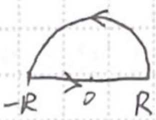
求定积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $a>0.b>0.$



简单闭曲线. 取 $R>\max\{a,b\}$.

解 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

则 $\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}+\int_{C_R}\frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=2\pi i(C_{-1}^{(1)}+C_{-1}^{(2)})$.

$\to 0.\ \because R\to+\infty$

$P(z)=1.$ $Q(z)=(z^2+a^2)(z^2+b^2)=z^4+(a^2+b^2)z^2+a^2b^2.$

$Q'(z)=4z^3+2(a^2+b^2)z.$ $z=ai$时 $Q(ai)=0.$ $Q'(ai)=2ai(b^2-a^2)$

$a\neq b$时

$C_{-1}^{(1)}=\mathrm{Res}[f,ai]=\frac{1}{Q'(ai)}=\frac{1}{2ai(b^2-a^2)}$

$C_{-1}^{(2)}=\cdots bi]=\frac{1}{Q'(bi)}=\frac{1}{2bi(b^2-a^2)}.$

$\Rightarrow I=\pi i(C_{-1}^{(1)}+C_{-1}^{(2)})=\frac{\pi}{2(b^2-a^2)}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})=\frac{\pi(b-a)}{2ab(b^2-a^2)}=\frac{\pi}{2ab(a+b)}$

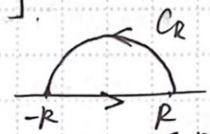
$a=b$时.

$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\pi}{4a^3}$ $a>0.$ (让$b\neq a$.再让$b\to a$)

求 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin kx}{x^2+a^2}dx.$ 这里$k>0, a>0.$ $I=\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x\sin kx}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\mathrm{Im}(\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ikx}}{x^2+a^2}dx)$

$\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ikx}}{x^2+a^2}dx+\int_{C_R}\frac{ze^{ikz}}{z^2+a^2}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{ze^{ikz}}{z^2+a^2},ai].$

$=2\pi i\cdot\frac{ai\cdot e^{-ka}}{2ai}=\frac{\pi i}{e^{ka}}$



取$R>a$.

连续函数且极限有限,则可让参数→某数直接得积分答案

求定积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin kx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx.$ $a>0.b>0.k>0.$

$\int_{-R}^{R}\frac{xe^{ikx}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx+\int_{C_R}\frac{ze^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=2\pi i(C_{-1}^{(1)}+C_{-1}^{(2)})$

$R\to+\infty$时$\to 0.$

$\Rightarrow I=\pi(C_{-1}^{(1)}+C_{-1}^{(2)})$

$C_{-1}^{(1)}=\mathrm{Res}[\frac{ze^{ikz}}{z^4+(a^2+b^2)z^2+a^2b^2},ai]=\frac{aie^{-ka}}{4(ai)^3+2ai(a^2+b^2)}=\frac{e^{-ka}}{2(b^2-a^2)}$

$C_{-1}^{(2)}=\mathrm{Res}[\qquad,bi]=\frac{e^{-kb}}{2(a^2-b^2)}$

$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2(b^2-a^2)}(e^{-ka}-e^{-kb})$

若$a=b$. 令$f(x)=\frac{e^{-ka}-e^{-kx}}{x^2-a^2}$. 令$x\to a$.

$\lim_{x\to a}f(x)=\frac{ke^{kx}}{2x}=\frac{ke^{ka}}{2a}$

则$a=b$时 $I=\frac{\pi e^{-ka}k}{4a}$

11.25

开卷试题

1/ 设 z_1, z_2, z_3 是复平面上的3个相异的点且不共线. 用 z_1, z_2, z_3 表示出 $\triangle z_1z_2z_3$ 的外接圆圆心 z_0, 并证明: 当 $z_0=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$ 时, $\triangle z_1z_2z_3$ 为正$\triangle$且求出外接圆的半径 r. (10分)

2/ 用不同于(充分、必要性证法均不同)习题/答案中的方法, 证明: $f_n(z)=z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_1z+c_n=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$ 构成(圆内接)正n多边形的n个顶点的充要条件是 $f_n(z)=z^n+c_n$. 这里 $|z_k|=r>0, k=1,\cdots,n$.

3/ 设 z_1, z_2, z_3, z_4 是复平面上四个相异的点. 定义其交比 $<z_1,z_2,z_3,z_4>$ 为

$$<z_1,z_2,z_3,z_4>=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\Big/\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

利用直线 l: $z=z_0+t\alpha, \alpha\neq0, t\in R$, 圆用 C_r: $z=z_0+re^{i\theta}, \theta\in[0,2\pi), r>0$, 的参数方程及Ch1.Ex3.4的坐标方程方法证明

z_1, z_2, z_3, z_4 共线或共圆的充要条件是 $<z_1,z_2,z_3,z_4>\in R$.

(并具体给出共线…的条件)

由此得到n个($n\geq4$)相异点 $z_1, z_2, \cdots z_n$ (其中任意3点不共线)共圆的充要条件.

充10' 要10' (20分)

4/ $D_n=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$ 是复平面上n个相异点构成的点集, 并满足 $|z_k|=r>0$. $k=1,2,\cdots,n$. 令 $f_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=z^n-\sigma_1z^{n-1}+\sigma_2z^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}z+(-1)^n\sigma_n$

证明: 当 $n\geq3$ 时 D_n 构成正n多边形的n个顶点的充要条件是 $\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_m=0$,

其中 $m=\begin{cases}\frac{n-1}{2} & n\text{奇}\\ \frac{n}{2} & n\text{偶}\end{cases}$. 并证明m不能被更小的正整数所代替(Sharp)

举反例 (20分)

5/ $f_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)=z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$. ($n\geq3$). 给出 D_n 构成某一个正多边形的n个顶点的充要条件并给予证明. 同时求出外接圆圆心及半径 $r(>0)$ 来.

(10分)

6/ 利用 $\sin z=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$. $\cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nz^{2n}}{(2n)!}=\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{(n+\frac12)^2\pi^2}\right)$

证明: (1) $\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}-\frac{\zeta(2n-2)}{3!\,\pi^{2n-2}}+\frac{\zeta(2n-4)}{5!\,\pi^{2n-4}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\zeta(2)}{(2n-1)!\,\pi^2}+\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=0$. $n\geq2$.

$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$. $\zeta(3)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$. (10分)

(2) $\frac{2^{2n}-1}{\pi^{2n}}\zeta(2n)-\frac{2^{2n-2}-1}{2!\,\pi^{2n-2}}\zeta(2n-2)+\frac{2^{2n-4}-1}{4!\,\pi^{2n-4}}\zeta(2n-4)+\cdots$

$+\frac{(-1)^{n-1}(2^2-1)\zeta(2)}{(2n-2)!\,\pi^2}+\frac{(-1)^n}{2(2n-1)!}=0$. $n=1,2,3,\cdots$ (10分).

(3) 令 $a_n=\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}}$. $n=1,2,\cdots$ 证明 $(n+\frac12)a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}a_k$. $n\geq2$. ($a_1=\frac{1}{3!}=\frac16$)

并求出 $a_1, a_2\cdots a_6$ 的分数表达式. (10分)

7/ 证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)} = \ln\frac{2\pi}{e}$. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2n)}{n(2n+1)2^{2n}} = \ln\frac{\pi}{e}$ (10分)

8/ 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内处处可导在 $|z|\le 1$ 上连续 若 $f(e^{i\theta}) \in R$. $\theta\in[0,2\pi)$
证明 $f(z)\equiv f(0)\in\mathbb{R}$, $\forall z$: $|z|\le 1$. (10分)

9/ 设 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 内处处可导且 $f(z)$ 不是常数. 若 $|f(z_0)| = \max\limits_{|z|\le 1}|f(z)|$
证明: 1/ $|z_0|=1$. 或 2/ $f'(z_0)\ne 0$. (10分)

10/ 利用 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$ $|z|<1$. 令 $f_k(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos n\theta}{n^k}$. $g_k(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\sin n\theta}{n^k}$
这里 $r\in(0,1]$. $\theta\in[0,2\pi)$. 给出 $k=1,2,3$ 时 $f_k(r,\theta)$ 及 $g_k(r,\theta)$ 的积分或有限形式.
再令 $r\to 1^-$. 求出 $f_k(1,\theta)$ 及 $g_k(1,\theta)$ 的积分及有限形式的最简形式. (10分).

11/ 求此积分 $I_{r,m,n} = \oint_{|z|=R>|r|}\frac{z^m e^{\frac{1}{z}}}{(r+z)^n}dz$ (这里 $r\ne 0$. $m,n\in\mathbb{N}$(正整数)) (10分)

12/ 设 $\triangle z_1z_2z_3$ 的面积为 S.
证明: $S=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(\bar{z}_1z_2+z_3\bar{z}_3+\bar{z}_2z_3)\right|$. 这里 $\mathrm{Im}(z)=y$. 若 $z=x+iy$. $x,y\in\mathbb{R}$. (10分)

13/ 证明 $\triangle z_1z_2z_3$ 构成正三角形的充要条件是 $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$
(10分).

14/. $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+r^{2n}}dx$. $r>0$. m 是非负整数. $n\in\mathbb{N}$, 且 $m\le n-1$. (10分)

15/. $I_2=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{(x^2+r^2)^n}dx$. $r>0$. m - - - - - - - - . (10分)

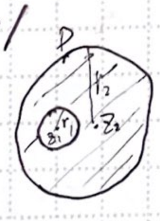
16/ $I_3=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m-1}\sin kx}{(x^2+r_1^2)^n(x^2+r_2^2)^n}dx$. $r_1>0$. $r_2>0$. $k>0$. $m,n\in\mathbb{N}$ 且 $m\le 2n$. (10分)

17/ $I_4=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}\cos kx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}dx$. $a>0$. $b>0$. $c>0$. $k>0$. m 是非负整数 (10分)
$m=0,1,2,\cdots$

18/ $I_5=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}dx}{(ax^2+bx+c)^n}$. m 是非负整数 $n\in\mathbb{N}$. $a>0$. $b,c\in\mathbb{R}$ 且 $ac-b^2>0$
$m\le n-1$. (10分)

19/ $I_6=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{(x^2+a^2)^n(x^2+b^2)^n}dx$. $a>0$. $b>0$. m 是非负整数 $n\in\mathbb{N}$. 且 $m\le 2n-1$
(10分)

20/



$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$
$$\longrightarrow$$
$a,b,c,d\in\mathbb{C}$
且 $ad-bc\ne 0$.

D': $0<r<|z|<1$

求出一个将异心圆环域 D:
z: $|z-z_1|>r_1$. $|z-z_2|<r_2$.
这里 $0<|z_2-z_1|<r_2-r_1$.
映成同心圆环域 D'. $0<r<|z|<1$.
做一个分式线性映射并求出 $r>0$ 来. (20分)

12.2

设 $|a|\neq1$. $|b|\neq1$. 求 $I_1=\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}dz$. $n\in N$

1/ 当 $a=b$ 时. $I_1=\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^{2n}}dz=0$. $\begin{cases}|a|<1\text{时}. I_{2n}=0\\ |a|>1\text{时}. \text{C-G定理 } I_1=0.\end{cases}$

2/ 当 $a\neq b$ 时. 不妨设 $|a|<|b|$.

(1) $|a|<1<|b|$ $I_1=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n},a\right]$

(2) $|a|<1$. $|b|<1$

(3) $|a|>1$. $|b|>1$.

(1) $I_1=2\pi i\,\mathrm{Res}[\cdots,a]$

$\Rightarrow \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k C_{n+k-1}^{n-1}}{(a-b)^{n+k}(z-a)^{n-k}}$

$I_1=2\pi i C_{-1}=2\pi i$

(2) $I_1=2\pi i(\mathrm{Res}[\cdots,a]+\mathrm{Res}[\cdots,b])=2\pi i(C_{-1}^{(1)}+C_{-1}^{(2)})$

$=2\pi i\left\{\frac{(-1)^{n-1}C_{2n-2}^{n-1}}{(a-b)^{2n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}C_{2n-2}^{n-1}}{(b-a)^{2n-1}}\right\}$

另解

令 $z=\frac{1}{t}\Rightarrow dz=-\frac{1}{t^2}dt$. $|z|=1\Leftrightarrow|t|=1$.

$\Rightarrow I_1=-\oint_{|t|=1}\frac{1}{(\frac{1}{t}-a)^n(\frac{1}{t}-b)^n}(-\frac{1}{t^2}dt)=\oint_{|t|=1}\frac{t^{2n-2}}{(1-at)^n(1-bt)^n}dt=0$. C-G定理.

$|a|<1$. $|b|<1$. - · · - - ?

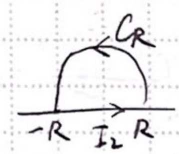
例. $I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kx}{x^2+ax+b}dx$. 这里 $a.b\in R$ 且 $a^2<4b$, $k>0$

$=\cancel{\lim_{R\to+\infty}}\int_{-R}^{R}\frac{\cos kx}{(x+\frac{a}{2})^2+\frac{4b-a^2}{4}}dx$ 令 $t=x+\frac{a}{2}$. $r^2=\frac{4b-a^2}{4}$.

$=\cancel{\lim_{R\to+\infty}}\int_{-R}^{R}\frac{\cos k(t-\frac{a}{2})}{t^2+r^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos kt\cos\frac{ka}{2}+\sin kt\sin\frac{ka}{2}}{t^2+r^2}dt$

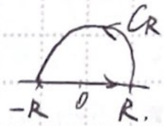
$=\cos\frac{ka}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos kt}{t^2+r^2}dt=\cos\frac{ka}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikt}}{t^2+r^2}dt$

$=\cos\frac{ka}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ikt}}{t^2+r^2}$



$\int_{I_2}+\underset{\downarrow 0}{\int_{C_R}}=\cos\frac{ka}{2}\,2\pi i\,\mathrm{Res}[\cdots,ri]=\cos\frac{ka}{2}2\pi i\frac{e^{-kr}}{2ri}=\frac{\cos\frac{ka}{2}}{e^{kr}}\frac{\pi}{r}$

$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n},\quad n\in\mathbb{N}$



$= \frac{1}{2} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^n} + \underbrace{\int_{C_R} \frac{dx}{(1+x^2)^n}}_{\to 0}$ 取 $R>1$.

$= \pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^n}, i\right]$

$= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^n}, i\right]$ 分母2n次方.

$\frac{1}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{(z-i)^n(z+i)^n} = \frac{1}{(z-i)^n}\cdot\frac{1}{(z-i+2i)^n} \overset{w=z-i}{=\!=} \frac{1}{w^n}\cdot\frac{1}{(w+2i)^n}$

$= \frac{1}{w^n}\left(\sum \frac{(-1)^k C_{n+k-1}^{n-1} w^k}{r^{n+k}}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k C_{n+k-1}^{n-1}}{r^{n+k} w^{n-k}}$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k C_{n+k-1}^{n-1}}{(2i)^{n+k} (z-i)^{n-k}}$

$\frac{1}{z-i}$ 的系数 $c_{-1} = \frac{(-1)^{n-1} C_{2n-2}^{n-1}}{(2i)^{2n-1}} = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-1} i}$

$n-k=1 \Rightarrow k=n-1$

$\Rightarrow I_2 = \frac{\pi C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-1}}$

$J_{r,n} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(r^2+x^2)^n} = \frac{1}{r^{2n}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{[1+(\frac{x}{r})^2]^n} = \frac{1}{r^{2n-1}} \int_0^{+\infty} \frac{d(\frac{x}{r})}{[1+(\frac{x}{r})^2]^n} = \frac{1}{r^{2n-1}} J_n.$

$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}},\quad n\in\mathbb{N}.$

$= \frac{1}{2} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^{2n}}$

$\int_{-R}^{R} \cdots + \underbrace{\int_{C_R} \cdots}_{\to 0} = 2\pi i \sum \operatorname{Res}[\cdots, z_k]$

$\Rightarrow I_n = \pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[\frac{1}{1+z^{2n}}, z_k\right]\right) = \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$ (3')

$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{1+z^{2n}}, z_k\right] = \frac{1}{2n z_k^{2n-1}}$ $\quad z_k^{2n} = -1 \Rightarrow \frac{1}{z_k^{2n-1}} = -z_k.$

$= -\frac{1}{2n} z_k \Rightarrow I_n = \frac{\pi i(-1)}{2n} \sum_{k=1}^{n} z_k$

$z_k^{2n} = -1 = e^{\pi i} = e^{\pi i + 2\pi i(k-1)} \Rightarrow z_k = e^{\frac{(2k-1)\pi i}{2n}} = e^{\frac{k\pi i}{n}} / e^{\frac{\pi i}{2n}}$

$I_n = \frac{-\pi i}{2n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k\pi i}{n}}}{e^{\frac{\pi i}{2n}}} = \frac{-\pi i}{2n} e^{\frac{\pi i}{2n}} \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{-\pi i}{2n} \cdot \frac{2e^{\frac{\pi i}{2n}}}{(1-e^{\frac{\pi i}{n}})}$

$\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$ 即 $\frac{z-z^{-1}}{2i} = \sin\theta.$ $\quad \frac{z^2-1}{2iz} = \sin\theta.$

$= \frac{\frac{\pi}{2n}}{\frac{(e^{\frac{\pi i}{n}}-1)}{2ie^{\frac{\pi i}{2n}}}} = \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$

补: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(r^2+x^2)^n} = J_{r,n}$ $(r>0)$

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{r^{2n}+x^{2n}} = I_{r,n}$

Chap 5 回顾 4题.

$f(z)\not\equiv 0.\ f(z_0)=0\ \ f(z)$ 在 z_0 解析 $\Rightarrow f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z).$

$\varphi(z_0)\neq 0.\ \varphi(z)$ 在 z_0 解析.

$f=\frac{P(z)}{Q(z)}$ Q.P 在 z_0 解析 $P(z_0)\neq 0.\ Q(z_0)=0.\ Q'(z_0)\neq 0.$

$$\mathrm{Res}[f,z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos kx}{(x^2+a^2)}dx \qquad \int_0^{+\infty}\frac{x\sin kx}{x^2+a^2}dx.$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin kx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos kx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}. \qquad \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta}=\frac{2\pi}{AB}\ (A,B>0).$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} \qquad J_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{\pi C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-1}}.$$

$$\ln|1-z|=\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\ (\because=\ln\sqrt{(1-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta}$$
$$=-\ln(1-r\cos\theta-ir\sin\theta)$$
$$=-\ln(1-2r\cos\theta+r^2)$$

Chap 5 3复+2实. 考5题

12.9

$$\cancel{I}\ I_n=\oint_{|z|=1}\frac{1-\cos 4z^5}{z^n}dz=\oint_{|z|=1}\frac{1-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(4z^5)^{2k}}{(2k)!}}{z^n}dz=\oint_{|z|=1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cdot 4^{2k}z^{10k}}{(2k)!z^n}$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}4^{2k}}{(2k)!}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^{n-10k}}dz=\begin{cases}\frac{2\pi i(-1)^{k+1}4^{2k}}{(2k)!} & n=10k+1 \text{时}, k=1,2,\dots\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$\frac{2\pi i(-1)^{\frac{n-1}{10}+1}4^{\frac{n-1}{5}}}{(\frac{n-1}{5})!}=\frac{2\pi i(-1)^{\frac{n+9}{10}}4^{\frac{n-1}{5}}}{(\frac{n-1}{5})!}$$

化简k!

$J=\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^m}dz.\ |a|\neq 1.\ |b|\neq 1$ 且 $|a|\leq|b|$, m, n 是正整数.

取倒数、看照片.

若 $|a|<1,|b|>1$. $\underset{f(z)}{\cancel{\text{原式}}}=\frac{1}{(z-a)^n(z-a+a-b)^m}=\frac{1}{(z-a)^n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kC_{m+k-1}^{m-1}w^k}{r^{m+k}}\right]$

$\frac{1}{(w+r)^m}$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^kC_{m+k-1}^{m-1}\cdot 1}{(a-b)^{m+k}\cdot(z-a)^{n-k}}.$$

$$\Rightarrow J = \oint = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k C_{m+k-1}^{m-1}}{(a-b)^{m+k}} \oint \frac{1}{(z-a)^{n-k}} dz = \frac{2\pi i (-1)^{n-1} C_{m+n-2}^{m-1}}{(a-b)^{n+m-1}}$$

$\cancel{f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n \varphi(z)}}$ $f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z)$

☆ $\sin\theta = e^{\cdots}$?

$$I = \oint_{|z|=r>1} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{1+z} dz = -\frac{2\pi i}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (a>|b|>0)$$

5'

$\Downarrow$

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta} = \frac{2\pi}{AB} \quad 5'$$

$(A>0, B>0$ 或 $A<0, B<0)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin kx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx. \quad \begin{matrix} a>0 \\ b>0 \\ k>0 \end{matrix}$$ 取虚部

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kx}{x^2+ax+b} dx = \frac{\pi \cos\frac{ka}{2}}{r e^{kr}}$$ ~~(尖化的像错)~~

$4b>a^2$. $r = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{r^{2n}+x^{2n}} = \frac{1}{r^{2n-1}} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} \quad \begin{pmatrix} r>0 \\ n\in N \end{pmatrix}$$

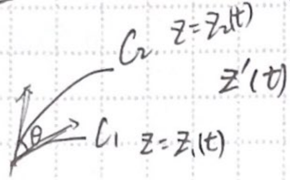
$r=1$ 8分 剩下2分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(r^2+x^2)^n} = \frac{\pi C_{2n-2}^{n-1}}{(2r)^{2n-1}}$$

5题. 2复3实

12.9

Chapter 6 解析映射 Analytic Mappings



$z'(t)$ 连续 且 $z'(t)\neq 0 \Rightarrow$ Def 分段光滑

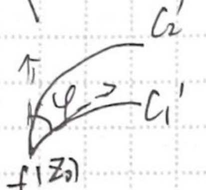
Def. 两曲线间夹角 $\theta = \arg \dfrac{z_1'(t_0)}{z_2'(t_0)} = \arg z_1'(t_0) - \arg z_2'(t_0)$

$a<t<b$.

$f(z_k(t))$

$\Rightarrow f(z)$ 在 $z_0 = z_1(t_0) = z_2(t_0)$ 解析

$w_1(t) = f(z_1(t))$
$w_2(t) = f(z_2(t))$
$\Rightarrow w_1'(t_0) = f'(z_1(t_0))\cdot z_1'(t_0) = z_0 z_1'(t_0)$
$w_2'(t_0) = f'(z_2(t_0))\cdot z_2'(t_0) = z_0 z_2'(t_0)$



w_1 与 w_2 曲线间的夹角:

$\varphi = \arg w_1'(t_0) - \arg w_2'(t_0) = \theta$. 条件: $\underline{f'(z_0)\neq 0}$

当 $f'(z_0)\neq 0$ 时. $\varphi=\theta$. (保角) 切了半削

若 $f'(z_0)=0$. $w_1'(t_0)=w_2'(t_0)=0$ 角度不确定. 不能断言是否保角.

$f'(z_0)\neq 0$ 是大概率事件. ($f(z)\neq$ 常数时)

这是因 $f(z)$ 在 z_0 解析 $\Rightarrow f'(z)$ 也在 z_0 解析. 若 $f'(z_0)=0$

$\Rightarrow f'(z) = (z-z_0)^n \varphi(z)$. $\varphi(z_0)\neq 0$. $\Rightarrow z_0$ 是 $f'(z)$ 的孤立零点

例1. $f_1(z)=\sin z$. $f_1'(z)=\cos z$ 只可能在 x 轴上某些点不保角

例2. $f_2(z)=P_n(z)$. $f_2'(z)=P_{n-1}(z)$ 一次 → x
>1 → 权 n-1 点

例3. $f_3(z)=e^z$ $f_3'(z)=e^z\neq 0$. 处处保角.

莫比乌斯
Möbius Mapping

$w = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $a.b.c.d\in\mathbb{C}$ 且 $ad-bc\neq 0$

$f'(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$ 处处保角 $\lambda A = \begin{pmatrix}\lambda a & \lambda b\\ \lambda c & \lambda d\end{pmatrix}$ $ad-bc=\det A\neq 0$.

$w=\dfrac{az+b}{cz+d} \Rightarrow az+b = czw+dw \Rightarrow (cw-a)z = -dw+b \Rightarrow z = \dfrac{-dw+b}{cw-a}$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}/\det A$? 令 $\lambda^2 = \dfrac{1}{ad-bc}$. $\det(\lambda A)=1$.

将 a.b.c.d 同乘 λ. 可认为 $\det A=1$.

分式映射

$z' = \dfrac{a_1 z+b_1}{c_1 z+d_1}$ $a_1d_1-b_1c_1\neq 0$. $\Rightarrow w = \dfrac{a_2(\cdots)+b_2}{c_2(\cdots)+d_2} = \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$

$w = \dfrac{a_2 z'+b_2}{c_2 z'+d_2}$ $a_2d_2-b_2c_2\neq 0$ $A = A_2A_1$ 分式映射的叠加还是分式映射

而 $\det A = \det A_2 \det A_1 = 1$. 非Abel群. $e = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow w = \frac{z+0}{0+1} = z$. 恒同映射

平移 $w = z + \alpha$. $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0$.

1/ 平移 $z_1 \to w_1$ | $w = z - z_1 + w_1 = z + \underbrace{(w_1 - z_1)}_{\alpha}$

2/ $z_1 \neq z_2 \to w_1 \neq w_2$ | $w = \alpha z + \beta = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}(z - z_1) + w_1$ 　$z_1 \to w_1$, $z_2 \to w_2$ 线映: 不同点 $\Downarrow$ 不同点

3/ $z_1 . z_2 . z_3$ 互异 $\Rightarrow w_1 . w_2 . w_3$ 互异 ‖

$w = \frac{az+b}{cz+d}$ 满足不变式 $\frac{w-w_1}{w-w_2} \Big/ \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \Big/ \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$ 　$f(z) = f(w)$ 不变式

可解出不唯一的 $a.b.c.d$ (实际唯一).

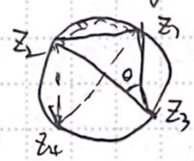
可确定 3点 $\to$ 3点唯一的分式映射.

4/. $z_1 . z_2 . z_3 . z_4$ 互异. 不能! 3个点就唯一确定 w.

定义其交比 $\langle z_1, z_2, z_3, z_4 \rangle = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \Big/ \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \neq 0$

$z_1 . z_2 . z_3 . z_4$ 共线或共圆 $\Longleftrightarrow$ $\langle z_1, z_2, z_3, z_4 \rangle \in \mathbb{R}$

画图理解: 若为 $\mathbb{R} \Rightarrow \arg\left(\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}\right) = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) \pm 0/\pi$.



证 z_4 是否在圆上
圆周角相等/互补.

n个点 $\to$ n个点的映射. Lagrange Interpolation Polynomials
拉格朗日插值多项式

$y = L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k l_k(x)$. 其中 $l_k(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$

$\Rightarrow L_n(x_k) = y_k$. $k = 1, 2, \cdots, n$.

$l_k(x_j) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$

$w = L_n(z) = \sum_{k=1}^{n} w_k l_k(z)$ 　$x_k \to z_k$, $x \to z$.

12.16

1/ $W=z+\alpha$(平移). $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. $A=\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix}$

$w=x'+iy'=(x',y')$

$z=(x,y)\quad \alpha=(a.b)$.

2/ 仿射. $W=\alpha z.\ \alpha\neq 0$. $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=|\alpha|\begin{pmatrix}\cos\theta_0 & -\sin\theta_0\\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

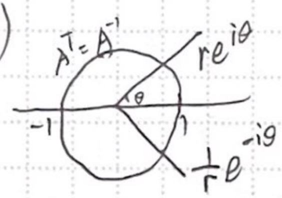
$A=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&1\end{pmatrix}$.

$\alpha=|\alpha|e^{i\theta_0}$. $\theta_0=\arg\alpha$

3/ 倒数. $W=\frac{1}{z}\quad A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$z=0$时 $w=\infty$

$z=\infty$时 $w=0$.



$0<r<1$时 $\frac{1}{r}>1$

$r>1$时 $0<\frac{1}{r}<1$.

乾坤大颠倒

定理 分式线映保广义圆(直线与圆周的并集)

上述3映射. 1/2/将直→直, 圆→圆

3/ 直线 $\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+\beta=0\quad \beta\in\mathbb{R}\quad z=\frac{1}{w}\Rightarrow$ 直线映成圆(不过原点)

直线(过原点)

圆……

一般分式线映:

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\begin{cases}\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}=\frac{a}{d}(z+\frac{b}{a}), & c=0\ (ad-bc\neq 0\Rightarrow ad\neq 0)\\[2ex] \frac{a(z+\frac{d}{c}-\frac{d}{c})+b}{c(z+\frac{d}{c})}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{da}{c}}{c(z+\frac{d}{c})}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2(z+\frac{d}{c})}\end{cases}$$

化为上述3种

曲面上任意两点间最近的曲线: 测地线.

Riemann几何. →~~无~~数条测地线与原不相交 过一点作

抛物几何	欧几	1测地线
椭圆几何.		0
双曲几何		≥ 2.

不动点 $f(z)=z$. z称为$f(z)$的一个不动点 fixed point

分式映射不动点 $\frac{az+b}{cz+d}=z\Leftrightarrow cz^2+(d-a)z-b=0$.

$$\begin{cases}c=0.\ (d-a)z-b=0\begin{cases}d=a\begin{cases}b=0\ (\infty\ \text{fixed point})\\ b\neq 0\ (0)\ \text{平移}\end{cases}\\ d\neq a\quad z=\frac{b}{d-a}\ \text{①fixed point}\end{cases}\\ c\neq 0.\ (d-a)^2=4bc\ ①\\ \qquad\qquad \neq\ ②\end{cases}$$

2次 有3个解→无穷解 & 恒同

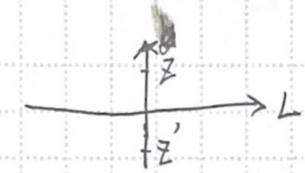
↑

$\underline{W=z}$ 恒同映射

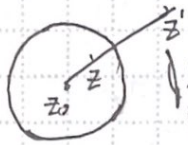
根据不动点个数按抛物.

分式映射. 椭圆. 双曲分类.

对称点. 1/



圆周对称点



$|z-z_0||z'-z_0|=r^2$.

即 $\frac{|z-z_0|}{r}=\frac{r}{|z'-z_0|}$.

且三点共线. 即 $z'-z_0=\lambda(z-z_0)$ $(\lambda>0)$

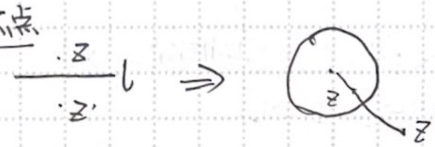
z'与z为关于圆周的一对对称点

$$z'=z_0+\lambda(z-z_0)=z_0+\frac{r^2}{|z-z_0|^2}(z-z_0)$$

$$☆\ z'=z_0+\frac{r^2}{\overline{z-z_0}}$$

e.g. $z_0=0,\ r=1 \Rightarrow z'=\frac{1}{\bar z}$

定理. 分式线性映射保对称点



任一圆盘内点

1/ 求分式线性映射将单位圆盘 $|z|<1 \longrightarrow |w|<1$.

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a(z+\frac{b}{a})}{c(z+\frac{d}{c})}=\alpha\frac{(z-z_1)}{(z-z_2)}$$

$w(z_1)=0 \Rightarrow z_1=z_0$

$w(z_2)=\infty \Rightarrow z_2=z_0'=\frac{1}{\bar z_0}$

$$\Rightarrow w=\alpha\left(\frac{z-z_0}{z-\frac{1}{\bar z_0}}\right)=\underbrace{-\bar z_0\alpha}_{\text{记为}\beta}\left(\frac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}\right).$$ ~~$|z|<1 \Leftrightarrow |w|<1$ 最大模原理~~

$\Leftarrow$ $|z|=1 \Leftrightarrow |w|=1$. 最大模原理 且分映可反解.

$$1=|w|=|\beta|\left|\frac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}\right|_{\underset{\Leftrightarrow z\bar z=1}{|z|=1}}=|\beta|\left|\frac{z-z_0}{z\bar z-\bar z_0 z}\right|_{|z|=1}=|\beta|\cdot\frac{1}{|z|}\left|\frac{z-z_0}{\bar z-\bar z_0}\right|$$
$$=|\beta|\cdot1\cdot1=|\beta|.$$

因此 β 是模为1的复数. $w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}$ ①, 这里 $|z_0|<1$ ②, $\theta\in[0,2\pi)$ ③ (3')

充分性?

2/ 证明不变式 $\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\frac{|dz|}{1-|z|^2}$ (7')

$\Leftrightarrow$ $\left|\frac{dw}{dz}\right|=\frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}$. $w=\frac{az+b}{cz+d}$ $w'(z)=\frac{dw}{dz}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq0$.

$$\Rightarrow \left|\frac{dw}{dz}\right|=\frac{|ad-bc|}{|cz+d|^2}$$

$|z^2|=|z|^2$

$$w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}\Rightarrow a=e^{i\theta},\ b=e^{i\theta}(-z_0),\ c=-\bar z_0,\ d=1$$

$$\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}=\frac{e^{i\theta}(1-|\bar z_0|^2)}{(1-\bar z_0 z)^2}=\frac{e^{i\theta}(1-z_0\bar z_0)}{(1-\bar z_0 z)^2}$$

$$1-|w|^2=1-w\bar w=1-\frac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}\cdot\frac{\bar z-\bar z_0}{1-z_0\bar z}=\frac{(1-\bar z_0 z)(1-z_0\bar z)-(z-z_0)(\bar z-\bar z_0)}{|1-\bar z_0 z|^2}$$

$$=\frac{(1-|z|^2)(1-|z_0|^2)}{|1-\bar z_0 z|^2}$$

左 $\left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{1-|z_0|^2}{|1-\bar{z}_0 z|^2}$. 右 $= \frac{1-w\bar{w}}{1-|z|^2} = \cdots =$ 左.

$\Rightarrow\ 1-|w|^2 = \underbrace{\left|\frac{dw}{dz}\right|}_{>0}(1-|z|^2)$ 说明圆内 → 内
外 → 外
上 → 上.

例. $|z-z_0|<r \longrightarrow |w-w_0|<R$ $z' = \frac{z-z_0}{r}$. $w' = \frac{w-w_0}{R}$.

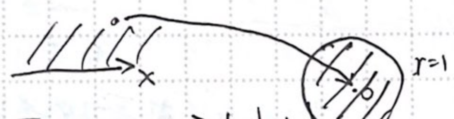
$$w' = e^{i\theta}\frac{z'-z_1'}{1-\bar{z}_1' z'}, \quad |z_1'|<1,\ \theta\in[0,2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{w-w_0}{R} = e^{i\theta}\cdot\frac{\frac{z-z_0}{r}-\frac{z_1-z_0}{r}}{1-\frac{\overline{z_1-z_0}}{r}\left(\frac{z-z_0}{r}\right)}$$

$$\Rightarrow w = w_0 + e^{i\theta} rR\,\frac{z-z_1}{r^2-(\overline{z_1-z_0})(z-z_0)}$$ 其中 $|z_1-z_0|<r$, $\theta\in[0,2\pi)$

$\frac{|dw|}{R^2-|w-w_0|^2} = \frac{|dz|}{r^2-|z-z_0|^2}$, 准不变式.

例.



题: $\operatorname{Im} z>0 \longrightarrow |w|<1$.

解 $w = \alpha\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ 一对对称点 令 $z = x\in\mathbb{R} \Rightarrow |w|=1$.

$$1 = |\alpha|\left|\frac{x-z_0}{x-\bar{z}_0}\right| = |\alpha|\left|\frac{x-z_0}{\overline{x-z_0}}\right| = |\alpha| \Rightarrow \alpha = e^{i\theta}.\ \theta\in[0,2\pi)$$

因此 $w = e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ 其中 $\operatorname{Im} z_0>0$. $\theta\in[0,2\pi)$

12.23

$\mathrm{Im}\, z>0 \to |w|<1$ $w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}$ 其中 $\mathrm{Im}\, z_0>0$. $\theta\in[0,2\pi)$. 特例: $w=\frac{z-i}{z+i}$

问题求 $|z|<1 \to \mathrm{Im}\, w>0$ 的分式线性映射 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 反解.

例 $w(z-\bar z_0)=e^{i\theta}z-z_0e^{i\theta} \Rightarrow (w-e^{i\theta})z=w\bar z_0-z_0e^{i\theta}$

$\Rightarrow z=\frac{w\bar z_0-z_0e^{i\theta}}{w-e^{i\theta}}$ $(|w|<1 \to \mathrm{Im}\, z>0)$.

→映 $\mathrm{Im}\, z>0$ → $|w|<1$?

交换 z.w. 得 $w=\frac{\bar z_0 z-z_0e^{i\theta}}{z-e^{i\theta}}$ $(|z|<1\to \mathrm{Im}\, w>0)$.

映到 z_0 特例 令 $\theta=0$. $z_0=i$ 得 $w=\frac{-i(z+1)}{z-1}$ 即 $w=\frac{i(z+1)}{1-z}$ $|z|<1\to\mathrm{Im}\, w>0$, $0\to i$

例. 若 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. $ad-bc\neq0$. 证明: $\mathrm{Im}\, z>0 \to \mathrm{Im}\, w>0$ 的充要条件是 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 中 $ad-bc>0$.

解 令 $z=x+iy$. $w=\frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d}$

$$=\frac{[\quad][c(x-iy)+d]}{[\quad][\quad\cdots]}=\frac{(\quad)+i(ad-bc)y}{(cx+d)^2+c^2y^2}$$

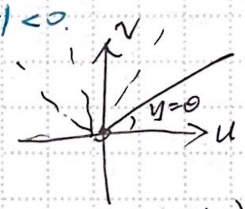
$w=u+iv$. $v=\frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2+c^2y^2} \Rightarrow vy=\frac{(ad-bc)y^2}{(cx+d)^2+c^2y^2}>0$ ∵ $\mathrm{Im}\, z>0\to\mathrm{Im}\, w>0$ 需要 v.y 同号.

$vy\geq0 \iff ad-bc>0$ 得证.

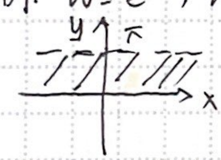
注意这里被平方的是实数 若虚数可能 <0

如果 $a.b.c.d \in \mathbb{C}$ 为伪命题.

$a=i$, $b=c=0$. $d=i$. $w=\frac{iz}{i}=z$. 而 $ad-bc=-1<0$.



例. $w=e^z$; $w'=e^z\neq0$.



$w=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=r\cdot e^{i\theta}$

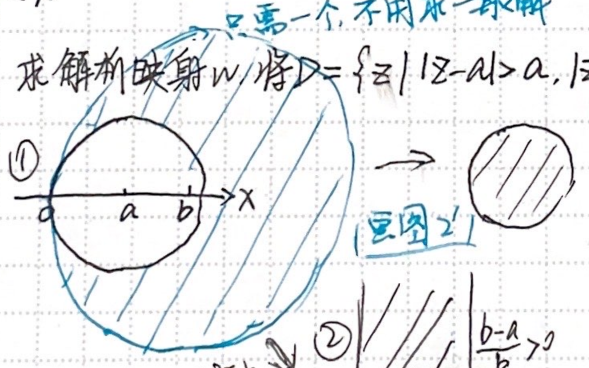
直线 → 不过原点的射线

$-\infty<x<+\infty$, $0<y<\pi$ → $\mathrm{Im}\, w>0$.

只需一个,不用求一般解

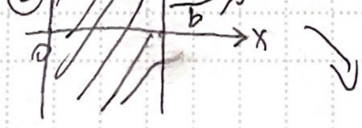
考 例1. 求解析映射 w 将 $D=\{z \mid |z-a|>a, |z-b|<b. 0<a<b\}$ 映成 $|w|<1$

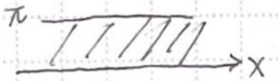
解 D: ①



$z'=\frac{z-2a}{z}$ $a=1$, $b=-2a$. $c=1$. $d=0$. $ad-bc=2a>0$. 符合上面条件.

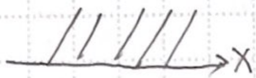
过无穷点



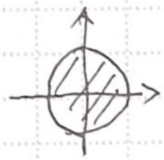


$\times i$ 旋90° 放缩.

$z'=\dfrac{\frac{\pi i}{b-a}}{b}z$



$z''=e^{z'}$

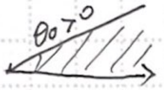


$w=\dfrac{z''-i}{z''+i}$

{5步 每步2分
{4步 每步2.5分

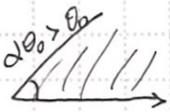
$$w=\frac{z''-i}{z''+i}=\frac{e^{z'}-i}{e^{z'}+i}=\frac{e^{\frac{(z-2a)\pi i b}{z(b-a)}}-i}{e^{\frac{(z-2a)\pi i b}{z(b-a)}}+i}$$

例. $w=z^{\alpha}$. $\alpha>1$. $w'(0)=0$. 不保角映射.

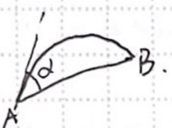


$\theta_0>0$ $\longrightarrow w=(re^{i\theta})^{\alpha}=r^{\alpha}e^{i\theta\alpha}$ $0<\theta<\theta_0$

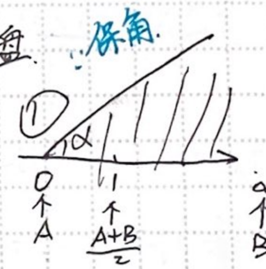
$0<\alpha\theta<\alpha\theta_0$.



$\alpha\theta_0>\theta_0$ 那么 $w=z^{\frac{\pi}{\theta_0}}$ 可以将扇形映到上半平面.

例. 直线截圆弧的弓形  $0<\alpha<\pi$.

求解析映射 $w=f(z)\longrightarrow$  $|w|<1$ 映成单位圆盘. ∴保角.



解 ① $z'=(z-A)/(B-z)$ 将 $A\to$ 原点. $B\to$ 无穷.

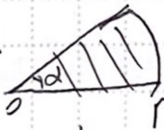
不能选 $z-B$. 会映到负半轴 中间的映成正实轴

圆 $\to$ 直线. 保角故夹角 α

② 扇形 $\to$ 上半平面. $z''=(z')^{\frac{\pi}{\alpha}}$

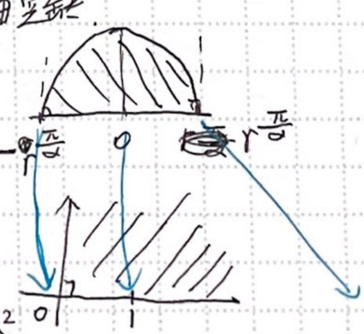
③ 上半平面 $\to$ 单位圆 $w=\dfrac{z''-i}{z''+i}$

$$w=\frac{\left(\frac{z-A}{B-z}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}-i}{\left(\frac{z-A}{B-z}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}+i}$$

例.  (其中 $0<\alpha<\pi$, $r>0$.)

★不能直接 $z^{\frac{2\pi}{\alpha}}$. 正实轴空缺.

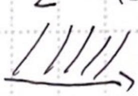
解 令 $z'=z^{\frac{\pi}{2\alpha}}$ ①



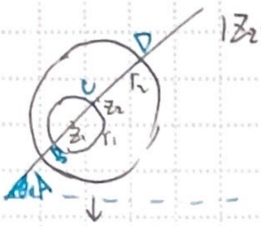
$z''=\dfrac{z'+r^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{r^{\frac{\pi}{2\alpha}}-z'}$ 映为夹角 90°扇形 见上例 ②

$ad-bc>0$ 到上半平面

$z'''=(z'')^2$.

③ 

④ $w=\dfrac{z'''-i}{z'''+i}$. $w=\dfrac{\left(\frac{z^{\frac{\pi}{2\alpha}}+r^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{r^{\frac{\pi}{2\alpha}}-z^{\frac{\pi}{2\alpha}}}\right)^2-i}{\text{、、、}+i}$.



$|z_2 - z_1| + r_1 < r_2$

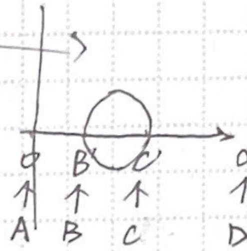
$$z' = \frac{z-A}{D-z}$$

$A = z_2 - r_2 e^{i\theta_0}$

$B = z_1 - r_1 e^{i\theta_0}$

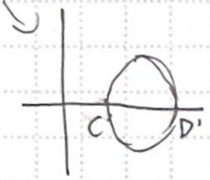
$C = z_1 + r_1 e^{i\theta_0}$

$D = z_2 + r_2 e^{i\theta_0}$



$$w' = \frac{w+1}{1-w} \qquad c' = \frac{1-r}{1+r}$$

$$D' = \frac{1+r}{1-r} > c'$$



$$w' = \frac{w+1}{1-w} = kz' = k \cdot \frac{z-A}{D-z}$$

Chapter 6 总结. 假设 $ad-bc \neq 0$]

- $w = \frac{az+b}{cz+d}$ $\quad \frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$.
- $|z|<1 \longrightarrow |w|<1$. $w = e^{i\theta} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ 其中 $|z_0|<1$, $\theta \in [0, 2\pi)$

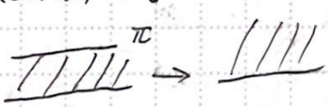
  此时 $\frac{dw}{dz} = e^{i\theta} \frac{1-|z_0|^2}{(1-\bar{z}_0 z)^2}$ $\quad a = e^{i\theta}$, $b = -z_0 e^{i\theta}$, $c = -\bar{z}_0$, $d=1$.

  不变式: $\frac{|dw|}{1-|w|^2} = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$. $\Leftrightarrow \left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{1-|w|^2}{1-|z|^2} \Leftrightarrow \frac{1-|z_0|^2}{(1-\bar{z}_0 z)^2} = \frac{1-|w|^2}{1-|z|^2} = \frac{1-w\bar{w}}{1-|z|^2}$ ...
- $\mathrm{Im}\, z>0 \rightarrow |w|<1$ $\quad w = e^{i\theta} \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$. 其中 $\mathrm{Im}\, z_0 > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

  最简形式 $w = \frac{z-i}{z+i}$.
- $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $\quad w = \frac{az+b}{cz+d}$ $\quad \mathrm{Im}\, z>0 \rightarrow \mathrm{Im}\, w>0$ 的充要条件为 $ad-bc>0$.

  $$v = \frac{(ad-bc)\, y}{(cx+d)^2 + c^2 y^2}$$

  有无映不到的地方? 后面过程的ad-bc是[illegible]还是>0 ??
- $e^z = w$.



$w = z^\alpha$

$\alpha > 1$

Chap 5 2实 3复 / 2复 3实 ??

Chap 6 20'

Chap 1-4 1章不考

3章考1题.