Bra-Ket 表示法和算符

赵晓菲

兰州石化职业技术大学

2023 年 9 月 12 日

目录

总结

- 如何归一化一个向量

$$\vec{a} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

- 操作由算子表示。每个算子都有其一组特征向量和特征值。
- Pauli 自旋矩阵

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 它们是反对易的：$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x$
- 始终问自己，这是一个复数、向量还是矩阵。

矩阵的伴随

- 矩阵的伴随，记为 $A^\dagger$。
- 也被称为共轭转置或厄米伴随。
- 定义为矩阵 A 的复共轭的转置。
- $A^\dagger = (A^*)^T$。

厄米矩阵

- 如果矩阵 A 等于其自身的伴随，那么它是厄米矩阵：$A = A^\dagger$。
- 厄米矩阵具有实数特征值。
- 厄米矩阵在量子力学中起着重要作用。

厄米矩阵简介

- 厄米矩阵（Hermitian Matrix）是一个特殊的矩阵类型。
- 它的重要性在于其在量子力学和其他领域中的应用。

厄米矩阵的性质

- 厄米矩阵的主要性质是其共轭转置等于自身：$H^\dagger = H$
- 厄米矩阵的实特征值：所有特征值都是实数。
- 厄米矩阵的正交特征向量：不同特征值对应的特征向量正交。

厄米矩阵的运算过程

1. 创建一个厄米矩阵 H。
2. 计算 H 的共轭转置 $H^\dagger$。
3. 检查是否满足 $H = H^\dagger$，如果是，则矩阵是厄米的。
4. 计算 H 的特征值和特征向量。
5. 验证特征值是否都是实数，特征向量是否正交。

示例：厄米矩阵运算

示例矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$$

- 计算 $H^\dagger$。
- 检查 $H = H^\dagger$ 是否成立。
- 计算特征值和特征向量。
- 验证特征值是否为实数，特征向量是否正交。

总结

- 厄米矩阵具有重要的数学和物理性质。
- 它在量子力学中扮演着重要角色。
- 运算过程包括矩阵的共轭转置和特征值计算。

自旋矩阵在任意方向上

- 自旋矩阵可以在任意方向上表示为 $n \cdot \sigma$。
- 您能否将其以矩阵形式表示?

伴随和自伴随（厄米）矩阵

- 伴随矩阵（Adjoint）：$A^\top = A^*$
- 自伴随（厄米）矩阵：具有实特征值的矩阵（今天的主题）
- 自伴随矩阵满足：$A^\top = A$

引言

在量子力学中，Bra-Ket 表示法是一种常用的表示方式，用于描述量子态和算符之间的关系。本幻灯片将讨论算符在 Bra-Ket 表示法中的应用。

Bra-Ket 表示法

在 Bra-Ket 表示法中，我们用 $\langle\psi|$ 表示 Bra 矢量，用 $|\phi\rangle$ 表示 Ket 矢量。算符 A 作用在 Ket 矢量上时，可以表示为：

$$A|\phi\rangle = |\psi\rangle$$

其中，$\langle\psi|$ 是 A 的共轭转置 (Hermitian adjoint)。

算符的表示

在 Bra-Ket 表示法中，算符 A 可以表示为矩阵形式：

$$A = \begin{pmatrix} \langle 1|A|1\rangle & \langle 1|A|2\rangle & \cdots & \langle 1|A|n\rangle \\ \langle 2|A|1\rangle & \langle 2|A|2\rangle & \cdots & \langle 2|A|n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle m|A|1\rangle & \langle m|A|2\rangle & \cdots & \langle m|A|n\rangle \end{pmatrix}$$

其中，m 和 n 分别是 Bra 和 Ket 空间的维度。

示例

让我们来看一个简单的示例。考虑一个算符 A 和一个 Ket 矢量 $|\phi\rangle$，我们想计算 $A|\phi\rangle$。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

那么，

$$A|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

总结

- Bra-Ket 表示法是描述量子态和算符的一种常用表示方式。
- 算符在 Bra-Ket 表示法中可以表示为矩阵形式。
- 通过算符作用在 Ket 矢量上，可以得到新的 Ket 矢量。

运算符及其关系

- 算符 X 作用在态 $|a\rangle$ 上：$X|a\rangle = X|a\rangle$
- 如果 X 和 Y 相等，那么 $X|a\rangle = Y|a\rangle$ 成立。
- 空算符：$X|a\rangle = |0\rangle$

线性性质

- $X(Ca|a\rangle + Cb|b\rangle) = CaX|a\rangle + CbX|b\rangle$
- $X|a\rangle$ 的线性性质

Bra-Ket 方程和关系

- $\langle a|X+\rangle$ 和 $\langle b|X|a\rangle\rangle^*$
- Bra-Ket 方程的应用