

课后作业 - 2022 年 10 月 26 日

1. 设随机变量 X, Y 相互独立, 其密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

求随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数.

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 分别服从参数为 λ_1 与 λ_2 的指数分布, 求 $Z = \frac{X}{Y}$ 的概率密度.

3. 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立且同分布,

$$P = \begin{cases} 0.6, & X_i = 0 \\ 0.4, & X_i = 1 \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

求行列式 $X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

4. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

求解下列问题:

(1) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

(2) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(3) $P(Y \leq \frac{1}{2} | X \leq \frac{1}{2})$.

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 其中 X 的概率分布为

X	1	2
P	0.3	0.7

Y 的概率密度为 $f(y)$, 求随机变量 $U = X + Y$ 的概率密度 $g(u)$.

6. 设随机变量 X 和 Y 同分布, X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8} \cdot x^2, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

已知事件 $A = \{X > a\}$ 和 $B = \{Y > a\}$ 相互独立, 且 $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, 求常数 a .

7. 设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 内服从均匀分布, 在 $X = x$ ($0 < x < 1$) 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 内服从均匀分布, 求解下列问题.

(1) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

(2) Y 的概率密度.

(3) 概率 $P(X + Y > 1)$.