第三节课习题

✓ 2.群的性质

课上我们讲解了什么是群。请根据群定义，求解以下问题：

1. $\{\mathbb{Z},+\}$是否为群？若是，验证其满足群定义；若不是，说明理由。

   根据群定义可知$\{\mathbb{Z},+\}$是群。证明如下：

   封闭性：$\forall z_1,z_2\in\mathbb{Z},\ z_1+z_2\in\mathbb{Z}.$

   结合律：$\forall z_1,z_2,z_3\in\mathbb{Z},\ (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$

   幺元：$\exists\, 0\in\mathbb{Z},\ s.t. \forall z\in\mathbb{Z},\ 0+z=z+0=z.$

   逆：$\forall z\in\mathbb{Z},\ \exists -z\in\mathbb{Z},\ s.t. z+(-z)=0.$

2. $\{\mathbb{N},+\}$是否为群？若是，验证其满足群定义；若不是，说明理由。

   根据群定义可知$\{\mathbb{N},+\}$不是群。证明如下：

   封闭性：$\forall n_1,n_2\in\mathbb{N},\ n_1+n_2\in\mathbb{N}.$

   结合律：$\forall n_1,n_2,n_3\in\mathbb{N},\ (n_1+n_2)+n_3=n_1+(n_2+n_3).$

   幺元：$\exists\, 0\in\mathbb{N},\ s.t. \forall n\in\mathbb{N},\ 0+n=n+0=n.$

   但是不满足逆的性质，对于任意的$n\in\mathbb{N}$无法找到其逆n^{-1}，使得$n+n^{-1}=0$。

3. 解释什么是阿贝尔群。并说明矩阵及乘法构成的群是否为阿贝尔群。

   阿贝尔群（Abel Group）又称交换群或可交换群，它由自身的集合G和二元运算*构成，它除了满足一般的群公理之外，还满足交换律。**因为阿贝尔群的群运算满足交换律和结合律，群元素乘积的值与乘法运算时的次序无关。**

   矩阵乘法构成的群不是阿贝尔群，因为矩阵乘法不满足交换律。

✓ 3.验证向量叉乘的李代数性质

解题思路，将括号部分带入性质定义。

封闭性：集合中任意两元素通过李括号运算得到的结果仍属于集合，$a\times b$得到的结果仍是一个三维向量。

即 $\forall\ X,Y\in\mathbb{R}^3,\text{有}X\times Y\in\mathbb{R}^3.$

双线性：对于$\forall\ X,Y,Z\in\mathbb{R}^3,a,b\in\mathbb{R}$，向量叉乘运算满足乘法分配律，因此可得，

$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z],[Z,aX+bY]=a[Z,X]+b[Z,Y]$满足双线性。

自反性：因为向量和自己叉乘结果为0，集合中元素和自己通过李括号运算结果为0，因此满足自反性。

雅克比等价：对于$\forall\ X,Y,Z\in\mathbb{R}^3$,有

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=X\times(Y\times Z)+Y\times(Z\times X)+Z\times(X\times Y)$$

根据拉格朗日公式$X\times(Y\times Z)=Y(X\cdot Z)-Z(X\cdot Y)$代入上式可得：

$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]&=X\times(Y\times Z)+Y\times(Z\times X)+Z\times(X\times Y)\\&=Y(X\cdot Z)-Z(X\cdot Y)+Z(Y\cdot X)-X(Y\cdot Z)+X(Z\cdot Y)-Y(Z\cdot X)\\&=0\end{aligned}$$

所以满足雅克比等价。

因此 $\mathfrak{g}=(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},\times)$构成李代数。

✓ 4.推导SE(3)的指数映射

推导过程如下：

$$
\begin{aligned}
&\text{设 } \xi = [\rho, \phi]^T \in \mathfrak{se}(3), \\
&\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \\
&\text{其中,} \\
\begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^2 &= \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\phi^\wedge)^2 & \phi^\wedge \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^3 &= \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\phi^\wedge)^3 & \phi^\wedge \phi^\wedge \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \\
&\text{因此,} \\
\begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^n &= \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\phi^\wedge)^n & (\phi^\wedge)^{n-1} \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \\
&\text{将指数映射写成一个泰勒展开可得,} \\
\exp\left(\xi^\wedge\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^n \\
&= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^n \\
&= I + \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^{n-1} \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n \rho \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

式（2）得证。

$$
\begin{aligned}
&\text{令} \phi = \theta a, \text{那么,} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\theta a^\wedge)^n \\
&= I + \frac{1}{2!} (\theta a^\wedge) + \frac{1}{3!} (\theta a^\wedge)^2 + \frac{1}{4!} (\theta a^\wedge)^3 + \cdots \\
&= I + \frac{1}{2!} \theta a^\wedge + \frac{1}{3!} \theta^2 (a^\wedge)^2 + \frac{1}{4!} \theta^3 (a^\wedge)^3 + \cdots \\
&= I + \left(\tfrac{1}{2!} \theta - \tfrac{1}{4!} \theta^3 + \cdots \right) a^\wedge + \left(\tfrac{1}{3!} \theta^2 - \tfrac{1}{5!} \theta^4 + \cdots \right) a^\wedge a^\wedge \\
&= I + \frac{1}{\theta} \left(\tfrac{1}{2!} \theta^2 - \tfrac{1}{4!} \theta^4 + \cdots \right) a^\wedge + \frac{1}{\theta} \left(\tfrac{1}{3!} \theta^3 - \tfrac{1}{5!} \theta^5 + \cdots \right) (a a^T - I)
\end{aligned}
$$

根据泰勒展开式:

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \cdots \\
1 - \cos x &= \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{4!} x^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

得

$$
\begin{gathered}
令\phi=\theta a,, \\
其中，\theta为模长，a为单位长度为1的单位向量 \\
有, a^{\wedge}a^{\wedge}=aa^{T}-I \\
a^{\wedge}a^{\wedge}a^{\wedge}=-a^{\wedge}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\phi^{\wedge})^{n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\theta a^{\wedge})^{n} \\
&= I+\frac{1}{\theta}\left(\tfrac{1}{2!}\theta^{2}-\tfrac{1}{4!}\theta^{4}+\cdots\right)a^{\wedge}+\frac{1}{\theta}\left(\tfrac{1}{3!}\theta^{3}-\tfrac{1}{5!}\theta^{5}+\cdots\right)(aa^{T}-I) \\
&= I+\frac{1-\cos\theta}{\theta}a^{\wedge}+\frac{1}{\theta}\left(\tfrac{1}{3!}\theta^{3}-\tfrac{1}{5!}\theta^{5}+\cdots\right)aa^{T}-\frac{1}{\theta}\left(\tfrac{1}{3!}\theta^{3}-\tfrac{1}{5!}\theta^{5}+\cdots\right)I \\
&= \frac{1-\cos\theta}{\theta}a^{\wedge}+\frac{1}{\theta}\left(\tfrac{1}{3!}\theta^{3}-\tfrac{1}{5!}\theta^{5}+\cdots\right)aa^{T}+\frac{1}{\theta}\left(\theta-\tfrac{1}{3!}\theta^{3}+\tfrac{1}{5!}\theta^{5}+\cdots\right)I \\
&= \frac{1-\cos\theta}{\theta}a^{\wedge}+\frac{1}{\theta}(\theta-\sin\theta)aa^{T}+\frac{\sin\theta}{\theta}I \\
&\triangleq J
\end{aligned}
$$

式（3）得证。

✓ 5.伴随

证明 $Ra^{\wedge}R^{T}=(Ra)^{\wedge}$:

$$
\begin{aligned}
设，\exists\, c &= a^{\wedge}b \\
则，\forall R\in SO(3)\ 有Rc &= (Ra)^{\wedge}(Rb) \\
\Rightarrow c &= R^{-1}(Ra)^{\wedge}Rb \\
因为\ c &= a^{\wedge}b \\
所以\ a^{\wedge} &= R^{-1}(Ra)^{\wedge}R \\
\Rightarrow Ra^{\wedge}R^{-1} &= (Ra)^{\wedge} \\
R^{-1} &= R^{T} \\
得证：Ra^{\wedge}R^{T} &= (Ra)^{\wedge}
\end{aligned}
$$

证明$SO(3)$的伴随性质:

参考资料:

https://math.stackexchange.com/questions/2190603/derivation-of-adjoint-for-so3

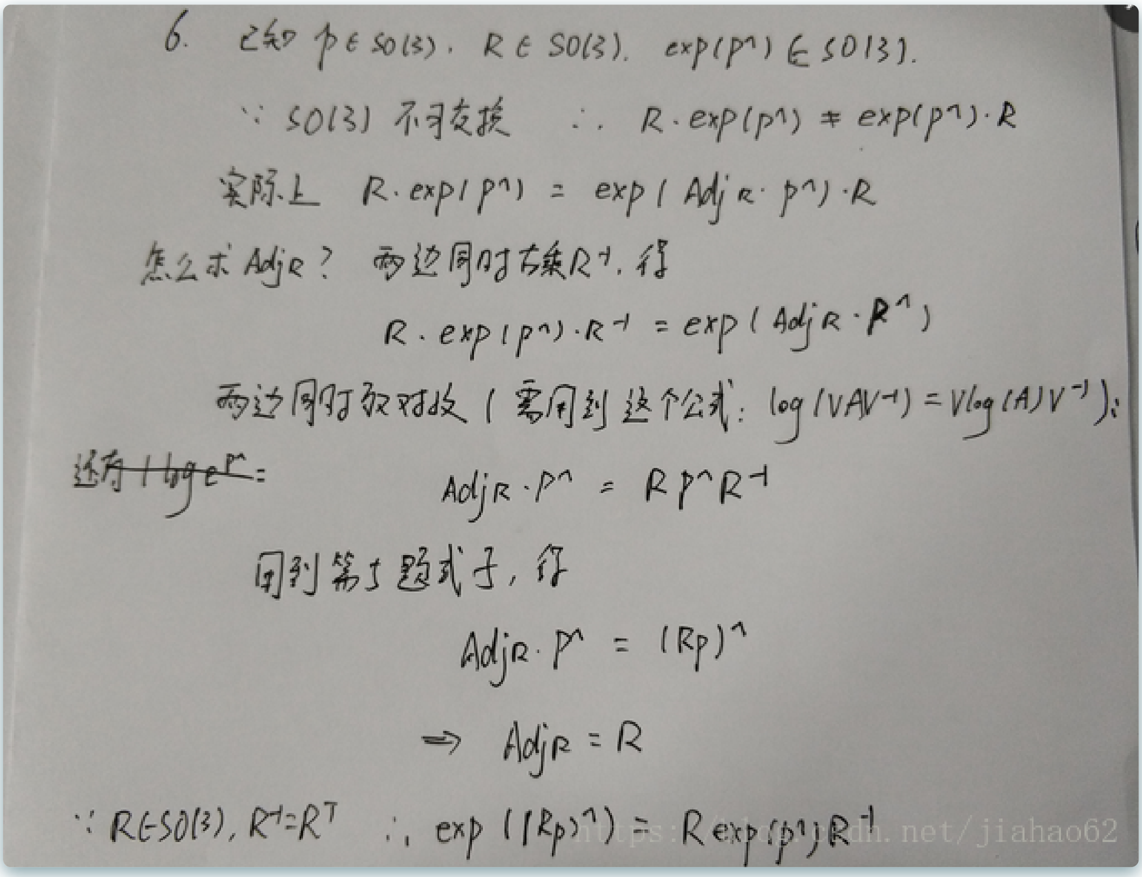
[1] Eade E. Lie groups for 2d and 3d transformations[J]. Revised Dec, 2013, 117: 118.

在上边链接中发现了居然还有这种性质，太好用了！发现自己就是小菜鸡！

$$
\log(VAV^{-1})=V\log(A)V^{-1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{对} R\exp\left(p^{\wedge}\right)R^{T}\text{求对数} \\
&\Rightarrow \ln\left(R\exp\left(p^{\wedge}\right)R^{T}\right) = \ln\left(R\exp\left(p^{\wedge}\right)R^{-1}\right) \\
&\text{根据上图的公式可得} = Rp^{\wedge}R^{-1} \\
&= Rp^{\wedge}R^{T} \\
&= (Rp)^{\wedge} \\
&\text{对等式两边求指数可得：} \\
&R\exp\left(p^{\wedge}\right)R^{T} = \exp\left((Rp)^{\wedge}\right) \\
&\text{得证}
\end{aligned}
$$

注：这一题的证明我走了一些弯路，在阅读了链接中的提示和文献后还是一头雾水，始终没想到怎么用上图中的公式。网上看到了有人是下图这样证明的，但我感觉这样的证明法在第三行直接引入$R\cdot\exp\left(p^{\wedge}\right)=\exp\left(Adj_{R\cdot p^{\wedge}}\right)\cdot R$，这一步我不太理解。希望助教老师如果时间充足的话可以帮忙看下，下图所示的证明方法是否正确？



6. 已知 $p\in so(3)$，$R\in SO(3)$，$\exp(p^{\wedge})\in SO(3)$.

∵ $SO(3)$ 不可交换 ∴ $R\cdot\exp(p^{\wedge}) \neq \exp(p^{\wedge})\cdot R$

实际上 $R\cdot\exp(p^{\wedge}) = \exp(Adj_R\cdot p^{\wedge})\cdot R$

怎么求 Adj_R？两边同时右乘 R^{-1}，得

$R\cdot\exp(p^{\wedge})\cdot R^{-1} = \exp(Adj_R\cdot p^{\wedge})$

两边同时取对数（需用到这个公式：$\log(VAV^{-1}) = V\log(A)V^{-1}$）：

~~还有 log e~~：$Adj_R\cdot p^{\wedge} = Rp^{\wedge}R^{-1}$

用到第5题式子，得

$Adj_R\cdot p^{\wedge} = (Rp)^{\wedge}$

$\Rightarrow Adj_R = R$

∵ $R\in SO(3)$，$R^{-1}=R^{T}$ ∴ $\exp((Rp)^{\wedge}) = R\exp(p^{\wedge})R^{-1}$

img source:https://blog.csdn.net/jiahao62/article/details/80655542

✓ 6.常见函数的求导应用

1. 旋转点对旋转的导数。请分别通过左、右扰动的方式，计算$\frac{\partial Rp}{\partial R}$.

   存在两种解决方法：

   - 对R对应的李代数加上小量，求相对于小量的变化率（导数模型）；
   - 对R左乘或右乘一个小量，求相对于小量的李代数的变化率（扰动模型）。

   注：这里并不能按照矩阵微分来定义导数，$\frac{\partial Rp}{\partial R}$只是非正式的定义方式。

   左右扰动的原理: 对R进行一次扰动ΔR，看结果相对于扰动的变化率。这个扰动可以乘在左边也可以乘在右边，最后结果会有一点微小的差异。

左扰动计算：

设左扰动ΔR对应的李代数为φ，我们可以计算：

$$\frac{\partial (Rp)}{\partial \varphi}.$$

则：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Rp}{\partial R} &= \frac{\partial (Rp)}{\partial \varphi} \\
&= \lim_{\varphi \to 0} \frac{\exp(\varphi^\wedge)\exp(\phi^\wedge)p - \exp(\phi^\wedge)p}{\varphi} \\
\text{泰勒展开} &\approx \lim_{\varphi \to 0} \frac{(I+\varphi^\wedge)\exp(\phi^\wedge)p - \exp(\phi^\wedge)p}{\varphi} \\
&= \lim_{\varphi \to 0} \frac{\varphi^\wedge \exp(\phi^\wedge)p}{\varphi} \\
&= \lim_{\varphi \to 0} \frac{\varphi^\wedge Rp}{\varphi} \\
\text{根据表1中提供的性质可得} &= \lim_{\varphi \to 0} \frac{-(Rp)^\wedge \varphi}{\varphi} \\
&= -(Rp)^\wedge
\end{aligned}$$

右扰动计算：

同理，设右扰动ΔR对应的李代数为φ，我们可以计算：

$$\frac{\partial (Rp)}{\partial \varphi}.$$

则：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Rp}{\partial R} &= \frac{\partial (Rp)}{\partial \varphi} \\
&= \lim_{\varphi \to 0} \frac{\exp(\phi^\wedge)\exp(\varphi^\wedge)p - \exp(\phi^\wedge)p}{\varphi} \\
\text{泰勒展开} &\approx \lim_{\varphi \to 0} \frac{\exp(\phi^\wedge)(I+\varphi^\wedge)p - \exp(\phi^\wedge)p}{\varphi} \\
&= \lim_{\varphi \to 0} \frac{\exp(\phi^\wedge)\varphi^\wedge p}{\varphi} \\
&= \lim_{\varphi \to 0} \frac{R\varphi^\wedge p}{\varphi} \\
&= \lim_{\varphi \to 0} \frac{R\varphi^\wedge R R^T p}{\varphi} \\
\text{根据表1中提供的性质}(Cu)^\wedge = Cu^\wedge C^T\text{可得：} & \\
&= \lim_{\varphi \to 0} \frac{(R\varphi)^\wedge (R^T p)}{\varphi} \\
\text{根据表1中提供的性质}u^\wedge v = -v^\wedge u\text{可得：} & \\
&= \lim_{\varphi \to 0} \frac{-(R^T p)^\wedge R\varphi}{\varphi} \\
&= -(R^T p)^\wedge R
\end{aligned}$$

2. 旋转的复合。请分别通过左、右扰动的方式，计算：

$$\frac{\partial \ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_1}.$$

和

$$\frac{\partial \ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_2}.$$

> 会使用链式法则，但是这里不太懂为什么需要将(R_1R_2)转换成向量形式，也不知道如何处理下尖尖符号。所以下边的求导过程可能错漏百出，还望见谅。经过群里求助大佬，我又重新去看了下BHC公式，BHC公式告诉我们，当处理两个矩阵指数之积时，会产生一些由李括号组成的余项。

左扰动：

BHC线性近似表达：

$$\ln\left(\exp\left(\phi_1^\wedge\right)\exp\left(\phi_2^\wedge\right)\right)^\vee \approx \begin{cases} \mathcal{J}_l(\phi_2)^{-1}\phi_1 + \phi_2 & \text{当}\phi_1\text{为小量时} \\ \mathcal{J}_l(\phi_1)^{-1}\phi_2 + \phi_1 & \text{当}\phi_2\text{为小量时} \end{cases}$$

左乘BHC近似雅克比$\mathcal{J}_l$:

$$\mathcal{J}_l = \mathcal{J} = \frac{\sin\theta}{\theta}I + (1-\frac{\sin\theta}{\theta})aa^T + \frac{(1-\cos\theta)}{\theta}a^\wedge.$$

它的逆：

$$\mathcal{J}_l^{-1} = \frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}I + (1-\frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2})aa^T - \frac{\theta}{2}a^\wedge.$$

通过左扰动的方式计算$\frac{\partial \ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_1}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_1} &= \lim_{\varphi_1\to 0}\frac{\ln(\exp(\varphi_1^\wedge)R_1R_2)^\vee - \ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_1} \\ BHC\text{近似} &\approx \frac{\mathcal{J}_l(\ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}\varphi_1 + \ln(R_1R_2)^\vee - \ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_1} \\ &= \mathcal{J}_l(\ln(R_1R_2)^\vee)^{-1} \end{aligned}$$

好像没有用到链式法则，尽力了，但是写不出来。

通过右扰动的方式计算$\frac{\partial \ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_2}$.

不会写

✓ 7.轨迹的描绘

1. 事实上，T_{WC}的平移部分即构成了机器人的轨迹。它的物理意义是什么？为何画出T_{WC}的平移部分就得到了机器人的轨迹？

首先需要再回顾一下刚体运动的定义，两个坐标系之间的运动由一个旋转加上一个平移组成，这种运动称为刚体运动（课本p43）。而在刚体运动过程中，同一个向量在各个坐标系下的长度和夹角是不发生变化的。

从物理的角度来理解向量这一概念，向量表示一种运动过程。假设摄像机就处于世界坐标系的原点位置（这样好理解一些，其实出于任意位置都可），用T_{WC}表示从相机坐标系到世界坐标系的转换，转换矩阵中包括旋转部分和平移部分。其中旋转部分可以将两个坐标系的x、y、z对齐，平移部分就表示相机的运动轨迹。所以画出T_{WC}的平移部分就得到了机器人的运动轨迹。思考了很久，最终只能理解到这个程度，也不知道对不对。

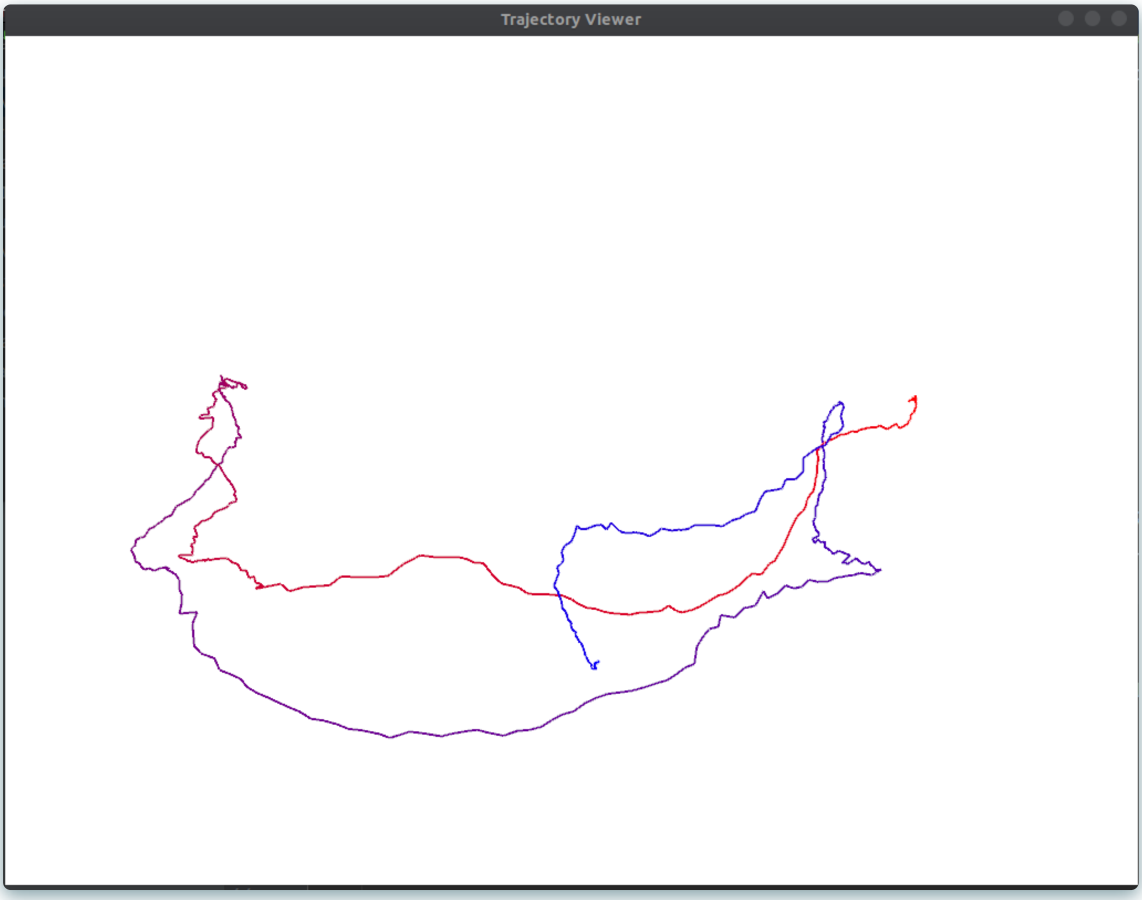
2. 完成数据读取部分代码，让程序run起来。

```
//主要代码
ifstream fin(trajectory_file);
   while (!fin.eof()) {
       double time, tx, ty, tz, qx, qy, qz, qw;
       fin >> time >> tx >> ty >> tz >> qx >> qy >> qz >> qw;
       Sophus::SE3d p1(Eigen::Quaterniond(qw, qx, qy, qz), Eigen::Vector3d(tx, ty, tz));
       poses.push_back(p1);
   }
```

CMakeLists部分代码可见代码文件。

注： 由于Sophus版本不一样，需要将提供的代码中SE3改成SE3d。另外需要在代码中添加unistd.h头文件，否则在编译时会出现unsleep的错误提示。

代码运行结果：



✓ 8.轨迹的误差

本题的代码参考了课本中的示例程序，详细代码和CMakeLists代码可见代码文件。

计算RMSE部分的代码：

```
double rmse = 0;
//for循环求所有位姿李代数的均方根误差
for (size_t i = 0; i < estimated.size(); i++) {
  Sophus::SE3d p1 = estimated[i], p2 = groundtruth[i];
  double error = (p2.inverse() * p1).log().norm();
  rmse += error * error;
}
rmse = rmse / double(estimated.size());
rmse = sqrt(rmse);
cout << "RMSE = " << rmse << endl;
```

轨迹的描绘参考上一题的过程，基本上类似。

得到的误差结果：

```
[100%] Built target trajectoryError
ximing@ubuntu:~/code/slam_code/ch3/task10/build$ ./trajectoryError
RMSE = 2.20727
```

最终效果图如下：