Teoria das Categorias e o Sexto Problema de Hilbert

I Encontro Brasileiro em Teoria das Categorias

Yuri Ximenes Martins[1]

Universidade Federal de Minas Gerais
Math-Phys-Cat Group

[1] webpage - nLab page

Plano

1. Apresentação Geral
2. Formalização
3. Bolando uma Estratégia
4. Atacando o Problema

Essa palestra foi baseada em minha dissertação de mestrado e em um pequeno review que escrevi com o professor Rodney Josué Biezuner [1, 2].

Apresentação Geral

Os 23 Problemas

- Em 1900 David Hilbert propôs uma listas dos 23 problemas que, segundo ele, influenciariam a matemática do século XX.

Os 23 Problemas

- Em 1900 David Hilbert propôs uma listas dos 23 problemas que, segundo ele, influenciariam a matemática do século XX.
  - Hipótese do Contínuo

Os 23 Problemas

- Em 1900 David Hilbert propôs uma listas dos 23 problemas que, segundo ele, influenciariam a matemática do século XX.
  - Hipótese do Contínuo
  - Hipótese de Riemann

Os 23 Problemas

- Em 1900 David Hilbert propôs uma listas dos 23 problemas que, segundo ele, influenciariam a matemática do século XX.
  - Hipótese do Contínuo
  - Hipótese de Riemann
  - Existência geral de soluções para problemas variacionais com condições de contorno

Os 23 Problemas

- Em 1900 David Hilbert propôs uma listas dos 23 problemas que, segundo ele, influenciariam a matemática do século XX.
  - Hipótese do Contínuo
  - Hipótese de Riemann
  - Existência geral de soluções para problemas variacionais com condições de contorno
  - Conjectura de Poincaré (*)

Os 23 Problemas

- Em 1900 David Hilbert propôs uma listas dos 23 problemas que, segundo ele, influenciariam a matemática do século XX.
  - Hipótese do Contínuo
  - Hipótese de Riemann
  - Existência geral de soluções para problemas variacionais com condições de contorno
  - Conjectura de Poincaré (*)
  - ...

Os 23 Problemas

- Em 1900 David Hilbert propôs uma listas dos 23 problemas que, segundo ele, influenciariam a matemática do século XX.
  - Hipótese do Contínuo
  - Hipótese de Riemann
  - Existência geral de soluções para problemas variacionais com condições de contorno
  - Conjectura de Poincaré (*)
  - ...

sendo o sexto deles o problema da *Axiomatização da Física*.

Porque Estudá-lo?

- Se você é um **físico**,

Porque Estudá-lo?

- Se você é um **físico**, então a resposta é mais ou menos óbvia;
- Se você é um **matemático**,

Porque Estudá-lo?

- Se você é um **físico**, então a resposta é mais ou menos óbvia;
- Se você é um **matemático**, saiba que nos últimos 30 anos tivemos pelo menos cinco medalhas Fields direta ou indiretamente ligadas ao problema:

Porque Estudá-lo?

- Se você é um **físico**, então a resposta é mais ou menos óbvia;
- Se você é um **matemático**, saiba que nos últimos 30 anos tivemos pelo menos cinco medalhas Fields direta ou indiretamente ligadas ao problema:
  1. Donaldson (1986);

Porque Estudá-lo?

- Se você é um **físico**, então a resposta é mais ou menos óbvia;
- Se você é um **matemático**, saiba que nos últimos 30 anos tivemos pelo menos cinco medalhas Fields direta ou indiretamente ligadas ao problema:
  1. Donaldson (1986);
  2. Drinfeld (1990);

Porque Estudá-lo?

- Se você é um **físico**, então a resposta é mais ou menos óbvia;
- Se você é um **matemático**, saiba que nos últimos 30 anos tivemos pelo menos cinco medalhas Fields direta ou indiretamente ligadas ao problema:
  1. Donaldson (1986);
  2. Drinfeld (1990);
  3. Jones (1990);

Porque Estudá-lo?

- Se você é um **físico**, então a resposta é mais ou menos óbvia;
- Se você é um **matemático**, saiba que nos últimos 30 anos tivemos pelo menos cinco medalhas Fields direta ou indiretamente ligadas ao problema:
  1. Donaldson (1986);
  2. Drinfeld (1990);
  3. Jones (1990);
  4. Witten (1990);

Porque Estudá-lo?

- Se você é um **físico**, então a resposta é mais ou menos óbvia;
- Se você é um **matemático**, saiba que nos últimos 30 anos tivemos pelo menos cinco medalhas Fields direta ou indiretamente ligadas ao problema:
  1. Donaldson (1986);
  2. Drinfeld (1990);
  3. Jones (1990);
  4. Witten (1990);
  5. Kontsevich (1998).

Porque Estudá-lo?

- agora se você gosta de **dinheiro**,

Porque Estudá-lo?

- agora se você gosta de **dinheiro**, então saiba que o sexto problema de Hilbert contém um dos **Problemas do Milênio**

Porque Estudá-lo?

- agora se você gosta de **dinheiro**, então saiba que o sexto problema de Hilbert contém um dos **Problemas do Milênio**

> Mostrar existência de Yang-Mills quânticas em dimensão quatro, para todo grupo de Lie simples e compacto, as quais devem satisfazer certas condições de positividade da massa.

Formalização

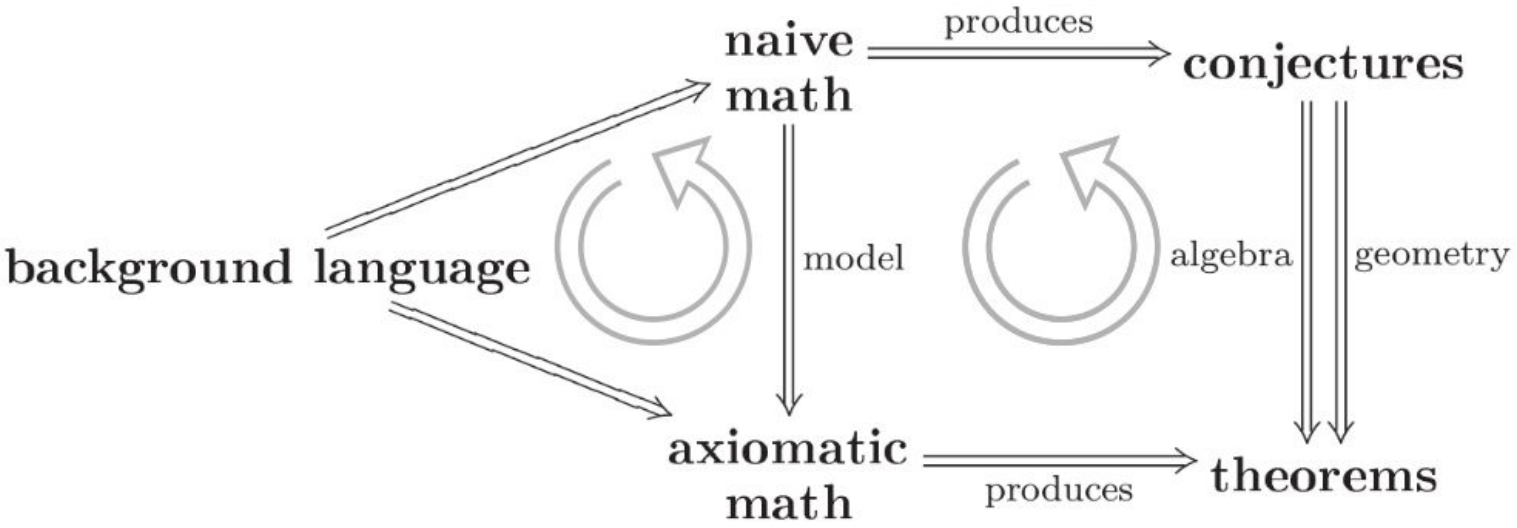
- A **matemática** em um diagrama...

- A **matemática** em um diagrama...

$$\begin{tikzcd}
 & \text{naive math} \\
\text{background language} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & \text{axiomatic math}
\end{tikzcd}$$

- A **matemática** em um diagrama...

- A **matemática** em um diagrama...



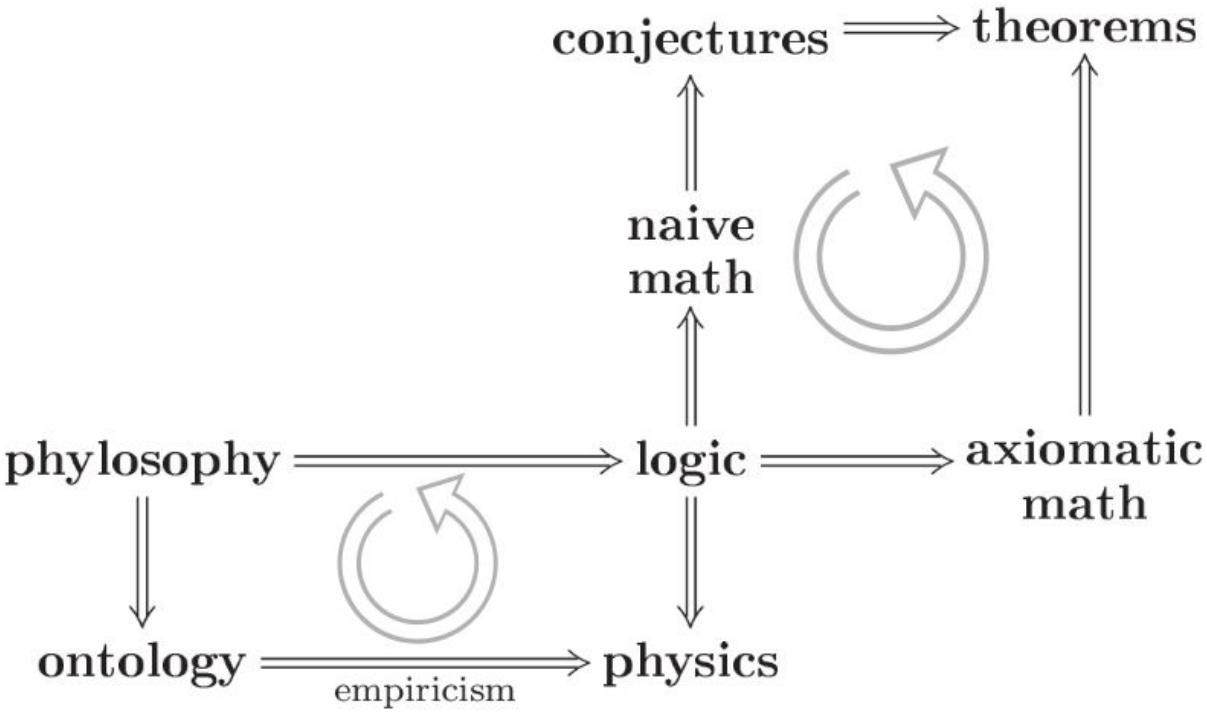
- A **física** em um diagrama...

- A **física** em um diagrama...

$$\begin{tikzcd}
\textbf{phylosophy} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \textbf{logic} \arrow[d, Rightarrow, "\text{mathematical modelling}"] \\
\textbf{ontology} \arrow[r, Rightarrow, "\text{empiricism}"'] \arrow[u, phantom, bend left, "\circlearrowleft"] & \textbf{physics}
\end{tikzcd}$$

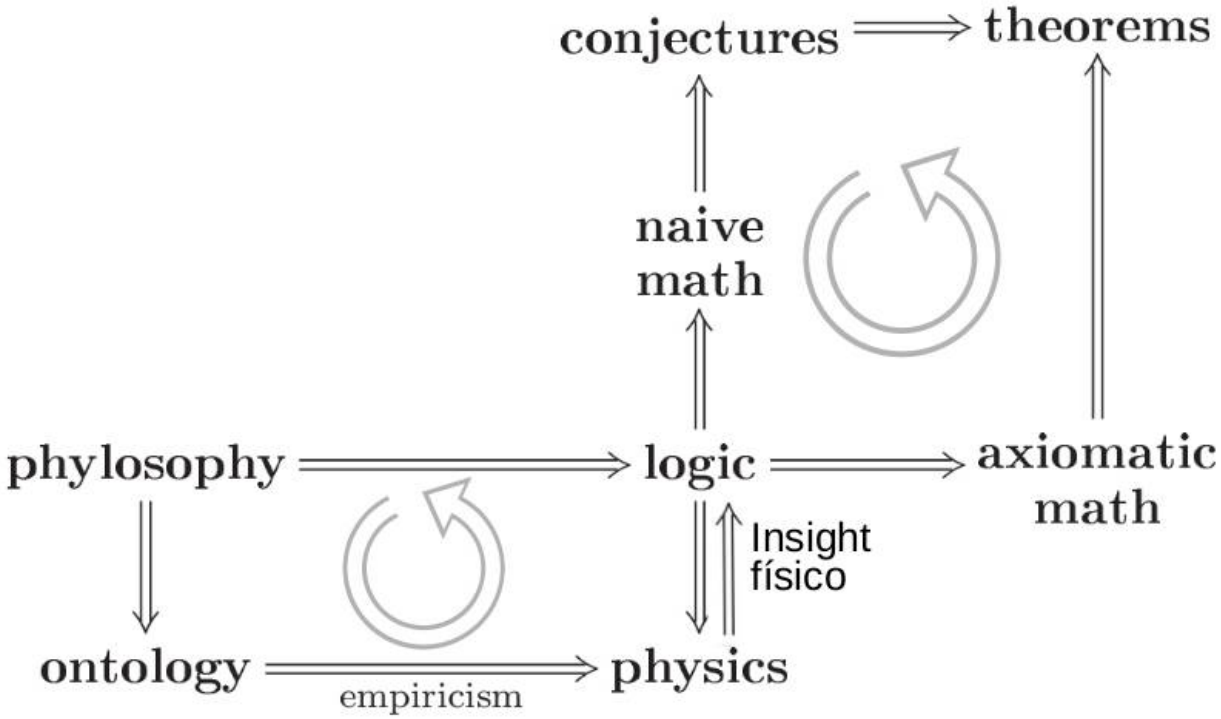
- Colando os diagramas...

- Colando os diagramas...



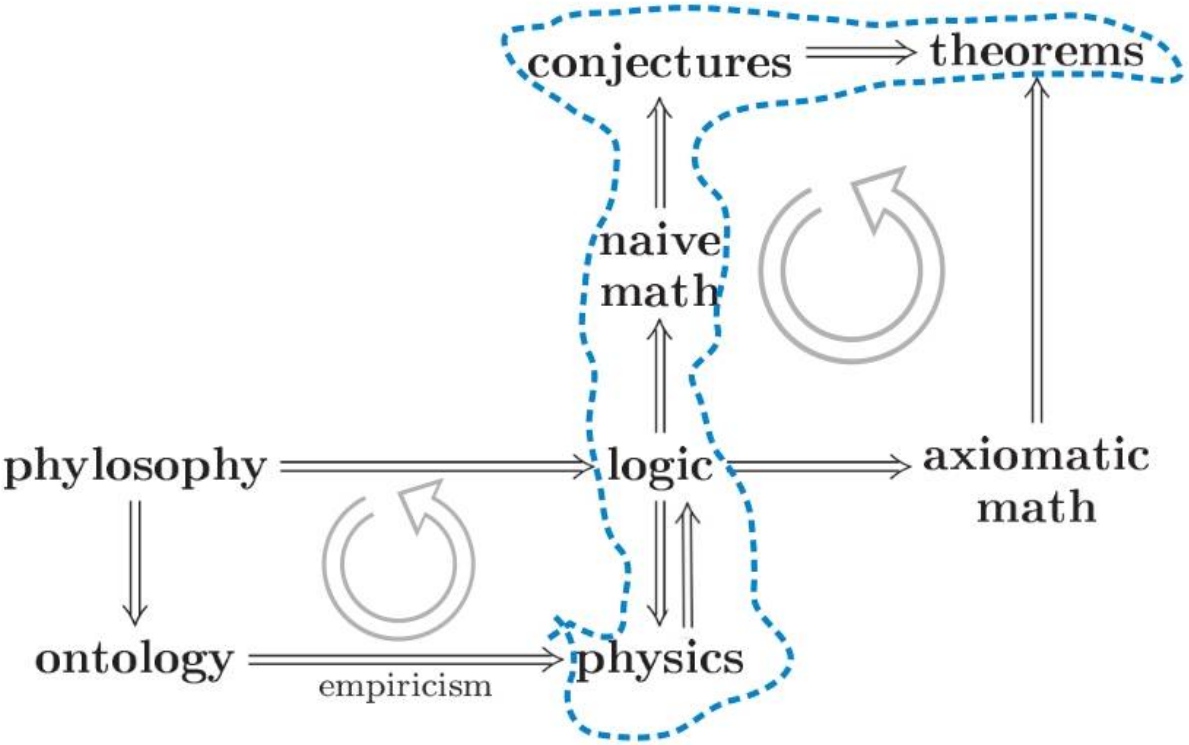
- Conectando os diagramas: o *insight físico*.

- Conectando os diagramas: o *insight físico*.



- Dessa juncção tira-se uma sequência:

- Dessa juncção tira-se uma sequência:



- Dessa juncção tira-se uma sequência:

$$\textbf{physics} \Longleftrightarrow \textbf{logic} \Longrightarrow \begin{array}{c}\textbf{naive}\\ \textbf{math}\end{array} \Longrightarrow \textbf{conjectures} \Longrightarrow \textbf{theorems}$$

- Dessa juncção tira-se uma sequência:

$$\text{physics} \Longleftrightarrow \text{logic} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{naive}\\ \text{math}\end{array} \Longrightarrow \text{conjectures} \Longrightarrow \text{theorems}$$

- Assim:

$$\boxed{\text{physics} \Longrightarrow \text{theorems}}$$

- Dessa juncção tira-se uma sequência:

$$\text{physics} \Longleftrightarrow \text{logic} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{naive}\\ \text{math}\end{array} \Longrightarrow \text{conjectures} \Longrightarrow \text{theorems}$$

- Assim:

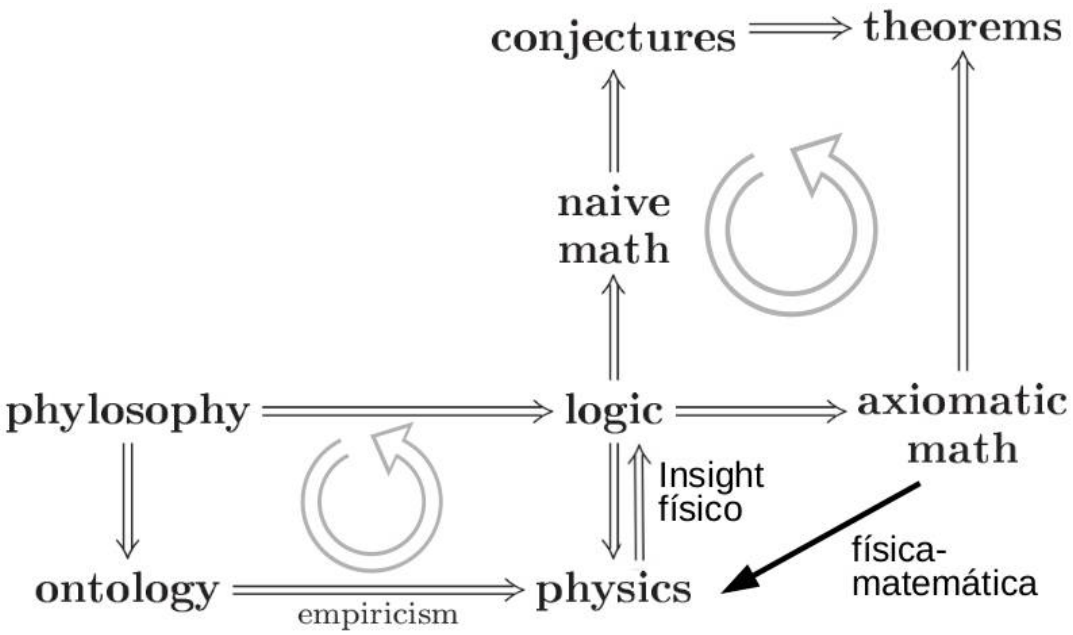
$$\boxed{\text{physics} \Longrightarrow \text{theorems}}$$

- É nessa direção que aparecem os trabalhos de Donaldson, Jones, Witten, Drinfeld, Kontsevich, and so on...

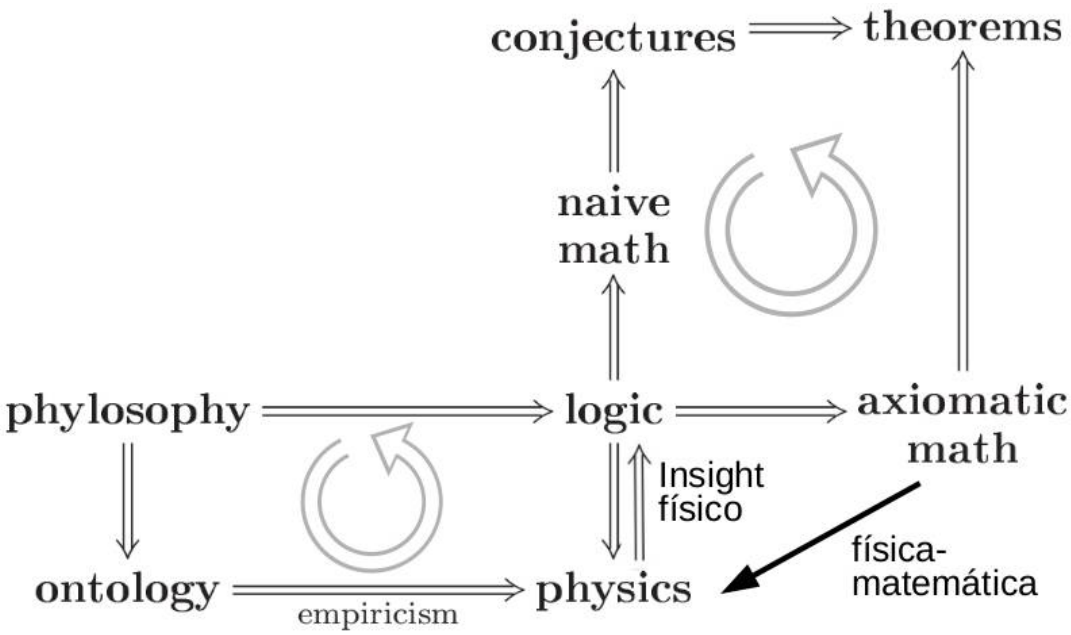
Mas... onde está o sexto problema de Hilbert?

- Compondo *insight físico* com *axiomatização*, obtém-se uma nova seta...

- Compondo *insight físico* com *axiomatização*, obtém-se uma nova seta...



- Compondo *insight físico* com *axiomatização*, obtém-se uma nova seta...



- ... a qual toma o papel de *física-matemática*.

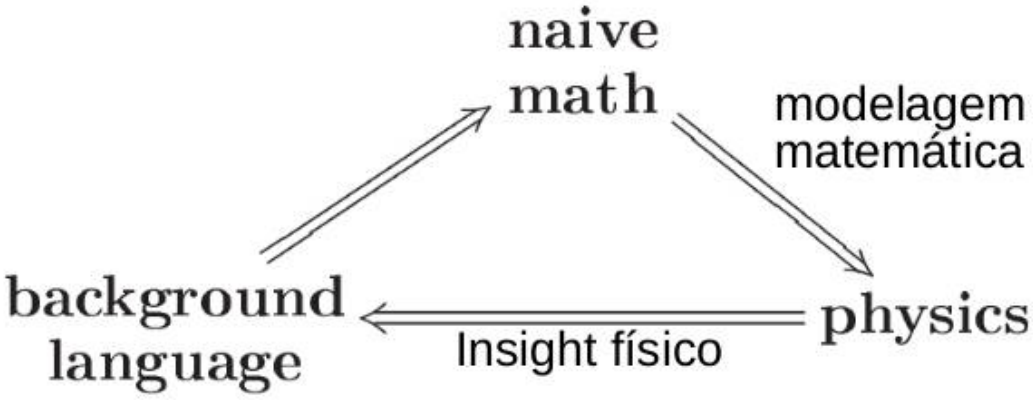
- Com isto em mente, podemos "formalizar" o problema da axiomatização da física:

6th Problema de Hilbert: Encontre uma lógica que realiza física-matemática como uma seta sobrejetora.

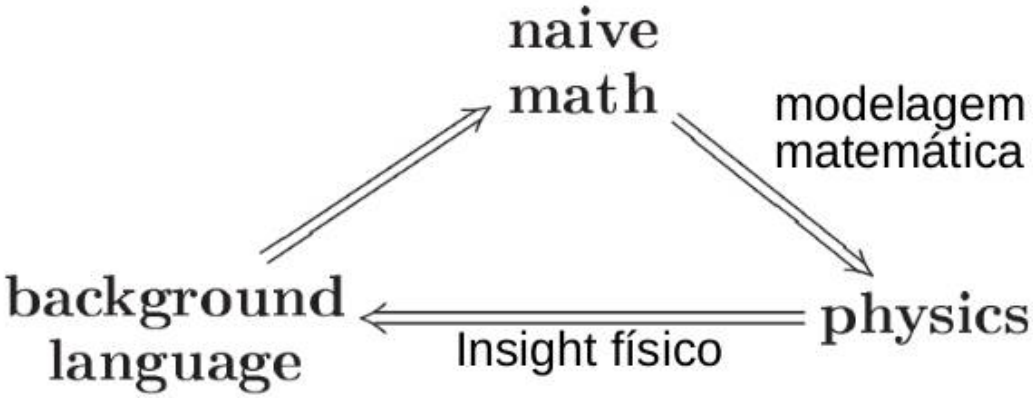
Bolando uma Estratégia

- Fixada uma linguagem subjacente, ela se conecta com a física através do seguinte loop:

- Fixada uma linguagem subjacente, ela se conecta com a física através do seguinte loop:



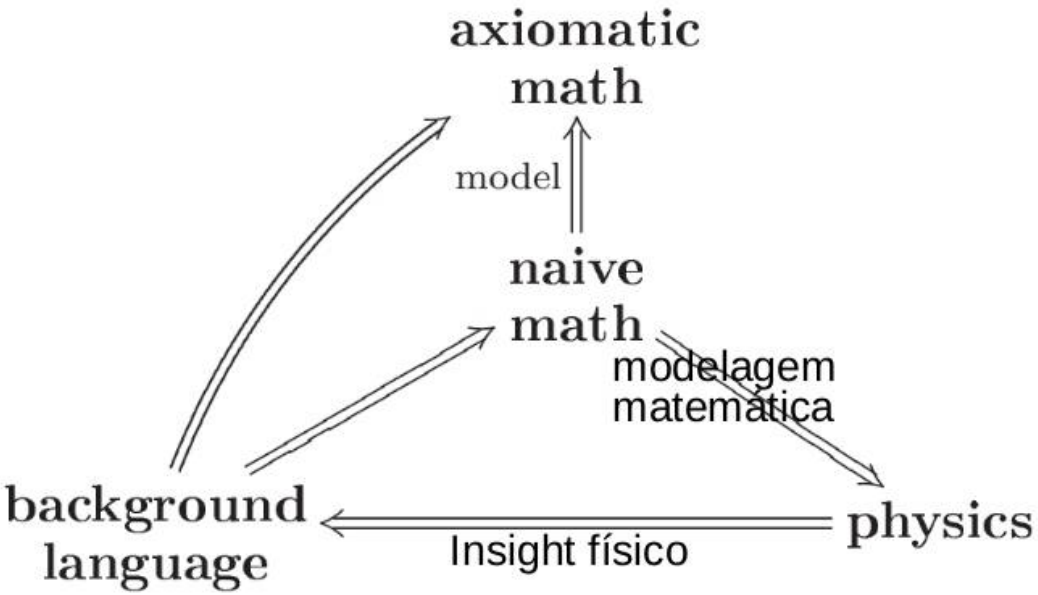
- Fixada uma linguagem subjacente, ela se conecta com a física através do seguinte loop:



- o qual é naturalmente o ponto de partida.

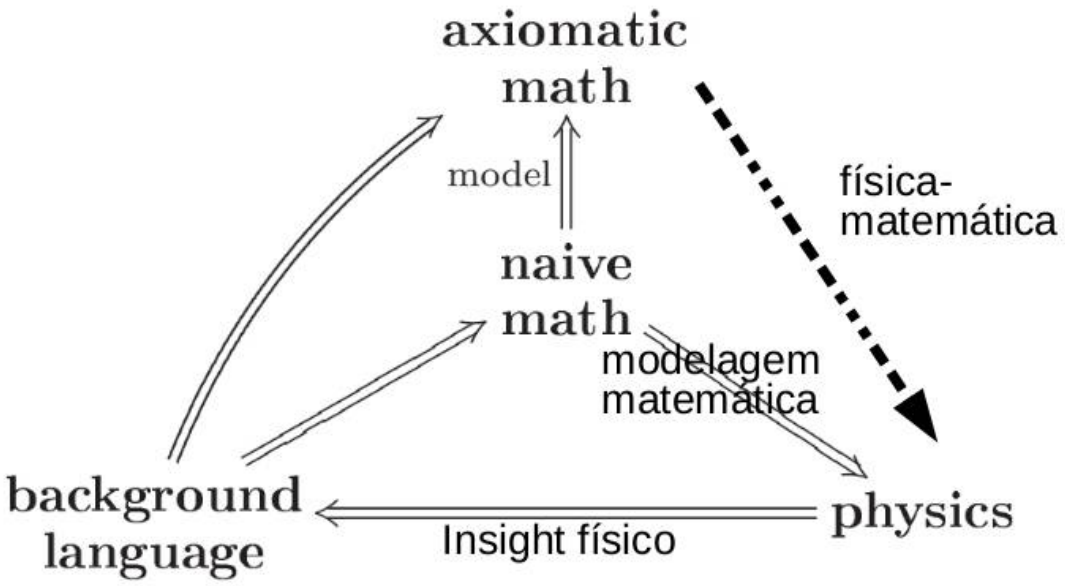
- para um determinado modelo, tem-se a seta

- para um determinado modelo, tem-se a seta



- e devemos construir uma correspondente seta sobrejetora

- e devemos construir uma correspondente seta sobrejetora



- No entanto, do ponto de vista ontológico, a física se divide em duas:

- No entanto, do ponto de vista ontológico, a física se divide em duas: a *clássica* e a *quântica*.

- No entanto, do ponto de vista ontológico, a física se divide em duas: a *clássica* e a *quântica*.

$$\begin{tikzcd} \textbf{classical physics} \arrow[d, Rightarrow] & \\ \textbf{physics} & \textbf{quantum physics} \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

- No entanto, do ponto de vista ontológico, a física se divide em duas: a *clássica* e a *quântica*.

$$\begin{tikzcd} \textbf{classical physics} \arrow[d, Rightarrow] & \\ \textbf{physics} & \textbf{quantum physics} \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

- Assim, tem-se duas formas de tentar construir a seta da física-matemática:

- No entanto, do ponto de vista ontológico, a física se divide em duas: a *clássica* e a *quântica*.

$$\begin{tikzcd} \textbf{classical physics} \arrow[d, Rightarrow] & \\ \textbf{physics} & \textbf{quantum physics} \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

- Assim, tem-se duas formas de tentar construir a seta da física-matemática:

- No entanto, do ponto de vista ontológico, a física se divide em duas: a *clássica* e a *quântica*.

$$\begin{tikzcd} \textbf{classical physics} \arrow[d, Rightarrow] & \\ \textbf{physics} & \textbf{quantum physics} \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

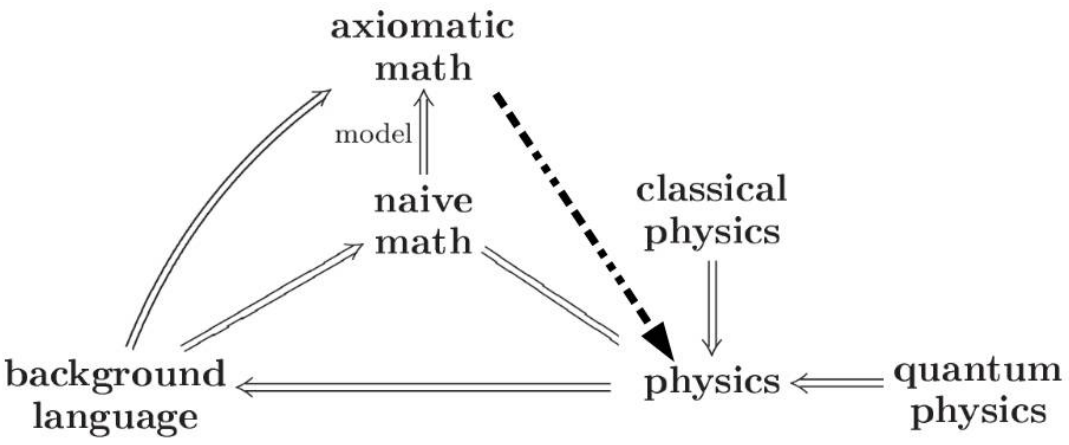
- Assim, tem-se duas formas de tentar construir a seta da física-matemática: *diretamente* ou *indiretamente*.

Forma Direta

- Aqui se ignora a divisão entre física clássica e física quântica.

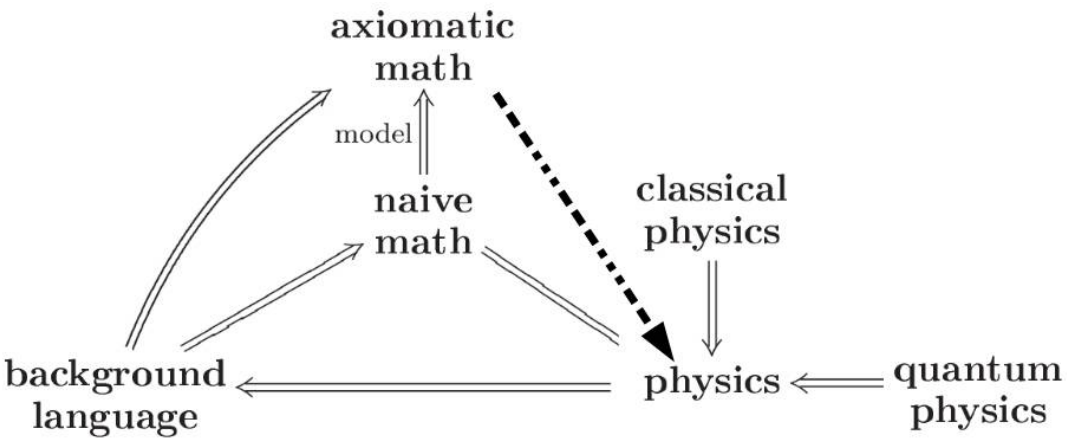
Forma Direta

- Aqui se ignora a divisão entre física clássica e física quântica.



Forma Direta

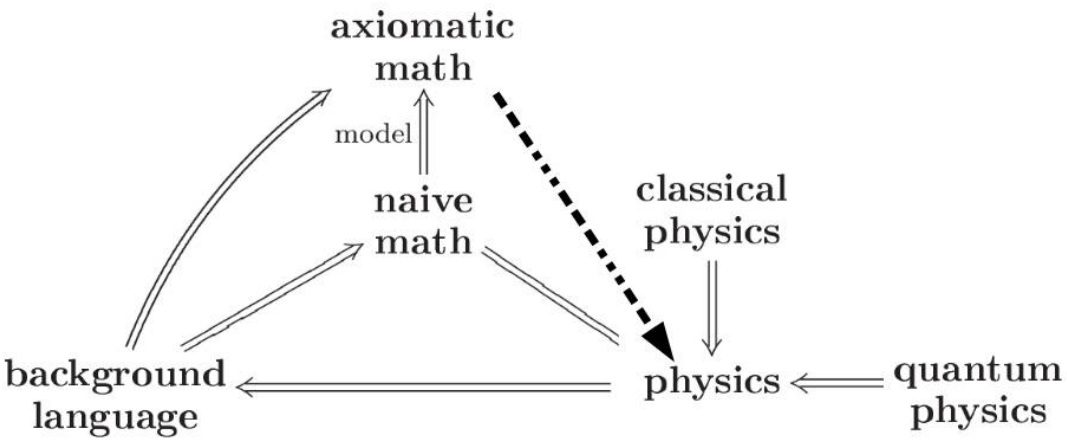
- Aqui se ignora a divisão entre física clássica e física quântica.



- Nesse caso, busca-se a *axiomatização por unificação.*

Forma Direta

- Aqui se ignora a divisão entre física clássica e física quântica.



- Nesse caso, busca-se a *axiomatização por unificação.*

> Unificação é a axiomatização com uma classe conexa de axiomas.

Forma Indireta

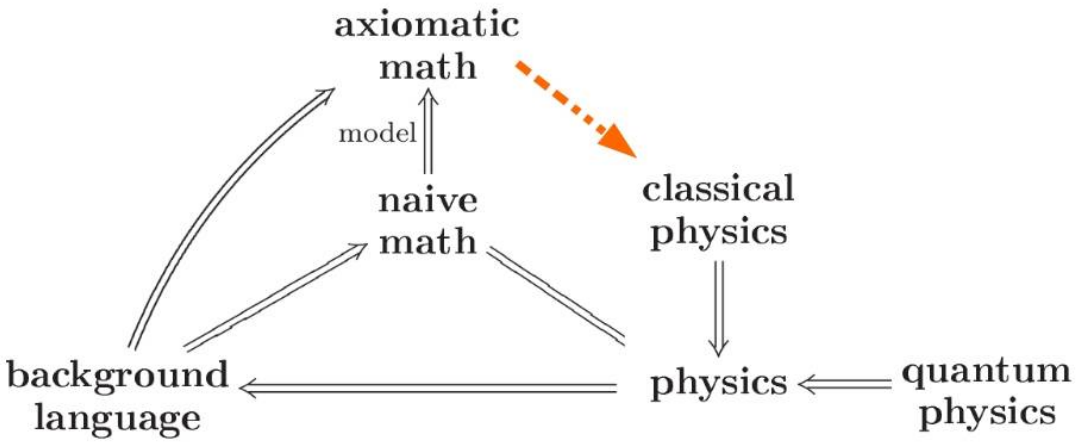
- Aqui se considera a divisão entre física clássica e física quântica.

Forma Indireta

- Aqui se considera a divisão entre física clássica e física quântica.
  1. primeiro se axiomatiza a física clássica

Forma Indireta

- Aqui se considera a divisão entre física clássica e física quântica.
  1. primeiro se axiomatiza a física clássica



Forma Indireta

- Aqui se considera a divisão entre física clássica e física quântica.

Forma Indireta

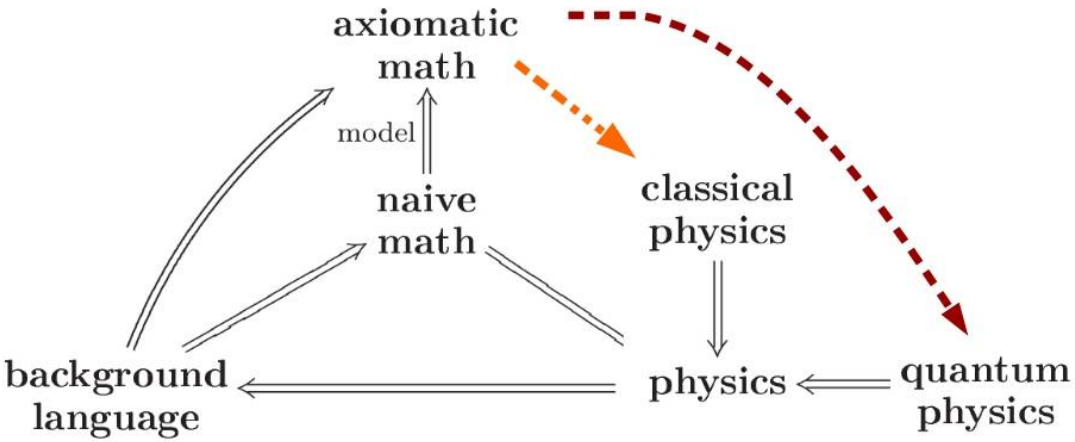
- Aqui se considera a divisão entre física clássica e física quântica.
  1. primeiro se axiomatiza a física clássica

Forma Indireta

- Aqui se considera a divisão entre física clássica e física quântica.
  1. primeiro se axiomatiza a física clássica
  2. depois a física quântica

Forma Indireta

- Aqui se considera a divisão entre física clássica e física quântica.
  1. primeiro se axiomatiza a física clássica
  2. depois a física quântica



Forma Indireta

- Aqui se considera a divisão entre física clássica e física quântica.

Forma Indireta

- Aqui se considera a divisão entre física clássica e física quântica.
  1. primeiro se axiomatiza a física clássica

Forma Indireta

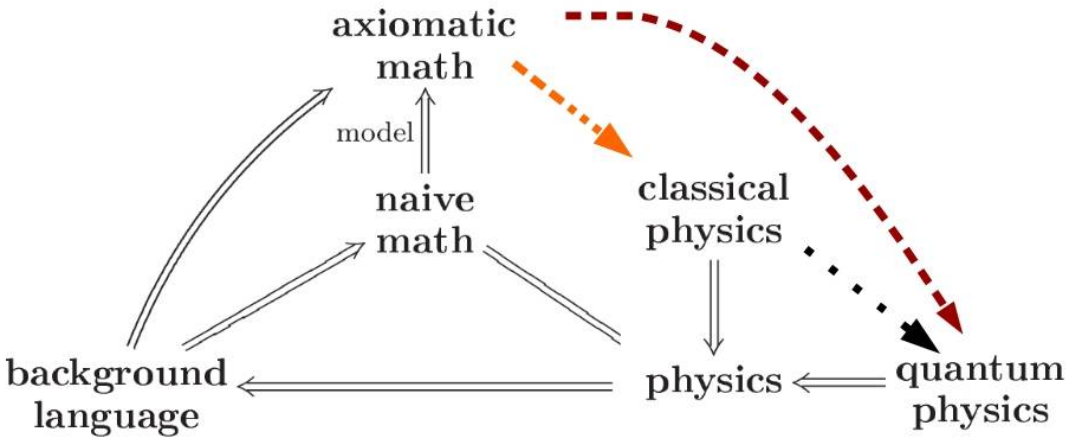
- Aqui se considera a divisão entre física clássica e física quântica.
  1. primeiro se axiomatiza a física clássica
  2. depois a física quântica

Forma Indireta

- Aqui se considera a divisão entre física clássica e física quântica.
  1. primeiro se axiomatiza a física clássica
  2. depois a física quântica
  3. e então se busca uma maneira de conectá-las

Forma Indireta

- Aqui se considera a divisão entre física clássica e física quântica.
  1. primeiro se axiomatiza a física clássica
  2. depois a física quântica
  3. e então se busca uma maneira de conectá-las



Forma Indireta

- Essa maneira (ou um modelo para essa maneira) de conectar axiomas da física clássica e física quântica é chamada de *quantização*.

Forma Indireta

- Essa maneira (ou um modelo para essa maneira) de conectar axiomas da física clássica e física quântica é chamada de *quantização*.

Assim, na perspectiva indireta, para atacar o sexto problema de Hilbert deve-se:

Forma Indireta

- Essa maneira (ou um modelo para essa maneira) de conectar axiomas da física clássica e física quântica é chamada de *quantização*.

Assim, na perspectiva indireta, para atacar o sexto problema de Hilbert deve-se:

1. escolher uma linguagem;

Forma Indireta

- Essa maneira (ou um modelo para essa maneira) de conectar axiomas da física clássica e física quântica é chamada de *quantização*.

Assim, na perspectiva indireta, para atacar o sexto problema de Hilbert deve-se:

1. escolher uma linguagem;
2. axiomatizar a física clássica;

Forma Indireta

- Essa maneira (ou um modelo para essa maneira) de conectar axiomas da física clássica e física quântica é chamada de *quantização*.

Assim, na perspectiva indireta, para atacar o sexto problema de Hilbert deve-se:

1. escolher uma linguagem;
2. axiomatizar a física clássica;
3. axiomatizar a física quântica;

Forma Indireta

- Essa maneira (ou um modelo para essa maneira) de conectar axiomas da física clássica e física quântica é chamada de *quantização*.

Assim, na perspectiva indireta, para atacar o sexto problema de Hilbert deve-se:

1. escolher uma linguagem;
2. axiomatizar a física clássica;
3. axiomatizar a física quântica;
4. construir uma quantização globalmente definida.

Um Parêntesis Quântico

- Durante o processo de axiomatização da física quântica normalmente se considera uma classe "intermediária" de objetos, chamados de *teorias quânticas perturbativas*.

Um Parêntesis Quântico

- Durante o processo de axiomatização da física quântica normalmente se considera uma classe "intermediária" de objetos, chamados de *teorias quânticas perturbativas*.
- toda teoria quântica induz uma teoria perturbativa, da mesma forma que toda função suave f induz uma série de potências: sua séria de Taylor $\Sigma(f) = \sum_n f_n$.

Um Parêntesis Quântico

- Durante o processo de axiomatização da física quântica normalmente se considera uma classe "intermediária" de objetos, chamados de *teorias quânticas perturbativas*.
- toda teoria quântica induz uma teoria perturbativa, da mesma forma que toda função suave f induz uma série de potências: sua séria de Taylor $\Sigma(f) = \sum_n f_n$.
- mas a princípio nem toda teoria quântica é o "limite" de sua teoria perturbativa, da mesma forma que nem toda função suave é o limite de sua série de Taylor (nem toda função suave é analítiva).

Um Parêntesis Quântico

- Em outras palavras, normalmente a projeção não admite uma secção global, que corresponderia a um processo de *completamento*.

$$\begin{tikzcd} \textbf{perturbative physics} \arrow[d, shift left, "\Downarrow"] \\ \textbf{quantum physics} \arrow[u, shift left, "\Downarrow"] \end{tikzcd}$$

Um Parêntesis Quântico

- Por outro lado, quantizações perturbativas costumam existir:

$$\begin{tikzcd}
\textbf{classical physics} \arrow[r, squiggly] & \textbf{perturbative physics} \\
\textbf{physics} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \textbf{quantum physics} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Um Parêntesis Quântico

- Por outro lado, quantizações perturbativas costumam existir:

$$\begin{tikzcd}
\textbf{classical physics} \arrow[r, squiggly] & \textbf{perturbative physics} \\
\textbf{physics} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \textbf{quantum physics} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

- é aqui que aparecem as séries perturbativas da Teoria Quântica de Campos (no sentido dos físicos teóricos)

Um Parêntesis Quântico

- Por outro lado, quantizações perturbativas costumam existir:

$$\begin{tikzcd}
\textbf{classical physics} \arrow[r, squiggly] & \textbf{perturbative physics} \\
\textbf{physics} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \textbf{quantum physics} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

- é aqui que aparecem as séries perturbativas da Teoria Quântica de Campos (no sentido dos físicos teóricos)
- e também diversos fenômenos de deformações, como o trabalhos do Kontsevich para álgebras de Poisson e do Kostello-Gwilliam para P_n-álgebras.

Um Parêntesis Quântico

- Assim, se as teorias pertubativas subjacentes admites um completamento, então uma quantização fica definida:

$$\begin{tikzcd}
\textbf{classical physics} \arrow[r, squiggly] \arrow[dr, dashed] & \textbf{perturbative physics} \arrow[d, shift left, equal] \\
\textbf{physics} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \textbf{quantum physics} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, shift left, equal]
\end{tikzcd}$$

Uma quantização *não-perturbativa* é uma que não se fatora por um completamento, como acima.

Um Parêntesis Quântico

- Existem várias razões pra se buscar quantizações não-perturbativas.

Um Parêntesis Quântico

- Existem várias razões pra se buscar quantizações não-perturbativas.
- Elas se baseiam na fragilidade dos processos perturbativos:

Um Parêntesis Quântico

- Existem várias razões pra se buscar quantizações não-perturbativas.
- Elas se baseiam na fragilidade dos processos perturbativos:
  1. eles são insensíveis á vários sistemas clássicos topológicos, como solitons, instantos, etc.

Um Parêntesis Quântico

- Existem várias razões pra se buscar quantizações não-perturbativas.
- Elas se baseiam na fragilidade dos processos perturbativos:
  1. eles são insensíveis á vários sistemas clássicos topológicos, como solitons, instantos, etc.
  2. eles são insensíveis a determinadas propriedades da matéria, como o intervalo de massa;

Um Parêntesis Quântico

- Existem várias razões pra se buscar quantizações não-perturbativas.
- Elas se baseiam na fragilidade dos processos perturbativos:
  1. eles são insensíveis á vários sistemas clássicos topológicos, como solitons, instantos, etc.
  2. eles são insensíveis a determinadas propriedades da matéria, como o intervalo de massa;
  3. ...

Um Parêntesis Quântico

- Existem várias razões pra se buscar quantizações não-perturbativas.
- Elas se baseiam na fragilidade dos processos perturbativos:
  1. eles são insensíveis á vários sistemas clássicos topológicos, como solitons, instantos, etc.
  2. eles são insensíveis a determinadas propriedades da matéria, como o intervalo de massa;
  3. ...

Em particular, *o problema da quantização dos Problemas do Milênio é sobre quantizações não-perturbativas.*

Atacando o Problema

O Plano

- Seguiremos a abordagem *indireta*.

O Plano

- Seguiremos a abordagem *indireta*.
- Sendo assim, devemos encontrar uma lógica interna a qual possamos:

O Plano

- Seguiremos a abordagem *indireta*.
- Sendo assim, devemos encontrar uma lógica interna a qual possamos:
  1. axiomatizar física clássica;

O Plano

- Seguiremos a abordagem *indireta*.
- Sendo assim, devemos encontrar uma lógica interna a qual possamos:
  1. axiomatizar física clássica;
  2. axiomatizar física quântica;

O Plano

- Seguiremos a abordagem *indireta*.
- Sendo assim, devemos encontrar uma lógica interna a qual possamos:
  1. axiomatizar física clássica;
  2. axiomatizar física quântica;
  3. construir um processo de quantização não-perturbativa.

O Plano

- Seguiremos a abordagem *indireta*.
- Sendo assim, devemos encontrar uma lógica interna a qual possamos:
  1. axiomatizar física clássica;
  2. axiomatizar física quântica;
  3. construir um processo de quantização não-perturbativa.

O Plano

- Seguiremos a abordagem *indireta*.
- Sendo assim, devemos encontrar uma lógica interna a qual possamos:
  1. axiomatizar física clássica;
  2. axiomatizar física quântica;
  3. construir um processo de quantização não-perturbativa.

Afirmação: Modal Homotopy Type Theory (para certas modalidades) é o candidato natural.

O Plano

- Ideia: ver como a afirmação se comporta em alguns modelos.

O Plano

- Ideia: ver como a afirmação se comporta em alguns modelos.

∞-topos cohesivos, com coesão diferencial, funcionam bem:

O Plano

- Ideia: ver como a afirmação se comporta em alguns modelos.

∞-topos cohesivos, com coesão diferencial, funcionam bem:

1. tem-se axiomazacão da física clássica via ∞-stacks geométricos;

O Plano

- Ideia: ver como a afirmação se comporta em alguns modelos.

∞-topos cohesivos, com coesão diferencial, funcionam bem:

1. tem-se axiomazacão da física clássica via ∞-stacks geométricos;
2. tem-se axiomazacão da física quântica via ∞-functores monoidais;

O Plano

- Ideia: ver como a afirmação se comporta em alguns modelos.

∞-topos cohesivos, com coesão diferencial, funcionam bem:

1. tem-se axiomazacão da física clássica via ∞-stacks geométricos;
2. tem-se axiomazacão da física quântica via ∞-functores monoidais;
3. tem-se uma noção de quantização não-perturbativa, chamada de *cohomological quantization*, *motivic quantization* ou *pull-push quantization*.

∞-Topos Cohesivos

Uma ∞-*categoria* $\mathbf{C}$ é uma teoria da homotopia.

- Assim, é um lugar no qual se sabe falar não só de morfismos entre objetos, mas também de

Uma ∞-*functor* $F\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ é uma regra que leva ojetos em objetos, morfismos em morfismos, homotopias em homotopias, etc.

∞-Topos Cohesivos

Uma ∞-*categoria* $\mathbf{C}$ é uma teoria da homotopia.

- Assim, é um lugar no qual se sabe falar não só de morfismos entre objetos, mas também de
  1. homotopias, que são morfismos entre morfismos;

Uma ∞-*functor* $F\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ é uma regra que leva ojetos em objetos, morfismos em morfismos, homotopias em homotopias, etc.

∞-Topos Cohesivos

Uma ∞-*categoria* $\mathbf{C}$ é uma teoria da homotopia.

- Assim, é um lugar no qual se sabe falar não só de morfismos entre objetos, mas também de
  1. homotopias, que são morfismos entre morfismos;
  2. de homotopias entre homotopias, que são morfismos entre homotopias;

Uma ∞-*functor* $F\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ é uma regra que leva ojetos em objetos, morfismos em morfismos, homotopias em homotopias, etc.

∞-Topos Cohesivos

Uma ∞-*categoria* $\mathbf{C}$ é uma teoria da homotopia.

- Assim, é um lugar no qual se sabe falar não só de morfismos entre objetos, mas também de
  1. homotopias, que são morfismos entre morfismos;
  2. de homotopias entre homotopias, que são morfismos entre homotopias;
  3. ...

Uma ∞-*functor* $F\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ é uma regra que leva ojetos em objetos, morfismos em morfismos, homotopias em homotopias, etc.

∞-Topos Cohesivos

Um *topos* (de Grothendieck) é uma categoria $\mathrm{Stack}(\mathbf{C}, J)$ de functores J-locais, onde J é uma noção de cobertura para os objetos de $\mathbf{C}$.

- Assim, os objetos F de um topos associam a cada $X \in \mathbf{C}$ uma certa estrutura $F(X)$ as quais podem ser "localmente" descritas em termos das correspondentes estruturas $F(U_i)_i$ associadas a uma cobertura $(U_i)_i$ de X (...)

∞-Topos Cohesivos

Um *topos* (de Grothendieck) é uma categoria $\mathrm{Stack}(\mathbf{C}, J)$ de functores J-locais, onde J é uma noção de cobertura para os objetos de $\mathbf{C}$.

- Assim, os objetos F de um topos associam a cada $X \in \mathbf{C}$ uma certa estrutura $F(X)$ as quais podem ser "localmente" descritas em termos das correspondentes estruturas $F(U_i)_i$ associadas a uma cobertura $(U_i)_i$ de X (...)
- (...) desde que sejam satisfeitas condições ao longo das "intersecç oes" U_{ij}.

∞-Topos Cohesivos

Um ∞-*topos* é uma uma mistura de ∞-categoria com topos.

- Mais precisamente, é uma ∞-categoria $\infty\,\mathrm{Stack}(\mathbf{C}, J)$ de ∞-functores que associam estruturas $F(X)$ a cada $X \in \mathbf{C}$ e que pode ser descrito em termos de $F(U_i)_i$ para uma dada cobertura $(U_i)_i$ de X (...)

∞-Topos Cohesivos

Um ∞-*topos* é uma uma mistura de ∞-categoria com topos.

- Mais precisamente, é uma ∞-categoria $\infty\,\mathrm{Stack}(\mathbf{C}, J)$ de ∞-functores que associam estruturas $F(X)$ a cada $X \in \mathbf{C}$ e que pode ser descrito em termos de $F(U_i)_i$ para uma dada cobertura $(U_i)_i$ de X (...)
- (...) desde que sejam satisfeitas condições ao longo das "intersecções" U_{ij}

∞-Topos Cohesivos

Um ∞-*topos* é uma uma mistura de ∞-categoria com topos.

- Mais precisamente, é uma ∞-categoria $\infty\,\mathrm{Stack}(\mathbf{C}, J)$ de ∞-functores que associam estruturas $F(X)$ a cada $X \in \mathbf{C}$ e que pode ser descrito em termos de $F(U_i)_i$ para uma dada cobertura $(U_i)_i$ de X (...)
- (...) desde que sejam satisfeitas condições ao longo das "intersecções" U_{ij}
- e ao longo das intersecções entre intersecções U_{ijk}

∞-Topos Cohesivos

Um ∞-*topos* é uma uma mistura de ∞-categoria com topos.

- Mais precisamente, é uma ∞-categoria $\infty\,\mathrm{Stack}(\mathbf{C}, J)$ de ∞-functores que associam estruturas $F(X)$ a cada $X \in \mathbf{C}$ e que pode ser descrito em termos de $F(U_i)_i$ para uma dada cobertura $(U_i)_i$ de X (...)
- (...) desde que sejam satisfeitas condições ao longo das "intersecções" U_{ij}
- e ao longo das intersecções entre intersecções U_{ijk}
- ...

∞-Topos Cohesivos

Os objetos de um ∞-topos são chamados de ∞-*stacks*.

∞-Topos Cohesivos

Os objetos de um ∞-topos são chamados de ∞-*stacks*.

- **Exemplo.** Tem-se um ∞-topos ∞**Grpd** cujos ∞-stacks são constantes.

∞-Topos Cohesivos

Os objetos de um ∞-topos são chamados de ∞-*stacks*.

- **Exemplo.** Tem-se um ∞-topos ∞**Grpd** cujos ∞-stacks são constantes. A Hipótese Homoópica nos diz que a teoria da homotopia descrita por ∞**Grpd** coincide com a de **Top**;
- muitos dos objetos que aparecem na geometria são ∞-stacks, já que podem ser descritos por "funcções de transição", as quais se colam por condições nas intersecções.

∞-Topos Cohesivos

Os objetos de um ∞-topos são chamados de ∞-*stacks*.

- **Exemplo.** Tem-se um ∞-topos $\infty\mathbf{Grpd}$ cujos ∞-stacks são constantes. A Hipótese Homoópica nos diz que a teoria da homotopia descrita por $\infty\mathbf{Grpd}$ coincide com a de **Top**;
- muitos dos objetos que aparecem na geometria são ∞-stacks, já que podem ser descritos por "funcções de transição", as quais se colam por condições nas intersecções.
- **Exemplos**: variedades, G-fibrados, etc.

∞-Topos Cohesivos

Os objetos de um ∞-topos são chamados de ∞-*stacks*.

- **Exemplo.** Tem-se um ∞-topos ∞**Grpd** cujos ∞-stacks são constantes. A Hipótese Homoópica nos diz que a teoria da homotopia descrita por ∞**Grpd** coincide com a de **Top**;
- muitos dos objetos que aparecem na geometria são ∞-stacks, já que podem ser descritos por "funcções de transição", as quais se colam por condições nas intersecções.
- **Exemplos**: variedades, G-fibrados, etc.
- mas a física clássica é usualmente descrita por objetos da geometria **diferencial**.

∞-Topos Cohesivos

Um ∞-topos $\mathbf{H}$ é *cohesivo* se possui a estrutura básica pra se fazer geometria diferencial interna a ele.

∞-Topos Cohesivos

Um ∞-topos $\mathbf{H}$ é *cohesivo* se possui a estrutura básica pra se fazer geometria diferencial interna a ele.

- Mais precisamente, para qualquer $\mathbf{H}$ tem-se uma adjunção

$$\Gamma : \mathbf{H} \rightleftharpoons \infty\mathbf{Grpd} : \mathrm{Disc}$$

∞-Topos Cohesivos

Um ∞-topos $\mathbf{H}$ é *cohesivo* se possui a estrutura básica pra se fazer geometria diferencial interna a ele.

- Mais precisamente, para qualquer $\mathbf{H}$ tem-se uma adjunção

$$\Gamma : \mathbf{H} \rightleftharpoons \infty\mathbf{Grpd} : \mathrm{Disc}$$

- ∞-topos $\mathbf{H}$ é *cohesivo* se a adjunção se estende:

∞-Topos Cohesivos

Um ∞-topos $\mathbf{H}$ é *cohesivo* se possui a estrutura básica pra se fazer geometria diferencial interna a ele.

- Mais precisamente, para qualquer $\mathbf{H}$ tem-se uma adjunção

$$\Gamma : \mathbf{H} \rightleftharpoons \infty\mathbf{Grpd} : \mathrm{Disc}$$

- ∞-topos $\mathbf{H}$ é *cohesivo* se a adjunção se estende:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H} \arrow[r, shift left=3, "\Pi"] \arrow[r, shift right=3, "\Gamma"'] & \infty\mathbf{Gpd} \arrow[l, shift left=3, "\mathrm{Disc}"] \arrow[l, shift right=3, "\mathrm{CoDisc}"'] \end{tikzcd}$$

∞-Topos Cohesivos

- Nesse caso, tem-se as *modalidades básicas* $\sharp$, $\flat$ and Π:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H} \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{Disco}\Gamma"'] & \mathbf{H} \arrow[l, shift right=2, "\mathrm{Disco}\Pi"'] \arrow[l, shift left=2, "\mathrm{coDisco}\Gamma"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{H} \arrow[r, shift right=2, "\flat"'] & \mathbf{H} \arrow[l, shift right=2, "\Pi"'] \arrow[l, shift left=2, "\sharp"] \end{tikzcd}$$

∞-Topos Cohesivos

- Nesse caso, tem-se as *modalidades básicas* $\sharp$, $\flat$ and Π:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H} \arrow[r, shift right, "\mathrm{Disco}\Gamma"'] & \mathbf{H} \arrow[l, shift right, "\mathrm{Disco}\Pi"'] \arrow[l, shift left, "\mathrm{coDisco}\Gamma"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{H} \arrow[r, shift right, "\flat"'] & \mathbf{H} \arrow[l, shift right, "\Pi"'] \arrow[l, shift left, "\sharp"] \end{tikzcd}$$

- as quais induzem (via certos ∞-pullbacks e ∞-pushouts) as *modalidades geométricas* $\flat_{dR}$ e $\mathbf{B}_{\mathrm{conn}}$, que nos permitem fazer geometria diferencial.

∞-Topos Cohesivos

- Nesse caso, tem-se as *modalidades básicas* $\sharp$, $\flat$ and Π:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H} \arrow[r, bend right, "\mathrm{coDisco}\Gamma"'] \arrow[r, bend left, "\mathrm{Disco}\Gamma"] & \mathbf{H} \arrow[l, bend right, "\mathrm{Disco}\Pi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{H} \arrow[r, bend right, "\sharp"'] \arrow[r, bend left, "\flat"] & \mathbf{H} \arrow[l, bend right, "\Pi"'] \end{tikzcd}$$

- as quais induzem (via certos ∞-pullbacks e ∞-pushouts) as *modalidades geométricas* $\flat_{dR}$ e $\mathbf{B}_{\mathrm{conn}}$, que nos permitem fazer geometria diferencial.

Fato importante. Enquanto as modalidades $\flat$, $\sharp$, Π e $\flat_{dR}$ estão definidas em todos os objetos de $\mathbf{H}$, a modalidade $\mathbf{B}_{\mathrm{conn}}$ normalmente está definida somente em objetos duplamente deloopáveis.

Interpretação Cohomológica

- Se $X, A \in \mathbf{H}$ são objetos de uma ∞-categoria, então morfismos (e morfismos entre morfismos, ...) se organizam em em ∞-groupoide $\infty\,\mathrm{Mor}(X; A)$.

Interpretação Cohomológica

- Se $X, A \in \mathbf{H}$ são objetos de uma ∞-categoria, então morfismos (e morfismos entre morfismos, ...) se organizam em em ∞-groupoide $\infty\,\mathrm{Mor}(X; A)$.
- mas ∞-groupoides "são" espaços topológicos.

Interpretação Cohomológica

- Se $X, A \in \mathbf{H}$ são objetos de uma ∞-categoria, então morfismos (e morfismos entre morfismos, ...) se organizam em em ∞-groupoide $\infty\,\mathrm{Mor}(X; A)$.
- mas ∞-groupoides "são" espaços topológicos.
- assim, faz sentido considerar

$$[X; A] = \pi_0(\infty\,\mathrm{Mor}(X; A)).$$

Interpretação Cohomológica

- Se $X, A \in \mathbf{H}$ são objetos de uma ∞-categoria, então morfismos (e morfismos entre morfismos, ...) se organizam em em ∞-groupoide $\infty\,\mathrm{Mor}(X; A)$.
- mas ∞-groupoides "são" espaços topológicos.
- assim, faz sentido considerar

$$[X; A] = \pi_0(\infty\,\mathrm{Mor}(X; A)).$$

Dados $X, A \in \mathbf{H}$, fala-se que $[X; A]$ é a *cohomologia abstrata de X com coeficientes em A*. Escreve-se

$$H^0(X; A) := [X; A].$$

Interpretação Cohomológica

- Se A é n-vezes deloopável, faz sentido ainda definir $H^n(X; A)$.

Interpretação Cohomológica

- Se A é n-vezes deloopável, faz sentido ainda definir $H^n(X;A)$.

> A *cohomologia abstrata de grau n de X com coeficientes em A* Ã©
> $$H^n(X;A) := [X; \mathbf{B}^n A].$$

Interpretação Cohomológica

- Se A é n-vezes deloopável, faz sentido ainda definir $H^n(X;A)$.

> A *cohomologia abstrata de grau n de X com coeficientes em A* Ã©
> $$H^n(X;A) := [X;\mathbf{B}^n A].$$

- o seguinte fato justifica a definição:

Interpretação Cohomológica

- Se A é n-vezes deloopável, faz sentido ainda definir $H^n(X;A)$.

> A *cohomologia abstrata de grau n de X com coeficientes em A* Ã©
> $$H^n(X;A) := [X;\mathbf{B}^n A].$$

- o seguinte fato justifica a definição:

> Todo grupo de cohomologia "usual" é da forma $[X;\mathbf{B}^n A]$ para algum A em alguma ∞-categoria $\mathbf{H}$.

Interpretação Cohomológica

- **Exemplo.** Se $\mathbf{H} = \mathbf{Top}$ e A é um ∞-loop space, então $[X; \mathbf{B}^n A] = [X; A_n]$ é exatamente o n-ésimo grupo de cohomologia do espectro $\mathbb{A} = (A_n)$ de A.

Interpretação Cohomológica

- **Exemplo.** Se $\mathbf{H} = \mathbf{Top}$ e A é um ∞-loop space, então $[X; \mathbf{B}^n A] = [X; A_n]$ é exatamente o n-ésimo grupo de cohomologia do espectro $\mathbb{A} = (A_n)$ de A.
- **Exemplo.** Se $\mathbf{H} = \mathbf{Top}$ e G é um grupo topologico, então $[X; \mathbf{B}G]$ é a cohomologia não abeliana de X com coeficientes no grupo G.

Interpretação Cohomológica

- Se $\mathbf{H}$ é um ∞-topos cohesivo, então podemos usar as modalidades $\flat_{dR}$ e $\mathbf{B}_{\text{conn}}$ para definir novas cohomologias.

Interpretação Cohomológica

- Se $\mathbf{H}$ é um ∞-topos cohesivo, então podemos usar as modalidades $\flat_{dR}$ e $\mathbf{B}_{\text{conn}}$ para definir novas cohomologias.

Dados $X, A \in \mathbf{H}$, com A $n+1$-deloopável, a *cohomologia de Rham abstrata* (resp. *cohomologia diferencial*) de grau $n+1$ (resp. n) de X com coeficientes em A é

$$\begin{aligned} H^{n+1}_{dR}(X;A) &= H^{n+1}(X;\flat_{dR}(\mathbf{B}^{n+1}A)) \\ H^{n}_{\text{diff}}(X;A) &= H^{n}(X;\mathbf{B}^{n}_{\text{diff}}A). \end{aligned}$$

Geometria Diferencial

- Agora podemos esclarecer a razão de ∞-topos cohesivos serem um bom ambiente para se fazer geometria diferencial.

Geometria Diferencial

- Agora podemos esclarecer a razão de ∞-topos cohesivos serem um bom ambiente para se fazer geometria diferencial.
- **Obs.** Se $\mathbf{H} = \mathbf{Top}$ e G é um grupo topologico, então $H^1_{\mathrm{nc}}(X; G) = [X; \mathbf{B}G]$ é classifica G-fibrados.

Geometria Diferencial

- Agora podemos esclarecer a razão de ∞-topos cohesivos serem um bom ambiente para se fazer geometria diferencial.
- **Obs.** Se $\mathbf{H} = \mathbf{Top}$ e G é um grupo topologico, então $H^1_{\mathrm{nc}}(X; G) = [X; \mathbf{B}G]$ é classifica G-fibrados.
- De forma similar o refinamento diferencial $H^1_{\mathrm{diff}}(X; G)$ de $H^1_{\mathrm{nc}}(X; G)$ classifica o "refinamento diferencial" de G-fibrados:

Geometria Diferencial

- Agora podemos esclarecer a razão de ∞-topos cohesivos serem um bom ambiente para se fazer geometria diferencial.
- **Obs.** Se $\mathbf{H} = \mathbf{Top}$ e G é um grupo topologico, então $H^1_{\mathrm{nc}}(X; G) = [X; \mathbf{B}G]$ é classifica G-fibrados.
- De forma similar o refinamento diferencial $H^1_{\mathrm{diff}}(X; G)$ de $H^1_{\mathrm{nc}}(X; G)$ classifica o "refinamento diferencial" de G-fibrados: *G-fibrados com G-conexões.*

Geometria Diferencial

- se G é n-grupo, então $H^n(X; \mathbf{B}^n G)$ classifica, por definição, n-G-fibrados.

Seja $\mathbf{H}$ um ∞-topos cohesivo e $X, A \in \mathbf{H}$ com A $n+1$-deloopável.

Geometria Diferencial

- se G é n-grupo, então $H^n(X; \mathbf{B}^n G)$ classifica, por definição, n-G-fibrados.
- isto nos motiva a *definir*:

Seja $\mathbf{H}$ um ∞-topos cohesivo e $X, A \in \mathbf{H}$ com A $n+1$-deloopável.

Geometria Diferencial

- se G é n-grupo, então $H^n(X; \mathbf{B}^n G)$ classifica, por definição, n-G-fibrados.
- isto nos motiva a *definir*:

Seja $\mathbf{H}$ um ∞-topos cohesivo e $X, A \in \mathbf{H}$ com A $n+1$-deloopável.

- *n-A-fibrados sobre X* são cociclos de $H^n(X; A)$;

Geometria Diferencial

- se G é n-grupo, então $H^n(X; \mathbf{B}^n G)$ classifica, por definição, n-G-fibrados.
- isto nos motiva a *definir*:

Seja $\mathbf{H}$ um ∞-topos cohesivo e $X, A \in \mathbf{H}$ com A $n+1$-deloopável.

- *n-A-fibrados sobre X* são cociclos de $H^n(X; A)$;
- *n-A-fibrados com conexão sobre X* são cociclos de $H^n_{\text{diff}}(X; A)$.

Devolta ao Sexto Problema de Hilbert

- Dado um ∞-topos cohesivo $\mathbb{H}$, precisamos:

Devolta ao Sexto Problema de Hilbert

- Dado um ∞-topos cohesivo $\mathbb{H}$, precisamos:
  1. axiomatizar física clássica;

Devolta ao Sexto Problema de Hilbert

- Dado um ∞-topos cohesivo $\mathbb{H}$, precisamos:
  1. axiomatizar física clássica;
  2. axiomatizar física quântica;

Devolta ao Sexto Problema de Hilbert

- Dado um ∞-topos cohesivo $\mathbb{H}$, precisamos:
  1. axiomatizar física clássica;
  2. axiomatizar física quântica;
  3. construir quantização.

Física Clássica

- Sistemas da física (seja clássica ou quântica) são descritos por sua *cinemática* e sua *dinâmica*.

Física Clássica

- Sistemas da física (seja clássica ou quântica) são descritos por sua *cinemática* e sua *dinâmica*.
- na física clássica, a cinemática é o "espaço de campos" Fields(Σ), onde Σ é uma variedade. Tipicamente,

$$\text{Fields} : \mathbf{Diff} \to \mathbf{H},$$

onde $\mathbf{H} = \infty\mathbf{Grpd}$ ou ∞-groupoides suaves.

Física Clássica

- Sistemas da física (seja clássica ou quântica) são descritos por sua *cinemática* e sua *dinâmica*.
- na física clássica, a cinemática é o "espaço de campos" Fields(Σ), onde Σ é uma variedade. Tipicamente,

$$\text{Fields} : \mathbf{Diff} \to \mathbf{H},$$

  onde $\mathbf{H} = \infty\mathbf{Grpd}$ ou ∞-groupoides suaves.
- **Obs.** ∞-topos possuem hom-interno. Assim, se $X, A \in \mathbf{H}$, então existe $\mathbf{H}(X, A) \in \mathbf{H}$.

Física Clássica

- Sistemas da física (seja clássica ou quântica) são descritos por sua *cinemática* e sua *dinâmica*.
- na física clássica, a cinemática é o "espaço de campos" Fields(Σ), onde Σ é uma variedade. Tipicamente,

$$\text{Fields} : \mathbf{Diff} \to \mathbf{H},$$

  onde $\mathbf{H} = \infty\mathbf{Grpd}$ ou ∞-groupoides suaves.
- **Obs.** ∞-topos possuem hom-interno. Assim, se $X, A \in \mathbf{H}$, então existe $\mathbf{H}(X, A) \in \mathbf{H}$.
- na verdade, nos exemplos da física Fields $\simeq \mathbf{H}(-; \mathbf{Fields})$ em que $\mathbf{Fields} \in \mathbf{H}$ classifica n-conexões em n-fibrados, i.e.,

$$\mathbf{Fields} \simeq \mathbf{B}^n_{\text{conn}} G \times A.$$

Física Clássica

- Assim, para todo cobordismo

$$\begin{tikzcd} & \Sigma & \\ \Sigma_0 \arrow[ur, "\imath_0"] & & \Sigma_1 \arrow[ul, "\imath_1"'] \end{tikzcd}$$

tem-se um correspondente span in **H**.

Física Clássica

- Assim, para todo cobordismo

$$\begin{tikzcd} & \Sigma & \\ \Sigma_0 \arrow[ur, "\imath_0"] & & \Sigma_1 \arrow[ul, "\imath_1"'] \end{tikzcd}$$

tem-se um correspondente span in $\mathbf{H}$.

- Portanto, para todo $p \geq 0$ ganha-se um functor

$$\text{Fields} : \mathbf{Cob}_{p,p+1} \to \text{Span}(\mathbf{H}).$$

Física Clássica

- Assim, para todo cobordismo

$$\begin{tikzcd} & \Sigma & \\ \Sigma_0 \arrow[ur, "\imath_0"] & & \Sigma_1 \arrow[ul, "\imath_1"'] \end{tikzcd}$$

  tem-se um correspondente span in $\mathbf{H}$.

- Portanto, para todo $p \geq 0$ ganha-se um functor

$$\text{Fields} : \mathbf{Cob}_{p,p+1} \to \text{Span}(\mathbf{H}).$$

- adicionando $q \leq p$, tem-se na verdade ∞-functor

$$\text{Fields} : \mathbf{Cob}(p+1) \to \text{Span}_{p+1}(\mathbf{H}).$$

Física Clássica

- a dinâmica dos exemplos usuais da física clássica pode ser descrita por um diagrama comutativo para cada cobordismo:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Fields}(\Sigma) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathrm{Fields}(\Sigma_0) \arrow[rr, Rightarrow, "e^{\frac{i}{\hbar}S_\Sigma}"] \arrow[dr] & & \mathrm{Fields}(\Sigma_1) \arrow[dl] \\
& \mathbf{B}U(1) &
\end{tikzcd}$$

Física Quântica

- existem várias abordagens. Seguiremos a de Atiyah-Witten-Baez-Dolan-Freed.

Uma *teoria quântica em dimensão* p (extended TQFT) com coeficientes numa ∞-categoria monoidal $(\mathbf{D}, \otimes)$ é um ∞-functor monoidal simétrico

$$U : \mathbf{Cob}(p+1) \to \mathbf{D}$$

Quantização

- Fixado ∞-topos cohesivo $\mathbf{H}$, devemos:

Quantização

- Fixado ∞-topos cohesivo $\mathbf{H}$, devemos:
  1. encontrar uma ∞-categoria monoidal $(\mathbf{D}, \otimes)$

Quantização

- Fixado ∞-topos cohesivo $\mathbf{H}$, devemos:
  1. encontrar uma ∞-categoria monoidal $(\mathbf{D}, \otimes)$
  2. associar pra cada

$$\text{Fields} : \mathbf{Cob}(p+1) \to \mathbf{Span}_{p+1}(\mathbf{H})$$

uma correspondente teoria quântica

$$U : \mathbf{Cob}(p+1) \to (\mathbf{D}, \otimes).$$

Quantização

- **Obs.** Se R é ∞-anel (e.g., E_∞-rings), então a ∞-categoria $\infty\mathbf{Mod}_R$ dos módulos sobre R é ∞-monoidal

Quantização

- **Obs.** Se R é ∞-anel (e.g., E_∞-rings), então a ∞-categoria $\infty\mathbf{Mod}_R$ dos módulos sobre R é ∞-monoidal (existe produto smash de espectros no contexto ∞-categórico).
- seja $GL_1(R)$ o ∞-grupo das unidades de R

Quantização

- **Obs.** Se R é ∞-anel (e.g., E_∞-rings), então a ∞-categoria $\infty\mathbf{Mod}_R$ dos módulos sobre R é ∞-monoidal (existe produto smash de espectros no contexto ∞-categórico).
- seja $GL_1(R)$ o ∞-grupo das unidades de R
- tome representação $\rho : U(1) \to GL_1(R)$

Quantização

- **Obs.** Se R é ∞-anel (e.g., E_∞-rings), então a ∞-categoria $\infty\mathbf{Mod}_R$ dos módulos sobre R é ∞-monoidal (existe produto smash de espectros no contexto ∞-categórico).
- seja $GL_1(R)$ o ∞-grupo das unidades de R
- tome representação $\rho : U(1) \to GL_1(R)$
- essa induz mudança de coeficientes na cohomologia não abeliana, de modo que todo $\infty - U(1)-$fibrado se torna um ∞-fibrado em linha sobre R

Quantização

- **Obs.** Se R é ∞-anel (e.g., E_∞-rings), então a ∞-categoria $\infty\mathbf{Mod}_R$ dos módulos sobre R é ∞-monoidal (existe produto smash de espectros no contexto ∞-categórico).
- seja $GL_1(R)$ o ∞-grupo das unidades de R
- tome representação $\rho : U(1) \to GL_1(R)$
- essa induz mudança de coeficientes na cohomologia não abeliana, de modo que todo $\infty - U(1)-$fibrado se torna um ∞-fibrado em linha sobre R
- se E é ∞-fibrado de R-módulos, então $\Gamma(E) \in \infty\mathbf{Mod}_R$

Quantização

- **Obs.** Se R é ∞-anel (e.g., E_∞-rings), então a ∞-categoria $\infty\mathbf{Mod}_R$ dos módulos sobre R é ∞-monoidal (existe produto smash de espectros no contexto ∞-categórico).
- seja $GL_1(R)$ o ∞-grupo das unidades de R
- tome representação $\rho : U(1) \to GL_1(R)$
- essa induz mudança de coeficientes na cohomologia não abeliana, de modo que todo $\infty - U(1)-$fibrado se torna um ∞-fibrado em linha sobre R
- se E é ∞-fibrado de R-módulos, então $\Gamma(E) \in \infty\mathbf{Mod}_R$
- na verdade, $\Gamma : \mathbf{Cob}_q \to \mathrm{CoSpan}(\infty\mathbf{Mod}_R)$

Quantização

- dada teoria clássica, para cada cobordismo $\Sigma : \Sigma_0 \to \Sigma_1$, tem-se o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Fields}(\Sigma) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathrm{Fields}(\Sigma_0) \arrow[rr, Rightarrow, "e^{\frac{i}{\hbar}S_\Sigma}"] \arrow[dr] & & \mathrm{Fields}(\Sigma_1) \arrow[dl] \\
& \mathbf{B}U(1) \arrow[d, dashed, "\rho"] & \\
& \mathbf{B}GL_1(R) &
\end{tikzcd}$$

Quantização

- aplicando $\Gamma : \mathbf{Cob}_q \to \mathrm{CoSpan}(\infty\mathbf{Mod}_R)$ ganha-se

$$\begin{tikzcd} & \Gamma(E(\Sigma)) & \\ \Gamma(E(\Sigma_0)) \arrow[ur, "\imath_0^*"] & & \Gamma(E(\Sigma_1)). \arrow[ul, "\imath_1^*"'] \end{tikzcd}$$

Quantização

- aplicando $\Gamma : \mathbf{Cob}_q \to \mathrm{CoSpan}(\infty\mathbf{Mod}_R)$ ganha-se

$$\begin{tikzcd} & \Gamma(E(\Sigma)) & \\ \Gamma(E(\Sigma_0)) \arrow[ur, "\imath_0^*"] & & \Gamma(E(\Sigma_1)). \arrow[ul, "\imath_1^*"'] \end{tikzcd}$$

- se o fibrado $E(\Sigma_1)$ é orientável na teoria de cohomologia de R, então $\imath_1$ admite não só pullbacks, mas também um pushforward

$$(\imath_1)_* : \Gamma(E(\Sigma_1)) \to \Gamma(E(\Sigma)).$$

Quantização

- Nesse caso, podemos definir a teoria quântica em Σ pela composição

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma(E(\Sigma)) \arrow[dr, dashed, "(\imath_1)_*"'] & \\
\Gamma(E(\Sigma_0)) \arrow[ur, "\imath_0^*"] \arrow[rr, dashed, "U(\Sigma)"'] & & \Gamma(E(\Sigma_1)). \arrow[ul, "\imath_1^*"']
\end{tikzcd}$$

Obrigado

References

[1] Martins, Y. X., *Categorical and Geometrical Methods in Physics*, Master's thesis, UFMG, 2018. Available here.

[2] Martins, Y. X., Biezuner, R. J., *Towards An Approach to Hilbert's Sixth Problem: A Brief Review*, 2020. hal:02909681.