No-Cloning Theorem

假设存在克隆算子 L，它是 C 空间中的一个算子。我们有：

$$L(\alpha |0\rangle_A |\beta\rangle_B) = \alpha |0\rangle_A |\beta\rangle_B$$

$$L(\alpha |1\rangle_A |\beta\rangle_B) = \alpha |1\rangle_A |\beta\rangle_B$$

其中 α 和 β 是复数。现在我们考虑对态 $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle_A + \beta |1\rangle_A$ 进行克隆：

$$\begin{aligned}
L(|\psi\rangle_A |\beta\rangle_B) &= L(\alpha |0\rangle_A |\beta\rangle_B + \beta |1\rangle_A |\beta\rangle_B) \\
&= \alpha L(|0\rangle_A |\beta\rangle_B) + \beta L(|1\rangle_A |\beta\rangle_B) \\
&= \alpha |0\rangle_A |\beta\rangle_B + \beta |1\rangle_A |\beta\rangle_B \\
&= |\psi\rangle_A |\beta\rangle_B
\end{aligned}$$

由于对于所有的 $|\beta\rangle_B$，L 都使得态 $|\psi\rangle_A$ 保持不变，所以我们可以得出结论：存在克隆算子 L 可以对基态进行克隆，但是不能对其他叠加态进行克隆。

不可复制定理

不可复制定理

我们无法通过幺正操作或量子门将一个任意的量子态 $|\psi\rangle$ 复制到另一个量子比特上。

不可复制定理

不可复制定理

我们无法通过幺正操作或量子门将一个任意的量子态 $|\psi\rangle$ 复制到另一个量子比特上。

- 试图对一个未知的量子态 $|\psi\rangle$ 进行完美复制会违反量子原理。

不可复制定理

不可复制定理

我们无法通过幺正操作或量子门将一个任意的量子态 $|\psi\rangle$ 复制到另一个量子比特上。

- 试图对一个未知的量子态 $|\psi\rangle$ 进行完美复制会违反量子原理。
- 对于一般的量子态 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$，我们无法使用幺正操作创建 $|\psi\rangle$ 的复制品。

不可复制定理

不可复制定理

我们无法通过幺正操作或量子门将一个任意的量子态 $|\psi\rangle$ 复制到另一个量子比特上。

- 试图对一个未知的量子态 $|\psi\rangle$ 进行完美复制会违反量子原理。
- 对于一般的量子态 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$，我们无法使用幺正操作创建 $|\psi\rangle$ 的复制品。
- 然而，如果量子态为 $|\psi\rangle = |0\rangle$ 或 $|\psi\rangle = |1\rangle$，我们可以复制它们，因为它们是正交的量子态。

不可复制定理

不可复制定理

我们无法通过幺正操作或量子门将一个任意的量子态 $|\psi\rangle$ 复制到另一个量子比特上。

- 试图对一个未知的量子态 $|\psi\rangle$ 进行完美复制会违反量子原理。
- 对于一般的量子态 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$，我们无法使用幺正操作创建 $|\psi\rangle$ 的复制品。
- 然而，如果量子态为 $|\psi\rangle = |0\rangle$ 或 $|\psi\rangle = |1\rangle$，我们可以复制它们，因为它们是正交的量子态。

是否可以使用量子门复制 $|\psi\rangle$?

不可复制定理意味着没有任何量子门能够完美复制一个未知的量子态 $|\psi\rangle$。

不可复制定理

假设存在一个克隆算符 L，它可以将任意量子态 $|\psi\rangle$ 复制到另一个比特上，即 $L(|\psi\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$。我们来看看这个假设是否成立。

$$
\begin{aligned}
L(|0\rangle \otimes |0\rangle) &= L(|0\rangle) \otimes L(|0\rangle) \\
&= (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \\
&= \alpha^2 |00\rangle + \alpha\beta(|01\rangle + |10\rangle) + \beta^2 |11\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(|1\rangle \otimes |0\rangle) &= L(|1\rangle) \otimes L(|0\rangle) \\
&= (\gamma |0\rangle + \delta |1\rangle) \otimes (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \\
&= \gamma\alpha |00\rangle + \gamma\beta |01\rangle + \delta\alpha |10\rangle + \delta\beta |11\rangle
\end{aligned}
$$

不可复制定理

$$
\begin{aligned}
L(|0\rangle \otimes |1\rangle) &= L(|0\rangle) \otimes L(|1\rangle) \\
&= (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes (\gamma |0\rangle + \delta |1\rangle) \\
&= \alpha\gamma |00\rangle + \alpha\delta |01\rangle + \beta\gamma |10\rangle + \beta\delta |11\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L(|1\rangle \otimes |1\rangle) &= L(|1\rangle) \otimes L(|1\rangle) \\
&= (\gamma |0\rangle + \delta |1\rangle) \otimes (\gamma |0\rangle + \delta |1\rangle) \\
&= \gamma^2 |00\rangle + \gamma\delta(|01\rangle + |10\rangle) + \delta^2 |11\rangle
\end{aligned}
$$

现在，我们比较上面四个等式，我们可以发现，当量子态 $|\psi\rangle = |0\rangle$ 或 $|\psi\rangle = |1\rangle$ 时，复制是可能的，因为这时候克隆的目标态与初始态是正交的。然而，对于一般的量子态 $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$，复制是不可能的。这也就是为什么我们称之为" 不可复制定理"。

标准基向量

$$|00\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

贝尔态

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad \left|\Psi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad \left|\Phi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle -$$

MSB 和 ISB

$$|\mathsf{MSB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\mathsf{ISB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

应用门操作

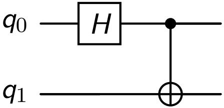
UxorH81 门

$$U_{\text{xorH81}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

UxorH81 作用于 MSB 和 ISB

$$U_{\text{xorH81}} \left|\text{MSB}\right\rangle = |00\rangle$$
$$U_{\text{xorH81}} \left|\text{ISB}\right\rangle = |11\rangle$$

IBM-Q 中的量子电路（最高有效位在底部）



量子门：

- H：哈达玛门，用于在量子位上创建叠加态。
- U：未知的量子门或量子操作，作用于量子位。

结果 - 直方图：

直方图中显示了测量结果的频率。

量子隐形传态

- 量子隐形传态是一种将量子比特从一个位置传输到另一个位置的方法，而无需移动实际的粒子。
- 非克隆定理要求破坏原始粒子，因此不能对原始粒子进行复制。
- 传输过程中，原始粒子的状态信息通过纠缠传递给另一个粒子，然后原始粒子的状态被破坏。
- 如果另一个粒子得到了与原始粒子相同的状态，我们无法区分它是否是原始粒子，类似于物质的隐形传输。
- 在实际实验中，需要通过经典通信传递两个经典比特的信息，用于恢复传输的量子比特。

量子隐形传态实验

- 量子隐形传态实验通过卫星进行空间量子隐形传态，已经取得了重要进展。
- 例如，使用 Micius 卫星进行了 1,400 公里（870 英里）的量子隐形传输实验。
- 实验结果表明，量子通信在长距离传输方面具有潜在的应用。

Step 1: Entanglement formation

Alice 和 Bob 分别控制一个量子比特，并使它们处于纠缠态。

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Step 2: Alice Measures in $|+\rangle$ / $|-\rangle$

Alice 进行测量，得到 $|+\rangle$ $|-\rangle$

- 如果测量结果为

  $|+\rangle$ *Bob* $|\psi\rangle = |00\rangle + |11\rangle$ $|-\rangle$ *Bob* $|\psi\rangle = |00\rangle - |11\rangle$

Step 3: Alice calls Bob to complete the process

Alice 调用 Bob 来完成传输。

- 如果 Alice 得到
$|+\rangle$ *Bob* $|\psi\rangle = |00\rangle + |11\rangle$ *Alice* $|-\rangle$ *Bob* $|\psi\rangle = |00\rangle - |11\rangle$
量子隐形传态完成!

Step 1: Entanglement formation

Alice 和 Bob 分别控制一个量子比特，并使它们处于纠缠态。

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle + |11\rangle \right)$$

Step 2: Alice Measures in $|+\rangle$ / $|-\rangle$

Alice 进行测量，得到 $|+\rangle$ 或 $|-\rangle$

- 如果测量结果为

$|+\rangle$ *Bob* $|\psi\rangle = |00\rangle + |11\rangle$ $|-\rangle$ *Bob* $|\psi\rangle = |00\rangle - |11\rangle$

Step 3: Alice calls Bob to complete the process

Alice 调用 Bob 来完成传输。

- 如果 Alice 得到

$|+\rangle$ *Bob* $|\psi\rangle = |00\rangle + |11\rangle$ *Alice* $|-\rangle$ *Bob* $|\psi\rangle = |00\rangle - |11\rangle$

量子隐形传态完成!

Step 1: Entanglement formation

Alice 和 Bob 分别控制一个量子比特，并使它们处于纠缠态。

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Step 2: Alice Measures in $|+\rangle$ / $|-\rangle$

Alice 进行测量，得到 $|+\rangle$ 或 $|-\rangle$

- 如果测量结果为

$|+\rangle$ *Bob* $|\psi\rangle = |00\rangle + |11\rangle$ $|-\rangle$ *Bob* $|\psi\rangle = |00\rangle - |11\rangle$

Alice 调用 Bob 来完成传输。

- 如果 Alice 得到

$|+\rangle$ *Bob* $|\psi\rangle = |00\rangle + |11\rangle$ *Alice* $|-\rangle$ *Bob* $|\psi\rangle = |00\rangle - |11\rangle$
量子隐形传态完成!

Step 1: Entanglement Between $|Ya\rangle and |OB\rangle$

Bob 和 Alice 分别控制一个量子比特，并使它们处于纠缠态。

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Step 2: Alice Measures Her Qubits in the $|+\rangle$ / $|-\rangle$ *Basis*

Alice 进行测量，得到 $|+\rangle$ $|-\rangle$

$$|\psi\rangle = \begin{cases} |00\rangle + |11\rangle & \text{如果测量结果为 } |+\rangle \\ |00\rangle - |11\rangle & \text{如果测量结果为 } |-\rangle \end{cases}$$

Step 3: Classical Communication to Complete the Teleportation

Alice 将她的测量结果（$|+\rangle$ $|-\rangle$ *Bob*
Bob 根据 Alice 的传输得到传输的量子比特的状态。

$$|\psi\rangle = \begin{cases} |00\rangle + |11\rangle & \text{如果 Alice 得到 } |+\rangle \\ |00\rangle - |11\rangle & \text{如果 Alice 得到 } |-\rangle \end{cases}$$

量子隐形传态完成!

内积和 Bra-Ket 表示法

内积：

$$a_0 = \langle a|a\rangle = (\alpha|\alpha)$$

$$b_0 = \langle b|b\rangle = (\beta|\beta)$$

$$\langle a|b\rangle = \alpha^*\beta + \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

叠加态：

$$|\psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

说明："spin up" 和"spin down" 是基态，与空间中的单位向量（即位置向量的基）无关。

测量

测量中的波函数坍缩。它将坍缩到测量中的一个基态。概率是系数的模的平方。

测量 $|0\rangle$ 的概率：

$$\mathrm{Prob}(|0\rangle) = |\alpha_0|^2 = |\alpha|^2$$

测量 $|1\rangle$ 的概率：

$$\mathrm{Prob}(|1\rangle) = |\beta_1|^2 = |\beta|^2$$

正交归一基

问题：在量子计算中是否需要正交归一基?

是的，正交归一基在量子计算中是必要的，它确保了基态之间的内积满足以下条件：

- 如果 $i \neq j$，则 $(|b_i\rangle, |b_j\rangle) = 0$，即基态是正交的。
- 如果 $i = j$，则 $(|b_i\rangle, |b_i\rangle) = 1$，即基态是归一的，这使得测量结果具有明确性和意义。

归一化向量

在量子计算中，状态向量必须是归一化的，满足以下条件：

$$|\psi\rangle = (a_0|0\rangle + a_1|1\rangle + \ldots + a_n|n\rangle) = 1$$

这个归一化条件确保了状态向量的概率总和为 1，使得量子态的描述是合理的。

基的变换示例

我们有以下等式：

$$
\begin{aligned}
1 &= a|0\rangle + b|1\rangle \\
|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \\
|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)
\end{aligned}
$$

Bra-Ket 对应关系

我们有以下对应关系：

$$
\begin{aligned}
\langle a| &= c^*(a|b\rangle) \\
|a\rangle &= \mathcal{N}(c\langle a| + c|b\rangle)
\end{aligned}
$$

Bra-Ket 方程

我们有以下方程：

$$
\begin{aligned}
\langle a|b\rangle &= 4\langle y|x^* \\
|y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\ }}(|1\rangle + |2\rangle + \sqrt{2}(|3\rangle - |6\rangle))
\end{aligned}
$$

如何归一化一个向量（上一张幻灯片有错别字）

对于向量 $|a\rangle$，我们有：

$$\| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a \mid a | a \mid a\rangle}$$

观测量由算符表示。每个算符都有一组特征向量和特征值

Pauli 自旋矩阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

它们是反对易的：

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$$

在处理问题时，始终要问自己：这是一个复数、向量还是矩阵。

任意方向的自旋矩阵

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$$

其中，$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 分别是 Pauli 自旋矩阵，具体形式为：

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

伴随矩阵

对于矩阵 A，其伴随矩阵定义为 $A^\dagger = A^*$

自伴随（Hermitian）矩阵，实特征值

对于自伴随矩阵 A，有 $A = A^\dagger$，且它的特征值都是实数。

更多运算符、Bra-Ket 等式和关系

位移算符

$$x|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

相乘关系

$$x|a\rangle = y|a\rangle \quad \text{(相差常数)}$$

零算符

$$x|a\rangle = 0 \quad \text{(Null operator)}$$

叠加性质

$$x(c_1|a\rangle + c_2|b\rangle) = c_1x|a\rangle + c_2x|b\rangle$$

对偶关系

$$\langle a|x|b|a|x|b\rangle = \left\langle b|x^{\dagger}|a\middle|b|x^{\dagger}|a\right\rangle$$

矩阵对角化

$$x\,|a\rangle = \lambda\,|a\rangle \quad \text{即} \quad (x-\lambda I)\,|a\rangle = 0 \quad \text{其中} \quad I\text{是单位矩阵}$$

特征方程

$$\det(xI - A) = 0$$

特征值为零

$$\lambda = 0$$

不同基下的矩阵表示

在 z 基矢量的表示中：

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

在 x 基矢量的表示中：

$$A = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

量子计算中的线性代数

对角化

$$A = UDU^{-1} \quad \text{其中} \quad U\text{是酉矩阵，} \ D\text{是对角矩阵}$$

酉矩阵

$$UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = I \quad (\text{单位矩阵})$$

酉矩阵性质

$$(U|f\rangle) \cdot (U|g\rangle) = \langle f|g|f|g\rangle$$

构造酉变换矩阵

$$U = \begin{pmatrix} \langle a_1 | a_1' | a_1 | a_1' \rangle & \langle a_1 | a_2' | a_1 | a_2' \rangle & \cdots & \langle a_1 | a_n' | a_1 | a_n' \rangle \\ \langle a_2 | a_1' | a_2 | a_1' \rangle & \langle a_2 | a_2' | a_2 | a_2' \rangle & \cdots & \langle a_2 | a_n' | a_2 | a_n' \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n | a_1' | a_n | a_1' \rangle & \langle a_n | a_2' | a_n | a_2' \rangle & \cdots & \langle a_n | a_n' | a_n | a_n' \rangle \end{pmatrix}$$

内积守恒

$$\left\langle a_i' \middle| a_j' \middle| a_i' \middle| a_j' \right\rangle = \left\langle a_i \middle| a_j \middle| a_i \middle| a_j \right\rangle$$

投影算符/投影器
对于给定的基矢量 $|v_i\rangle$，投影算符定义为 $P_i = |v_i\rangle\langle v_i|$。它的作用是将任意向量投影到基矢量 $|v_i\rangle$ 上。
(完备基)

$$P_iP_j = |v_i\rangle\langle v_i|\,|v_j\rangle\langle v_j| = |v_i\rangle\langle v_j|\,\delta_{ij} = \delta_{ij}P_j = P_j\delta_{ij} = P_j$$

简并性
对于算符 X，如果 $X|a\rangle = c|a\rangle$ 和 $X|b\rangle = c|b\rangle$，其中 $|a\rangle \neq |b\rangle$，则称其具有简并性。即相同的特征值 c 对应不同的特征向量。

构造具有给定特征值和特征向量的算符

如果已知特征值 c 和对应的特征向量 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$，则构造算符 X 的方法为：

$$X = c|a\rangle\langle a| + c|b\rangle\langle b|$$

对于任意 a, b，线性组合 $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ 也是算符 X 的特征向量，对应的特征值都是 c。

Hilbert 空间（物理学约定）

Hilbert 空间是一个完备的线性空间，其内积满足以下性质：

- 正定性：$(f|f) > 0$ 对于任意非零向量 $|f\rangle$ 成立。
- 共轭对称性：$(c|g) = c^*(f|g)$ 对于任意复数 c 和向量 $|g\rangle$ 成立。
- 线性性：$(f+h|g) = (f|g) + (h|g)$ 对于任意向量 $|f\rangle$ 和 $|h\rangle$ 成立。

Hilbert 空间的张量积

Hilbert 空间的张量积表示为 $H_3 = H_1 \otimes H_2$，其中 $h = \{|f\rangle, |g\rangle\}$ 是 H_3 中的一组基。任意有限个向量的张量积定义为：

$$|f_1\rangle \otimes |f_2\rangle \otimes \ldots \otimes |f_n\rangle = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} c_{i_1, i_2, \ldots, i_n} |f_{i_1}\rangle |f_{i_2}\rangle \ldots |f_{i_n}\rangle$$

向量和矩阵的张量积

设 $v = |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle$ 是向量的张量积，$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 是矩阵，我们有：

$$Mv = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{bmatrix}$$

矩阵 H 在给定基 $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ 下的表示：

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \ldots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \ldots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \ldots & H_{nn} \end{bmatrix}$$

偏态测量偏态测量是指在某个给定基下对量子态进行测量，测量结果是量子态在基向量上的投影。

$$P_i = |v_i\rangle\langle v_i| \quad \text{（偏态投影算符）}$$

$$P_i|v\rangle = |v_i\rangle\langle v_i|v\rangle = |c_i|^2|v_i\rangle \quad \text{（偏态测量结果）}$$

量子寄存器

量子寄存器是由多个量子比特组成的集合，它的状态是 C2 空间的张量积。

$$|a_1 b_1\rangle = |a_1\rangle \otimes |b_1\rangle$$
$$|a_n b_n\rangle = |a_n\rangle \otimes |b_n\rangle \otimes \ldots \otimes |a_1\rangle \otimes |b_1\rangle$$

正交性条件

两个量子寄存器在某个给定的基下是正交的当且仅当它们的张量积在该基下是正交的。

$$\langle a_1 b_1 | a_2 b_2\rangle = \langle a_1 | a_2\rangle \cdot \langle b_1 | b_2\rangle$$

量子寄存器中的一般向量
一个一般的向量可以写成量子寄存器的线性组合。

$$|w\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

$$|w\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle + c|2\rangle + d|3\rangle$$

一比特量子态
一比特量子态包含两个基本态：$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$。
二比特量子态
二比特量子态包含四个基本态：$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$。

纠缠
当量子系统的态不能表示为各个部分态的张量积时，该系统就处于纠缠态。

贝尔态
二比特贝尔态是四个纠缠态之一，表示为：

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Entanglement
在量子计算中，纠缠状态可以用于进行量子通信和量子计算。

量子计算中的线性代数

量子门是可逆的
量子门是量子计算中的基本操作，它们都是可逆的。
薛定谔方程的演化矩阵是幺正的
薛定谔方程描述了量子系统的演化，由此得到的演化矩阵是幺正的。

$$iHt$$

$$U = e^{iHt}$$

不同类型的量子门
NOT / X 门

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

XOR / CNOT 门

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

量子门的作用

$$X|a\rangle = |a\rangle$$

$$X|a, b\rangle = |a, \bar{b}\rangle$$

$$U|a, b\rangle = |a, a \oplus b\rangle$$

$$S|a, b\rangle = |b, a\rangle$$

EPR 悖论的更多讨论
EPR 悖论涉及到量子纠缠，它表明要么量子力学是不完备的，要么信息可以以超光速传递。
基之间的变换矩阵
在不同的基之间，变换矩阵满足以下关系：新基向量等于变换矩阵左乘原基向量再右乘其逆矩阵。

$$\text{新基} = U \times \text{旧基} \times U^{\dagger}$$

关于迹的更多内容
迹操作具有很多有趣的性质，其中一个是：矩阵 A 与 B 的乘积的迹等于矩阵 B 与 A 的乘积的迹。

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

更多量子门
1 比特相位门

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X|0\rangle = |1\rangle$$

$$X|1\rangle = |0\rangle$$

$$X(\frac{\pi}{2})|+\rangle = |-\rangle$$

顺带一提，在 0/1 基下，Z 门实际上就是 NOT（X）门在 +/-基下的表示。

2 比特相位门

$$U(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \\ 0 & 0 & e^{-i\phi} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U(\phi)|a, b\rangle = e^{i(a-b)\phi}|a, b\rangle$$

Toffoli (CCNOT) 门

Toffoli 门是一个经典门的通用门，严格来说，量子计算中没有通用的量子门。

$$\mathrm{CCNOT}(|a,b,c\rangle) = |a,b,(a\oplus b)\mathrm{AND}c\rangle$$

$$\mathrm{CCNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hadarmard 门及其补门

Hadarmard 门用于量子计算的 Hadamard 变换，它的补门是它自身的逆操作。

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$H^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Hadamard (H) 门

Hadamard 门在经典计算中没有对应的门。它用于量子计算的 Hadamard 变换。

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

多比特 Hadamard 门

Hadamard 门可以扩展到多比特的情况。

$$H^{\otimes n}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$$

$$H^{\otimes n}|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{x\cdot y}|x\rangle$$

其中，x 和 y 分别是 n 比特的二进制数。