量子傅立叶变换

赵晓菲

2023 年 8 月 6 日

我们要搜索的内容

- 我们要搜索的内容：$|\psi\rangle$

量子电路

$$|0\rangle \;-\!\!\!-\boxed{H}-\!\!\!-\boxed{W}-\!\!\!-\boxed{V}-\!\!\!-\boxed{W}\quad\cdots-\!\!\!-\boxed{V}-\!\!\!-$$

Grover 的扩散算符

Grover 的扩散算符 $U_f = V \cdot 2|\psi\rangle\langle\psi| - I$

复数表示

复数 $c = |c|(\cos\theta + i\sin\theta)$
- c 是一个复数，表示量子态的幅度和相位。
- $|c|$ 是复数 c 的模长（绝对值），表示量子态的幅度（概率振幅）。
- θ 是复数 c 的辐角（相位角），表示量子态的相位。

N 次单位根

$$\omega_N = \cos\frac{2\pi}{N} + i\sin\frac{2\pi}{N}$$

在量子计算中，单位根是指满足 $\omega_N^N = 1$ 的复数 ω_N。
具体来说：
- ω_N 表示 N 次单位根，是一个复数。
- m 是一个整数，表示我们要求的单位根的次方数。

N 次单位根的 m 次方

$$\omega_N^m = \cos\frac{2\pi m}{N} + i\sin\frac{2\pi m}{N}$$

$\omega_N^m = \cos\frac{2\pi m}{N} + i\sin\frac{2\pi m}{N}$ 表示 N 次单位根的 m 次方，它在量子计算中用于描述量子态的演化和变换。在量子算法中，这些单位根的性质被广泛应用，例如在量子傅里叶变换和量子相位估计等算法中。

其它数学表达式

$$\frac{\pi m}{N}$$

具体来说：
- π 是圆周率，它是一个常数，约等于 3.14159。
- m 是一个整数，表示角度的倍数。
- N 是一个正整数，表示一个单位圆周上被等分成 N 份。

在量子计算中，角度 $\frac{\pi m}{N}$ 经常用于定义量子门操作的相位。

性质 1

所有 N 次单位根的和等于零：

$$\omega_0 + \omega_1 + \ldots + \omega_{N-1} = 0$$

详细说明： N 次单位根是复数，它们均匀地分布在复平面上的单位圆上。因为它们的辐角相互平均，所以它们的和等于零。这意味着在复平面上将它们连接起来的话，它们会形成一个闭合图形。

性质 2

对于任意非零整数 q，所有 N 次单位根的 q 次方的和也等于零：

$$\omega_0^q + \omega_q^q + \omega_{2q}^q + \ldots + \omega_{(N-1)q}^q = 0$$

详细说明： 当 q 是一个非零整数时，每个 N 次单位根的 q 次方在复平面上也均匀地分布在单位圆上。由于它们的辐角相互平均，它们的和仍然等于零，导致相互抵消。

性质 3

当 $q = 0$ 时，所有 N 次单位根的 0 次方的和等于 N：

$$\omega_0^0 + \omega_1^0 + \ldots + \omega_{N-1}^0 = N$$

详细说明： 当 $q = 0$ 时，每个 N 次单位根的 0 次方都等于 1。由于有 N 个单位根，它们的和等于 N。

性质 4

第 N 个单位根 ω_N 与第 (-N) 个单位根 ω_{-N} 有以下关系：

$$\omega_{-N} = e^{i\frac{2\pi(-N)}{N}} = e^{-i2\pi} = e^{i2\pi} = 1 = \omega_N$$

详细说明： 第 N 个单位根 ω_N 在复平面上的位置在单位圆上，与第 (-N) 个单位根 ω_{-N} 相同。由于单位圆是对称的，它们有相同的辐角，所以它们的值相等，都等于 1。

DFT 定义

给定一个包含 N 个复数元素的向量 $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]$，它表示了一个离散的时域信号。
DFT 是将时域信号 $\mathbf{x}$ 转换为频域信号 $\mathbf{X} = [X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}]$ 的一种变换。
DFT 的定义如下：

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

其中，X_k 是频域信号中第 k 个频率分量的复数值。

DFT 矩阵

DFT 的计算可以通过一个方阵来表示，被称为 DFT 矩阵。DFT 矩阵的元素如下：

$$DFT_{k,n} = e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}, \quad k, n = 0, 1, \ldots, N-1$$

将时域信号 $\mathbf{x}$ 和频域信号 $\mathbf{X}$ 表示为列向量：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}$$

则 DFT 可以表示为矩阵乘法：

$$\mathbf{X} = DFT \cdot \mathbf{x}$$

DFT 的应用

DFT 在信号处理、通信、图像处理和量子计算等领域有着广泛的应用。在信号处理中，DFT 用于将时域信号转换为频域信号，以便分析信号的频谱和频率成分。
在通信中，DFT 被用于调制和解调信号，以及频域均衡和信号恢复等。
在图像处理中，DFT 用于图像变换和频域滤波，以及图像特征提取和压缩等。
在量子计算中，DFT 是量子傅里叶变换（Quantum Fourier Transform, QFT）的基础，被广泛用于量子算法中。

量子傅里叶变换（QFT）的定义

在量子计算中，QFT 是对一个包含 N 个量子态的量子寄存器进行变换的操作。假设量子寄存器的初始状态为：

$$|k\rangle = |k_1 k_2 \ldots k_n\rangle$$

其中，k 是一个二进制数，它的每一位 k_i 取值为 0 或 1，表示量子态的基本状态。
QFT 的定义如下：

$$\mathrm{QFT}|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi jk}{N}} |j\rangle$$

其中，$N = 2^n$ 是量子寄存器的维度，j 和 k 都是二进制数。

量子傅里叶变换的作用

QFT 的作用是对量子寄存器的所有量子态进行叠加和相位调整。它将基本状态 $|k\rangle$ 转换为一系列相干态，其中每个态的相位与它们对应的 k 有关。这种叠加和相位调整的过程使得量子傅里叶变换在量子算法中具有很强的计算能力。
例如，当 $j = 1$ 时，QFT 的效果等于所有 k 的基本状态 $|k\rangle$ 的叠加，即：

$$\mathrm{QFT}|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle$$

这是 QFT 的一个特殊情况，它在量子算法中非常常见，例如在量子相干态的产生和量子周期算法中都会用到这种特殊情况的 QFT。