Содержание

Введение

Данный дипломный проект посвящен изучению математических моделей теплопроводности с отклоняющимся аргументом.

Впервые теорию дифференциальных уравнений сначала с запаздывающим (а потом и с отклоняющимся) аргументом рассмотрел в А.Д.Мышкис в работе [6]). Другой пионерской работой в исследовании этого вопроса стала [17].

В последствии дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом (также иногда называемые функционально-дифференциальными) нашли многочисленные приложения в различных вопросах автоматики, в теории колебаний, в ракетной технике, во многих вопросах физики, в некоторых задачах экономических, биологических и медицинских наук. Важность и разнообразие приложений резко повысили интерес к теории этих уравнений. В 60-х годах XX века появилось множество работ по данной тематике: в качестве примеров можно привести монографии Белммана, Данскина и Гликсберга [13], Беллмана и Данскина [14], Пинни [8], Красовского [5] и др.

Теория дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом до сих пор находится в стадии становления и интерес к ней по-прежнему не угас. Значимыми работами современности по данной тематике стали [22] и [19].

В данной работе будет исследована устойчивость уравнения локального закона сохранения (Лиувилля) с малым запаздыванием τ:

$$\begin{cases} \rho_t(x,t) + div\bar{J}(x,t) = f(x,t), \\ \bar{J}(x,t+\tau) = -a^2\nabla\rho(x,t) + \bar{V}(x,t)\rho(x,t) \end{cases}$$

Цель настоящего исследования – оценить, как небольшое отклонение по времени влияет на решения и их устойчивость для уравнений теплопроводности с отклоняющимся аргументом, а также сравнить моделей с отклонением и без. Также в данной работе будет приведена необходимая теория и представлены развитые численные методы решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Важным фактом является наличие именно малого запаздывания: в работе будет представлен переход от исходной модели к системе обыкновнных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Такие уравнения были рассмотрены в статьях Тихонова [9, 10], Васильевой [1], в книге Васильевой и Бутузова [2].

В экономической части работы будет **модель капитализации Калецки (Kalecki)**[18].

1 Изучение поставленной задачи с помощью компьютерного моделирования

1.1 Математическая постановка исходной задачи

Запишем **общее уравнение непрерывности** в дифференциальной форме:

$$\rho_t(\bar{x},t) + div\bar{J}(\bar{x},t) = f(\bar{x},t) \tag{1.1.1}$$

Оно представляет собой сильную (локальную) форму закона сохранения и выражает связь между потоком $\bar{J}(\bar{x},t)$ и концетрацией (температурой) $\rho(\bar{x},t)$.

Чтобы корректно поставить задачу решения (1.1.1) необходимо дополнить его ещё одним условием – в данной работе оно представлено **законом диффузии с конвекцией** с отклоняющимся аргументом:

$$\bar{J}(\bar{x},t+\tau) = -a^2\nabla\rho(\bar{x},t) + \bar{V}(\bar{x},t)\rho(\bar{x},t) \tag{1.1.2}$$

В дальнейшем уравнение (1.1.1) будет классифицировано с точки зрения теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Предварительно приведем необходимую для исследования информацию.

1.2 Некоторые факты из теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

1.2.1 Базовые понятия и определения

Дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом называются дифференциальные уравнения, в которые неизвестная функция и её проиводные входят, вообще говоря, при различных значениях аргумента.

Хотя уравнения с отклоняющимся аргументом по виду очень похожи на обыкновенные дифференциальные уравнения, факт отклонения аргумента усложняет их анализ.

Рассмотрим простейший пример

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{1.2.1}$$

где τ – положительная константа.

Для начала отметим, что для решения задачи Коши уже недостаточно задать одно начальное условие $x(t_0) = x_0$, ведь необходимо знать исходные значения на всем отрезке $[t_0-\tau, t_0]$, т.е задать функцию $x_0(t)$, определенную на отрезке $[t_0 - \tau, t_0]$ – **начальную функцию** (в зарубежной литературе **history function** или **initial function**).

1.2.2 Простейшая модель с запаздыванием

Для примера рассмотрим две задачи Коши: одну для обыкновенного дифференциального уравнения, другую – для уравнения с отклонением по аргументу:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \quad t > 0 \\ \qquad\qquad x(0) = 1 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

$$\begin{cases} y'(t) = y(t-1), \quad t > 0 \\ y(t) = 1, \quad -1 \le t \le 0 \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Методы решения подобных уравнений с запаздыванием будут рассмотрены в работе позже, а пока построим графики этих решений:

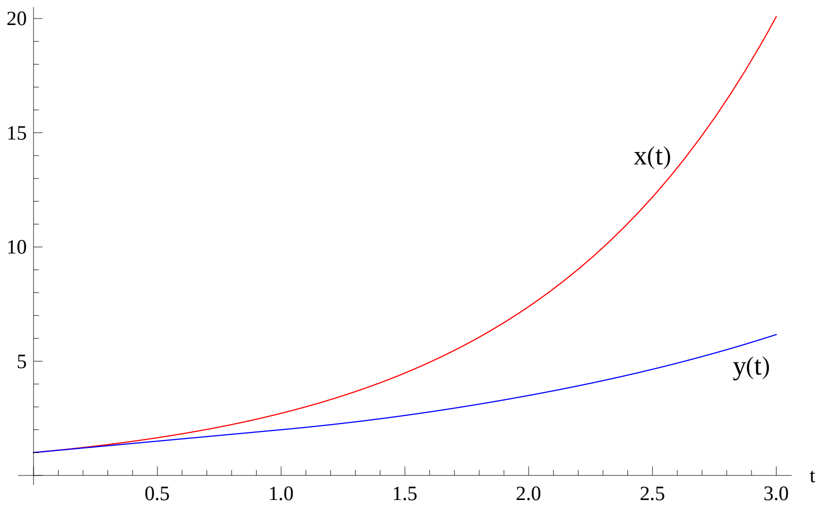

Рис. 1.2.1: Сравнение моделей с запаздыванием и без

Наглядно видно, что решения различны. Позже будет приведено аналитическое решение задачи (1.2.3) и доказано, что $y(t)$ всегда возрастает медленнее экспоненциального решения, т.е. $x(t)$.

Также решение зависит от начальной функции: для примера рассмотрим такую задачу:

$$\begin{cases} y_h'(t) = y_h(t-1), \quad t > 0 \\ y_h(t) = 1 + t, \quad -1 \leq t \leq 0 \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Отметим, что $y_h(0) = y(0) = 1$.

Построим решения на одном графике:

Таким образом, начальная функция определяет характер решения задачи.

1.2.3 Классификация моделей с отклоняющимся аргументом

Рассотрим обобщенное уранвнения n-ого порядка с l отклонениями аргумента (вообще говоря, отклонение может быть непостоянным и зависеть, например, от значений самого аргумента).

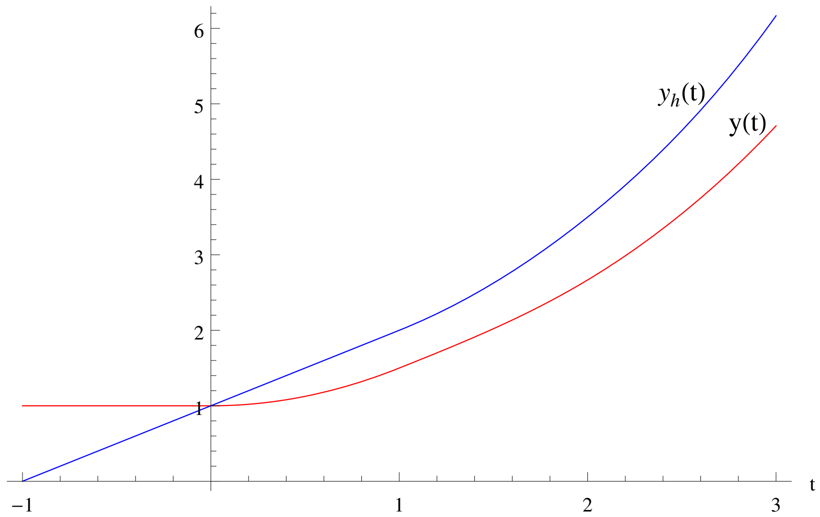

Рис. 1.2.2: Сравнение моделей с различными начальными функциями

$$\begin{gathered} x^{(m_0)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(m_0-1)}(t), x(t-\tau_1(t)), \dots, \\ \dots, x^{(m_1)}(t-\tau_1(t)), \dots, x(t-\tau_l(t)), \dots, x^{(m_l)}(t-\tau_l(t))) \end{gathered} \tag{1.2.5}$$

Здесь $\tau_i(t) \geq 0$.

Каменским Г.А. была введена естественная классификация (1.2.5). Обозначим $\lambda = m_0 - \max\limits_{1 \leq i \leq l} m_i$.

1. Если $\lambda > 0$, то такое уравнения называется уравнением с **запаздывающим аргументом**;
2. Если $\lambda = 0$, – уравнением **нейтрального типа**;
3. Если $\lambda < 0$, – уравнением **опережающего типа**.

Вернемся к исходной задаче (1.1.1, 1.1.2):

$$\begin{cases} \rho_t(\bar{x}, t) + div\bar{J}(\bar{x}, t) = f(\bar{x}, t), \\ \bar{J}(\bar{x}, t+\tau) = -a^2\nabla\rho(\bar{x}, t) + \bar{V}(\bar{x}, t)\rho(\bar{x}, t) \end{cases} \tag{1.2.6}$$

Объединим в одно уравнение относительно $\rho(x,t)$:

$$\rho_t(\bar{x},t) = -a^2\Delta\rho(\bar{x},t-\tau)+\rho(\bar{x},t-\tau)div\bar{V}(\bar{x},t-\tau)+(\bar{V}(\bar{x},t-\tau),\nabla\rho(\bar{x},t-\tau)) \tag{1.2.7}$$

Отметим, что дивергенция как дифференциальный оператор была применена по пространственным переменным $\bar{x}$. Из этого следует, что в левой части (1.2.7) не содержится производных по t и уравнение классифицируется как уравнение с запаздывающим аргументом при $\tau > 0$ и как опережающего типа при $\tau < 0$.

1.2.4 Метод шагов решения уравнений с отклоняющимся аргументом

Метод шагов – естественный метод решения уравнений с отклоняющимся аргуентом. Рассмотрим простейший пример:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad \tau > 0 \tag{1.2.8}$$

Поставим задачу Коши для него:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), & t > 0, \\ x(t) = x_0(t), & -\tau \le t \le 0 \end{cases} \tag{1.2.9}$$

Тогда на отрезке $[0,\tau]$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_0(t-\tau)), & 0 \le t \le \tau, \\ x(0) = x_0(0) \end{cases} \tag{1.2.10}$$

Отметим, что (1.2.11) – задача Коши уже для обыкновенного дифференциального уравнения. Предположим, что $x_1(t)$ – ее решение. Тогда на отрезке $[\tau, 2\tau]$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_1(t-\tau)), \quad \tau \le t \le 2\tau, \\ \hfill x(\tau) = x_1(\tau) \end{cases} \tag{1.2.11}$$

Продолжая подобные рассуждения, можно найти решение (1.2.9). Отметим, что решать можно как аналитически, так и численно.

К минусам этого метода можно отнести зависимость от величины отклонения и сложность адаптации к общему случаю зависимости запаздывания от аргумента.

В качестве примера можно рассмотреть уже использованную раннее в работе задачу Коши (1.2.3):

$$\begin{cases} y'(t) = y(t-1), \quad t > 0 \\ y(t) = 1, \quad -1 \le t \le 0 \end{cases}$$

Таким образом, на отрезке $[0, 1]$ её решением будет функция

$$y(t) = t + 1, \quad 0 \le t \le 1 \tag{1.2.12}$$

На отрезке $[1, 2]$ соответственно:

$$\begin{cases} y'(t) = (t+1) - 1, \quad 1 \le t \le 2, \\ \hfill y(1) = 1 + 1 = 2 \end{cases} \tag{1.2.13}$$

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{4}, \quad 1 \le t \le 2 \tag{1.2.14}$$

Продолжая подобные рассуждения, можно построить решение на сколь угодно отдаленном по времени от начального момента отрезке.

Заметим, что на каждом из таких отрезков, решения представлены в виде полинома, а значит возрастают не быстрее решения задачи без запаздывания – экспоненциальной функции.

1.2.5 Некоторые сведения о решениях линейных уравнений с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента

Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{l} a_{ij}x^{(i)}(t-\tau_j)=0, \qquad (1.2.15)$$

где $0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_m$.

Будем искать его частные решения в виде

$$x(t)=e^{kt}, \qquad (1.2.16)$$

где k – постоянная.

Подставив (1.2.16) в (1.2.15), получим характеристическое уравнение для k:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{l} a_{ij}k^{i}e^{k\tau j}=0 \qquad (1.2.17)$$

Теория подобных трансцедентных уравнений изучалась ещё в $XVIII$ веке Ламбертом и Эйлером. Известно, что (1.2.17) имеет бесконечное множество корней в комплексном пространстве.

В честь немецкого математика Ламберта была названа функция $W(z)$, определяемая функциональным уравнением

$$z=W(z)e^{W(z)} \qquad (1.2.18)$$

Вообще говоря, $W(z)$ многозначна, но если ограничиться вещественными $z=x\geq-\frac{1}{e}$ и потребовать $W(z)\geq-1$, то получим однозначно определенную функцию, представляющую одну из главных ветвей $W(z)$:

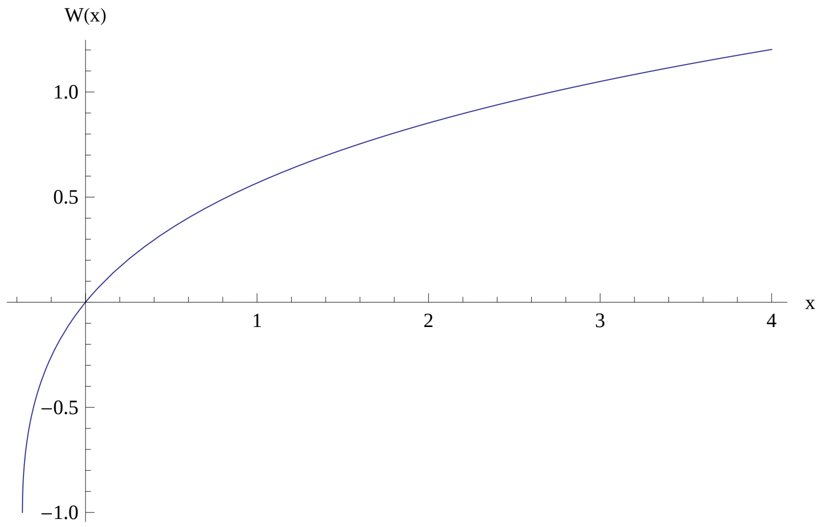

Рис. 1.2.3: График главной ветви $W_0(x)$ решений функции Ламберта

2 Аналитическое исследование поставленной задачи

3 Результаты проведённого анализа

4 Приложение математического моделирования для исследования экономических процессов

В экономической части настоящей работы будет рассмотрена **модель капитализации Калецкого (Kalecki)**. Данная модель – одно из первых распространенных приложений дифференциальных уравнений с запаздыванием. Впервые описание данной модели самим Калецким было представлено в работе [18].

Заключение

Список литературы

[1] Васильева А.Б., О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры, Матем. сб., 31(73):3, 1952, 587–644.

[2] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений, М.: Высшая школа, 1990.

[3] Ерофеенко В.Т., Козловская И.С., Уравнения с частными производными и математические модели в экономике, М.: Едиториал УРСС, 2004.

[4] Зверкин А.М., Каменский Г.А., Норкин С.Б., Эльсгольц Л.Э., Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, УМН, 17:2(104), 1962, 77–164.

[5] Красовский Н.Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, 1959.

[6] Мышкис А.Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, Гостехиздат, М.–Л., 1951.

[7] Мышкис А.Д., Эльсгольц Л.Э., Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, УМН, 22:2(134), 1967, 21–57.

[8] Пинни Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., ИЛ, 1961.

[9] Тихонов А.Н., О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, Мат.сб., 2 2(64), 1948, 193—204.

[10] Тихонов А.Н., О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры, Мат.сб., 2 7(69), 1950, 147—156.

[11] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, М., Наука, 1971.

[12] Филиппов А. Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Изд. 5-е, М.: Наука, 1979.

[13] Bellman R., Danskin J.M, Glicksberg I., A bibliography of the theory and application of differential-difference, renewal and related functional equations, The Rand Corporation RM-688, 1952.

[14] Bellman R., Danskin J.M, The stability theory of differential-difference equations, Proc. Sympos. non-linear Circuit Anal, New York , 1953, 107-123.

[15] Black, Fischer, Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy 81 (3), 1973: 637–654.

[16] Friedman A. Hu B. The Stefan problem for a hyperbolic heat equation, Math. Anal. and Appl., V. 138, 1, 1989, 249–279.

[17] Hahn W., BerichtuberDifferential-Differenzengleichungen mit festen und Veranderlichen Spannen, Jahresber. Dtsch. Math.Ver.57,2, 1954, 55—84.

[18] Kalecki M., An Essay on the Theory of the Business Cycle (Próba teorii koniunktury), Instytut Badania Koniunktur Gospodarczych i Cen (WARSAW), 1933

[19] Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D., Introduction to the theory and Applications of Functional Differential Equations, Kluver, Dordrecht, 1999.

[20] Mangano S., Mathematica Cookbook, O'Reilly Media, 2010.

[21] Polyanin A.D., Zhurov A.I., A new method for constructing exact solutions to nonlinear delay partial differential equations, arXiv:1304.5473, 2013

[22] Wu J., Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New-York, 1996