

# 量子门

赵晓菲

2023 年 8 月 2 日

迹 (Trace) 是一个线性算子在向量空间上的性质。对于一个  $n$  维向量空间  $V$  中的线性算子  $A$ , 其迹  $\text{Tr}(A)$  定义为对其矩阵表示的对角元素求和。

假设  $A$  的矩阵表示为:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

那么  $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ 。

迹的一些性质包括:

- $\text{Tr}(cA) = c\text{Tr}(A)$ , 其中  $c$  为常数。
- $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$ 。
- $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ , 其中  $A$  和  $B$  是适当维度的矩阵。

# 1-Bit Phase Shift Gate

1-Bit Phase Shift Gate (相位门) 可以表示为矩阵  $U_{PS}$ , 其定义为:

$$U_{PS} = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中  $\phi$  是相位角。

当  $\phi = \pi$  时, 相位门的矩阵为:

$$U_{PS} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这就是所谓的 Z 门, 也是重要的 Pauli 矩阵之一。Z 门在  $I_+ / I_-$  基中的行为类似于 NOT 门, 它将  $|0\rangle$  映射到  $|1\rangle$ , 并将  $|1\rangle$  映射到  $|0\rangle$ :

$$U_{PS}(|0\rangle) = |1\rangle \quad \text{and} \quad U_{PS}(|1\rangle) = |0\rangle$$

## 2-Bit Phase Shift Gate (Controlled-PS)

2-Bit Phase Shift Gate (控制相位门) 可以表示为矩阵  $U_{\text{CPS}}$ , 其定义为:

$$U_{\text{CPS}} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_{00}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_{01}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta_{11}} \end{pmatrix}$$

其中  $\theta_{ij}$  是相位角,  $(i,j)$  代表控制比特和目标比特的状态。

## 2-Bit Phase Shift Gate (Controlled-PS)

例如，当  $\theta_{00} = 0$ ,  $\theta_{01} = \pi$ ,  $\theta_{10} = -\pi$ ,  $\theta_{11} = 0$  时，相位门的矩阵为：

$$U_{\text{CPS}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这是控制 NOT 门，其中第一个比特作为控制比特，第二个比特作为目标比特。当控制比特为  $|0\rangle$  时，目标比特不发生变化；当控制比特为  $|1\rangle$  时，目标比特取负号。

## 2-Bit Phase Shift Gate (Controlled-PS)

控制相位门可以应用于 2 比特向量，例如：

$$U_{\text{CPS}}(|00\rangle) = e^{i\theta_{00}}|00\rangle \quad \text{and} \quad U_{\text{CPS}}(|11\rangle) = e^{i\theta_{11}}|11\rangle$$

# Toffoli (CCNOT) Gate (3-qubit)

Toffoli 门（也称为 CCNOT 门）是一个三比特门，其定义为：

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Toffoli 门作为一个控制门，它具有两个控制比特  $a$  和  $b$ ，和一个目标比特  $c$ 。当控制比特  $a$  和  $b$  都为  $|1\rangle$  时，目标比特  $c$  取反；否则，目标比特  $c$  保持不变。

Toffoli 门可以用作经典电路的通用门，因为它可以实现布尔逻辑 AND 操作。在量子计算中，Toffoli 门是通用门之一，它可以实现任何布尔函数，因此被称为“量子计算的通用门”。

Toffoli 门的矩阵表示如上所示。