第六章 参数估计和假设检验 - 知识点地图 Part I

孙玲
山东大学 网络空间安全学院
lingsun@sdu.edu.cn

1. 参数估计的两种形式

1. **点估计**: 根据样本构造统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 用 $\hat{\theta}$ 估计 θ.
   - 称 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 θ 的**估计量**.
   - 称 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 θ 的**估计值**.
2. **区间估计**: 根据样本构造**两个**统计量 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$, 且 $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$, 用区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 估计 θ, 并对事件 "区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 包含 θ" 发生的概率给予一定保证.

2. 矩估计法

- 基本思想: 用**样本的 k 阶原点矩**作为**总体的 k 阶原点矩**的估计, 进而求解未知参数.
- 矩估计法的步骤
  ① 设 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ 为总体 X 的未知参数. **总体 X 的 k 阶原点矩 $E(X^k)$ $(k \leqslant m)$ 存在**, 是 θ 的函数, 不妨记 $\tilde{A}_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = E(X^k)$.
  ② 设**样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的 k 阶原点矩**为 A_k.
  ③ 根据大数定律, $E(X^k)$ 的一个合理估计是样本的 k 阶原点矩 A_k, 有方程组
  $$\begin{cases} \tilde{A}_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = A_1 \\ \tilde{A}_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = A_2 \\ \dots \\ \tilde{A}_m(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = A_m \end{cases}.$$
  ▷ 若上述方程组有唯一解 $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m)$.
  ▷ 估计量 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m)$ 称为未知参数 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ 的**矩估计量**.
- **不论总体服从什么分布, 均值的矩估计量是样本均值, 方差的矩估计量与样本方差相差因子 $\frac{n-1}{n}$.**
- 矩估计法的优点: 只要求知道总体的适当阶矩存在, 不要求知道总体的分布类型, 因而应用广泛.
- 矩估计法两点不足: ① 求解所要求的总体阶矩可能不存在. ② 求解方程组可能很困难.

3. 最大似然估计

- 基本思想: 设总体 X 含有待估参数 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, 参数空间为 Θ. 在 Θ 中选取一个 $\hat{\theta}$, 使得当 $\theta = \hat{\theta}$ 时, 样本观测结果, 即事件 $\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}$ 出现的概率 $L(\theta)$ 达到最大值, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**最大似然估计**.
- 最大似然估计步骤:

Step 1. $L(\theta)$ 的表达式

▷ **离散型**总体 X, 分布概率为 $P(X = a_i) = p(a_i; \theta)$, $i = 1, 2, \dots$, $\theta \in \Theta$,
$$L(\theta) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta).$$
▷ **连续型**总体 X, 概率密度函数为 $f(x; \theta)$, $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$.

Step 2. θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$ 可由似然方程 (组) $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ 求得.

★ 求解似然方程 (组) 得到 $\hat{\theta}$ 后, 还需**验证 $L(\theta)$ 在 $\hat{\theta}$ 处是否取最大值**.
★ 有时 $L(\theta)$ 不是 θ 的连续可导函数, 有时参数空间是有界区域, 此时不能用求解似然方程 (组) 的方法, 一般利用定义进行判断分析求解.
★ **矩估计与最大似然估计有时并不一致**.

5. 区间估计

- 设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是两个统计量, 且 $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$, θ 是总体 X 的未知参数, 若对给定的 $\alpha \in (0,1)$, 有 $P\left(\hat{\theta}_1 \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_2\right) = 1 - \alpha$, 则称随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 是 θ 的一个**区间估计/置信区间**. $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为**置信下限、置信上限**, $1 - \alpha$ 称为**置信水平/置信度**.
  ★ **区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 是随机区间**, 不同样本观测值得到不同区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$.
  ★ 当样本观测值给定后, 区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 可能包含 θ 的真值, 也可能不包含 θ 的真值, $1 - \alpha$ 给出了随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 包含真值 θ 的可信程度.
- 求置信区间的一般方法:

Step 1. 找一个与待估参数 θ 有关的统计量 T, 一般是 θ 的良好点估计.
Step 2. 设法找出 T 和 θ 的函数 $H(T, \theta)$, 要求 $H(T, \theta)$ 的**分布已知且与 θ 无关**, H 称为**枢轴变量**.
Step 3. 寻找适当的常数 c, d, 使 $P(c \leqslant H(T, \theta) \leqslant d) = 1 - \alpha$.
Step 4. 将不等式 $c \leqslant H(T, \theta) \leqslant d$ 等价变形为 $\hat{\theta}_1 \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_2$, 则有 $P\left(\hat{\theta}_1 \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_2\right) = 1 - \alpha$.
  ∗ 随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 即为参数 θ 置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间.

- 置信区间精确性 & 置信水平: 置信区间的长度描述了估计的**精确性**.
  ▷ 置信区间的**长度越小**(置信水平低), 则估计**越精确**.
  ▷ 置信区间的**长度越大**(置信水平高), 则估计**越不精确**.
  ▷ 一般来说, 当样本容量 n 固定后, 置信水平要求越高, 精确性就越差 (置信区间长度长).
  ▷ 增加样本容量 n, 使置信水平和精确性都能达到满意的要求.

7. 双侧检验与单侧检验

- **原假设 H_0 和备择假设 H_1 的具体内容**由**问题的侧重点**确定.
- 原假设 H_0 和备择假设 H_1 本质上都是将参数空间 Θ 分解为两个**互不相容**的子集 Θ_0 和 $\Theta - \Theta_0$, 而后检验参数 θ 属于哪个子集.

  ▷ 如果在数轴上, 集合 $\Theta - \Theta_0$ 位于集合 Θ_0 **两侧**, 这种类型的参数检验称为**双侧检验**.

  ▷ 如果在数轴上, 集合 $\Theta - \Theta_0$ 位于集合 Θ_0 **一侧**, 这种类型的参数检验称为**单侧检验**.

  ★ **对双侧检验, 总按 $\frac{\alpha}{2}$ 查表; 对单侧检验, 总按 α 查表.**

4. 估计量优劣的评价标准

- **无偏性**: 设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是未知参数 θ 的估计量.
  ∗ 若 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**无偏估计**.
  ∗ 若 $E(\hat{\theta}) \neq \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**有偏估计**.
  ∗ 若 $\lim\limits_{n \to +\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**渐近无偏估计**.
  ★ **只要总体均值存在, 样本均值总是它的无偏估计.**
  ★ **只要总体方差存在, 样本方差总是它的无偏估计.**
- **有效性**: $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$**都是**参数 θ 的**无偏估计**, 如果 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$, 则称估计量 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ **有效**. 进一步, 若对于 θ 的任一无偏估计 $\hat{\theta}$, 有 $D(\hat{\theta}_1) \leqslant D(\hat{\theta})$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的 **最小方差无偏估计**.
- **相合性/一致性**: 设对每一个自然数 n, 统计量 $\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是未知参数 θ 的一个估计量, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 有 $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$, 则称 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的**相合/一致估计**.
  ★ 设 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的一个估计量, 若 $\lim\limits_{n \to +\infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$, $\lim\limits_{n \to +\infty} D(\hat{\theta}_n) = 0$, 则 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计.
  ★ **$\overline{X}$ 和 S^2 分别是总体均值 μ 和方差 σ^2 的相合估计.**

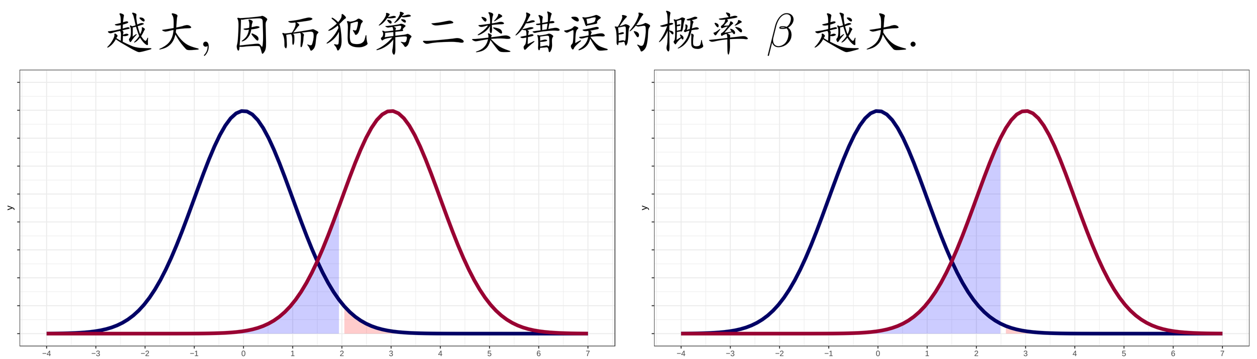
6. 假设检验

- **参数检验**: **已知**总体的**分布形式**, 只对总体的某些**未知参数**取值作出假设, 通过抽样来判断假设是否成立.
- **非参数检验**: **不知道**总体**分布**的具体**类型**, 只对未知分布函数的类型或某些特性提出假设, 然后对这种假设进行检验.
- 假设检验 & 反证法: 假设检验的思路包含反证法的思想, 但不同于一般的反证法.
  ▷ **经典的反证法**假定某个假设成立, 若推出了与事实相矛盾的结论, 则否定原假设. "否定原假设" 是**绝对正确**的.
  ▷ **假设检验中的反证法**假定某个假设成立, 若推出小概率事件发生, 则否定原假设, 这种反证法带有**概率的性质**.
  ∗ 小概率事件不是不可能事件, 只是发生的可能性很小.
  ∗ **假设检验有时要犯错误**, 所得结论与事实可能不符.
- 假设检验步骤:

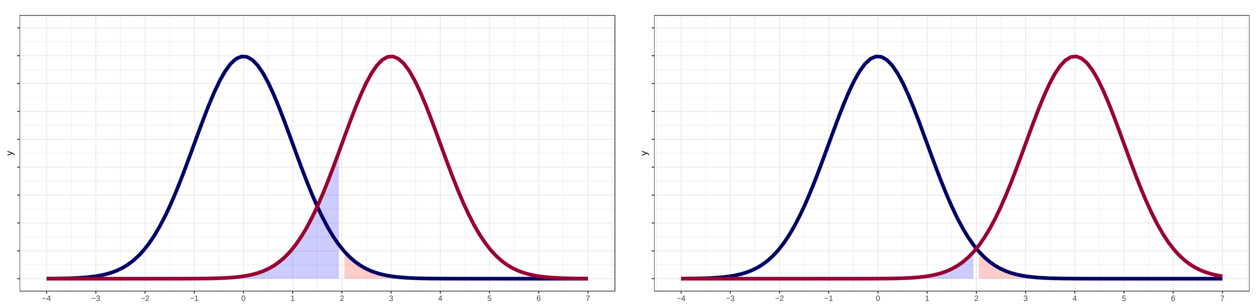
Step 1. 建立假设: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$.
  ∗ H_0 为**原假设**, H_0 对立的假设 H_1 为**备择假设**.
Step 2. 选取检验的统计量, 在 H_0 成立的条件下确定其分布.
Step 3. 选取检验的显著性水平 α 与临界值.
  ∗ **显著性水平** α 就是小概率的具体数值.
    ∗ 一般事先给定, 通常取 $\alpha = 0.05, 0.01$.
  ∗ **临界值**表示使小概率事件发生的统计量的数值界限, 也就是统计量分布的相应分位数.
Step 4. 作判断. 计算统计量的观测值, 与临界值比较, 考察小概率事件是否发生.
  ∗ 若发生, 则否定 H_0, 接受 H_1. 反之, 则接受 H_0.

★ 设 Ω 为样本空间, Ω 中使小概率事件发生的元素构成的集合称为**拒绝域** V, $\Omega - V$ 称为**接受域**.
  ⋆ 若 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V$, 则应拒绝 H_0.
  ⋆ 若 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega - V$, 则应接受 H_0.

- 假设检验的两类错误
  ★ 原假设 H_0 确实成立, 而检验的结果拒绝了 H_0, 称这种错误为**第一类错误**或 **"弃真" 错误**.
    ⋆ 犯第一类错误的概率就是显著性水平 α.
  ★ 原假设 H_0 确实不成立, 而检验的结果接受了 H_0, 称这种错误为**第二类错误**或 **"存伪" 错误**.
  ∗ 当 H_0, H_1 给定时, 若样本容量 n 固定, α 取值越小, u_α 越大, 因而犯第二类错误的概率 β 越大.



∗ 当 α 固定, 样本容量 n 增大时, β 的取值将变小.



∗ 一般通过**适当增加样本容量 n 来使 α, β 都达到很小.**

第六章 参数估计和假设检验 - 知识点地图 Part II

孙玲
山东大学 网络空间安全学院
lingsun@sdu.edu.cn

8. 统计推断核心内容

参数估计

点估计

矩估计

总体 X
（概率密度函数/分布函数含未知变量 θ）

一阶原点矩 $\widetilde{A}_1(\theta) = E(X)$

二阶原点矩 $\widetilde{A}_2(\theta) = E(X^2)$

$\cdots$

k 阶原点矩 $\widetilde{A}_k(\theta) = E(X^k)$

样本
$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

一阶原点矩 $A_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$

二阶原点矩 $A_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

$\cdots$

k 阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^k$

最大似然估计

总体 X
（概率密度函数/分布函数含未知变量 θ）

样本
$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

样本的一组观测值 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 已出现

记事件 $A = \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\}$

用总体的密度函数求事件 A 发生的概率 $P(A)$

使得 $P(A)$ 最大化的 $\hat{\theta}$ 即为 θ 的最大似然估计

区间估计

总体 X
待估参数 θ

样本
统计量 T（通常是 θ 的点估计量）

构造关于 θ, T 的**枢轴变量** $H(T,\theta)$ ($H(T,\theta)$ 的分布已知且与 θ 无关)

寻找适当的常数 c, d, 使 $P\,(c \leqslant H(T,\theta) \leqslant d) = 1-\alpha$

将不等式 $c \leqslant H(T,\theta) \leqslant d$ 等价变形, 使得 $P\left(\hat{\theta}_1 \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_2\right) = 1-\alpha$

随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 即为参数 θ 的**置信水平**为 $1-\alpha$ 的**置信区间**

假设检验（参数假设检验）

原假设 H_0

备择假设 H_1

假设 H_0 成立

若小概率事件未发生

若小概率事件发生

选取统计量 & 确定其分布

选取显著性水平 & 临界值

第六章 参数估计和假设检验 - 知识点地图 Part III

孙玲
山东大学 网络空间安全学院
lingsun@sdu.edu.cn

9. 正态总体的区间估计表

单个正态总体

关于均值的区间估计

条件	枢轴变量	置信区间
方差 σ^2 已知	$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\left[\overline{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
方差 σ^2 未知	$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left[\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

关于方差的区间估计

条件	枢轴变量	置信区间
均值 μ 已知	$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$	$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$
均值 μ 未知	$\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left[\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

两个正态总体

关于两个均值差的区间估计

条件	枢轴变量	置信区间
σ_1^2, σ_2^2 已知	$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$	$\left[\overline{X}-\overline{Y} - u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},\ \overline{X}-\overline{Y} + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right]$
σ_1^2, σ_2^2 未知 但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$	$\left[\overline{X}-\overline{Y} - t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2) \cdot S_w \cdot \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\ \overline{X}-\overline{Y} + t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2) \cdot S_w \cdot \sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right]$

关于两个方差商的区间估计

条件	枢轴变量	置信区间
μ_1, μ_2 已知	$\frac{\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{m}\frac{(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} \sim F(m,n)$	$\left[\frac{\left(\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2\right)\Big/\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2\right)}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m,n)},\ \frac{\left(\frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2\right)\Big/\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2\right)}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,n)}\right]$
μ_1, μ_2 未知	$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1,n-1)$	$\left[\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)},\ \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\right]$

第六章 参数估计和假设检验 - 知识点地图 Part IV

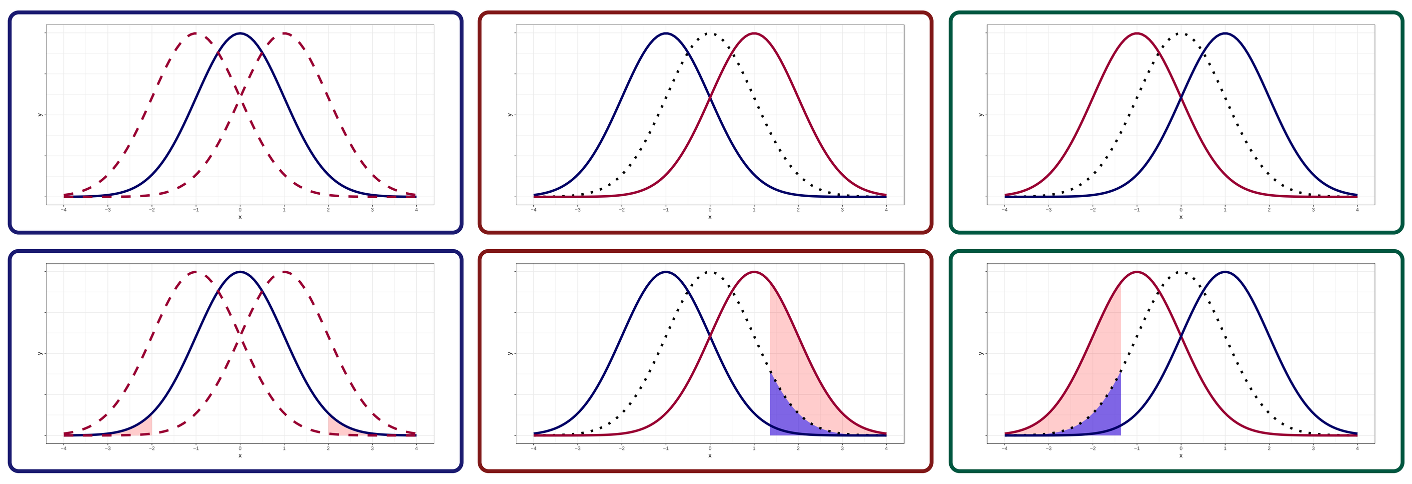
孙玲
山东大学 网络空间安全学院
lingsun@sdu.edu.cn

10. 正态总体的假设检验表

单正态总体

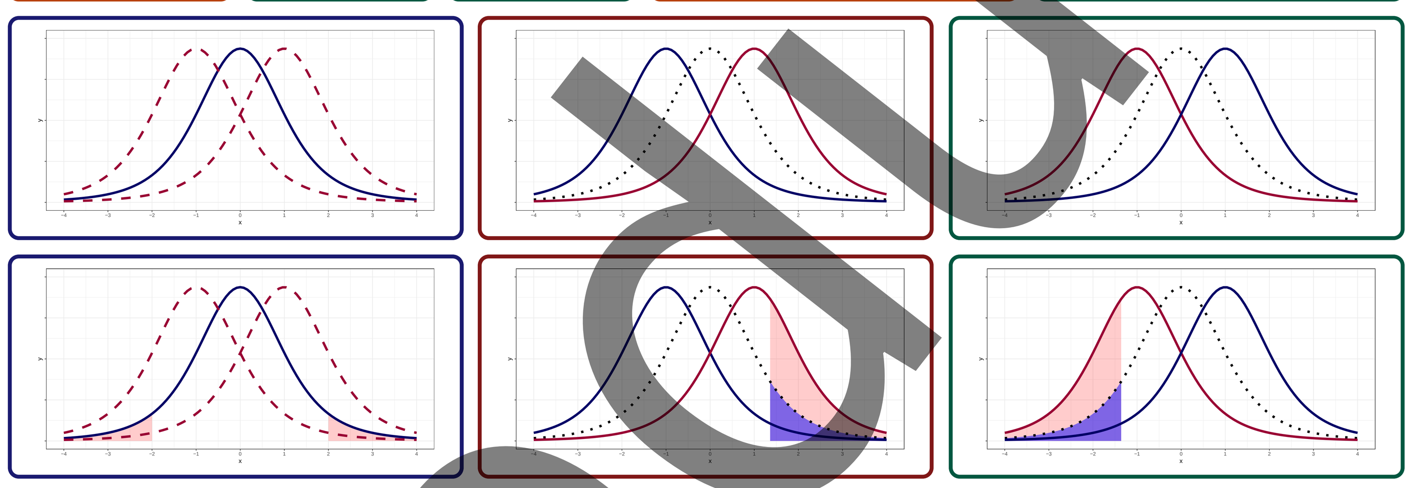
关于 μ 的假设检验 - σ^2 已知

条件	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$ 已知	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$	$\lvert U\rvert\geqslant u_{\alpha/2}$
	$\mu\leqslant\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$U\geqslant u_\alpha$
	$\mu\geqslant\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$U\leqslant -u_\alpha$



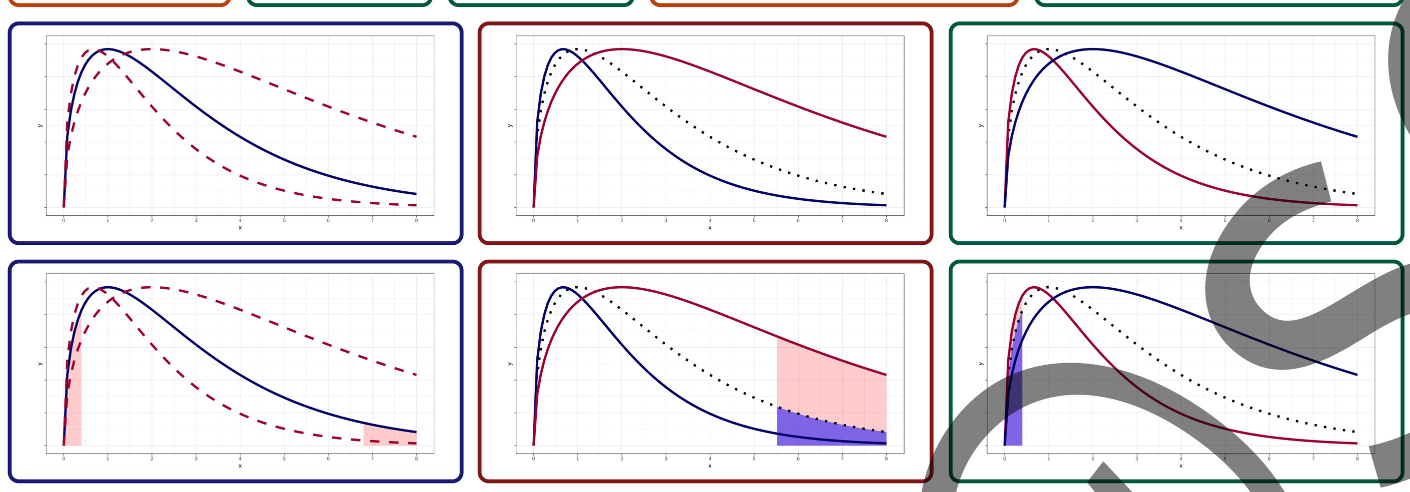
关于 μ 的假设检验 - σ^2 未知

条件	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
σ^2 未知	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert T\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$
	$\mu\leqslant\mu_0$	$\mu>\mu_0$		$T\geqslant t_\alpha(n-1)$
	$\mu\geqslant\mu_0$	$\mu<\mu_0$		$T\leqslant -t_\alpha(n-1)$



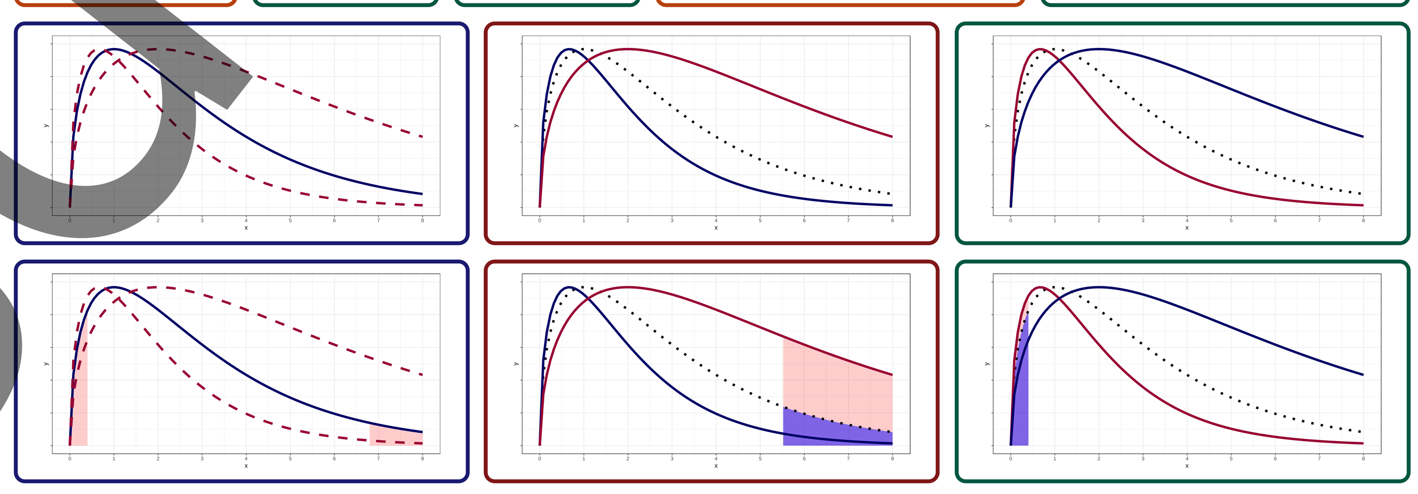
关于 σ^2 的假设检验 - μ 已知

条件	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\mu=\mu_0$ 已知	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$	$\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha/2}(n)$ 或 $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$
	$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha(n)$
	$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n)$



关于 σ^2 的假设检验 - μ 未知

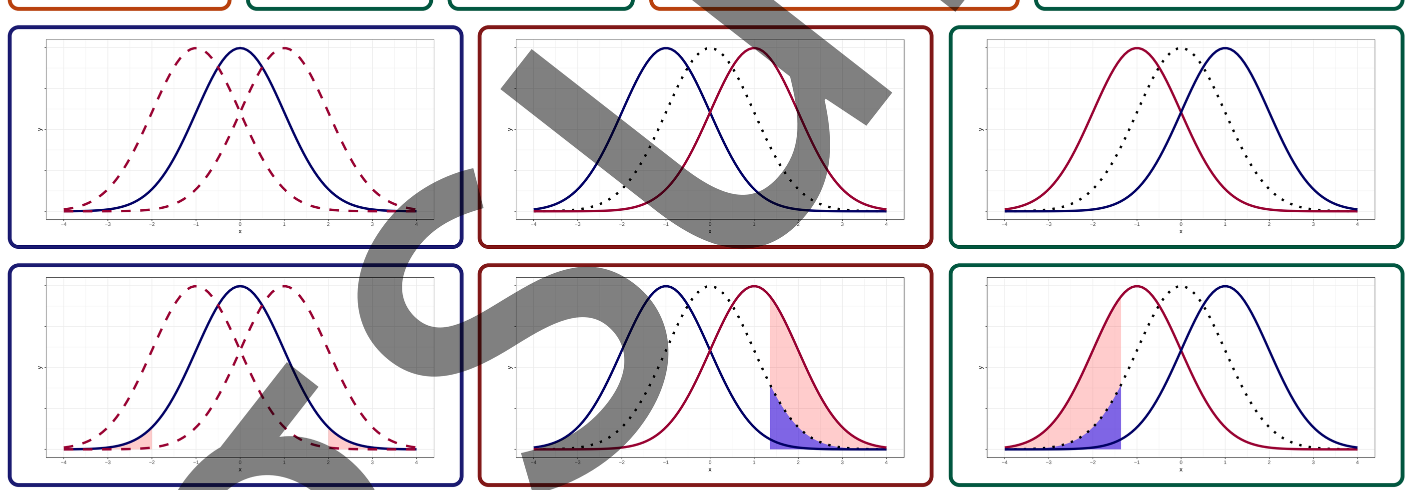
条件	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
μ 未知	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
	$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\geqslant\chi^2_\alpha(n-1)$
	$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$



两个正态总体

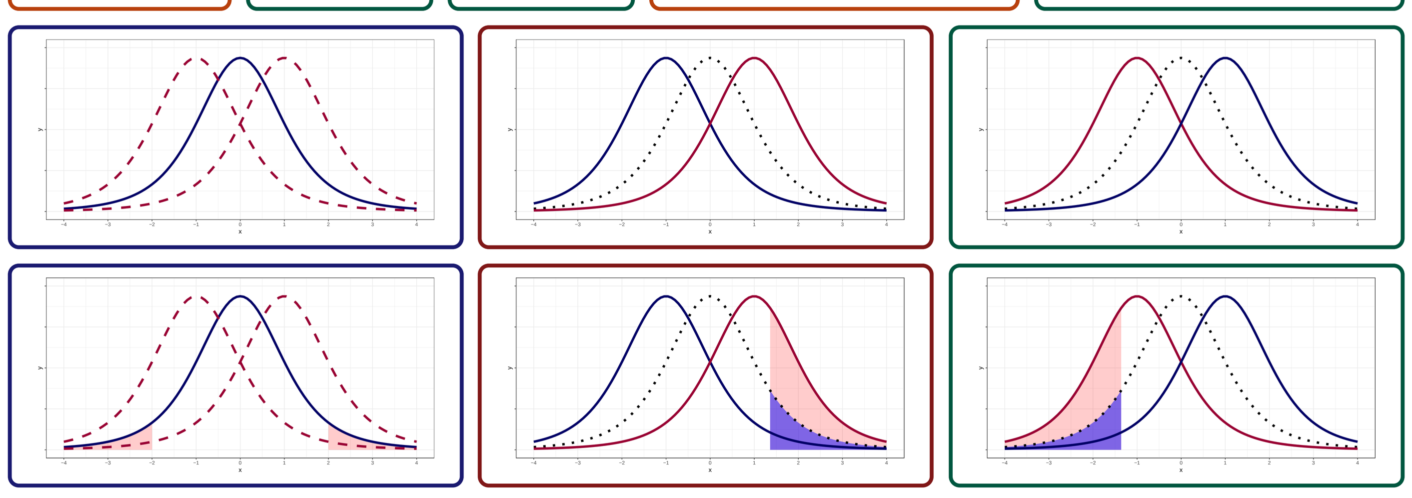
关于均值 μ_1, μ_2 的比较 - σ_1^2, σ_2^2 已知

条件	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
σ_1^2,σ_2^2 已知	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$	$\lvert U\rvert\geqslant u_{\alpha/2}$
	$\mu_1\leqslant\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$		$U\geqslant u_\alpha$
	$\mu_1\geqslant\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$		$U\leqslant -u_\alpha$



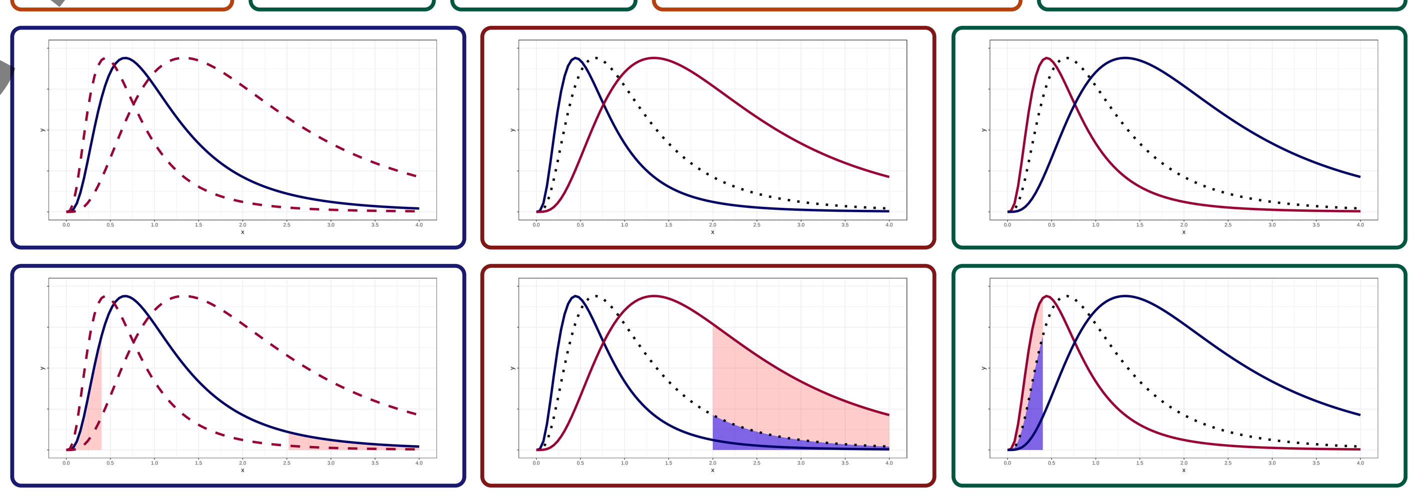
关于均值 μ_1, μ_2 的比较 - σ_1^2, σ_2^2 未知

条件	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
σ_1^2,σ_2^2 未知 但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$, $S_w^2=\frac{(m-1)\cdot S_X^2+(n-1)\cdot S_Y^2}{m+n-2}$	$\lvert T\rvert\geqslant t_{\alpha/2}(m+n-2)$
	$\mu_1\leqslant\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$		$T\geqslant t_\alpha(m+n-2)$
	$\mu_1\geqslant\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$		$T\leqslant -t_\alpha(m+n-2)$



关于方差 σ_1^2, σ_2^2 的比较 - μ_1, μ_2 已知

条件	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
μ_1,μ_2 已知	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\dfrac{\frac{1}{m}\cdot\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2}$	$F\geqslant F_{\alpha/2}(m,n)$ 或 $F\leqslant F_{1-\alpha/2}(m,n)$
	$\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$		$F\geqslant F_\alpha(m,n)$
	$\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$F\leqslant F_{1-\alpha}(m,n)$



关于方差 σ_1^2, σ_2^2 的比较 - μ_1, μ_2 未知

条件	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
μ_1,μ_2 未知	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F\geqslant F_{\alpha/2}(m-1,n-1)$ 或 $F\leqslant F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)$
	$\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$		$F\geqslant F_\alpha(m-1,n-1)$
	$\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$F\leqslant F_{1-\alpha}(m-1,n-1)$