量子纠缠与量子门

赵晓菲

2023 年 8 月 2 日

介绍

- 量子纠缠是有效消除量子系统中的噪声的方法。
- 量子纠缠是实现大规模量子信息处理的关键。
- 在理论物理学中，量子纠缠在量子引力、量子混沌和新的量子相等领域中被广泛研究。

量子纠缠的意义

- 当量子系统处于纠缠态时，系统的各个部分之间存在特殊的量子关联。
- 对一个系统的测量会立即影响其他处于纠缠态的系统的状态，无论它们之间的距离有多远。
- 纠缠态下，系统的状态不再能够被单独描述，而是需要考虑整个系统的状态。

量子纠缠的例子

4-qubit 量子系统处于一个纠缠态，表示为

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

当对其中的一个 qubit 进行测量时，整个系统的状态将塌缩到一个特定的态，例如测量第一个 qubit 得到结果 $|1\rangle$，那么整个系统将塌缩到 $|11\rangle$ 这个态。即使第二个 qubit 和第一个 qubit 之间相隔 100 光年，它们仍然处于纠缠态，测量一个会影响另一个。

应用

纠缠关联在量子计算和量子通信等领域中具有重要的应用。

EPR 悖论（爱因斯坦、波多尔斯基、罗森）

- 地球
- $\phi^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |1\rangle)$
- 依然是纠缠态
- 100 光年以外
- B
- e_2
- A

EPR 悖论（爱因斯坦、波多尔斯基、罗森）

- $\phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |1\rangle)$
- B 决定在 $|+\rangle/|-\rangle$ 基底上进行测量
- A 在 $|0\rangle/|1\rangle$ 基底上测量电子
- 我们知道 $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |1\rangle)$
- 电子必定塌缩到 $|+\rangle$ 或者 $|-\rangle$ 中的一个。假设 A 得到 $|0\rangle$，那么两电子系统的状态变为 $|00\rangle$
- B 也可以百分之百确定电子处于 $|+\rangle$ 态
- 现在 B 可以百分之百确定电子处于 $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态
- 但是由于海森堡不确定性原理，我们不能百分之百确定地同时测量 $|+\rangle$ 态和 $|0\rangle$ 态，因为这两个基是不兼容的。

EPR 悖论（爱因斯坦、波多尔斯基、罗森）

- 结论：量子力学可能是错误的或不完整的。

量子纠缠与量子门

赵晓菲

2023 年 8 月 2 日

介绍

- 量子计算是一种利用量子力学原理的新范式。
- 它基于量子比特（qubits），可以同时存在于 0 和 1 的叠加态。
- 与经典比特不同，量子比特可以同时处于多个状态，从而实现并行计算。
- 量子计算使用可逆操作的幺正变换来进行计算。

叠加态与纠缠态

- 叠加态允许量子比特同时处于多个状态。
- 纠缠态在空间分离的情况下创建量子比特之间的相关性。
- 叠加态和纠缠态是量子计算获得强大能力的关键特征。

量子门

- 量子门是量子计算的基本构建模块。
- 它们操作量子比特以执行特定的操作。
- 例如：Hadamard 门、CNOT 门、T 门等。

量子算法

- 量子计算可以比经典计算更快地解决某些问题。
- Shor 算法用于因式分解大数，破解经典密码。
- Grover 算法用于在未排序的数据库中搜索，具有二次速度提升。

挑战与未来

- 建立和维护稳定和无误差的量子系统是一个挑战。
- 量子失相和噪声是量子计算的主要障碍。
- 量子纠错是实现容错量子计算的关键。
- 量子计算的未来对于高效解决复杂问题充满了希望。

量子计算是什么？

量子计算是一种幺正变换，在末尾进行测量以提取结果。

$$W = U^{\dagger}|V\rangle$$

量子计算

- 单位矩阵：

$$U^{\dagger}U = I$$

- 量子力学状态演化是幺正的：

$$e^{-iHt/\hbar}$$

- 薛定谔方程：

$$i\hbar\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle$$

为什么幺正（除了内积不变)?

量子力学状态演化是幺正的!

$$i\hbar\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle$$

$$UU^\dagger = I$$

量子计算和 NOT 门

量子计算是一种幺正变换，其中在最后进行测量以提取结果。
NOT (X) 门定义：

$$U_{\text{NOT}}|0\rangle = |1\rangle, \quad U_{\text{NOT}}|1\rangle = |0\rangle$$

对于一般态 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$：

$$U_{\text{NOT}}|\psi\rangle = aU_{\text{NOT}}|0\rangle + bU_{\text{NOT}}|1\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle$$

因此，NOT 门是一个幺正门，其矩阵表示为：

$$U_{\text{NOT}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

对于一般态 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$，应用 NOT 门后的态为 $|\psi'\rangle = b|0\rangle + a|1\rangle$。

量子计算

- 量子计算是一种通过量子门的幺正变换进行测量，从而提取结果的计算方法。
- 量子计算是实现大规模量子信息处理的关键。
- 在理论物理学中，量子错误纠正引起了越来越多的兴趣。

量子错误纠正编码

量子错误纠正编码的特点：

- 类似于经典编码理论。
- 解码基于经典信息（例如，测量结果）。
- 具备容错计算功能。

量子门：NOT 门

定义一个量子门通过它如何转换基向量：

$$U_{\text{NOT}}|0\rangle = |1\rangle \quad U_{\text{NOT}}|1\rangle = |0\rangle$$

一般的态 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$
应用 NOT 门：

$$U_{\text{NOT}}|\psi\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle$$

因此，NOT 门交换了 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的值。

两比特的 NOT 门

对于两比特的 NOT 门，我们需要一个 4x4 的矩阵：

$$U_{\mathrm{NOT}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

应用 NOT 门后，两比特的向量变为：

$$|\psi\rangle = a|01\rangle + b|00\rangle + c|11\rangle + d|10\rangle$$

XOR (CNOT) 门

XOR（CNOT）门是量子计算中的一种常见门，用于控制比特的翻转。它的定义如下：

$$U_{\mathsf{XOR}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

在两比特系统中，我们有以下状态：

$$\begin{matrix} |00\rangle & |01\rangle \\ |10\rangle & |11\rangle \end{matrix}$$

XOR (CNOT) 门

应用 XOR（CNOT）门后，控制比特为 1 的情况下，目标比特会发生翻转：

$$U_{\mathsf{XOR}}|00\rangle = |00\rangle$$
$$U_{\mathsf{XOR}}|01\rangle = |01\rangle$$
$$U_{\mathsf{XOR}}|10\rangle = |11\rangle$$
$$U_{\mathsf{XOR}}|11\rangle = |10\rangle$$

因此，XOR（CNOT）门实现了在目标比特为 1 时对控制比特进行取反的操作。

Exchange (SWAP) 门

交换（SWAP）门是量子计算中的一种门，用于交换两个比特的状态。它的定义如下：

$$U_{\mathsf{SWAP}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在两比特系统中，我们有以下状态：

$$\begin{matrix} |00\rangle & |01\rangle \\ |10\rangle & |11\rangle \end{matrix}$$

应用 SWAP 门后，状态发生交换，即：

$$U_{\mathsf{SWAP}}|00\rangle = |00\rangle$$
$$U_{\mathsf{SWAP}}|01\rangle = |10\rangle$$

Exchange (SWAP) 门

对于一般的 2 比特系统，其状态可以表示为：

$$|V\rangle = a|00\rangle + B|01\rangle + y|10\rangle + 8|11\rangle$$

应用 SWAP 门后，两个比特的状态发生交换，即：

$$U_{\mathsf{SWAP}}|V\rangle = a|00\rangle + y|01\rangle + B|10\rangle + 8|11\rangle$$

因此，SWAP 门可以实现两个比特的状态交换操作。

1-Bit Phase Shift Gate (Z Gate)

1 比特相位移位门（Z 门）定义如下：

$$U_Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}$$

其中，ϕ 表示相位角。对于特定的相位角 $\phi = \pi$，Z 门的矩阵为：

$$U_Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Z 门在 1 比特系统中作用如下：

$$U_Z|0\rangle = |0\rangle \quad U_Z|1\rangle = -|1\rangle$$

因此，Z 门可以视为在 $|1\rangle$ 状态上引入了一个相位 π，也被称为相位反转门。

1-Bit Phase Shift Gate (Z Gate)

Z 门在 It) /I-) 基础上的行为类似于 NOT 门:

$$U_Z|+\rangle = |+\rangle \quad U_Z|-\rangle = -|-\rangle$$

其中，$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 和 $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ 分别是 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的超位置。
因此，Z 门可以在相位角为 π 时实现 1 比特的相位反转（Phase Flip）操作，相位角为 0 时实现 1 比特的恒等（Identity）操作。