矢量空间、正交基、狄拉克符号以及量子计算中的测量

赵晓菲

2023 年 7 月 31 日

向量空间（Vector Space）

向量空间是线性代数中的重要概念，用于描述具有线性结构的集合。在量子力学中，我们用向量空间来表示量子态。

定义：设 V 是一个非空集合，对于 V 中的任意两个元素，我们可以定义它们之间的加法运算和数乘运算，并满足以下条件：
1. 加法交换律：对于所有的 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$，有 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$。
2. 加法结合律：对于所有的 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$，有 $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$。
3. 存在零元素：存在一个元素 $\mathbf{0} \in V$，对于任意 $\mathbf{v} \in V$，有 $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$。

向量空间（Vector Space）

4. 存在加法逆元素：对于每个 $\mathbf{v} \in V$，存在一个元素 $-\mathbf{v} \in V$，使得 $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$。
5. 数乘结合律：对于所有的标量 k, l 和 $\mathbf{v} \in V$，有 $(kl)\mathbf{v} = k(l\mathbf{v})$。
6. 数乘分配律 1：对于所有的标量 k 和 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$，有 $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$。
7. 数乘分配律 2：对于所有的标量 k 和 $\mathbf{v} \in V$，有 $(k + l)\mathbf{v} = k\mathbf{v} + l\mathbf{v}$。

如果 V 满足上述条件，那么 V 被称为一个向量空间。

基（Basis）

在向量空间中，基是一组特殊的向量集合，它们能够线性表示向量空间中的任意向量。

定义：设 V 是一个向量空间，$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 是 V 中的向量集合。如果这组向量满足以下条件：1. 这组向量是线性无关的，即只有当所有系数都为零时，线性组合 $\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ 才成立。2. 这组向量能够张成整个向量空间，即对于任意 $\mathbf{v} \in V$，都可以找到一组标量 c_i，使得 $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i$。
那么 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 就是 V 的一组基。

维数（Dimension）：向量空间 V 的维数是它的基的向量个数。记为 dim(V)。

内积（Inner Product）

在向量空间中，两个向量之间的内积，也称为点积，是一种度量它们之间关系的方法。

定义：设 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 是向量空间 V 中的两个向量，它们的内积记为 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$。对于三维空间中的两个向量 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 和 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$，它们的内积定义为：

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

内积满足以下性质：1. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$（交换律）。2. $\langle a\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (数乘结合律)。3. $\langle \mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$（加法结合律）。
内积的概念在量子力学中非常重要，它用于计算向量的长度、角度和相关性。

规范正交基（Orthonormal Basis）

在向量空间中，规范正交基是一组特殊的基，它们不仅是正交的，而且彼此之间都是单位向量。

定义：设 V 是一个向量空间，$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 是 V 中的一组基。如果这组基满足以下条件：1. 这组基是两两正交的，即 $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$，对于所有 $i \neq j$。2. 这组基中的每个向量都是单位向量，即 $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 1$，对于所有 i。那么 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 就是 V 的一组规范正交基。

规范正交基在量子力学中经常被用于表示量子态和量子算符。

高维向量和复数系数

在-D 维空间中，任何向量 $\mathbf{V}_a$ 都可以表示为 n 个基向量的线性组合。

表示形式： $\mathbf{V}_a = a_0\mathbf{v}_0 + a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}$，其中 a_0 到 a_{n-1} 是 n 个系数，$\mathbf{v}_0$ 到 $\mathbf{v}_{n-1}$ 是 n 个基向量。

这里，a_0 到 a_{n-1} 可以是实数或复数，而 $\mathbf{v}_0$ 到 $\mathbf{v}_{n-1}$ 是-D 空间中的 n 个基向量。

两个向量的内积或点积是：

$$\mathbf{V}_a \cdot \mathbf{V}_b = (a_0^* \cdot b_0) + (a_1^* \cdot b_1) + \ldots + (a_{n-1}^* \cdot b_{n-1})$$

在这个表达式中，a_0^* 到 a_{n-1}^* 表示复共轭，$\cdot$ 表示点积。

内积的概念在量子力学中非常重要，用于计算向量之间的关系和相似性。

正交规范基 - 量子计算中的应用

正交规范基定义如下：

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \\ 0, & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

在继续之前，让我们回顾一下 $\delta_{i,j}$ 的含义。这被称为 Kronecker delta，只是一种表示方法。如果 $i = j$，则其值为 1。如果 $i \neq j$，则其值为 0。

例如，对于 $\delta_{i,j}$，我们有 $\delta_{0,0} = 1$ 和 $\delta_{0,1} = 0$。
规范性表示每个基向量与自身的内积为 1（即其被归一化）：

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

如果每个基向量与其他基向量的内积为零（即它们正交）：

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

正交规范基在量子计算中应用广泛，它们构成量子计算中的基本组件。

Bra-Ket 符号（Dirac 符号）

在量子力学中，**Ket 符号**（也称为 Dirac 符号）用来表示量子态。例如，$|1\rangle$ 表示“Ket 1”或“向量 a（Va）”，而 $|a\rangle$ 表示“Ket a”或“向量 a（Va）”。它表示的是一个向量，其中我刚才跟你提到的那个向量。

对于向量 a 和 b，我们可以写成：

$$|a\rangle = |b\rangle + |c\rangle$$

Bra-Ket 符号（Dirac 符号）

我们也可以将其写成一般形式：

$$|a\rangle = m|b\rangle + n|c\rangle$$

Bra 符号表示量子态的对偶空间，与 Ket 符号的向量相对应。例如，$\langle 1|$ 是 $|1\rangle$ 的对偶空间，表示“Bra 1”。
对于向量 $v = (a, b)$，其转置为 (a, b)。在进行复共轭运算后，它变为 (a^*, b^*)。我们可以写成：

$$\langle 01| = \langle 11| = (a^*, b^*) = (\langle 10|)^*$$

Bra-Ket 符号在量子力学中是一种非常重要的表示方法，它使得我们能够更加方便地描述和操作量子态。

向量与状态与叠加

在量子力学中，每个向量都是物理系统的一个状态。例如，我们可以用向量表示一个电子的自旋状态，其形式为：

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle$$

这里的 $|1\rangle$ 和 $|0\rangle$ 表示电子的自旋状态，a 和 b 是复数系数。这个电子的自旋状态 $|\psi\rangle$ 是 $|1\rangle$ 和 $|0\rangle$ 的叠加态，我们之前称之为“线性组合”。对于电子的自旋状态 $|\psi\rangle$，它是 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 的线性组合，写作：

$$|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$$

这里的 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 表示电子自旋的两个基态，α 和 β 是复数系数。因此，电子的自旋状态 $|\psi\rangle$ 包含了 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 的叠加态，具有 α 和 β 两个分量。
向量与状态的概念以及叠加态在量子力学中非常重要，它们帮助我们描述量子系统的性质和行为。

系数的含义与测量

在量子力学中，我们用向量表示量子系统的状态。对于一个向量 $|\psi\rangle$，它可以写成基态 $|V_i\rangle$ 的线性组合：

$$|\psi\rangle = a_0|V_0\rangle + a_1|V_1\rangle + \ldots + a_{n-1}|V_{n-1}\rangle$$

其中 $|V_i\rangle$ 是基态，$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ 是复数系数。这些系数表示了量子系统处于不同基态的概率振幅。
当我们对量子系统进行测量时，它将随机坍缩到其中一个基态，例如 $|V_i\rangle$，并且这个过程的概率与系数 $|a_i|^2$ 成正比。
对于一个向量 $|\psi\rangle$，其系数的模的平方之和等于 1，即：

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_{n-1}|^2 = 1$$

这确保了量子系统在测量后处于基态 $|V_i\rangle$ 的概率之和为 1。
系数在量子力学中起着重要的作用，它们表示了量子态的可能性，并且决定了测量结果的概率分布。