

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Изучение поставленной задачи с помощью компьютерного моделирования</b>	<b>6</b>
1.1 Математическая постановка исходной задачи . . . . .	6
1.2 Некоторые факты из теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом . . . . .	6
1.2.1 Базовые понятия и определения . . . . .	6
1.2.2 Простейшая модель с запаздыванием . . . . .	7
1.2.3 Классификация моделей с отклоняющимся аргументом	8
1.2.4 Метод шагов решения уравнений с отклоняющимся аргументом . . . . .	10
1.2.5 Некоторые сведения о решениях линейных уравнений с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента . . . . .	12
1.3 Переход к исследованию обыкновенных уравнений в частных производных, приближающих исходное уравнение с запаздыванием . . . . .	13
<b>2 Аналитическое исследование поставленной задачи</b>	<b>17</b>
<b>3 Результаты проведённого анализа</b>	<b>18</b>
<b>4 Приложение математического моделирования для исследования экономических процессов</b>	<b>19</b>

<b>Заключение</b>	<b>20</b>
-------------------	-----------

<b>Список литературы</b>	<b>21</b>
--------------------------	-----------

## Введение

Данный дипломный проект посвящен изучению математических моделей теплопроводности с отклоняющимся аргументом.

Впервые теорию дифференциальных уравнений сначала с запаздывающим (а потом и с отклоняющимся) аргументом рассмотрел в А.Д.Мышкис в работе [6]). Другой пионерской работой в исследовании этого вопроса стала [17].

В последствии дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом (также иногда называемые функционально-дифференциальными) нашли многочисленные приложения в различных вопросах автоматике, в теории колебаний, в ракетной технике, во многих вопросах физики, в некоторых задачах экономических, биологических и медицинских наук. Важность и разнообразие приложений резко повысили интерес к теории этих уравнений. В 60-х годах XX века появилось множество работ по данной тематике: в качестве примеров можно привести монографии Беллмана, Данскина и Гликсберга [13], Беллмана и Данскина [14], Пинни [8], Красовского [5] и др.

Теория дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом до сих пор находится в стадии становления и интерес к ней по-прежнему не угас. Значимыми работами современности по данной тематике стали [22] и [19].

В данной работе будет исследована устойчивость уравнения локального закона сохранения (Лиувилля) с малым запаздыванием  $\tau$ :

$$\begin{cases} \rho_t(x, t) + \operatorname{div} \bar{J}(x, t) = f(x, t), \\ \bar{J}(x, t + \tau) = -a^2 \nabla \rho(x, t) + \bar{V}(x, t) \rho(x, t) \end{cases}$$

Цель настоящего исследования – оценить, как небольшое отклонение

по времени влияет на решения и их устойчивость для уравнений теплопроводности с отклоняющимся аргументом, а также сравнить моделей с отклонением и без. Также в данной работе будет приведена необходимая теория и представлены развитые численные методы решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Важным фактом является наличие именно малого запаздывания: в работе будет представлен переход от исходной модели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Такие уравнения были рассмотрены в статьях Тихонова [9, 10], Васильевой [1], в книге Васильевой и Бутузова [2].

В экономической части работы будет **модель капитализации Калецкого (Kalecki)**[18].

# 1 Изучение поставленной задачи с помощью компьютерного моделирования

## 1.1 Математическая постановка исходной задачи

Запишем **общее уравнение непрерывности** в дифференциальной форме:

$$\rho_t(\bar{x}, t) + \operatorname{div} \bar{J}(\bar{x}, t) = f(\bar{x}, t) \quad (1.1.1)$$

Оно представляет собой сильную (локальную) форму закона сохранения и выражает связь между потоком  $\bar{J}(\bar{x}, t)$  и концентрацией (температурой)  $\rho(\bar{x}, t)$ .

Чтобы корректно поставить задачу решения (1.1.1) необходимо дополнить его ещё одним условием – в данной работе оно представлено **законом диффузии с конвекцией** с отклоняющимся аргументом:

$$\bar{J}(\bar{x}, t + \tau) = -a^2 \nabla \rho(\bar{x}, t) + \bar{V}(\bar{x}, t) \rho(\bar{x}, t) \quad (1.1.2)$$

В дальнейшем уравнение (1.1.1) будет классифицировано с точки зрения теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Предварительно приведем необходимую для исследования информацию.

## 1.2 Некоторые факты из теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

### 1.2.1 Базовые понятия и определения

Дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом называются дифференциальные уравнения, в которые неизвест-

ная функция и её производные входят, вообще говоря, при различных значениях аргумента.

Хотя уравнения с отклоняющимся аргументом по виду очень похожи на обыкновенные дифференциальные уравнения, факт отклонения аргумента усложняет их анализ.

Рассмотрим простейший пример

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (1.2.1)$$

где  $\tau$  – положительная константа.

Для начала отметим, что для решения задачи Коши уже недостаточно задать одно начальное условие  $x(t_0) = x_0$ , ведь необходимо знать исходные значения на всем отрезке  $[t_0 - \tau, t_0]$ , т.е. задать функцию  $x_0(t)$ , определенную на отрезке  $[t_0 - \tau, t_0]$  – **начальную функцию** (в зарубежной литературе **history function** или **initial function**).

### 1.2.2 Простейшая модель с запаздыванием

Для примера рассмотрим две задачи Коши: одну для обыкновенного дифференциального уравнения, другую – для уравнения с отклонением по аргументу:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), & t > 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (1.2.2)$$

$$\begin{cases} y'(t) = y(t - 1), & t > 0 \\ y(t) = 1, & -1 \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Методы решения подобных уравнений с запаздыванием будут рассмотрены в работе позже, а пока построим графики этих решений:

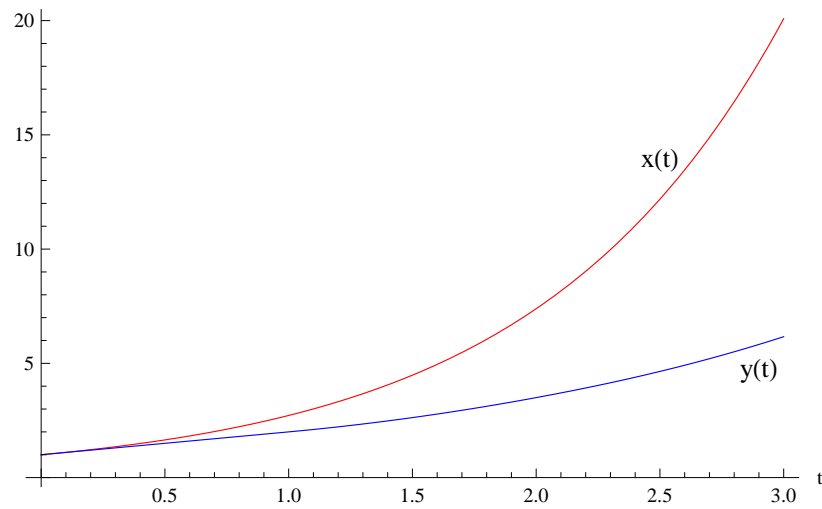


Рис. 1.2.1: Сравнение моделей с запаздыванием и без

Наглядно видно, что решения различны. Позже будет приведено аналитическое решение задачи (1.2.3) и доказано, что  $y(t)$  всегда возрастает медленнее экспоненциального решения, т.е.  $x(t)$ .

Также решение зависит от начальной функции: для примера рассмотрим такую задачу:

$$\begin{cases} y'_h(t) = y_h(t-1), & t > 0 \\ y_h(t) = 1+t, & -1 \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Отметим, что  $y_h(0) = y(0) = 1$ .

Построим решения на одном графике:

Таким образом, начальная функция определяет характер решения задачи.

### 1.2.3 Классификация моделей с отклоняющимся аргументом

Рассмотрим обобщенное уравнение  $n$ -ого порядка с  $l$  отклонениями аргумента (вообще говоря, отклонение может быть непостоянным и зависеть, например, от значений самого аргумента).

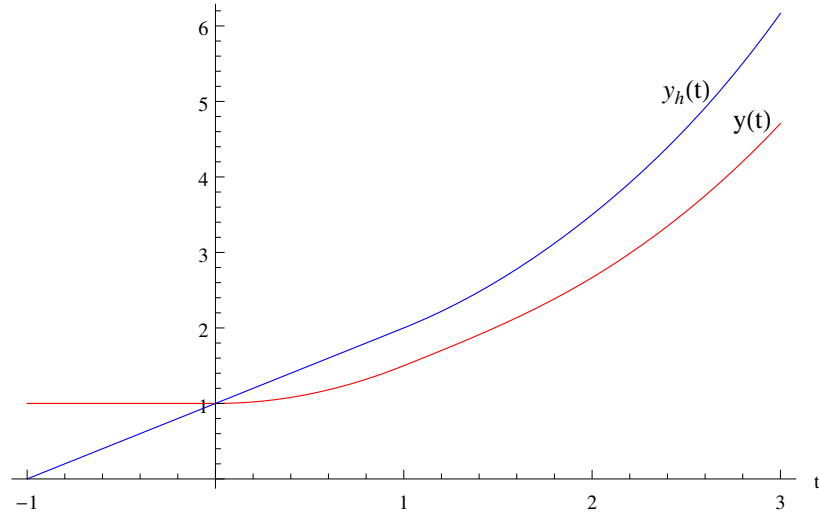


Рис. 1.2.2: Сравнение моделей с различными начальными функциями

$$\begin{aligned} x^{(m_0)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(m_0-1)}(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, \\ \dots, x^{(m_1)}(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_l(t)), \dots, x^{(m_l)}(t - \tau_l(t))) \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Здесь  $\tau_i(t) \geq 0$ .

Каменским Г.А. была введена естественная классификация (1.2.5). Обозначим  $\lambda = m_0 - \max_{1 \leq i \leq l} m_i$ .

1. Если  $\lambda > 0$ , то такое уравнения называется уравнением с **запаздывающим аргументом**;
2. Если  $\lambda = 0$ , – уравнением **нейтрального типа**;
3. Если  $\lambda < 0$ , – уравнением **опережающего типа**.

Вернемся к исходной задаче (1.1.1, 1.1.2):

$$\begin{cases} \rho_t(\bar{x}, t) + \operatorname{div} \bar{J}(\bar{x}, t) = f(\bar{x}, t), \\ \bar{J}(\bar{x}, t + \tau) = -a^2 \nabla \rho(\bar{x}, t) + \bar{V}(\bar{x}, t) \rho(\bar{x}, t) \end{cases} \quad (1.2.6)$$



Объединим в одно уравнение относительно  $\rho(x, t)$ :

$$\rho_t(\bar{x}, t) = -a^2 \Delta \rho(\bar{x}, t - \tau) + \rho(\bar{x}, t - \tau) \operatorname{div} \bar{V}(\bar{x}, t - \tau) + (\bar{V}(\bar{x}, t - \tau), \nabla \rho(\bar{x}, t - \tau)) \quad (1.2.7)$$

Отметим, что дивергенция как дифференциальный оператор была применена по пространственным переменным  $\bar{x}$ . Из этого следует, что в левой части (1.2.7) не содержится производных по  $t$  и уравнение классифицируется как уравнение с запаздывающим аргументом при  $\tau > 0$  и как опережающего типа при  $\tau < 0$ .

#### 1.2.4 Метод шагов решения уравнений с отклоняющимся аргументом

Метод шагов – естественный метод решения уравнений с отклоняющимся аргументом. Рассмотрим простейший пример:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad \tau > 0 \quad (1.2.8)$$

Поставим задачу Коши для него:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), & t > 0, \\ x(t) = x_0(t), & -\tau \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Тогда на отрезке  $[0, \tau]$ :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_0(t - \tau)), & 0 \leq t \leq \tau, \\ x(0) = x_0(0) \end{cases} \quad (1.2.10)$$

Отметим, что (1.2.11) – задача Коши уже для обыкновенного дифференциального уравнения. Предположим, что  $x_1(t)$  – ее решение. Тогда на отрезке  $[\tau, 2\tau]$ :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_1(t - \tau)), & \tau \leq t \leq 2\tau, \\ x(\tau) = x_1(\tau) \end{cases} \quad (1.2.11)$$

Продолжая подобные рассуждения, можно найти решение (1.2.9). Отметим, что решать можно как аналитически, так и численно.

К минусам этого метода можно отнести зависимость от величины отклонения и сложность адаптации к общему случаю зависимости запаздывания от аргумента.

В качестве примера можно рассмотреть уже использованную ранее в работе задачу Коши (1.2.3):

$$\begin{cases} y'(t) = y(t - 1), & t > 0 \\ y(t) = 1, & -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Таким образом, на отрезке  $[0, 1]$  её решением будет функция

$$y(t) = t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.2.12)$$

На отрезке  $[1, 2]$  соответственно:

$$\begin{cases} y'(t) = (t + 1) - 1, & 1 \leq t \leq 2, \\ y(1) = 1 + 1 = 2 \end{cases} \quad (1.2.13)$$

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{4}, \quad 1 \leq t \leq 2 \quad (1.2.14)$$

Продолжая подобные рассуждения, можно построить решение на сколь угодно отдаленном по времени от начального момента отрезке.

Заметим, что на каждом из таких отрезков, решения представлены в виде полинома, а значит возрастают не быстрее решения задачи без запаздывания – экспоненциальной функции.

### 1.2.5 Некоторые сведения о решениях линейных уравнений с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента

Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^l a_{ij} x^{(i)}(t - \tau_j) = 0, \quad (1.2.15)$$

где  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m$ .

Будем искать его частные решения в виде

$$x(t) = e^{kt}, \quad (1.2.16)$$

где  $k$  – постоянная.

Подставив (1.2.16) в (1.2.15), получим характеристическое уравнение для  $k$ :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^l a_{ij} k^i e^{k\tau_j} = 0 \quad (1.2.17)$$

Теория подобных трансцендентных уравнений изучалась ещё в XVIII веке Ламбертом и Эйлером. Известно, что (1.2.17) имеет бесконечное множество корней в комплексном пространстве.

В честь немецкого математика Ламберта была названа функция  $W(z)$ , определяемая функциональным уравнением

$$z = W(z)e^{W(z)} \quad (1.2.18)$$

Вообще говоря,  $W(z)$  многозначна, но если ограничиться вещественными  $z = x \geq -\frac{1}{e}$  и потребовать  $W(z) \geq -1$ , то получим однозначно определенную функцию, представляющую одну из главных ветвей  $W(z)$ :

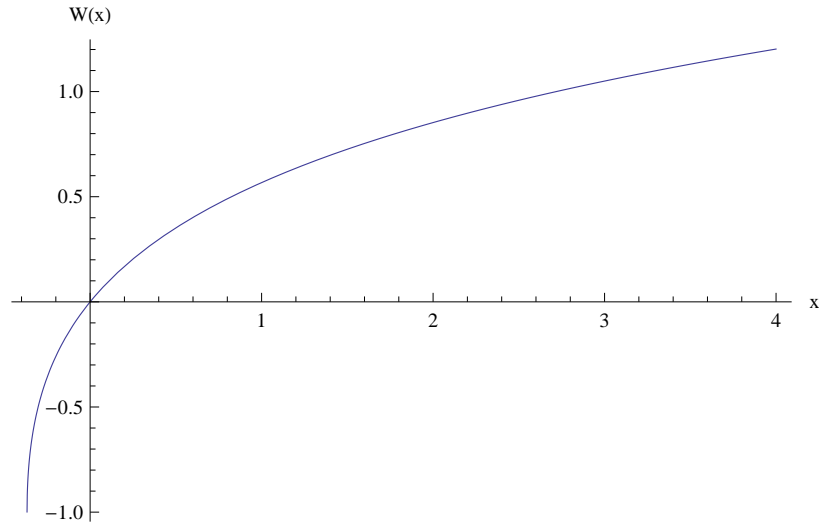


Рис. 1.2.3: График главной ветви  $W_0(x)$  решений функции Ламберта

### 1.3 Переход к исследованию обыкновенных уравнений в частных производных, приближающих исходное уравнение с запаздыванием

Цель дальнейшего исследования – свести исходную задачу к анализу её приближений уравнениями в частных производных.

Напомним, что в работе исследуется задача (1.1.1, 1.1.2):

$$\begin{cases} \rho_t(\bar{x}, t) + \operatorname{div} \bar{J}(\bar{x}, t) = f(\bar{x}, t), \\ \bar{J}(\bar{x}, t + \tau) = -a^2 \nabla \rho(\bar{x}, t) + \bar{V}(\bar{x}, t) \rho(\bar{x}, t) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Разложим левую часть уравнения с запаздыванием в ряд Тэйлора, опустив члены порядка выше  $m$ :

$$\bar{J}(\bar{x}, t) + \bar{J}_t(\bar{x}, t)\tau + \cdots + \frac{\partial^m \bar{J}}{\partial t^m}(\bar{x}, t) \frac{\tau^m}{m!} = -a^2 \nabla \rho(\bar{x}, t) + \bar{V}(\bar{x}, t) \rho(\bar{x}, t) \quad (1.3.2)$$

$$\sum_{n=0}^m \frac{\partial^n \bar{J}}{\partial t^n}(\bar{x}, t) \frac{\tau^n}{n!} = -a^2 \nabla \rho(\bar{x}, t) + \bar{V}(\bar{x}, t) \rho(\bar{x}, t) \quad (1.3.3)$$

В контексте работы будем называть  $m$  **порядком приближения**.

Продифференцировав (1.1.1)  $n$  раз, получим:

$$\frac{\partial^{n+1} \rho}{\partial t^{n+1}} + \operatorname{div} \frac{\partial^n \bar{J}}{\partial t^n} = \frac{\partial^n f}{\partial t^n} \quad (1.3.4)$$

Домножив последнее уравнение на  $\frac{\tau^n}{n!}$ , перепишем его в следующем виде:

$$\operatorname{div} \left( \frac{\partial^n \bar{J}}{\partial t^n} \right) \frac{\tau^n}{n!} = \left( \frac{\partial^n f}{\partial t^n} - \frac{\partial^{n+1} \rho}{\partial t^{n+1}} \right) \frac{\tau^n}{n!} \quad (1.3.5)$$

Из уравнения (1.3.3):

$$\sum_{n=0}^m \operatorname{div} \left( \frac{\partial^n \bar{J}}{\partial t^n} \right) \frac{\tau^n}{n!} = -a^2 \operatorname{div}(\nabla \rho) + \operatorname{div}(\bar{V} \rho) \quad (1.3.6)$$

Подставим (1.3.5):

$$\sum_{n=0}^m \left( \frac{\partial^n f}{\partial t^n} - \frac{\partial^{n+1} \rho}{\partial t^{n+1}} \right) \frac{\tau^n}{n!} = -a^2 \Delta \rho + \rho \operatorname{div} \bar{V} + (\bar{V}, \nabla \rho) \quad (1.3.7)$$

$$\sum_{n=0}^m \frac{\partial^{n+1} \rho}{\partial t^{n+1}} \frac{\tau^n}{n!} - a^2 \Delta \rho + \rho \operatorname{div} \bar{V} + (\bar{V}, \nabla \rho) = \sum_{n=0}^m \frac{\partial^n f}{\partial t^n} \frac{\tau^n}{n!} \quad (1.3.8)$$

Рассмотрим одномерный случай:

$$\sum_{n=0}^m \frac{\partial^{n+1} \rho}{\partial t^{n+1}} \frac{\tau^n}{n!} - a^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} = \sum_{n=0}^m \frac{\partial^n f}{\partial t^n} \frac{\tau^n}{n!} = g(x, t) \quad (1.3.9)$$

Для простоты примем  $g = 0$  и  $V = \text{const}$ :

$$\sum_{n=0}^m \frac{\partial^{n+1} \rho}{\partial t^{n+1}} \frac{\tau^n}{n!} - a^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (1.3.10)$$

Заменим неизвестную функцию следующим образом:

$$\rho(x, t) = e^{\xi x} u(x, t) \quad (1.3.11)$$

Тогда

$$\rho_x = e^{\xi x} (u_x + \xi u) \quad (1.3.12)$$

$$\rho_{xx} = e^{\xi x} (u_{xx} + 2\xi u_x + \xi^2 u) \quad (1.3.13)$$

$$-a^2 \rho_{xx} + V \rho_x = e^{\xi x} [-a^2 (u_{xx} + 2\xi u_x + \xi^2 u) + V (u_x + \xi u)] = \quad (1.3.14)$$

$$= e^{\xi x} [-a^2 u_{xx} + (-2a^2 \xi + V) u_x + (-a^2 \xi^2 + V \xi) u] = \quad (1.3.15)$$

$$= e^{\xi x} \left[ -a^2 u_{xx} + \frac{V^2}{4a^2} u \right] \quad (1.3.16)$$

при  $\xi = \frac{V}{2a^2}$  (т.е. коэффициент при  $u_x$  равен 0).

Наконец, получим уравнение, для которого будем исследовать устойчивость его решений:

$$\sum_{n=0}^m \frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^{n+1}} \frac{\tau^n}{n!} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{V^2}{4a^2} u = 0 \quad (1.3.17)$$

Для уравнения 1.3.17 применим **метод Фурье разделения переменных**:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X(x) T(t) \quad (1.3.18)$$

Получим:

$$\sum_{n=0}^m \frac{\tau^n}{n!} T^{(n+1)} X + \frac{V^2}{4a^2} T X = a^2 T X'', \quad k = 1, \dots, \infty \quad (1.3.19)$$

$$\frac{\sum_{n=0}^m \frac{\tau^n}{n!} T^{(n+1)} + \frac{V^2}{4a^2} T}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda = -k^2 \quad (1.3.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^m \frac{\tau^n}{n!} T^{(n+1)} + \underbrace{\left( \frac{V^2}{4a^2} + a^2 k^2 \right)}_{\gamma(k^2)} T = 0 \\ X'' + k^2 X = 0 \end{array} \right. \quad (1.3.21)$$

Как видно, малый параметр входит только в уравнение относительно  $T(t)$ .

Дальнейшей целью настоящего исследования станет вопрос об устойчивости нулевого решения

$$\sum_{n=0}^m \frac{\tau^n}{n!} T^{(n+1)} + \underbrace{\left( \frac{V^2}{4a^2} + a^2 k^2 \right)}_{\gamma(k^2)} T = 0 \quad (1.3.22)$$

при различных  $m$ .

## **2 Аналитическое исследование поставленной задачи**



### 3 Результаты проведённого анализа

## 4 Приложение математического моделирования для исследования экономических процессов

В экономической части настоящей работы будет рассмотрена **модель капитализации Калецкого (Kalecki)**. Данная модель – одно из первых распространенных приложений дифференциальных уравнений с запаздыванием. Впервые описание данной модели самим Калецким было представлено в работе [18].

## Заключение

## Список литературы

- [1] Васильева А.Б., О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры, Матем. сб., 31(73):3, 1952, 587–644.
- [2] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений, М.: Высшая школа, 1990.
- [3] Ерофеев В.Т., Козловская И.С., Уравнения с частными производными и математические модели в экономике, М.: Едиториал УРСС, 2004.
- [4] Зверкин А.М., Каменский Г.А., Норкин С.Б., Эльсгольц Л.Э., Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, УМН, 17:2(104), 1962, 77–164.
- [5] Красовский Н.Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, 1959.
- [6] Мышкис А.Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, Гостехиздат, М.–Л., 1951.
- [7] Мышкис А.Д., Эльсгольц Л.Э., Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, УМН, 22:2(134), 1967, 21–57.
- [8] Пинни Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., ИЛ, 1961.
- [9] Тихонов А.Н., О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, Мат.сб., 2 2(64), 1948, 193–204.
- [10] Тихонов А.Н., О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры, Мат.сб., 2 7(69), 1950, 147–156.

- [11] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, М., Наука, 1971.
- [12] Филиппов А. Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Изд. 5-е, М.: Наука, 1979.
- [13] Bellman R., Danskin J.M, Glicksberg I., A bibliography of the theory and application of differential-difference, renewal and related functional equations, The Rand Corporation RM-688, 1952.
- [14] Bellman R., Danskin J.M, The stability theory of differential-difference equations, Proc. Sympos. non-linear Circuit Anal, New York , 1953, 107-123.
- [15] Black, Fischer, Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy 81 (3), 1973: 637–654.
- [16] Friedman A. Hu B. The Stefan problem for a hyperbolic heat equation, Math. Anal. and Appl., V. 138, 1, 1989, 249–279.
- [17] Hahn W., Berichtuber Differential-Differenzengleichungen mit festen und Veranderlichen Spannen, Jahresber. Dtsch. Math.Ver.57,2, 1954, 55—84.
- [18] Kalecki M., An Essay on the Theory of the Business Cycle (Próba teorii koniunktury), Instytut Badania Koniunktur Gospodarczych i Cen (WARSAW), 1933
- [19] Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D., Introduction to the theory and Applications of Functional Differential Equations, Kluver, Dordrecht, 1999.
- [20] Mangano S., Mathematica Cookbook, O'Reilly Media, 2010.
- [21] Polyanin A.D., Zhurov A.I., A new method for constructing exact solutions to nonlinear delay partial differential equations, arXiv:1304.5473, 2013

- [22] Wu J., Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New-York, 1996