Tarea Cinco.
Teoría de números uno.

Contreras Mendoza Ximena de la Luz

1 de mayo de 2020

Proposición 1.
Sea f una función multiplicativa y sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Consideremos su factorización en potencia de primos, es decir

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t} \tag{1}$$

Entonces tenemos la siguiente fórmula:

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_t^{\alpha_t}) \tag{2}$$

Demostración. Hacemos inducción sobre la cantidad de factores primos de n *i.e.* $t \geq 1$.

Base: para $t = 1$, supongamos $n = p_1^{\alpha_1}$ inmediatamente $f(n) = f(p_1^{\alpha_1})$. Por lo tanto la formula se cumple para $t = 1$.

H.I. Supongamos que la ecuación (2) se cumple para $t = k - 1$. P.d. es válido para $t = k$. De la ecuación (1) se sigue que $p_i \neq p_t$ para toda $i \in \{1, ..., t-1\} \Longrightarrow (p_i^{\alpha_i}, p_t^{\alpha_t}) = 1$ para toda $i \in \{1, ..., t-1\}$
$\therefore \quad (p_1^{\alpha_1} \cdots p_{t-1}^{\alpha_{t-1}}, p_t^{\alpha_t}) = 1$. Como f es función multiplicativa tenemos que:
$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}) = f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_{t-1}^{\alpha_{t-1}}) f(p_t^{\alpha_s}) \underbrace{=}_{\text{H.I.}} f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_{t-1}^{\alpha_{t-1}}) f(p_t^{\alpha_s})$

□

Ejercicio 1. Define $\widehat{P} := \{p^k \in \mathbb{Z}^+ \mid p$ es primo, $k > 0\}$, es decir $\widehat{P}$ es el conjunto de las potencias de primos. Pruebe que una función multiplicativa está completamente determinada por sus valores en $\widehat{P}$. Más precisamente, pruebe que si f y g son funciones multiplicativas tales que $f(p^\alpha) = g(p^\alpha)$ para toda $p^\alpha \in \widehat{P}$, entonces $f = g$ como funciones.

Demostración. P.d. $f = g$ como funciones. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. P.d. $f(n) = g(n)$. Consideremos la ecuación (1), factorización en potencia de primos de n. Entonces

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}) \underbrace{=}_{\texttt{Proposición 1.}} f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_t^{\alpha_t}) \underbrace{=}_{\texttt{Hipótesis.}} g(p_1^{\alpha_1}) \cdots g(p_t^{\alpha_t}) \underbrace{=}_{\texttt{Proposición 1.}} g(p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}) = g(n)$$

Por lo tanto $f = g$ como funciones. □

Ejercicio 2. Sean f y g funciones multiplicativas. Pruebe que: el producto de f por g es una función multiplicativa, la división de f entre g, con $g \neq 0$ es una función multiplicativa y que la suma de f más g no siempre es multiplicativa cuando f y g lo son.

Demostración. Sean f y g funciones multiplicativas.

1. P.d. $fg(n) := f(n)g(n)$ es multiplicativa. Definimos $h_1 = fg$. Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $(m, n) = 1$, aplicando h_1 al producto mn tenemos que:

$$h_1(mn) = fg(mn) = f(mn)g(mn) \underbrace{=}_{\texttt{Hipótesis.}} f(m)f(n)g(m)g(n) \underbrace{=}_{\texttt{asumiendo que conmutan}} f(m)g(m)f(n)g(n) \underbrace{=}_{\texttt{Hipótesis.}} fg(m)fg(n)$$
$$= h_1(m)h_1(n)$$

Por lo tanto h_1 es multiplicativa.

2. P.d. $f/g(n) := \frac{f(n)}{g(n)}$ con $g \neq 0$, es multiplicativa. Definimos $h_2 = f/g$. Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $(m,n) = 1$, aplicando h_2 al producto mn tenemos que:

$$h_2(mn) = f/g(mn) = \frac{f(mn)}{g(mn)} = \frac{f(m)f(n)}{g(m)g(n)} = \left(\frac{f(m)}{g(m)}\right)\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = (f/g(m))\,(f/g(n))$$
$$= h_2(m)h_2(n)$$

Por lo tanto h_2 es multiplicativa.

3. P.d. $f+g$ no siempre es multiplicativa, cuando f y g lo son.
Contraejemplo.
Sea f la función σ y g la función φ ambas funciones multiplicativas. Tomemos $n = 6 = (2)(3)$. Calculamos $\sigma(6) = 1+2+3+6 = 12, \varphi(6) = 2$. Por otro lado, calculemos $\sigma(2) = 1+2 = 3, \varphi(2) = 1$ y $\sigma(3) = 1+3 = 4, \varphi(3) = 2$. Entonces

$$\sigma + \varphi\ (6) = \sigma(6) + \varphi(6) = 14 \neq 24 = (4)(6) = (\sigma(2)+\varphi(2))(\sigma(3)+\varphi(3)) = (\sigma+\varphi(2))(\sigma+\varphi(3))$$

Por lo tanto $f+g$ no siempre es multiplicativa aun cuando f y g lo sean.

□

Ejercicio 3. Pruebe que para toda $n > 0$,

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$$

.

Demostración. Sean $n > 0, D_n = \{k_1, ..., k_s\}$. Sea

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i} = \frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_s}$$

donde $k_i \mid n, \forall i \in \{1, ..., s\}$. Tomemos una fracción $\frac{1}{k_i}$ y multipliquemos por un uno, entonces

$$\frac{1}{k_i} = \left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{1}{k_i}\right) = \frac{\frac{n}{k_i}}{n}, \forall i \in \{1, ..., s\}.$$

Así nuestra suma nos queda:

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i} = \frac{\frac{n}{k_1}}{n} + ... + \frac{\frac{n}{k_s}}{n} = \frac{\frac{n}{k_1} + ... + \frac{n}{k_s}}{n} \tag{3}$$

Por otro lado, utilizando el resultado.
$d \mid n \Longleftrightarrow \frac{n}{d} \mid n$. Tenemos que:

$$\frac{n}{k_1} + ... + \frac{n}{k_s} = \sum_{d|n} d = \sigma(n) \tag{4}$$

Sustituyendo nuestra ecuación (4) en la ecuación (3) obtenemos el resultado buscado.

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{k_i} = \frac{\sigma(n)}{n}$$

□

Ejercicio 4. Sea n un número perfecto impar. Pruebe que n tiene al menos tres factores primos i.e. $d'(n) > 2$.

Demostración. Supongamos que n es un número perfecto impar y que $d'(n) \leq 2 \Rightarrow d'(n) = 1$ ó $d'(n) = 2$

1. Supongamos que tenemos un número perfecto impar con solo un factor primo i.e. sea n perfecto impar tal que $d'(n) = 1 \Rightarrow n = p^\alpha$, para algún $p \in \mathbb{P}$ con $p \neq 2$ y $\alpha > 0$. Por otro lado, como n es un número perfecto cumple que

$$\sigma(n) = 2n \tag{5}$$

Aplicando la función sigma a $n = p^\alpha$

$$\sigma(n) = \sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \tag{6}$$

Juntando las ecuaciones (5) y (6) tenemos

$$2p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \Rightarrow 2p^{\alpha+1} - 2p^\alpha = p^{\alpha+1} - 1 \Rightarrow\ 1 = 2p^\alpha - p^{\alpha+1} \Rightarrow p \mid 1 \quad \rightarrow\leftarrow$$

Pues p, es primo impar.

2. Supongamos que tenemos un número perfecto impar con solo dos factores primos i.e. sean n perfecto impar tal que $d'(n) = 2 \Rightarrow n = p^\alpha q^\beta$ con $p, q \in \mathbb{P}\backslash\{2\}$ distintos y $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Utilizando que la función sigma es multiplicativa, se cumple

$$\sigma(p^\alpha q^\beta) = \sigma(p^\alpha)\sigma(q^\beta) \tag{7}$$

Juntando la ecuación (5) con la ecuación (7) tenemos

$$2p^\alpha q^\beta = \sigma(p^\alpha)\sigma(q^\beta) \Rightarrow 2 = \left(\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)\left(\frac{\sigma(q^\beta)}{q^\beta}\right)$$

Por el ejercicio 3.

$$2 = \left(\sum_{d|p^\alpha} \frac{1}{d}\right)\left(\sum_{d|q^\beta} \frac{1}{d}\right) = \left(\sum_{i=0}^{\alpha} \frac{1}{p^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\beta} \frac{1}{q^i}\right) < \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{q^i}\right) = \left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{q}{q-1}\right)$$

Ahora como p y q son dos números primos impares distintos. Podemos suponer entonces sin pérdida de generalidad que $p \geq 3$ y $q \geq 5$ con $p < q$. Por lo tanto

$$2 < \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{8} < 2 \quad \rightarrow\leftarrow$$

Juntando la prueba 1. y la prueba 2. concluimos que un número perfecto impar no puede tener solo dos factores primos.

$\square$