

Особенности математических моделей теплопроводности с отклоняющимся аргументом

Качалкин Иван

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Кафедра “Прикладная математика-1”

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Филимонов А.М.

июнь 2014

Постановка задачи

Исходные уравнения

Общее уравнение непрерывности в дифференциальной форме:

$$\rho_t + \operatorname{div} \bar{J} = f, \quad (1.1)$$

где плотность потока \bar{J} выражена законом диффузии с конвекцией (ρ – температура):

$$\bar{J}(x, t) = -a^2 \nabla \rho(x, t) + \bar{V}(x, t) \rho(x, t) \quad (1.2)$$

Постановка задачи

Уравнение диффузии с запаздыванием

Рассмотрим закон теплопроводности с отклонением по времени:

$$\bar{J}(x, t + \tau) = -a^2 \nabla \rho(x, t) + \bar{V}(x, t) \rho(x, t) \quad (1.3)$$

$$\sum_{n=0}^m \frac{\partial^n \bar{J}}{\partial t^n}(x, t) \frac{\tau^n}{n!} = -a^2 \nabla \rho(x, t) + \bar{V}(x, t) \rho(x, t) \quad (1.4)$$

$$\sum_{n=0}^m \frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^{n+1}} \frac{\tau^n}{n!} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{V^2}{4a^2} u = 0 \quad (1.5)$$

$$\rho(x, t) = e^{\xi x} u(x, t) \quad (1.6)$$

Исследование устойчивости приближений

Сведение к исследованию ОДУ методом Фурье и исследование его устойчивости по критерию Рауса-Гурвица

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^m \frac{\tau^k}{k!} T^{(k+1)} + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2 k^2 \right)}_{\gamma(k)} T = 0 \\ X'' + k^2 X = 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\sum_{k=0}^m \frac{\tau^k}{k!} \lambda^{k+1} + \gamma = 0 \quad (2.2)$$

Исследование устойчивости приближений

Критерий Рауса-Гурвица

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0 \quad a \neq 0 \quad (2.3)$$

$$\Delta_0 = a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}, \dots$$

Исследование устойчивости приближений

Результаты численного исследования

при $m = 1$: $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_1 = \gamma > 0$

при $m = 2$: $\Delta_1 = \tau$, $\Delta_2 = \tau(1 - 0.5\gamma\tau) < 0$, $\Delta_3 = \gamma\tau(1 - 0.5\gamma\tau) < 0$

при $m = 3$: $\Delta_1 = 0.5\tau^2$, $\Delta_2 \approx 0.33\tau^3$, $\Delta_3 \approx \tau^3(0.33 - 0.25\gamma\tau) < 0$,
 $\Delta_4 \approx \gamma\tau^3(0.33 - 0.25\gamma\tau) < 0$

при $m = 4$: $\Delta_1 = 0.167\tau^3$, $\Delta_2 = 0.041\tau^5$, $\Delta_3 = \tau^6(0.007\gamma\tau + 0.014)$,
 $\Delta_4 = \tau^6(-0.0017\gamma^2\tau^2 - 0.007\gamma\tau + 0.014) < 0$,

$\Delta_5 = \gamma\tau^6(-0.0017\gamma^2\tau^2 - 0.0071\gamma\tau + 0.0139)$

при $m = 5$: $\Delta_1 = 0.042\tau^4$, $\Delta_2 = 0.003\tau^7$, $\Delta_3 = 0$,

$\Delta_4 = \tau^{10}(0.0001\gamma\tau - 0.0002)$,

$\Delta_5 = \tau^{10}(-0.0001\gamma^2\tau^2 + 0.0002\gamma\tau - 0.0002) < 0, \dots$

при $m = 6$: $\Delta_1 = 0.0083\tau^5$, $\Delta_2 = 0.0001\tau^9$, $\Delta_3 = -3.858 \cdot 10^{-6}\tau^{12} < 0$,

\dots

при $m = 7$: $\Delta_1 = 0.00138889\tau^6$, $\Delta_2 = 3.307 \cdot 10^{-6}\tau^{11}$,

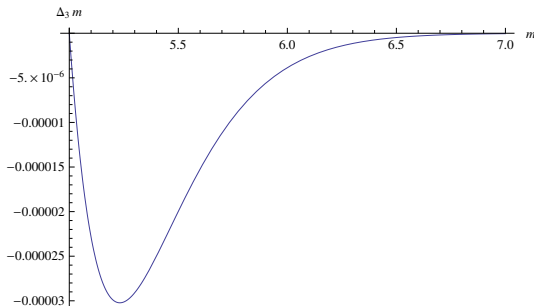
$\Delta_3 = -4.593 \cdot 10^{-8}\tau^{15} < 0, \dots$

Исследование устойчивости приближений

Аналитическое доказательство неустойчивости приближений

Утверждение. $\Delta_3 < 0$ при $m \geq 6$.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} & \frac{\tau^m}{m!} & 0 \\ \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} & \frac{\tau^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \\ \frac{\tau^{m-5}}{(m-5)!} & \frac{\tau^{m-4}}{(m-4)!} & \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} \end{vmatrix} = \frac{\tau^{3m-6}}{m!(m-1)!(m-3)!} (10-2m) < 0 \quad (2.4)$$



Исследование уравнения с запаздыванием

Переход к исследованию системы ОДУ с запаздыванием

$$u_t(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t - \tau) + \frac{V^2}{4a^2} u(x, t - \tau) = 0 \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T'(t) + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2 k^2 \right)}_{\gamma(k^2)} T(t - \tau) = 0 \\ X'' + k^2 X = 0 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Уравнение с запаздыванием

Задача Коши для уравнения с запаздыванием

$$\left\{ \begin{array}{l} T_k'(t) + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2 k^2 \right)}_{\gamma(k^2)} T_k(t - \tau) = 0, \quad t > 0, \\ T_k(t) = T_k^0, \quad -\tau \leq t \leq 0. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

На основании **теоремы Руше** получено достаточное условие устойчивости решений:

$$\gamma(k^2)\tau < 1 \quad (3.4)$$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

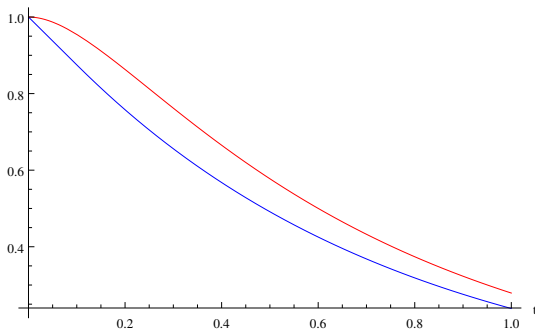


Рис. : При $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 1$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

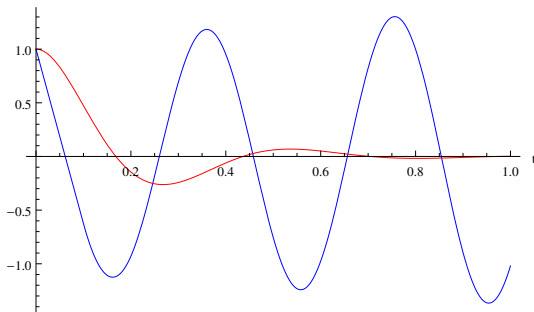


Рис. : При $\tau = 0.1$, $k = 4$, $m = 1$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

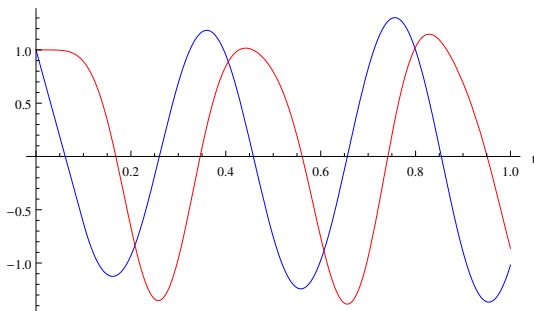


Рис. : При $\tau = 0.1$, $k = 4$, $m = 5$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

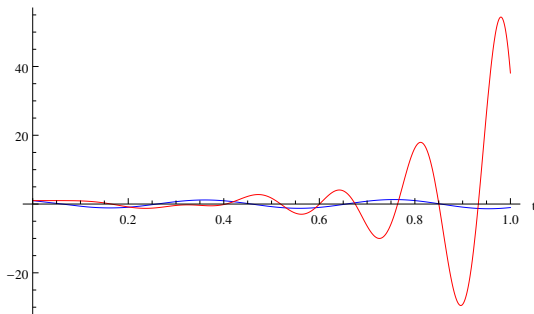


Рис. : При $\tau = 0.1$, $k = 4$, $m = 6$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

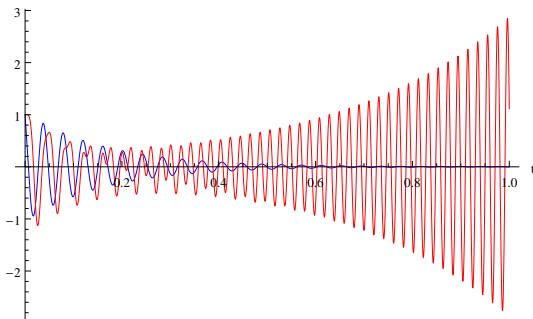


Рис. : При $\tau = 0.01$, $k = 12$, $m = 5$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

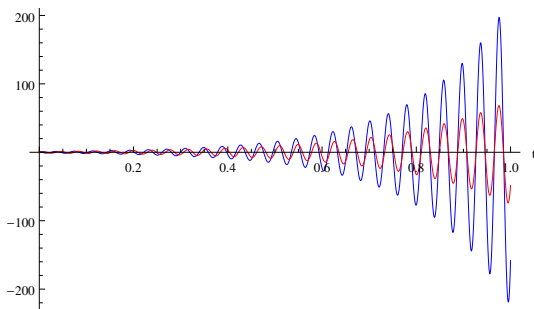


Рис. : При $\tau = 0.01$, $k = 13$, $m = 5$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

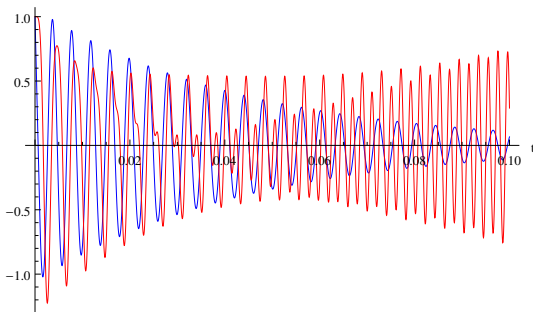


Рис. : При $\tau = 0.001$, $k = 39$, $m = 5$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

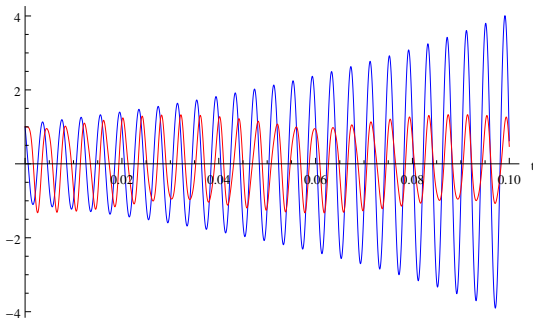


Рис. : При $\tau = 0.001$, $k = 40$, $m = 5$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

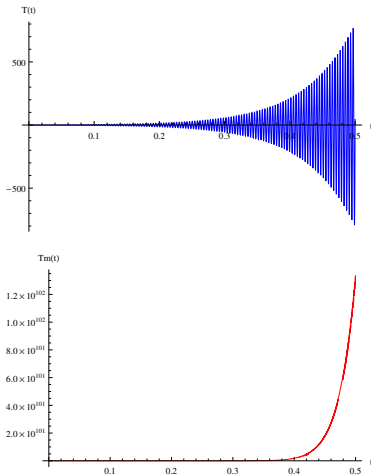


Рис. : При $\tau = 0.001$, $k = 40$, $m = 6$

Приложение математического моделирования для исследования экономических процессов

Модель капиталовложений Калецкого

$$K'(t) - \frac{a}{\tau} K(t) + \left(\frac{a}{\tau} + b \right) K(t - \tau) = a(A(t - \tau) + C_a(t - \tau) + \epsilon(t - \tau)) \quad (4.1)$$

Асимптотическая устойчивость решений:

$$\arccos \left(\frac{a}{a + b\tau} \right) > \sqrt{b\tau(b\tau + 2a)} \quad (4.2)$$

Приложение математического моделирования для исследования экономических процессов

Примеры применения модели Калецкого

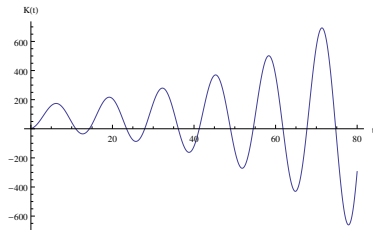


Рис. : График решения уравнения Калецкого при $a = 0.95$, $b = 0.12$, $\tau = 1$

$$\arccos\left(\frac{0.95}{0.95 + 0.12}\right) \approx 0.478144 \leq 0.492341 \approx \sqrt{0.12(0.12 + 2 \cdot 0.95)} \quad (4.3)$$

Приложение математического моделирования для исследования экономических процессов

Примеры применения модели Калецкого

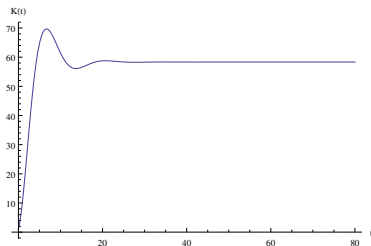


Рис. : График решения уравнения Калецкого при $a = 0.7$, $b = 0.12$, $\tau = 1$

$$\arccos\left(\frac{0.7}{0.7 + 0.12}\right) \approx 0.547827 > 0.427083 \approx \sqrt{0.12(0.12 + 2 \cdot 0.7)} \quad (4.4)$$

Выводы

1 Решения уравнения

$$u_t(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t - \tau) + \frac{V^2}{4a^2} u(x, t - \tau) = 0 \quad (5.1)$$

неустойчивы по времени при любой ненулевой начальной функции $T(t)$ при $\tau > 0$.

2 Решения задачи Коши для уравнения с запаздыванием

$$\begin{cases} T'_k(t) + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2 k^2 \right)}_{\gamma(k^2)} T_k(t - \tau) = 0, & t > 0, \\ T_k(t) = T_k^0, & -\tau \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

устойчивы при $\gamma\tau < 1$ (достаточное условие).

Выводы

- 3 Гипотеза: решения 5.2 устойчивы при $\gamma\tau < \frac{\pi}{2}$ (необходимое условие).
- 4 Приближения для 5.2

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^m \frac{\tau^n}{n!} T_k^{(n+1)} + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2 k^2 \right)}_{\gamma(k^2)} T_k = 0, \quad t > 0, \\ T_k(0) = T_k^0 \neq 0 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

неустойчивы при $m \geq 6$, устойчивы при $m = 1$ при любых $\gamma > 0, \tau > 0$.