绝密★启用前

2025 年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．样本数据 2，8，14，16，20 的平均数为

A．8　　B．9　　C．12　　D．18

2．已知 $z=1+\mathrm{i}$，则 $\dfrac{1}{z-1}=$

A．$-\mathrm{i}$　　B．i　　C．-1　　D．1

3．已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$，集合 $B=\{x\mid x^3=x\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{0,1,2\}$　　B．$\{1,2,8\}$　　C．$\{2,8\}$　　D．$\{0,1\}$

4．不等式 $\dfrac{x-4}{x-1}\geqslant 2$ 的解集是

A．$\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$　　B．$\{x\mid x\leqslant -2\}$

C．$\{x\mid -1\leqslant x<1\}$　　D．$\{x\mid x>1\}$

5．在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{6}$，则 $A=$

A．45°　　B．60°　　C．120°　　D．135°

6．抛物线 $C: y^2=2px\ \ (p>0)$ 的焦点为 F，点 A 在 C 上，过 A 作 C 的准线的垂线，垂足为 B．若直线 BF 的方程是 $y=-2x+2$，则 $|AF|=$

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

7．设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $S_3=6$，$S_5=-5$，则 $S_6=$

A．-20　　B．-15　　C．-10　　D．-5

8．已知 $\alpha\in(0,\pi)$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=$

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$　　D．$\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9．设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，q 为 $\{a_n\}$ 的公比，$q>0$．若 $S_3=7$，$a_3=1$，则

A．$q=\dfrac{1}{2}$　　B．$a_5=\dfrac{1}{9}$　　C．$S_5=8$　　D．$a_n+S_n=8$

10．已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=(x^2-3)e^x+2$，则

A．$f(0)=0$　　B．当 $x<0$ 时，$f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$

C．$f(x)\geqslant 2$ 当且仅当 $x\geqslant\sqrt{3}$　　D．$x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

11．双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的左、右焦点为 F_1，F_2，左、右顶点为 A_1，A_2，以 F_1F_2 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M，N，且 $\angle NA_1M=\dfrac{5\pi}{6}$，则

A．$\angle A_1MA_2=\dfrac{\pi}{6}$

B．$|MA_1|=2|MA_2|$

C．C 的离心率为 $\sqrt{13}$

D．当 $a=\sqrt{2}$ 时，四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(x-1,2x)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $|\boldsymbol{a}|=$__________．

13．设 $x=2$ 是函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点，则 $f(0)=$__________．

14．一个底面半径为 $4\,\text{cm}$，高为 $9\,\text{cm}$ 的封闭圆柱形容器（容器壁厚度忽略不计）内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为__________ cm．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)\ (0\leqslant\varphi<\pi)$，$f(0)=\dfrac{1}{2}$．

（1）求 φ；

（2）设函数 $g(x)=f(x)+f(x-\dfrac{\pi}{6})$，求 $g(x)$ 的值域和单调区间．

16．（15 分）

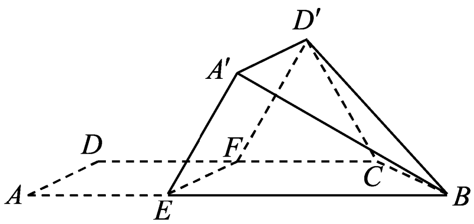
椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4．

（1）求 C 的方程；

（2）过点 $(0,-2)$ 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，O 为坐标原点．若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$，求 $|AB|$．

17．（15 分）

如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB\,/\!/\,CD$，$\angle DAB=90^\circ$，F 为 CD 中点，E 在 AB 上，$EF\,/\!/\,AD$，$AB=3AD$，$CD=2AD$．将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$，使得面 $EFD'A'$ 与面 $EFCB$ 所成的二面角为 60°．



（1）证明：$A'B\,/\!/$ 平面 $CD'F$；

（2）求面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成的二面角的正弦值．

18．（17 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-x+\dfrac{1}{2}x^2-kx^3$，其中 $0<k<\dfrac{1}{3}$．

（1）证明：$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在唯一的极值点和唯一的零点；

（2）设 x_1，x_2 分别为 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的极值点和零点．

（ⅰ）设函数 $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$．证明：$g(t)$ 在区间 $(0,x_1)$ 单调递减；

（ⅱ）比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小，并证明你的结论．

19.（17分）

甲、乙两人进行乒乓球练习，每个球胜者得1分，负者得0分．设每个球甲胜的概率为p $(\frac{1}{2}<p<1)$，乙胜的概率为q，$p+q=1$，且各球的胜负相互独立．对正整数$k\geqslant 2$，记p_k为打完k个球后甲比乙至少多得2分的概率，q_k为打完k个球后乙比甲至少多得2分的概率．

（1）求p_3，p_4（用p表示）；

（2）若$\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$，求$p$；

（3）证明：对任意正整数m，$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$．