不定积分解题方法大全 第 1 讲

——有理函数和三角有理函数的积分

主讲人：凯哥

不定积分是很多同学在复习考研数学时的一个拦路虎，这是因为不定积分的题目解法众多，并且不易总结。

很多同学向我反映（以下都是真实的反馈）——

“凯哥，不定积分的题目，怎么一个题目一个方法啊，感觉根本没有固定方法，这可怎么办啊？”

“凯哥，三角函数的各种积分，各种变形简直太灵活了，完全想不到啊！”

“凯哥，我拿到一个不定积分题目以后，要么不知道如何下手，要么就在草稿纸上瞎做，把一个很简单的积分题越算越复杂，算到最后直接放弃了”。

……

为了解决广大学子提出的这些疑惑，我仓促间编写了这份讲义，取名为《不定积分解题方法大全（共 3 讲）》。这是第 1 讲的讲义，主要内容为“有理函数的积分”和“三角有理函数的积分”，其中虽然也会用到一些换元法和分部积分法，但它们并不是这一次课的重点，只是解题过程中避不开的一些操作而已。我们会在第 2 次课详细介绍考研数学中的换元法和分部积分。

总之，你只要配合我的视频，把本讲义（共 3 讲）的题目全部吃透，对付考研的不定积分如同探囊取物。

套路一 有理函数的积分

（一） 有理函数积分的通用方法

当遇到题目是有理函数的积分时，我们一般采用有理函数积分的标准解法——“裂项+待定系数法”，对于某些特定有理函数的积分，也许有更加“巧妙”的方法，我们后面的例题也会涉及；但是希望大家不要过于追求这种巧妙的解法，还是应当以基本方法为主；

至于裂项的时候怎么裂，这是很多同学一直都搞不懂的问题，我简要总结如下——

我们将有理函数从宏观上分为真分式和假分式，而任何一个假分式都可以通过多项式的除法变成多项式与真分式之和，由于多项式的积分是简单的，所以解决有理函数的积分，本质上就变成了解决有理真分式的积分。

而对于真分式的积分，我们有如下**固定套路**——

Step1 将该真分式分母进行因式分解(一直分解到无法再分解为止)；

Step2 然后进行裂项，裂项的原则为——

①只要分母中含有$(x-a)^k$，则裂项后的式子中一定含有$\dfrac{A_1}{x-a}+\dfrac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(x-a)^k}$；

②只要分母中含有$(x^2+px+q)^k$(注:因为已经分解到不能再分解了，所以这里的$p^2-4q<0$)，则裂项后的式子中一定含有$\dfrac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^1}+\dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\dfrac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$

Step3 将裂项以后所得的所有项进行通分，根据“通分后的分子与原被积函数的分子的对应系数相等”的原则，列出待定系数满足的方程，然后解出待定系数。这样，就将真分式分解成了各个基本分式之和。

Step4 对于①中所得到的的一系列基本分式，它们的积分十分容易；

对于②中所得到的一系列基本分式，其计算稍微复杂一点，但其实所有形如$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x$的积分，求解也有通用方法；尤其是在考研范围内，分母中的k要么为 1，要么为 2，不可能更高，所以我们只需要把$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$和$\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$的计算学会就可以了。我们在下面的例题 1 和例题 2 中，会详细介绍这两个积分的计算方法。至此，整个有理函数的积分便已找到了一个完善的方法。

总之，通过裂项，最终会归结于计算$\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$、$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$和$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$的三类积分。

例题 1 $\int \frac{x+3}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$

注：通过该题，可以总结出一切$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$的积分，其套路为“改造分子，拆分为两个积分，其中第一个积分直接凑微分，第二个积分配方后套公式即可”。

例题 2 $\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$

提示：三角换元当然可行，下面的类题也是如此，大家可以尝试一下。但是，本题是否有其它方法？

再提示：分母次数太高了，有没有什么办法可以降低分母的次数呢？（答：分部积分！）

类题 $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$

注 1：通过以上 2 题，可以推出所有$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$的积分的计算方法，如计算$\int \frac{x+2}{(x^2+2x+10)^2}\mathrm{d}x$。其方法可以总结为：“改造分子、拆分为两个积分→对分母配方、换元→归结于计算$\int \frac{1}{(a^2+t^2)^2}\mathrm{d}t$”；

注 2：思考，所有形如$\int \frac{x^2}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$的积分，又该如何计算？

至此，$\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$、$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$和$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$这三类积分的求解方法我们都已经学会，铺垫已大功告成。所以，对于一切有理函数积分，我们都已经找到了完整的解题套路。下面看几道典型的例题

例题 3 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$ (此为 2019 年的一道 10 分大题，居然只有一个考点，出题人真是极其无聊)

例题 4 $\int \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$

例题 5 若不定积分$\int \frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$的结果中不含反正切函数，求$a$

（二） 有理函数积分的特殊解法

从理论上而言，一切有理函数积分都可以用上面的待定系数法去硬肛，但是，通法不一定是最优解法，待定系数法的工作量往往很大。很多有理函数的积分都有着自己独特的解法，这些解法不能一概而论，需要我们仔细分析被积函数的结构，**具体问题具体分析**。大家一定要记住，学数学是一个“积累”的过程，下面的很多解法都比较灵活，但希望大家不要产生畏难情绪。

例题 6 $\int \frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x$

注：我们在进行有理函数积分时，有时候会**根据分母的形式，去改造分子**，同样可以实现“裂项”的目的。类似的题目还有以下几道——

类题 1 $\displaystyle\int \frac{1}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x$

注：本题用倒代换$x=\dfrac{1}{t}$也可以做，大家可以尝试一下。（倒代换一般适用于分母的次数远高于分子时）

类题 2 $\displaystyle\int \frac{1+x^4}{1+x^6}\mathrm{d}x$ （一道神仙题，最后一步侮辱智商）

类题 3 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^3+27)}\mathrm{d}x$

例题 7 $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

注 1：本题非常经典，其解法颇具特色。通过这个题目，我们可以解决所有形如$\displaystyle\int \frac{1\pm x^2}{1+kx^2+x^4}\mathrm{d}x$的积分；

注 2：本题也可以对$1+x^4$强行因式分解，变为$1+x^4=(1+x^2)^2-2x^2=\left(1+x^2+\sqrt{2}\,x\right)\left(1+x^2-\sqrt{2}\,x\right)$，但是该解法在裂项后计算系数时运算量太大，不太理智。

类似的题目还有以下几道——

类题 1 $\int\frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

注：利用以上两题，我们可求出积分 $\int\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x+\int\frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\right]=\cdots$

类题 2 $\int\frac{1}{1+x^6}\mathrm{d}x$

特别声明：例题 7 以及两个类题，在恒等变形时，制造出了无定义点，导致积分出来的函数并不连续。我在 2020 年 12 月 9 日发布了一个视频，指出了这种解法的漏洞。该视频一出，引起了非常大的争议，很多人觉得这个视频是哗众取宠。其实，从严谨性上来说，确实需要通过视频里的方法补充定义，使得积分出来的函数连续才行——这是原函数的定义所要求的；但根据笔者调研的大量文献、教材、辅导书发现，很多时候书中用的都是这个有点瑕疵的解法。所以，笔者现在认为，很多时候，我们会为了“简便性”而牺牲一些“严谨性”，这是一种让步和妥协，而不是一种完全的错误。当然，从学术角度来说，确实是需要补充定义使积出来的函数连续才行，只是如果每个题都考虑这个问题的话，工作量就太大了，尤其是后面的三角有理函数积分。毕竟，很多时候，不定积分只是为定积分服务的——如果是在定积分的积分区间内部存在无定义点，那么则需要分段使用 N-L 公式，然后将这些积分加起来；如果是不定积分以后的结果存在无定义点，就睁一只眼闭一只眼吧。

套路二 三角有理函数的积分

（一） 三角有理函数积分的通用方法

一切三角有理函数的积分，只需利用万能公式，令 $\tan(x/2)=t$，就总能将三角有理函数的积分化为有理函数的积分。而由于一切有理函数的积分方法我们都已经学会，所以——“从理论上来说”，三角有理函数的积分本身并没有本质上的困难；但就像前文所述，通法并不一定是好方法，利用万能公式计算三角有理函数的积分是下下策，因为这种解法的计算量往往会很大，尤其是被积函数的次数太高时，计算量是不可想象的。

所以，我们常常希望避开万能公式去求解三角有理函数的积分。当然，为了不出现知识盲区，我们还是以两道题目为例，来展示一下三角有理函数的万能公式解法。

例题 1 $\displaystyle\int \frac{1}{3+5\cos x}\mathrm{d}x$

例题 2 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

（二） 三角有理函数积分的特殊解法

我们一般都是具体问题具体分析，灵活使用三角函数的各种恒等变形和凑微分技巧，达到快速求解的目的。总的来说，有以下几个小技巧——

(1) 擅于使用“缩分母”技巧

如果分母为$1+\cos x$或者$1+\sin x$，那么我们可以尝试分子分母乘以共轭表达式，使分母从两项变为一项，达到“缩分母”的效果。因为，对于一个不定积分而言，如果分母项数太多，将是非常难于处理的；而如果分母只有一项，分子就算有很多项相加，我们也可以将整个积分拆分成若干个小积分，分别计算即可。所以，“缩分母”是一个很重要的思想。当然，除了乘以共轭表达式以外，还可以利用$1+\cos x$的二倍角公式，也能达到缩分母的效果。

例题 3 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

类题 1 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$

提示：本题可以分子+1-1 然后拆开，然后转化为上一题；也可以直接分子分母乘以$1-\sin x$。

类题 2 $\int \frac{1}{\sin x+\cos x} \mathrm{d}x$

注：辅助角公式$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$虽然用的频率不高，但是也需要记住，偶尔会产生奇效。

类题 3 $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} \mathrm{d}x$

(2) 若$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可将$\cos x$凑到d后面，变出$\mathrm{d}\sin x$；

例题 3 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos x} \mathrm{d}x$

例题 4 $\int \frac{\cos^3 x-2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x} \mathrm{d}x$

例题 5 $\int \sec^3 x \mathrm{d}x$

注：本题除了利用$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$外，还可以使用分部积分，然后出现积分重现，即可解出我们需要的$\int \sec^3 x \mathrm{d}x$了。利用这个思想，我们解决下面两个类题——

类题 1 $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

类题 2 请思考如何计算积分 $I_n=\int \sec^n x\,\mathrm{d}x(n\geq 3)$

提示：分奇偶，$I_{2n}=\int \sec^{2n}x\,\mathrm{d}x$ 直接凑 $\mathrm{d}\tan x$，很简单；$I_{2n+1}=\int \sec^{2n+1}x\,\mathrm{d}x$ 的计算方法和 $\int \sec^3 x\mathrm{d}x$ 类似，也是“分部积分+积分重现”，然后得到 I_{2n+1} 和 I_{2n-1} 之间的递推关系。大家可以利用这个思想去计算一下 $\int \sec^4 x\mathrm{d}x$ 和 $\int \sec^5 x\mathrm{d}x$。

类题 3 请推导出积分 $I_n=\int \tan^n x\,\mathrm{d}x\ (n\geq 2)$ 的递推公式

类题 4 请推导出积分 $I_n=\int \sin^n x\,\mathrm{d}x\ (n\geq 2)$ 的递推公式

类题 5 根据类题 4 的结论，可推导出定积分中大名鼎鼎的“点火公式”——

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{2}{3}\quad, n\text{为奇数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, n\text{为偶数}\end{cases}$$

(3) 若$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可将$\sin x$凑到d后面，变出$\mathrm{d}\cos x$；

注：这种情况和上面的情形类似，所以只用两个简单的例子作为说明即可。

例题 6 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x\cdot\cos^2 x}\mathrm{d}x$

例题 7 $\displaystyle\int\frac{5+4\cos x}{(2+\cos x)^2\cdot\sin x}\mathrm{d}x$

(4) 若$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，若$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则可想办法制造出$\sec^2 x\mathrm{d}x$，凑出$\mathrm{d}\tan x$。我们有时候喜欢分子分母同时除以$\cos^2 x$，使分子出现$\sec^2 x\mathrm{d}x$，就是这个原因。

例题 8 $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

例题 9 $\displaystyle\int\frac{1}{(3\sin x+2\cos x)^2}\mathrm{d}x$

例题 10 $\displaystyle\int\frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$

例题 11 $\int \frac{1}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} \mathrm{d}x$

注：如果把被积函数中的分子分母颠倒，改为$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \mathrm{d}x$后，虽然也可以凑$\mathrm{d}\tan x$，但后续操作并不容易（当然，也能做）；但是若能灵活地使用二倍角公式，变为$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} \mathrm{d}x$，则后续操作会容易很多。这再一次体现了不定积分特别容易出现一题多解的情况，希望大家具体问题具体分析。

例题 12 $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin^2 x} \mathrm{d}x$

(5) 对于形如$\int \frac{A\sin x+B\cos x}{C\sin x+D\cos x} \mathrm{d}x$的积分，我们一般假设“分子=$p \cdot$ 分母 $+ q \cdot$ (分母)$'$”，解出p和q即可；

例题 13 $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} \mathrm{d}x$

注：本题当然也可以归结于$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$的类型，然后凑$\mathrm{d}\tan x$，同一个题有很多解法。

(6) 当被积函数中出现不用角度的三角函数时，我们一般先用倍角公式统一角度；

例题 14 $\int \frac{1}{\sin x \cdot \sin 2x} \mathrm{d}x$

例题 15 $\int \frac{\cos 2x - \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$

(7) 对于形如$\int \sin ax \cdot \sin bx \mathrm{d}x (a \neq b)$之类的题，我们可以直接采用积化和差公式，一步秒杀。

例题 16 $\int \sin 2x \cdot \sin 3x \mathrm{d}x$

(8) 要善于使用二倍角公式处理三角有理函数的积分——当然，很多用到二倍角公式处理的题，本质上和使用万能公式换元没有区别，只是省略了换元的步骤而已，请大家自行体会这句话；

例题 17 $\int \frac{1}{1+\cos x} \mathrm{d}x$

类题 1 $\int \frac{1}{\sin x \cdot \sin 2x} \mathrm{d}x$

类题 2 $\int \frac{1}{1+\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$

(9) 有些题，我也不知道归为哪一类，总之，具体问题具体分析，才是最核心的思想

例题 18 $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x$

例题 19 $\displaystyle\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \mathrm{d}x$

例题 20 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^6 x + \cos^6 x} \mathrm{d}x$

例题 21 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} \mathrm{d}x$

注：本题涉及到了三角有理函数的裂项，它们没有通法（或许是我不知道），只有观察式子结构，不断尝试，类似的还有下面这道题。

例题 22 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)} \mathrm{d}x$ (其中$\sin(a-b) \neq 0$)

罗列至此，有理函数和三角有理函数积分的题型基本已经全覆盖了，希望大家在听课以后自己再独立地做两三遍这份讲义，那么这一块的内容你就完全没有任何问题了。

下一次课，我们讲的是“换元法+分部积分法”，这两个方法占据了考研数学不定积分的半壁江山。

凯哥

2021 年 5 月 17 日

成都

认真学习本讲义，彻底搞定不定积分！