高等线性代数选讲（左怀青）

Strang Chap 9.

9-1、复数、矩阵、和复向量空间

复数的四则运算 $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

复数域 $\mathbb{C}$ 非空 四则运算封闭 包含0和1 $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ 最大的数域

复共轭 $z = a+bi$ $\bar{z} = a-bi$ → 推广复矩阵 $\overline{A \cdot B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

$\overline{z_1+z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\,\bar{z_2}$ 共轭与乘法可交换！（可考虑几何化）

模 $r := |z| := \sqrt{a^2+b^2}$

△若 A 为实矩阵且 $Ax = \lambda x$，那么

$A\bar{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \bar{\lambda}\bar{x}$. 又 $x \neq 0 \to \bar{x} \neq 0$

∴ $\bar{\lambda}$ 也是 A 的特征值.

即实矩阵的复特征值成对出现 ↙也可通过 $f_\lambda(A)$ 证.

$\frac{1}{e^{\theta i}} = \overline{e^{\theta i}} = e^{-\theta i}$ $\quad re^{i\theta} r'e^{i\theta'} = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$

$re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

证. $e^x := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ （定义）

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \cdots$

$= \cos x + i\sin x$. □

$z^n = 1$ 有 n 个根，$1, w, w^2, \cdots, w^{n-1}$. 其中 $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

~~θ_k~~ $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$.

Pf) 范德蒙行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$ （归纳法证）

Fourier matrix

傅里叶矩阵 $F_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$.

$|F_n| \neq 0 \Rightarrow F_n$ 可逆.

复线性空间(向量空间) $(\mathbb{V}, \mathbb{C}, +, \cdot)$

非空集合,定义加法. A_1-A_4.
定义两集合间的数乘,满足 M_1-M_4 } ⇒ 线性空间.

2.27

9-2 厄尔米特(Hermitian)矩阵和酉(Unitary)矩阵

Def. 向量模长 $\|z\| := \text{sqrt}(\bar{z}^T z = z^H z = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)$

$\bar{z}^T = z^H$ 共轭转置记号 H. $(AB)^H = B^H A^H$

Def. 向量内积. $u^H v$. 不是 $v^H u$! $u^H v = \overline{v^H u}$ 无对称性. 两种均可选

$$\langle u, v\rangle = u^H v = \bar{u}_1 v_1 + \cdots + \bar{u}_n v_n.$$

$(u, v) = 0 \Leftrightarrow u.v$ 正交.

$(Au)^H v = u^H (A^H v)$ $(Au, v) = (u, A^H v)$

Def 厄尔米特矩阵 $S = S^H$ (实对称矩阵的推广).

1.方阵 2.对角元实数 ⇒ 1. 特征值均为实数 $\sigma(S) \subseteq \mathbb{R}$
2. 不同特征值的特征向量正交
3. 可对角化: $S = Q\Lambda Q^{-1}$ (Q正交, $Q^{-1} = Q^T$)
其一般矩阵. 直和?

$S = S_1 + iS_2$
实对称 实反对称

Pf. 1. 设 $Sz = \lambda z$. ($z \neq \vec{0}$)
同乘 z^H. 得 $z^H S z = \lambda z^H z$
$(z^H S z)^H = z^H S^H (z^H)^H = z^H S z$ ⇒ 实数. (1 by 1 数.)
证 λ 实, 只需证 $\lambda = \frac{z^H S z}{z^H z} = \frac{实数}{实数} = 实数$. □
(应用结论. $S = S^H$. 对 $\forall z \in \mathbb{C}$. $z^H S z$ 为实数)

2. 设 $Sz = \lambda z$, $Sy = \eta y$.
$y^H S^H z = \eta y^H z$ $y^H S z = y^H \lambda z$
$y^H S^H z = y^H S z$ ⇒ $\underbrace{(\eta - \lambda)}_{\neq 0} y^H z = 0$. ⇒ $y^H z = 0$.

Def 酉矩阵. $Q^H Q = I$. 方阵.
$\|Qz\| = \|z\|$. 特征根 $\|\lambda\| = 1$.

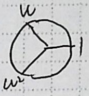
复习. $\text{trace}(A) = \Sigma$ eigen-value ⇒ 特征多项式可证.

3x3 Fourier Matrix.

$$F=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&e^{\frac{2\pi i}{3}}&e^{\frac{4\pi i}{3}}\\1&e^{\frac{4\pi i}{3}}&e^{\frac{2\pi i}{3}}\end{bmatrix}$$

$F=F^T$.

F 酉矩阵
Unitary
(直接计算验证).



Pf?

△ S. 厄尔米特 $\Rightarrow S+i\mathbb{I}$ 可逆.

Pf. S 特征根实数 $\det(S+i\mathbb{I})=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$
$=(\lambda_1+i)\cdots(\lambda_n+i)\neq 0$.

9-3 快速傅里叶变换

◦ Pf: $1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=0$. ~~$(w^n=1)$~~ $w=e^{\frac{2\pi i}{n}}$

只需两端乘 $(1-w)$. 即 $1-w^n=0$. ✓.

◦ Fourier matrix 对称, 但不是厄尔米特矩阵

$\frac{1}{\sqrt{n}}F$ 是酉矩阵. $F^HF=n\mathbb{I}$. $F^{-1}=\frac{1}{4}\overline{F}$ $\left(\overline{F}=F^H\right)$

证: F 的两列内积
$i\neq j$ 时. 为 $1+w+w^2+\cdots+w^n$
$(w=e^{\frac{2\pi i}{n}(i-j)})$
易证 $F^HF=n\mathbb{I}$.

$$\begin{bmatrix}y_0\\\vdots\\y_3\end{bmatrix}=Fc=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&w&w^2&w^3\\1&w^2&w^4&w^6\\1&w^3&w^6&w^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\\vdots\\c_3\end{bmatrix}$$

物理空间　　　　　　　　　　频率空间.

y_j 为 $\sum_{k=0}^{3}c_ke^{ikx}$ 在 $e^{\frac{2\pi i}{4}\cdot j}$ 的取值

$c=fft(y)$　　F: frequency space $\longrightarrow$ physical space

△ DFT 相当于插值

DFT: $y=Fc$　FFT: fast. 一种算法, DFT 的操作. (欲得 y).

n 需要是 2 的幂次. 下假设 $n=2^p$.

$$F_n=\begin{pmatrix}\mathbb{I}&D\\\mathbb{I}&-D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{n/2}&\\&F_{n/2}\end{pmatrix}P$$

$P\to$ 置换矩阵.
把偶数列换到奇前. (从 0 开始!)
c_0, c_2　$c_1, c_3\cdots$

$D=(1,w,\cdots,w^{n/2})$.

Pf. 设 $m=\frac{n}{2}$. 现欲: 将 c 分为 c', c'' $\Rightarrow$ 用 F_m 换为 y' 和 y'', 再重建 y.

P　$\begin{pmatrix}F_{n/2}&\\&F_{n/2}\end{pmatrix}P$　$\begin{pmatrix}\mathbb{I}&D\\\mathbb{I}&-D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{n/2}&\\&F_{n/2}\end{pmatrix}P$

$y_j=y_j'+(w_n)^jy_j''$　$j=0,\cdots,m-1$

$y_{j+m}=y_j'-(w_n)^jy_j''$　$j=0,\cdots,m-1$.

中文第10章 酉空间 10.3

一、欧几里德空间 V是$\mathbb{R}$上线性空间,并在V上定义内积.(交换、线性数乘、分配、正定)

$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

$(k\alpha+l\beta,\gamma)=k(\alpha,\gamma)+l(\beta,\gamma)$

$(\alpha,\alpha)\geq 0$ 且仅当$\alpha=0$时为0.

$\mathbb{R}^n$中 内积可定义为 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$

(1) 向量α的长度 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$,记为$\|\alpha\|$

(2) 向量α,β的夹角 $\varphi=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}$ $0\leq\varphi\leq\pi$.

二、酉空间 V是$\mathbb{C}$上线性空间,并在V上定义内积

内积 1) $(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$

2) $(k\alpha+l\beta,\gamma)=k(\alpha,\gamma)+l(\beta,\gamma)$

3) $(\alpha,\alpha)\geq 0$ 且 $(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=\theta$.

$\boxed{(\alpha,k\beta)=\overline{k}(\alpha,\beta)}$

Pf. $(\alpha,k\beta)=\overline{(k\beta,\alpha)}=\overline{k}\,\overline{(\beta,\alpha)}$

$=\overline{k}(\alpha,\beta)$.

$\mathbb{C}^n$中,内积可定义为 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\overline{\beta}=\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}$

[或 $(\alpha,\beta)=\alpha^H\beta=\sum_{i=1}^{n}\overline{a_i}b_i\Rightarrow$ 第2条要改]

$M_n(\mathbb{C})$中,内积可定义为 $(A,B)=tr(AB^H)$

(1) 向量α的模/长度 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$. 若$|\alpha|=1$,称为单位向量.

无角度概念,仅正交概念

(2) 柯西-施瓦兹不等式 $|(\alpha,\beta)|^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$. 等号成立$\Leftrightarrow\alpha,\beta$线性相关.

Pf. $\alpha=\theta$ 显然.

$\alpha\neq\theta$ 对$\forall\lambda\in\mathbb{C}$,有 $(\lambda\alpha+\beta,\lambda\alpha+\beta)\geq 0$.

即 $\lambda\overline{\lambda}(\alpha,\alpha)+\lambda(\alpha,\beta)+\overline{\lambda}(\beta,\alpha)+(\beta,\beta)\geq 0$.

将 $\lambda=\frac{-(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ 代入上式得. $-\frac{(\alpha,\beta)(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}+(\beta,\beta)\geq 0$.

从而 $|(\alpha,\beta)|^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$.

Thm. 两两正交的非零向量组线性无关.(酉空间)

归纳 $n=2$. $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$.

两端与α_1作内积 $k_1(\alpha_1,\alpha_1)+k_2\underset{0}{(\alpha_2,\alpha_1)}=0$.

$k_1=0$ 回代得 $k_2=0$.

若$n-1$成立, n时 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$.

两端与α_1内积, $k_1(\alpha_1,\alpha_1)=0\Rightarrow k_1=0$.

由$n-1$成立得 $k_2=\cdots=k_n=0$. 故假设成立.

△标准正交基. 顺序不可变!∵系数在前,提出时才不变共轭.

$\eta_1=\alpha_1$

$\eta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1$

$\vdots$

$\eta_i=\alpha_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(\alpha_i,\eta_j)}{(\eta_j,\eta_j)}\eta_j$

新的在前

$\Rightarrow$

(1) $span(\alpha_1\cdots\alpha_i)=span(\eta_1,\cdots,\eta_i)$ $i=1,2,\cdots,n$.

Pf. 可相互线性表出.

(2) $(\eta_i,\eta_j)=0$. $(i\neq j)$

(3) 单位化 $\varepsilon_i=\frac{\eta_i}{|\eta_i|}$

Thm.(复矩阵的UR分解)

设$A_{n\times n}$可逆.则∃U.R使得 $A=U\times R$. U为酉矩阵.

(R又称正线上三角矩阵).　　R为对角线上为正实数的上三角矩阵

证明由施密特正交化易知.

且分解有唯一性. Pf? 　?归纳法.一列列证相等(见HW04)

Thm. V为n维酉空间. $\varepsilon_1\cdots,\varepsilon_n$为一组ONB. U为$M_n(\mathbb{C})$且

$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)U$

则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$为一组ONB $\Longleftrightarrow$ U为酉矩阵.

⇐易得. ⇒将Σ展开即可得 $UU^H=I$.

Def. $W_1\perp W_2$空间正交. $W^\perp$正交补. $W_1\oplus W_2$直和.

$\Updownarrow$

$W_1\cap W_2=\theta$

☆ Thm. 设W为酉空间V的子空间.则V可以分解成 W与$W^\perp$直和. $V=W\oplus W^\perp$

Pf. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是W的一组ONB.将其扩充成V的一组ONB.

显然 $\alpha_{r+1},\cdots\alpha_n\perp W$. 因此 $span(\alpha_{r+1}\cdots\alpha_n)\subseteq W^\perp$.

设$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$是$W^\perp$中任一向量.则α与$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$正交.

$(\alpha_i,\alpha)=0=\sum_{j=1}^{n}x_j(\alpha_j,\alpha_i)=x_i(\alpha_i,\alpha_i)=0.\Rightarrow x_i=0$

$\Rightarrow\alpha\in W^\perp$. 故 $W^\perp=span(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$.

由于$W+W^\perp$包含V的ONB.故 $V=W+W^\perp$

又任取$\alpha\in W\cap W^\perp$. $(\alpha,\alpha)=0$ (∵两空间正交) $\Rightarrow\alpha=\theta$.

∴$W\cap W^\perp=\{\theta\}$.于是 $V=W\oplus W^\perp$.

10.4 酉变换.正规变换和埃尔米特变换

☆Def.

Def.(酉变换) σ是V的一线性变换 ∀α,β∈V,有 $(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\alpha,\beta)$

Remark.一组正交基⇒一组正交基,保内积.即保长度.

Thm.下列命题~~σ是酉变换~~等价:(设σ为酉空间的线性变换).

(1) σ是酉~~矩阵~~变换.

(2) ∀α∈V. $|\sigma\alpha|=|\alpha|$

(3) σ将一组ONB变成另一组ONB

(4) 在任何一组ONB下矩阵是酉矩阵.(任意)

Pf. (1)⇒(2) √(由定义)

(2)⇒(3) 若$\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$为ONB.有$|\sigma(\varepsilon_i)|=1$.

又$|\sigma(\varepsilon_i+\varepsilon_j)|=|\varepsilon_i+\varepsilon_j|$.即(　,　)=(　,　)

? 内积展开 $2Re(\sigma(\varepsilon_i),\sigma(\varepsilon_j))=2Re(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$.

为何可展. 考虑 $\varepsilon_i+i\varepsilon_j$. 同理可得 $Im(\sigma(\varepsilon_i),\sigma(\varepsilon_j))=0$.

线性变换为前提! (3)⇒(4)易得. (4)⇒(1)易得.

Thm. V. n维酉空间. $U(n)$表示全体酉变换集合.

(1) 恒等变换 $\varepsilon \in U(n)$

(2) $\sigma, \tau \in U(n)$, 则 $\sigma\tau \in U(n)$

(3) 如 $\sigma \in U(n)$, 则 σ 可逆且 $\sigma^{-1} \in U(n)$

} 群.(酉群)

Pf. (1) ✓ (2) $(\sigma\tau(\alpha), \sigma\tau(\beta)) = (\tau(\alpha), \tau(\beta)) = (\alpha, \beta)$

(3) 酉矩阵取逆 ✓

Def. 不变子空间 W. ($\forall \alpha \in W$, $\sigma(\alpha) \in W$).

Thm. σ为V的酉变换, W为σ不变子空间, 则$W^\perp$也是σ不变的子空间.

Pf. $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 为W的ONB. $\beta_{m+1} \cdots \beta_n$ 为 $W^\perp$ 的ONB

$\sigma W = span(\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_m))$. $\sigma W^\perp = span(\sigma(\beta_{m+1}) \cdots \sigma(\beta_n))$

由酉变换定义, $\sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\beta_n)$为V的ONB, 故$\sigma W \perp \sigma W^\perp$.

又 $\because \sigma W^\perp + \sigma W = V \Rightarrow \sigma W^\perp = (\sigma W)^\perp$

$\because$酉变换为可逆变换 $\therefore \sigma W = W$ ✓ (条件. W为σ不变子空间, 且为双射)

从而 $\sigma W^\perp = W^\perp$. $W^\perp$是σ的不变子空间.

Def (共轭变换) σ为V上线变, 若 σ^*满足 $(\sigma\alpha, \beta) = (\alpha, \sigma^*\beta)$ $\forall \alpha, \beta \in V$.

则称 σ^*是σ的共轭变换. (conjugate transformation)

Thm σ为酉空间V上线变, 则 σ^* 存在唯一.

设 σ. σ^* 在一组ONB下矩阵为A和A^*, 则 $A^* = \overline{A}^T = A^H$.

Pf p76. 证存在. 取 $\varepsilon_1 \cdots, \varepsilon_n$ ONB下 σ的矩阵A.

$\forall \alpha, \beta \in V$. α 坐标 $x = (x_1, \cdots x_n)^T$. β 坐标 $y = (y_1, \cdots, y_n)^T$.

取σ为矩阵为A^H的映射. 则 $(\sigma\alpha, \beta) = (Ax)^T\overline{y} = x^T A^T \overline{y} = x^T \overline{A^H y} = (\alpha, \sigma^*\beta)$

证唯一. 对应矩阵B和C.

$(\sigma\varepsilon_i, \varepsilon_j) = (\varepsilon_i, \tau\varepsilon_j) \Rightarrow (\sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_{ki}, \varepsilon_j) = (\varepsilon_i, \sum_{k=1}^n \varepsilon_k b_{kj})$

$\Rightarrow a_{ji} = \overline{b_{ij}} \Rightarrow B = A^H$. 同理 $C = A^H$.

B. C 等.

Remark. 共轭变换的性质. Pf ? ✓

(1) $\varepsilon^* = \varepsilon$ (2) $(\sigma^*)^* = \sigma$ (3) $(k\sigma)^* = \overline{k}\sigma^*$ (4) $(\sigma+\tau)^* = \sigma^* + \tau^*$ (5) $(\sigma\tau)^* = \tau^*\sigma^*$

Def. (正规变换). $\sigma\sigma^* = \sigma^*\sigma$. ($\sigma$为V上线性变换). $\Rightarrow AA^H = A^H A$

酉变换. 埃尔米特变换均为正规变换.

Thm. σ 正规变换. λ 特征值. ξ 特征向量 $\Rightarrow$ ξ 也是 σ^* 属于 $\bar{\lambda}$ 的特征向量.

σ 属于不同特征值的特征向量正交. Pf 复习! ✓

Thm. 正规矩阵可对角化.

σ 为正规变换, V中存在一组 ONB 使 σ 在其下的矩阵是对角矩阵.

Thm. A为正规矩阵. 幂零矩阵 $\Rightarrow A=0$.

Def.(埃尔米特变换) $(\sigma\alpha,\beta)=(\alpha,\sigma\beta) \Leftrightarrow \sigma=\sigma^*$

Thm. 埃尔米特变换中特征值均为实数.

$\sigma\xi=\lambda\xi$. $\sigma^*\xi=\bar{\lambda}\xi$

$\because \sigma=\sigma^*$ $\therefore (\lambda-\bar{\lambda})\xi=\theta \Rightarrow \lambda=\bar{\lambda} \Rightarrow \lambda\in\mathbb{R}$

Thm. σ 埃尔米特变换, W是 σ 不变子空间, $W^\perp$ 也是 σ 不变子空间.

Pf. $\forall\beta\in W$. 有 $\sigma(\beta)\in W$. 设 $\alpha\in W^\perp$. 则

$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta))=0 \Rightarrow \sigma(\alpha)\in W^\perp$.

中9.2.1-9.2.4

约当标准型

3.26

$m_A(x)$.

Def.(极小多项式) $A\in M_n(F)$. A的化零多项式中最低次数的首项系数为1的多项式.

Remark. $m_A(A)=0$ $f_A(\lambda)$ 是A化零多项式.

△Thm. 矩阵的极小多项式是化零多项式的因子.

即 $A\in M_n(F)$. $\forall f(x)\in F[x]$, 有 $f(A)=0 \Leftrightarrow m_A(x)\mid f(x)$.

Pf. $\Leftarrow$ ✓.

$\Rightarrow$ 带余除法 $f(x)=q(x)m_A(x)+r(x)$. ($\deg r(x)<\deg m_A(x)$ 或 $r(x)=0$)

$0=f(A)=q(A)m_A(A)+r(A)=r(A)$.

$\therefore$ ~~deg r(x)~~ 又化零多项式次数不能小于 $m_A(x)$. $\therefore r(x)=0$.

Col. $m_A(x)$ 是 $f_A(x)$ 的因子.

△Thm. 相似矩阵有相同的极小多项式 P29

Pf. 设 $B=C^{-1}AC$. 只需 $m_A(x)\mid m_B(x)$, $m_B(x)\mid m_A(x)$.

☆即只需 $m_A(B)=0$. $m_B(A)=0$.

$m_A(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$m_A(B)=(C^{-1}AC)^n+a_{n-1}(C^{-1}AC)^{n-1}+\cdots+a_1(C^{-1}AC)+a_0(C^{-1}IC)$

$=C^{-1}(A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I)C$

$=C^{-1}m_A(A)C=0$.

$m_A(x)$ 是B的化零多项式. 故 $m_B(x)\mid m_A(x)$. 同理… 故 $m_A(x)=m_B(x)$

Def (商空间).

Def. (同余) V是F上线性空间. W是V子空间. 若$\alpha, \beta \in V$. $\alpha-\beta \in W$.

则称α与β模W同余, 记作$\alpha \equiv \beta \pmod W$

等价关系: 反身. 对称. 传递

Def (同余类). W是V子空间. $\forall \alpha \in V$. 定义V子集合$\alpha+W=\{\alpha+\beta \mid \beta \in W\}$

称为模W的一个同余类. α叫做此类一代表.

性质: (1) 若$\alpha' \in \alpha+W$. 那么$\alpha+W=\alpha'+W$

(2) $\gamma \in \alpha+W$则$\gamma \notin \beta+W$. 即$(\alpha+W) \cap (\beta+W)=\phi$. 或$\alpha+W=\beta+W$.

Def. (商集) V上按模W子空间所得等价类的集合$\bar{V}=\{\alpha+W \mid \alpha \in V\}$是$V$的商集.

加法: $(\alpha+W)+(\beta+W)=(\alpha+\beta)+W$.

乘法: $c(\alpha+W) = c\alpha+W$. (数乘)

验证: 零元素W. 封闭性✓. A_1-A_4. M_1-M_4 ✓.

商集为一线性空间. 记为V/W.

Thm V是n维线性空间. W是V的m维子空间. 则商空间V/W维数$\dim(V/W)=n-m$.

trivial

pf. $\alpha_1 \cdots \alpha_m$是W的基. $\beta_{m+1} \cdots \beta_n$与$\alpha_i$为$V$的基

设$k_{m+1}(\beta_{m+1}+W)+\cdots+k_n(\beta_n+W)=\theta+W$

即$(k_{m+1}\beta_{m+1}+\cdots+k_n\beta_n)+W=\theta+W$

即 $k_{m+1}\beta_{m+1}+\cdots+k_n\beta_n \in W$.

故 — — — — $= l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m$表出.

移项, 由于线性无关 $k_{m+1}=\cdots=k_n=l_1=\cdots=l_m=0$.

因此 $\beta_{m+1}+W$, $\beta_{m+2}+W$, $\cdots$, β_n+W线性无关.

设$\gamma+W$是V/W中任一元素.

$\gamma=x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m+y_{m+1}\beta_{m+1}+\cdots+y_n\beta_n$.

那么$\gamma+W=y_{m+1}(\beta_{m+1}+W)+\cdots+y_n(\beta_n+W)$.

故 $\beta_{m+1}+W \cdots \beta_n+W$为$V/W$一组基. 故$\dim(V/W)=n-m$.

Def. (诱导变换). 设$\sigma \in L(V)$ 即V上一线性变换. W是σ的$\boxed{\text{不变子空间}}$

记$\dim W=r$. $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r$为$W$的基. 扩充为$V$基$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$.

考虑V/W上的变换τ: $V/W \to V/W$

$\tau(\alpha+W)=\sigma\alpha+W$. $(\alpha \in V)$ 为σ诱导的变换.

验证: $\forall \alpha, \beta \in V$. $k \in F$. 有.

$$\begin{aligned}\tau((\alpha+W)+(\beta+W)) &= \tau((\alpha+\beta)+W) = \sigma(\alpha+\beta)+W \\ &= (\sigma\alpha+\sigma\beta)+W \\ &= (\sigma\alpha+W)+(\sigma\beta+W) \\ &= \tau(\sigma+W)+\tau(\beta+W).\end{aligned}$$

$\tau(k(\alpha+W)) = \tau(k\alpha+W) = \sigma(k\alpha)+W = k\sigma(\alpha)+W = k(\sigma\alpha+W) = k\tau(\alpha+W)$

故 τ 为线性变换（V/W 上的）.

$$\sigma(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots\varepsilon_n) = (\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n)\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^{(r\times r)}$$

V/W 基

$\tau(\varepsilon_{r+i}+W) = \sigma\varepsilon_{r+i}+W$

$= (\varepsilon_{r+1}+W,\cdots,\varepsilon_n+W)\ A_2$ 第 i 列 （$\because A_3$ 在 W 中）

$$\boxed{\tau(\varepsilon_{r+1}+W,\cdots,\varepsilon_n+W) = (\varepsilon_{r+1}+W,\cdots,\varepsilon_n+W)\,A_2}$$

矩阵的三角化（复数域）

Col. 设 σ 是 $\mathbb{C}$ 上线性空间 V 的一线性变换.

则 σ 的任意真不变子空间必包含在一个维数增加 1 的不变子空间中.

Pf. P35

4.2 9.2.5 P36

Def（子空间直和）子空间 W_1, W_2，W_1+W_2 中的任一向量在 W_1, W_2 分解唯一

Thm. $W_1\oplus W_2 \Leftrightarrow \theta$ 表示法唯一 $\Leftrightarrow$ 任一向量表示法唯一 $\Leftrightarrow W_1\cap W_2=\{\theta\}$

$\Leftrightarrow \dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1+W_2)$

Thm. 设 W_1 是 V 的子空间，则必存在 V 的子空间 W_2，使 $V=W_1\oplus W_2$

Def.（幂零变换）$\sigma\in L(V)$. 若有 $m\in\mathbb{N}^*$，使 $\sigma^m=0$，则 σ 为幂零变换.

具有上述性质最小的 m 为幂零次数.

Thm. 幂零变换特征值均 0，不可对角化（反证：若可，$\Lambda=0$.）

Def. $\sigma\in L(V)$. $\alpha\neq\theta\in V$. 若 $\alpha,\sigma\alpha,\cdots,\sigma^{n-1}\alpha$ 构成 V 的一组基

且 $\sigma^n\alpha=\theta$，则称 σ 是一个循环变换. 称 $\alpha,\sigma\alpha,\cdots,\sigma^{n-1}\alpha$ 循环基.

（若幂零次 $m<\dim V=n$，则称其为循环子空间）.

Thm. 循环子空间是不变子空间.

$\sigma(\alpha,\sigma\alpha,\cdots,\sigma^{n-1}\alpha) = (\sigma\alpha,\cdots\sigma^{n-1}\alpha,0)$

Def. 循环变换在循环基 $\sigma^{n-1}\alpha,\cdots,\sigma\alpha,\alpha$ 下的矩阵为循环矩阵（cyclic matrix）

$$N=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Thm. 循环变换是幂零变换，但次数为 n.

且设 $W_i = \mathrm{Im}\,\sigma^i\ (i=0,1,\cdots,m)$.

$\{0\} = W_m \subset W_{m-1} \subset \cdots \subset W_1 \subset W_0 = V$

（$\because W_{i+1} = \mathrm{Im}(\sigma^{i+1}) = \sigma(W_i)\subset W_i$）.

真包含 ✓

$\{\theta\} = W_m \subset W_{m-1} \subset \cdots \subset W_1 \subset W_0 = V$. ★ $\sigma\varepsilon_i^{(m-1)} = \theta. (i=1,\cdots p_{m-1})$

$\because \{\theta\} = \sigma(W_{m-1})$，故 $W_{m-1} \subset \ker\sigma$. 设 $\dim W_{m-1} = p_{m-1}$. 取一组 W_{m-1} 基: $\varepsilon_1^{(m-1)}, \cdots, \varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-1)}$.

由 $W_{m-1} = \sigma(W_{m-2})$. W_{m-2} 中有对应基原像

$$\sigma\varepsilon_i^{(m-2)} = \varepsilon_i^{(m-1)} \quad (i=1,2,\cdots p_{m-1})$$

易证在 W_{m-2} 中, 向量组 $\begin{cases}\varepsilon_1^{(m-1)}, \cdots, \varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-1)} \\ \varepsilon_1^{(m-2)}, \cdots, \varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-2)}\end{cases}$ 线性无关. (?) $2p_{m-1}$ 个向量

下证将其扩充为 W_{m-2} 基. 并且扩充的基元素, 同时也在 $\ker\sigma$ 中.

反证: 若 $\varepsilon_k^{(m-2)}$ 为一扩充基元素, 且 $\sigma\varepsilon_k^{(m-2)} \neq \theta$. 又 $\sigma\varepsilon_k^{(m-2)} \in W_{m-1}$.

因此可由 W_{m-1} 基线性表出 $\sigma\varepsilon_k^{(m-2)} = \sum x_i\varepsilon_i^{(m-1)}$

$= \sum x_i \sigma\varepsilon_i^{(m-2)}$ 找原像

$\sigma(\varepsilon_k^{(m-2)} - \sum x_i\varepsilon_i^{(m-2)}) = \theta \Longleftarrow = \sigma\sum x_i\varepsilon_i^{(m-2)}$

于是 $\varepsilon_k^{(m-2)} - \sum x_i\varepsilon_i^{(m-2)} \in \ker\sigma \cap W_{m-2}$.

用 $\varepsilon_k^{(m-2)} - \sum x_i\varepsilon_i^{(m-2)}$ 代替 $\varepsilon_k^{(m-2)}$ 作为扩充基元素即可.

假设 $\dim W_{m-2} - \dim W_{m-1} = p_{m-2}$. 并设

$\begin{cases}\varepsilon_1^{(m-1)}, \cdots, \varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-1)} \\ \varepsilon_1^{(m-2)}, \cdots, \varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-2)}, \cdots, \varepsilon_{p_{m-2}}^{(m-2)}\end{cases}$ 为 W_{m-2} 的基. ★ $\sigma\varepsilon_i^{(m-2)} = \theta$ $(i = p_{m-1}+1, \cdots p_{m-2})$

以此类推, 找 $\varepsilon_i^{(m-2)}$ 在 W_{m-3} 中的原像并扩充基. (不一定要扩充但至少×2)

最终得 $W_0 = V$ 的基. ↓ → 表示 σ 映射.

但必定真包含, 否则 $\sigma(W_k) = W_{k+1} = W_k$ 接下来永远循环无法到 θ.

$$\begin{cases}
\begin{array}{ccccccccc}
\varepsilon_1^{(m-1)}, & \cdots, & \varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-1)} & \theta & \theta & \theta & & & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \\
\varepsilon_1^{(m-2)}, & \cdots, & \varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-2)}, & \cdots, & \varepsilon_{p_{m-2}}^{(m-2)} & & \theta & \theta & \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & \uparrow & \uparrow & \\
\varepsilon_1^{(m-3)}, & \cdots, & \varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-3)}, & \cdots, & \varepsilon_{p_{m-2}}^{(m-3)}, & \cdots & \varepsilon_{p_{m-3}}^{(m-3)} & & \\
\uparrow\vdots & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & & \\
\varepsilon_1^{(0)}, & \cdots, & \varepsilon_{p_{m-1}}^{(0)}, & \cdots, & \varepsilon_{p_{m-2}}^{(0)}, & \cdots, & \varepsilon_{p_{m-3}}^{(0)}, & \cdots, & \varepsilon_{p_0}^{(0)}
\end{array}
\end{cases}$$

每一列基元素生成一个 σ 的循环子空间. 记作 T_i $(i=1,2,\cdots p_0)$

σ 限制在 T_i 上时 $\sigma|_{T_i}$ 是循环变换. 这时有 $\boxed{V = \bigoplus_{i=1}^{p_0} T_i}$

Thm. $\mathbb{C}$ 上 V 的任意幂零变换 σ, V 可分解为循环子空间的直和 $V = T_1 \oplus \cdots \oplus T_t$. 使得 σ 限制在每个循环子空间 T_i 上是循环变换.

σ 在 $\varepsilon_1^{(m-1)}, \cdots, \varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(m-1)}, \cdots \varepsilon_2^{(0)}, \cdots \varepsilon_{p_0}^{(0)}$ (上到下, 左到右次序 ↓↓↓)

基下的矩阵为 $\operatorname{diag}(N_1, N_2, \cdots N_{p_0})$. 其中 $N_i \in M_{列高}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

§9

根子空间与空间分解定理

Def.(根向量). 若 $\sigma\in L(V)$, λ 是 σ 的特征值, $\alpha\in V$. 若存在依赖于 α 的自然数 m. s.t. $(\sigma-\lambda\varepsilon)^m\alpha=\theta$. 则称 α 是变换 σ 属于 λ 的~.

Thm. 设 $\sigma\in L(V)$. 任取数 λ. 令

$U_\lambda=\{\alpha\in V\mid \exists m\in\mathbb{N},\ s.t.\ (\sigma-\lambda\varepsilon)^m\alpha=\theta\}$. 则　　$f(A)\cdot A=A\cdot f(A)$

(1) U_λ 是 V 的子空间 ($\alpha+\beta\in U_\lambda$ 取 $\max m$. $k\alpha\in U_\lambda$)

(2) U_λ 是 σ 的不变子空间 ($(\sigma-\lambda\varepsilon)^m\sigma\alpha=\sigma(\sigma-\lambda\varepsilon)^m\alpha=\theta\Rightarrow\sigma\alpha\in U_\lambda$)

(3) $U_\lambda\neq\{0\}\Leftrightarrow\lambda$ 是 σ 的特征值. $\Leftarrow$ 显然　设 $\alpha\neq\theta$. 故 $m\geq1$)

$\Rightarrow$ 设 m 最小自然数, 使 $(\sigma-\lambda\varepsilon)^m\alpha=\theta$.

则 $(\sigma-\lambda\varepsilon)^{m-1}\alpha\neq\theta$. 设其为 β.

$(\sigma-\lambda\varepsilon)\beta=(\sigma-\lambda\varepsilon)^m\alpha=\theta\Rightarrow\beta$ 为特征向量.

Def. U_λ 为 λ 的根子空间 (root subspace)

$(\sigma-\lambda\varepsilon)|_{U_\lambda}$ 是幂零变换

Rem. $V_\lambda\subset U_\lambda$.

Col. 当 $\mu\neq\lambda$ 时, $(\sigma-\mu\varepsilon)|_{U_\lambda}$ 是可逆变换. (前提: U_λ 是 $\sigma-\mu\varepsilon$ 的不变子空间 ✓ 故可有 $(\sigma-\mu\varepsilon)|_{U_\lambda}$)

☆只需证它是单射. 即证它的核是零元素.

$\because$ V 上线性变换满足 $\dim(Ker)+\dim(Im)=\dim V$. 单射 $\Leftrightarrow$ 满射 (有限维) ?

可用矩阵思考 (线性代数基本定理)

设 $(\sigma-\mu\varepsilon)\alpha=\theta$. 则 $(\sigma-\lambda\varepsilon)\alpha=(\mu-\lambda)\alpha$

① $\alpha=\theta$ 或 ② α 为 $\mu-\lambda$ 的特征向量, $\mu-\lambda$ 为特征值

但 $\sigma-\lambda\varepsilon$ 为幂零变换, 特征值均为0. 由假设 $\mu-\lambda\neq0$. 故 $\alpha=\theta$. □

Col.(根子空间直和定理). 假设 σ 有 s 个特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$. 根子空间 $U_1,\cdots,U_s$. 那么 $U_1+U_2+\cdots+U_s$ 为直和.

Pf. 只需证对 $\alpha_i\in U_i$. 若 $\sum\alpha_i=\theta\Leftrightarrow\alpha_i=\theta$. $i=1,\cdots,s$.

$\Leftarrow$ 显然. $\Rightarrow$ 数归.

$s=1$. 显然. 设对 $s-1$ 成立, 考虑 s 个根子空间.

$\because\alpha_s\in U_s$. 故 $\exists m\in\mathbb{N}$, s.t. $(\sigma-\lambda_s\varepsilon)^m\alpha_s=\theta$.

令 $\beta_i=(\sigma-\lambda_s\varepsilon)^m\alpha_i$ $(i=1,2,\cdots,s-1)$. 则 $\because U_i$ 为 $\sigma-\lambda_s\varepsilon$ 不变子空间 $\therefore\beta_i$ 仍在 U_i 中.

$$\text{则}\ \sum_{i=1}^{s-1}\beta_i=(\sigma-\lambda_s\varepsilon)^m(\alpha_1+\cdots\alpha_{s-1})=(\sigma-\lambda_s\varepsilon)^m(\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+\alpha_s)=\theta.$$

由假设. $\beta_1\cdots\beta_{s-1}$ 有 $\beta_1=\cdots=\beta_{s-1}=\theta$.

又 $\because$ $\sigma-\lambda_s\varepsilon$ 在 U_i 是可逆变换. $\therefore(\sigma-\lambda_s\varepsilon)^m$ 在 U_i 为可逆变换　✓显然.

于是 $\alpha_1=\cdots=\alpha_{s-1}=\theta$. 因此 $\alpha_s=\theta$. 故数归成立.

Col. 对 σ 的任意特征根 λ. 根子空间 U_λ 的维数 $=$ λ 的代数重数

Rem. $\dim(V_\lambda)=$ 几何重数 $\leq\dim(U_\lambda)=$ 代数重数

Pf. 设 λ_0 为 eigen-value, 代数重数 n_0. 设 $\dim U_{\lambda_0}=s$. 欲证 $n_0=s$.

从 U_{λ_0} 中选一组基. 扩充为 V 的基. 在此组基下~~矩~~ σ 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}B & C\\ 0 & D\end{bmatrix}$$　B: $s\times s$ ($\because U_{\lambda_0}$ 为不变子空间)

故 $\det(\lambda I-A)=\underline{\det(\lambda I-B)}\det(\lambda I-D)=\underline{(\lambda-\lambda_0)^s}\det(\lambda I-D)$

$(\sigma-\lambda_0\varepsilon)|_{U_{\lambda_0}}$ 为幂零变换

若$s<n_0$，则λ_0为$\det(\lambda I-D)$的一根.

记$\tau: V/U_{\lambda_0} \to V/U_{\lambda_0}$是$\sigma$的诱导变换 于是 λ_0是τ的特征值. ?/显然.

设$\alpha_0+U_{\lambda_0}$是对应的特征向量，则有$\alpha_0 \notin U_{\lambda_0}$. 使得

$$\tau(\alpha_0+U_{\lambda_0}) = \lambda_0(\alpha_0+U_{\lambda_0})$$

$$\overset{\|}{\sigma\alpha_0+U_{\lambda_0}} \Rightarrow \sigma\alpha_0=\lambda_0\alpha_0+\gamma \ (\gamma\in U_{\lambda_0})$$

$\gamma=(\sigma-\lambda_0\varepsilon)\alpha_0$. 且 $\gamma\in U_{\lambda_0}$ 思路?

故$\exists m\in N$. s.t. $(\sigma-\lambda_0\varepsilon)^m\gamma=(\sigma-\lambda_0\varepsilon)^{m+1}\alpha_0=\theta$.

得出$\alpha_0\in U_{\lambda_0}$矛盾. 因此 $n=s$. 即 $\dim U_{\lambda_0}=n_0$.

Thm.（根子空间分解定理）σ为$\mathbb{C}$上线性空间V的线性变换.

则V是σ的根子空间的直和 $V=U_{\lambda_1}\oplus U_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus U_{\lambda_s}$

区别之间幂零变换可分解成循环子空间直和的定理!

两者结合得出Jordan定理.

Thm.（Jordan标准型定理）

设V在$\mathbb{C}$上的线性空间. $\sigma\in L(V)$. 则在V中存在一组基.

使σ在这组基下的矩阵是Jordan标准型.

Def. 由Jordan块构成的准对角矩阵

Jordan块: $\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda\end{bmatrix}$

矩阵语言: 任意复方阵与Jordan标准型相似,

Pf. $V=U_{\lambda_1}\oplus U_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus U_{\lambda_s}$.

$(\sigma-\lambda_i\varepsilon)|_{U_{\lambda_i}}$ 为在U_{λ_i}上的幂零变换

$\Rightarrow U_{\lambda_i}=T_{i1}\oplus T_{i2}\oplus\cdots\oplus T_{in_i}$

其中$\sigma-\lambda_i\varepsilon$在$T_{ij}$上为循环变换. 在循环基下矩阵为$N=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{bmatrix}$

那么σ在T_{ij}上矩阵（对应基下）$N+\lambda_i I=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}$

因此σ在U_{λ_i}上对应基下矩阵为若干个对角为λ_i的Jordan块构成的.

$\Rightarrow\sigma$在某组基下矩阵为Jordan标准型.

4.16 约当标准型的计算.

Thm. 设A为准对角矩阵 $A=diag[A_1,A_2,\cdots,A_s]$ 则A的极小多项式

$$m_A(x)=[m_{A_1}(x),m_{A_2}(x),\cdots,m_{A_s}(x)]$$

这里用 $[\cdots\cdots]$ 表示首项系数为1的最小公倍式.

Pf. $\forall f(x)\in F[x]$ 多项式. $f(A)=diag[f(A_1),f(A_2),\cdots,f(A_s)]$

$f(x)=0\Leftrightarrow f(A_i)=0$. $(i=1,2,\cdots,s)$

$m_A(A)=0\Leftrightarrow m_A(A_i)=0$ $(i=1,2,\cdots,s)$

即 $m_A(x)$ 是 $A_1,\cdots A_s$ 的化零多项式. $\Rightarrow m_{A_i}(x)\mid m_A(x)$

$m_A(x)$ 是 $m_{A_i}(x)$ 的倍式. 因此 $[m_{A_1}(x),\cdots,m_{A_s}(x)]\mid m_A(x)$

设 $g(x)=[m_{A_1}(x),\cdots m_{A_s}(x)]$. 由于 $g(A_i)=0\Rightarrow g(A)=0$.

$g(x)$ 是A的化零多项式 $m_A(x)\mid g(x)$. $\Rightarrow g(x)=m_A(x)$.

Thm. k阶约当块 $J_k=\begin{bmatrix}\lambda_0&1&&\\&\lambda_0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_0\end{bmatrix}$ 的极小多项式 $m_{J_k}(x)=(x-\lambda_0)^k$.

Pf. J_k 特征多项式 $f_{J_k}(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k$. $m_{J_k}(x)\mid f_{J_k}(x)$

设 $m_{J_k}(x)=(x-\lambda_0)^m$ $(1\le m\le k,\ m\in N^*)$ 一次线斜上移一格

由 $m_{J_k}(J_k)=0$. 有

$$0=(J_k-\lambda_0 I)^m=\begin{bmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{bmatrix}^m=N^m \quad 故 m\ge k.$$

因此 $k=m$. $m_{J_k}(x)=f_{J_k}(x)=(x-\lambda_0)^k$.

Rem. 至此. 任一矩阵化为约当标准型即可知其极小多项式.

$$J=\begin{bmatrix}2&1&&&&&&\\&2&&&&&&\\&&2&&&&&\\&&&3&1&&&\\&&&&3&1&&\\&&&&&3&&\\&&&&&&1&\\&&&&&&&1\end{bmatrix}\qquad m_J(x)=[(x-2)^2,x-2,(x-3)^3,x-1,x-1]=(x-2)^2(x-3)^3.$$

相似矩阵极小多项式关系? P29. 相等.

Cor. A可对角化 $\Leftrightarrow$ A的极小多项式无重根.

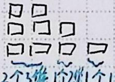
$\Rightarrow$: A可相似到对角矩阵 $\Rightarrow$ 极小多项式由对角线(特征根)相异者相乘而得

$\Leftarrow$: 无重根 $\Rightarrow$ 约当块均一阶 $\Rightarrow$ 约当标准型就是对角矩阵

如何确定 $U_{\lambda_i}=T_{i1}\oplus\cdots\oplus T_{ij}$ 中 T_{ij} 的维数?

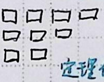
考虑 $(\sigma-\lambda_i\varepsilon)|_{U_{\lambda_i}}$ (幂零变换).

$$\begin{array}{l}\varepsilon_1^{(m-1)}\cdots\varepsilon_{p_{m-1}}^{(m-1)}\\ \varepsilon_1^{(m-2)}\cdots\varepsilon_{p_{m-2}}^{(m-2)}\cdots\\ \quad\vdots\\ \varepsilon_1^{(0)}\cdots\cdots\cdots\varepsilon_{p_0}^{(0)}\end{array}$$



2个3维 1个2维 1个1维

向上对齐

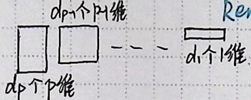


第一行映射到0 $\ker(\sigma-\lambda_i\varepsilon)$ 行1

二 第一行 $\ker((\sigma-\lambda_i\varepsilon)^2)$ 行1+2

$\ker((\sigma-\lambda_i\varepsilon)^3)$ 行1+2+3.

定理证明时需从每个子空间 W_i 的基角度考虑, 故顺序不同.



Rem. $U_{\lambda_j}\ (j\neq i)$ 中不会影响 $\ker(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^j$!

$\dim\ker(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^j-\dim\ker(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{j-1}=\sum_{k=j}^{p}d_k$

$\Rightarrow d_j=\dim\ker(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^j-\dim\ker(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{j-1}$

$-\dim\ker(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{j+1}+\dim\ker(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^j$

其中 $\dim\ker(\sigma-\varepsilon)^0=\dim\ker\varepsilon=0$.

$\nwarrow d_j=2\dim\ker(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^j-\dim(\quad)^{j-1}-\dim(\quad)^{j+1}$

t_i为循环子空间个数, $=\dim\ker(\sigma-\lambda_i\varepsilon)=\sum_{i=1}^{p}d_i$

又∵ $\dim\ker\sigma+\dim\operatorname{Im}\sigma=n$ (矩阵维数)

$\operatorname{Im}\sigma=\operatorname{rank}(A)$

$j=0$. n

$\rightarrow j=p+1$ $\operatorname{rank}(A-\lambda_i I)^j$

$\therefore d_j=\operatorname{rank}(A-\lambda_i I)^{j-1}+\operatorname{rank}(A-\lambda_i I)^{j+1}-2\operatorname{rank}(A-\lambda_i I)^j$.

$t_i=n-\operatorname{rank}(A-\lambda_i I)$.

最多n维?

到rank停止减少时.

4.22　9.3.2-9.3.3, 10.5
约当标准型计算和埃尔米特二次型.

规范形: 酉矩阵对角化. ~~A~~ $AU = U\Sigma$

5.7　第11章　矩阵分析初步.

Def (函数矩阵)　以实变量 x 的函数 $a_{ij}(x)$ 为元素的矩阵
原来函数为～特例

Def (函数矩阵运算)　加法. 数乘. 矩乘. 转置 ✓

Def (逆矩阵). 若 $A(x)$. $B(x)$. n阶函矩, 对 $\forall x \in [a,b]$. 有
$A(x)B(x) = B(x)A(x) = I$.
则称 $A(x)$ 在区间 $[a,b]$ 可逆. $B(x)$ 为 $A(x)$ 的逆矩阵

Thm. n阶方阵 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\det A(x)$ 在区间 $[a,b]$ 处处不为0.
若 $A(x)$ 可逆 则 $A^{-1}(x) = \frac{1}{\det A(x)} \operatorname{adj} A(x)$.

$\operatorname{adj} A(x) = \begin{bmatrix} A_{11}(x) & \cdots & A_{n1}(x) \\ \vdots & & \\ A_{1n}(x) & & A_{nn}(x) \end{bmatrix}$.　$A_{ij}(x)$ 是 $A(x)$ 中元素 $a_{ij}(x)$ 代数余子式

Def (秩). $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒等于0的子式的最高阶数称为 $A(x)$ 的秩
若n阶方阵 $A(x)$ 的秩 = n. 则称 $A(x)$ 满秩
$A(x)$ 可逆 $\Rightarrow$ 满秩　满秩 ~~⇏~~ 可逆　e.g. $\lambda I - A$.
不∀, 但∃

Def (极限)　若 $A(x)$ 所有元素在 $x = x_0$ 处有极限, 且 $\lim\limits_{x \to x_0} a_{ij}(x) = a_{ij}$ → 确定常数, 则称
$A(x)$ 在 $x = x_0$ 处有极限, $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = A$.　其中 $A = (a_{ij})_{m \times n}$.
极限的运算 ✓

Def (连续)　每个元素在 x_0 处连续, $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = A(x_0)$

Def (可导)　每个元素在 x_0 处可导.　$A'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{A(x_0 + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = (a'_{ij}(x_0))$
导数运算 ✓　$\frac{d}{dx} A^2(x) = \frac{dA(x)}{dx} A(x) + A(x) \frac{dA(x)}{dx} \neq 2A(x) \frac{dA(x)}{dx}$

$A(x) A^{-1}(x) = I$.　$\frac{dA(x)}{dx} A^{-1}(x) + A(x) \frac{dA^{-1}(x)}{dx} = 0$.
若 $A(x)$. $A^{-1}(x)$ 均可导, 则 $\boxed{\frac{dA^{-1}(x)}{dx} = -A^{-1}(x) \frac{dA(x)}{dx} A^{-1}(x)}$　可以仅一可导吗? ✓

$A(x) = [x]$.　$A^{-1}(x) = [\frac{1}{x}]$
x=0时.

Def　K阶导. 定积分.

Def.(线性相关). 设 $a_i(x)$ 为在 $[a,b]$ 上连续的函数向量. 便于判定.
若存在不全为 0 的实数 $k_1, \cdots, k_m$. 使任意 $x \in [a,b]$.
$k_1 a_1(x) + \cdots + k_m a_m(x) = 0$. 成立.
则称在 $[a,b]$ 上 $a_1(x) \cdots a_m(x)$ 线性相关. 否则线性无关

Def.(格拉姆行列式) $a_1(x) \cdots a_m(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 闭区间! (∵开 → 一致连续)
函数向量 $\Rightarrow g_{ij} = \int_a^b a_i^T(x) a_j(x) dx$.
$G = (g_{ij})$ 为 $a_1(x) \cdots a_m(x)$ 的 Gram矩阵. $\det G$ 为 ~.

Thm. $[a,b]$ 上连续的函数向量 $a_1(x) \cdots a_m(x)$.
线性无关的充要条件为 Gram矩阵满秩. 直观理解?

Pf. $\Leftarrow$. 设 $\sum k_j a_j(x) = 0$. 左乘 $a_i^T(x)$ 积分.
(*) $\int_a^b a_i^T(x) [\sum k_j a_j(x)] dx = 0$. 即 $\sum k_j g_{ij} = 0$. $(\forall i)$
$\vec{k} = (k_1\ k_2 \cdots k_m)^T$. 则 $G\vec{k} = 0$
∵ G 满秩 ∴ $\vec{k}$ 仅全0解 故 $a_1(x) \cdots a_m(x)$ 线性无关

$\Rightarrow$. 若 G 不满秩. 欲证 $a_1(x) \cdots a_m(x)$ 线性相关.
$\int_a^b \sum k_i a_i^T(x) \sum k_j a_j(x) dx = 0$. (*)式对 $\forall i$ 相加.
令 $a(x) = \sum k_i a_i(x)$
则 $\int_a^b a^T(x) a(x) dx = 0$. ∵ $a(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 又 ∵ $a^T(x) a(x) \geq 0$ $(\forall x \in [a,b])$
$\Rightarrow \forall x \in [a,b]$. $a(x) = 0$.
即 $\sum k_i a_i(x) \equiv 0$. $(\forall x \in [a,b])$ $a_1(x) \cdots a_m(x)$ 线性相关

Def.(朗斯基行列式) 设 $a_1(x) \cdots a_m(x)$ 在 $[a,b]$ 有 m-1阶导数 的函数向量
令 $A(x) = \begin{bmatrix} a_1^T(x) \\ \vdots \\ a_m^T(x) \end{bmatrix} = (a_{ij}(x))_{m \times n}$
令 $W(x) = (A(x), A'(x), \cdots, A^{(m-1)}(x))_{m \times mn}$

Thm $W(x)$ 为 $a_1(x) \cdots a_m(x)$ 的 Wronsky 矩阵.
若在 x_0 点 $(x_0 \in [a,b])$. $W(x_0)$ 秩为 m. (行满秩).
则 $a_1(x) \cdots a_m(x)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关. 充分非必要!

Pf. P93. 反证法. 注意: 线相关要对所有 x!

5.14 填35-50 证20 剩余计算40左右.

Def.(矩阵序列) n^2数都收敛→矩阵$\{A_k\}$收敛, 极限 $\lim_{k\to\infty} A_k = A$. 否则发散. 极限

Thm. 若A与A_k(k=1,2,…)均可逆, 则$\{A_k^{-1}\}$也收敛, 且$A_k^{-1} \to A^{-1}$

Pf. $\frac{1}{\det A_k} \operatorname{adj} A_k$. 用克莱姆!

Thm. $A \in M_n(\mathbb{C})$. 则矩阵序列 $A, A^2, \cdots, A^k, \cdots$ 有极限为0 ($\lim_{n\to\infty} A^n = 0$) 的充要条件是A的所有特征值的模都小于1.

Pf. 设A的Jordan标准型 $J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, \cdots, J_s)$

$A = PJP^{-1}$ $A^k = PJ^kP^{-1}$ (P可逆)

$\therefore \lim A^k = 0 \Leftrightarrow \lim J_i^k = 0.$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 用矩阵rank可知.

$$J_i^k = (\lambda_i I + N)^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{d-1} \lambda_i^{k-d+1} \\ & \lambda_i^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix} \quad \text{e.g.} \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}$$

$\therefore \lim_{k\to\infty} J_i^k = 0 \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1.$ $i = 1, 2, \cdots, s$.

Def.(矩阵级数) A_k 一般项 $\sum_{i=1}^{k} A_i$ 部分和 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$. 级数.

$\sum A_k$ 收敛 $\Leftrightarrow$ n^2个数项级数收敛.

$\sum_{k=1}^{\infty} PA_kQ = P(\sum_{k=1}^{\infty} A_k)Q$.

Thm. 若$\sum_{k=1}^{\infty} A^k$收敛. 则A的特征值的模都小于1. (实际是充要)?

$\sum A^k = P[\sum [\lambda_1 \cdots \lambda_n]^k] P^{-1}$ $\sum_{k=1}^{\infty} C_k^i \lambda^k$ (？)

Def (绝对收敛)

Thm. $\sum A_k$ 绝敛 $\Leftrightarrow$ 级数 $\sum \|A_k\|$ 收敛. 其中 $\|A_k\| = \max |(A_k)_{ij}|$ 范数的一种 (不满足包含性公理)

Pf. ⇒ 显然. $\Leftarrow$ ~~……~~ $\|\sum A_k\|$?

能取到c, s.t. $\forall N, i, j$. $\sum_{k=1}^{N} |(A_k)_{ij}| < c$.

则 $\sum_{k=1}^{N} \|A_k\| \leq \sum_{k=1}^{N} \sum_i \sum_j |(A_k)_{ij}| < n^2 c$.

相当于 已知 A_k 级数收敛

$\Leftarrow$ ✓ $\Leftrightarrow$ 每次最大值的数项收敛

$(A_k)_{ij} \leq (A_k)_{\max} \leq \sum_i \sum_j (A_k)_{ij}$?

Thm. P.Q可逆. $\sum A_k$ 绝敛. 则 $\sum PA_kQ$ 绝敛, 且 $\sum PA_kQ = P(\sum A_k)Q$

Thm. (矩阵收敛的比较判别法). 正项A.B. $|a_{ij}^{(k)}| \leq |b_{ij}^{(k)}|$. B敛则A敛.

矩阵函数.

$f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$.

$A = PJP^{-1}$. (Jordan标准型).

$f(A) = f(PJP^{-1}) = P f(J) P^{-1}$

Def. (谱) A所有相异特征值的集合.

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ 是A互异特征值. A的极小多项式

$m_A(x) = (x-\lambda_1)^{d_1} \cdots (x-\lambda_r)^{d_r}$. 并设 $f(x)$ 有足够多阶导数.

则 $f(\lambda_1), f'(\lambda_1) \cdots f^{(d_1-1)}(\lambda_1)$ 为 $f(x)$ 关于矩阵A的谱上的值.

$\vdots$

$f(\lambda_r), f'(\lambda_r) \cdots f^{(d_r-1)}(\lambda_r)$ 若…值都存在. 称 $f(x)$ 在A的谱上有定义.

Thm. $m_A(x)$ 在A的谱上的值都为0

若 $g(x)$ 在A的谱上的值都为0. 则 $g(x) \mid m_A(x)$.

Thm. $A \in M_n(\mathbb{C})$. $f(x)$. $g(x)$ 两多项式.

$f(A) = g(A) \iff f(x)$ 与 $g(x)$ 在A的谱上的值相同.

$\Rightarrow$ $h(A) = f(A) - g(A) = 0$ (设 $h = f - g$)

$h(x)$ 为化零多项式. $m_A(x) \mid h(x)$

设 $f(x) - g(x) = q(x)\, m_A(x)$

$f^{(k)}(\lambda_i) - g^{(k)}(\lambda_i) = 0$. $(\forall i, \forall k)$

$\Leftarrow$ $h(x) = f(x) - g(x)$. $h(x)$ 在A谱上值均为0.

$m_A(x) \mid h(x)$. 设 $f(x) - g(x) = h(x) = q(x)\, m_A(x)$

$f(A) - g(A) = q(A)\, m_A(A) = 0$.

Cauchy's Interlace Therom for Eigenvalues of Hermitian Matrices

11.4.1 一阶常系数线性微分方程组.

$\frac{dx}{dt} = Ax$. ($A \in M_n(\mathbb{C})$. $x = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T$.

Col. $\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$.

$(At)^k$ 可交换. ~~为什么? t是数~~. 显然

Pf. $LHS = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{At}$.

Thm. $\frac{dx}{dt} = Ax$. 满足初始条件 $x|_{t=0} = x_0$ 的解存在且唯一.

$x(t) = e^{At} x_0$.

解析解(可无穷次求导的)

看书: P106.

11.4.2. 特征值/向量表示方程解.

能否 $x(t) = \alpha(t) e^{\lambda t}$. $\lambda \in \mathbb{C}$?

$\alpha(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\alpha_1 + \cdots + \frac{t}{1!}\alpha_{k-1} + \alpha_k$. P108.

5.28

线性空间和矩阵的张量积

一. 线性空间张量积

在域K上两个向量空间V和W的张量积 $V\otimes W := F(V\times W)/R$

其中 $F(V\times W) := \{\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(v_i,w_i) \mid s\in\mathbb{N}, \alpha_i\in K, (v_i,w_i)\in V\times W\}$

自由向量空间. F无穷维. 加法: 合并同类项. F: 有限个V×W元素之和

等价关系R: $(v_1+v_2,w)\sim(v_1,w)+(v_2,w)$ → F中!!

$(v,w_1+w_2)\sim(v,w_1)+(v,w_2)$

$c(v,w)\sim(cv,w)\,\tilde{=}\,(v,cw)$ 不一定能用此形式

在这些(v,w)的关系下生成的等价类被叫作"张量"并指示为 $v\otimes w$

定义: $\pi\quad V\times W \longrightarrow V\otimes W$

$(v,w)\longmapsto v\otimes w.$

π为双线性映射.

$\pi(\lambda e_1+\mu e_2, f)=\lambda\pi(e_1,f)+\mu\pi(e_2,f)$

$\pi(e,\lambda f_1+\mu f_2)=\lambda\pi(e,f_1)+\mu\pi(e,f_2)$

$$\begin{tikzcd} E\otimes F \arrow[dr, dashed, "\varphi"'] & E\times F \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "\psi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

M. 任意线性空间. 若有 $\psi: E\times F\to M$ 为双线性映射

则有唯一 $\varphi: E\otimes F\to M$. s.t. $\psi=\varphi\circ\pi$

Thm. 设 $e_1,\cdots,e_n$, $f_1,\cdots,f_m$ 分别为E. F的基, 则 $\Lambda=\{e_i\otimes f_j\}$ 为 $E\otimes F$ 基.

因此 $\dim(E\otimes F)=\dim E\cdot\dim F$

Proof. 线性表出✓ $e=\sum t_ie_i$ $f=\sum s_jf_j \Rightarrow e\otimes f=\sum_i\sum_j t_is_j\, e_i\otimes f_j$.

线性无关 设 $\lambda_{ij}\in\mathbb{C}$. s.t. $\sum\lambda_{ij}\,e_i\otimes f_j=0$.

设 $x_j=\sum_i\lambda_{ij}e_i$. 则 $\sum_j x_j\otimes f_j=0$.

对任意线性泛函 $\rho: F\to\mathbb{C}$. 定义 $\psi_\rho(e,f)=\rho(f)e\in E$.

易证 $\psi_\rho: E\times F\to E$ 为双线性映射. 故存在 $\varphi_\rho: E\otimes F\to E$ 线映.

s.t. $\varphi_\rho(e\otimes f)=\rho(f)e\in E$. $\forall e\in E, f\in F$.

现取 $\rho_1: F\to\mathbb{C}$ 为线性泛函, s.t.

$\rho_1(f_1)=1,\ \rho_1(f_j)=0.\ (\forall j\geq 2)$

$0=\varphi_{\rho_1}(\sum_j x_j\otimes f_j)=\sum_j\rho_1(f_j)\,x_j=x_1 \Rightarrow \lambda_{11}=\cdots=\lambda_{n1}=0.$

同理可证其余 λ_{ij} 也都为0.

矩阵张量积的定义

$$T:\ \overset{e_1,e_2}{E} \longrightarrow \overset{g_1,g_2}{G}$$

$$S:\ \underset{f_1 f_2}{F} \longrightarrow \underset{h_1 h_2}{H}$$

映射 $T\times S:\ E\times F \to G\otimes H$

$(e,f) \longmapsto T(e)\otimes S(f)$ 双线性.

$$\begin{tikzcd}
E\times F \arrow[r, "T\times S"] \arrow[d, "自然"'] & G\otimes H \\
E\otimes F \arrow[ur, "存在\ T\otimes S"'] &
\end{tikzcd}$$

$(e,f)\mapsto e\otimes f$

存在映射 $T\otimes S$. s.t.

$$T\otimes S\,(e\otimes f)=T(e)\otimes S(f)$$

$$T\otimes S\,(e_1\otimes f_1)=T(e_1)\otimes S(f_1)=(a_{11}g_1+a_{21}g_2)\otimes(b_{11}h_1+b_{21}h_2)$$

$$=(g_1\otimes h_1,\ g_1\otimes h_2,\ g_2\otimes h_1,\ g_2\otimes h_2)\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}\\a_{11}b_{21}\\a_{21}b_{11}\\a_{21}b_{21}\end{pmatrix}$$

……

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B & a_{12}B\\ a_{21}B & a_{22}B\end{pmatrix}\qquad A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B & \cdots & a_{1n}B\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}B & & a_{mn}B\end{pmatrix}$$

复习.

- △ 求Jordan的P时要用 $A-\lambda I$ 不能用 $\lambda I-A$!
- △ $B=AP$. P是A到B的过渡矩阵.
- △ 酉变换定义: σ为V上一线性变换. $\forall \alpha,\beta\in V$, 满足 $(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\alpha,\beta)$
  酉空间($\mathbb{C}$上定义了内积的线性空间)
- △ $(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)=2\,\mathrm{Re}(\alpha,\beta)$
- △ $(\sigma\alpha,\beta)=(\alpha,\sigma^*\beta)$　σ^*是σ的共轭变换. $\boxed{\sigma\sigma^*=\sigma^*\sigma\ \text{正规变换}.\ \sigma=\sigma^*\ \text{埃尔米特}}$
- △ 若σ为正规变换. λ eigen-value ξ eigen-vector
  则 $\bar\lambda$ ξ 也是σ^*属于 $\bar\lambda$ 的eigen-vector
- △ 若σ为正规变换, 则属于不同eigen-value的eigen-vector相互正交
- △ 正规 $\Leftrightarrow$ 可对角化. 注意对不变子空间的考察!
- △ 酉变换/埃尔米特: W为σ不变子空间, $W^\perp$也为σ不变子空间
- △ 函数矩阵在$[a,b]$可逆 $\Leftrightarrow$ $\det A(x)$在$[a,b]$处处不为0.
  在$[a,b]$上不恒为0的子式最高阶数为$A(x)$的秩.　可逆 $\underset{\times}{\overset{\checkmark}{\rightleftarrows}}$ 满秩
- △ $\frac{d}{dx}(A^2(x))\neq 2A(x)\frac{dA(x)}{dx}$ (不可交换)!

Jordan块的n次方？N的n次方？

求U使$U^{-1}AU$为对角阵：U酉矩阵记得单位化！

幂级数展开时记得$A^0=I$！

一般解从向当链任一位置开始往映射方向走，
越前面的t次数越高，要记得$\frac{t^n}{n!}$系数！最后乘$e^{\lambda t}$

$$J=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{bmatrix} \qquad \underset{k阶}{J^n}=\begin{bmatrix}\lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2} & \cdots & C_n^{k-1}\lambda^{n-(k-1)} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$f(J_i)=\begin{bmatrix}f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2} & \cdots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda_i)}{(k-1)!} \\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(\lambda_i)\end{bmatrix}$$

5.21

一般函数　　　　　　　　　　　　多项式

Def. 若 $f(x)$ 在 A 的谱上有定义. $g(x)$ 为任意多项式. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 A 上谱有相同的值. $f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$　$j=1,\cdots,r$　$k=0,\cdots,d_j-1$

则函数矩阵 $f(A)$ 定义为 $f(A)=g(A)$, $g(x)$ 是定义多项式.

拉格朗日: $\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\prod_{j\neq i} x-x_j}{\prod_{j\neq i} x_i-x_j}$　　多项式通常不唯一.　Thm 11.11 谱同. 值同.

但 $f(A)$ 唯一! why?

Thm. 矩阵函数性质

1. $f(A)\cdot A = A\cdot f(A)$
2. 加法 乘法　$f=f_1+f_2$, 则 $f(A)=f_1(A)+f_2(A)$. $f=f_1f_2$ 同理.
3. $A=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_s)$ 则 $f(A)=\mathrm{diag}(f(A_1), f(A_2),\cdots,f(A_s))$
4. 若 $B=P^{-1}AP$. 则 $f(B)=P^{-1}f(A)P$.

Pf 4. A. B 极小多项式相同. 故特征值相同?

A 谱上若 $g(x)$ 和 $f(x)$ 有相同值. ($g(x)$ 多项式). B 谱上 $g(x)$ 和 $f(x)$ 也有相同值.

$\therefore f(A)=g(A)$. $f(B)=g(B)$　$g(B)=P^{-1}g(A)P$.

Pf 3. ?

谱的意义!

约当. $f(A)=P^{-1}\mathrm{diag}(f(J_1),\cdots,f(J_s))P$.

$t\times t \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$

Thm. J_i 对应 λ_i 的约当块. $J_i=\lambda_i I+N\in M_t(\mathbb{C})$

J_i 的极小多项式 $m_{J_i}(x)=(x-\lambda_i)^t$.

$f(x)$ 在 J_i 上谱为 $f(\lambda_i)\ f'(\lambda_i)\cdots f^{(t-1)}(\lambda_i)$ 令.

$$g(x)=f(\lambda_i)+f'(\lambda_i)(x-\lambda_i)+\cdots\frac{f^{(t-1)}(\lambda_i)}{(t-1)!}(x-\lambda_i)^{t-1}$$

(Taylor) $g(x)=\sum_{j=0}^{t-1}\frac{f^{(j)}(\lambda_i)}{j!}(x-\lambda_i)^j$　即从 λ_i 处展开 t 阶

$$\Rightarrow f(J_i)=\sum_{j=0}^{t-1}\frac{1}{j!}\cdot f^{(j)}(\lambda_i)\cdot(J_i-\lambda_i I)^j$$

$$=\sum_{j=0}^{t-1}\frac{1}{j!}f^{(j)}(\lambda_i)\cdot N^j$$

0次方　　　　t-1次方

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdots} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 0 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(t-1)!}f^{(t-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

→ 依次右移

→

→

Note $e^A \neq \begin{bmatrix} e^{a_{11}} & \cdots & e^{a_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$ 要算多项式.

对无穷次可微的函数 $f(x)$. 可利用 Taylor 给出 $f(A)$ 级数表达式

Thm. 设复变量函数 $f(x)$ 在开圆 $|x-\lambda_0|<r$ 域内解析.
即在 $|x-\lambda_0|<r$ 内可以展开成幂级数 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\lambda_0)^k$.
则只要方阵 A 所有特征值都在开圆 $|x-\lambda_0|<r$ 内, 就有

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (A-\lambda_0 I)^k.$$

Rem. 对某些 A 好算. 不需对每个矩阵重构 $g(A)$
而对 f 有一个"通项" 比如 $A^n = A$. 或 N.

证. 只要证 A 为若当块时成立? $P\begin{pmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_s) \end{pmatrix}P^{-1}$ 为什么?

见下

设 $J=\lambda I+N$ 且 $|\lambda-\lambda_0|<r$.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}(x-\lambda)^k=\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-\lambda)^k. \quad \left(b_k=\frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}\right)$$

$f(x)$ 也可在 λ_0 展开为 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\lambda_0)^k$.

于是 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\lambda_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-\lambda)^k$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (J-\lambda_0 I)^k=\sum_{k=0}^{\infty} b_k (J-\lambda I)^k.$$

则 $f(J)=\sum_{k=0}^{t-1} b_k N^k=\sum_{k=0}^{\infty} b_k (J-\lambda I)^k=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (J-\lambda_0 I)^k$

由前种算法.借

☆ $\because f(A)=P\,\mathrm{diag}(f(J_1)\cdots f(J_s))P^{-1}$

$$\begin{aligned}
&=P\,\mathrm{diag}\left(\sum a_k (J_1-\lambda_0 I)^k, \cdots, \sum a_k (J_s-\lambda_0 I)^k\right)P^{-1}\\
&=\sum\left[a_k\left(P(\mathrm{diag}(J_1,J_2\cdots J_s)-\lambda_0 I)^k P^{-1}\right)\right]\\
&=\sum a_k \left(P\,\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_s)P^{-1}-\lambda_0 I\right)^k\\
&=\sum a_k (A-\lambda_0 I)^k.
\end{aligned}$$

说明合起来是对的

$P\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{bmatrix}P^{-1}$

$$\begin{aligned}
&(PDP^{-1}-\lambda_0 I)^k\\
&=(P(D-\lambda_0 I)P^{-1})^k\\
&=P(D-\lambda_0 I)^k P^{-1}
\end{aligned}$$

Rem. $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$.