一、实验目的

通过仿真实验掌握利用递推最小二程方法辨识差分方程模型参数的原理和方法。

二、实验内容

给出系统的差分方程为

$$x(k)=a_1x(k-1)+a_2x(k-2)+b_1u(k-1)+b_2u(k-2)$$
$$z(k)=x(k)+v(k)$$

其中 $a_1=1.5, a_2=-0.7, b_1=1, b_2=0.5$ ； $u(k), x(k)和z(k)$ 分别为过程的输入，状态和输出变量； $v(k)$ 为测量白噪声过程，服从正态分布，均值为零，方差为 σ_j^9 ，记作 $v(k)\sim N(0,\sigma_v^2)$ 。

过程的输入驱动采用 M 序列，输出受到白噪声 $v(k)$ 的污染。根据过程的输入和输出数据 $\{u(k), z(k)\}$， 递推最小二乘算法辨识系统模型参数 $a_1, a_2和b_1, b_2$ 。

三、实验要求

进行方案设计，模拟过程进行仿真，获得输出数据，用M序列作为辨识的输入信号，噪声采用根方差 $\sigma_v=0.01$ 的正态分布白噪声，通过最小二乘辨识模型参数，计算参数估计值与理论值之间的误差，画出相应的仿真曲线，分析噪声及算法对辨识结果的影响。

四、实验原理

最小二乘法是一种常用的参数估计方法，用于拟合线性模型和非线性模型。其原理是通过最小化实际观测值与模型拟合值之间的残差平方和来确定模型的参数。

对于一个线性模型，可以表示为：

Y = Xβ + ε

其中，Y 是观测值的向量，X 是设计矩阵，β 是待估计的参数向量，ε 是误差向量。

最小二乘法的目标是找到最优的参数估计值 β^，使得残差平方和最小化。即：

min ||Y - Xβ||^2

通过求解上述最小化问题的解析解，可以得到最小二乘估计的参数值 β^k。具体求解方法是通过对残差平方和的导数等于零来求解。

递推最小二乘法是一种用于在线参数估计的方法，适用于数据流逐步到达的情况。它通过递推的方式，不断更新参数估计值，以适应新的观测值。

递推最小二乘法的步骤如下：

1. 初始化参数估计值$\boxed{\beta^0}$。

2. 当新的观测值到达时，根据当前的参数估计值 β^k 和新的观测值，计算残差$\boxed{r^k}$。

3. 更新参数估计值

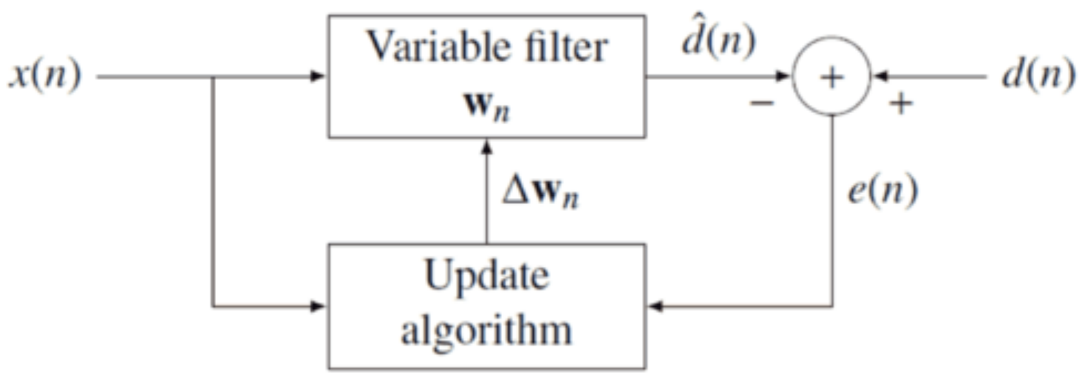
$$\boxed{\beta^k + 1 = \beta^k + (X^T X)^- 1 X^T r^k \qquad (1)}$$

，其中，X 是设计矩阵，$\boxed{r^k}$是残差向量。

4. 重复步骤 2 和步骤 3，直到所有的观测值都被处理。

递推最小二乘法的优点是可以实时地更新参数估计值，适用于动态变化的数据流。

五、实验框图



六、实验程序代码

主程序

```
% Constants
a1 = 1.5;
a2 = -0.7;
b1 = 1;
b2 = 0.5;

% White Noise
sigma_v = 0.01;

% Input
N = 100;
ms = mseq();
u = ms(1:N);

% Output
x = zeros(1, N);
z = zeros(1, N);
v = sigma_v * randn(1, N); % Gaussian noise

for k = 3:N
    x(k) = a1 * x(k-1) + a2 * x(k-2) + b1 * u(k-1) + b2 * u(k-2);
    z(k) = x(k) + v(k);
end

% Recursive Least Squares
P = eye(4); % Covariance matrix
theta = zeros(4, 1); % Parameter vector

lambda = 0.98; % Forgetting factor

for k = 3:N
    Phi = [x(k-1), x(k-2), u(k-1), u(k-2)]'; % Regressor vector
    K = (P * Phi) / (lambda + Phi' * P * Phi);
    theta = theta + K * (z(k) - Phi' * theta);
    P = (P - K * Phi' * P) / lambda;
end

% Results
a1_identified = theta(1);
a2_identified = theta(2);
```

```
b1_identified = theta(3);
b2_identified = theta(4);

disp(['Identified a1: ', num2str(a1_identified)]);
disp(['Identified a2: ', num2str(a2_identified)]);
disp(['Identified b1: ', num2str(b1_identified)]);
disp(['Identified b2: ', num2str(b2_identified)]);

% Z Identification
z_identified = zeros(1, N);
for k = 3:N
    z_identified(k) = a1_identified * z_identified(k-1) + a2_identified * z_identified(k-2) + b1_identified * u(k-1) + b2_identified * u(k-2);
end

% Plot
subplot(2, 2, 1);
plot(u);
title('M Sequence Input');
subplot(2, 2, 2);
plot(x);
title('Output without Noise');
subplot(2, 2, 3);
plot(z);
title('Output with Noise');
subplot(2, 2, 4);
plot(z_identified);
title('Identified Output');
```

七、实验结果及分析

MATLAB 辨识所得参数为

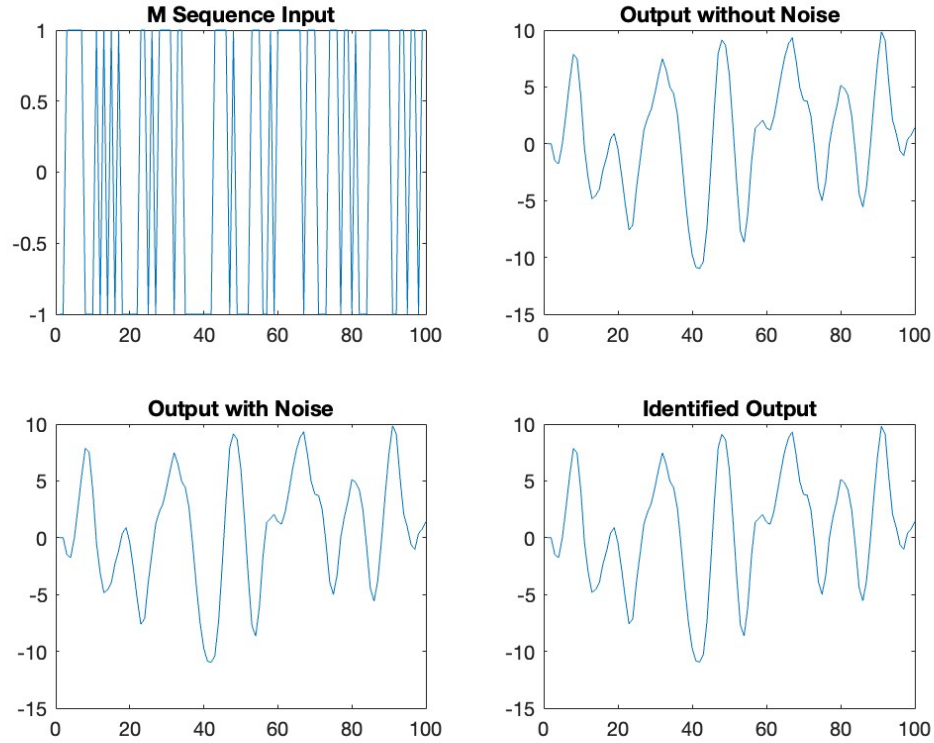
Identified a1: 1.4989

Identified a2: -0.69903

Identified b1: 0.9984

Identified b2: 0.49939

与理论参数相近，说明有良好的辨识效果



八、实验结论

递推最小二乘法在本系统中具有良好的辨识效果。