第二章 随机变量及其分布

孙玲

网络空间安全学院

2022 年 9 月 28 日

§2.1 随机变量与分布函数

试验

- 随机事件是对随机试验结果的一种**定性描述**.
- 本章将随机试验的结果**数量化**, 研究其规律.
- 概率论研究的中心内容.

本节主要内容

1. 随机变量
2. 随机变量的分布函数

1. 随机变量

试验的结果

- 许多**随机试验的结果**可以直接用**数量**来表示.
  - 产品中的次品数.
    - $\Omega = \{0件, 1件, 2件, \ldots\} \to \{0, 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$.
  - 射击过程中射手击中的环数.
    - $\Omega = \{0环, 1环, 2环, \ldots, 10环\} \to \{0, 1, 2, \ldots, 10\} \subset \mathbb{R}$.
  - 某段时间内电话总机接到的呼叫次数.
    - $\Omega = \{0次, 1次, 2次, \ldots\} \to \{0, 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$.
- 有一些随机试验的结果不用数量表示，表现为某种属性，然而可以数量化.
  - 在掷硬币试验中，每次出现的结果不是正面就是反面，我们常常数值"1"和"0"分别表示出现正面和反面.
    - $\Omega = \{``出现正面", ``出现反面"\} \to \{1, 0\} \subset \mathbb{R}$.

1. 随机变量

随机试验结果的数量化

- 试验结果都能用一个数 X 表示，这个数 X 随着试验结果的不同而变化，也就是说它是**样本点的函数**.
  - $\Omega=\{0件,1件,2件,\ldots\}\to\{0,1,2,\ldots\}\subset\mathbb{R}$.
  - $\Omega=\{0环,1环,2环,\ldots,10环\}\to\{0,1,2,\ldots,10\}\subset\mathbb{R}$.
  - $\Omega=\{“出现正面”,“出现反面”\}\to\{1,0\}\subset\mathbb{R}$.
- 由于基本事件 (样本点) 的出现是随机的，因而 X 的取值也随机，故称 X 为**随机变量**.

定义 2.1.1 (随机变量)

- 设试验 E 的样本空间为 Ω，如果对每一个样本点 $\omega\in\Omega$，都有唯一实数 $X(\omega)$ 与之对应，称 $X=X(\omega)$ 为样本空间 Ω 上的**随机变量**.

统一书写格式

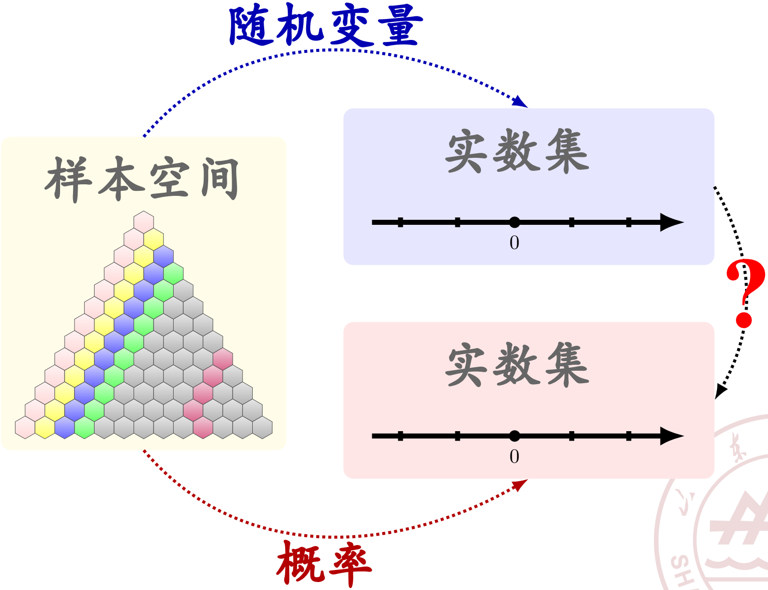
- 随机变量通常用大写字母 X, Y 等表示.

1. 随机变量

随机变量的分类

- **离散型随机变量**: 随机变量取值只有有限个/ 无限可列个数值.
  - 上面列举的例子都属于这一类.
- **连续型随机变量**: 随机变量 X 的所有可能取值不可以逐个列举出来，而是取数轴上某一区间内的任一点.
- 后续课程分别详细讨论离散型与连续型随机变量.

如何通过随机变量研究随机事件概率?



2. 随机变量的分布函数

定义 2.1.2 (概率分布函数)

- 设有随机变量 X, x 是任意一实数, 则函数

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

称为随机变量 X 的**概率分布函数**, 简称**分布函数**.

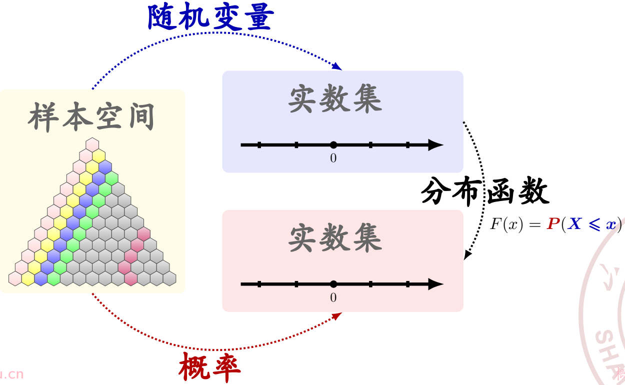
2. 随机变量的分布函数

定义 2.1.2 (概率分布函数)

- 设有随机变量 X, x 是任意一实数, 则函数

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

称为随机变量 X 的**概率分布函数**, 简称**分布函数**.



2. 随机变量的分布函数

定义 2.1.2 (概率分布函数)

- 设有随机变量 X, x 是任意一实数, 则函数

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

称为随机变量 X 的**概率分布函数**, 简称**分布函数**.

分布函数 - 理解

- $F(x)$ 表示随机变量 X 取值不大于实数 x 的概率.
- $F(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的实值函数.
- 对于任意二实数 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, 有

$$P(x_1 < X \leqslant x_2) = P(X \leqslant x_2) - P(X \leqslant x_1) = F(x_2) - F(x_1),$$

表示随机变量 X 的取值落在 $(x_1, x_2]$ 内的概率.
- 分布函数完整地描述了随机变量的**统计规律性**.
- 通过分布函数, 可以用数学分析的方法来研究随机变量.

2. 随机变量的分布函数

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

分布函数的基本性质

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1\ (-\infty < x < +\infty)$.
2. 若 $a < b$, 则 $F(a) \leqslant F(b)$ (单调性).
3. $F(x)$ 是非减函数, 且 $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
4. $F(x)$ 在任何点 x 处右连续, $\lim\limits_{y \to x+} F(y) = F(x)$.
5. $P(X > x) = 1 - F(x)$.

2. 随机变量的分布函数

分布函数 - 例子

- 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{3}, & 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{x}{2}, & 1 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

- 求: (1) $P\left(X \leqslant \frac{1}{2}\right)$; (2) $P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2}\right)$; (3) $P\left(X > \frac{3}{2}\right)$.

2. 随机变量的分布函数

分布函数 - 例子

- 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{x}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

- 求: (1) $P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)$; (2) $P\left(\frac{1}{2}<X\leqslant\frac{3}{2}\right)$; (3) $P\left(X>\frac{3}{2}\right)$.

(1) $P\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$.

(2) $P\left(\frac{1}{2}<X\leqslant\frac{3}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$.

(3) $P\left(X>\frac{3}{2}\right)=1-P\left(X\leqslant\frac{3}{2}\right)=1-\frac{3}{4}$

2. 随机变量的分布函数

分布函数 - 例子

- 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} a + b \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

- 其中 $\lambda > 0$ 为常数, 求常数 a 与 b 的值.

2. 随机变量的分布函数

分布函数 - 例子

- 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} a + b \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

- 其中 $\lambda > 0$ 为常数, 求常数 a 与 b 的值.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a + b \cdot e^{-\lambda \cdot x} = a = 1.$
2. $\lim\limits_{y \to 0+} F(y) = \lim\limits_{y \to 0+} a + b \cdot e^{-\lambda \cdot y} = a + b = F(0) = 0.$

本节主要内容

1. 离散型随机变量的分布律
2. 常见的离散型随机变量
   (1) 退化分布
   (2) 两点分布/伯努利分布
   (3) 二项分布
   (4) 泊松分布
   (5) 几何分布
   (6) 超几何分布 (不放回)
   (7) 帕斯卡分布

1. 离散型随机变量的分布律

离散型随机变量的分布律

- 离散型随机变量的分布律包含:
  1. 随机变量可能的取值.
  2. 取这些值的概率.

定义 2.2.1

- 设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 x_k $(k=1,2,\ldots)$, 而 X 取值 x_k 的概率为 p_k, 即

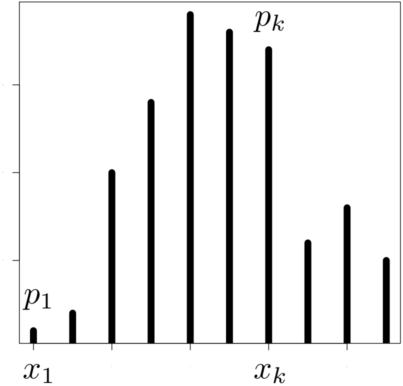
$$P(X=x_k)=p_k,\ k=1,2,\ldots,$$

- 称上式为离散型随机变量 X 的**概率分布**或**分布律**.
- X 的**概率分布表/分布列**.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

离散型随机变量的分布律 - 图示法

- 随机变量的分布律是指随机变量所有可能取的值与这些值的概率间的一种对应关系.
  1. 解析式.
  2. 概率分布表/分布列.
  3. 图示法.



1. 离散型随机变量的分布律

离散型随机变量分布律的两个性质

1. $p_k \geqslant 0,\ k = 1, 2, \ldots.$
2. $\sum\limits_k p_k = 1.$

- 反之，满足上面两个性质的 p_k 也一定可作为某离散型随机变量的概率分布.

离散型随机变量分布律 - 例子

- 设有 10 件产品，其中正品 6 件，次品 4 件，从中任取 3 件产品，用 X 表示从中取出的次品数，求其分布律.

1. 离散型随机变量的分布律

离散型随机变量分布律的两个性质

1. $p_k \geqslant 0,\ k = 1, 2, \ldots$.
2. $\sum\limits_k p_k = 1$.

- 反之，满足上面两个性质的 p_k 也一定可作为某离散型随机变量的概率分布.

离散型随机变量分布律 - 例子

- 设有 10 件产品，其中正品 6 件，次品 4 件，从中任取 3 件产品，用 X 表示从中取出的次品数，求其分布律.
- $X \in \{0, 1, 2, 3\}$.
- $P(X = k) = \dfrac{C_4^k \cdot C_6^{3-k}}{C_{10}^3},\ k = 0, 1, 2, 3.$

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

离散型随机变量分布律 - 例子

- 从次品率为 p 的一批药品中, 有放回地一个一个地抽取, 直到抽到次品为止. 设 X 为所需抽取的药品次数, 求 X 的概率分布.

离散型随机变量分布律 - 例子

- 从次品率为 p 的一批药品中，有放回地一个一个地抽取，直到抽到次品为止. 设 X 为所需抽取的药品次数，求 X 的概率分布.
- n 重伯努利试验，取到正品的概率为 p.
- $P(X=k)=G(k;p)=q^{k-1}\cdot p,\ k=1,2,\ldots.$

1. 离散型随机变量的分布律

离散型随机变量 - 分布函数

- 对于离散型随机变量，给定分布律.
  - 分布函数:

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{x_k \leqslant x} P(X = x_k) = \sum_{x_k \leqslant x} p_k,$$

  - 随机变量取值落入任一区间 G 内的概率:

$$P(X \in G) = \sum_{x_k \in G} P(X = x_k) = \sum_{x_k \in G} p_k.$$

- 分布律 $\Leftrightarrow$ 分布函数.
- 分布律和分布函数**均能**完整描述离散型随机变量统计规律.

1. 离散型随机变量的分布律

离散型随机变量复合事件 - 例子

- 设有 10 件产品, 其中正品 6 件, 次品 4 件, 从中任取 3 件产品, 用 X 表示从中取出的次品数, 求:

(1) X 的分布函数.

(2) $P(0 < X \leqslant 2)$ 及 $P(0 \leqslant X < 2)$.

离散型随机变量复合事件 - 例子

- 设有 10 件产品，其中正品 6 件，次品 4 件，从中任取 3 件产品，用 X 表示从中取出的次品数，求：

(1) X 的分布函数.

(2) $P(0 < X \leqslant 2)$ 及 $P(0 \leqslant X < 2)$.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

- $F(x) = 0,\ x < 0.$
- $F(x) = \frac{1}{6},\ 0 \leqslant x < 1.$
- $F(x) = \frac{2}{3},\ 1 \leqslant x < 2.$
- $F(x) = \frac{29}{30},\ 2 \leqslant x < 3.$
- $F(x) = 1,\ x \geqslant 3.$

(2) $P(0 < X \leqslant 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = F(2) - F(0).$

(2) $P(0 \leqslant X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1).$

2. 常见的离散型随机变量

退化分布

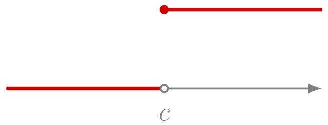
- 若随机变量 X 只取常数值 c, 即

$$P(X=c)=1.$$

- 这时分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<c \\ 1, & x\geqslant c \end{cases}.$$

- X 并不随机, 因此称之为**退化分布**, 又称**单点分布**.

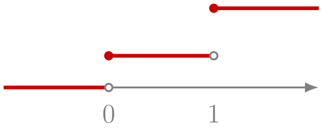


2. 常见的离散型随机变量

伯努利分布/两点分布

- 一次试验中，事件 A 出现的概率为 p，不出现的概率为 $q=1-p$，以 X 记事件 A 出现的次数，则 X 仅取 0 或 1，相应的概率分布为

$$P(X=k)=p^k\cdot q^{1-k}, k=0,1.$$



伯努利分布/两点分布

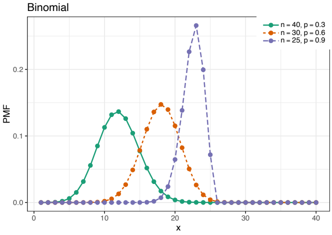
- 两点分布是简单而又常见的概率分布.
- 如：掷硬币试验.

二项分布

- n 重伯努利试验中，若事件 A 出现的次数记为 X，则随机变量 X 可能取的值是 0, 1, 2, ..., n，相应的概率分布为

$$P(X=k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k},\ k=0,1,2,\ldots,n,$$

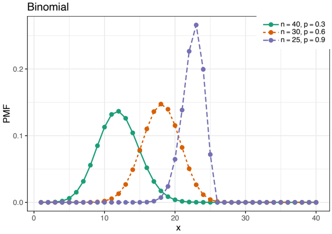
- $p=P(A)$.
- 称 X 服从参数为 n,p 的二项分布，记作 $X\sim B(n,p)$.



二项分布性质 - 概率随 k 的变化趋势

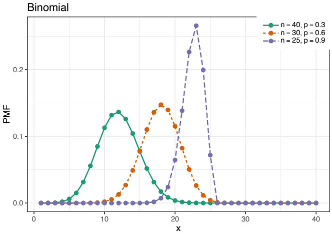
$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}}{C_n^{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq}$$

- 当 $(n+1)p-k>0/k<(n+1)p$ 时:
  - $P(X=k)>P(X=k-1)$, 即概率随 k 值增加而上升.
- 当 $(n+1)p-k<0/k>(n+1)p$ 时:
  - $P(X=k)<P(X=k-1)$, 即概率随 k 值增加而下降.



二项分布性质 - 概率的最大值点

1. 当 $(n+1)p$ 为正整数时:
   - 概率在两点 $k=(n+1)p$ 及 $k=(n+1)p-1$ 均能取最大值.
   - $P(X=k)=P(X=k-1)$.
2. 当 $(n+1)p$ 不是整数时:
   - 二项分布在 $k=\lfloor (n+1)p \rfloor$ 处达到最大值 ($(n+1)p$ 下取整).
     - 设 $n_1<(n+1)p<n_2$, $n_1=\lfloor (n+1)p \rfloor$, $n_2=\lceil (n+1)p \rceil$.
     - $n_1<(n+1)p \Rightarrow P(X=n_1)>P(X=n_1-1)$.
     - $n_2>(n+1)p \Rightarrow P(X=n_2)<P(X=n_2-1)=P(X=n_1)$.
   - $\lfloor (n+1)p \rfloor$ 称为二项分布 $B(n,p)$ **最可能出现次数/最可能值**.



二项分布 - 例子

- 已知某种**大批量**产品的一级品率为 0.2，现从中随机地抽查 20 件，问 20 件产品中恰有 k 件 $(k = 0, 1, \ldots, 20)$ 为一级品的概率是多少？

二项分布 - 例子

- 已知某种**大批量**产品的一级品率为 0.2, 现从中随机地抽查 20 件, 问 20 件产品中恰有 k 件 ($k = 0, 1, \ldots, 20$) 为一级品的概率是多少?
- $P(X = k) = C_{20}^{k} \cdot (0.2)^k \cdot (0.8)^{20-k}, \ k = 0, 1, \ldots, 20.$

2. 常见的离散型随机变量

二项分布 - 例子

- 已知某种**大批量**产品的一级品率为 0.2，现从中随机地抽查 20 件，问 20 件产品中恰有 k 件 ($k = 0, 1, \ldots, 20$) 为一级品的概率是多少？
- $P(X = k) = C_{20}^{k} \cdot (0.2)^{k} \cdot (0.8)^{20-k}$, $k = 0, 1, \ldots, 20$.

二项分布 - 例子

- 设每次射击命中目标的概率为 0.01，现独立射击 400 次，求：
  1. 最可能命中目标的次数及相应的概率.
  2. 至少 3 次命中目标的概率.

2. 常见的离散型随机变量

二项分布 - 例子

- 已知某种**大批量**产品的一级品率为 0.2, 现从中随机地抽查 20 件, 问 20 件产品中恰有 k 件 $(k=0,1,\ldots,20)$ 为一级品的概率是多少?
- $P(X=k) = C_{20}^{k} \cdot (0.2)^{k} \cdot (0.8)^{20-k}$, $k=0,1,\ldots,20$.

二项分布 - 例子

- 设每次射击命中目标的概率为 0.01, 现独立射击 400 次, 求:
  1. 最可能命中目标的次数及相应的概率.
  2. 至少 3 次命中目标的概率.

1. $\lfloor (n+1)p \rfloor = \lfloor 401 \times 0.01 \rfloor = \lfloor 4.01 \rfloor = 4$.
   - $P(X=4) = C_{400}^{4} \cdot (0.01)^{4} \cdot (0.99)^{396}$.
2. $P(X \geqslant 3) = \sum\limits_{k=3}^{400} P(X=k)$.
   - $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$.

二项分布的近似计算

- 当 n 较大时, 计算服从二项分布的随机变量取值的概率非常麻烦, 此时可使用泊松定理近似计算.

定理 2.2.1 (泊松定理)

- 设随机变量 $X_n, (n = 1, 2, \ldots)$ 服从参数 n, p_n 的二项分布, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Proof

- 记 $\lambda_n = np_n$, 则

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= C_n^k \cdot (p_n)^k \cdot (1 - p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

- 对于固定的 k

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^k = \lambda^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}}\right]^{-\lambda_n \cdot \frac{n-k}{n}} = e^{-\lambda}.$$

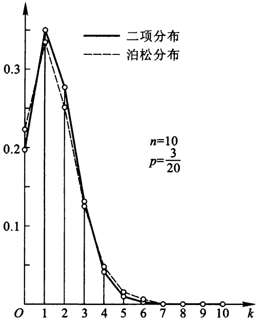
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

2. 常见的离散型随机变量

定理 2.2.1 (泊松定理)

- 设随机变量 X_n, $(n=1,2,\ldots)$ 服从参数 n, p_n 的二项分布, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$



备注

- 根据泊松定理, 当 n 较大而 p 较小时, 有如下近似公式成立:

$$C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\lambda=np.$$

- 在实际应用中, 当 $n>10$, $p<0.1$ 时就可以利用上式近似计算二项分布的概率.