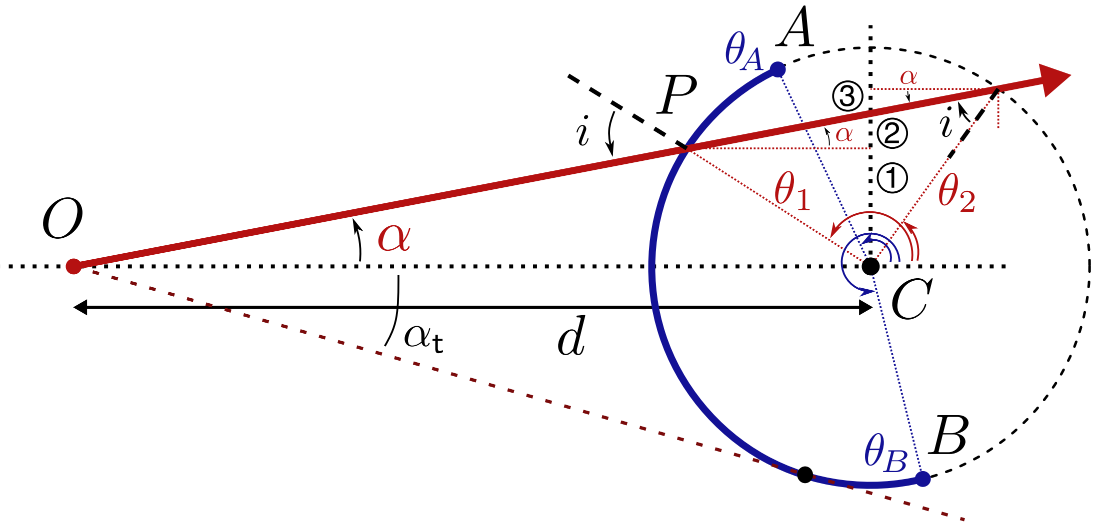
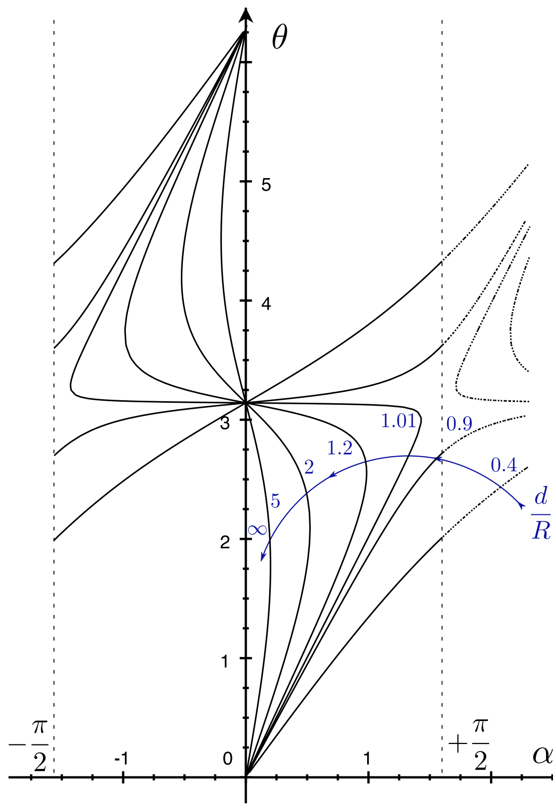
1. Intersection arc de cercle / demi-droite



On suppose que $\theta_A < \theta_B$. La distance $d = OC$ est non signée ici, et les angles ne sont pas absolus comme avec le segment, mais relatifs à l'axe $\overrightarrow{OC}$ (on peut regarder la figure dans n'importe quel sens). L'arc est de rayon de courbure $R = CA = CB$. Clairement, si $|\alpha| > \frac{\pi}{2}$ et $d > R$, il n'y a pas intersection.

Pour le premier point d'intersection avec le disque (P ici),

$$\underbrace{d\tan\alpha}_{①+②} = \underbrace{(+R\sin\theta_1)}_{①} + \underbrace{\tan\alpha\cdot(-R\cos\theta_1)}_{②} \quad\Longleftrightarrow\quad b\cdot\sin(\alpha) = \sin(\theta_1-\alpha) \quad \text{où} \quad b = \frac{d}{R}$$



La demi-droite intersecte l'arc $\widehat{AB}$ si θ_1 est défini, donc si

$$b\,|\sin(\alpha)| \leqslant 1 \quad\Longleftrightarrow\quad |\alpha| < \alpha_t = \arcsin(R/d)$$

lorsque $d > R$. Pour $d < R$ (O à l'intérieur du cercle), il y a toujours une solution, évidemment.

Pour le deuxième point d'intersection avec le disque, on a

$$\underbrace{d\tan\alpha}_{①+②} = \underbrace{(+R\sin\theta_2)}_{①+②+③} - \underbrace{\tan\alpha\cdot(+R\cos\theta_2)}_{③}$$

… ce qui revient au même : $b\cdot\sin(\alpha) = \sin(\theta_2-\alpha)$.

Cette équation possède en effet, dans $\theta \in [0, 2\pi[$, nos deux solutions (courbes $\theta(\alpha)$ bi-valuées, cf. figure ci-contre).

Au final, les solution sont

$$\theta_1 = -\arcsin(b\cdot\sin(\alpha)) + \alpha + \pi$$
$$\theta_2 = +\arcsin(b\cdot\sin(\alpha)) + \alpha$$

Pour $d > R$, la solution correcte est θ_1 si $\theta_A < \theta_1 < \theta_B$, et sinon, éventuellement θ_2 si $\theta_A < \theta_2 < \theta_B$. Pour $d < R$, la seule solution correcte est θ_2 (et si on veut rester dans $[0, 2\pi[$, on ajoute 2π à θ_2 pour $\alpha < 0$).

Les angles d'incidence respectifs sont

$$i_1 = (\pi-\theta_1) + \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} = \alpha + (-i_2) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) \Leftrightarrow i_2 = \alpha - \theta_2$$