# Особенности решений уравнений теплопроводности с отклоняющимся аргументом

## 1 Постановка задачи, используемые допущения и вывод исследуемоего на устойчивость дифференциального уравнения

Запишем **общее уравнение непрерывности** в дифференциальной форме:

$$\rho_t + div\bar{J} = f \tag{1.1}$$

Оно представляет собой сильную (локальную) форму закона сохранения.

Рассмотрим случай, когда плотность потока будет выражена через плотность заряда следующим образом:

$$\bar{J} = -a^2\nabla\rho + \bar{V}\rho \tag{1.2}$$

Рассмотрим возмущенную систему, где $\tau$ – малый параметр:

$$\bar{J}(x, t+\tau) = -a^2\nabla\rho(x,t) + \bar{V}(x,t)\rho(x,t) \tag{1.3}$$

**Определение 1**. Если в уравнении 1.3

1. $\tau > 0$, то назовем его **уравнением с запаздывающим аргументом**
2. $\tau = 0$, – **уравнением нейтрального типа**
3. $\tau < 0$, – **уравнением опережающего типа**

Разложим левую часть данного уравнения в ряд Тэйлора до члена порядка $m$:

$$\bar{J}(x,t) + \bar{J}_t(x,t)\tau + \ldots \frac{\partial^m \bar{J}}{\partial t^m}(x,t)\frac{\tau^m}{m!} = -a^2\nabla\rho(x,t) + \bar{V}(x,t)\rho(x,t)$$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^k \bar{J}}{\partial t^k}(x,t)\frac{\tau^k}{k!} = -a^2\nabla\rho(x,t) + \bar{V}(x,t)\rho(x,t) \tag{1.4}$$

Продифференцировав исходное уравнение 1.1 $k$ раз, получим

$$\frac{\partial^{k+1}\rho}{\partial t^{k+1}} + div\frac{\partial^k \bar{J}}{\partial t^k} = \frac{\partial^k f}{\partial t^k}$$

Домножив последнее уравнение на $\frac{\tau^k}{k!}$, перепишем его в следующем виде:

$$div\left(\frac{\partial^k \bar{J}}{\partial t^k}\right)\frac{\tau^k}{k!} = \left(\frac{\partial^k f}{\partial t^k} - \frac{\partial^{k+1}\rho}{\partial t^{k+1}}\right)\frac{\tau^k}{k!} \tag{1.5}$$

Из уравнения 1.4:

$$\sum_{k=0}^{m} div\left(\frac{\partial^k \bar{J}}{\partial t^k}\right)\frac{\tau^k}{k!} = -a^2 div(\nabla\rho) + div(\bar{V}\rho)$$

Подставим 1.5:

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\partial^k f}{\partial t^k}-\frac{\partial^{k+1}\rho}{\partial t^{k+1}}\right)\frac{\tau^k}{k!}=-a^2\Delta\rho+\rho div\bar{V}+(\bar{V},\nabla\rho)$$

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial^{k+1}\rho}{\partial t^{k+1}}\frac{\tau^k}{k!}-a^2\Delta\rho+\rho div\bar{V}+(\bar{V},\nabla\rho)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial^k f}{\partial t^k}\frac{\tau^k}{k!}$$

Рассмотрим одномерный случай:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial^{k+1}\rho}{\partial t^{k+1}}\frac{\tau^k}{k!}-a^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+\rho\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial\rho}{\partial x}=\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial^k f}{\partial t^k}\frac{\tau^k}{k!}=g(x,t)$$

Для простоты примем $g=0$ и $V=const$:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial^{k+1}\rho}{\partial t^{k+1}}\frac{\tau^k}{k!}-a^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+V\frac{\partial\rho}{\partial x}=0 \tag{1.6}$$

Заменим неизвестную функцию следующим образом:

$$\rho(x,t)=e^{\xi x}u(x,t)$$

Тогда

$$\rho_x=e^{\xi x}(u_x+\xi u)$$
$$\rho_{xx}=e^{\xi x}(u_{xx}+2\xi u_x+\xi^2 u)$$

$$\begin{aligned}-a^2\rho_{xx}+V\rho_x&=e^{\xi x}[-a^2(u_{xx}+2\xi u_x+\xi^2u)+V(u_x+\xi u)]=\\&=e^{\xi x}[-a^2u_{xx}+(-2a^2\xi+V)u_x+(-a^2\xi^2+V\xi)u]=\\&=e^{\xi x}\left[-a^2u_{xx}+\frac{V^2}{4a^2}u\right]\end{aligned}$$

при $\xi=\frac{V}{2a^2}$ (т.е. коэффициент при $u_x$ равен 0).
Наконец, получим уравнение, для которого будем исследовать устойчивость его решений:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial t^{k+1}}\frac{\tau^k}{k!}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{V^2}{4a^2}u=0 \tag{1.7}$$

# 2 Исследование устойчивости исходного уравнения в частных производных

## 2.1 Метод Фурье для исходного уравнения

Для уравнения 1.7 применим **метод Фурье разделения переменных**:

$$u(x,t)=T(t)X(x)$$

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\tau^k}{k!}T^{(k+1)}X+\frac{V^2}{4a^2}TX=a^2TX''$$

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{\tau^k}{k!}T^{(k+1)}+\frac{V^2}{4a^2}T}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda=-k^2$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{\tau^k}{k!}T^{(k+1)}+\underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2}+a^2k^2\right)}_{\gamma}T=0\\ X''+k^2X=0\end{cases}\tag{2.1}$$

Как видно, малый параметр входит только в уравнение относительно $T(t)$.

Целью нашего дальнейшего исследования является обосновать устойчивость или неустойчивость решений

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\tau^k}{k!}T^{(k+1)}+\underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2}+a^2k^2\right)}_{\gamma}T=0$$

при различных $m$.

## 2.2 Исследование устойчивости обыкновенного дифференциального уравнения относительно $T(t)$

Напомним, что в данном пункте исследуется уравнение

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\tau^k}{k!}T^{(k+1)}+\underbrace{\left(\frac{V^2}{4a^2}+a^2k^2\right)}_{\gamma}T=0$$

Выпишем характеристическое уравнение:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\tau^k}{k!}\lambda^{k+1}+\gamma=0$$

Согласно общей теории, для алгебраического уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad a\neq 0\tag{2.2}$$

выполнена

**Теорема Рауса-Гурвица**. Число корней с положительной частью действительного алгебраического уравнения 2.2 равно числу перемен знака в любой из последовательностей

$$T_0,T_1,\frac{T_2}{T_1},\dots,\frac{T_n}{T_{n-1}}$$

или

$$T_0,T_1,T_1T_2,T_2T_3,\dots,T_{n-2}T_{n-1},a_n$$

где

$$T_0 = a_0 > 0, \quad T_1 = a_1, \quad T_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \quad T_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{pmatrix}, \ldots$$

**Критерий Рауса-Гурвица**. Для того, чтоюы все корни действительного уравнения 2.2 имели отрицательные действительные части необходимо и достачно, чтобы выполнялись неравенства:

$$T_0 > 0, T_1 > 0, \ldots, T_n > 0$$

Отметим, что согласно построению, можем считать $\gamma(k)$ $k^2$ неограниченным, а $\tau > 0$ зафиксировать.

Таким образом, задача об устойчивости решений дифференцаильного уравнения относительно $T(t)$ сводится к нахождению определителей матриц Гурвица для различных $m$.

Вычислим их програмно, где числовые коэффициенты запишем в десятичной форме,

**при** $m = 1$: $T_1 = 1 > 0$, $T_1 = \gamma > 0$

**при** $m = 2$: $T_1 = \tau$, $T_2 = \tau(1 - 0.5\gamma\tau) < 0$, $T_3 = \gamma\tau(1 - 0.5\gamma\tau) < 0$

**при** $m = 3$: $T_1 = 0.5\tau^2, T_2 = 0.333333\tau^3, T_3 = \tau^3(0.333333 - 0.25\gamma\tau) < 0, T_4 = \gamma\tau^3(0.333333 - 0.25\gamma\tau) < 0$

**при** $m = 4$: $T_1 = 0.167\tau^3$, $T_2 = 0.041\tau^5$, $T_3 = \tau^6(0.007\gamma\tau + 0.014)$,
$T_4 = \tau^6\left(-0.0017\gamma^2\tau^2 - 0.007\gamma\tau + 0.014\right) < 0$, $T_5 = \gamma\tau^6\left(-0.0017\gamma^2\tau^2 - 0.0071\gamma\tau + 0.0139\right)$

**при** $m = 5$: $T_1 = 0.042\tau^4$, $T_2 = 0.003\tau^7$, $T_3 = 0$, $T_4 = \tau^{10}(0.0001\gamma\tau - 0.0002)$, $T_5 = \tau^{10}\left(-0.0001\gamma^2\tau^2 + 0.0002\gamma\tau - 0.0002\right) < 0, \ldots$

**при** $m = 6$: $T_1 = 0.0083\tau^5$, $T_2 = 0.0001\tau^9$, $T_3 = -3.858^{-6}\tau^{12} < 0, \ldots$

**при** $m = 7$: $T_1 = 0.00138889\tau^6$, $T_2 = 3.307^{-6}\tau^{11}$, $T_3 = -4.593^{-8}\tau^{15} < 0, \ldots$

Отметим, что $T_3$, начиная с того момента, когда не зависит от $\gamma$ (т.е. при $m \geq 6$), отрицательны при $\tau > 0$ для приведенных $m$

**Утверждение**. $T_3 < 0$ при $m \geq 6$.

Выпишем общий вид определителя матрицы Гурвица при $k = 3$:

$$T_3 = \begin{vmatrix} \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} & \frac{\tau^m}{m!} & 0 \\ \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} & \frac{\tau^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \\ \frac{\tau^{m-5}}{(m-5)!} & \frac{\tau^{m-4}}{(m-4)!} & \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} \end{vmatrix} = \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \begin{vmatrix} \frac{\tau^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \\ \frac{\tau^{m-4}}{(m-4)!} & \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} \end{vmatrix} - \frac{\tau^m}{m!} \begin{vmatrix} \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} & \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \\ \frac{\tau^{m-5}}{(m-5)!} & \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} \end{vmatrix}$$

$$T_3 = \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\tau^{m-2}}{(m-2)!} \frac{\tau^{m-4}}{(m-4)!} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\tau}{m-1} \\ 1 & \frac{\tau}{m-3} \end{vmatrix} - \frac{\tau^m}{m!} \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} \frac{\tau^{m-5}}{(m-5)!} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\tau^2}{(m-2)(m-1)} \\ 1 & \frac{\tau^2}{(m-4)(m-3)} \end{vmatrix}$$

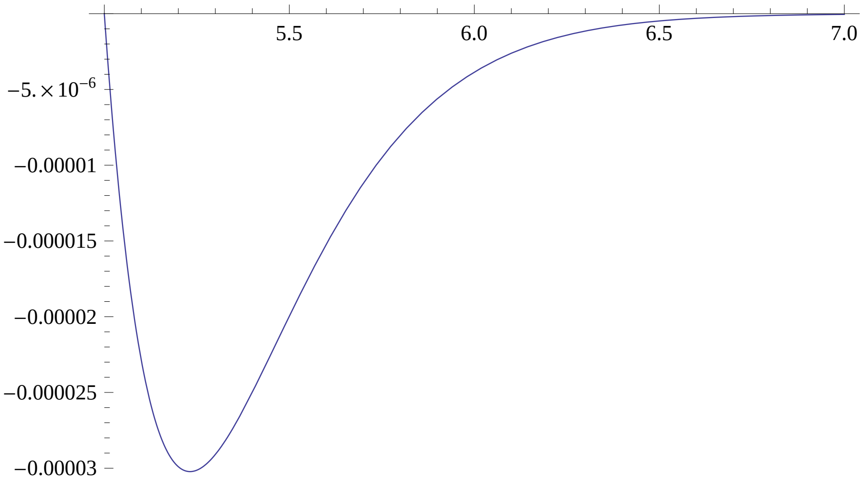
$$T_3 = \frac{\tau^{3m-7}}{(m-1)!(m-2)!(m-4)!} \left( \frac{\tau}{m-3} - \frac{\tau}{m-1} \right) - \frac{\tau^{3m-8}}{m!(m-3)!(m-5)!} \left( \frac{\tau^2}{(m-4)(m-3)} - \frac{\tau^2}{(m-2)(m-1)} \right)$$

$$T_3 = \tau^{3m-6}\left(\frac{(m-1)-(m-3)}{(m-1)!(m-2)!(m-4)!(m-3)(m-1))} - \frac{(m-2)(m-1)-(m-4)(m-3)}{m!(m-3)!(m-5)!(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)}\right)$$

$$T_3 = \frac{\tau^{3m-6}}{m!(m-1)!(m-3)!}(2m-(-3m+2+7m-12)) = \frac{\tau^{3m-6}}{m!(m-1)!(m-3)!}(10-2m) < 0$$

при $m \geq 6$.

Построим график для значений $T_3$ в зависимости от $m$:




Таким образом, решение исходной задачи устойчиво только при $m = 1$.

# 3 Приложения

## 3.1 Исходный код программы для вычисления определителей матриц Гурвица на языке Wolfram Mathematica

```
mMax := 10;
HurwitzMatrix[\[Tau]_, degree_] :=
 Module[{coefList, k, i, j, l, matrix, pivotalIndex, index},
   coefList = {\[Gamma]};
   For[k = 0, k < degree + 1, k++,
    PrependTo[coefList, (\[Tau]^k)/Factorial[k]]];
   (*Print[coefList];*)
   matrix = ConstantArray[0, {degree + 1, degree + 1}];
   For[i = 1, i <= degree + 1, i++,
    pivotalIndex = 2*i;
    For[j = 1, j <= degree + 1, j++,
     index = pivotalIndex + 1 - j;
     If[(index > degree + 2) || (index < 1),
      Continue[],
      matrix[[i, j]] = coefList[[index]]
      ]
     ]
    ];
   (*Print[matrix//MatrixForm];*)
   For[l = 1, l <= m + 1, l++,
    Print[Simplify[N[Det[matrix[[1 ;; l, 1 ;; l]]]]]];
    ];
   Print[]
   ]
For[m = 1, m <= mMax, m++,
 HurwitzMatrix[\[Tau], m]]
```