贝尔不等式与哈达玛门

赵晓菲

2023 年 8 月 3 日

介绍

贝尔定理是量子力学中的一个基本结果，涉及纠缠的概念和贝尔不等式的违反。它由物理学家约翰·S·贝尔于 1964 年提出，并对我们理解量子力学和现实本质产生深远的影响。

贝尔不等式

贝尔不等式是一个涉及纠缠粒子测量结果相关性的数学不等式。它对于能从局部实在论理论中产生的相关性施加限制。然而，使用纠缠粒子的实验测试显示出了贝尔不等式的违反，表明量子力学的预测与局部实在论不相容。

量子纠缠

贝尔不等式的违反是存在于纠缠粒子之间的非局部相关性的强有力证据，意味着纠缠粒子的性质在它们之间具有固有的联系，无论它们之间的距离如何。这种现象被称为量子纠缠，是量子力学的一个核心特征，并在许多实验中得到了验证。

影响

贝尔定理和贝尔不等式的违反对于我们理解量子力学和物理世界的本质产生了重要影响。它表明量子力学与经典理论根本不同，并且非局部相关性是量子世界的固有特征。这引发了许多关于量子力学和物理概念方面的讨论和辩论，并在量子信息和量子计算领域促进了进一步的研究。

纠缠的回顾

- 未纠缠的状态：$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle)$
- 纠缠的状态：$|\Psi_2\rangle = U_{\text{gate}}(|0\rangle|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle)$

未纠缠的状态

$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle)$

- 电子 1 处于状态 $|0\rangle$，电子 2 处于状态 $|0\rangle$
- 电子 1 处于状态 $|1\rangle$，电子 2 处于状态 $|1\rangle$

纠缠的状态

$|\Psi_2\rangle = U_{\text{gate}}(|0\rangle|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle)$

- 电子 1 处于状态 $|1\rangle$，电子 2 处于状态 $|0\rangle$
- 电子 1 处于状态 $|0\rangle$，电子 2 处于状态 $|1\rangle$

纠缠的特性

- 无论我们对电子 1 进行什么样的测量，电子 2 的状态都会立即发生相应的改变
- 纠缠态在量子信息和量子计算领域发挥着重要作用
- 纠缠是量子力学的独特特征，也是量子计算和通信的重要性质

EPR 悖论回顾 - 步骤 1

电子 1 和电子 2 纠缠在一起的状态：$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|101\rangle - |110\rangle)$

EPR 悖论回顾 - 步骤 2

电子 1 和电子 2 纠缠在一起的状态：$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|101\rangle - |110\rangle)$
仍然保持纠缠态

EPR 悖论回顾 - 步骤 3

测量电子 1：有 50% 的概率得到 $|0\rangle$，假设测量结果是 $|0\rangle$。
纠缠态崩塌，电子 2 状态变为 $|1\rangle$

EPR 悖论回顾 - 步骤 4

测量电子 3 在 $I+$ / $I-$ 基状：假设得到结果 $|+\rangle$。
电子 2 状态为 $|+\rangle$，在没有进行测量的情况下，我们也可以 100% 确定电子 2 处于 $|+\rangle$。
违背了海森堡的不确定性原理!

EPR 悖论总结

- EPR 悖论揭示了量子力学中的非局域性和纠缠现象
- 纠缠态的测量会立即影响纠缠粒子的状态，即使它们之间有着遥远的距离
- EPR 悖论对量子力学的基本假设和解释提出了挑战
- EPR 悖论的研究对理解量子计算和量子通信的潜力具有重要意义

EPR 悖论

- 解释这个悖论
- 1）非局域性：el 的测量会影响 e2 的测量。例如，如果在 |0⟩/|1⟩ 基础上测量 el，由于某些物理原因，立即阻止 e2 在 |+/-⟩ 基础上测量。
- 违反了特殊相对论。我们选择不相信这一点，但谁知道呢?
- 2）量子力学中存在未被发现的隐藏变量。量子力学是不完整的。
- 例如，电子的状态不处于叠加态（实在论：物体具有独立于我们测量的确定属性），并且完全由隐藏变量描述。

EPR 悖论

- e1 可以处于以下状态中的任何一个：$|10\rangle + |11\rangle$、$|10\rangle$ - $|11\rangle$、$|11\rangle$ - $|10\rangle$、$|11\rangle + |10\rangle$（注意，这是 1 量子位状态）。
- e2 也可以处于以下状态中的任何一个：$|1-\rangle$、$|1+\rangle$、$|0+\rangle$、$|0-\rangle$（注意，这是 1 量子位状态）。
- 如果两者都在 $101\rangle/|11\rangle$ 基础上测量，它们总是相反的。如果 e2 在 l+/l-) 基础上测量，它有 50% 的几率是 |+ 或 |- 。可以解释 EPR 悖论。

贝尔定理

量子力学与局部隐藏变量定理不兼容。即，局部隐藏变量的解释无法解释所有量子力学现象。这是通过展示贝尔不等式被违反来完成的。

2022 年诺贝尔奖

2022 年的诺贝尔奖授予了阿兰·阿斯佩克特、约翰·F·克劳瑟和安东·泽林格，表彰他们的实验工作，证明了量子力学中贝尔不等式被违反，并通过关闭许多漏洞来获得这一结果。
阿兰·阿斯佩克特、约翰·F·克劳瑟和安东·泽林格被授予" 因开展与纠缠光子相关的实验，建立了贝尔不等式的违反，并开创了量子信息科学"。

Bell 不等式

我们可以在 $(0)/1)$ 基础上测量 e_1（称为 A_0 测量），并在 $|+\rangle/|-\rangle$ 基础上测量 e_2（称为 A_y 测量），然后随机地用 B_0 测量或 B_y 测量来测量 e_2。结果 A_0、A_y、B_0 和 B_y 必须是 1 或-1。

Bell 不等式（续）

如果我们多次进行这样的实验，我们将得到以下 4 个项的和，并且该和必须均匀地分布在 2 和-2 之间：

$$(A_0B_0) + (A_0B_y) + (A_yB_0) - (A_yB_y) = (A_s + A_y)B_0 + (A_p - A_y)B_y$$

因此，平均的 Bell 不等式为：

$$H_{\text{in}} - \frac{(x+z)}{\sqrt{2}} < 2$$

$$H_{\text{in}} + \frac{(x-z)}{\sqrt{2}} < 2$$

$$H_{\text{in}} + \frac{(x+z)}{\sqrt{2}} < 2$$

$$H_{\text{in}} - \frac{(x-z)}{\sqrt{2}} < 2$$

Spin 矩阵

首先将电子对准备在 $|y^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|101\rangle - |110\rangle)$ 态，并证明 Bell 不等式被违反。

$$(A_0B_0)+(A_0B_1)+(A_1B_0)-(A_1B_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_0B_0)+\frac{1}{\sqrt{2}}(A_1B_1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(A_0B_0)-\frac{1}{\sqrt{}}$$

但实际上 Bell 不等式应该是：

$$|(A_0B_0) + (A_0B_1) + (A_1B_0) - (A_1B_1)| \leq 2$$

Pauli 矩阵和 Bell 定理（续）

余下的部分只是一些数学计算，我们知道如何做！

$$H_{\mathsf{in}} = (A_0 B_0) + (A_0 B_1) + (A_1 B_0) - (A_1 B_1) \leq 2$$

$$H_{\mathsf{in}} = (A_0 B_0) + (A_0 B_1) + (A_1 B_0) - (A_1 B_1) \leq 2$$

$$H_{\mathsf{in}} = (A_0 B_0) + (A_0 B_1) + (A_1 B_0) - (A_1 B_1) \leq 2$$

$$H_{\mathsf{in}} = (A_0 B_0) + (A_0 B_1) + (A_1 B_0) - (A_1 B_1) \leq 2$$

沃尔什-哈达玛门（Hadamard Gate）

没有经典对应 - 创建叠加态（之前的门只能将一个基转换为另一个基）

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

H0:

$$H0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$

H1:

$$H1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

Hadamard 门与其逆

Hadamard 门（H）及其逆（H^{-1}）满足以下关系：

$$H = H^{-1}$$

Hadamard 门的矩阵形式为：

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

我们来验证 $H \times H^{-1}$ 是否等于单位矩阵（I）：

$$H \times H^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

通过验证，我们可以看到 $H \times H^{-1}$ 等于单位矩阵，证实了 H 和 H^{-1} 确实互为逆矩阵。

n 比特 Hadamard 门

n 比特 Hadamard 门可以表示为以下形式：

$$H^{\otimes n} = H \otimes H \otimes \ldots \otimes H$$

其中，H 是单比特 Hadamard 门。
对于 n 比特的全 0 态（|00...0 ），经过 n 比特 Hadamard 门的作用，可以得到以下结果：

$$H^{\otimes n}|0 \; = H|0 \; \otimes H|0 \; \otimes \ldots \otimes H|0 \; = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x$$

其中，x 表示所有 n 比特二进制数。
同样，对于 n 比特的全 1 态（|11...1 ），经过 n 比特 Hadamard 门的作用，可以得到以下结果：

$$H^{\otimes n}|1 \; = H|1 \; \otimes H|1 \; \otimes \ldots \otimes H|1 \; = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^x |x$$

在这个幻灯片中，我们展示了 n 比特 Hadamard 门对全 0 态和全 1 态的作用结果。