绝密★本科目考试启用前

2025年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数　学

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 （选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $M=\{x\mid 2x-1>5\}$， $N=\{1,2,3\}$，则 $M\cap N=$

（A）$\{1,2,3\}$　　（B）$\{2,3\}$

（C）$\{3\}$　　（D）$\varnothing$

（2）若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z+2=2\mathrm{i}$，则 $|z|=$

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{2}$

（C）4　　（D）8

（3）双曲线 $x^2-4y^2=4$ 的离心率为

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

（C）$\dfrac{5}{4}$　　（D）$\sqrt{5}$

（4）为得到函数 $y=9^x$ 的图像，只需把函数 $y=3^x$ 的图像上的所有点

（A）横坐标变成原来的 $\dfrac{1}{2}$，纵坐标不变　　（B）横坐标变成原来的2倍，纵坐标不变

（C）纵坐标变成原来的 $\dfrac{1}{2}$，横坐标不变　　（D）纵坐标变成原来的3倍，横坐标不变

（5）设 $\{a_n\}$ 是公差不为0的等差数列， $a_1=-2$，若 a_3， a_4， a_6 成等比数列，则 $a_{10}=$

（A）-20　　（B）-18

（C）16　　（D）18

（6）已知 $a>0$，$b>0$，则

（A）$a^2+b^2>2ab$

（B）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{ab}$

（C）$a+b>\sqrt{ab}$

（D）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$

（7）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，则“函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$”是“对任意 $M\in\mathbf{R}$，存在 $x_0\in D$，使得 $|f(x_0)|>M$”的

（A）充分而不必要条件

（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件

（D）既不充分也不必要条件

（8）设函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x\ (\omega>0)$，若 $f(x+\pi)=f(x)$ 恒成立，且 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上存在零点，则 ω 的最小值为

（A）8

（B）6

（C）4

（D）3

（9）在一定条件下，某人工智能大语言模型训练 N 个单位的数据量所需要时间 $T=k\log_2 N$（单位：小时），其中 k 为常数．在此条件下，已知训练数据量 N 从 10^6 个单位增加到 1.024×10^9 个单位时，训练时间增加 20 小时；当训练数据量 N 从 1.024×10^8 个单位增加到 4.096×10^8 个单位时，训练时间增加

（A）2 小时

（B）4 小时

（C）20 小时

（D）40 小时

（10）已知平面直角坐标系 xOy 中，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AB}|=2$，设 $C(3,4)$，则 $|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}|$ 的取值范围是

（A）$[6,14]$

（B）$[6,12]$

（C）$[8,14]$

（D）$[8,12]$

第二部分 （非选择题 共 110 分）

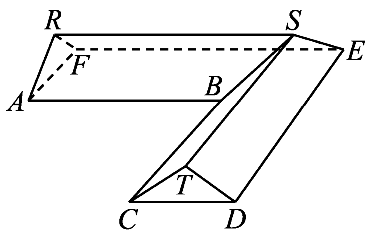
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的顶点到焦点的距离为3，则 $p=$__________.

（12）已知 $(1-2x)^4=a_0-2a_1x+4a_2x^2-8a_3x^3+16a_4x^4$，则 $a_0=$_________；$a_1+a_2+a_3+a_4=$_________.

（13）已知 $\alpha,\beta\in[0,2\pi]$，且 $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)\neq\cos(\alpha-\beta)$，写出满足条件的一组 (α,β)__________.

（14）某科技兴趣小组使用 3D 打印机制作的一个零件可以抽象为如图所示的多面体，其中 $ABCDEF$ 是一个平行多边形，平面 $ARF\perp$ 平面 ABC，平面 $TCD\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，$AB\,/\!/\,RS\,/\!/\,EF\,/\!/\,CD$，$AF\,/\!/\,ST\,/\!/\,BC\,/\!/\,ED$．若 $AB=BC=8$，$AF=CD=4$，$AR=RF=TC=TD=\dfrac{5}{2}$，则该多面体的体积为__________.



（15）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则下列说法正确的有__________.

①存在在 $\mathbf{R}$ 上单调递增的函数 $f(x)$，使得 $f(x)+f(2x)=-x$ 恒成立；

②存在在 $\mathbf{R}$ 上单调递减的函数 $f(x)$，使得 $f(x)-f(2x)=-x$ 恒成立；

③使得 $f(x)+f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数存在且有无穷多个；

④使得 $f(x)-f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数存在且有无穷多个.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

在$\triangle ABC$中，$\cos A=-\dfrac{1}{3}$，$a\sin C=4\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求c；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，求BC边上的高.

条件①：$a=6$；

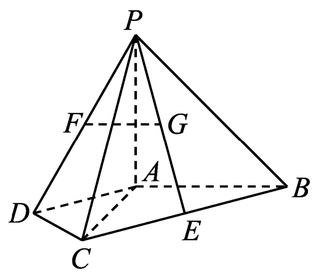
条件②：$b\sin C=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$；

条件③：$\triangle ABC$面积为$10\sqrt{2}$.

注：若选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（17）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$\triangle ACD$与$\triangle ABC$均为等腰直角三角形，$\angle BAC=90^\circ$，$\angle ADC=90^\circ$，E为线段BC的中点.



（Ⅰ）若F，G分别为PD，PE的中点，证明：FG // 平面PAB；

（Ⅱ）若$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=PC$，求AB与平面PCD所成角的正弦值.

（18）（本小题 13 分）

有一个选择题考查了一个知识点．甲、乙两校各随机抽取100人，甲校有80人答对，乙校有75人答对，用频率估计概率.

（Ⅰ）从甲校随机抽取1人，求这个人做对该题目的概率；

（Ⅱ）从甲、乙两校各随机抽取1人，设X为做对的人数，求恰有1人做对的概率以及X的数学期望；

（Ⅲ）若甲校学生掌握这个知识点则有100%的概率做对该题目，乙校学生掌握这个知识点则有85%的概率做对该题目，未掌握该知识点的学生都是从四个选项里面随机选择一个．设甲校学生掌握该知识点的概率为p_1，乙校学生掌握该知识点的概率为p_2，试比较p_1与p_2的大小.（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆 E 上的点到两个焦点的距离之和为 4．

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，$M(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 为椭圆 E 上一点，直线 $x_0x+2y_0y-4=0$ 与 $y=2$ 和 $y=-2$ 分别交于 A，B 两点．设 $\triangle OMA$ 和 $\triangle OMB$ 的面积分别为 S_1 和 S_2，比较 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 与 $\dfrac{|OA|}{|OB|}$ 的大小.

（20）（本小题 15 分）

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，且 $f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$，直线 l_1 是曲线 $y=f(x)$ 在 $A(a,f(a))$ 处的切线.

（Ⅰ）求 $f'(x)$ 的最大值；

（Ⅱ）证明：当 $-1<a<0$ 时，除切点 A 外，$y=f(x)$ 均在 l_1 上方；

（Ⅲ）当 $a>0$ 时，过点 A 作与 l_1 垂直的直线 l_2，l_1，l_2 与 x 轴的交点横坐标分别为 x_1，x_2，求 $\dfrac{2a-x_2-x_1}{x_2-x_1}$ 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$M=\{(x_i,y_i)\mid x_i\in A,y_i\in A\}$，从集合 M 中选出 n 个元素构成序列：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，若任意相邻两项 (x_i,y_i)，(x_{i+1},y_{i+1}) 满足

$$\begin{cases}|x_{i+1}-x_i|=3,\\|y_{i+1}-y_i|=4,\end{cases}\text{或}\begin{cases}|x_{i+1}-x_i|=4,\\|y_{i+1}-y_i|=3,\end{cases}$$

则称该序列为“k 列”.

（Ⅰ）若“k 列”的第一项为 $(3,3)$，求第二项；

（Ⅱ）若 τ 为“k 列”，且满足：i 为奇数时，$x_i\in\{1,2,7,8\}$；i 为偶数时，$x_i\in\{3,4,5,6\}$．判断 $(3,2)$ 与 $(4,4)$ 能否同时在 τ 中，并说明理由；

（Ⅲ）证明：集合 M 中的所有元素不能构成“k 列”.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）