Hilbert 空间

Hilbert 空间是一个具有内积定义的完备线性空间。对于任意一对向量 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$，以及任意复数 c，有以下性质：

- 正定性：$(\psi|\psi) > 0$
- 共轭对称性：$(c|\psi\rangle)^* = c^*\langle\psi|$
- 右线性：$(c|\psi\rangle)^* = c\langle\psi|$
- 共轭对称性：$(\psi|\phi) = (\phi|\psi)^*$
- 双线性性：$(\psi + \eta|\phi) = (\psi|\phi) + (\eta|\phi)$

任意具有内积的有限维向量空间都是 Hilbert 空间。

Hilbert 空间的张量积

假设 H_1 和 H_2 是 Hilbert 空间，那么它们的张量积 $H_3 = H_1 \otimes H_2$ 中包含哪些向量呢？它包含由 H_1 和 H_2 中向量的张量积线性组合而成的向量。例如，对于 $|1\rangle + |2\rangle \in H_1$ 和 $|3\rangle \in H_2$，它们的张量积为：

$$(|1\rangle + |2\rangle) \otimes |3\rangle = |1\rangle \otimes |3\rangle + |2\rangle \otimes |3\rangle$$

类似地，对于 $c|1\rangle + |2\rangle \in H_1$ 和 $|3\rangle \in H_2$，它们的张量积为：

$$c(|1\rangle \otimes |3\rangle) + |2\rangle \otimes |3\rangle = |1\rangle \otimes |3\rangle + c|2\rangle \otimes |3\rangle$$

Qubit 的张量积

假设我们有两个 Qubit，它们的向量分别为：

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$
$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

现在我们来计算它们的张量积：

$$\begin{aligned}|1\rangle \otimes |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \otimes |0\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \otimes |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle)\end{aligned}$$

因此，两个 Qubit 的张量积是一个 4 维向量，它可以表示为：

$$|1\rangle \otimes |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)$$

多量子位系统的张量积和基向量

在多量子位系统中，如果我们有 n 个量子位，则该系统的基向量数量为 2^n。
例如，对于 2 个量子位的系统，其基向量空间为 4 维，可以用以下基向量表示：

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$$

或者简写为：

$$|0\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle, |1\rangle|0\rangle, |1\rangle|1\rangle$$

多量子位系统的张量积和基向量

对于 3 个量子位的系统，其基向量空间为 8 维，可以用以下基向量表示：

$$|000\rangle, |001\rangle, \dots, |111\rangle$$

或者简写为：

$$|0\rangle|0\rangle|0\rangle, |0\rangle|0\rangle|1\rangle, \dots, |1\rangle|1\rangle|1\rangle$$

对于 n 个量子位的系统，其基向量空间为 2^n 维，可以表示为：

$$|b_1\rangle|b_2\rangle \dots |b_n\rangle$$

其中 $|b_i\rangle$ 表示第 i 个量子位的基向量。

张量积示例 (1)

设有 n 个向量 $V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}$，以及 m 个向量 $W_0, W_1, \ldots, W_{m-1}$。它们的张量积可以表示为：

$$V_0 \otimes V_1 \otimes \ldots \otimes V_{n-1} = \sum_{i_0=0}^{n-1} \sum_{i_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{n-1} V_{i_0} \otimes V_{i_1} \otimes \ldots \otimes V_{i_{n-1}}$$

类似地，它们的张量积可以表示为：

$$W_0 \otimes W_1 \otimes \ldots \otimes W_{m-1} = \sum_{j_0=0}^{m-1} \sum_{j_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{j_{m-1}=0}^{m-1} W_{j_0} \otimes W_{j_1} \otimes \ldots \otimes W_{j_{m-1}}$$

张量积示例 (1)

那么整个张量积可以表示为：

$$V_0 \otimes V_1 \otimes \ldots \otimes V_{n-1} \otimes W_0 \otimes W_1 \otimes \ldots \otimes W_{m-1} =$$

$$\sum_{i_0=0}^{n-1} \sum_{i_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{n-1} \sum_{j_0=0}^{m-1} \sum_{j_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{j_{m-1}=0}^{m-1} V_{i_0} \otimes V_{i_1} \otimes \ldots \otimes V_{i_{n-1}} \otimes W_{j_0} \otimes W_{j_1} \otimes \ldots \otimes W_{j_m}$$

张量积示例 (2)

假设两个电子都处于自旋向上的状态，即 $|0\rangle = |+\rangle$ 和 $|1\rangle = |+\rangle$。我们首先分别考虑每个电子并对其在各自的 2 维空间中应用操作：

$$|01\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle = (|0\rangle \otimes |1\rangle) \otimes (|+\rangle \otimes |+\rangle) = |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle$$

$$|10\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle = (|1\rangle \otimes |0\rangle) \otimes (|+\rangle \otimes |+\rangle) = |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle$$

然后，我们可以通过张量积来查看最终的向量在整个 4 维空间中的表达式：

$$\begin{aligned} U_1|0\rangle \otimes U_2|1\rangle &= (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (e|0\rangle + f|1\rangle) \\ &= a(e|00\rangle) + a(f|01\rangle) + b(e|10\rangle) + b(f|11\rangle) \\ &= ae|00\rangle + af|01\rangle + be|10\rangle + bf|11\rangle \end{aligned}$$

其中 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ 分别是 $|0\rangle \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes |0\rangle, |1\rangle \otimes |1\rangle$ 的简写形式。

在张量积中的矩阵运算

假设 $H_3 = H_1 \otimes H_2$，并且 U_1 和 U_2 是分别在 H_1 和 H_2 的 2 维空间中的两个算符。我们有：

$$U_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad U_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

则在 H_3 空间中对应的算符 $U = U_1 \otimes U_2$ 的矩阵表示为：

$$U = U_1 \otimes U_2 = \begin{pmatrix} aU_2 & bU_2 \\ cU_2 & dU_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix}$$

其中，aU_2, bU_2, cU_2, dU_2 分别表示将 U_2 中的每个元素乘以 a, b, c, d。

矩阵的张量积运算示例

假设两个电子都处于向上自旋的状态，即 $|00\rangle = |+\rangle$ 和 $|01\rangle = |+\rangle$。然后我们分别考虑每个电子，对位于 C2 空间中的向量应用操作。

$$U|+\rangle = (4|+\rangle)(5|0\rangle) = (4|0\rangle) = a|00\rangle + b|01\rangle$$
$$U|+\rangle = (8|+\rangle)(6|1\rangle) = (8|1\rangle) = 6|00\rangle + 7|01\rangle$$
$$U|+\rangle = (8|0\rangle)(8|1\rangle) = (8|0\rangle) = c|00\rangle + d|01\rangle$$

然后我们可以将它们进行张量积运算，以查看在 C4 空间中最终向量的形式。

$$U|+\rangle \otimes U|+\rangle = (a|00\rangle + b|01\rangle) \otimes (c|00\rangle + d|01\rangle)$$
$$= ac|00\rangle \otimes |00\rangle + ad|00\rangle \otimes |01\rangle + bc|01\rangle \otimes |00\rangle + bd|01\rangle \otimes |01\rangle$$

然后我们将操作符 U 应用到 $|00\rangle$，即在 C4 空间中对向量应用操作符。

$$U|00\rangle = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a \\ 8c \end{pmatrix}$$

单比特的部分测量和概率计算

对于单比特系统，我们用 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 表示两个基态。状态可以写成 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$，其中 α 和 β 是复数系数。
如果我们进行测量，那么它会坍缩到某个基态上。对于第一个比特，我们有：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

测量结果为 $|0\rangle$ 的概率是 $|\alpha|^2$，测量结果为 $|1\rangle$ 的概率是 $|\beta|^2$。

单比特的部分测量和概率计算

第二个比特的状态可以写成：

$$|\phi\rangle = \gamma|00\rangle + \delta|01\rangle + \epsilon|10\rangle + \zeta|11\rangle$$

如果我们对第一个比特进行测量，然后测量结果为 $|1\rangle$，那么我们得到的态为：

$$|\phi_1\rangle = \frac{\delta}{\sqrt{|\delta|^2 + |\zeta|^2}}|01\rangle + \frac{\zeta}{\sqrt{|\delta|^2 + |\zeta|^2}}|11\rangle$$

此时，测量结果为 $|01\rangle$ 的概率是 $|\delta|^2/(|\delta|^2 + |\zeta|^2)$，测量结果为 $|11\rangle$ 的概率是 $|\zeta|^2/(|\delta|^2 + |\zeta|^2)$。