹角. 正交 — G-S正交化, QR分解. 其他分解? LDU.
  - $\alpha\perp\beta$. $\alpha\perp W$, $W\perp V$, $W^\perp$
  - 投影. 投影矩阵; 最小二乘法; 数据拟合. 在$\mathbb{R}^n$中? 投经求法?

行列式
- Alternating. 多线性. 规范化 $\Rightarrow \det A=\sum\limits_{i_1,\dots,i_n\in P_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}\cdots a_{i_n n}$
- det A的性质
  - $\det A=\det A^T$ 证?
  - (D1) (D2) (D3)
  - 初等变换求 det A
  - $|A||B|=|AB|$. 证?
- Laplace展开公式. 余子式.
- 分块矩阵的行列式
- * 伴随矩阵和 Cramer's Rule

特征值与特征向量

$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, $\vec{x}\neq\vec{0}$.

求 eigen-pair $\begin{cases} 求 f_A(\lambda)=0. \\ E_\lambda = Null(\lambda I - A) \end{cases}$

对角化. $AP=P\Lambda$ (若可找足够多 eigen-vector) 即换基

充要条件: 代数重 = 几何重. 何数成均可

$E_{\lambda_1}\oplus E_{\lambda_2}$ $(\lambda_1\neq\lambda_2)$

应用: 算 A^k、递推通项 $F_n=aF_{n-1}+bF_{n-2}$.

二次型

实对称矩阵的特征值和向量

二次型与其规范化(相合)、惯性系数、主轴化

正定矩阵.

线性映射

线性映射在基下的矩阵

换基后矩阵的变化

内积空间下的度量矩阵

换基后矩阵的变化.

SVD - good base 在普通线性空间下?

矩阵转置的内积观点. $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ y\in\mathbb{R}^m.\ A\in M_{m,n}$

$$\langle \vec{y}, A\vec{x}\rangle_{\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m} = \langle A^T\vec{y},\vec{x}\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n}$$

$$A^Ty\quad x\quad \mathbb{R}^n \underset{A^T}{\overset{A}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^m \quad y\quad Ax$$

矩阵的满秩分解 $\exists$可逆 $P.Q$ $(P\in M_m, Q\in M_n)$ s.t. $A=P\begin{bmatrix}\underbrace{I_r}_{记为\Sigma} & \\ & 0\end{bmatrix}Q$

$$A_{ij}=\sum_{l_1=1}^{m}\sum_{l_2=1}^{n} p_{il_1}\Sigma_{l_1l_2}q_{l_2j}$$

$$=\sum_{k=1}^{r}p_{ik}q_{kj}\Rightarrow P_rQ_r=A.$$

列满秩 P前r列 $M_{m,r}$　Q前r行 $M_{r,n}$ 行满秩.

或 $A=P\begin{bmatrix}I_r & \\ & 0\end{bmatrix}Q = \underbrace{P\begin{bmatrix}I_r\\0\end{bmatrix}}_{列满}\underbrace{[I_r\ \ 0]Q}_{行满}$

Fredholm's Alternative

①$Ax=b$ 或② $A^Ty=0$ 且 $y^Tb=1$　①②中恰有1个有解.

想象方程组若无解,可将行线性组合使左边为0,右边为1.

Pf: ①$Ax=b$有解 $\Rightarrow$ $b\in Col(A)$. $b\perp Null(A^T)$

若 $A^Ty=0$. $y\in Null(A^T)$ $\langle y,b\rangle=y^Tb=0\neq1$. ②无解

①$Ax=b$无解 $\Rightarrow$ $b\notin Col(A)$ $b\in Null(A^T)$

$\exists y'\in Null(A^T)$ 且 $y'\neq\vec{0}$. $\langle y',b\rangle\neq0$. 伸缩 ②有解.

P是投影矩阵 $\Leftrightarrow$ $P^2=P=P^T$.

$P_1.P_2$为投影矩阵,那么P_1P_2为投影矩阵 $\Leftrightarrow$ $P_1P_2=P_2P_1$

区别 $W\perp V$ 和 $W\oplus V$.　$W\perp V\Rightarrow W\oplus V$

矩阵的几种分解: LU/LDU分解. QR分解(G-S正交化). 满秩分解. SDV分解

矩阵的几种变换: 相似、相合.

$\frac{\det A}{\lambda}$是A^*的特征值(若λ是A的特征值). 特征向量相同.　$A\varepsilon=\lambda\varepsilon$.　$\underbrace{A^*A}_{\det A}\varepsilon=\lambda A^*\varepsilon$　$\det A\cdot\varepsilon$

$A\in M_{m,n}$　$B\in M_{n,m}$　$\det(I_m-AB)=\det(I_n-BA)$可用于化简运算.

$$(A^*)^*=\det A^*\cdot(A^*)^{-1}=\det(\det A\cdot A^{-1})\cdot\frac{A}{\det A}=(\det A)^{n-2}A.$$

对角线元素：全非零的上三角矩阵可逆，且逆也为三角阵，对角元素互为倒数.

$Ax=\lambda x$. 相同 x 可以：$A^2x=\lambda^2 x$，$A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$，$(A+cI)x=(\lambda+c)x$.

☆ Π eigen-value = det，Σ eigen-value = trace ⇒ 相似矩阵的 det. trace 相同.

A.B 的 n 个 eigenvector 相同 ⟺ AB=BA.

estimate λ："near" a_{ii}（误差 $\leq \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$）

A 与 A^T 的 eigenvalue 相同，与 A^{-1} 的 eigenvalue 互为倒数.
eigenvector 不同　　　　eigenvector 相同.
e.g. Markov $\lambda=1$.
P^T 特征向量 $(1,1,1\cdots 1)^T$.

相似.

$B=M^{-1}AM$. 不变的：Eigenvalue (Trace. Det) Rank. Eigenvector 数量.
变的：Eigenvector. Nullspace. Col / Row space …

Pf. 特征多项式相同：$\det(\lambda I-B)=\det(\lambda I-M^{-1}AM)$
$=\det M\cdot\frac{1}{\det M}\det(M(\lambda I-M^{-1}AM)M^{-1})=\det(\lambda I-A)$.

对称矩阵的 pivots 与 eigenvalue 符号相同.（考虑 LDL^T 分解）

Pivots = ratios of determinants ? ✓

$\begin{cases}\text{相合：正定不变. 正惯性系数和秩不变（相合规范型不变）}\\ \text{相似：特征值不变}\end{cases}$

证 $\max\frac{x^TSx}{x^Tx}=\lambda_1$.（S 正定，$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n>0$）.

Pf. $\lambda_1 I-S$ 的 eigen value：$\lambda_1-\lambda_1,\ \lambda_1-\lambda_2,\cdots\lambda_1-\lambda_n\geq 0$.
$x^T(\lambda_1 I-S)x\geq 0$（仅当 $x\in$ eigen-space of λ_1 取等）.

正定矩阵对角元为正.（相合一个列变换矩阵，结合顺序主子式定理可证）

二次型主轴化 ⇒ 找正交 Q.　$Q^TAQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$

规范化 ⇒ 找可逆 C.　$C^TAC=\begin{bmatrix}I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0\end{bmatrix}$