

# 电磁学：第三次作业

## (本次作业满分 60 分)

檀时钠

关于作业的具体要求，参见作业一的前言。

第 1 题 (10 分)：一个导体内部有个球形空腔，内壁是光滑的球面，半径为  $R$ 。在空腔里有个点电荷  $+q$  ( $q > 0$ ) 被绝缘的支架固定在距离球心  $\frac{R}{2}$  的地方。计算静电平衡时球心处的电场矢量  $\mathbf{E}$  (注意：要计算矢量的大小、方向)，以及球面内壁上距离点电荷  $+q$  最近的那点的面电荷密度、球面内壁上距离点电荷  $+q$  最远的那点的面电荷密度。

提示：这道题可以用电像法来求解。大家应该都知道，在三维欧几里得空间里，和两个固定点的距离之和为常数的点的集合是椭球面。那么和两个固定点的距离的比值为常数 ( $\neq 1$ ) 的点的集合是什么呢？是球面！你可以用高中解析几何的方法来验证这一点。还要注意：对于球形空腔，点电荷  $+q$  的电像的电荷恐怕不再是  $-q$ 。那么它是多大呢？提示：选取电像的位置和电荷量，使得空腔内壁上的电势是常数。

第 2 题 (10 分)：一个平面导体被折了一个角度，形成两个“半平面”，两者夹角  $\beta < \pi$ ，如图 1 所示。取棱角为  $z$  轴 (与图中的纸面垂直)，取朝外的方向为  $+x$  轴。 $+x$  轴与两个“半平面”的夹角均为  $\pi - \frac{\beta}{2}$ 。如果导体表面携带电荷，并且在真空中达到了静电平衡，计算折角附近的电势 (以导体为电势的零点)，以及靠近折角的地方的面电荷密度  $\sigma_e$  与距离折角的直线距离  $\rho$  的函数关系，并把  $+x$  轴上的电场强度用这个面电荷密度表示出来，假设折角的内侧电场为零。定性讨论随着  $\beta$  的减小，面电荷密度的分布如何变化。

提示：在柱坐标系里，拉普拉斯算符的表达式是

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

柱坐标的定义请见课本附录 A。本题可以假设电势  $U$  与  $z$  无关。这道题里  $U$  可以“分离变量”，写为  $\rho$  的某个一元函数和  $\varphi$  的某个一元函数的乘积： $\#_3 \rho^{\#1} \cos(\#_2 \varphi)$ 。当  $0 \leq \beta < \pi$  时， $\sigma_e = A\rho^{-p}$ ，其中  $A$  和  $p$  是常数，你需要把  $p$  和  $\beta$  的函数关系算出来。你还要把  $+x$  轴上的电场用  $A$  和  $\beta$  表示出来。(当  $\beta = 0$  时，导体简化为半平面， $\sigma_e$  与  $\rho$  的平方根成反比。)

这道题帮你直观地认识：带电的导体的尖端或棱角越锋利，电荷往往越密集。不用担心  $\rho \rightarrow 0$  时  $\sigma_e$  的发散，因为实际的导体棱角不是无限锋利的，它至少要有单原子的尺度！

延展阅读：你将来如果学复变函数 (复变函数极其重要。哪怕你只是为了理解纯实数函数的某些超高精度数值积分方法 (例如高斯数值积分方法) 的误差，也最

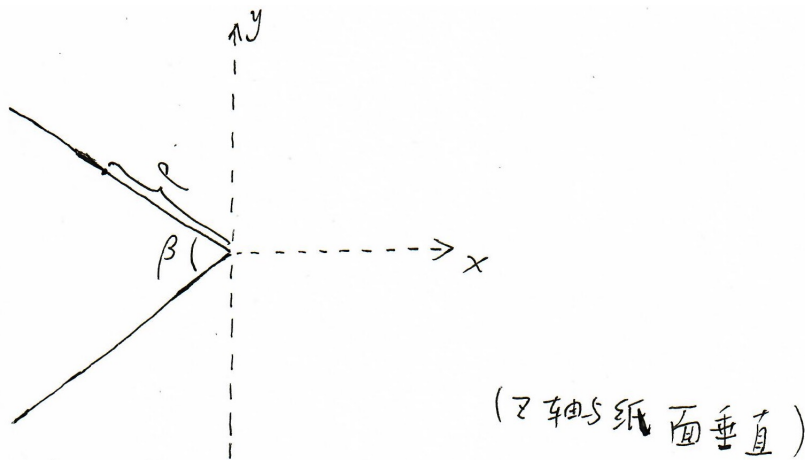


Figure 1: 一个导电平面被折成一个角度，所得的两个“半平面”之间的夹角为  $\beta$ 。取棱角为  $z$  轴。取  $+x$  轴朝外，并与两个“半平面”的夹角相等。

好要理解复变函数!），将会认识到解析函数的实部、虚部都满足二维的拉普拉斯方程。所以复变函数和二维的静电学、静磁学有密切关系。本题可以视作一个简单的特例，与幂函数  $(x + iy)^\#$  密切相关，其中  $\#$  是常数。但为了求解本题，你无须知道复变函数理论。

第 3 题 (10 分): 两个平行的导电板之间夹着两个平行的导电板 (编号一、二)，每个板的面积均为  $S$ 。保持外面的两个导电板接地，电势取为零。一号板与上面的板的空隙距离为  $d_1$ ，二号板与下面的板的空隙距离为  $d_2$ ，一号板和二号板之间的空隙距离为  $d_0$ 。如图 2 所示。假设每个板的尺寸远大于这些空隙。

- 如果一号板的电势为  $U_1$ 、二号板的电势为零，计算一号板携带的电荷量  $Q_1$ 、二号板携带的电荷量  $Q_2$ 。
- 如果一号板的电势为零、二号板的电势为  $U_2$ ，计算一号板携带的电荷量  $Q_1$ 、二号板携带的电荷量  $Q_2$ 。
- 如果一号板的电势为  $U_1$ ，二号板的电势为  $U_2$ ，计算一号板携带的电荷量  $Q_1$ 、二号板携带的电荷量  $Q_2$ 。你的结果可以写为

$$Q_1 = C_{11}U_1 + C_{12}U_2$$

$$Q_2 = C_{21}U_1 + C_{22}U_2$$

的形式。 $C_{12}$  是否等于  $C_{21}$ ? 感兴趣的同学可以阅读 Purcell and Morin, Exercise 3.64, Capacitance-coefficient symmetry, 从能量守恒的角度来理解为何电容系数应该是对称的。

第 4 题 (10 分): 让两个点电荷  $q_1$  和  $q_2$  (可能同号也可能异号) 在真空中缓缓靠近彼此，距离达到  $R$ ，那么总的电场为  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ ，其中  $\mathbf{E}_1$  是  $q_1$  产生的电场， $\mathbf{E}_2$  是  $q_2$  产生的电场。电场的能量密度是

$$\rho_w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \rho_1 + \rho_2 + \rho_{\text{互}},$$

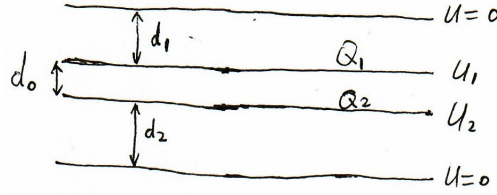


Figure 2: 两个平行导电板之间有两个平行导电板。它们之间的空隙均为真空。

其中  $\rho_1 = \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2$  是  $q_1$  自身电场的能量密度、 $\rho_2 = \frac{\epsilon_0}{2} E_2^2$  是  $q_2$  自身电场的能量密度、 $\rho_{\text{互}} = \epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$  是两个电场的相互作用能量密度。计算  $\rho_{\text{互}}$  乘以体积元在整个三维空间的定积分

$$\int \rho_{\text{互}} d^3r,$$

证明它等于这两个点电荷的库仑相互作用能量  $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$ 。提示：有多个方法计算这个积分。你可以任选一种你喜欢的方法：

- 方法一：用高斯定律。以  $q_1$  为球心，考虑一个半径为  $r$ 、厚度为  $dr$  的薄球壳，先研究  $\rho_{\text{互}} d^3r$  在这个球壳里的积分。由于  $\mathbf{E}_1$  沿着径向，而体积元可以写为  $dS dr$ ，其中  $dS$  是球壳表面的面积元，你将会得到一个矢量  $d\mathbf{S}$ ，因此得到  $\mathbf{E}_2$  在这个球壳上的通量，这个通量可以直接用高斯定律给出，无须再做面积分。然后，你再对  $r$  积分，从 0 积到无穷大。注意区分  $r < R$  和  $r > R$  两种不同情况。
- 方法二：兼用直角坐标系和球坐标系，参见课本附录 A。以  $q_1$  为原点，并将  $q_2$  置于  $+z$  轴上， $q_2$  的直角坐标是  $(x_2, y_2, z_2) = (0, 0, R)$ 。对于空间任意一点，直角坐标为  $(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ （其中  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ），写出  $\epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$  的表达式，然后在球坐标系里做积分。在球坐标系里，体积元是  $d^3r = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ 。三重积分，意味着要对三个变量先后做积分。积分结果与这三个变量的积分次序无关。但是，这道题里最容易的积分次序是先对  $\varphi$  做积分，再对  $\theta$  做积分（注意积分结果与  $r$  有关，分两种情形讨论： $r < R$  和  $r > R$ ），最后对  $r$  做积分。
- 方法三：兼用直角坐标系和柱坐标系，参见课本附录 A。以  $q_1$  为原点，并将  $q_2$  置于  $+z$  轴上， $q_2$  的直角坐标是  $(x_2, y_2, z_2) = (0, 0, R)$ 。对于空间任意一点，直角坐标为  $(x, y, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$ ，写出  $\epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$  的表达式，然后在柱坐标系里做积分。在柱坐标系里，体积元是  $d^3r = \rho d\rho d\varphi dz$ 。三重积分，意味着要对三个变量先后做积分。积分结果与这三个变量的积分次序无关。但是，这道题里最容易的积分次序是先对  $\varphi$  做积分，再对  $\rho$  积分（注意积分结果与  $z$  有关，分三种情形讨论： $z < 0$ 、 $0 < z < R$ 、 $z > R$ ），最后对  $z$  积分。这个方法比方法二更麻烦点。
- 方法四：与方法二类似，但是把原点置于两个点电荷的连线的中点。这个方法更麻烦些，但可以让你建立更直观概念：两个点电荷外部的电场相互作用能的绝对值超过两者之间的球形空间的电场相互作用能的绝对值（这个球形空间以两个点电荷的连线为直径），这两部分相互作用能的比值是  $\frac{2+\pi}{4} : \frac{2-\pi}{4} \approx 1.285 : (-0.285)$ 。

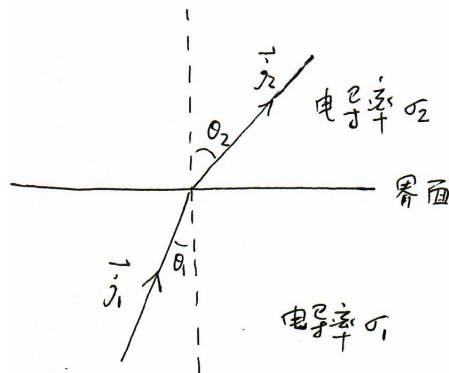


Figure 3: 稳恒电流从电导率为  $\sigma_1$  的一侧流向电导率为  $\sigma_2$  的一侧。

- 方法五：不要太多技巧，就在直角坐标系里硬碰硬地做三重积分！将  $q_1$  置于原点，将  $q_2$  置于  $+z$  轴。做变量代换  $x = R\tilde{x}$ 、 $y = R\tilde{y}$ 、 $z = R\tilde{z}$ 。然后在 Mathematica 里用函数 `NIntegrate[ ]` 做三重数值积分。数值积分结果是  $0.0795775 \frac{q_1 q_2}{\epsilon_0 R}$ 。这不能确凿证明它就是  $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R}$ ，但几乎可以排除其它可能了。物理工作者不一定需要严格证明每件事！很好的数值结果有时几乎可以代替证明。
- 其它方法。

第 5 题 (10 分)：一个平面界面的两侧导体分别记为 1 和 2，界面一侧的电导率为  $\sigma_1$ ，另一侧的电导率为  $\sigma_2$ 。现在有稳恒电流从电导率为  $\sigma_1$  的一侧流向电导率为  $\sigma_2$  的那一侧，如图 3 所示。如果知道  $\mathbf{j}_1$  的大小  $j_1$  以及  $\mathbf{j}_1$  和界面法线的夹角  $\theta_1$ ，计算：

- $\mathbf{j}_2$  的大小以及它和界面法线的夹角  $\theta_2$ 。
- 界面的面电荷密度。(提示：用高斯定律。)
- 界面两侧各自的单位体积的焦耳热的功率。

第 6 题 (10 分)：六个试验性的铅酸电池（每个质量 1.7 千克）被串联起来，每个能以 2.1 伏特的电动势输出 20 安培·小时的电量。假设每个电池的内部电阻是  $r = 1$  毫欧，外接负载的电阻是  $R = 994$  毫欧。

- 当这些电池释放完储存的电量，共有大约多少千克的硫酸铅 ( $\text{PbSO}_4$ ) 被产生？ $\text{PbSO}_4$  的分子量大约是 303。可以参考 Purcell 和 Morin 的书的第 4.9 节 (第 209-212 页)，但注意那里给的 Example 的解答似乎有误。
- 这些电池能释放的电能为多少焦耳（包括电池内部电阻消耗的电能）？
- 这六个电池正常工作时，外接负载两端的电压是多少？忽略导线电阻，但考虑每个电池的内部电阻。

- 一个能量效率为 15% 的内燃机要消耗多少千克的汽油，可以为这些电池充满电？假设汽油的燃烧释放能量为  $4.5 \times 10^7 \text{J/kg}$ ，假设电池只能释放出 70% 的预先输入的电能。

第 7 题（本题不计入分数，但我鼓励每个学有余力的同学完成！学习的目的是为了求知，不是为了分数！）：在真空中用一个半径为  $R$ 、高度为  $2h$  的导电薄圆柱来做不完全的静电屏蔽，因为圆柱的两头都是开口的。取该圆柱的轴线为  $z$  轴，取圆柱的中心为原点。现在沿着  $+z$  方向加一个均匀的外电场  $\mathbf{E}_\infty = E_\infty \mathbf{e}_z$ 。原本不带电的圆柱就感应出了电荷分布，但总电荷仍然是零。静电平衡时，圆柱表面的电荷的面密度  $\sigma_e = \sigma_e(z)$ ，其中  $-h < z < h$ 。根据前面某一道题目（关于等势的折角面或半平面），我们估计在  $z \rightarrow h$  时  $\sigma_e$  是按照

$$\frac{\text{常数}}{\sqrt{h-z}} + \text{更高阶项}$$

的规律来发散。 $z \rightarrow -h$  时类似。

- 证明圆柱面上任一点 ( $x^2 + y^2 = R^2$ ) 的电势为

$$U(z) = -E_\infty z + \int_{-h}^{+h} \frac{R}{\pi \epsilon_0 \sqrt{4R^2 + (z - z')^2}} K\left(\frac{4R^2}{4R^2 + (z - z')^2}\right) \sigma_e(z') dz',$$

其中  $K$  是完全椭圆积分：

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}.$$

- 引入无量纲的参数  $\tilde{h} = h/R$ 、 $\tilde{z} = z/R$ 、 $\tilde{z}' = z'/R$  以及无量纲的函数  $\tilde{\sigma}(\tilde{z}') = \frac{\sigma_e(z')}{\epsilon_0 E_\infty}$ ，并令  $U(z) = 0$ ，得到面电荷密度所满足的无量纲化的积分方程。
- 用讲义 Quadrature.pdf 里给的简单方法来离散化积分方程，得到一组代数方程，可以写为  $Fx = b$  的形式，其中  $F$  是已知矩阵、 $b$  是已知列向量， $x$  是未知列向量。在电脑软件里编写简单程序，数值求解这个方程（可以用软件对数值矩阵  $F$  求逆），得到面电荷密度分布。具体方法是把区间  $(-\tilde{h}, +\tilde{h})$  划分为许多个离散的、等间距的点：

$$\tilde{z}_n = -\tilde{h} + (n - 1 + \alpha)\lambda, \quad 1 \leq n \leq N + 1,$$

其中步长

$$\lambda = \frac{2\tilde{h}}{N + 2\alpha},$$

而

$$\alpha = 0.302\ 721\ 828\ 598\ 366\ 375$$

是 HurwitzZeta( $\frac{1}{2}, \alpha$ ) 的零点，详情见 Quadrature.pdf。积分方程的离散化有无数种方法，我在这里只是给了一种易于理解、易于编程实施的简单方法，它随着步长  $\lambda$  的缩小，收敛速度并不是特别快（但也不慢），你可能要取几千个步长才能得到很精确的数值结果。离散化的时候，要特别注意那些  $z = z'$  的点，对应于矩阵  $F$  的对角元，因为在那些情况下被积函数是对数发散的，你可以用我在 Quadrature.pdf 里给的一个简单法则（“ $\frac{\lambda}{2\pi}$  法则”）来处理它。

- 推导一个积分表达式，用  $\sigma_e$  或它的无量纲化版本来表示圆柱中心（即坐标原点）的电场强度  $E_0$  与  $E_\infty$  的比值。对于  $h = \frac{1}{10}R, R, 2R, 3R, 4R, 5R, 6R$  这几个情况，分别数值计算  $E_0/E_\infty$ 。对于每一种情况，逐渐增加  $N$ （例如取  $N = 2^j$ ，其中  $j = \text{整数}$ ），观察数值结果收敛到三、四位有效数字。对于  $h = 6R$  的情况，当观察到收敛后，定性或定量地画出面电荷密度与  $z$  的函数关系曲线。

延展阅读：为了理解  $h/R \rightarrow \infty$  时， $E_0/E_\infty$  如何趋于零，可以研究圆柱里的电势，可以近似地分离变量。可以证明  $E_0/E_\infty$  趋于零的速度与贝塞尔函数  $J_0$  的第一个零点  $\xi_0 \approx 2.40483$  有关。