Grover 搜索算法

- N 个数据在未经结构化的数据库中
- 目标项：$f(x) = 1$，非目标项：$f(x) = 0$
- 经典搜索算法平均时间复杂度：$O(N)$
- 量子搜索算法：Grover 算法

Grover 搜索算法优势

- Grover 搜索算法时间复杂度：$O(\sqrt{N})$
- 量子加速：更快地找到目标项
- 利用量子叠加态和相干性
- 提高搜索成功率

Grover 搜索算法原理

- 将目标项的索引编码为量子态
- 应用 Grover 的迭代算法
- 增加目标项的振幅
- 通过相干干涉增强目标项概率振幅
- 达到更高的搜索成功率

总结

- Grover 搜索算法展示了量子计算的优越性能
- 在未经结构化的数据库中搜索目标项时，Grover 搜索算法比经典算法更高效
- 量子并行性和干涉是 Grover 搜索算法的关键

- 基编码 (x) 和目标项是 (a)
- 三个重要的向量：
  - $|a\rangle$: 目标项
  - $|a^{\perp}\rangle$: 与目标项垂直的向量，$f(a)=1$，$f(x)=0$（如果 $x \neq a$）
  - $|d\rangle$: 在同一平面上的向量，因为 $|x\rangle$ 是其它两个向量的线性组合
- 表达式：

$$|d\rangle = \sum_{x=0}^{N-1}\left(|x\rangle - \frac{1}{\sqrt{N}}|a\rangle\right)$$

Grover 搜索算法操作

- 应用 V 操作：将 $|d\rangle$ 绕 $|a\rangle$ 的镜像翻转
- 应用 W 操作：将新向量绕 $|a\rangle$ 的镜像翻转，使其更接近目标项 $|a\rangle$
- Grover 迭代：重复应用 V 和 W 操作，以增加目标项的概率幅值

总结

- Grover 搜索算法利用量子并行性和相干性，能够在未经结构化的数据库中快速搜索目标项
- 时间复杂度为 $O(\sqrt{N})$，比经典搜索算法更高效
- Grover 搜索算法在量子计算中具有重要应用

- 三个重要的向量：
  - $|\psi\rangle$: 平均等叠加向量
  - $|a\rangle$: 目标项
  - $|a^{\perp}\rangle$, $|\psi\rangle$, $|a\rangle$: 处于同一平面上，因为 $|\psi\rangle$ 是其它两个向量的线性组合
- 操作：
  - 应用 V 操作：将 $|\psi\rangle$ 绕 $|a\rangle$ 的镜像翻转
  - 应用 W 操作：将新向量绕 $|a\rangle$ 的镜像翻转，使其更接近目标项 $|a\rangle$
- 将 $f(x)$ 嵌入 V 中，因为它是关于 $|a\rangle$ 的反射

总结

- Grover 搜索算法利用量子并行性和相干性，能够在未经结构化的数据库中快速搜索目标项
- 时间复杂度为 $O(\sqrt{N})$，比经典搜索算法更高效
- Grover 搜索算法在量子计算中具有重要应用

我们有以下量子运算符和矩阵：

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 - 2|0\rangle\langle 0| & -2|0\rangle\langle 1| \\ -2|1\rangle\langle 0| & 1 - 2|1\rangle\langle 1| \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

等等...

$|a\rangle$ 和 $|x\rangle$ 之间的夹角

让我们计算态矢量 $|a\rangle$ 和 $|x\rangle$ 之间的夹角。
首先，我们需要计算它们的内积：

$$\langle a|x\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

接下来，我们计算它们的范数：

$$\||a\rangle\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\||x\rangle\| = \sqrt{\langle x|x\rangle} = \sqrt{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$|a\rangle$ 和 $|x\rangle$ 之间的夹角

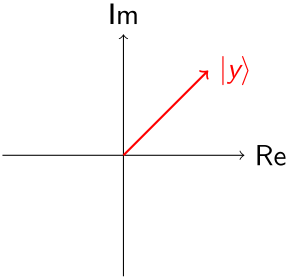
现在，我们可以计算它们夹角的余弦值：

$$\cos\theta = \frac{\langle a|x\rangle}{\||a\rangle\|\||x\rangle\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

最后，我们可以计算夹角：

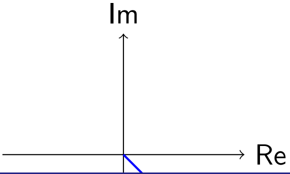
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 60^\circ$$

因此，$|a\rangle$ 和 $|x\rangle$ 之间的夹角约为 60°。

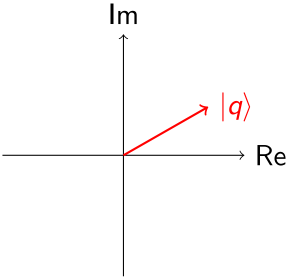


$$V = I - 2|a\rangle\langle a|$$

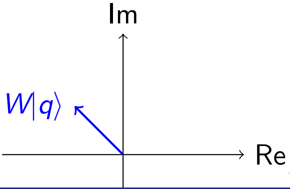
$$V|y\rangle = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$



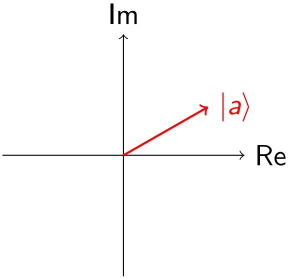
Effect of W on $|q\rangle$



$$W = 2|a\rangle\langle a| - I$$
$$W|q\rangle = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

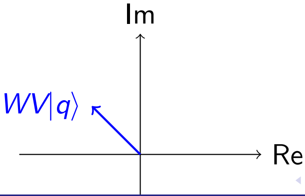


Effect of WV



$$WV = W \cdot V$$

$$WV|q\rangle = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$



Grover's Algorithm Implementation

- 初始状态：$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$
- 应用 Hadamard 变换：$|\psi_1\rangle = H^{\otimes n+1}|\psi_0\rangle$
- 定义 Oracle：$|\psi_2\rangle = U_f|\psi_1\rangle$
- Grover's Diffusion Operator：$W = H^{\otimes n}(2|0\rangle\langle 0| - I)H^{\otimes n}$
- 应用 Grover's Diffusion Operator：$|\psi_3\rangle = W|\psi_2\rangle$
- 重复以上步骤 N 次