Hadamard 门作用在全 0 态上

Hadamard 门作用在全 0 态上的结果为：

$$H^{\otimes n}|0 \; = H|0 \; \otimes H|0 \; \otimes \ldots \otimes H|0 \; = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x$$

其中，$|x$ 表示所有 n 比特的二进制数，即 $|x \; = |x_1 x_2 \ldots x_n$ ，其中 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 可以是 0 或 1。所以，Hadamard 门作用在全 0 态上，得到的结果是所有可能的 n 比特的二进制数的叠加。

Hadamard 门作用在任意 n 比特基态上

Hadamard 门可以作用在任意 n 比特的基态上，其作用结果为：

$$
\begin{aligned}
H(|y\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot y} |x\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(|0\rangle + (-1)^{0 \cdot y} |1\rangle + \ldots + (-1)^{(2^n-1) \cdot y} |2^n - 1\rangle \Big)
\end{aligned}
$$

其中，$|y\rangle$ 表示任意 n 比特的基态，即 $|y\rangle = |y_{n-1} y_{n-2} \ldots y_1 y_0\rangle$，其中 $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_1, y_0$ 可以是 0 或 1。作用后，Hadamard 门将基态变换成一组叠加态。

逻辑运算和结果

我们定义一个操作 $r \cdot y$ 来表示逻辑运算，其中 y 是一个 n 比特的二进制数，表示为 $y = y_{n-1}y_{n-2}\dots y_1y_0$。操作 $r \cdot y$ 的计算过程如下：

$$\begin{aligned} r \cdot y &= (1 \oplus y_0) \cdot (0 \oplus y_1) \cdot (1 \oplus y_2) \cdot \dots \cdot (n-2 \oplus y_{n-2}) \cdot (1 \oplus y_{n-1}) \\ &= (1 - y_0) \cdot (y_1) \cdot (1 - y_2) \cdot \dots \cdot ((n-2) - y_{n-2}) \cdot (1 - y_{n-1}) \end{aligned}$$

其中，$\oplus$ 表示 XOR（异或）运算，$1 - y_i$ 表示取反操作。
接下来，我们考虑将操作 $r \cdot y$ 应用到基态 $|x\rangle = |x_{n-1}x_{n-2}\dots x_1x_0\rangle$ 上。我们看到，当 $x_i = 1$ 时，会出现 $(-1)^{r \cdot y}$ 作为 $|x\rangle$ 的系数。为了获得 $|r\rangle$ 的系数为 -1，我们需要同时满足条件 $s_i = 1$ 和 $y_i = 1$，或者 $x_i = 1$ 且 $y_i = 0$。这相当于在经典逻辑中进行 *AND* 运算。最后，$|r\rangle$ 的系数为 1 的条件是 $|r \cdot x\rangle$ 中 1 的数量为奇数，这可以通过对所有运算结果进行经典的 *XOR* 操作得到。

三种计算 H 211

Method 1: 我们可以直接对 H $2|11$

Method 2: 我们可以先对每个单比特进行 H 操作，然后再计算张量积：

$$
\begin{aligned}
H\,2|11\ &= H|1\ \otimes H|1 \\
&= (0) \otimes (0) + (-1) \otimes (0) + (0) \otimes (-1) + (-1) \otimes (-1) \\
&= (0) + (-1) + (0) + 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Method 3: 我们可以逐个计算每个单比特上的 H 操作，然后再计算张量积：

$$
\begin{aligned}
H\,2|11\ &= H|1\ \otimes H|1 \\
&= (0) \otimes (0) + (-1) \otimes (0) + (0) \otimes (-1) + (-1) \otimes (-1) \\
&= (0) + (-1) + (0) + 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

因此，三种方法都得到了相同的结果，即 $H\,211 = 0$。

三种计算 $H^{\otimes 2}00$ 的方法

Method 1: 我们可以直接对 $H^{\otimes 2}00$ 进行操作：

$$
\begin{aligned}
H^{\otimes 2}00 &= H^{\otimes 2}0 \otimes H^{\otimes 2}0 \\
&= (H0) \otimes (H0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(0+1) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(0+1) \\
&= \frac{1}{2}(00+01+10+11)
\end{aligned}
$$

三种计算 $H^{\otimes 2}00$ 的方法

Method 2: 我们可以先对每个单比特进行 H 操作，然后再计算张量积：

$$
\begin{aligned}
H^{\otimes 2}00 &= H0 \otimes H0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(0+1) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(0+1) \\
&= \frac{1}{2}(00+01+10+11)
\end{aligned}
$$

三种计算 $H^{\otimes 2}00$ 的方法

Method 3: 我们可以逐个计算每个单比特上的 H 操作，然后再计算张量积：

$$
\begin{aligned}
H^{\otimes 2}00 &= H0 \otimes H0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(0+1) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(0+1) \\
&= \frac{1}{2}(00+01+10+11)
\end{aligned}
$$

因此，三种方法都得到了相同的结果，即 $H^{\otimes 2}00 = \frac{1}{2}(00+01+10+11)$。