布洛赫球上的量子门

赵晓菲

兰州石化职业技术大学

2023 年 8 月 6 日

布洛赫球简介

- 一种在三维实空间中表示量子比特状态的方便方法。
- 将二维复向量空间映射到三维单位向量空间。

量子比特状态表示

- 量子比特状态：$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- α 和 β 是复数系数。
- $|0\rangle$ 表示量子比特的基态，$|1\rangle$ 表示激发态。

映射到布洛赫球

- 布洛赫球将量子比特态矢量映射到三维球体上。
- 北极点代表 $|0\rangle$，南极点代表 $|1\rangle$。
- 球体表面上的点表示其他量子态。

球面坐标

- 量子比特态矢量：$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$
- θ 和 ϕ 是球面坐标。

归一化和自由度

- 物理上的量子比特必须归一化：$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$。
- 这将将自由度（DOF）减少到 2。

进一步减少自由度

- 全局相位在物理解释中无关紧要。
- 量子比特态矢量可以用一个实数参数来描述。
- 例如，$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$，并满足归一化条件。

总结

- 布洛赫球提供了直观的量子比特状态可视化方法。
- 它简化了在三维空间中表示量子比特的方式。
- 在量子计算和量子信息科学中广泛应用。

Bloch Sphere 简介

- Bloch Sphere 是一种在三维实空间中表示量子比特状态的方便方法。
- 它将二维复向量空间映射到三维单位向量空间。

量子比特状态表示

- 量子比特状态：$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- α 和 β 是复数系数。
- $|0\rangle$ 代表量子比特的基态，$|1\rangle$ 代表激发态。

映射到 Bloch Sphere

- Bloch Sphere 将量子比特态矢量映射到一个三维球体上。
- 北极点代表 $|0\rangle$，南极点代表 $|1\rangle$。
- 球体表面上的点表示其他量子态。

球面坐标

- 量子比特态矢量：$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$
- θ 和 ϕ 是球面坐标。

归一化和自由度

- 物理上的量子比特必须归一化：$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$。
- 这将将自由度（DOF）减少到 2。

进一步减少自由度

- 全局相位在物理解释中无关紧要。
- 量子比特态矢量可以用一个实数参数来描述。
- 例如，$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$，并满足归一化条件。

总结

- Bloch Sphere 提供了一种直观的量子比特状态可视化方法。
- 它简化了在三维空间中表示量子比特的方式。
- 在量子计算和量子信息科学中广泛应用。

嵌入 C2 空间到三维空间

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

实三维空间坐标

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Bloch 球

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$|0\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle$$

$$\theta = \arccos(2|0\rangle_0 - 1), \quad \phi = \arctan\left(\frac{|0\rangle_1}{|0\rangle_2}\right)$$

总结

- 嵌入 C2 空间到三维空间，可以通过矢量表示和实三维坐标来理解。
- Bloch 球提供了一种可视化量子比特状态的方法，对于特定的量子态有明确的几何表示。

问题和讨论

谢谢您的聆听！

Bloch 球中的极值点

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

它具有 $\theta = 0$ 和 $\phi = 0$。因此，

$$\langle +|0\rangle = \cos\frac{\theta}{2} = 1, \quad \langle -|0\rangle = \sin\frac{\theta}{2} = 0$$

$$\langle +|1\rangle = \sin\frac{\theta}{2} = 0, \quad \langle -|1\rangle = \cos\frac{\theta}{2} = 1$$

$$\langle +|+\rangle = \frac{1}{2}(\langle 0| + \langle 1|)(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$\langle -|-\rangle = \frac{1}{2}(\langle 0| - \langle 1|)(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

$$\langle +|-\rangle = \frac{1}{2}(\langle 0| + \langle 1|)(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

$$\langle -|+\rangle = \frac{1}{2}(\langle 0| - \langle 1|)(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Bloch 球中的极值点

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

它具有 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\phi = \frac{\pi}{4}$。因此,

$$\langle +|0\rangle = \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle -|0\rangle = \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle +|1\rangle = \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle -|1\rangle = \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle +|+\rangle = \frac{1}{2}(\langle 0| + \langle 1|)(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle -|-\rangle = \frac{1}{2}(\langle 0| - \langle 1|)(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\langle +|-\rangle = \frac{1}{2}(\langle 0| + \langle 1|)(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Pauli 矩阵的期望值

$$
\begin{aligned}
\langle X \rangle = \langle \psi | X | \psi \rangle = \langle \psi | (\sigma_x / 2) | \psi \rangle &= \frac{1}{2} (\langle 0 | + \langle 1 |)(\psi_0 | - \psi_1 |) \\
&= \frac{1}{2} (\langle 0 | \psi_0 \rangle - \langle 0 | \psi_1 \rangle + \langle 1 | \psi_0 \rangle - \langle 1 | \psi_1 \rangle) \\
&= \frac{1}{2} (\psi_0^* + \psi_1^* + \psi_0 - \psi_1) \\
&= \mathrm{Re}(\psi_0 + \psi_1)
\end{aligned}
$$

$$
\langle Y \rangle = \mathrm{Im}(\psi_0 - \psi_1)
$$

$$
\langle Z \rangle = |\psi_0|^2 - |\psi_1|^2
$$

Bloch 球

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle X\rangle &= \sin\theta\cos\phi \\ \langle Y\rangle &= \sin\theta\sin\phi \\ \langle Z\rangle &= \cos\theta \end{aligned}$$

Bloch 球的北极点代表 $|0\rangle$，南极点代表 $|1\rangle$，而赤道上的点表示量子态的混合态。

单量子比特任意幺正门（U_p）是对单个量子比特进行的一种任意幺正变换操作。在量子计算中，幺正门是保持量子态归一化和幺正性质的操作，它们用于操控量子比特的状态。
U_p 门可以表示为一个 2×2 的幺正矩阵，形式如下：

$$U_p = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{bmatrix}$$

其中 α 和 β 是任意的实数参数，通过调整这两个参数，我们可以实现对量子比特的任意操作。这种门允许我们在 Bloch 球上进行任意的旋转，从而实现对量子比特状态的全局操控。

通过选择适当的 α 和 β 值，我们可以实现许多标准的量子操作，比如 Pauli X、Y、Z 门，以及 Hadamard 门等。这些门在量子算法和量子通信中具有重要作用，因为它们允许我们在量子比特上执行各种变换，从而构建复杂的量子算法和协议。
总之，单量子比特任意幺正门（U_p）是一种通用的量子门操作，允许对单个量子比特进行任意的操作，从而为量子计算和量子信息处理提供了灵活性和能力。

构建 NOT 门

我们可以使用 Bloch 球来构建 NOT 门。首先，让我们考虑一个单量子比特幺正门 $U_{A,p,a}$，其矩阵表示如下：

$$U_{A,p,a} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -e^{i\gamma}\sin\beta \\ e^{i\phi}\sin\beta & e^{i(\phi+\gamma)}\cos\beta \end{bmatrix}$$

如果我们希望构建一个 NOT 门，我们可以选择参数使得 $U_{A,p,a}$ 成为一个 NOT 门，即：

$$U_{A,p,a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解这个方程组可以得到相应的参数值，从而构建出 NOT 门。

构建 NOT 门

具体来说，我们可以设定以下四个方程，来匹配矩阵的每个元素：

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= 0 \\
-e^{i\gamma}\sin\beta &= 1 \\
e^{i\phi}\sin\beta &= 1 \\
e^{i(\phi+\gamma)}\cos\beta &= 0
\end{aligned}
$$

解这些方程，我们可以得到相应的参数 α、β、γ 和 ϕ 值，从而构建出 NOT 门。

不正确的旋转矩阵构建方法

在构建旋转矩阵时，不应使用 Bloch 球来进行构建。以下展示了一个错误的构建方法：

- 第一次旋转（$\theta = \pi$）：

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 第二次旋转（$\phi = \pi$）：

$$R_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 第三次旋转（$\theta = 0$）：

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

虽然这些矩阵看起来像是旋转矩阵，但它们实际上并不满足旋转矩阵的性质，因此不能用于正确的旋转操作。

不正确的旋转矩阵构建方法

在构建旋转矩阵时，不应使用 Bloch 球来进行构建。以下展示了一个错误的构建方法：

- 第一次旋转（$\theta = \pi$）：

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 第二次旋转（$\phi = \pi$）：

$$R_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 第三次旋转（$\theta = 0$）：

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

虽然这些矩阵看起来像是旋转矩阵，但它们实际上并不满足旋转矩阵的性质，因此不能用于正确的旋转操作。