改变基和海森堡不确定性原理

赵晓菲

2023 年 7 月 31 日

变换基和海森堡不确定性原理（简化视图）

量子力学中的矢量 $|\psi\rangle$ 可以在不同的基下表示。例如，可以用 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 作为基来表示，也可以用 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 作为基来表示。在不同基下，同一个矢量 $|\psi\rangle$ 的系数是不同的。

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = c|+\rangle + d|-\rangle$$

这里 a, b, c, d 是复数系数。在 $|0\rangle/|1\rangle$ 基下，矢量 $|\psi\rangle$ 的测量结果是确定的（例如 100

需要注意的是，这个表示法并不对应真实的自旋系统，它只是一个简化的插图。

变换基（另一个示例）

让我们考虑一个新的量子态 $|\phi\rangle$，在 $|0\rangle/|1\rangle$ 基下表示为：

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}|1\rangle$$

现在，我们要用 $|+\rangle/|-\rangle$ 基来表示它。
首先，我们知道 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 与 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之间的关系是：

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

变换基（另一个示例）

现在，我们将 $|\phi\rangle$ 表示为 $|+\rangle/|-\rangle$ 基下的线性组合：

$$|\phi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$$

求解系数 a 和 b：

$$a = \langle +|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|\phi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|\phi\rangle$$

$$b = \langle -|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|\phi\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|\phi\rangle$$

代入 $|\phi\rangle$ 的表示：

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}\langle 1|0\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}\langle 1|1\rangle\right)$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}\langle 1|0\rangle\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}\langle 1|1\rangle\right)$$

变换基（另一个示例）

简化后得到：

$$a = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

因此，$|\phi\rangle$ 在 $|+\rangle/|-\rangle$ 基下的表示为：

$$|\phi\rangle = \frac{3}{\sqrt{6}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|-\rangle$$

这个表示法并不对应真实的自旋系统，它只是一个简化的插图。

Bra-Ket 上的操作

量子态 $|\psi\rangle$ 对应于 ket 空间，而对应的 bra 空间是其对偶空间。在 ket 空间中，我们表示 $|\psi\rangle$ 为：

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

那么在 bra 空间中，它对应的表示为：

$$\langle\psi| = a^*\langle 0| + b^*\langle 1|$$

注意：在 bra 空间中，向量是列矢量，所以需要取复数的复共轭。

Bra-Ket 上的操作

现在，让我们来看一个操作示例。假设我们有一个操作 O，作用在量子态 $|\psi\rangle$ 上，产生新的量子态 $|\phi\rangle$，表示为：

$$|\phi\rangle = O|\psi\rangle$$

在 bra 空间中，这个操作的对偶操作是 $\langle\phi| = O^\dagger\langle\psi|$，也就是 O 的厄米共轭。

Bra-Ket 上的操作

例如，我们有 $O = |0\rangle\langle 1|$。现在我们来看 $O|\psi\rangle$：

$$
\begin{aligned}
O|\psi\rangle &= |0\rangle\langle 1| \left(a|0\rangle + b|1\rangle\right) \\
&= a|0\rangle\langle 1|0\rangle + b|0\rangle\langle 1|1\rangle \\
&= b|0\rangle
\end{aligned}
$$

那么在 bra 空间中，对应的对偶操作为：

$$
\langle\phi| = (O|\psi\rangle)^\dagger = (b|0\rangle)^\dagger = b^*\langle 0|
$$

所以，我们可以验证 $O^\dagger = |1\rangle\langle 0|$。

正交性与归一化

在量子力学中，我们经常会涉及到向量的正交性和归一化。
正交性：如果两个向量是正交的，它们的内积（内积也称为点积或数量积）为零。

$$(\mathbf{a}|\mathbf{b}) = 0$$

这意味着向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 在空间中垂直于彼此。

正交性与归一化

归一化：如果一个向量是归一化的，它的内积与自身为 1。

$$(\mathbf{a}|\mathbf{a}) = 1$$

这意味着向量 $\mathbf{a}$ 的长度为 1，它是单位向量。

正交性与归一化

归一化向量：如果一个向量 $\mathbf{V}$ 不是归一化的，我们可以将它归一化。将一个向量归一化意味着将它的长度缩放为 1，但保持其方向不变。

$$|\mathbf{V}\rangle \rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{V}\|}|\mathbf{V}\rangle$$

其中 $\|\mathbf{V}\|$ 表示向量 $\mathbf{V}$ 的长度（模）。

算子、特征向量和特征值

在量子力学中，我们使用向量来表示状态，用算子来表示操作。
状态向量：对于一个量子态，我们用向量 $|\psi\rangle$ 来表示。
算子：对于任意的操作（例如向量的旋转），我们用算子 A 来表示。
特征向量：当我们将算子 A 应用于向量 $|\psi\rangle$ 时，得到某些新的向量 $|\psi'\rangle, |\psi''\rangle$ 等，它们可能变为原始向量的常数倍 $(a'|\psi\rangle, a''|\psi\rangle$ 等)。那么 a', a'' 等就被称为算子 A 的特征值，而 $|\psi'\rangle, |\psi''\rangle$ 等就被称为算子 A 的特征向量。
N×N 矩阵的特征向量：对于一个 N×N 矩阵，它只有 N 个特征向量。

Pauli 自旋矩阵的算子和特征值示例

在量子力学中，Pauli 自旋矩阵是三个重要的矩阵，分别是 σ_x、σ_y 和 σ_z。我们来看一下它们的算子和特征值。

1. σ_x 矩阵：

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

应用 σ_x 算子到向量 $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，我们有：

$$\sigma_x|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

应用 σ_x 算子到向量 $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，我们有：

$$\sigma_x|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

因此，σ_x 的特征值为 $\lambda = \pm 1$，对应的特征向量分别是 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$。

Pauli 自旋矩阵的算子和特征值示例 (续)

2. σ_y 矩阵：

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

应用 σ_y 算子到向量 $|0\rangle$，我们有：

$$\sigma_y|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i|1\rangle$$

应用 σ_y 算子到向量 $|1\rangle$，我们有：

$$\sigma_y|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -i|0\rangle$$

因此，σ_y 的特征值为 $\lambda = \pm i$，对应的特征向量分别是 $i|1\rangle$ 和 $-i|0\rangle$。

Pauli 自旋矩阵的算子和特征值示例 (续)

3. σ_z 矩阵：

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

应用 σ_z 算子到向量 $|0\rangle$，我们有：

$$\sigma_z|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

应用 σ_z 算子到向量 $|1\rangle$，我们有：

$$\sigma_z|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle$$

因此，σ_z 的特征值为 $\lambda = \pm 1$，对应的特征向量分别是 $|0\rangle$ 和 $-|1\rangle$。