完备性示例

注意，矩阵 $L = \sum_{i=0}^{n-1} |i\rangle\langle i|$ 是一个算符。当它与任意向量 $|V\rangle$ 相乘时，得到 $|V\rangle$ 本身，这意味着 L 是单位矩阵。

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} |i\rangle\langle i| = I$$

这里的 I 表示单位矩阵。
我们来做一个例子。对于由 o 的特征向量组成的空间，我们有

$$\sum_{i=0}^{n-1} |i\rangle\langle i| = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i |i\rangle\langle i|$$

其中 λ_i 是特征值。根据上面的结果，这个表达式应该等于单位矩阵。

投影算符和整体内积

- 投影算符 $P_i = |i\rangle\langle i|$：它可以将任意向量 $|V\rangle$ 投影到由特征向量 $|i\rangle$ 张成的子空间中。
- 投影后的向量 $P_i(|V\rangle)$：表示 $|V\rangle$ 在子空间中的投影。
- 整体内积 $P_i(|V\rangle)$：表示将 $|V\rangle$ 投影到所有特征向量上的结果，即在每个特征向量上进行投影后的累加。

投影算符的定义为

$$P_i(|V\rangle) = |i\rangle\langle i||V\rangle$$

整体内积可以表示为

$$P_i(|V\rangle) = a_0 P_0|V\rangle + a_1 P_1|V\rangle + \ldots + a_{N-1} P_{N-1}|V\rangle$$

$$= a_0|i\rangle\langle i||V\rangle + a_1|i\rangle\langle i||V\rangle + \ldots + a_{N-1}|i\rangle\langle i||V\rangle$$

$$= a_0\langle i|V\rangle|i\rangle + a_1\langle i|V\rangle|i\rangle + \ldots + a_{N-1}\langle i|V\rangle|i\rangle$$

其中，a_i 是向量 $|V\rangle$ 在特征向量 $|i\rangle$ 上的投影结果。

测量中获得特定结果的概率

在测量一个物理量时，我们希望获得某个特定的测量结果。对于一个已知状态 $|\psi\rangle$，在测量该物理量时得到特定结果 $|\lambda_i\rangle$ 的概率可以用投影算符 P_i 来表示。
对于一个特定的结果 $|\lambda_i\rangle$，其对应的概率为

$$P(\lambda_i) = \langle\psi|P_i|\psi\rangle$$

其中，$P_i = |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$ 是投影算符，将态 $|\psi\rangle$ 投影到特征向量 $|\lambda_i\rangle$ 所张成的子空间中。
我们还可以将概率表示为投影算符与态的内积的模的平方：

$$P(\lambda_i) = |\langle\lambda_i|\psi\rangle|^2$$

矩阵（现在，您应该理解我们之前所说的内容）

为什么要使用矩阵：哥本哈根解释/波恩规则：如果对应于具有离散谱的自伴（厄米）算符 A 的可观测量在归一化波函数 (ψ) 的系统中进行测量，则：

- 测量结果将是算符 A 的某个本征值 λ_i
- 得到本征值 λ_i 的概率为 $(\psi|P_i|\psi)$，其中 P_i 是投影算符，将态投影到与本征值 λ_i 对应的本征子空间上

您现在还了解以下内容：

1. 什么是自伴（厄米）矩阵
2. 如何找到特征向量和特征值/对角化矩阵
3. 更多的 Bra-Ket 运算

自伴（厄米）矩阵

自伴（Hermitian）矩阵是一个复数矩阵，其转置的共轭等于它自身。对于一个 $n \times n$ 的矩阵 A，如果满足以下条件，它就是自伴矩阵：

$$A = A^{\dagger}$$

其中 $A^{\dagger}$ 表示 A 的厄米共轭（共轭转置）。
自伴矩阵在量子力学中扮演着重要的角色，它们的特征值是实数，而且它们的特征向量是正交的。

重要特性

- 特征值是实数。
- 对应不同特征值的特征向量是正交的。

找到特征向量和特征值/对角化矩阵

要找到一个矩阵 A 的特征向量和特征值，我们需要解特征方程 $|A-\lambda I|=0$，其中 I 是单位矩阵，λ 是特征值。方程的解 λ_i 给出了特征值，而对应的特征向量 $|v_i\rangle$ 是方程 $A|v_i\rangle=\lambda_i|v_i\rangle$ 的解。对角化是将矩阵表达为其特征值和特征向量的过程。

更多的 Bra-Ket 运算

在量子力学中，Bra-Ket 表示法用于表示物理量和态之间的关系。

- Bra：表示为 $\langle\phi|$，是一个行向量，代表态空间中的一个态，如 $|\psi\rangle$ 的厄米共轭。
- Ket：表示为 $|\psi\rangle$，是一个列向量，代表态空间中的一个态。
- 内积：用 $\langle\phi|\psi\rangle$ 表示，表示两个态的内积，也称为态之间的重叠。
- 外积：用 $|\psi\rangle\langle\phi|$ 表示，表示一个态空间中的投影算符。
- 测量：当测量一个物理量时，态会坍缩为对应的特征态，得到特定的测量结果。

Hilbert 空间

Hilbert 空间是一个完备的线性空间，并定义有内积。对于任意一对向量 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$，以及任意复数 c，满足以下性质：

- 正定性：$(\psi|\psi) > 0$
- 共轭对称性：$(\psi|\phi) = c^*(\psi|\phi)$
- 齐次性：$(c|\psi) = c(\psi)$
- 双线性性：$(\psi|\phi + \eta) = (\psi|\phi) + (\psi|\eta)$

任何具有内积的有限维向量空间都是 Hilbert 空间。

重要性质

Hilbert 空间的完备性保证了其所有柯西序列都收敛于该空间中的向量。

Hilbert 空间的张量积

设 $H_s = H_1 \otimes H_2$，那么 H_s 包含哪些向量呢？它包含了 H_1 和 H_2 中向量的张量积的线性组合。

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} |h_i\rangle \otimes |g_j\rangle$$

其中，$|h_i\rangle$ 是 H_1 中的向量，$|g_j\rangle$ 是 H_2 中的向量，a_{ij} 是复数系数。

注意

Hilbert 空间的张量积可以理解为 H_1 中的向量与 H_2 中的向量的外积，得到的向量是一个更高维度的复合向量。