Matrix Representation in a given Basis

假设我们有一个算符 H，我们想在某个给定基中表示它。我们可以用矩阵表示算符在该基下的作用。
对于第 i 行和第 j 列的元素，我们有 $H_{ij} = \langle i|H|j\rangle$。
假设我们有两个基：$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$，那么算符 H 在这个基中的表示为：

$$H = \begin{pmatrix} \langle 0|H|0\rangle & \langle 0|H|1\rangle \\ \langle 1|H|0\rangle & \langle 1|H|1\rangle \end{pmatrix}$$

代入 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 在该基下的表示，我们可以得到：

$$H = \begin{pmatrix} \langle 0|H|0\rangle & \langle 0|H|1\rangle \\ \langle 1|H|0\rangle & \langle 1|H|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} \\ H_{10} & H_{11} \end{pmatrix}$$

注意：$\langle 0|H|0\rangle$ 是矩阵的第一个元素，$\langle 0|H|1\rangle$ 是矩阵的第二个元素，以此类推。

Quantum Register: Collection of Qubits

4 Qubits
在一个 4 位的经典寄存器中，我们可以存储整数值。而在一个 4 量子比特的量子寄存器中，我们可以存储一个 4 维量子态。
Relationship between storable values in a 4-bit classical register and the basis states in a 4-qubit quantum register

Value in Classical Register	Basis State in Quantum Register
$(0000)_2 = 0$	$\|0000\rangle = \|0\rangle \otimes \|0\rangle \otimes \|0\rangle \otimes \|0\rangle$
$(0001)_2 = 1$	$\|0001\rangle = \|0\rangle \otimes \|0\rangle \otimes \|0\rangle \otimes \|1\rangle$
$(0010)_2 = 2$	$\|0010\rangle = \|0\rangle \otimes \|0\rangle \otimes \|1\rangle \otimes \|0\rangle$
$(0011)_2 = 3$	$\|0011\rangle = \|0\rangle \otimes \|0\rangle \otimes \|1\rangle \otimes \|1\rangle$
$\cdots$	$\cdots$
$(1111)_2 = 15$	$\|1111\rangle = \|1\rangle \otimes \|1\rangle \otimes \|1\rangle \otimes \|1\rangle$

一个 4 位经典寄存器可以存储 16 个整数值，而一个 4 量子比特的量子寄存器可以存储一个 16 维量子态。

n 位寄存器中的一般值

在一个 n 位的量子寄存器中，我们可以存储一个 n 维量子态，其一般形式为：

$$|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle + \ldots + a_{m-1}|m-1\rangle$$

其中 $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ 是复数系数，$|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |m-1\rangle$ 是寄存器的基态。例如，在一个 2 量子比特的寄存器中，我们可以表示以下矢量：

$$|\psi\rangle = 0.5|00\rangle + 0.5|01\rangle + 0.5|10\rangle + 0.5|11\rangle$$

其中 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ 是 2 量子比特寄存器的基态。

4-gubit Quantum Register
假设我们有一个 4 量子比特的量子寄存器，其中的状态向量表示为：

$$|\psi\rangle = 0.5|00\rangle + 0.5|01\rangle + 0.5|10\rangle + 0.5|11\rangle$$

现在，我们将对该状态向量应用一个 Unitary 变换 U，变换后的状态为：

$$U|\psi\rangle = 0.5U|00\rangle + 0.5U|01\rangle + 0.5U|10\rangle + 0.5U|11\rangle$$

在这个例子中，我们将 Unitary 变换 U 应用于每个基态。如果你想进一步展示 U 的具体形式和计算结果，可以补充更多的细节。

Quantum Entanglement

量子纠缠是量子力学中一种特殊的量子现象，其中两个或更多个量子比特之间存在一种非常特殊的联系。在某些情况下，这些量子比特之间的状态将无法被单独描述，它们的状态只能被整体描述。这种状态称为纠缠态。

Example of Unentangled State

考虑一个两量子比特系统，其状态为：

$$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle$$

该状态可以被分解为两个量子比特的张量积（tensor product）：

$$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle + |11\rangle$$

在这种情况下，两个量子比特之间是没有纠缠的。

Example of Entangled State

现在考虑另一个状态：

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle)$$

在这种情况下，两个量子比特之间是纠缠的。该状态无法被分解为两个量子比特的张量积，而是需要用整体的状态描述。

Bell Basis States and Entanglement

Bell Basis States
贝尔基态是一组特殊的纠缠态，它们被定义为：

$$
\begin{aligned}
|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\
|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\
|2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\
|3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)
\end{aligned}
$$

Entanglement
对于贝尔基态，所有的态都是纠缠的。让我们来看一个例子：
假设我们有一个两量子比特系统的态为：

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

我们对其进行张量积展开：

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$
$$|\phi\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$$

根据张量积的定义，我们得到：

$$\begin{aligned}|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle &= (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)\\ &= ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle\end{aligned}$$

然后我们比较系数，得到四个方程式：

$$ac = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad ad = 0, \quad bc = 0, \quad bd = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

从中我们可以看到，要满足所有方程式，必须有 $a \neq 0$ 且 $d \neq 0$。然而，这将导致 $ad \neq 0$，与方程式 $ad = 0$ 矛盾。因此，我们的假设是错误的，不存在两个量子比特的纠缠态 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$ 使得它们的张量积等于 $|\Phi^+\rangle$。因此，$|\Phi^+\rangle$ 是纠缠态。