算子、矩阵、相加

赵晓菲

2023 年 7 月 31 日

矩阵的伴随

对于一个矩阵 A，我们将其伴随矩阵记为 $A^\dagger$ 或 A^*。

矩阵 A 的伴随矩阵 $A^\dagger$ 定义为其转置的复共轭。即 $A^\dagger = (A^T)^*$。

对于复数矩阵，矩阵元素的复共轭是将每个元素取复共轭。

伴随矩阵用于描述矩阵的共轭转置，并在量子力学中非常重要。

自伴（厄米）矩阵

如果一个矩阵的伴随矩阵等于其本身，即 $A^\dagger = A$，那么这个矩阵被称为自伴（厄米）矩阵。

自伴矩阵在量子力学中具有特殊的性质，它的特征值都是实数，且对应的特征向量都是正交的。

自伴矩阵在量子力学中的应用非常广泛，比如描述物理量的算符，其中的厄米性质保证了量子力学中物理量的测量结果都是实数。

自伴（厄米）矩阵及其特征值

命题：自伴（厄米）矩阵的特征值必须是实数。

考虑一个自伴（厄米）矩阵 M，即 $M^\dagger = M$。假设 λ 是它的第 i 个特征值，而 $|v_i\rangle$ 是对应的特征向量。根据特征值问题的定义，我们有：

$$M|v_i\rangle = \lambda|v_i\rangle$$

对于向量 $M|v_i\rangle$，我们可以计算其与 $|v_i\rangle$ 的内积（注意，这是 M 将 $|v_i\rangle$ 旋转后的一个向量)：

$$\langle v_i|M|v_i\rangle = \langle v_i|h|v_i\rangle = \lambda\langle v_i|v_i\rangle$$

其中 h 是厄米矩阵 M 在 $|v_i\rangle$ 上的伴随矩阵。由于 M 是自伴矩阵，h 与 M 相等，即 $h = M^\dagger = M$。

自伴（厄米）矩阵及其特征值

由于 $M=h$，上述等式可以重写为：

$$\langle v_i|M|v_i\rangle = \langle v_i|M|v_i\rangle^* = \lambda\langle v_i|v_i\rangle$$

进一步，我们可以推导出：

$$\lambda = \lambda^*$$

这意味着 λ 必须是实数，因为它等于其复共轭。

因此，得出结论：自伴（厄米）矩阵的特征值一定是实数。