量子傅立叶变换（二）

赵晓菲

2023 年 8 月 6 日

QFT 的矩阵表示

在量子计算中，QFT 是一个重要的线性变换，可以用矩阵表示。对于一个包含 N 个量子态的量子寄存器，QFT 的矩阵表示如下：

$$\mathrm{QFT} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N^1 & \omega_N^2 & \dots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \dots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \dots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

其中，$\omega_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ 是 N 次单位根。

QFT 的幺正性

QFT 是一个幺正操作，也就是说它保持量子态的模不变，即：

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle \mathsf{QFT}\psi|\mathsf{QFT}\psi\rangle$$

对于任意的量子态 $|\psi\rangle$，QFT 对其进行变换后，其模保持不变。
证明 QFT 的幺正性可以通过计算 QFT 矩阵和其共轭转置矩阵的乘积，即 $\mathsf{QFT}^\dagger \cdot \mathsf{QFT}$，证明结果为单位矩阵。
因此，QFT 是一个幺正操作，它在量子计算中保持量子态的内积和模不变，是量子算法中非常重要的一步。

逆量子傅里叶变换（Inverse QFT）

逆量子傅里叶变换（逆 QFT）是量子傅里叶变换（QFT）的逆操作，它可以将 QFT 所得到的频域信号还原回时域信号。
假设 QFT 的矩阵表示为 $\mathsf{QFT} = \frac{1}{\sqrt{N}} U$，其中 U 是幺正矩阵。
逆 QFT 的矩阵表示为 逆 $\mathsf{QFT} = \frac{1}{\sqrt{N}} U^\dagger$，即逆 QFT 矩阵是 QFT 矩阵的共轭转置矩阵。
对于一个包含 N 个量子态的量子寄存器，逆 QFT 的矩阵表示如下：

$$
\text{逆 QFT} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N^{-1} & \omega_N^{-2} & \cdots & \omega_N^{-(N-1)} \\ 1 & \omega_N^{-2} & \omega_N^{-4} & \cdots & \omega_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{-(N-1)} & \omega_N^{-2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix}
$$

逆 QFT 的作用

逆 QFT 将频域信号还原回时域信号，它是 QFT 的逆操作，也是一个幺正操作。
逆 QFT 的作用可以表示为：

$$\text{逆 QFT} \cdot \text{QFT} = I$$

即逆 QFT 和 QFT 的复合操作等于单位矩阵。
这意味着对于任意的量子态 $|\psi\rangle$，进行 QFT 和逆 QFT 的复合操作后，量子态会恢复到原始状态。
逆 QFT 在量子算法中有着广泛的应用，特别是在量子相干态的产生和量子周期算法等中。

1-qubit QFT

这是一个 1-qubit 的量子傅里叶变换（QFT）的矩阵表示：

$$\text{QFT} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

而逆 QFT 的矩阵表示为：

$$\text{逆 QFT} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

逆 QFT 的矩阵与 QFT 的矩阵相同，因为 QFT 是一个幺正操作，它的逆操作就是共轭转置的结果。

2-qubit QFT

2-qubit 的量子傅里叶变换（QFT）的矩阵表示为：

$$\text{QFT} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

而逆 QFT 的矩阵表示为：

$$\text{逆 QFT} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

逆 QFT 的矩阵也与 QFT 的矩阵相似，因为 QFT 和逆 QFT 都是幺正操作，它们的矩阵满足共轭转置的关系。

n 比特 SWAP 门

n 比特 SWAP 门（交换门）是量子计算中的一种门操作，它能够在 n 个量子比特之间进行交换操作。
n 比特 SWAP 门的定义如下：

$$\mathrm{USWAP}, n\left(\left|x_0 x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_{n-1}\right\rangle\right) = \left|x_{n-1} x_{n-2} x_{n-3} \ldots x_2 x_1 x_0\right\rangle$$

即它将第一个比特和最后一个比特进行交换，第二个比特和倒数第二个比特进行交换，以此类推，直到第 n/2 个比特和第 n/2-1 个比特进行交换。
对于一个 n 比特的量子态 $|x_0 x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_{n-1}\rangle$，经过 n 比特 SWAP 门的操作后，量子态中的比特顺序发生了逆序交换。