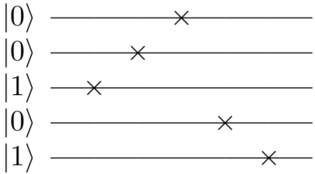
量子傅里叶变换与量子相位估计

赵晓菲

2023 年 8 月 6 日

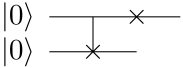
5 比特 SWAP 门电路

下图是一个 5 比特 SWAP 门的量子电路：



这个电路可以实现一个 5 比特的 SWAP 门，将量子态 $|00101\rangle$ 和 $|10100\rangle$ 进行交换，即交换第 1 比特和第 5 比特，第 2 比特和第 4 比特。

该电路可以通过两个 2 比特的 SWAP 门来实现，如下图所示：



这个 2 比特的 SWAP 门电路是在左边的 5 比特 SWAP 门电路中使用的子电路，它可以将第 1 比特和第 2 比特进行交换。
类似地，我们可以使用另一个 2 比特的 SWAP 门电路来交换第 4 比特和第 5 比特，从而实现 5 比特的 SWAP 门。

1-qubit 傅里叶变换电路

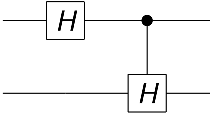
1-qubit 傅里叶变换（QFT）电路就是一个 Hadamard 门：

$$-\boxed{H}-$$

1-qubit 的 QFT 电路就是将一个 1 比特量子态应用 Hadamard 门。它可以将基态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 转换为均匀分布的叠加态。

2-qubit QFT 电路

下图展示了一个 2-qubit 的傅里叶变换（QFT）电路：

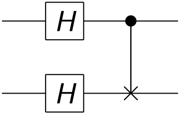


该电路中的 H 门作用在 LSB 上，QFT 门应用在前两个比特上，而 P 相位门应用在最后一个比特上。
为了实现 P 相位门（UCPS 门），相位角需要调整为 $\theta = 2\pi/2^1 = \pi$。
因此，UCPS 门的矩阵表示为：

$$\mathrm{UCPS}_\pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2-qubit 傅里叶变换电路

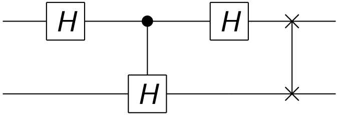
下图是一个 2-qubit 傅里叶变换（QFT）电路：



该电路中的 H 门应用在两个比特上，从而实现了 2-qubit 的傅里叶变换。在这个电路中，LSB 表示最低有效位，MSB 表示最高有效位。

USWAP 门和 UCPS 门

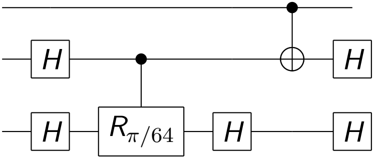
USWAP 门是一个 2-qubit 的交换门，由 Hadamard 门和 CNOT 门组成：



UCPS 门是一个单比特相位门，其相位角度为 $\theta = 2\pi/2^7 = \pi/64$：

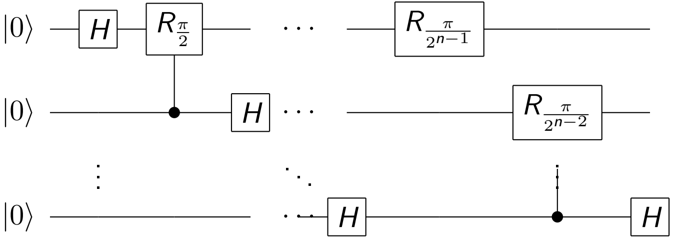
$$\mathsf{UCPS}_{\pi/64} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/64} \end{bmatrix}$$

它可以在电路中表示为：



QFT（傅里叶变换）电路

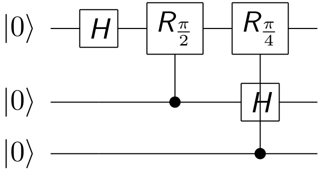
QFT（傅里叶变换）的一般性电路：



该电路实现了一个 n 比特的 QFT（傅里叶变换）操作，其中 Q_i 表示第 i 个比特。

IBM-Q 3 比特量子电路

下图展示了在 IBM-Q 中实现一个 3 比特的量子电路：



该电路包括以下操作：

- 将所有的 qubit 设置为 $|0\rangle$ 状态
- 对 qubit q_0 应用 Hadamard 门（H）
- 控制门（cA）：当 q_0 处于 $|1\rangle$ 状态时，对 q_1 应用 Hadamard 门（H）
- 控制相位门（P）：当 q_1 处于 $|1\rangle$ 状态时，对 q_2 应用相位门（P）并添加相位 $-\frac{\pi}{2}$
- 控制相位门（P）：当 q_0 和 q_1 都处于 $|1\rangle$ 状态时，对 q_2 应用相位门（P）并添加相位 $-\frac{\pi}{4}$

该电路将在 IBM-Q 的真实量子计算机上执行。在执行之后，可以观察到量子比特的状态会随着不同的门操作而变化。

另一种 QFT 和 IQFT 的定义

根据上述内容，我们了解到有另一种 QFT（傅里叶变换）和 IQFT（逆傅里叶变换）的定义：

- 对于 QFT，有新的定义 Ugft 和 U1QFT，它使用 $|1\rangle$ 来表示。
- 对于 IQFT，有新的定义 UQFT，它使用 $|V\rangle$ 来表示。

这意味着相同的矩阵可能在不同的文献中有不同的命名。因此，在阅读使用 QFT 和 IQFT 的算法时，我们需要注意确认使用的是哪种定义。除此之外，所有其他内容都与我们之前学习的内容相同。

量子相位估计（QPE）算法

量子相位估计（Quantum Phase Estimation，简称 QPE）是一种用于估计量子系统相位信息的算法。

- 对于一个 2x2 矩阵 U，假设其特征值为 $e^{i\theta_1}$ 和 $e^{i\theta_2}$。
- QPE 算法通过将 U 的特征向量与一个辅助量子比特进行纠缠，并在辅助比特上应用一系列 Hadamard 门和控制幺正门来实现相位估计。
- 最终，通过测量结果，我们可以得到特征值的相位估计。
- 在我们的例子中，U 的特征值为 $e^{i\theta_1}$ 和 $e^{i\theta_2}$，我们可以使用 QPE 算法来估计这两个特征值的相位 θ_1 和 θ_2，得到它们的值为 0 和 $\frac{\pi}{4}$。

量子相位估计（QPE）算法

量子相位估计（Quantum Phase Estimation，简称 QPE）是一种用于估计给定量子门的特定特征值相位的算法。

- 我们有一个 b-寄存器和一个 c-寄存器。我们的目标是估计 Z 门的特征值相位。
- QPE 算法通过将 b-寄存器设置为 $|0\rangle$，c-寄存器设置为 $|\psi\rangle$，并在 b-寄存器上应用 Hadamard 门来准备初始状态。
- 接着，在 b-寄存器中应用 Z 门的控制版本，并再次应用 Hadamard 门来进行相位估计。
- 最后，我们对 b-寄存器应用逆 QFT，并进行测量，以得到 Z 门的相位估计结果。

在我们的例子中，c-寄存器的初始状态为 $|\psi\rangle = |10\rangle$，我们将使用 QPE 算法来估计 Z 门的特征值相位。

量子相位估计（QPE）算法在 Z 门上的应用

在我们的例子中，我们的 b-寄存器状态为：

$$b_{\text{register}} = |0\rangle|0\rangle|0\rangle$$

我们首先在 b-寄存器上应用 Hadamard 门，得到：

$$b_{\text{register}} = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)$$

接着，我们在 b-寄存器中应用 Z 门的控制版本，并再次应用 Hadamard 门，得到：

$$b_{\text{register}} = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

最后，我们对 b-寄存器应用逆 QFT，并进行测量，得到 Z 门的相位估计结果。

量子傅里叶变换（QFT）算法

量子傅里叶变换（Quantum Fourier Transform，简称 QFT）是一种用于对量子比特进行傅里叶变换的算法。

- 我们有一个 b-寄存器和一个 c-寄存器。我们的目标是对 b-寄存器中的量子比特进行傅里叶变换。
- QFT 算法通过将 b-寄存器设置为 $|0\rangle$，并在 b-寄存器上应用 Hadamard 门来准备初始状态。
- 接着，在 b-寄存器中应用递增控制相位门，通过不同的控制相位来进行傅里叶变换。
- 最后，我们对 b-寄存器应用逆 QFT，以得到傅里叶变换后的结果。

在我们的例子中，我们对 b-寄存器中的三个量子比特进行了 QFT 操作。

量子傅里叶变换（QFT）算法在 b-寄存器上的应用

在我们的例子中，我们的 b-寄存器状态为：

$$b_{\text{register}} = |1\rangle|0\rangle|0\rangle$$

我们首先在 b-寄存器上应用 Hadamard 门，得到：

$$b_{\text{register}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle|0\rangle$$

接着，我们在 b-寄存器中应用递增控制相位门，得到：

$$b_{\text{register}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}}|1\rangle)|0\rangle|0\rangle$$

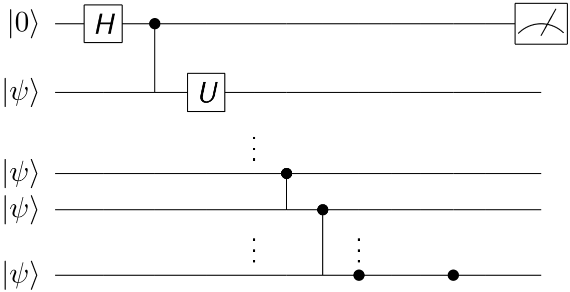
最后，我们对 b-寄存器应用逆 QFT，并进行测量，得到傅里叶变换后的结果。

Qiskit 中的量子傅里叶变换（QFT）实现

在 Qiskit 中，我们可以使用以下代码来实现量子傅里叶变换（QFT）：

QPE for Z Gate

下图是一个量子相位估计（QPE）电路，用于估计 Z 门的本征值：



其中 U 是要估计的 Z 门，n 是比特数，$|\psi\rangle$ 是初始量子态。

N-gubit QPE 电路

下图是一个用于估计 N 比特量子门的相位的 QPE 电路：

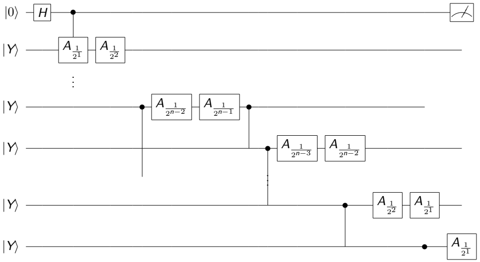


图: Quantum Phase Estimation 电路

该电路用于估计 N 比特量子门的相位，其中 $A_{\frac{1}{2^n}}$ 是一个角度为 $\frac{1}{2^n}$ 的旋转门，n 是比特数，$|Y\rangle$ 是初始量子态。