

# Bloch Sphere 球

赵晓菲

2023 年 8 月 6 日

# Bloch Sphere

- Bloch Sphere 是一种在三维空间中方便表示量子比特的方法。
- 将二维复向量空间映射到三维单位向量空间。
- 一个一般的量子比特可以表示为  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ ，其中  $a$  和  $b$  是复数。
- 我们可以使用球坐标系来表示该量子比特：  
$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle。$$
- 这里的  $\theta$  和  $\phi$  是两个角度，它们确定了量子比特在 Bloch Sphere 上的位置。
- 通常我们考虑归一化的量子比特，所以要求  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ 。
- 这意味着实际上只有两个自由度。当我们指定  $|a|$  时， $|b|$  也就被确定了，因此 DOF 减少为 2。
- 此外，量子比特的全局相位并没有物理意义，因此我们可以忽略一个全局相位因子  $e^{i\alpha}$ 。
- 综上，描述一个归一化的量子比特只需要两个实数参数  $(\theta, \phi)$ ，所以 DOF 为 2。

# Bloch Sphere

- Bloch Sphere 是一种在三维空间中方便表示量子比特的方法。
- 将二维复向量空间映射到三维单位向量空间。
- 一个一般的量子比特可以表示为  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ ，其中  $a$  和  $b$  是复数。
- 我们可以使用球坐标系来表示该量子比特：  
$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle。$$
- 这里的  $\theta$  和  $\phi$  是两个角度，它们确定了量子比特在 Bloch Sphere 上的位置。
- 通常我们考虑归一化的量子比特，所以要求  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ 。
- 这意味着实际上只有两个自由度。当我们指定  $|a|$  时， $|b|$  也就被确定了，因此 DOF 减少为 2。
- 此外，量子比特的全局相位并没有物理意义，因此我们可以忽略一个全局相位因子  $e^{i\alpha}$ 。
- 综上，描述一个归一化的量子比特只需要两个实数参数  $(\theta, \phi)$ ，所以 DOF 为 2。

# Bloch Sphere: Parameterization

- 为了进一步简化描述，我们可以引入新的参数。
- 我们将全局相位  $(\theta, \phi)$  因子分解为  $(\cos \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi})$ 。
- 同时，我们定义新的参数  $d = \phi - \theta$ ，则有  $\cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\phi-d}{2}$  和  $e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} = e^{i(d+\theta)} \sin \frac{\theta}{2} = e^{id} \sin \frac{\theta}{2}$ 。
- 这样我们仍然有 3 个自由度： $\theta, d$  和  $e^{i\frac{\theta}{2}}$ 。
- 但是全局相位对于单一量子比特来说没有物理意义，所以我们可以忽略它，从而仅需要两个实数参数  $\theta$  和  $d$  来描述量子比特。
- 单比特量子态可以在一个实数的二维平面上完全表示。

# Embedding $\mathbb{C}^2$ space in 3D space

- 我们通常使用二维复向量空间  $\mathbb{C}^2$  来表示量子比特。
- 然而，为了更直观地理解量子比特的状态，我们可以将  $\mathbb{C}^2$  嵌入到三维实数空间中。
- Bloch Sphere 是一种在三维空间中表示量子比特的方法。
- 在 Bloch Sphere 中，我们将  $|0\rangle$  表示为  $(0, 0, 1)$  和  $|1\rangle$  表示为  $(0, 0, -1)$ 。
- 这样，Bloch Sphere 上的所有点都对应着  $\mathbb{C}^2$  中的一个量子比特态。
- 量子比特的状态可以表示为  $|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$ 。
- 在 Bloch Sphere 上， $\theta$  角度确定了量子比特的纵坐标，而  $\phi$  角度确定了量子比特在纵坐标平面上的投影位置。
- 通过将  $\mathbb{C}^2$  嵌入到三维空间中，我们可以更直观地理解量子比特的状态和演化。

# Bloch Sphere

