Особенности математических моделей теплопроводности с отклоняющимся аргументом

Качалкин Иван

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Кафедра “Прикладная математика-1”

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Филимонов А.М.

июнь 2014

Постановка задачи

Исходные уравнения

Общее уравнение непрерывности в дифференциальной форме:

$$\rho_t + div\bar{J} = f, \tag{1.1}$$

где **плотность потока** $\bar{J}$ выражена законом диффузии с конвекцией (ρ – температура):

$$\bar{J}(x,t) = -a^2\nabla\rho(x,t) + \bar{V}(x,t)\rho(x,t) \tag{1.2}$$

Постановка задачи

Уравненение диффузии с запаздыванием

Рассмотрим закон теплопроводности с отклонением по времени:

$$\bar{J}(x, t+\tau) = -a^2 \nabla \rho(x, t) + \bar{V}(x, t)\rho(x, t) \tag{1.3}$$

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\partial^n \bar{J}}{\partial t^k}(x, t)\frac{\tau^n}{n!} = -a^2 \nabla \rho(x, t) + \bar{V}(x, t)\rho(x, t) \tag{1.4}$$

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^{n+1}} \frac{\tau^n}{n!} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{V^2}{4a^2} u = 0 \tag{1.5}$$

$$\rho(x, t) = e^{\xi x} u(x, t) \tag{1.6}$$

Исследование устойчивости приближений

Сведение к исследованию ОДУ методом Фурье и исследование его усточивости по критерию Рауса-Гурвица

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{m} \frac{\tau^k}{k!} T^{(k+1)} + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2 k^2 \right)}_{\gamma(k)} T = 0 \\ X'' + k^2 X = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\tau^k}{k!} \lambda^{k+1} + \gamma = 0 \tag{2.2}$$

Исследование устойчивости приближений

Критерий Рауса-Гурвица

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + a_n = 0 \quad a \neq 0 \tag{2.3}$$

$$\Delta_0 = a_0 > 0, \quad \Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}, \ldots$$

Исследование устойчивости приближений

Результаты численного исследования

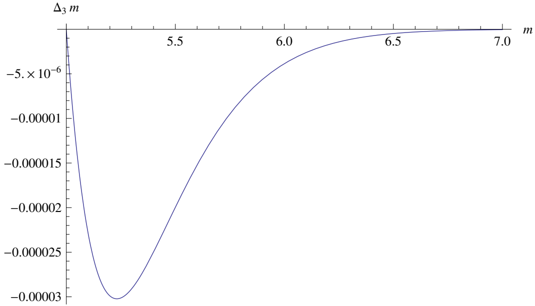
при $m=1$: $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_1 = \gamma > 0$
при $m=2$: $\Delta_1 = \tau$, $\Delta_2 = \tau(1-0.5\gamma\tau) < 0$, $\Delta_3 = \gamma\tau(1-0.5\gamma\tau) < 0$
при $m=3$: $\Delta_1 = 0.5\tau^2$, $\Delta_2 \approx 0.33\tau^3$, $\Delta_3 \approx \tau^3(0.33 - 0.25\gamma\tau) < 0$,
$\Delta_4 \approx \gamma\tau^3(0.33 - 0.25\gamma\tau) < 0$
при $m=4$: $\Delta_1 = 0.167\tau^3$, $\Delta_2 = 0.041\tau^5$, $\Delta_3 = \tau^6(0.007\gamma\tau + 0.014)$,
$\Delta_4 = \tau^6\left(-0.0017\gamma^2\tau^2 - 0.007\gamma\tau + 0.014\right) < 0$,
$\Delta_5 = \gamma\tau^6\left(-0.0017\gamma^2\tau^2 - 0.0071\gamma\tau + 0.0139\right)$
при $m=5$: $\Delta_1 = 0.042\tau^4$, $\Delta_2 = 0.003\tau^7$, $\Delta_3 = 0$,
$\Delta_4 = \tau^{10}(0.0001\gamma\tau - 0.0002)$,
$\Delta_5 = \tau^{10}\left(-0.0001\gamma^2\tau^2 + 0.0002\gamma\tau - 0.0002\right) < 0, \ldots$
при $m=6$: $\Delta_1 = 0.0083\tau^5$, $\Delta_2 = 0.0001\tau^9$, $\Delta_3 = -3.858^{-6}\tau^{12} < 0$,
$\ldots$
при $m=7$: $\Delta_1 = 0.00138889\tau^6$, $\Delta_2 = 3.307^{-6}\tau^{11}$,
$\Delta_3 = -4.593^{-8}\tau^{15} < 0, \ldots$

Исследование устойчивости приближений

Аналитическое доказательство неустойчивости приближений

Утверждение. $T_3 < 0$ при $m \geq 6$.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} & \frac{\tau^m}{m!} & 0 \\ \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} & \frac{\tau^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \\ \frac{\tau^{m-5}}{(m-5)!} & \frac{\tau^{m-4}}{(m-4)!} & \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} \end{vmatrix} = \frac{\tau^{3m-6}}{m!(m-1)!(m-3)!}(10-2m) < 0 \tag{2.4}$$



Исследование уравнения с запаздыванием

Переход к исследованию системы ОДУ с запаздыванием

$$u_t(x,t) - a^2 u_{xx}(x, t-\tau) + \frac{V^2}{4a^2} u(x, t-\tau) = 0 \qquad (3.1)$$

$$\begin{cases} T'(t) + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2k^2\right)}_{\gamma(k^2)} T(t-\tau) = 0 \\ X'' + k^2 X = 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

Уравнение с запаздыванием

Задача Коши для уравнения с запаздыванием

$$\begin{cases} T_k'(t) + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2k^2\right)}_{\gamma(k^2)} T_k(t-\tau) = 0, \quad t > 0, \\ T_k(t) = T_k^0, \quad -\tau \le t \le 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

На основании **теоремы Руше** получено достаточное условие устойчивости решений:

$$\gamma(k^2)\tau < 1 \tag{3.4}$$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

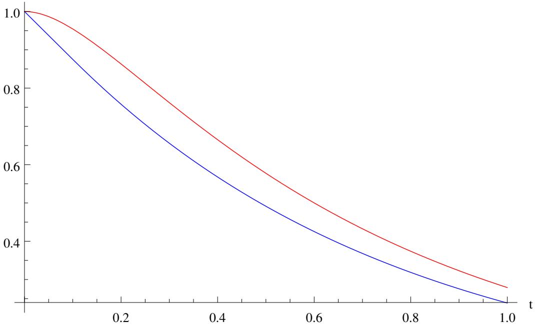


Рис. : При $\tau = 0.1$, $k = 1$, $m = 1$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

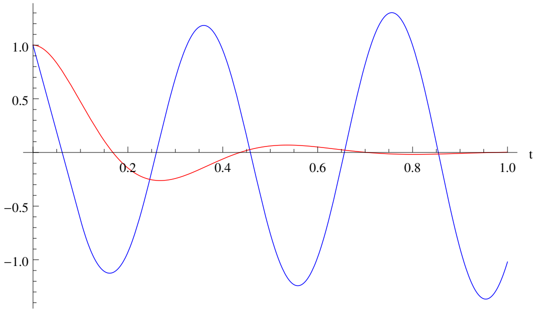


Рис. : При $\tau = 0.1$, $k = 4$, $m = 1$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

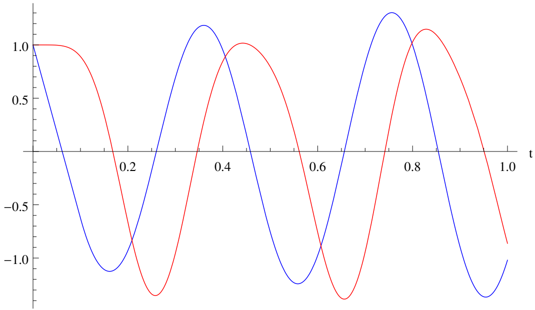


Рис. : При $\tau = 0.1$, $k = 4$, $m = 5$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

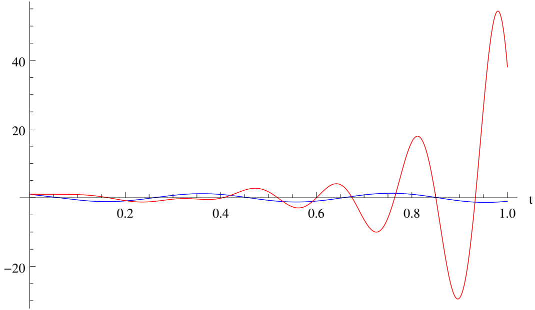


Рис. : При $\tau = 0.1$, $k = 4$, $m = 6$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

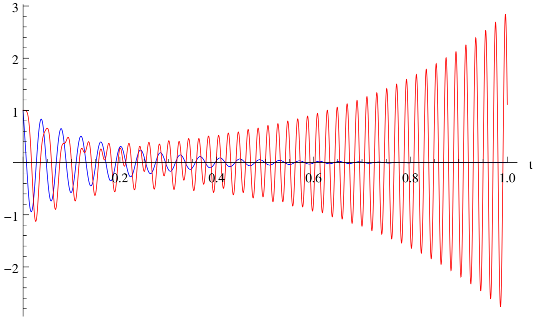


Рис. : При $\tau = 0.01$, $k = 12$, $m = 5$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

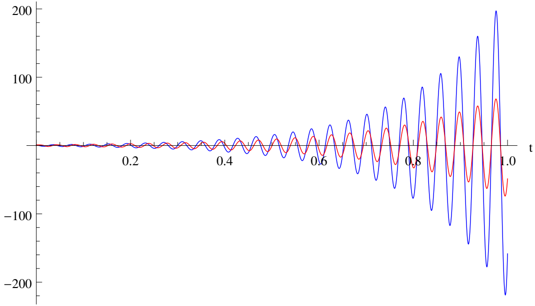


Рис. : При $\tau = 0.01$, $k = 13$, $m = 5$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

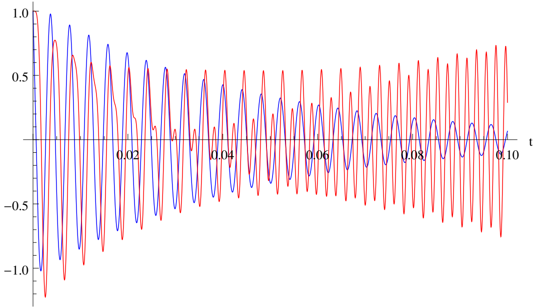


Рис. : При $\tau = 0.001$, $k = 39$, $m = 5$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями

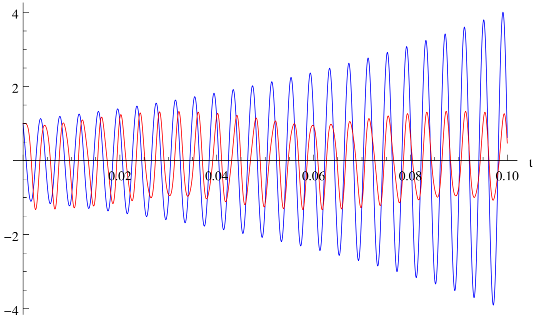
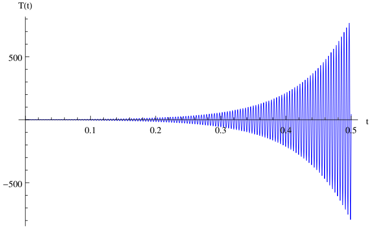


Рис. : При $\tau = 0.001$, $k = 40$, $m = 5$

Исследование уравнения с запаздыванием

Сравнение с различными приближениями



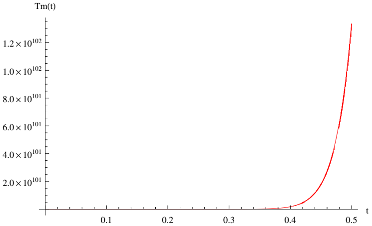


Рис. : При $\tau = 0.001$, $k = 40$, $m = 6$

Выводы

1. Решения уравнения

$$u_t(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t-\tau) + \frac{V^2}{4a^2} u(x,t-\tau) = 0 \qquad (4.1)$$

неустойчивы по времени при любой ненулевой начальной функции $T(t)$ при $\tau > 0$.

2. Решения задачи Коши для уравнения с запаздыванием

$$\begin{cases} T_k'(t) + \underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2} + a^2k^2\right)}_{\gamma(k^2)} T_k(t-\tau) = 0, \quad t > 0, \\ T_k(t) = T_k^0, \quad -\tau \le t \le 0. \end{cases} \qquad (4.2)$$

устойчивы при $\gamma\tau < 1$ (достаточное условие).

Выводы

3. Гипотеза: решения 4.2 устойчивы при $\gamma\tau < \dfrac{\pi}{2}$ (необходимое условие).
4. Приближения для 4.2

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{m} \dfrac{\tau^n}{n!} T_k^{(n+1)} + \underbrace{\left(\dfrac{V^2}{4a^2} + a^2 k^2\right)}_{\gamma(k^2)} T_k = 0, \quad t > 0, \\ T_k(0) = T_k^0 \neq 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

неустойчивы при $m \geq 6$, устойчивы при $m = 1$ при любых $\gamma > 0$, $\tau > 0$.