Содержание

Введение

Данный дипломный проект посвящен изучению математических моделей теплопроводности с отклоняющимся аргументом.

Впервые теорию дифференциальных уравнений сначала с запаздывающим (а потом и с отклоняющимся) аргументом рассмотрел в А.Д.Мышкис в работе [6]). Другой пионерской работой в исследовании этого вопроса стала [16].

В последствии дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом (также иногда называемые функционально-дифференциальными) нашли многочисленные приложения в различных вопросах автоматики, в теории колебаний, в ракетной технике, во многих вопросах физики, в некоторых задачах экономических, биологических и медицинских наук. Важность и разнообразие приложений резко повысили интерес к теории этих уравнений. В 60-х годах XX века появилось множество работ по данной тематике: в качестве примеров можно привести монографии Белммана, Данскина и Гликсберга [13], Беллмана и Данскина [14], Пинни [8], Красовского [5] и др.

Теория дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом до сих пор находится в стадии становления и интерес к ней по-прежнему не угас. Значимыми работами современности по данной тематике стали [21] и [18].

В данной работе будет исследована устойчивость уравнения локального закона сохранения (Лиувилля) с малым запаздыванием τ:

$$\begin{cases} \rho_t(x,t) + div\bar{J}(x,t) = f(x,t), \\ \bar{J}(x,t+\tau) = -a^2\nabla\rho(x,t) + \bar{V}(x,t)\rho(x,t) \end{cases}$$

Цель настоящего исследования – оценить, как небольшое отклонение по времени влияет на решения и их устойчивость для уравнений теплопроводности с отклоняющимся аргументом, а также сравнить моделей с отклонением и без. Также в данной работе будет приведена необходимая теория и представлены развитые численные методы решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Важным фактом является наличие именно малого запаздывания: в работе будет представлен переход от исходной модели к системе обыкновнных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Такие уравнения были рассмотрены в статьях Тихонова [9, 10], Васильевой [1], в книге Васильевой и Бутузова [2].

В экономической части работы будет **модель капитализации Калецкого (Kalecki)**[17].

1 Изучение поставленной задачи с помощью компьютерного моделирования

1.1 Математическая постановка исходной задачи

Запишем **общее уравнение непрерывности** в дифференциальной форме:

$$\rho_t(\bar{x},t) + div\bar{J}(\bar{x},t) = f(\bar{x},t) \qquad (1.1.1)$$

Оно представляет собой сильную (локальную) форму закона сохранения и выражает связь между потоком $\bar{J}(\bar{x},t)$ и концетрацией (температурой) $\rho(\bar{x},t)$.

Чтобы корректно поставить задачу решения (1.1.1) необходимо дополнить его ещё одним условием – в данной работе оно представлено **законом диффузии с конвекцией** с отклоняющимся аргументом:

$$\bar{J}(\bar{x},t+\tau) = -a^2\nabla\rho(\bar{x},t) + \bar{V}(\bar{x},t)\rho(\bar{x},t) \qquad (1.1.2)$$

В дальнейшем уравнение (1.1.1) будет классифицировано с точки зрения теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Предварительно приведем необходимую для исследования информацию.

1.2 Некоторые факты из теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

1.2.1 Базовые понятия и определения

Дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом называются дифференциальные уравнения, в которые неизвестная функция и её проиводные входят, вообще говоря, при различных значениях аргумента.

Хотя уравнения с отклоняющимся аргументом по виду очень похожи на обыкновенные дифференциальные уравнения, факт отклонения аргумента усложняет их анализ.

Рассмотрим простейший пример

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{1.2.1}$$

где τ – положительная константа.

Для начала отметим, что для решения задачи Коши уже недостаточно задать одно начальное условие $x(t_0) = x_0$, ведь необходимо знать исходные значения на всем отрезке $[t_0-\tau, t_0]$, т.е задать функцию $x_0(t)$, определенную на отрезке $[t_0 - \tau, t_0]$ – **начальную функцию** (в зарубежной литературе **history function** или **initial function**).

1.2.2 Простейшая модель с запаздыванием

Для примера рассмотрим две задачи Коши: одну для обыкновенного дифференциального уравнения, другую – для уравнения с отклонением по аргументу:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \quad t > 0 \\ \qquad\qquad x(0) = 1 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

$$\begin{cases} y'(t) = y(t-1), \quad t > 0 \\ y(t) = 1, \quad -1 \le t \le 0 \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Методы решения подобных уравнений с запаздыванием будут рассмотрены в работе позже, а пока построим графики этих решений:

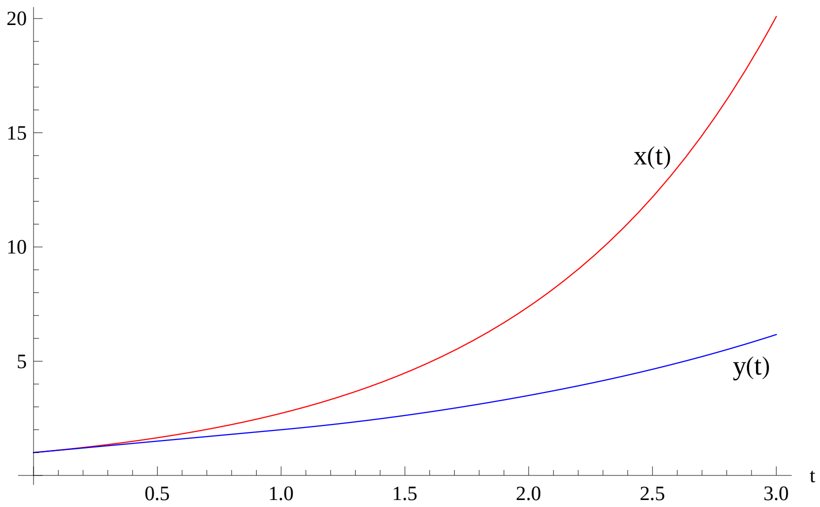

Рис. 1.2.1: Сравнение моделей с запаздыванием и без

Наглядно видно, что решения различны. Позже будет приведено аналитическое решение задачи (1.2.3) и доказано, что $y(t)$ всегда возрастает медленнее экспоненциального решения, т.е. $x(t)$.

Также решение зависит от начальной функции: для примера рассмотрим такую задачу:

$$\begin{cases} y_h'(t) = y_h(t-1), \quad t > 0 \\ y_h(t) = 1 + t, \quad -1 \leq t \leq 0 \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Отметим, что $y_h(0) = y(0) = 1$.

Построим решения на одном графике:

Таким образом, начальная функция определяет характер решения задачи.

1.2.3 Классификация моделей с отклоняющимся аргументом

Рассотрим обобщенное уранвнения n-ого порядка с l отклонениями аргумента (вообще говоря, отклонение может быть непостоянным и зависеть, например, от значений самого аргумента).

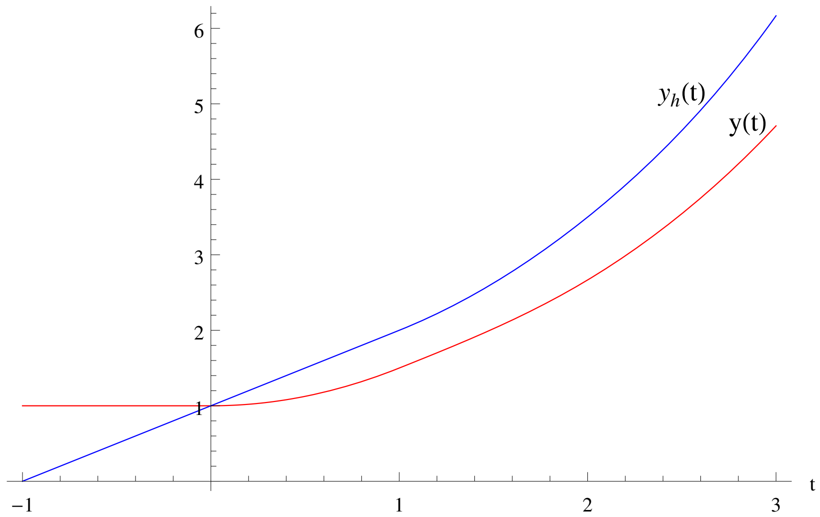

Рис. 1.2.2: Сравнение моделей с различными начальными функциями

$$\begin{gathered} x^{(m_0)}(t) = f(t, x(t), \ldots, x^{(m_0-1)}(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots, \\ \ldots, x^{(m_1)}(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_l(t)), \ldots, x^{(m_l)}(t-\tau_l(t))) \end{gathered} \tag{1.2.5}$$

Здесь $\tau_i(t) \geq 0$.

Каменским Г.А. была введена естественная классификация (1.2.5). Обозначим $\lambda = m_0 - \max\limits_{1\leq i\leq l} m_i$.

1. Если $\lambda > 0$, то такое уравнения называется уравнением с **запаздывающим аргументом**;

2. Если $\lambda = 0$, – уравнением **нейтрального типа**;

3. Если $\lambda < 0$, – уравнением **опережающего типа**.

Вернемся к исходной задаче (1.1.1, 1.1.2):

$$\begin{cases} \rho_t(\bar{x}, t) + div\bar{J}(\bar{x}, t) = f(\bar{x}, t), \\ \bar{J}(\bar{x}, t+\tau) = -a^2\nabla\rho(\bar{x}, t) + \bar{V}(\bar{x}, t)\rho(\bar{x}, t) \end{cases} \tag{1.2.6}$$

Объединим в одно уравнение относительно $\rho(x,t)$:

$$\rho_t(\bar{x},t) = -a^2\Delta\rho(\bar{x},t-\tau)+\rho(\bar{x},t-\tau)div\bar{V}(\bar{x},t-\tau)+(\bar{V}(\bar{x},t-\tau),\nabla\rho(\bar{x},t-\tau)) \tag{1.2.7}$$

Отметим, что дивергенция как дифференциальный оператор была применена по пространственным переменным $\bar{x}$. Из этого следует, что в левой части (1.2.7) не содержится производных по t и уравнение классифицируется как уравнение с запаздывающим аргументом при $\tau > 0$ и как опережающего типа при $\tau < 0$.

1.2.4 Метод шагов решения уравнений с отклоняющимся аргументом

Метод шагов – естественный метод решения уравнений с отклоняющимся аргуентом. Рассмотрим простейший пример:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad \tau > 0 \tag{1.2.8}$$

Поставим задачу Коши для него:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad t > 0, \\ x(t) = x_0(t), \quad -\tau \le t \le 0 \end{cases} \tag{1.2.9}$$

Тогда на отрезке $[0,\tau]$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_0(t-\tau)), \quad 0 \le t \le \tau, \\ x(0) = x_0(0) \end{cases} \tag{1.2.10}$$

Отметим, что (1.2.10) – задача Коши уже для обыкновенного дифференциального уравнения. Предположим, что $x_1(t)$ – ее решение. Тогда на отрезке $[\tau, 2\tau]$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_1(t-\tau)), \quad \tau \le t \le 2\tau, \\ x(\tau) = x_1(\tau) \end{cases} \tag{1.2.11}$$

Продолжая подобные рассуждения, можно найти решение (1.2.9). Отметим, что решать можно как аналитически, так и численно.

К минусам этого метода можно отнести зависимость от величины отклонения и сложность адаптации к общему случаю зависимости запаздывания от аргумента.

В качестве примера можно рассмотреть уже использованную раннее в работе задачу Коши (1.2.3):

$$\begin{cases} y'(t) = y(t-1), \quad t > 0 \\ y(t) = 1, \quad -1 \le t \le 0 \end{cases}$$

Таким образом, на отрезке $[0, 1]$ её решением будет функция

$$y(t) = t + 1, \quad 0 \le t \le 1 \tag{1.2.12}$$

На отрезке $[1, 2]$ соответственно:

$$\begin{cases} y'(t) = (t+1) - 1, \quad 1 \le t \le 2, \\ y(1) = 1 + 1 = 2 \end{cases} \tag{1.2.13}$$

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{4}, \quad 1 \le t \le 2 \tag{1.2.14}$$

Продолжая подобные рассуждения, можно построить решение на сколь угодно отдаленном по времени от начального момента отрезке.

Заметим, что на каждом из таких отрезков, решения представлены в виде полинома, а значит возрастают не быстрее решения задачи без запаздывания – экспоненциальной функции.

1.2.5 Некоторые сведения о решениях линейных уравнений с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента

Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{l} a_{ij}x^{(i)}(t-\tau_j)=0, \tag{1.2.15}$$

где $0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_m$.

Будем искать его частные решения в виде

$$x(t)=e^{kt}, \tag{1.2.16}$$

где k – постоянная.

Подставив (1.2.16) в (1.2.15), получим характеристическое уравнение для k:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{l} a_{ij}k^i e^{k\tau j}=0 \tag{1.2.17}$$

Заметим, что по знакам вещественных частей корней 1.2.17 можно судить об устойчивости соотвествующего ему дифференциального уравнения с запаздыванием, как и в случае уравнений безе запаздывания. С доказательством данного факта можно ознакомиться, например, в [11].

Теория подобных трансцедентных уравнений изучалась ещё в $XVIII$ веке Ламбертом и Эйлером. Известно, что (1.2.17) имеет бесконечное множество корней в комплексном пространстве.

В честь немецкого математика Ламберта была названа функция $W(z)$, определяемая функциональным уравнением

$$z = W(z)e^{W(z)} \tag{1.2.18}$$

Вообще говоря, $W(z)$ многозначна, но если ограничиться вещественными $z = x \geq -\frac{1}{e}$ и потребовать $W(z) \geq -1$, то получим однозначно определенную функцию, представляющую одну из главных ветвей $W(z)$:

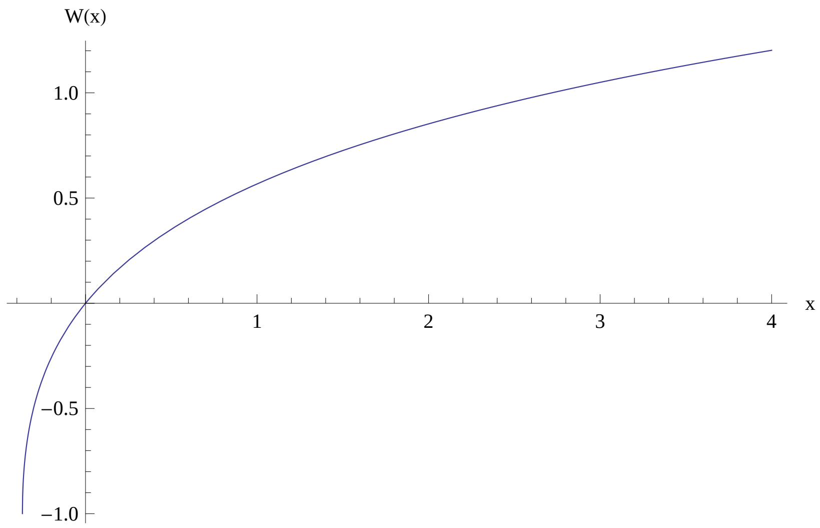

Рис. 1.2.3: График главной ветви $W_0(x)$ решений функции Ламберта

1.3 Переход к исследованию обыкновенных уравнений в частных производных, приближающих исходное уравнение с запаздыванием

Цель дальнейшего исследования – свести исходную задачи к анализу её приближений уравнениями в частных производных.

Напомним, что в работе исследуется задача (1.1.1, 1.1.2):

$$\begin{cases} \rho_t(\bar{x},t) + div\bar{J}(\bar{x},t) = f(\bar{x},t), \\ \bar{J}(\bar{x},t+\tau) = -a^2\nabla\rho(\bar{x},t) + \bar{V}(\bar{x},t)\rho(\bar{x},t) \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Разложим левую часть уравнения с запаздыванием в ряд Тэйлора, опустив члены порядка выше m:

$$\bar{J}(\bar{x},t) + \bar{J}_t(\bar{x},t)\tau + \cdots + \frac{\partial^m \bar{J}}{\partial t^m}(\bar{x},t)\frac{\tau^m}{m!} = -a^2\nabla\rho(\bar{x},t) + \bar{V}(\bar{x},t)\rho(\bar{x},t) \tag{1.3.2}$$

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\partial^n \bar{J}}{\partial t^n}(\bar{x},t)\frac{\tau^n}{n!} = -a^2\nabla\rho(\bar{x},t) + \bar{V}(\bar{x},t)\rho(\bar{x},t) \tag{1.3.3}$$

В контексте работы будем называть m **порядком приближения**.

Продифференциировав (1.1.1) n раз, получим:

$$\frac{\partial^{n+1}\rho}{\partial t^{n+1}} + div\frac{\partial^n \bar{J}}{\partial t^n} = \frac{\partial^n f}{\partial t^n} \tag{1.3.4}$$

Домножив последнее уравнение на $\frac{\tau^n}{n!}$, перепишем его в следующем виде:

$$div\left(\frac{\partial^n \bar{J}}{\partial t^n}\right)\frac{\tau^n}{n!} = \left(\frac{\partial^n f}{\partial t^n} - \frac{\partial^{n+1}\rho}{\partial t^{n+1}}\right)\frac{\tau^n}{n!} \tag{1.3.5}$$

Из уравнения (1.3.3):

$$\sum_{n=0}^{m} div\left(\frac{\partial^n \bar{J}}{\partial t^n}\right)\frac{\tau^n}{n!} = -a^2 div(\nabla\rho) + div(\bar{V}\rho) \tag{1.3.6}$$

Подставим (1.3.5):

$$\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{\partial^n f}{\partial t^n} - \frac{\partial^{n+1}\rho}{\partial t^{n+1}}\right)\frac{\tau^n}{n!} = -a^2\Delta\rho + \rho div\bar{V} + (\bar{V},\nabla\rho) \tag{1.3.7}$$

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{\partial^{n+1}\rho}{\partial t^{n+1}}\frac{\tau^n}{n!} - a^2\Delta\rho + \rho div\bar{V} + (\bar{V},\nabla\rho) = \sum_{n=0}^{m}\frac{\partial^n f}{\partial t^n}\frac{\tau^n}{n!} \tag{1.3.8}$$

Рассмотрим одномерный случай:

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{\partial^{n+1}\rho}{\partial t^{n+1}}\frac{\tau^n}{n!}-a^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\rho\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial\rho}{\partial x}=\sum_{n=0}^{m}\frac{\partial^n f}{\partial t^n}\frac{\tau^n}{n!}=g(x,t) \tag{1.3.9}$$

Для простоты примем $g=0$ и $V=const$:

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{\partial^{n+1}\rho}{\partial t^{n+1}}\frac{\tau^n}{n!}-a^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+V\frac{\partial\rho}{\partial x}=0 \tag{1.3.10}$$

Заменим неизвестную функцию следующим образом:

$$\rho(x,t)=e^{\xi x}u(x,t) \tag{1.3.11}$$

Тогда

$$\rho_x=e^{\xi x}(u_x+\xi u) \tag{1.3.12}$$

$$\rho_{xx}=e^{\xi x}(u_{xx}+2\xi u_x+\xi^2 u) \tag{1.3.13}$$

$$-a^2\rho_{xx}+V\rho_x=e^{\xi x}[-a^2(u_{xx}+2\xi u_x+\xi^2 u)+V(u_x+\xi u)]= \tag{1.3.14}$$

$$=e^{\xi x}[-a^2u_{xx}+(-2a^2\xi+V)u_x+(-a^2\xi^2+V\xi)u]= \tag{1.3.15}$$

$$=e^{\xi x}\left[-a^2u_{xx}+\frac{V^2}{4a^2}u\right] \tag{1.3.16}$$

при $\xi=\frac{V}{2a^2}$ (т.е. коэффициент при u_x равен 0).

Наконец, получим уравнение, для которого будем исследовать устойчивость его решений:

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{\partial^{n+1}u}{\partial t^{n+1}}\frac{\tau^n}{n!}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{V^2}{4a^2}u=0 \tag{1.3.17}$$

Для уравнения (1.3.17) применим **метод Фурье разделения переменных**:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X(x)T(t) \tag{1.3.18}$$

Получим:

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\tau^n}{n!} T^{(n+1)} X + \frac{V^2}{4a^2} TX = a^2 T X'', \quad k = 1, \ldots, \infty \tag{1.3.19}$$

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{m} \frac{\tau^n}{n!} T^{(n+1)} + \frac{V^2}{4a^2} T}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda = -k^2 \tag{1.3.20}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{m} \frac{\tau^n}{n!} T^{(n+1)} + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2 k^2 \right)}_{\gamma(k^2)} T = 0 \\ X'' + k^2 X = 0 \end{cases} \tag{1.3.21}$$

Как видно, малый параметр входит только в уравнение относительно $T(t)$.

Дальнейшей целью настоящего исследования станет вопрос об устойчивости нулевого решения

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\tau^n}{n!} T^{(n+1)} + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2 k^2 \right)}_{\gamma(k^2)} T = 0 \tag{1.3.22}$$

при различных m.

1.4 Исследование устойчивости обыкновенного дифференциального уравнения относительно $T(t)$

Напомним, что в данном пункте исследуется уравнение (1.3.22)

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\tau^n}{n!} T^{(n+1)} + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2k^2\right)}_{\gamma(k^2)} T = 0$$

Выпишем характеристическое уравнение:

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\tau^n}{n!} \lambda^{n+1} + \gamma(k^2) = 0$$

Согласно общей теории, для алгебраического уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a \neq 0 \tag{1.4.1}$$

выполнена

Т е о р е м а Р а у с а - Г у р в и ц а. Число корней с положительной частью действительного алгебраического уравнения (1.4.1) равно числу перемен знака в любой из последовательностей

$$\Delta_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \tag{1.4.2}$$

или

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_1\Delta_2, \Delta_2\Delta_3, \ldots, \Delta_{n-2}\Delta_{n-1}, a_n, \tag{1.4.3}$$

где

$$\Delta_0 = a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{pmatrix}, \ldots$$

К р и т е р и й   Р а у с а - Г у р в и ц а. Для того, чтобы все корни действительного уравнения (1.4.1) имели отрицательные действительные части необходимо и достачно, чтобы выполнялись неравенства:

$$\Delta_0 > 0, \Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$$

Отметим, что согласно построению, можем считать $\gamma(k^2) \sim k^2$ неограниченным, а $\tau > 0$ фиксированным.

Таким образом, задача об устойчивости решений дифференциального уравнения относительно $T(t)$ сводится к нахождению определителей матриц Гурвица для различных m.

1.5 Программное вычисление определителей матрицы Гурвица

В настоящей работе была реализована программа для символьного вычисления определителей матрицы Гурвица для уравнения (1.3.22):

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\tau^n}{n!} T^{(n+1)} + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2k^2\right)}_{\gamma(k^2)} T = 0$$

Ниже представлены результаты работы программы для различных порядков приближения $m = 1, \ldots, 7$:

при $m = 1$: $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_1 = \gamma > 0$

при $m = 2$: $\Delta_1 = \tau$, $\Delta_2 = \tau(1 - 0.5\gamma\tau) < 0$, $\Delta_3 = \gamma\tau(1 - 0.5\gamma\tau) < 0$

при $m = 3$: $\Delta_1 = 0.5\tau^2$, $\Delta_2 = 0.3334\tau^3$, $\Delta_3 = \tau^3(0.3334 - 0.25\gamma\tau) < 0$, $\Delta_4 = \gamma\tau^3(0.3334 - 0.25\gamma\tau) < 0$

при $m = 4$: $\Delta_1 = 0.167\tau^3$, $\Delta_2 = 0.041\tau^5$, $\Delta_3 = \tau^6(0.007\gamma\tau + 0.014)$, $\Delta_4 = \tau^6\left(-0.0017\gamma^2\tau^2 - 0.007\gamma\tau + 0.014\right) < 0$,
$\Delta_5 = \gamma\tau^6\left(-0.0017\gamma^2\tau^2 - 0.0071\gamma\tau + 0.0139\right)$

при $m = 5$: $\Delta_1 = 0.042\tau^4$, $\Delta_2 = 0.003\tau^7$, $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = \tau^{10}(0.0001\gamma\tau - 0.0002)$, $\Delta_5 = \tau^{10}\left(-0.0001\gamma^2\tau^2 + 0.0002\gamma\tau - 0.0002\right) < 0, \ldots$

при $m = 6$: $\Delta_1 = 0.0083\tau^5$, $\Delta_2 = 0.0001\tau^9$, $\Delta_3 = -3.858^{-6}\tau^{12} < 0, \ldots$

при $m = 7$: $\Delta_1 = 0.0014\tau^6$, $\Delta_2 = 3.307^{-6}\tau^{11}$, $\Delta_3 = -4.593^{-8}\tau^{15} < 0, \ldots$

Построим график Δ_3 для всех m, в которых в выражение для него не входит $\gamma(k^2)$:

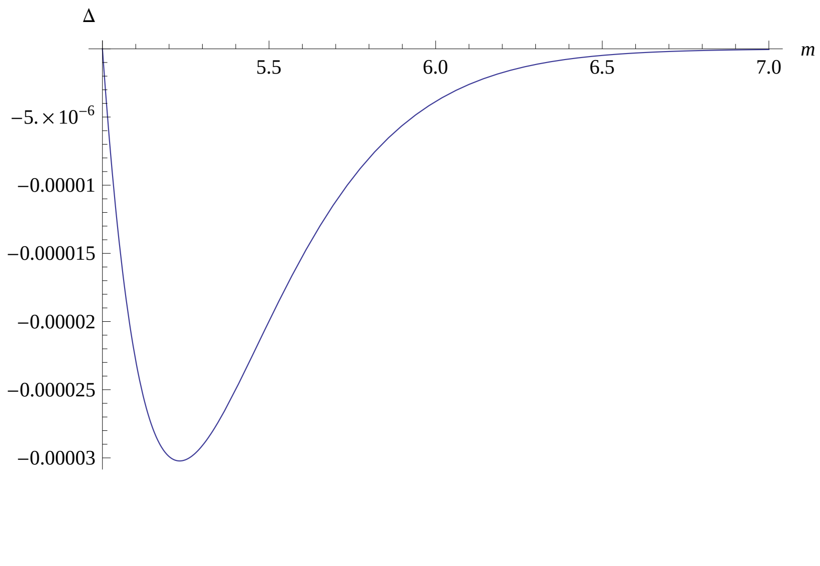

Рис. 1.5.1: График для Δ_3 при $5 \leq m \leq 7$

Таким образом, можно сделать вывод, что для любого m, начиная с 6, хотя бы один из определителей матрицы Гурвица для (1.3.22) отрицателен. Так как, $T_0 = a_0 = \dfrac{\tau^m}{m!} > 0$ для $\tau > 0$. В аналитической части работы данный факт будет аналитически доказан, а также будет доказана теорема о неустойчивости всех приближений (1.3.22) кроме первого.

2 Аналитическое исследование поставленной задачи

2.1 Теорема о неустойчисвости приближений старших порядков

Напомним, что в настоящей работе исследуется задача

$$\begin{cases} \rho_t(\bar{x},t) + div\bar{J}(\bar{x},t) = f(\bar{x},t), \\ \bar{J}(\bar{x},t+\tau) = -a^2\nabla\rho(\bar{x},t) + \bar{V}(\bar{x},t)\rho(\bar{x},t) \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Для нее в условиях

1. одномерной задачи,
2. $\rho(x,t) = e^{\frac{V}{2a^2}x}u(x,t)$,
3. $\sum\limits_{n=0}^{m} \dfrac{\partial^n f}{\partial t^n}\dfrac{\tau^n}{n!} = g(x,t) \equiv 0 \Leftarrow f(x,t) \equiv 0$,
4. $V = const$

были построены приближения

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^{n+1}}\frac{\tau^n}{n!} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{V^2}{4a^2}u = 0, \tag{2.1.2}$$

решения которых устойчивы при устойчивости решений обыкновенного дифференциального уравнения

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\tau^n}{n!}T^{(n+1)} + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2k^2\right)}_{\gamma(k^2)}T = 0 \tag{2.1.3}$$

и неустойчивы в противном случае.

При анализе результатов моделирования было выдвинуто предположение о неустойчивости всех приближений, начиная с $m = 6$.

Теорема о неустойчивости приближений старших порядков. Приближения (2.1.2) задачи (2.1) всех порядков кроме $m = 1$ неустойчивы.

Для доказательства теоремы сначала докажем следующее утверждение:

Утверждение. $\Delta_3 < 0$ при $m \geq 6$.

Выпишем общий вид определителя матрицы Гурвица при $k = 3$:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} & \frac{\tau^m}{m!} & 0 \\ \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} & \frac{\tau^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \\ \frac{\tau^{m-5}}{(m-5)!} & \frac{\tau^{m-4}}{(m-4)!} & \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} \end{vmatrix} = \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \begin{vmatrix} \frac{\tau^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \\ \frac{\tau^{m-4}}{(m-4)!} & \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} \end{vmatrix} - \frac{\tau^m}{m!} \begin{vmatrix} \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} & \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \\ \frac{\tau^{m-5}}{(m-5)!} & \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\tau^{m-2}}{(m-2)!} \frac{\tau^{m-4}}{(m-4)!} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\tau}{m-1} \\ 1 & \frac{\tau}{m-3} \end{vmatrix} - \frac{\tau^m}{m!} \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} \frac{\tau^{m-5}}{(m-5)!} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\tau^2}{(m-2)(m-1)} \\ 1 & \frac{\tau^2}{(m-4)(m-3)} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \frac{\tau^{3m-7}}{(m-1)!(m-2)!(m-4)!} \left(\frac{\tau}{m-3} - \frac{\tau}{m-1} \right) - \frac{\tau^{3m-8}}{m!(m-3)!(m-5)!} \left(\frac{\tau^2}{(m-4)(m-3)} - \frac{\tau^2}{(m-2)(m-1)} \right)$$

$$\Delta_3 = \tau^{3m-6} \left(\frac{(m-1)-(m-3)}{(m-1)!(m-2)!(m-4)!(m-3)(m-1))} - \frac{(m-2)(m-1)-(m-4)(m-3)}{m!(m-3)!(m-5)!(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)} \right)$$

$$\Delta_3 = \frac{\tau^{3m-6}}{m!(m-1)!(m-3)!}(2m - (-3m + 2 + 7m - 12)) =$$
$$= \frac{\tau^{3m-6}}{m!(m-1)!(m-3)!}(10 - 2m) < 0$$

при $m \geq 6$.

Таким образом, осталось доказать неустойчивость нулевого решения 2.1.3 при $1 \leq m \leq 5$ в предположениях достаточно больших значений $\gamma(k^2)$ и ограниченности τ.

при $m = 1$: $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_1 = \gamma > 0$

при $m = 2$: $\Delta_1 = \tau > 0$, $\Delta_2 = \tau(1 - \frac{1}{2}\gamma\tau) < 0$, $\Delta_3 = \gamma\tau(1 - \frac{1}{2}\gamma\tau) < 0$

при $m = 3$: $\Delta_1 = \frac{1}{2}\tau^2 > 0$, $\Delta_2 = \frac{1}{3}\tau^3 > 0$, $\Delta_3 = \tau^3(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\gamma\tau) < 0$, $\Delta_4 = \gamma\tau^3(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\gamma\tau) < 0$

при $m = 4$: $\Delta_1 = \frac{1}{6}\tau^3 > 0$, $\Delta_2 = \frac{1}{24}\tau^5 > 0$, $\Delta_3 = \frac{1}{144}\tau^6(2 + \gamma\tau) > 0$, $\Delta_4 = \frac{1}{576}\tau^6(8 - 4\gamma\tau - \gamma^2\tau^2) < 0$, $\Delta_5 = \frac{1}{576}\gamma\tau^6(8 - 4\gamma\tau - \gamma^2\tau^2 < 0)$

при $m = 5$: $\Delta_1 = \frac{1}{24}\tau^4 > 0$, $\Delta_2 = \frac{1}{360}\tau^7 > 0$, $\Delta_3 = 0$,
$\Delta_4 = \frac{1}{14400}\tau^{10}(\frac{8}{3} + \frac{5}{3}\gamma\tau) > 0$, $\Delta_5 = \frac{1}{14400}\tau^{10}(-\frac{8}{3} + \frac{10}{3}\gamma\tau - \frac{25}{24}\gamma^2\tau^2) < 0$, $\Delta_6 = \frac{1}{14400}\gamma\tau^{10}(-\frac{8}{3} + \frac{10}{3}\gamma\tau - \frac{25}{24}\gamma^2\tau^2) < 0$

Теорема доказана.

Таким образом, для всех приближений кроме первого нарушается условие непрерывной зависимости решений он начальных данных в силу их неустойчивости, т.е сами приближения – некорректно поставленные по Адамару задачи.

2.2 Устойчивость решений диффереционального уравненения с запаздыванием по времени

Напомним, что предварительно было получен общий вид уравнения с запаздыванием 1.2.7 для исходной задачи:

$$\rho_t(\bar{x},t) = -a^2\Delta\rho(\bar{x},t-\tau)+\rho(\bar{x},t-\tau)div\bar{V}(\bar{x},t-\tau)+(\bar{V}(\bar{x},t-\tau),\nabla\rho(\bar{x},t-\tau))$$

В тех же условиях, для которых были получены приближения для него (они перечислены, например, в начале пункта [**??**]), можно вывести следующее:

$$\rho_t(x,t) - a^2\rho_{xx}(x,t-\tau) + V\rho_x(x,t-\tau) = 0 \tag{2.2.1}$$

Так как подобный вывод уже был произведен в пункте [1.3], опустим подробности и получим:

$$u_t(x,t) - a^2u_{xx}(x,t-\tau) + \frac{V^2}{4a^2}u(x,t-\tau) = 0 \tag{2.2.2}$$

Для 2.2.2 применим метод Фурье разделения переменных

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X(x)T(t) \tag{2.2.3}$$

Отметим, что, вообще говоря, метод Фурье непременим к любому дифференциальному уравнению с запаздыванием (даже линейному), но в данном случае с его помощью можно получить такие результаты:

$$X(x)T'(t) + \frac{V^2}{4a^2}X(x)T(t-\tau) = a^2X''(x)T(t-\tau), \quad k = 1, \dots, \infty \quad (2.2.4)$$

$$\frac{T'(t) + \frac{V^2}{4a^2}T(t-\tau)}{a^2T(t-\tau)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = -k^2 \quad (2.2.5)$$

Наконец, получим:

$$\begin{cases} T'(t) + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2k^2\right)}_{\gamma(k^2)} T(t-\tau) = 0 \\ \\ X'' + k^2X = 0 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Поставим задачу Коши с постоянной начальной функцией для уравнения относительно $T(t)$:

$$\begin{cases} T_k'(t) + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2k^2\right)}_{\gamma(k^2)} T_k(t-\tau) = 0, \quad t > 0, \\ \\ T_k(t) = T_k^0, \quad -\tau \le t \le 0. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Отметим, что если в нем совершить формальный временной сдвиг на τ и применить уже используемое в настоящей работе разложение

$$T(t+\tau) = T(t) + \tau T'(t) + \dots + \frac{\tau^n}{n!}T^{(n)}(t) + \dots, \quad (2.2.8)$$

то получим исходные приближения (2.1.2), для которых уже был исследован вопрос устойчивости.

Для решений уравнения из задачи (2.2.7) справедливо характеристическое уравнение

$$\lambda_k + \gamma(k^2)e^{-\lambda_k\tau} = 0 \quad (2.2.9)$$

Устойчивость (2.1.2) зависит от знаков вещественных частей $Re(\lambda_k)$.

2.3 Достаточное условие неположительности знаков вещественных частей корней характерестического уравнения

Напомним, что задача свелась к поиску параметров таких, что все вещественные части корней характерического уравнения

$$\phi(z) = z + \gamma e^{-z\tau} \tag{2.3.1}$$

отрицательны.

Приведем вспомогательную теорему:

Теорема Руше Если комплекснозначные функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в односвязной области G, а на её границе δG выполняется неравенство $|g(z)| < |f(z)|$, то $f(z)$ и $(f+g)(z)$ имеют одинаковое число нулей с учетом кратности.

Данную теорему используем в доказательстве следующего факта:

Достаточное условие отсутствия корней с положительными вещественными частями характерестического уравнения $\phi(z) = z + \gamma e^{-z\tau}$.

$$\phi(z) = z + \gamma e^{-z\tau}$$

не имеет корней положительными вещественными частями при $\gamma\tau < 1$.

Для доказательства этого факта представим $\phi(z)$ в следующем виде:

$$\phi(z) = \underbrace{z + \gamma}_{H_1(z)} + \underbrace{z\gamma\tau \left(\frac{e^{-z\tau} - 1}{z\tau} \right)}_{H_2(z)} = 0 \tag{2.3.2}$$

Рассмотрим функции $H_1(z)$ и $H_2(z)$ в области $D = z|Re(z) \geq 0$. Её границей будет ось чисто мнимых чисел $\delta D = z|Re(z) = 0$.

Отметим, что $H_1(z) > 0$ в открытой области $D - \delta D$ при любом z.

Представим $z = x + iy$ и рассмотрим $H_1(z)$ и $H_2(z)$ в области δD (т.е. $z = iy$):

$$|H_1(iy)| = \sqrt{\gamma^2 + y^2} > |y| = |z| \tag{2.3.3}$$

Представим $H_2(z)$:

$$H_2(z) = z\gamma\tau \underbrace{\left(\frac{e^{-z\tau} - 1}{z\tau}\right)}_{h(z)} \tag{2.3.4}$$

$$h(iy) = \frac{cos(y\tau) - isin(y\tau) - 1}{iy\tau} = -\frac{sin(y\tau)}{y\tau} - i\frac{cos(y\tau) - 1}{y\tau} \tag{2.3.5}$$

Обозначим $\alpha = y\tau$

$$|h(iy)|^2 = \frac{sin^2(\alpha)}{\alpha^2} + \frac{(cos(\alpha) - 1)^2}{\alpha^2} = \frac{2 - 2cos(\alpha)}{\alpha^2} \le 1 \tag{2.3.6}$$

Для наглядности приведем график $|h(iy)|^2$:

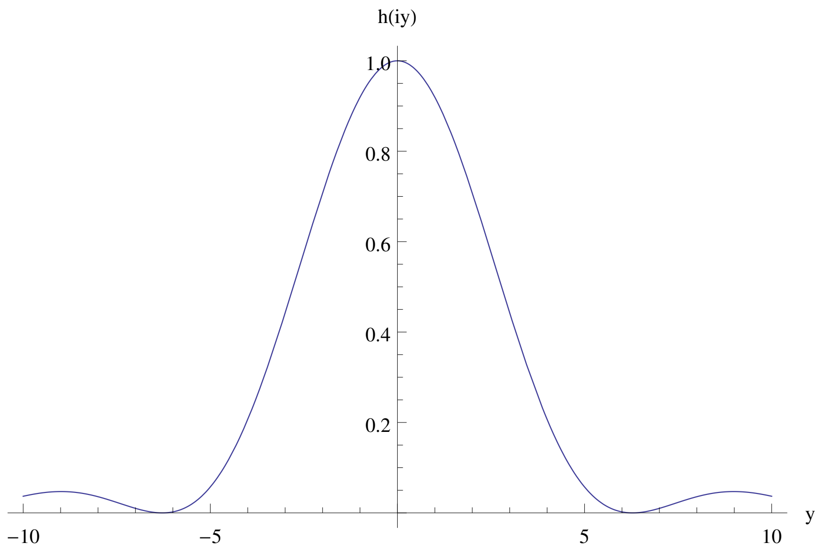

Рис. 2.3.1: График для $|h(iy)|^2$ при $-10 \le y \le 10$

Таким образом,

$$|H_2(iy)| \leq |y|\gamma\tau = |z|\gamma\tau \tag{2.3.7}$$

Объединяя (2.3.3) и (2.3.7) и потребовав $\gamma\tau < 1$, получим

$$|H_2(z)| < |z| < |H_1(z)| \tag{2.3.8}$$

на границе области D. Таким образом, выполнены все условия теоремы Руше и у $\phi(z)$ нет нулей в D.

Таким образом, $\gamma\tau < 1$ – достаточное условие устойчивости решений дифференциального уравнения с запаздыванием.

$$T'_k(t) + \gamma(k^2)T_k(t-\tau) = 0 \tag{2.3.9}$$

Отметим, что сколь угодно бы малым не было $\tau > 0$ всегда можно найти такой номер k, начиная с которого не выполняется достаточное условие устойчивости $\gamma\tau < 1$.

3 Результаты проведённого анализа

Цель данного раздела настоящей работы – сравнение решений обыкновенного дифференциального уравнения с запаздыванием

$$T'_k(t) - \gamma(k^2)T_k(t-\tau) = 0 \tag{3.0.1}$$

и его приближений обыкновенными дифференциальными уравнениями уже без запаздывания:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} T_k^{(n)}(t) + \gamma(k^2)T_k(t) = 0 \tag{3.0.2}$$

В предыдущих главах было доказано, что достаточным условием устойчивости (3.0.1) является соотношение $\gamma\tau < 1$. Приближения (3.0.2) же, вообще говоря, всегда неустойчивы при порядках $m \geq 6$ и неустойчивы в предположениях фиксированного малого τ для порядков $m \geq 2$. Приближение порядка $m = 1$ всегда устойчиво.

В рамках работы была написана программа для построения графиков решений задач Коши для функций (3.0.1) и (3.0.2) в зависимости от параметров

1. τ – величины запаздывания,
2. k – порядка члена ряда Фурье,
3. m – порядка приближения.

Начальной функцией предполагается единичная функция на $[-\tau, 0]$. Скорости a и v для простоты примем также единичными.

Будем обозначать как T решение (3.0.1) и как Tm – решение 3.0.2.

3.1 Графики решений при $\tau = 0.1$, $k = 1$

.

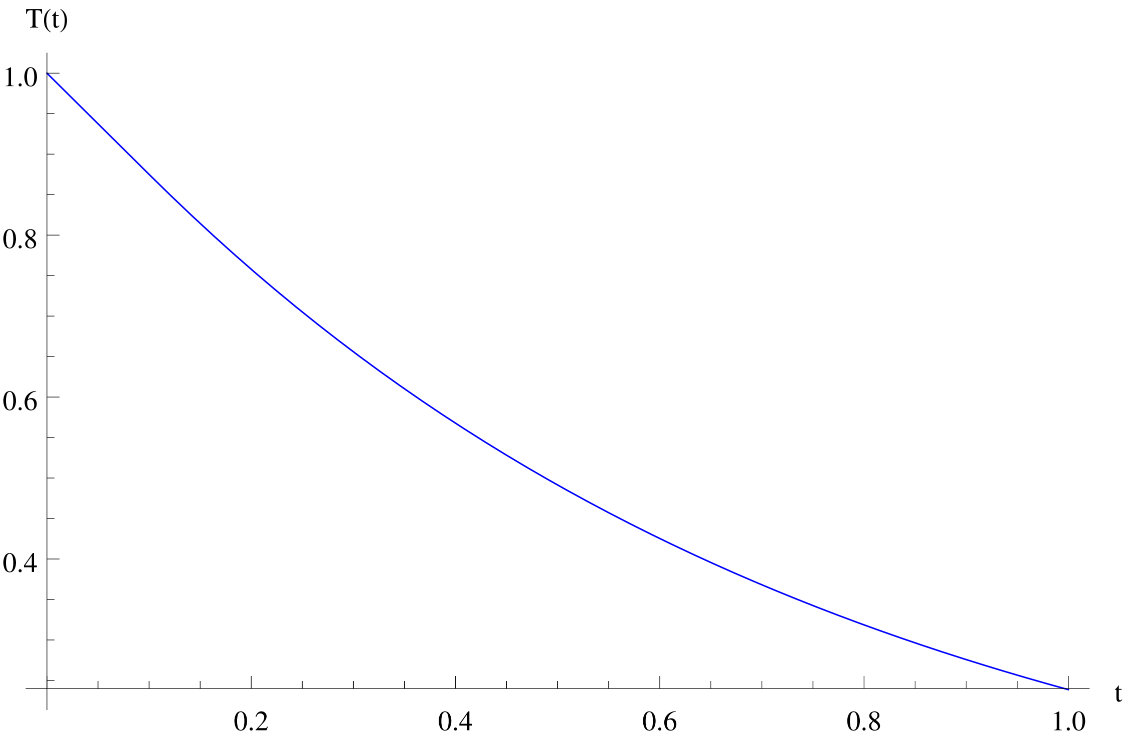

Рис. 3.1.1: График для $T(t)$ при $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 1$

3.1.1 Приближение порядка $m = 1$

.

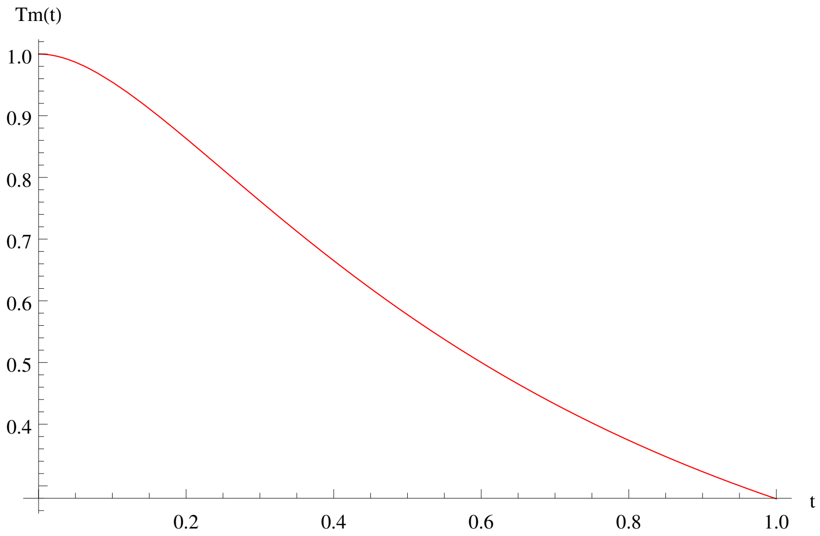

Рис. 3.1.2: График для $Tm(t)$ при $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 1$

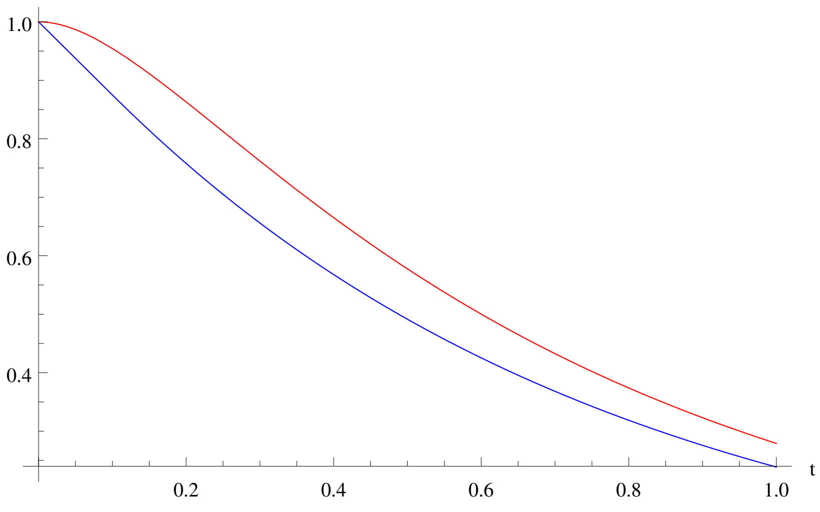

Рис. 3.1.3: Общий график при $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 1$

3.1.2 Приближение порядка $m = 2$

.

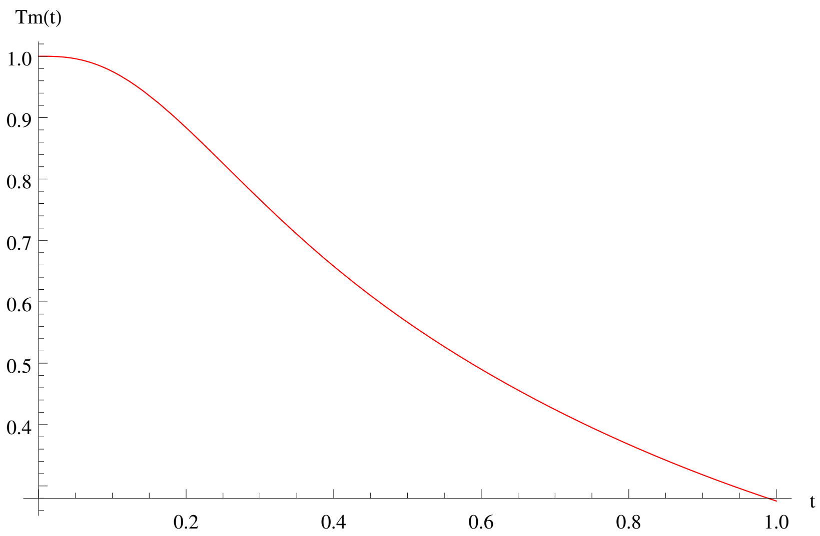

Рис. 3.1.4: График для $Tm(t)$ при $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 2$

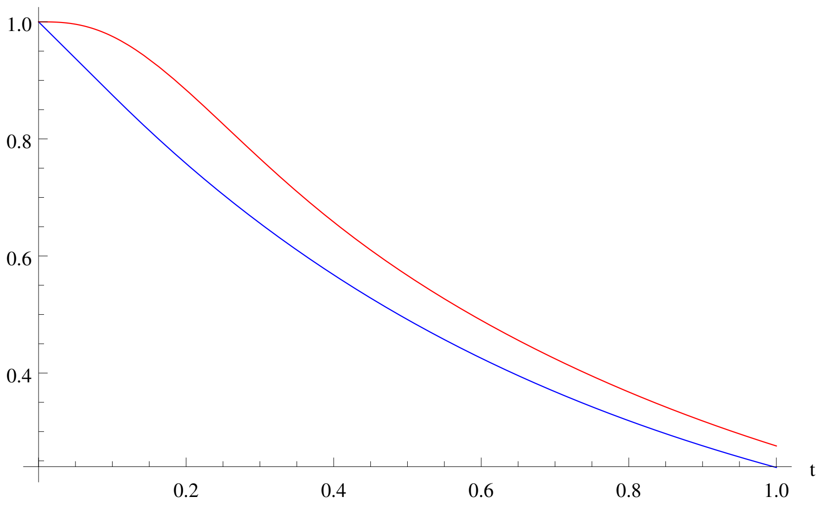

Рис. 3.1.5: Общий график при $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 2$

3.1.3 Приближение порядка $m = 3$

.

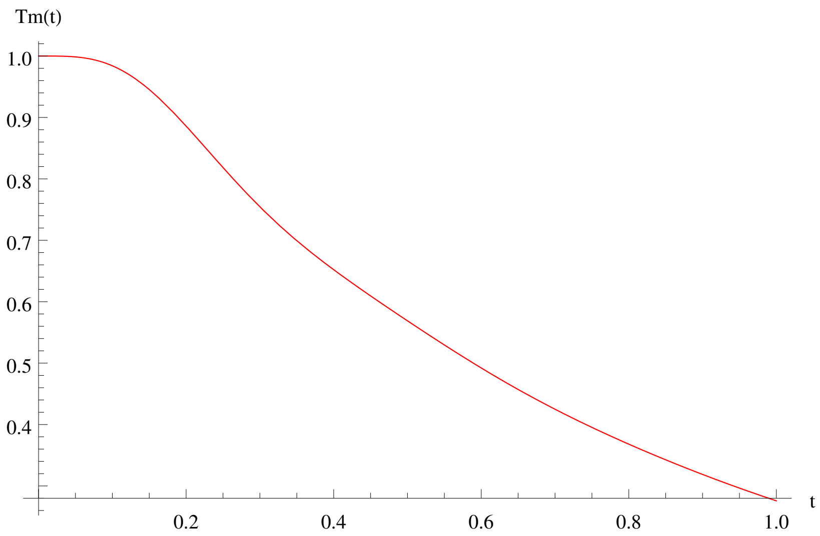

Рис. 3.1.6: График для $Tm(t)$ при $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 3$

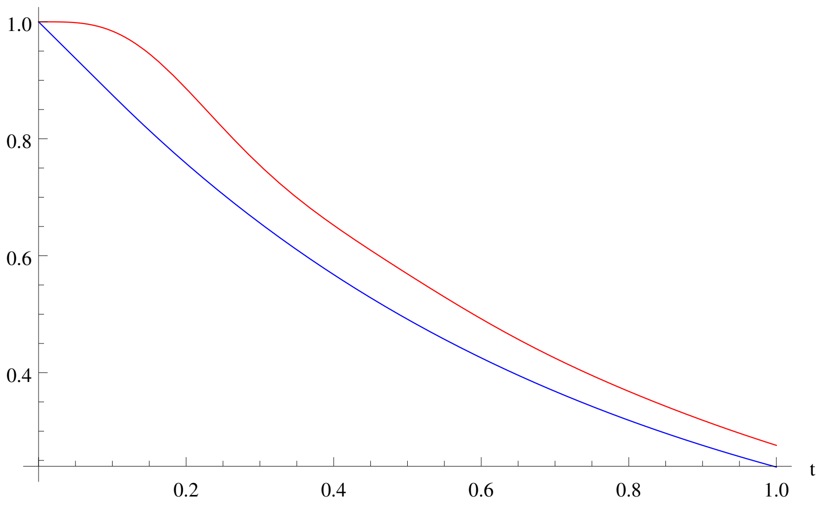

Рис. 3.1.7: Общий график при $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 3$

3.1.4 Приближение порядка $m = 4$

.

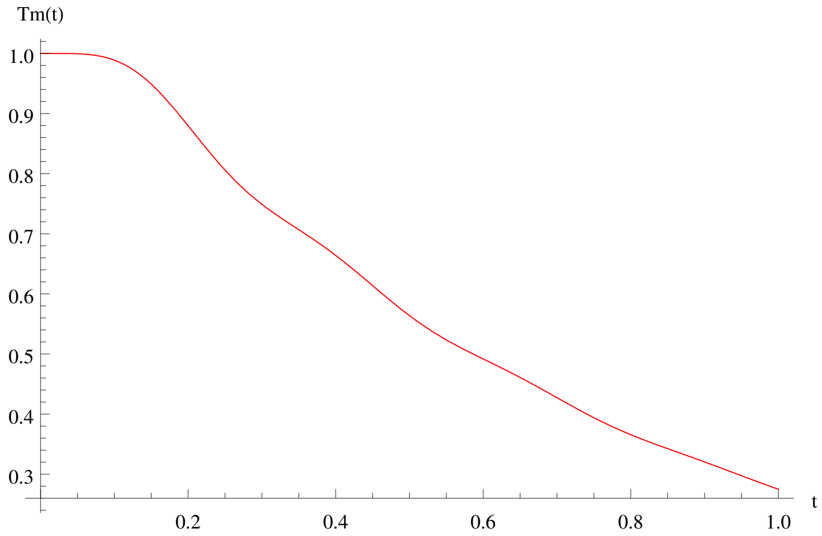

Рис. 3.1.8: График для $Tm(t)$ при $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 4$

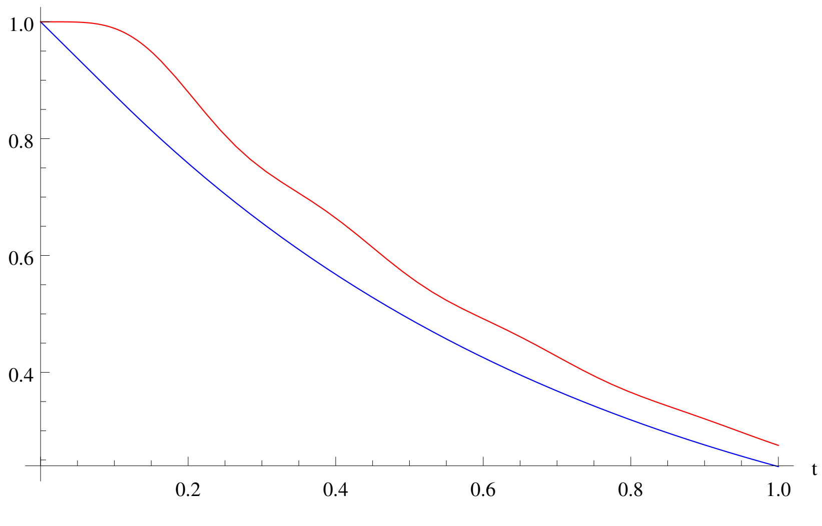

Рис. 3.1.9: Общий график при $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 4$

3.1.5 Приближение порядка $m = 5$

.

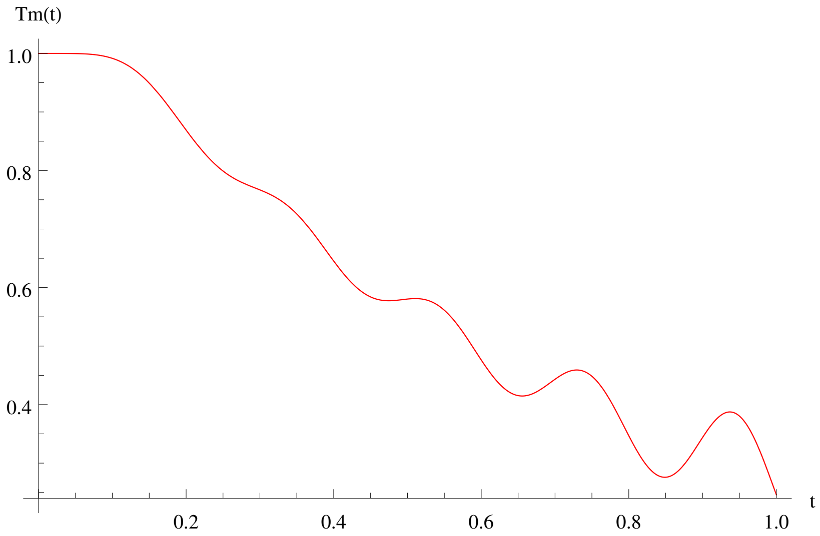

Рис. 3.1.10: График для $Tm(t)$ при $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 5$

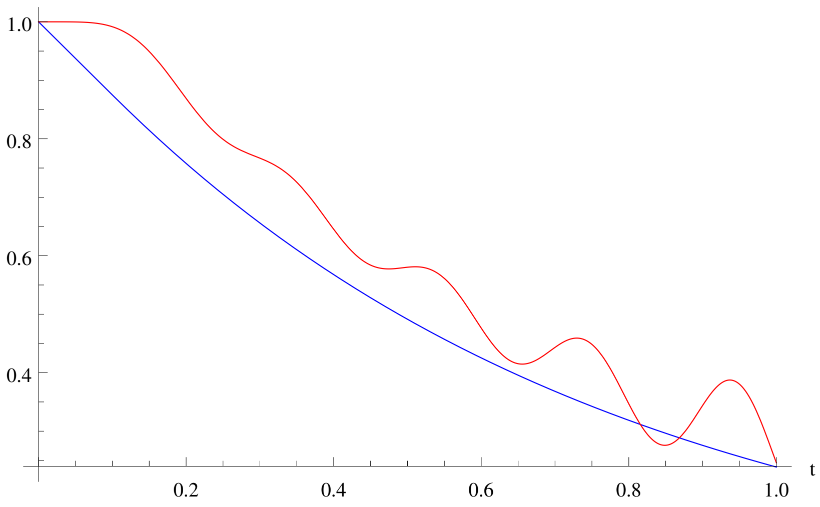

Рис. 3.1.11: Общий график при $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 5$

3.1.6 Приближение порядка $m = 6$

.

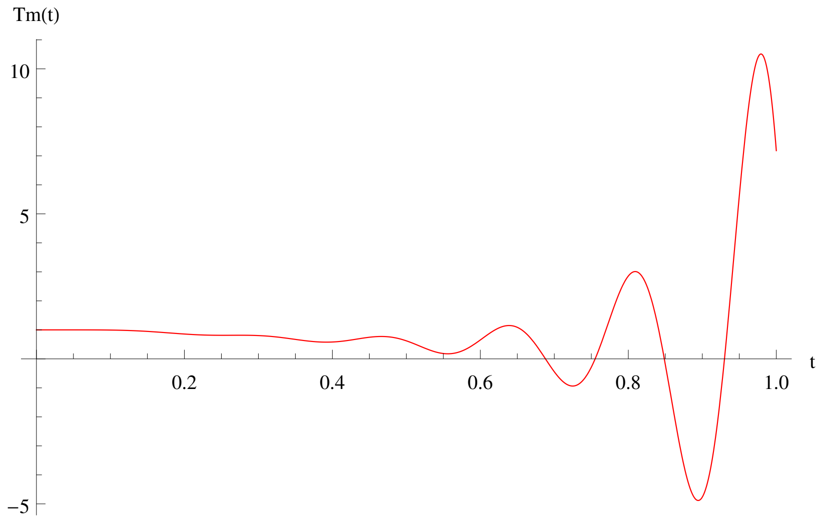

Рис. 3.1.12: График для $Tm(t)$ при $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 6$

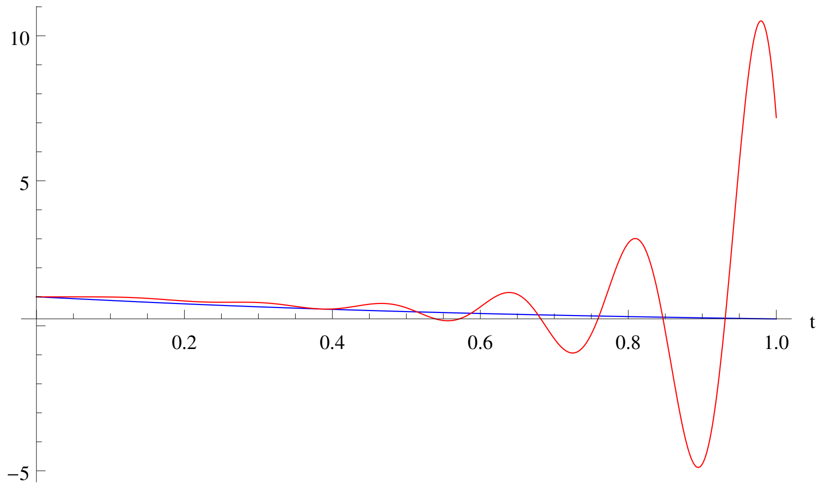

Рис. 3.1.13: Общий график при $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 6$

4 Приложение математического моделирования для исследования экономических процессов

В экономической части настоящей работы будет рассмотрена **модель капитализации Калецкого (Kalecki)**. Данная модель – одно из первых распространенных приложений дифференциальных уравнений с запаздыванием. Впервые описание данной модели самим Калецким было представлено в работе [17].

Заключение

Список литературы

[1] Васильева А.Б., О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры, Матем. сб., 31(73):3, 1952, 587–644.

[2] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений, М.: Высшая школа, 1990.

[3] Ерофеенко В.Т., Козловская И.С., Уравнения с частными производными и математические модели в экономике, М.: Едиториал УРСС, 2004.

[4] Зверкин А.М., Каменский Г.А., Норкин С.Б., Эльсгольц Л.Э., Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, УМН, 17:2(104), 1962, 77–164.

[5] Красовский Н.Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, 1959.

[6] Мышкис А.Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, Гостехиздат, М.–Л., 1951.

[7] Мышкис А.Д., Эльсгольц Л.Э., Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, УМН, 22:2(134), 1967, 21–57.

[8] Пинни Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., ИЛ, 1961.

[9] Тихонов А.Н., О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, Мат.сб., 2 2(64), 1948, 193—204.

[10] Тихонов А.Н., О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры, Мат.сб., 2 7(69), 1950, 147—156.

[11] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, М., Наука, 1971.

[12] Филиппов А. Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Изд. 5-е, М.: Наука, 1979.

[13] Bellman R., Danskin J.M, Glicksberg I., A bibliography of the theory and application of differential-difference, renewal and related functional equations, The Rand Corporation RM-688, 1952.

[14] Bellman R., Danskin J.M, The stability theory of differential-difference equations, Proc. Sympos. non-linear Circuit Anal, New York , 1953, 107-123.

[15] Friedman A. Hu B. The Stefan problem for a hyperbolic heat equation, Math. Anal. and Appl., V. 138, 1, 1989, 249–279.

[16] Hahn W., BerichtuberDifferential-Differenzengleichungen mit festen und Veranderlichen Spannen, Jahresber. Dtsch. Math.Ver.57,2, 1954, 55—84.

[17] Kalecki M., An Essay on the Theory of the Business Cycle (Próba teorii koniunktury), Instytut Badania Koniunktur Gospodarczych i Cen, Warsaw, 1933

[18] Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D., Introduction to the theory and Applications of Functional Differential Equations, Kluver, Dordrecht, 1999.

[19] Mangano S., Mathematica Cookbook, O'Reilly Media, 2010.

[20] Polyanin A.D., Zhurov A.I., A new method for constructing exact solutions to nonlinear delay partial differential equations, arXiv:1304.5473, 2013

[21] Wu J., Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New-York, 1996