微积分A(2)　郭玉霞

- 多元函数的连续与极限

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则不论动点 x 沿什么路径趋向定点 x_0，都有 $f(x)\to A$

↑ 重极限.

e.g. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$ $((x,y)\neq(0,0))$. 研究 $\lim\limits_{x\to0,y\to0} f(x,y)$ 是否存在.

解：当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$0<(x^2+y^2)\leq(|x|+|y|)^2$

$|f(x,y)-0|=\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\leq|x|+|y|\leq2\sqrt{x^2+y^2}$.

△ 累次极限.

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ 二次极限

e.g. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ 的累次极限. (重极限不存在!)

$y\neq0$ 时 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=\dfrac{0}{y^2}=0.\Rightarrow\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$. 同理, ……

e.g. $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} & xy\neq0\\ 0 & xy=0.\end{cases}$ 研究 $\to(0,0)$ 极限.

∵ 累：$xy\neq0$，$\lim\limits_{x\to0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0} y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 不存在. …… ∵ $x\sin\frac{1}{x}\to0$! 注意!

重：$\left.\begin{array}{l}xy\neq0\quad |f(x,y)-0|\leq|x|+|y|,\\ xy=0.\quad |f(x,y)-0|=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

累与重无必然关系

1. 重 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在，则累 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}$ 存在且=重 pf?
2. 若重与2累存在，则3者相等.
   若2累存在且不等，则重不存在.

Thm. 柯西准则. 海涅定理. 夹逼准则均成立 ✓.

e.g. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$. $x>0,y>0$ 时. $0<\dfrac{xy}{x^2+y^2}<\dfrac{1}{2}$.

故 $0<\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$

由夹挤原理 $\lim$ …… $=0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\lim\left(\dfrac{x^2}{e^x}\cdot\dfrac{1}{e^y}+\dfrac{y^2}{e^y}\cdot\dfrac{1}{e^x}\right)=0.$

~~直接 0·1=0?~~

○ 向量值函数的连续　$f \in C(\Omega)$ 在 Ω 上点点连续

f 在点 X_0 连续 $\Leftrightarrow$ f_i 在点 X_0 连续 $(i=1,2,\cdots,n)$

$f(x,y)=\sin(xy)$ 是否在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续？(X).

一致连续 $\Leftrightarrow$ 任意两点列 $\{X_n\}\{Y_n\}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n-Y_n\|=0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(X_n)-f(Y_n))=0$.

$\rho=\|X-X_0\|_n$

$|f(X)|\leq M\rho^k \Rightarrow f(X)=O(\rho^k)$

$\lim\limits_{X\to X_0}\frac{f(X)}{\rho^k}=0 \Rightarrow f(X)=o(\rho^k)$

$\lim\limits_{X\to X_0}\frac{f(X)}{\rho^k}=c\neq 0 \Rightarrow f(X)$ 是 k 阶无穷小函数

1.4.2　2.26　n 元函数的偏导数

Def.（偏增量）$z=f(x,y)$.

$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$

$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

Def.（偏导数）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ 关于 x 的偏导数

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

也可记为 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}$ 或 $f'_x(x_0,y_0)$ $f'_y(x_0,y_0)$

N.B. 连续不一定偏导存在！e.g. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$

偏导存在不一定连续！
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$（由定义可求）.

但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 极限不存在. 故不连续（不只两条直线）

○ 高阶偏导数　$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$ 关于 x 的二阶偏导数　f''_{x^2}

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy}(x,y)$ 先对 x 后对 y 的二阶混合偏导数 f''_{xy}

不写 ″：简记.

例 求 $z=xy+\cos(x-2y)$ 的二阶偏导数

$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\sin(x-2y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x+2\sin(x-2y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\cos(x-2y) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4\cos(x-2y) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=1+2\cos(x-2y) & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1+2\cos(x-2y). \end{cases}$$

例 ☆ 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

求 $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}$ 求 $f_x(0,0)$. $f_x(\quad)$.

$(x,y)\neq(0,0)$ 时. $\frac{\partial f}{\partial x}=y\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+x\cdot\left(2y^2\cdot\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)\right)$

$=y\cdot\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\cancel{y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2}$ $x=0$ 时. 为 $-y$

$(x,y)=(0,0)$ 由定义 $f_x(0,0)=0$. $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=-1$

Thm (混合偏导数定理) Pf? P41.

若 $f(x,y)$ 两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$. $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 邻近存在.

且在 (x_0,y_0) 连续 那么有两者相同.

多元同理. e.g. $\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial z\partial x\partial y}=\frac{\cdots}{\partial x\partial y\partial z}$

$\frac{\cdots}{\partial x^2\partial y\partial z^2}=\frac{\cdots}{\partial z\partial y\partial z\partial x^2}$

典型PDE?? PDE: 包含未知函数的偏导数的方程 Δu: 拉普拉斯 u.

$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ u 为关于 $x.y.z$ t 函数 u 与 t?

波方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=f(x,y,z,t)$

Def. (全微分) P25.

$dz|_{M_0}=df(x_0,y_0)=a_1\Delta x+a_2\Delta y=a_1dx+a_2dy$

可微必要条件

Thm. 可微一定连续

Thm. 可微 $\Longrightarrow$ 在这点的偏导存在, 且 $dz|_{M_0}=df(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial x}|_{M_0}dx+\frac{\partial z}{\partial y}|_{M_0}dy$

Thm. $f(x,y)$ 各偏导在 $M_0(x_0,y_0)$ 处连续, 则 $f(x,y)$ 在 M_0 处可微. $\longrightarrow$ 可微充分条件

复习pf.

2.28

可微的其他充分条件？

可偏导.偏导连续 $\Rightarrow$ 可微

可微 $\Rightarrow$ 可偏导.函数连续.

可导 $\not\Rightarrow$ 可微.

可微 $\not\Rightarrow$ 可导.连续.

e.g. $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在 (x_0, y_0) 存在, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续.

$\Rightarrow f$ 在 (x_0, y_0) 可微.

Thm.

可微的充要条件: $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y+\Delta y) - f(x_0, y_0)$

$= a\Delta x + b\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$

其中 $a.b$ 为常数, $\varepsilon_1.\varepsilon_2$ 为关于 $\Delta x.\Delta y$ 的函数.满足 $\Delta x\to 0.\ \Delta y \to 0$ 时 $\varepsilon_1 \to 0.\ \varepsilon_2 \to 0$.

Pf. ①若可微.有 α 满足 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\alpha}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$.

又有不等式 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \le |\Delta x| + |\Delta y| \le 2\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

$\therefore \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\alpha}{|x|+|y|} = 0$.

正负符号 1/-1

将 α 写成 $\alpha = \underbrace{\frac{\alpha\cdot sgn(\Delta x)}{|\Delta x|+|\Delta y|}}_{\varepsilon_1}\Delta x + \underbrace{\frac{\alpha\cdot sgn(\Delta y)}{|\Delta x|+|\Delta y|}}_{\varepsilon_2}\Delta y$

②若有题中 $\varepsilon_1.\varepsilon_2$ $\because |\Delta x| \le \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.\ |\Delta y| \le \cdots$

$\therefore |\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y| \le (|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

故 $\Delta x\to 0.\ \Delta y \to 0$ 时 $\frac{\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}{\sqrt{\cdots}} \to 0$.

连续可微 C^1 $\Rightarrow$ 偏导存在且连续 课P33-34.?

1.4.3 方向导数和梯度

$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in l}} \frac{f(x)-f(x_0)}{\|x-x_0\|}$ l 为 x_0 出发沿 l 方向的射线

Thm. 若 $f(x,y)$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 可微 且 $df(x_0, y_0) = a_1\Delta x + a_2\Delta y$

则 $V = (\cos\alpha, \cos\beta)^T$ 的方向导数存在, 且有

$\frac{\partial f}{\partial V}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\cos\beta$. P35

梯度的定义.

3.4 向量值函数微分. 复合向量值函数求导

Def.(线性映射) $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$$\mathcal{L}(\alpha X+\beta Y)=\alpha\mathcal{L}(X)+\beta\mathcal{L}(Y)$$

$\mathcal{L}$ 与 $A_{m\times n}$ 矩阵一一对应, $\mathcal{L}(X)=AX$.

Def.(可微) $U=f(X)$ 是 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射. $X=(x_1,\cdots x_n)^T$. $U=(u_1,\cdots,u_m)^T$.

$$f(X)=\begin{bmatrix} u_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ u_m(x_1,\cdots x_n)\end{bmatrix}$$

若 m 个 n 元函数 $u_i(x_1,\cdots,x_n)$ 都在 $X_0\in\Omega$ 可微,
则 $U=f(X)$ 在 X_0 可微.

Def.(雅可比矩阵) 若每个分量函数在各个变量的偏导都存在.

$$J(f(X_0))=\left.\frac{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots x_n)}\right|_{X_0}$$

$$=\left.\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}\right|_{X_0}$$, 又称为映射 f 在 X_0 处的导数

$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

$U=f(X)$ 在 X_0 处的微分 $J(f(X_0))dX$ 也记为 $df(X_0)$

$dF=JF\times dX$. 矩阵乘法.

- 多元实值函数的导数四则运算 ⇒ 向量值函数. (?)
- 多元实值函数的链式求导法则

$z=f(u,v)$ 可微 $u=u(x,y)$. $v=v(x,y)$ 关于 $x.y$ 偏导存在 ⇒ $z=f(u,v)$ 关于 x,y 偏导存在.

条件↑

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\cdots$

即 $\begin{cases} y=f(u_1,\cdots u_k) \quad \begin{cases} u_1=g_1(x_1,\cdots x_n) \\ \vdots \\ u_k=g_k(x_1,\cdots x_n)\end{cases} \\ \frac{\partial y}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial u_k}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (i=1,2,\cdots,n).\end{cases}$

Pf. $\Delta_x u=u(x+\Delta x,y)-u(x,y)$

$\Delta_x v=v(x+\Delta x,y)-v(x,y)$.

$\Delta_x z=f(u+\Delta_x u,v+\Delta_x v)-f(u,v)$.

$f(u,v)$ 可微知: $\Delta_x z=\frac{\partial f}{\partial u}\Delta_x u+\frac{\partial f}{\partial v}\Delta_x v+o(\rho)$ $(\rho=\sqrt{\Delta_x u^2+\Delta_x v^2})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\underbrace{\lim\frac{o(\rho)}{\rho}}_{=0}\cdot\lim\sqrt{\left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)^2}$$

剩余是 $o(?)$ → 不是微分.

偏导没有这个说法.

e.g. $z=f(u,v)$ 可微. 一元函数 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 可导.

则 $z=f(u(x),v(x))$ 可导. 且 $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$.

N.B. $z=f(u,v)$ 可微条件!

e.g. $f(u,v)=\begin{cases}\frac{u^2v}{u^2+v^2} & (u^2+v^2\neq 0)\\ 0 & (u^2+v^2=0)\end{cases}$ 考察 $f(u(t),v(t))$ 在 $t=0$ 的导数.

$u(t)=v(t)=t$.

✓ f 不可微. $\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{(0,0)}=0$.

$f(u(t),v(t))=\frac{1}{2}t$. $f'(0)=\frac{1}{2}$

但代公式得 0.

e.g. $z=xf(2x,\frac{y^2}{x})$. f 为二阶连续可微. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

先对 y 求导简化运算! (偏导存在. 连续 ⇒ 顺序不影响)

Thm $z=f(u_1,\cdots,u_m)$ 可微. $u_i=u_i(x_1,\cdots,x_n)$ 偏导存在.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial z}{\partial u_m}\right)\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ & \vdots & \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

记 $\frac{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=[\quad]$ (行 / 列)

记 $\frac{D(u_1,u_2,\cdots,u_m)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\det\frac{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$ 行列式.

熟悉偏导的矩阵形式! 矩阵乘法!

$y_i=y_i(u_1,u_2,\cdots,u_k)$

$(u_0=u(x_0))$ $u_i=u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\Big|_{x_0}=\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_k)}\Big|_{u_0}\frac{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_k)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\Big|_{x_0}.$$

$\in M_{m\times n}$ $\in M_{m\times k}$ $\in M_{k\times n}$.

前提: $y(u)$ 可微. $u(x)$ 偏导存在.

$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ 每一项为右 k 项相加 ✓.

右2可微 ⇒ 左可微.

若右可偏导? ⇒ 左可偏导.

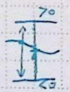
形式 $\frac{\partial}{\partial}$ | 表示可微吗? ✗

3.6

1.6 隐(向量值)函数. 反(向量值)函数的存在性及其微分

Thm1 P56. 二元函数 $F(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内: ① 是 $C^{(1)}$ 类函数.

Pf. ② $F(x_0,y_0)=0$. ③ $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. 则…



① 存在性. 不妨设 $F_y'(x_0,y_0)>0$.

由连续性. 存在 $U(x_0,\delta_1)\times U(y_0,\delta_2)$ 满足 $F_y'(x,y)>0$.

特别有 $F_y'(x_0,y)>0$. $y\in U(y_0,\delta_2)$

从而 $F(x_0,y)$ 在 $U(y_0,\delta_2)$ 中关于 y 严格单增.

需保证 $\delta_0<\delta_1$! 与前 δ_1 不同 于是 $F(x_0,y_0-\delta_2)<F(x_0,y_0)=0<F(x_0,y_0+\delta_2)$

U含等号? 不含. 证明可略修改

~~固定~~ ~~x~~, 再次用连续性保号性 (固定 $y_0-\delta_2$ 和 $y_0+\delta_2$)

得在 x 某邻域 $U(x_0,\delta_0)$. $F(x,y_0-\delta_2)<0$, $F(x,y_0+\delta_2)>0$.

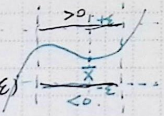
对任意给定的 $\tilde{x}\in U(x_0,\delta_0)$.

$F_y'(\tilde{x},y)>0$. $F(\tilde{x},y_0-\delta_2)<0$, $F(\tilde{x},y_0+\delta_2)>0$

由零点定理 唯一存在 $\tilde{y}\in U(y_0,\delta_2)$ s.t. $F(\tilde{x},\tilde{y})=0$.

$\Rightarrow$ 从而确定 $\tilde{y}=f(\tilde{x})$.

② 连续性. 足够小的?



对 $\forall\bar{x}\in U(x_0,\delta_0)$ 以及 $\forall\varepsilon>0$. 有

$$F(\bar{x},f(\bar{x})-\varepsilon)<F(\bar{x},f(\bar{x}))=0<F(\bar{x},f(\bar{x})+\varepsilon)$$

由F的连续性. 存在 $\bar{x}$的邻域 使得 $\forall x\in$ 此邻域,有

$$F(x,f(\bar{x})-\varepsilon)<0<F(x,f(\bar{x})+\varepsilon)$$

即 $f(x)\in(f(\bar{x})-\varepsilon,f(\bar{x})+\varepsilon)$. 即 $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$.

③ 可导公式及连续可微性.

$\forall x\in U(x_0,\delta)$. 由隐函数的连续性. $\Delta x\to0$时 $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)\to0$.

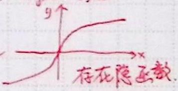
由隐函数的定义. F的连续可微($C^{(1)}$:可微1阶!)知:

$$0=F(x+\Delta x,y(x)+\Delta y)-F(x,y(x))$$
$$=F_x'(x,y(x))\Delta x+F_y'(x,y(x))\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \beta}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-(F_x'(x,y(x))+\varepsilon_1)}{F_y'(x,y(x))+\varepsilon_2}=-\frac{F_x'(x,y(x))}{F_y'(x,y(x))}\quad\forall|x-x_0|<\delta.$$

故 y' 在 $U(x_0,\delta)$上连续.

Rem. $F_y'(x_0,y_0)\neq0$ 不是隐函数存在的必要条件! e.g. $F(x,y)=x-y^3$. $F(x,y)=0$图象



存在隐函数

② 另一种证明. $F(x,y(x))\equiv0$.

$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$. 立得 ?几何

用梯度概念想象

Thm2. 在多元的隐函数存在定理推广

e.g. $F(x-y,y-z)=0$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

设F满足Thm条件. $z=(x,y)$.

对x求偏导: z与x.y有关. y常量

$\Rightarrow F_1'(x-y)_x'+F_2'(y-z)_x'=0$.

$F_1'-F_2'\frac{\partial z}{\partial x}=0$.

Thm3. 方程组 ?

$$J(f(X))=\frac{\partial(y_1,\cdots,y_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=-\left(\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right)^{-1}\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$$

$Y=f(X)$.

例. 已知 $u=f(x,y,z)$, $z=g(x,y)$, $h(x,y)=0$. f,g,h 均为 $C^{(1)}$ 类. $\frac{\partial h}{\partial y}\neq 0$. 试求: $\frac{du}{dx}$

$\frac{du}{dx}=f_1'+f_2'\frac{dy}{dx}+f_3'\frac{dz}{dx}$ $\quad \frac{dz}{dx}=g_1'+g_2'\frac{dy}{dx}$ $\quad h_1'+h_2'\frac{dy}{dx}=0$.

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{h_1'}{h_2'} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=g_1'-g_2'\frac{h_1'}{h_2'}$

$\Rightarrow \frac{du}{dx}=f_1'-f_2'\frac{h_1'}{h_2'}+f_3'(g_1'-g_2'\frac{h_1'}{h_2'})$

3.11

逆向量值函数. $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. 已知 $y_j=f_j(X)$ $j=(1,\cdots,n)$

$Y=f(X)$.

Pf. 令 $F_j=y_j-f_j(X)$.

则 $F_j(X,Y)=0$. $j=1,\cdots,n$.

(1) $F_j(X_0,Y_0)=0$. $j=1,\cdots,n$ 自变量: X.

(2) F_j 在 (X_0,Y_0) 邻域是 C' 的. 且

$\frac{\partial(F_1\cdots F_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}\Big|_{(X_0,Y_0)}=(-1)^n\frac{\partial(f_1\cdots f_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}\Big|_{(X_0,Y_0)}\neq 0$.

$\Rightarrow$ 存在 $g(X)=Y$ 隐函数. 满足

$g(X_0)=Y_0$. $F_j(X,g(X))=0\Rightarrow g(X)_j-f_j(X)=0$.

1.7. 曲面与曲面的表示法. 切平面与切线.

(1) 显示表达 $z=f(x,y)$

(2) 隐 $F(x,y,z)=0$

(3) 参数方程 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v).\end{cases}$

求法向量. (对曲面)

① 曲面 S: $z=z(x,y)$. $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$. 可微.

切平面 $Z=z_0+\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}(X-x_0)+\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y}(Y-y_0)$

法向量 $\vec{n}=\pm(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1)\Big|_{(x_0,y_0)}$ $-$ 上侧. $+$ 下侧
z轴正 z轴负.

$\frac{\partial z}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(y-y_0)-1\cdot(z-z_0)=0$.

② 曲面 S: $F(x,y,z)=C$. 处处可微. $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

设在 M_0 $\frac{\partial F}{\partial x}$. $\frac{\partial F}{\partial y}$. $\frac{\partial F}{\partial z}$ 不全等于0. 有隐函数 e.g. $x=x(y,z)$

则 S 在 M_0 的法向量为 $\vec{n}=\pm(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$ 其实与①相同.

$=\mathrm{grad}\,F(x_0,y_0,z_0)$ e.g. ~~$x=x(y,$~~ $z=z(x,y)$

切平面. $\frac{\partial F}{\partial x}(X-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z_0)=0$. $\vec{n}=(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1)$

(隐函数微分法) $=(-\frac{F_x'}{F_z'},-\frac{F_y'}{F_z'},-1)$

③ 曲面S: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$. $(u,v)\in D$.

(x'_u, y'_u, z'_u)和(x'_v, y'_v, z'_v)线性无关.

要求: ① $x(u,v)$ ... $z(u,v)$ 连续可微

② 雅可比矩阵满秩. $\operatorname{rank}\left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right] = 2$. (本例中)

假定 M_0 对应参数值 (u_0, v_0)

则在 M_0 切平面方程为 $\begin{cases} X = x(u_0,v_0) + x'_u(u-u_0) + x'_v(v-v_0) \\ Y = \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ Z = \cdots \end{cases}$ (将改变量换为微分)

Pf. 固定 u_0. 得以 v 为参数曲线 $L_v = (x(u_0,v), y(u_0,v), z(u_0,v))$

L_v在 M_0 切向量 $\vec{a} = \cancel{(x'_u, y'_u, z'_u)}(x'_v, y'_v, z'_v)$

同理 L_u $\vec{b} = \cancel{(x'_v, y')}(x'_u, y'_u, z'_u)$.

由于 $\vec{a}, \vec{b}$ 在切平面上. $\vec{a}, \vec{b}$ 线性无关 $\Rightarrow \vec{n} = \vec{a}\times\vec{b}$

相关时退化为曲线,而非曲面.

求切线: (对曲线)

同理 P75.

~~若 z = 1. ∨x,y~~

课本: 连续可微.

① 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

① x, y, z 在 M_0 可微 ($\Rightarrow$ 连续)

② $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial t}$ 满秩(即三导数不均为0).

隐函数

为什么参方维数=对当维度?

则该切线. $M_0 + (x'(M_0), y'(M_0), z'(M_0))(t-t_0)$

② 两个曲面的交. $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 切向量 $\operatorname{grad} F(M_0) \times \operatorname{grad} G(M_0)$.

或 $(1, y'(x_0), z'(x_0))$

(若 y, z 为关于 x 的隐函数组).

求曲面的法线. 曲线的法平面.

线: ~~Ax+By+Cz=0~~ 法向量 (A, B, C).

面: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$.

3.13

1.8 泰勒公式

?

假定 $f(x,y)$ 在区域 D 都存在 n+1 阶连续偏导. 且连线 $\overline{M_0M}$ 完全在 D 中. 则:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]$$

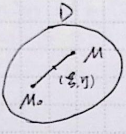
$$+ \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x-x_0)^k(y-y_0)^{n-k} + R_n(x,y).$$

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \frac{\partial^{n+1} f(\xi,\eta)}{\partial x^k y^{n-k+1}}(x-x_0)^k(y-y_0)^{n-k+1}$$

Pf?

(ξ, η) 在连线 $\overline{M_0M}$ 上.



Def.(高阶微分) 设x,y改变量为h,k.

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y) := \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k.$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x,y) := \sum_{i=0}^{m} C_m^i \frac{\partial^m f(x,y)}{\partial x^i \partial y^{m-i}} h^i k^{m-i}$$

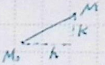
Thm(Taylor)

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+\begin{cases} o(\|\Delta x\|^n) \\ \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(\xi,\eta)\end{cases}$$

Pf. $\overline{M_0M}=(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))$ 记: $h=(x-x_0)$, $k=(y-y_0)$

$\overline{M_0M}$上的点 $(\bar{x},\bar{y})=(x_0+th,\ y_0+tk)$

$f(\bar{x},\bar{y})=f(x_0+th,\ y_0+tk)$ $(0\le t\le 1)$



起→终直线
化多元为一元.

设 $g(t)=f(x_0+th,\ y_0+tk)$ $(0\le t\le 1)$.

$$g(t)=g(0)+g'(0)t+\frac{g''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}t^{n+1}$$

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{g''(0)}{2!}+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}+\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

根据复合函数微分法.

$$g'(0)=\frac{d}{dt}f(x_0+th,\ y_0+tk)\Big|_{t=0}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}k.$$

、、、、

例. 求$f(x,y)=e^{x+y}$在(0,0)带皮亚诺余项三阶泰勒式.

间接法. $e^t=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+o(t^3)$.

$e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{6}(x+y)^3+o((x+y)^3)$. $\frac{o_a}{a}\cdot\frac{a}{b}=0$. $o_a=o_b$.

$$\frac{(x+y)^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}=\left|\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\right|^{\frac{3}{2}}\le 2\sqrt{2} \Rightarrow o((x+y)^3)=o((\sqrt{x^2+y^2})^3).$$

1.9 多元函数极值、条件极值. P82

Thm. 极值的必要条件: 极值点一定是驻点. (对可微函数)

|驻点不是极值的充分条件 e.g. $y=x^3$. $z=x^2-y^2$ (0,0))

($z\overset{?}{=}\sqrt{x^2+y^2}$ (0,0) 极小. 偏导数不存在)

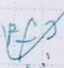
鞍点.
一轴极小
一轴极大.

Thm (极值的充分条件) P83.

x_0为f驻点, f在x_0某邻域$B(x_0,\delta)$内二阶连续可微.

(1) 若f在x_0点的Hesse矩阵$H(x_0)$正定 则x_0是f的极小值点

(2) 负定 极大值点



(3) 不正定,不负定, $\det H\neq 0\Rightarrow$不是极值 (4) 不正,不负定, $\det H=0\Rightarrow$无法确定

例: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-10=0$ 确定隐函数 $z=f(x,y)$. 求其极值 $\begin{bmatrix}A & B\\ B & C\end{bmatrix}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x-1}{z-2}=0$. $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y+1}{z-2}=0 \Rightarrow \begin{matrix}x_0=1\\ y_0=-1\end{matrix}$ 驻点. $z=6$或-2

(1,-1,6). $F'_z\neq 0$. $A<0$, $AC-B^2>0$. 负定. (、、 ~~~ f_1 ~)

(1,-1,-2). $F_z\neq 0$. A (确定隐函数 $z=f_2(x,y)$)

3.18

二元可微函数求极值: $H_f(M_0)$

(1) 令 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 求出驻点, (海森 $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$)

(2) 每个驻点计算 A. B. C. $AC-B^2$

1.9.2 条件极值. 拉格朗日乘子.

$$\begin{cases} \min/\max f(X) & \text{目标函数} \\ g(X)=0. & \text{约束条件} \end{cases}$$

Thm. 拉格朗日乘子法: $f.g\in C^{(1)}$. $\operatorname{grad} g\neq 0$ 极值点一定是L的驻点..

构造 $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$ 驻点即极值 × L驻:必要条件

e.g. 椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内嵌长方体 体积最大.

$$\begin{cases} \max V(x,y,z)=8xyz \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \end{cases}$$ 设与一卦限交点 (x,y,z).

$L=8xyz-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$.

$\frac{\partial L}{\partial x}=0$. $\frac{\partial L}{\partial y}=0$ $\frac{\partial L}{\partial z}=0$. $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$. $\Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt3}$. $y=\frac{b}{\sqrt3}$. $z=\frac{c}{\sqrt3}$

$\because V_{max}$ 必存在. 且 L 驻点唯一 $\therefore V_{max}$ 必在驻点取到

$V_{max}=8\frac{abc}{3\sqrt3}$.

Pf. $\because \operatorname{grad} g\neq 0$ $\therefore x_n=x_n(x_1,x_2\cdots x_{n-1})$. g 条件变为函数.

$f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n(x_1,x_2,\cdots x_{n-1}))$ 的极值点?

必要条件: $\frac{\partial f}{\partial x_1,\cdots,x_{n-1}}=0$. (驻点). $g(\cdots)=0$ $\frac{\partial g}{\partial x_i}+\frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}=0$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial x_i}=0$ $\because \frac{\partial x_n}{\partial x_i}=-\frac{g'_{x_i}}{g'_{x_n}}$ → ≠0 条件.

$\Rightarrow f'_{x_i}+f'_{x_n}\cdot(-\frac{g'_{x_i}}{g'_{x_n}})=0$ $\Rightarrow \frac{f'_{x_i}}{g'_{x_i}}=\frac{f'_{x_n}}{g'_{x_n}}\Rightarrow \frac{f'_{x_i}}{g'_{x_i}}=\lambda$. $(i=1,2,\cdots,n)$ 不严谨

L的偏导: $f'_{x_i}-\lambda g'_{x_i}=0$ $(i=1,\cdots,n)$ 直接 $\lambda=\frac{f'_{x_n}}{g'_{x_n}}$ √

且 $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=g(x_1,\cdots,x_n)=0$. ✓

e.g. PPT 线代题. 求特征向量.

e.g. 证 $f(x,y,z)\geq g(x,y,z)$

$$\begin{cases} \min f(x,y,z) \\ g(x,y,z)=C. \end{cases}$$ ($\forall C$ 常数).

例如. 证 $xy\leq\frac{1}{\alpha}x^\alpha+\frac{1}{\beta}y^\beta$ ($\alpha.\beta>0$. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.)

$L(x,y,\lambda)=\frac{1}{\alpha}x^\alpha+\frac{1}{\beta}y^\beta-\lambda(xy-C)$

...

多个约束条件 $\begin{cases} \min f(x,y,z) \\ g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ > 相当于曲线求极值.

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) - \lambda_1 g_1(x,y,z) - \lambda_2 g_2(x,y,z)$$

第二章 含参积分及广义含参积分

Def（含参变量的定积分）. 若 x 在某范围内任意固定 定积分 $\int_a^b g(x,y)\,dy$ 存在. 则称其为参变量 x 的定积分. 一般默认定义域为所有使 $\int_a^b g(x,y)\,dy$ 存在的 x. 函数 $I(x)=\int_a^b g(x,y)\,dy$

Thm1 $g(x,y)$ 在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续 则 $\cancel{I(x)}\ f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

Pf. $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 只要 $\int_c^d |g(x_1,y)-g(x_2,y)|\,dy<\varepsilon$ (已放了一绝对值)

只要 $|g(x_1,y)-g(x_2,y)| < \frac{\varepsilon}{d-c}$

$\because g(x,y)$ 连续 故一致连续 $\therefore \exists\delta$ 使上述式成立.

$\Rightarrow$ 交换积分. 极限?

Thm2 D 上 $g(x,y)$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ 连续 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导, $f'(x)=\int_c^d \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\,dy$.

Pf. 复习! PPT.

Thm3 $f(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x,y)\,dy$. 其余条件与Thm2同 ($\alpha(x), \beta(x)\in[c,d]$ 可微)

则有 $f'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\,dy + f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$

Thm4 $g(x,y)$ 在 $D:[a,b]\times[c,d]$ 连续. 则 $f(x)=\int_c^d g(x,y)\,dy$ 在区间 $[a,b]$ 上可积. 且 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^d dy\int_a^b g(x,y)\,dx$ 积分顺序可交换 $\int_{u(x)}^{v(x)} f(x)\,dx$?

$\because$ 连续. 闭区间 $\therefore$ 可积

Pf. 设 $G(z)=\int_c^d F(y,z)\,dy$. 其中 $F(y,z)=\int_a^z f(x,y)\,dx$

由条件: $F(y,z)$, $\frac{\partial}{\partial z}F(y,z)=f(z,y)$ 是连续函数

设 $H(z)=\int_a^z dx\int_c^d f(x,y)\,dy$.

$\Rightarrow G'(z)= \int_c^d F'(y,z)\,dy = \int_c^d f(z,y)\,dy = \cancel{\int_c^d f(x,y)\,dx}$

$H'(z)= \int_c^d f(z,y)\,dy$

$\Rightarrow G'(z)=H'(z)$. 又 $G(a)=H(a)$. 于是 $G(z)=H(z)$. $z=b$ 时即为所证.

PPT. 证 $(0,+\infty)$ 连续 用闭区间.

例题.

3.20

2.3 含参广义积分 & 2.1 广义积分的一致收敛性.

Def.（一致收敛性）.

设 $\forall x\in I$，含参变量无穷积分 $f(x)=\int_c^{+\infty}g(x,y)dy$ 收敛. 若 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N>0$.

s.t. $\forall T>N$，$\forall x\in I$，都有 $\left|\int_c^T g(x,y)dy-f(x)\right|<\varepsilon$.

则称含参变量无穷积分 $\int_c^{+\infty}g(x,y)dy$ 关于参变量 $x\in I$ 一致收敛.

Thm.（一致收敛的柯西判别准则） 和普通 Cauchy 比较？ $\int_c^{+\infty}g(x,y)dy$ 关于 $x\in I$ 一致收敛

对 $\forall x$. $\forall\varepsilon>0$. $\exists N>0$, $\forall A,A'>N$, $\forall x\in I$, $\left|\int_A^{A'}g(x,y)dy\right|<\varepsilon$. $\Downarrow$ C2

3.25 Remark. 非一致收敛 $\int_a^{+\infty}f(t,x)dx$ 关于 t 非一致收敛

$\Leftrightarrow\exists\varepsilon>0$. $\forall M$. $\exists A$. $A'>M$, $\exists t_0\in\Omega$ s.t. $\left|\int_A^{A'}f(t_0,x)dx\right|>\varepsilon$

Thm.（Weirstrass 判别法）（优函数判别法）

$\forall t\in\Omega$. $\int_a^{+\infty}f(t,x)dx$ 收敛. 若存在 $[a,+\infty)$ 上的广义可积函数 $g(x)$. s.t.

$|f(t,x)|\le g(x)$. $\forall(t,x)\in\Omega\times[a,+\infty)$.

则 $\int_a^{+\infty}f(t,x)dx$ 在 $t\in\Omega$ 上一致收敛.

Remark. 若 $f(t,x)$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 上连续. 存在 $b>a$ 及 $[b,+\infty)$ 上广义可积函数 $g(x)$.

s.t. $|f(t,x)|\le g(x)$. $\forall(t,x)\in\Omega\times[b,+\infty)$. 也一致收敛.

Ex. (1) $c>0$. $\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ 在 $y\in[c,+\infty)$ 上一致收敛.

找 e^{-cx}.

(2) $\int_0^{+\infty}e^{-xy}$ 在 $y\in(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

$\exists\varepsilon_0=e^{-1}-e^{-2}$, $\forall M>0$. $\exists A=M+1$. $A'=2A$, $y_0=\frac{1}{A}$, s.t.

$\left|\int_A^{A'}e^{-xy_0}dx\right|=\frac{-1}{y_0}e^{-xy_0}\Big|_A^{A'}=\frac{1}{y_0}(e^{-Ay_0}-e^{-A'y_0})=A\varepsilon_0>\varepsilon_0$.

Thm.（Dirichlet） $\forall t\in\Omega$. $f(t,x)$. $g(t,x)$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 上连续 若

(1) $\forall t\in\Omega$. $f(t,x)$ 关于 x 单调. 一致单调

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(t,x)=0$ 关于 $t\in\Omega$ 一致成立

(3) $\int_a^A g(t,x)dx$ 关于 $t\in\Omega$ 以及充分大的 A 一致有界

则 $\int_a^{+\infty}f(t,x)g(t,x)dx$ 在 $t\in\Omega$ 上一致收敛.

f 一致单调收敛于 0. $\int g$ 一致有界.

Thm. (Abel) $\forall t\in\Omega$, $f(t,x)$ $g(t,x)$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 上连续. 若.

(1) $\forall t\in\Omega$. $f(t,x)$ 关于 x 单调 一致单调

(2) $x\to+\infty$ 时, $f(t,x)$ 关于 $t\in\Omega$ 一致有界,

(3) $\int_a^{+\infty} g(t,x)dx$ 关于 $t\in\Omega$ 一致收敛.

~~$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.~~

则 $\int_a^{+\infty} f(t,x)\,g(t,x)\,dx$ 在 $t\in\Omega$ 上一致收敛.

f 一致单调有界 $\int g$ 一致收敛.

Def. (含参瑕积分).

$\forall t\in\Omega$, $\int_a^b f(t,x)dx$ 收敛, b 为唯一瑕点

若 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta(\varepsilon)\in(0,b-a)$. s.t. $\left|\int_{b-\eta}^b f(t,x)dx\right| = \left|\int_a^{b-\eta}\cdots+\int_{b-\eta}^b\cdots\right|<\varepsilon$. ($\forall\eta\in(0,\delta)$ $\forall t\in\Omega$)

则 $\int_a^b f(t,x)dx$ 关于 $t\in\Omega$ 一致收敛

Thm. Cauchy. Weirstrass. Dirichlet. Abel.

Thm (第二积分平均值定理) 若 $g(x,y)$ 关于 x 单调. 则 $\exists\xi\in[A',A'']$ s.t.

$$\int_{A'}^{A''} f(x,y)g(x,y)dx = g(A',y)\int_{A'}^{\xi} f(x,y)dx + g(A'',y)\int_{\xi}^{A''} f(x,y)dx.$$

Lemma. (Riemann-Lebesgue). 见上学期笔记!

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积/广义绝对可积 (即 f, $|f|$ 在 $[a,b]$ 均广义可积). 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0.\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0.$$

Ex. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$.

解: 由 Dirichlet. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ 收敛 ($\frac{1}{t}$ 单调收敛于0, $\int\sin t\,dt$ 有界)

于是 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\lambda\pi}\frac{\sin t}{t}dt \overset{t'=\frac{1}{\lambda}t}{=} \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(\lambda t)}{t}dt=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}dt$.

Δ 恒等式 $\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt$ 两边在 $[0,\pi]$ 上积分.

得 $\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\frac{\pi}{2}$. 令 $g(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$. 欲证 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}g(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt=0$.

$\lim_{t\to0}g(t)=\lim_{t\to0}\frac{2\sin\frac{t}{2}-t}{2t\sin\frac{t}{2}}=\cdots$ 洛必达 $=0$. 故 $t=0$ 是 $g(t)$ 的可去间断点.

由 Riemann-Lebesgue. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}g(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt=0$.

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$.

2.3 广义含参积分.

<u>Thm1</u>. $f(t,x)\in C([\alpha,\beta]\times[a,+\infty))$. $I(t)=\int_a^{+\infty}f(t,x)dx$ 关于 $t\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛.

则 $I(t)\in C[\alpha,\beta]$. (Pf. P110). 连续性(一致收敛的广义积分)

$\lim\limits_{t\to t_0}[\int_a^{+\infty}f(t,x)dx]=\int_a^{+\infty}[\lim\limits_{t\to t_0}f(t,x)]dx$. 此时广义积分运算与极限可交换顺序.

Remark. 证连续只需证一致收敛. 若不连续可证明不一致收敛

<u>Thm2</u>. (1) $f(t,x)$. $f_t'(t,x)\in C$ $[\alpha,\beta]\times[a,+\infty)$.

(2) $\forall t\in[\alpha,\beta]$. $I(t)=\int_a^{+\infty}f(t,x)dx$ 收敛 (前提)

(3) $\int_a^{+\infty}f_t'(t,x)dx$ 关于 $t\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛.

则 $I(t)\in C'[\alpha,\beta]$ 且 $I'(t)=\frac{d}{dt}\int_a^{+\infty}f(t,x)dx=\int_a^{+\infty}f_t'(t,x)dx$.

<u>Thm3.</u> $f(x,y)\in C$ $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$. $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 关于 $y\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛.

则 $I(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可积且 $\int_\alpha^\beta(\int_a^{+\infty}f(x,y)dx)dy=\int_a^{+\infty}(\int_\alpha^\beta f(x,y)dy)dx$.

<u>Thm4.</u> 两无限积分. P113. (不要求)

$D=[a,b]\times[c,d]$		$D=[a,+\infty)\times[c,d]$
① $f(x,y)$ 连续 $\Rightarrow$ $\boxed{I(y)\text{ 连续}}$	极限积分交换	同左 & $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 关于 y 一致收敛
② $f(x,y)$. $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续 $\Rightarrow$ $I(y)$ 关于 y 可微, $I'(y)=\int_a^b[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)]dx$	求导积分交换	同左 & $\int_a^{+\infty}[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)]dx$ 关于 y 一致收敛
③ $f(x,y)$ 连续 $\Rightarrow$ $\boxed{\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy}$	积分顺序交换	同左 & $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 关于 y 一致收敛

①③条件相同. 左 $\Leftarrow$ 右

$\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx=\frac{1}{2}$. $\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\sin tx=\frac{t}{t^2+\lambda^2}$.

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

3.21

第三章 重积分

3.1 矩形域上的二重积分.

Def. f 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上有定义. 对 D 的任意划分.

T: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ (T_x)

$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_k=d$ (T_y)

及任意 $P_{ij}(\xi_{ij},\eta_{ij})\in D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, $1\le i\le n$, $1\le j\le k$.

若极限 $\lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{k}f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$ 存在.

则称 f 在 D 上 Riemann 可积. 记作 $f\in R(D)$. 并称该积极限为 f 在 D 上二重积分.

记作 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{k}f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$

Def. $m_{ij}=\inf\limits_{(x,y)\in D_{ij}}\{f(x,y)\}$ $M_{ij}=\sup\limits_{(x,y)\in D_{ij}}\{f(x,y)\}$ 良好定义?

Darboux 下和: $L(f,T)=\sum\sum m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$

上 U M_{ij}

Thm. f 为 $D=[a,b]\times[c,d]$ 有界函数. T' 为 T 的加密分划.

(1) $L(f,T)\le L(f,T')\le U(f,T')\le U(f,T)$.

(2) 任意两分割 T_1,T_2 $L(f,T_1)\le U(f,T_2)$

Def. Darboux 下积分: $\underline{\iint_D} f(x,y)\,dx\,dy=\sup\limits_{T}L(f,T)$

上 $\overline{\iint_D} f(x,y)\,dx\,dy=\inf\limits_{T}U(f,T)$

Thm. $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上有界. 则下列命题等价.

(1) $f\in R(D)$ (2) $\forall\varepsilon>0$. $\exists D$ 的一分割 T, s.t. $U(f,T)-L(f,T)<\varepsilon$.

(3) $\underline{\iint_D} f=\overline{\iint_D} f$.

Thm. $f\in C(D)\Rightarrow f\in R(D)$ 狭义黎曼: 若无界总能找到分割使黎曼和为无穷

✓ $f\in R(D)\Rightarrow f$ 在 D 上有界

间断点为零测集则不影响可积性.

4.1

3.2. 一般平面有界集合上的二重积分. 零面积集即可

性质: ① 线性. $\iint_D[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma$

② 区域可加性 $D=D_1\cup D_2$, D_1. D_2 无公共内点. $f\in R(D)$

$\Rightarrow f\in R(D_1)$. $f\in R(D_2)$. $\iint_D f=\iint_{D_1}f+\iint_{D_2}f$

③ 比较性. $f(x,y)\ge g(x,y)$ $\iint_D f\ge\iint_D g$.

$g=0$: $f(x,y)\ge 0\Rightarrow\iint_D f\ge 0$.

④ 绝对值 $\left|\iint_D f(x,y)\,d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,d\sigma$

⑤ 估值定理 $m \le f(x,y) \le M \Rightarrow m\sigma \le \iint_D f \le M\sigma$

⑥ 积分中值定理 $D\subset R^2$ 为连通有界闭集, ∂D 零面积集.

$f(x,y),\ g(x,y) \in C(D)$, g 在 D 上不变号

则 $\exists(\xi,\eta)\in D$, s.t. $\iint_D f(x,y)g(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\,dxdy$

Pf. P127 $g\equiv 1$. $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma(D)$

⑦ 对称性

⑧ 轮换不变性 若 $D\subset R^2$ 关于 x,y 轮换对称 ($(x,y)\in D \Leftrightarrow (y,x)\in D$)

则 $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(y,x)\,dxdy$.

3.3 累次积分法.

△用直角坐标系计算.

∵可积 ∴积分值与划分无关!

~~$f(x,y)$ 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上连续. 则~~

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$$

@April.1 看课本3.1, 3.2, 3.3.1

△用极坐标计算. $d\sigma = r\,dr\,d\theta$

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

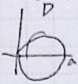
→ 与D相同.但用极坐标形式表示.

e.g. 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,d\sigma$. $D: x^2+y^2\le R^2$.

极坐标, $r=R$, $\theta\in[0,2\pi]$

原积分 $= \iint_D e^{-r^2} r\,d\theta\,dr = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R e^{-r^2} r\,dr \cdots$

e.g. $x^2+y^2\le ax$



$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr$.

$r^2 \le ar\cos\theta$

导数不为0即可逆

$\det\frac{\partial u}{\partial x}\ne 0$.

△变量替换 (极坐标本质)

元? 只需可逆?✓

Thm. D是xOy平面一有界闭区域, Ω 为uOv平面有界闭

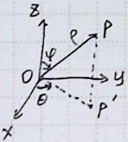
$\varphi: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ $(u,v\in\Omega)$ 是 Ω 到D的一一对应连续可微映射,且 $\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0$

又设 $f(x,y)$ 在D连续,则 $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Omega f[x(u,v),y(u,v)]\cdot\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$

注意绝对值!

4.3 二重积分变量替换证明

3.4 三重积分



球坐标系 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta & (0 \le r < +\infty) \\ y = r\sin\varphi\sin\theta & (0 \le \theta \le 2\pi) \\ z = r\cos\varphi & (0 \le \varphi \le \pi) \end{cases}$

$dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

e.g. $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ 此处是圆锥

Ω 由 $x^2+y^2=z^2$ 与 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 围成.

$0 \le r \le R$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

4.10

第4章 曲线积分与曲面积分

1. 第一型曲线积分的概念与性质

Def1 (曲线积分) $\int_L f(M)\,dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$ 第一型曲线积分. 函数 f 在 L 上关于弧长的曲线积分

积分路径 弧微分 被积量

Thm. (曲线积分的存在条件)

若 L 参数方程 $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$ 关于 t 均连续 ?

则 $f(x,y,z)$ 可表示成与 t 有关 ? $\Rightarrow$ 曲线可积

性质: 线性性. 可加性. 保序性…

2. 第一型曲线积分的计算

$$L:\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases} \quad (\alpha\le t\le\beta).$$

$C^{(1)}$ $x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\in C[\alpha,\beta]$, 且不同时为0 有反函数?

$\Delta l \approx \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$

由拉格朗日中值定理. $\Delta l\approx\sqrt{x'(\xi_1)^2+y'(\xi_2)^2+z'(\xi_3)^2}\cdot\Delta t$

$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i\approx\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\cdots}\,\Delta t_i=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$ 注意上下限顺序.

微分. $dl=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt.$

(1) $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t).\end{cases}$ x,y 在 $t\in[\alpha,\beta]$ 上有 $C^{(1)}$ 且 $f(x,y)\in C(L)$. 则

☆ $\int_L f(x,y)\,dl=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\cdot\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

下限小, 上限大 ($\because dl>0\ \therefore dt>0$)

Ex. $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$, 求 $\int_L x^2\,dl$.

$\int_L x^2\,dL=\int_L y^2\,dL=\int_L z^2\,dL=\frac{1}{3}\int_L a^2\,dL=\frac{1}{3}a^2\cdot 2\pi a=\frac{2}{3}\pi a^3.$

4.15

Def. (向量场. 连续向量场. 连续可微向量场)

Def. (光滑曲线) $x(t),\ y(t),\ z(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 有连续导数,且不全为0.

即曲线在每一点都有非0的切向量 $\vec{\tau}(P)$, τ 为连续函数.

Def. (有向光滑曲线) $\vec{\tau}(P)=\pm\dfrac{(x'(t),y'(t),z'(t))}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}}$ 单位切向量

若 t 增加的方向与曲线 L 的正向一致, 则取正号; 反之取负号.

Def. (有向弧长元素)

L: 有向光滑曲线. $d\vec{l}=\vec{\tau}\,dl$ 为 L 的有向弧长元素.

弧长元素

$d\vec{l}=(x'(t)\vec{i},\ y'(t)\vec{j},\ z'(t)\vec{k})\,dt$

若 $y=f(x)$. 则 $d\vec{l}=(\vec{i}+f'(x)\vec{j})\,dx$

Def.（向量场的曲线积分）

$\Omega\in\mathbb{R}^3$ 中一区域. $\vec{v}$ 是 Ω 上连续向量场. L 是 Ω 内一有向光滑曲线.

则 $\vec{v}(P)\cdot\vec{\tau}(P)$ 是在 L 上连续的函数, 故第一型曲线积分 $\int_L \vec{v}\cdot\vec{\tau}\,dl$ 存在.

称积分 $\int_L \vec{v}\cdot\vec{\tau}\,dl$ 为向量场 $\vec{v}$ 在曲线 L 上的积分.

$\int_L \vec{v}\,d\vec{l}$ ⇒ 第二型曲线积分.

4-4 (P187)

第二型曲线的计算.

$$\int_L \vec{v}\cdot\vec{\tau}\,dl=\int_\alpha^\beta (Xx'+Yy'+Zz')\,dt$$

α 起点参数

β 终点参数

令 $\vec{v}=(X(x,y,z),\ Y(x,y,z),\ Z(x,y,z))$

$x.y.z$ 为 t 的函数, 因而 $X.Y.Z$ 也是 t 的函数

$$\int_L X(x,y,z)\,dx+\int_L Y(x,y,z)\,dy+\int_L Z(x,y,z)\,dz$$

$\because\ \vec{v}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$, $\quad x'(t)\,dt=dx$

$$\int_L \vec{v}\cdot d\vec{l}=\int_\alpha^\beta [X x'(t)+Y y'(t)+Z z'(t)]\,dt$$

$$=\int_\alpha^\beta X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$$

Ex $I_k=\oint_{L_k}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$, L_k 逆时针方向.

L_1: $x^2+y^2=R^2$.

解: $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$. $\theta\in[0,2\pi]$ 参数增加与曲线正方向一致.

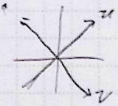
$$I_1=\oint_{L_1}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{R^2\cos\theta+R^2\sin\theta}{R^2}\,d\theta=2\pi.$$

L_2: $x^2+xy+y^2=R^2$.

$u=x+y$, $v=x-y$.

$$\frac{u^2-v^2}{4}+u^2=\frac{3}{4}u^2+\frac{1}{4}v^2=R^2$$

方向反.



令 $u=\sqrt{\frac{4}{3}}R\cos\theta$. $v=\sqrt{4}R\sin\theta$. $\theta\in[0,2\pi]$

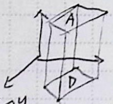
$x=\sqrt{\frac{1}{3}}R\cos\theta+R\sin\theta$, $y=\sqrt{\frac{1}{3}}R\cos\theta-R\sin\theta$.

$$I_2=\oint_{L_2}\frac{-x\,dy+y\,dx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{-(\frac{1}{\sqrt3}C+S)(\frac{1}{\sqrt3}S-C)+(\frac{1}{\sqrt3}C-S)(-\frac{1}{\sqrt3}S+C)}{2(\frac{1}{3}\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{\sqrt3}}{\frac{1}{3}C^2+S^2}\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sqrt3}\,d\tan\theta}{\frac{1}{3}+\tan^2\theta}=4\arctan\left(\frac{t}{\sqrt3}\right)\Big|_0^{+\infty}=2\pi$$

4-3 第一型曲面积分.

考虑 $dS=?$



P162. 3.5.1

D. 矩形 $S_D=\Delta x\Delta y$

4.17 A 平行四边形 $S_A=\frac{\Delta x\Delta y}{\cos\gamma}$ (γ 为 $\vec{n}$ 与 z 轴夹角) Pf?

① $z=f(x,y)$ $dS=\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy$

② $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$. $dS=\sqrt{EG-F^2}\,dudv$

$E=(\frac{\partial x}{\partial u})^2+(\frac{\partial y}{\partial u})^2+(\frac{\partial z}{\partial u})^2$

$G=(\frac{\partial x}{\partial v})^2+(\frac{\partial y}{\partial v})^2+(\frac{\partial z}{\partial v})^2$

$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$

?

$dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$ ~~$A=\det\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\\\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$~~

$A=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\\\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$ $B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$ $C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$

Ex. $I=\iint_S(x^2+y^2+z^2)dS$. S 为球面 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ $(R>0)$

$\begin{cases}x=R\sin\varphi\cos\theta\\y=R\sin\varphi\sin\theta\\z=R+R\cos\theta\end{cases}$ $dS=R^2\sin\varphi\,d\varphi d\theta$

重积分. 一型曲线/面积分. 函数 $f(P)$ 在几何形体 Ω 上对量度的积分

$\int_\Omega f(P)d\Omega$ $(d\Omega>0)$

$\Omega=D\subset\mathbb{R}^2$ $\iint_D f(x,y)d\sigma$

$\Omega=V\subset\mathbb{R}^3$ $\iiint_V f(x,y,z)dV$

$\Omega=L\subset\mathbb{R}^3$ $\int_L f(x,y,z)dl$

$\Omega=S\subset\mathbb{R}^3$ $\int_{\partial S} f(x,y,z)dS$

4-5 第二型曲面积分.

Def 有向曲面 指定曲面一侧为正.在两单位法向量中选一为正

光滑曲面. $\vec{n}$.一$\vec{n}$连续变化

双侧曲面. 任一点出发,回到原位时$\vec{n}$不变 e.g. 单侧:莫比乌斯

Def 有向曲面的边界 ∂S是有向曲线. ∂S方向与S的单位法向量$\vec{n}$组成右手系.

有向面积微元 $d\vec{S}=\vec{n}dS$. 其中$\vec{n}$为单位法向量(正侧)

而曲面面积微元 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$.

$\iint\limits_{S} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$ 设$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$=\iint\limits_{S}(X\cos\alpha, Y\cos\beta, Z\cos\gamma)\,dS$

$=\iint\limits_{S} X\,dy\wedge dz+Y\,dz\wedge dx+Z\,dx\wedge dy$

$\cos\gamma\, dS=\pm d\sigma_{xy}$ $\begin{cases}\gamma<\frac{\pi}{2} & 取正\\ \gamma>\frac{\pi}{2} & 取负.\end{cases}$

记为 $dx\wedge dy$

4.22

法一: 化为第一型曲面积分计算. 算出$\vec{n}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$.

$\vec{v}\cdot\vec{n}$为标量.

$\iint\limits_{S}(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma)\,dS$.

法二: 投影化为二重积分

$\iint\limits_{S} X\,dy\wedge dz+Y\,dz\wedge dx+Z\,dx\wedge dy$ 注意!PPT.

法三: 参数方程化为二重积分.

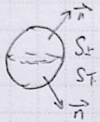
$\vec{n}=\dfrac{A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$.

可求出 $\cos\alpha$. $\cos\beta$. $\cos\gamma$.

$\iint\limits_{S}\vec{v}\cdot d\vec{S}=\pm\iint\limits_{D_{uv}} XA\,dudv+YB\,dudv+ZC\,dudv$.

e.g. $z=f(x,y)$. $\pm\iint\limits_{D_{xy}}\left[X\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right)+Y\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)+Z\right]dxdy$.

Ex. S为球(半径R)外侧. 求 $\iint\limits_{S} y^2z\,dx\wedge dy$



$S=S_上\cup S_下$

$S_上$: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$S_下$: $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$\iint\limits_{S_上} y^2z\,dx\wedge dy=\iint\limits_{D_{xy}} y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy-\iint\limits_{D_{xy}} y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})\,dxdy$

$=\cdots$

4.6 平面向量场. Green 公式

提示证明：复习4.1-4.5表保?

向量场的微分计算

1. 梯度场与梯度算子 ∇　　$\nabla := \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \underline{\mathrm{grad}}\,u$

数量场 $u = u(x,y,z)$ 连续可微. $\nabla u = \mathrm{grad}\,u$ 梯度场

u 数量场!
∇u 向量场!

u 为 ∇u 的 势函数

2. 若存在函数 f, s.t. 向量场 $F = \nabla f$. 则称 F 为 保守场

散度场与散度算子 $\nabla\cdot$

数向量场 $\vec{v}(x,y,z) = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$ 连续可微

散度 $\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \mathrm{div}\,\vec{v}$

$\vec{v}$ 向量场
$\nabla\cdot\vec{v}$ 数量场!

$\nabla\cdot(f\vec{v}) = f\nabla\cdot\vec{v} + \nabla f\cdot\vec{v}$

旋度场与旋度算子 $\nabla\times$

$\vec{v}$ 向量场
$\nabla\times\vec{v}$ 向量场!

向量场 $\vec{v} = \cdots$ 连续可微

旋度 $\nabla\times\vec{v} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k} = \underline{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$

? $\nabla\times(f\vec{v}) = f\nabla\times\vec{v} + \nabla f\times\vec{v}$

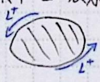
$$\left\{\begin{array}{ll} \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) & \text{散度} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \times(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) & \text{旋度} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; (u) & \text{梯度} \end{array}\right.$$

Thm (格林定理). $D \subset \mathbb{R}^2$ 有界闭域. 其边界 L 为分段光滑曲线

函数 $X(x,y)$. $Y(x,y)$ 在 D 上有 连续的一阶偏导数 则有. 反例?

$$\oint_{L^+} X\,dx + Y\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy$$

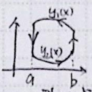
其中 L^+ 表示沿边界 L 的正方向. 沿边走. 区域在左.

单连域 

复连域 

Pf. 分别证明

$\int_{\partial D} X\,dx = -\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}dx\,dy$. $\int_{\partial D} Y\,dy = \iint_D \frac{\partial Y}{\partial x}dx\,dy$. 即可.



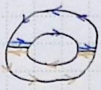
X-型区域

左图中, $\iint_D \frac{\partial X}{\partial y}dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y}dy = \int_a^b [X(x,y_2(x)) - X(x,y_1(x))]dx$

$\int_{\partial D} X\,dx = \int_a^b [X(x,y_2(x)) - \int_a^b X(x,y_1(x))]dx$. // 相反

(左右两边 $dx = 0$)

若 D 能分成若干个 X-型区域的并集. 则公式成立.



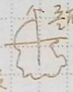
中间抵消!

$\Rightarrow$ D若能表示为有限个 X-型区域 $\Rightarrow$ 成立.
有限个 Y-型区域

边角. 极限说明?

4.24

循环常数 2π $\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$ 不包含原点 $\to 0$ 包含原点 $\to$ 角度

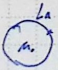


Def. 平面向量场的环流量与旋度.

$\vec{\tau}$ 切向! $\oint_L \vec{v}\cdot d\vec{\tau}$ 称为向量场 $\vec{v}$ 沿平面曲线 L 的环流量

连续可微. 旋度 $\mathrm{rot}\,\vec{v}(x_0,y_0) = (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})\vec{k}$

$a\to 0$?



a 为半径.

环量面密度 $\lim_{a\to 0} \frac{\oint_{L_a}\vec{v}\cdot d\vec{\tau}}{\pi a^2}$ 若存在. 则根据 Green 公式

原式 $= \lim_{a\to 0} \frac{1}{\pi a^2}\cdot[(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})|_{(\xi,\eta)}\cdot \pi a^2]$ (中值定理)

$= (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})|_{M_0}$

故 $(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y})|_{M_0}$ 绝对值: 旋转强度 ?

符号: 正 $\to$ 逆时针. 负 $\to$ 顺时针

Def. 平面向量场的通量与散度 法向.

$\vec{v}$ 为流速场时. $\oint_L \vec{v}\cdot\vec{n}\,dl$ 表示单位时间内通过 L 的流量.

散度 $\mathrm{div}\,\vec{v}(x_0,y_0) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$.

$\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} \Rightarrow \vec{n} = (-Y)\vec{i} + X\vec{j}$. ? 这段什么思路什么图?

$\lim_{a\to 0} \frac{\oint_L \vec{v}\cdot\vec{n}\,dl}{\pi a^2} = (\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y})|_{M_0}$

故 $(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y})|_{M_0}$. M_0 处源的强度 ?

$\mathrm{rot}\,\vec{v}\cdot\vec{k} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$.

Green 公式: 区别? $\begin{cases} \oint_{\partial D}\vec{v}\cdot d\vec{\tau} = \iint_D \mathrm{rot}\,\vec{v}\cdot\vec{k}\,dxdy \\ \oint_{\partial D}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dl = \iint_D \mathrm{div}\,\vec{v}\,dxdy \end{cases}$

Def. 保守场 D 区域内积分 $\int_L \vec{v}\,d\vec{\tau}$ 与路径无关, 则其是 D 内保守场

有势场 对 D 上向量场 $\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j}$.

若存在可微函数 f, s.t. $\vec{v}(x,y) = \nabla f(x,y)$ $\forall (x,y)\in D$.

即 $X(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ 则 $\vec{v}$ 在 D 上是有势场.

$f(x,y)$ 为 $\vec{v}$ 在 D 上的一个势函数

无旋场 $\vec{v}$ 是 D 上连续可微向量场 若 $\forall (x,y)\in D$. $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$.

则 $\vec{v}$ 是 D 上的无旋场

原函数 $\Longleftrightarrow$ 势函数.

X, Y 在 D 连续. 若有可微 $f(x,y)$ s.t. $X(x,y)dx + Y(x,y)dy$ 是 f 全微分.

则称 f 是 $Xdx + Ydy$ 的一原函数.

有势场 $\leftarrow$ 可微函数 f. $\nabla f = \vec{v}$

保守场 $\leftarrow$ 向量场 $\vec{v}$

无旋场 $\leftarrow$ 旋度 $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ $\mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$

Thm1 保守场、有势场

$D\subseteq\mathbb{R}^2$. $\vec{v}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ 是D上 $\boxed{\text{连续}}$ 向量场 则下列命题等价.

(1) $\vec{v}=X(x,y)\vec{i}+Y(x,y)\vec{j}$ 是D上保守场 → 可导.

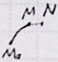
(2) D内任一分段光滑的封闭曲线L, 有 $\oint_L Xdx+Ydy=0$.

(3) $\vec{v}$ 在D内是有势场. 存在可微函数 $f(x,y)$, s.t. $\nabla f=\vec{v}$.

Pf1. (1)⇒(2) 保守场⇒路径无关. 将曲线L分为两起终点同路径

(2)⇒(3) 构造 $f=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Xdx+Ydy$. 路径无关. 良好定义.

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$$



$$=\int_x^{x+\Delta x}Xdx+Ydy$$

$$=X(\xi,y)\Delta x \quad \text{(积分中值定理)}$$

$\Delta x\to0$, $\xi\to x$. 由X连续性 $\frac{\partial f}{\partial x}=X(x,y)$. 同理 $\frac{\partial f}{\partial y}=Y(x,y)$

∵ X, Y连续 ∴ f偏导连续 ⇒ D内f可微

(3)⇒(1) 设∀曲线(有向)L. 参数方程

$x=x(t)$ $y=y(t)$. $(\alpha\le t\le\beta)$

$$\int_L Xdx+Ydy=\int_\alpha^\beta[X(x,y)x'(t)+Y(x,y)y'(t)]dt$$

$$=\int_\alpha^\beta\frac{df}{dt}dt=f(x(\beta),y(\beta))-f(x(\alpha),y(\alpha))$$ 仅与起终点有关

4.29

Thm 2. 保守场. 无旋场

无旋场需向下价

$D\subseteq\mathbb{R}^2$. $\boxed{\text{单连通域}}$ $\vec{v}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ 是D上 $\boxed{\text{连续可微}}$ 向量场 则下列命题等价.

(1) $\vec{v}=X(x,y)\vec{i}+Y(x,y)\vec{j}$ 在D上是保守场

(2) 无旋场.

Pf2. 由Thm1. (1)⇒(2) $\vec{v}$ 有势函数 $f(x,y)$. s.t.

$X=\frac{\partial f}{\partial x}$, $Y=\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0.\ (\forall(x,y)\in D)$$

☆混合偏导Thm. 需: 二阶偏导连续.

(2)⇒(1) 任取逐段光滑的有向闭曲线L.

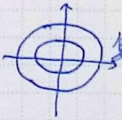
$$\oint_L Xdx+Ydy=\iint_{D_L}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy=0.$$ → 格林公式.

故为保守场.

由于单连通, 故 $\partial D_L=L$

不会多出绕洞之间的线.

e.g.

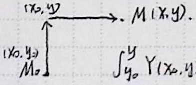


复连通. 循环常量 2π

保守场 $\not\Leftarrow$ 无旋场.

二. 求势函数的方法.

(1) 利用与积分路径无关
折线积分



$$\int_{y_0}^{y} Y(x_0,y)\,dy + \int_{x_0}^{x} X(x,y)\,dx = u(x,y)$$

(2) 不定积分法

(3) 凑微分法 $(e^x\cos y+2xy^2)dx+(2x^2y-e^x\sin y)dy$

$= (e^x\cos y\,dx - e^x\sin y\,dy)+(2xy^2dx+2x^2y\,dy)$

$= d(e^x\cos y)+d(x^2y^2) = d(e^x\cos y+x^2y^2)$

(4) 恰当方程.

Def.(恰当方程/全微分方程).

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 为~. 若

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y) \Rightarrow$ 解为 $u(x,y)=C$.

判断是否为恰当方程? $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

求恰当方程? 偏积分法. 等…

(5) 积分因子

Def.(积分因子).

若有连续可微 $\mu(x,y)$, s.t.

$\mu Pdx+\mu Qdy=0$ (**) 恰当, 则 μ 为 $Pdx+Qdy=0$ 的~.

$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$. 即 $\mu P'_y+\mu'_y P=\mu Q'_x+\mu'_x Q$.

若只与y有关 $\mu=\frac{\mu'_y P}{Q'_x-P'_y}$

$\frac{1}{\mu}d\mu = \frac{Q'_x-P'_y}{P}dy$

$\mu=e^{\int\cdots}$

为什么单连通条件?

衡量切向 旋度 rot $\nabla\times$

$\oint_L \vec{v}\cdot d\vec{\tau} = \oint_L \vec{v}\cdot\vec{\tau}\,dl = \oint_L Xdx+Ydy = \oint_L [Xx'(t)+Yy'(t)]dt = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy$

$\oint_L \vec{v}\cdot\vec{n}\,dl = \oint_L X(-dy)+Ydx = \iint_D\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dxdy$. 散度 div. $\nabla\cdot$

法向

过原点. 包围原点不同!

$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)$ 同乘 $e^{-\int p(x)dx}$, $2\varphi(x)-x\varphi'(x) \Rightarrow \left(\frac{\varphi(x)}{x^2}\right)'$

5.6

Green意义?

高斯公式(Gauss) $\oiint_{S^+} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{v}\, dV$ 通量 - 散度.

Thm1. Ω为空间有界闭域. 其边界S是分片光滑有向曲面.

若向量场 $\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ 在Ω连续可微. 在S上连续. 则

$$\iint_{S^+} X\,dy\wedge dz + Y\,dz\wedge dx + Z\,dx\wedge dy = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)dV$$

Note: 1. $\vec{v}$ 连续可微 2. 闭曲面取外侧

△ Gauss 求体积

$$V = \frac{1}{3}\oiint_{S^+} x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$$

斯托克斯公式(Stokes) 旋度

Thm2. $\vec{v}$是Ω上连续可微向量场 $\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$.

S是Ω内分片光滑有向曲面 ∂S是分段光滑有向曲线. 则有.

$$\oint_{\partial S} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

方向吻合. 遵循右手法则.

$$\oint_{\partial S} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot\vec{n}\, dS$$

rot中 为什么 $dx\wedge dy$ … 后是 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$?

不是

4.7. 空间向量场

Def. 保守场. $\vec{v} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

无源场. $\operatorname{div}\vec{v} = 0$. 散度为0

调和场 既是保守场又是无源场 (?保守)

$\vec{v} = \nabla u$. $\nabla\cdot\vec{v} = \nabla\cdot(\nabla u) = 0$

即 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. 拉普拉斯方程.

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. 拉普拉斯算子 $\Rightarrow$ $\Delta u = 0$

$\nabla\cdot$ 显然

$\nabla\times$ 显然.

仅∇是向量.

标量.

Thm1. Thm2. 平面均可扩展到空间.

Thm3.

$u(x,y,z)$. $v(x,y,z)$ 在包含闭区域Ω的区域上有二阶连续偏导. 则

$$\iiint_{\Omega} u\Delta v\, dV = \oiint_S u\frac{\partial v}{\partial n}dS - \iiint_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\, dV$$?

☆ $\operatorname{grad}\vec{v}\cdot\vec{n} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{n}}$ $\nabla\vec{v}\cdot\vec{n} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{n}}$

☆ $\oint_{\partial D^+} \nabla f\cdot\vec{n}\, dl = \iint_D (\Delta f)\, dx\,dy$ 散度形式Green公式.

5.8

第5章 常数项级数

Def (级数). $\{u_n\}$数列. 无穷多数 $u_1, \cdots, u_n, \cdots$ 按次序相加

$\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 称为~.

Def (部分和) $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \cdots + u_n$ $\{S_n\}$部分和数列

Def (级数收敛) 若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在, 则极限 S 叫做级数的和. 称级数收敛. $S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

若 S_n 没有极限, 则称级数发散.

Def (余和) $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$

Thm. (级数收敛的必要条件) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Pf. 若收敛于 S. $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

证不收敛的定理!

e.g. $\alpha \neq k\pi$ 时. 证 $\sum \sin n\alpha$ 发散

若收敛 $\lim_{n\to\infty} \sin n\alpha = 0$.

$\sin(n+1)\alpha = \cos\alpha \sin n\alpha + \underbrace{\sin\alpha}_{\text{非0常数}} \cos n\alpha \to 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \cos n\alpha = 0$. 但 $\sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha = 1$, 矛盾.

$\therefore$ 不收敛.

1. 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ $(a \neq 0)$ $\begin{cases} |q| \geq 1 \text{时. 一般项不趋于0, 发散} \\ |q| < 1 \text{时. } S_n = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q} \to \frac{a}{1-q} \text{ 收敛} \end{cases}$

2. p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p>1 \text{ 敛} \\ p \leq 1 \text{ 散} \end{cases}$

$p>1$ 时. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^p} < 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 收敛

$p \leq 1$ 时 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} \to +\infty$ 发散

敛+敛=敛, 敛+散=散, 散+散=? 不一定

级数敛散性与前有限项无关 (任意添删有限项)

收敛级数满足结合律. $(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}}) + \cdots$

反之错误! e.g. $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛, 但 $1-1+1-1+\cdots$ 不收敛

Thm (柯西收敛原理)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 级数收敛的充要条件:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^*$, 有 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$.

5.2 非负项级数的收敛性 (正项级数)

Def (正项级数) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. $u_n \geq 0$.

Thm1 正项级数收敛 $\Longleftrightarrow \{S_n\}$有界. 发散 $\Leftrightarrow \{S_n\} \to +\infty$

Thm2. (比较判敛法).

也可从某项起.

$\sum u_n$, $\sum v_n$ 正项级数. $\forall n \in N^+$ 均有 $u_n \leq v_n$. 则

$\sum v_n$ 敛, 则 $\sum u_n$ 敛; $\sum u_n$ 散, 则 $\sum v_n$ 散.

Thm3. (比阶判敛法 – 比较判敛法的极限形式)

若非负 u_n, v_n 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$. 则

(1) $0 < l < +\infty$ 时, $\sum u_n$, $\sum v_n$ 同敛散.

(2) $l = 0$. $\sum u_n$ 敛 $\to \sum v_n$ 敛

(3) $l = +\infty$. $\sum v_n$ 散 $\to \sum u_n$ 散

Cor. 常用 $v_n = \frac{1}{n^p}$. 若 $\sum u_n$ 正项, $\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n = l$.

(1) $0 \leq l < +\infty$, $p > 1$ 时, $\sum u_n$ 收敛

(2) $0 < l \leq +\infty$, $p \leq 1$ 时, $\sum u_n$ 发散

5.13 e.g. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \ln\cos\frac{\pi}{n}$

$\ln\cos\frac{\pi}{n} = \ln(1+\cos\frac{\pi}{n}-1) \approx \cos\frac{\pi}{n} - 1 \approx -\frac{\pi^2}{2n^2}$

$p = 2$. 收敛.

Thm4. (达朗贝尔判敛法) 设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与等比比较

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1$. 则 $\sum u_n$ 收敛

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > 1$ 或 $+\infty$. 则 $\sum u_n$ 发散. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \to +\infty$

Thm5. (达朗贝尔判敛法的非极限形式). 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

(1) 若 $\exists r$: $0 < r < 1$, 使 n 充分大时, 有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r$. 则 $\sum u_n$ 收敛

(2) 若 n 充分大时, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, 则 $\sum u_n$ 发散. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

Thm6 (柯西根值判敛法) 正项级数 $\sum u_n$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \boxed{\sqrt[n]{u_n}} = \rho$. 达朗贝尔的通项形式 与等比比较

(1) $\rho < 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 (2) $\rho > 1$ ($= +\infty$) 时 $\sum u_n$ 发散.

Thm7 (柯西根值判敛法的非极限形式) $\sqrt[n]{u_n} \leq r < 1$. / $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$? 1

Thm8 (拉贝判别法) 对正项级数 $\sum a_n$. 与p-级数比较.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = r < 1$. 则 $\sum a_n$ 发散

(2) > 1 收敛

Thm 9.1 (柯西积分判敛法) 正项级数 $\sum u_n$.

若有在 $[1,+\infty)$ 单减的非负连续函数 $f(x)$. s.t. $u_n=f(n)$ $(n=1,2,\cdots)$? 可积

则级数 $\sum u_n$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 同时收敛或发散

5.15

5.3 任意项级数的收敛性

Def (交错级数) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ $(u_n\ge 0)$

Thm (Leibniz) 交错级数 $\sum(-1)^{n-1}u_n$ $(u_n>0)$ 满足

(1) $u_n\ge u_{n+1}$ ($\forall n$ 充分大) (2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$

则 $\sum(-1)^{n-1}u_n$ 收敛. 且其和 $S\le u_1$.

又记余和 $r_n=S-S_n$. 则有 $|r_n|\le u_{n+1}$ ($\because r_n=\sum_{n+1}^{\infty}u_n$)

Pf. 欲证 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1}$.

$S_{2n+2}=S_{2n}+(u_{2n+1}-u_{2n+2})\ge S_{2n}$

$\{S_{2n}\}$ 单增. $S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}\le u_1$ 有界 $\Rightarrow$ 敛.

$S_{2n-1}=S_{2n}-u_{2n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}-\lim\limits_{k\to+\infty}u_k=\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 收敛

Thm. (Dirichlet 判敛法) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列有界 (不一定收敛. e.g. $\sum \sin n$)

$\{b_n\}$ 从某项起单调趋于0. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛

Pf 设 $\{b_n\}$ 单减. $\sum_1^n a_i=A_n$.

对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{N}^*$, $\forall n>N$. $|b_n|<\frac{\varepsilon}{3M}$ (M 为 A_n 上界)

对 $\forall m>n>N$. 有

$$\sum_{n+1}^{m} a_kb_k=(A_{n+1}-A_n)b_{n+1}+\cdots+(A_m-A_{m-1})b_m$$

$$=-A_nb_{n+1}+A_{n+1}(b_{n+1}-b_{n+2})+\cdots+A_{m-1}(b_{m-1}-b_m)+A_mb_m$$

$$\left|\sum a_kb_k\right|\le|\quad|+|\quad|+\cdots+|\quad|+|\quad|$$

$$\le M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+M\cdot[b_{n+1}-b_{n+2}+b_{n+2}-\cdots+b_{m-1}-b_m]+M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}$$

$$=M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}=\varepsilon.$$

由 Cauchy 知. $\sum a_nb_n$ 收敛

Thm. (Abel 判敛法) 若 $\sum a_n$ 收敛 $\{b_n\}$ 从某项 (n_0) 起单调有界. 则 $\sum a_nb_n$ 收敛.

Pf. 记 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$. $b_n-B=c_n$.

则 $\{c_n\}$ 从 n_0 项起单调且趋于0

由 Dirichlet $\sum a_nc_n$ 收敛.

$\therefore \sum(a_nc_n+Ba_n)$ 收敛 即 $\sum a_nb_n$ 收敛

e.g. $\sum \frac{\cos\frac{n^2\pi}{n+1}}{\ln^2 n}$. $\cos\frac{n^2\pi}{n+1} = \cos((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1}) = \underline{(-1)^{n-1}}\cos\frac{\pi}{n+1}$

$= \sum \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}}_{\text{交错级数收敛}} \underbrace{\cos\frac{\pi}{n+1}}_{\text{单调有界}}$. $\Rightarrow$ 由Abel. 收敛

Def. (绝对收敛) (条件收敛)

Thm. 若 $\underline{\sum |u_n|}$ 收敛, 则 $\sum u_n$ 收敛.

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists N \in N^*$. $\forall n. p.$ $(n > N)$. 有. $\left|\sum_{n+1}^{n+p} |u_k|\right| = \sum |u_k| < \varepsilon$

则 $|\sum u_k| \leq \sum |u_k| < \varepsilon$. 由Cauchy $\sum u_n$ 敛.

$\frac{\cos n}{n}$ 条敛. (典例)

无穷求和运算的结合律 P213-215

5.20

第6章 函数项级数

Def.（函数项级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

定义在 $D\subset\mathbb{R}$ 上的函数列.

Def.（函数项级数的收敛域）

使 $\sum u_n(x)$ 收敛的 x 称为级数的收敛点. 所有收敛点的集合 收敛域

发散

Def.（余项. 余和） $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$

函数项级数逐点收敛性.

函数项级数的一致收敛性.

Def.（函数列）… $f(x)$ 是 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上的极限函数.

如果 $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ 与 x 无关的 N, s.t. $\forall n>N$, $\forall x\in E$. 有

$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 则称 $f_n(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$.

Def 函数项级数 … f_n 换成 S_n.

Col.

Σ 一致收敛 必要条件:

$\{u_n(x)\}$ 一致收敛到 0.

Thm1.（函数序列一致收敛的柯西准则）

函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 E 上一致收敛

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, s.t. $\forall n,m>N$, $\forall x\in E$. 有 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.

Pf. $\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow$. $\{f_n(x)\}$ 为柯西列. 设其极限函数为 $f(x)$

在 $|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ 中令 $m\to\infty$. 得到

对 $\forall x$, $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 故 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$

? ~~基准~~ 于呢? Chap 2?

Thm. 函数项级数.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$（与x无关）, $\forall n,m>N$. $\forall x\in E$. 有 $\left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right|<\varepsilon$.

Thm2.（Weirstrass 判别）

若 $\sum u_n(x)$ 在 E 上满足.

(1) $|u_n(x)|\le M_n$ $(n=1,2,\cdots)$

(2) 正项级数 $\sum M_n$ 收敛（强级数）

则 $\sum u_n(x)$ 在 E 上绝对一致收敛.

e.g. $\sum_{n=1}^{\infty} x^k e^{-nx}$ $(k>1)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛性.

找优级数: $(e^{-nx+k\ln x})_{max}$? $-n+\frac{k}{x}=0$. $x=\frac{k}{n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^k\cdot e^{-k} = e^{-k}\cdot k^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ 收敛. 故一致收敛

Thm. (Abel)　　　　$\exists M>0$, s.t. $|V_n(x)|\le M$. $(\forall x, \forall n)$

① $\sum u_n(x)$ 一致收敛 ② $\{V_n(x)\}$ 关于 n 单调，且对 x 一致有界.　$\Rightarrow \sum u_n(x) V_n(x)$ 一致收敛

Thm (Dirichlet)

① $\sum u_n(x)$ 部分和数列一致有界 ② $\{V_n(x)\}$ 关于 n 单调，且对 x 一致收敛到 0。

Pf 用 Abel 变换. $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n$.

达朗贝尔，>1 散 <1 敛 =1 代入值讨论（求收敛域的一种方法）.

优级数：求导求最大值.

△ 一致收敛函数项级数的分析性质

Thm1. (和函数的连续性)　充分条件！

$\sum u_n(x)$ 每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

则和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. $\lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$.

(本质：极限交换 $\lim_{x\to x_0} \sum u_n(x) \overset{?}{=} \sum u_n(x_0) = \sum \lim_{x\to x_0} u_n(x)$) ✓

Pf $\forall x_0 \in [a,b]$ 当对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta$. s.t. $\forall |x-x_0|<\delta$

$$|S(x)-S(x_0)| = |S_n(x) + R_n(x) - S_n(x_0) - R_n(x_0)|$$

$$\le |S_n(x) - S_n(x_0)| + |R_n(x)| + |R_n(x_0)|$$ 取 $N.(n>N)$ $<\varepsilon$.

取 δ. 有限. 连续. $<\frac{\varepsilon}{3}$　一致收敛. $|R_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. $|R_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

5.22

Thm2. 逐项积分公式（积分号交换）

若 $\sum u_n(x)$ 每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

则和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且可逐项积分，即

$$\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(x)dx. \quad \forall x_0, x \in [a,b]$$

Pf 由 Thm1 知 $S(x)$ 连续 故 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 可积

$\forall x_0, x_1 \in [a,b]$. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x_1} u_k(x)dx$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x_1} S_n(x)dx$$

又 ∵ 一致收敛. $\forall \varepsilon>0$. $\exists N(\varepsilon)>0$. $n>N(\varepsilon)$. 有 $|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

$\therefore \left|\int_{x_0}^{x_1} (S(x) - S_n(x))dx\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x_1} S_n(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} S(x)dx$.

故 $\int_{x_0}^{x_1} S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x_1} u_n(x)dx$

Thm2. (函数项级数逐项求导数) (对于每一项)

若 $\sum u_n(x)$ 满足: (1) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续可导

(2) $\sum u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛. 记其和函数 $\sum u_n'(x)=T(x)$

(3) 在区间 $[a,b]$ 上点点收敛.

则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 可导, 且 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ $x\in[a,b]$.

Pf. 由 Thm2. $\forall x_0,x_1\in[a,b]$. 有 $\int_{x_0}^{x_1}T(x)dx=\sum\int_{x_0}^{x_1}u_n'(x)dx=\sum(u_n(x_1)-u_n(x_0))$

$=S(x_1)-S(x_0)$

两边对 x_1 求导. $S'(x_1)=T(x_1)=\sum u_n'(x_1)$.

由 Thm 1. $S'(x)$ 连续.

6.3 幂函数

幂级数收敛性.

Thm. (Abel 第一定理)

$x_0\neq0$. $\{a_nx_0^n\}$ 有界. 则 $\sum a_nx^n$ 在 $(-|x_0|,|x_0|)$ 上绝对收敛

且 $\forall r<|x_0|$, $\sum a_nx^n$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛 (内闭一致收敛)

Col (1) 在 x_0 收敛 $\to$ 在 $(-|x_0|,|x_0|)$ 点点绝对收敛 ($\because$ 若收敛必有界)

(2) 在 x_0 发散 $\to$ 在 $|x|>|x_0|$ 上点点发散 (逆否命题成立)

(3) $\exists\rho\in[0,+\infty)$ s.t. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\rho,\rho)$ 点点绝敛 在 $|x|>\rho$ 上点点发散

称 ρ 为幂级数的 收敛半径

☆(4) 在 x_0 条件收敛 $\to$ $\rho=|x_0|$ (收敛但不绝对收敛. 由(1)立得)

(5) $\sum a_nx^n$. $\sum b_nx^n$ 收敛半径为 ρ_1. ρ_2

则 $\sum(a_n+b_n)x^n$ 收敛半径 $\rho\geq\min\{\rho_1,\rho_2\}$

$\sum a_nb_nx^n$ $\rho\geq\rho_1\rho_2$

Rem. $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛域形如 $(-\rho,\rho)$ $(-\rho,\rho]$ $[-\rho,\rho)$ $[-\rho,\rho]$

或 $(-\infty,+\infty)$ $\{0\}$

Thm. (Abel 第二定理) (收敛域)

若 $\sum a_nx^n$ 在端点 $x=\rho$ (或 $-\rho$) 收敛, 则 $\forall 0<r<\rho$. $\sum a_nx^n$ 在 $[-r,\rho]$ (或 $[-\rho,r]$)

上一致收敛.

① $\forall x\in[0,\rho]$

Pf. $\sum a_nx^n=\underbrace{\sum a_n\rho^n}_{\sum\text{收敛}}\underbrace{\left(\frac{x}{\rho}\right)^n}_{\text{关于}n\text{单调},\ \leq1\ \text{关于}x\text{一致有界}}$ $\Rightarrow$ Abel, 一致收敛

?

两个 Abel 的明区别?

② $\forall x\in[-r,r]$ ✓

综合①② 得证.

Thm. 设 $\sum a_n x^n$ 收敛半径为 ρ.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$. 则 $\rho = \frac{1}{q}$ (上极限也可)　(这里 $\frac{1}{0}=+\infty$, $\frac{1}{+\infty}=0$)

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$. 则 $\rho = \frac{1}{q}$. (同上).

幂级数和函数性质.

Thm. $S(x)$ 在其收敛域内部 $(-\rho,\rho)$ 连续.

若在 $-\rho$ 或 ρ 收敛, 则 $S(x)$ 在 $-\rho$ 左连续或在 ρ 右连续.

Pf. 一致~~连续~~收敛易见. 端点 ρ ✓

Thm. 设 $S(x)=\sum a_n x^n$ 收敛半径为 ρ 则

$$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \quad \forall x\in(-\rho,\rho)$$ 且收敛半径仍为 ρ. 但收敛域可能改变.

互证.

Thm. 设 $S(x)=\sum a_n x^n$ 收敛半径为 ρ. 则

$S(x)\in C^\infty(-\rho,\rho)$. 且 $\forall x\in(-\rho,\rho)$, $\forall k=1,2,\cdots$

$$S^{(k)}(x) = k!\,a_k + \frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}x + \cdots + \frac{(k+n)!}{n!}a_{n+k}x^n + \cdots$$ 且 R 仍为 ρ.

Col. $S^{(k)}(0) = k!\,a_k$.

Def $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 为 $f(x)$ 在 x_0 的 Taylor 级数. → 但不一定收敛到自己.

$x_0=0$ 时 也叫 Maclaurin 级数

Thm. 若 $\exists M>0$. s.t. $|f^{(n)}(x)|\le M$ ($\forall x\in(x_0-\rho, x_0+\rho)$, $n=1,2,\cdots$)

则 $f(x)$ 在 $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ 可展开为 Taylor 级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

与 Taylor 区别? 到 $+\infty$, 无余项!

Pf. $\left|f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|$

$= \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\rho^{n+1}$, 收敛到 0 (当 $n\to+\infty$ 时)

Rem. 幂级数展开是唯一的.

Ex. $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3\cdots+(-1)^n x^n$　$x\in(-1,1)$

只考虑边界即可.

在 $[0,x]$ 积分: $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$　$x\in(-1,1)$

可任意积分. 求导!

Ex. $(1+x)^\alpha$ ($\alpha\ne0$) 在 $x_0=0$ 的幂级数展开 (公式法).

$f(x)=(1+x)^\alpha$. $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

$(1+x)^\alpha \overset{?}{=} 1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

要用带积分余项的 Taylor 证明. 略

Ex. $f(x)=\frac{x^2}{1+x^3}$. 求 $f^{(200)}(0)$

$f(x)=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+2}$, $x\in(-1,1)$

令 $3n+2=200$. 得 $n=66$.

$\frac{f^{(200)}(0)}{200!}=(-1)^{66} \Rightarrow f^{(200)}(0)=200!$

5.27

第七章 Fourier 级数

Def. (Fourier 级数)

形如: $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$

若收敛, 则和函数以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期.

1. 2π 周期的 Fourier 级数

$f(x) \overset{?}{=} \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

两边在 $[-\pi,\pi]$ 积分 $\qquad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

同乘 $\cos kx$ 并在 $[-\pi,\pi]$ 积分 $\qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx$, $k=1,2,\cdots,n,\cdots$

$\sin kx$ $\qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$, $k=1,2,\cdots,n,\cdots$

Def. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或广义绝对可积. 令 a_k. b_k 为上述定义下值

称 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 为 $f(x)$ 的形式 Fourier 级数.

记作 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ $\qquad$ 至此不一定相等

Rem. 若 f 为奇函数. $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$. $\quad b_k=2\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,f(x)\,dx$, $\qquad$ 正弦 Fourier 级数

偶 $\qquad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$. $\qquad$ 余弦

2. 任意周期. $(2l)$. 变量替换 $t=\frac{\pi}{l}x$.

$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

$\Rightarrow f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

△ Bessel 不等式. Fourier 的几何解释 (见 PPT)

$\mathcal{R}[a,b]$. $[a,b]$ 上可积/广义绝对可积的函数集合.

内积 $\forall f,g\in\mathcal{R}[-\pi,\pi]$ $\quad (f,g):\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$.

$(f,g)=0$ 正交. $\|f\|$ 长度. $\Rightarrow$ 可验证满足内积性质.

5.29 P306看证明！

Thm (Dini判别法) f以2π为周期 且$f\in\mathcal{R}[-\pi,\pi]$. $x_0\in[-\pi,\pi]$.

若$\exists S\in\mathbb{R}$. $\exists\delta>0$. s.t. $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S}{t}\in\mathcal{R}[0,\delta]$.

则f的Fourier级数在x_0点收敛于S.

Def (广义α阶Lipschitz条件) 记f在x_0的左右极限为$f(x_0-0)$. $f(x_0+0)$.

若$\exists\delta>0$. $L>0$. $\alpha>0$. s.t. $|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\le Lt^\alpha$

$|f(x_0-t)-f(x_0-0)|\le Lt^\alpha$ $(\forall t\in(0,\delta))$

则称f在x_0附近满足~.

Thm. (Lipschitz判别法) f以2π为周期 且$f\in\mathcal{R}[-\pi,\pi]$. $x_0\in[-\pi,\pi]$

若f在x_0附近满足广义α阶Lipschitz条件. ~~则~~

则f的Fourier级数在x_0点收敛于$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$

减去的$f(x_0)$换成左右极限

Def (分段可微).

在$[a,b]$上的函数f. 若$\exists$有限个点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 广义

使f在每一小段(x_{i-1},x_i)内可微. 在端点处 左、右极限与导数分别存在

Thm. (Dirichlet判别法). f以2π为周期 在$[-\pi,\pi]$分段单调且有界.

则f的Fourier级数在$\forall x_0$收敛于$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$