2011年物理学挑战赛

理论题

2011年8月1日，星期一

具有挑战性的理论问题　8.30-13.30.

在尝试做理论题之前，请仔细阅读以下<**注意事项**>。

这些问题包括三个主要问题。这些问题乍看之下可能很难，但如果你仔细阅读，就能理解。你可以从任何一个问题开始。请不要放弃，直到最后。

<预**防措施**。

1. 在发出开始信号之前，不要打开题本。请勿触摸答题纸、计算纸或计算器。
2. 问题册有16页长。答案小册子有15页。
3. 所有答案必须写在答题纸上。请务必在答题纸的每一页上写上你的挑战编号和名字。
4. 答案不仅应包含最终的答案，还应该详细描述通往答案的路径。
5. 如果你觉得不舒服，需要上厕所或有任何问题，请举手通知主管。
6. 原则上，在挑战赛开始后200分钟（3小时20分钟）之前，任何人不得离开房间；200分钟（11:50）之后，任何希望离开房间的人必须举手通知监督员，并在检查完挑战赛编号和姓名后，将所有答卷（包括非答卷）留在桌上。.
7. 悄悄地进行解决，以免干扰其他参与者。如果有任何干扰，与会者将被要求离开房间。
8. 当发出结束信号时，必须立即检查所有答题纸（包括非答题纸）的挑战编号和名称，放在桌子上，等待监督员的指示。
9. 试卷和计算表必须带回家。

问题1 A（65分）。

考虑一个火箭，它在没有重力的情况下，在太空中燃烧并喷出其有效的燃料，并被燃料的反冲力所推动。火箭最初是静止的，质量为m_0 。设v为火箭直线飞行时的速度，其质量为m。让u是火箭看到的被向后喷射的燃料的相对速度

[I]

假设燃料速度可以与火箭的速度一起控制，即$u=v+u_0$ 。其中u_0 是火箭静止时燃料喷射的速度。那么所有注入的燃料将在空间以恒定的速度u_0 ，方向与火箭的运动方向相反。在这种情况下，火箭的运动可以很容易地得到分析。回答以下问题。

Q1 找出火 箭 的速度v和它的质量m之间的关系。

Q2 假设一个火箭以恒定的加速度a被设定为运动。设t为火箭开始运动后的时间，火箭的速度为$v=at$。求火箭在时间t的质量m。

Q3 火箭开始以等速运动后的时间t内，通过燃烧燃料获得的能量E。求火箭的能量。然而，这些能量都是运动中的物体（注入的燃料和火箭）的动能。假设能量

Q4 如果火箭的质量小于第一个$\frac{1}{4}$时，火箭的速度。$_0$ 超过多少倍

Q5 如果火箭的质量小于第一个$\frac{1}{4}$火箭的动能，当E_r 感应

$= \frac{1}{2}mv^2$. E为在此期间从燃料获得的能量E。 F 找到$\frac{E_r}{E}$的比率值

眼睛。

[二]

考虑到一个典型的火箭的运动。假设在某一瞬间t，火箭的质量为m，速度为v（图1）。假设在一小段时间内Δt，火箭的质量增加到$m+\Delta m$，火箭的速度增加到$v+\Delta v$。请注意，相对于火箭的速度u注入的燃料的质量表示为$-\Delta m$，因为增量是分钟变化的正数（图2）。回答下列问题。

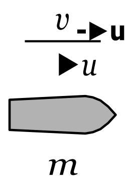

图1 时间t

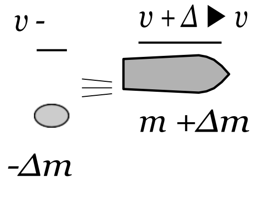

图2 时间$t+\Delta t$

如果$v-u<0$，注入的燃料就会向火箭的相反方向移动。

Q6 从动量守恒定律中找出微时Δt前后Δv和Δm之间的关系。由于Δv和Δm是无限小数，与$m\Delta v$和$u\Delta m$（一阶无限小数）相比，无限小数的乘积$\Delta m\Delta v$（二阶无限小数）可以被忽略掉。

Q7 找出在微观时间Δt中使用的能量ΔE。然而，假设这些能量都是运动中的物体（注入的燃料和火箭）的动能。含有两个或更多无限小数Δm和Δv*的条款*（二阶无限小数$m(\Delta v)^2$，$v\Delta m\Delta v$和三阶无限小数$\Delta m(\Delta v)^2$）与含有一个无限小数的条款（一阶无限小数$mv\Delta v$和$v^2\Delta m$）相比可能被忽略。只用Δm（<0）和u*来*表达结果。

[三]

在正常的火箭中，燃烧化学燃料以获得推进力，从火箭上看到的注入的燃料的速度u*是*恒定的u_0，与火箭的速度无关（$u = u_0$）。在这种情况下，利用前一个问题的结果来回答这个问题。

Q8 找出火箭的速度v和*它的*质量m之间的关系。如有必要，请参考以下提示。

[提示]

设y是x的函数，当x变化很小Δx*时*，y的变化Δy与$\Delta y=cy\Delta x$有关。这里c是一个常数。在这种情况下，y和x之间的关系被表示为$y = y_0 e^{cx}$。请注意，y_0是一个任意的常数。

Q9 假设一个火箭以恒定的加速度a进行运动。火箭以恒定的加速度a开始运动，时间t

求火箭的质量m，当它只是

Q10 火箭开始以等速运动后的时间t内，通过燃烧燃料获得的能量E。

求火箭的能量。然而，这些能量都是运动中的物体（注入的燃料和火箭）的动能。

假设能量

Q11 当火箭的质量在开始时为$\frac{1}{4}$时，火箭的速度为u_0的次数的数值。

这里使用 loge 2 = 0.693。如有需要，这里使用 $\log_e 2 = 0.693$。

Q12 如果火箭的质量小于第一个$\frac{1}{4}$火箭的动能，当E_r感应$E_r = \frac{1}{2}mv^2$。E为在此期间从燃料中获得的能量。$\frac{E_r}{E}$的比率值寻找哟。用数字表示结果。

问题1b（35分）。

[I]

热力学处理的是宏观系统（具有非常多的粒子的系统，如原子分子）中的宏观物理量。它基于两个基本定律：热力学的第一和第二定律。让我们从第一条定律开始，也就是能量守恒定律。

热力学第一定律：系统内部能量的增加ΔU由外部增加的热量Q和外部做的功W之和给出。

$$\Delta U = W + Q \tag{1}$$

第一定律中的内能是组成粒子的动能和它们之间相互作用所产生的势能的总和。

对于在其体积V、压力P和绝对温度T*之间处于*平衡状态的n摩尔理想气体，*以下*状态方程成立。

$$PV = nRT \tag{2}$$

其中R被称为气体常数，由以

$$R = 8.31\ J/(\text{K-mol}) \tag{3}$$

下公式给出

根据状态方程（2），气体的平衡状态是通过确定（P、V、T）中的任意两个来确定的。气体的平衡状态

P-V图通常用于通过选择一个压力P和一个体积V来表示状态的变化。根据分子动力学，压力P*是*由分子和墙壁之间的碰撞引起的每单位面积的冲力之和给出的，在单原子分子的理想气体的情况下，分子的重心运动的动能E为并可表示为$P = \frac{2E}{3V}$。对于单原子分子的理想气体，内能U*等于*E. 由此，利用方程（2），可以看出

$$U = \frac{3}{2}nRT \tag{4}$$

2原子分子可以有旋转能和振动能，但在100-1000K的温度范围内，振动能可以忽略不计，只有旋转能被加入到内能中。

人们通常认为

$$U = \frac{5}{2}nRT \tag{5}$$

这意味着，理想气体的内能与体积无关。理想气体的内能与体积无关，因为分子之间不存在相互作用。即使是真正的气体，分子之间的距离也足够远，因此将它们视为理想气体在很大范围内是一个很好的近似值。

问 1 在体积不变的情况下，将一摩尔气体的温度提高1K所需的热量称为恒定体积摩尔比热。空气的恒定体积摩尔比热C_V，*其*数值是多少？空气可被视为一种双原子分子气体，因为它由O_2（20.93%）和N_2（78.10%）组成

Q2 如图1所示，一种气体被限制在一个圆柱形的容器中，活塞平稳地移动。活塞受到一个力F的作用移动，移动了一段距离Δx，体积减少了$|\Delta V|$（体积变化$\Delta V<0$）。如果气体的压力为P，此时对气体做的功W为

$$W = -P\,\Delta V \tag{6}$$

表明情况是这样的。

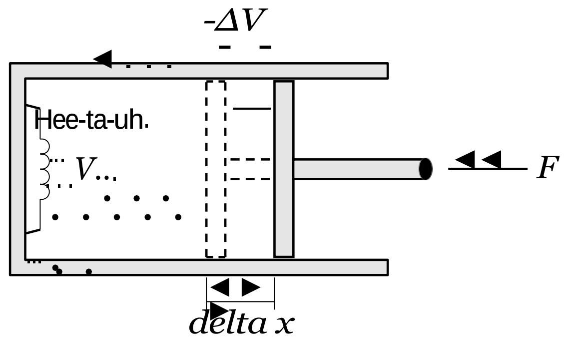

图1.

Q3 在图2中n摩尔理想气体的P-V图上，a→b是一个恒压过程，a→c是一个恒量过程，c→b是一个等温过程。通过比较恒压和恒容过程，找出空气的恒压摩尔比热C_P 。

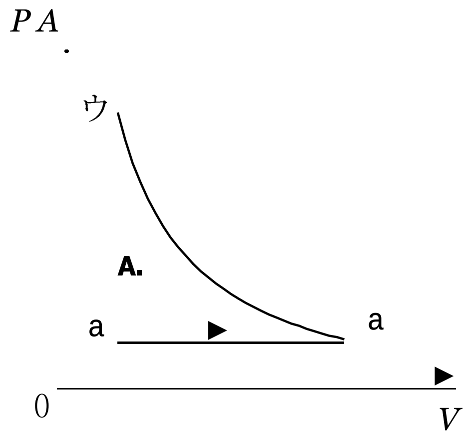

图2.

Q4 如果气体在等温过程中从外部做的功为c→a，吸收的热量为Q，写出它们之间的关系以及这些量的正负。

[二]

热现象不能仅仅用第一定律来解释。第二定律描述了状态变化的方向。第二定律有多种表达方式。这里给出了称为汤姆逊原理的表达方式。

汤**姆**逊**原理**：从温度均匀的热源中获取热量，并对其做等量的功，不留其他变化的过程是无法实现的。

这一原理证明了涉及热传导的自然现象的不可逆转性，因为所有的功都可以转化为热，这一点可以从焦耳关于叶轮功当量的实验中看出。

让我们在一个简单的假设性例子中考虑这种不可逆转性。首先，如下图3(a)所示，在一个容积为2 *V的* 圆柱形绝热容器的中心放置一个隔板，在容积为*V*的A部分放置***n***摩尔的理想气体，*而*B部分则处于真空状态。接下来，隔板上的孔被打开，这样气体就可以从A处转移到已经排空的B处，气体最终达到相同的密度，达到平衡，如图3（b）所示。在这一点上，没有与外界进行热传递或功的交换，气体的内能保持不变，因此，温度没有变化。

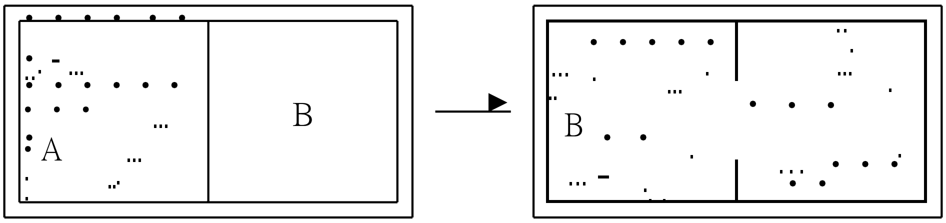

图3（a）。　　　　　　　　　　　图**3**（b）。

问题5 从图3(b)的粒子分布返回到图3(a)的分布的概率接近于零。分子通过孔。如果气体分子可以自由来去，那么就不可能确定某个气体分子在某一时刻是在A还是在B。该比率为 $\frac{1}{2}$。让阿伏伽德罗数为 N_A 假设所有 ***n***摩尔的气体分子都在A处的概率找到。

第二定律可以通过引入熵的数量来进行定量讨论。熵可以被看作是衡量一个系统的杂乱或不确定性的程度，它以不确定的方向变化，在不可逆的自然现象中变得杂乱。在上面的例子中，可以说限制粒子的体积增加了，增加了它们位置的不确定性，使它们更加杂乱。

为了从图**3**(b)返回到图3(a)，必须将气体装在如图1所示的容器中，并在保持温度不变的情况下通过按压活塞进行压缩。

如果流入一个系统的热量是*Q*，而当时的温度*是T*，那么系统的熵为 *S*的变化，*ΔS*，与*Q*和*T*有如下关系

$$Q = T\,\Delta S \tag{7}$$

另外，对于可逆过程，将方程（6）和（7）代入第一定律（1），我们得到

$$\delta u = -p\,\delta v + t\,\delta s \tag{8}$$

得到。熵*S是*一个由平衡状态以及内能*U*决定的状态量。两个平衡状态之间的熵变化可以通过假设它们之间有一个合适的可逆过程来计算。

Q6 在保持温度不变的情况下，将***n***摩尔理想气体从***2V***的体积压缩到*V时*，求外部释放的热量。

如有必要，可使用以下积分公式进行计算。

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \log x_2 - \log x_1 = \log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

其中log是自然对数（以e为底的对数=2.7182 ---）。

Q7 Q6中的过程是一个可逆过程，方程（8）成立。由此，找出图3(a)和图3(b)中状态的熵差，并计算出从图3(a)到图3(b)过程中熵的增加，即ΔS。

关于一般过程，见。

$$Q \leq T\,\Delta S \tag{9}$$

持，这被称为克劳修斯不等式。其中=对应于可逆过程，<对应于不可逆过程。方程（9）是不可逆过程的熵增加规律，表达了热力学第二定律。

因此，在两个基本定律的基础上，热力学揭示了其宏观数量之间的热属性关系。然而，材料的特定属性，如热容量、状态方程和其他材料特定的热力学和电磁学宏观量的温度依赖性，被视为由实验给出。从微观动态系统中计算这些特定物质宏观数量的理论是统计力学。

问题2（100分）

如果需要进行数字计算，可以使用本题末尾的数字表。

以下三种由于电磁波与物质的相互作用而产生的现象是量子力学发展的重要研究课题

1) 光电效应
2) 康普顿效应
3) 电子-正电子对的形成

[I]

在讨论这些现象时，有必要使用相对论。根据它，一个运动中的粒子的能量，其动量大小为*p*

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} \tag{1}$$

*其中m*是这个粒子的质量，$c = 3.00 \times 10^8$ m/s是 真空中的光速。(1) 公式中的*E*。
有一个非零值，$E = mc^2$，即使是在$p = 0$时。这个能量被称为静止能量。

由于能量的增量等于来自外部的功量，这个粒子受到了一个外力$\vec{F}$，而当以速度$\vec{v}$的方式运动时

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} \tag{2}$$

$\vec{v}$和$\vec{F}$的关系是成立的。其中出现在最右边的乘积被称为向量$\vec{v}$和$\vec{F}$的内积，以及以下是一些最重要的因素。

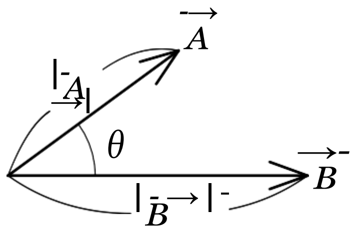

图1.

在下文中，向量$\vec{A}$的大小（也称为绝对值）将被表示为$|\vec{A}|$或简称为*A*。两个矢量$\vec{A}$和$\vec{B}$之间的角度是θ。现在有两个矢量$\vec{A}$和$\vec{B}$，它们之间的角度是θ（见图1）。

当天

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \tag{3}$$

由于定义$\vec{A} \cdot \vec{B}$是一个矢量$\vec{A}$和$\vec{B}$被称为*B*的内积。(3) 根据公式。

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$$

因此，一个矢量的大小可以通过计算它与自身的内积的平方根来找到。请注意，力和运动动态量之间的第二运动定律。

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{4}$$

在相对主义中也是有效的。

Q1 考虑一个质量为m的粒子在一个维度上以速度v沿x轴方向运动。由于第二运动定律对这个粒子来说是成立的，因此可以看出，动量p

$$p = \frac{m}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} v \tag{5}$$

证明这表示为：。

当该方程右侧的（v/c）^{2}，与1相比足够小，可以忽略不计（这被称为非相对论极限），方程（5）成为牛顿力学中动量的定义表达式$p = mv$。

Q2 在非相对论极限下，方程（1）的右手边是静止能量和$\frac{1}{2}mv^2$的总和

显示。

提示：如果有必要，当α与1相比足够小时，可以近似为（$1+\alpha$）$^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha$

使用以下方法。

Q3 电子的静止能量是多少，单位是eV（电子伏特）[eV和J的能量单位之间的转换见题末]？

请注意，在一个三维运动的普通粒子的情况下，速度矢量和动量矢量之间的方程（5）可以表示为

三维化。

$$\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \vec{v} \tag{6}$$

关系'c'成立。如果粒子的速度v大于c，公式（5）和（6）变得毫无意义，因为平方根符号是负的。因此，任何粒子的速度都被认为是小于光速的。

[二]

本文开头1）中描述的 "光电效应 "是指这样一种现象：当光照在固体上时，结合在固体中的电子吸收了光的能量，并从固体中释放出来，向外喷射。爱因斯坦在1905年通过提出光量子假说建立了光电效应理论，并于1921年获得诺贝尔物理学奖。

根据以光量子假说为起点的电磁波量子力学，照射在物质上的电磁波是一种叫做光子的粒子群流。光子没有质量，但它们有能量，一个光子所拥有的能量E可以表示为ν，其中ν是电磁波的频率，和

$$E = h\nu$$

h的值被称为普朗克常数，其值写在问题文本的末尾。 h被称为普朗克常数，其数值写在问题陈述的最后。

为了通过光电效应解放束缚在材料中的一个原子上的电子，必须从光子中向电子传递能量。还假设一个电子一次只能与一个光子交换能量和动量。

Q4 将电子从固体中解放出来所需的最小光子能量，称为该固体的功函数。对于功函数为2.0eV的固体，要发生光电效应，所照射的电磁波的波长必须小于或等于多少？请用一个有效数字回答。

这种波长的电磁波属于可见光。在数码相机中把光信息转换成电信号，在太阳能电池中把太阳光能转换成电能，也是光电效应的一部分。

Q5 光子没有质量，但有动量，能量和动量的关系由公式（1）给出，其中m=0

该值由以下内容给出。波长为λ*的*电磁波在真空中传播时，*其*光子的动量大小为

$$p = \frac{\text{不雅}}{lambda} \tag{7}$$

推导出这一点。

[三]

随着光子能量的增加，电子可以从固体中释放出来，而不把所有的能量给电子，能量小于初始能量的光子会飞走。

(图2)。这是由于光子与固体的非弹性碰撞引起的电磁波散射，之所以称为康普顿散射，是因为康普顿用它来证明量子力学的一个基本关系--方程（7）成立。

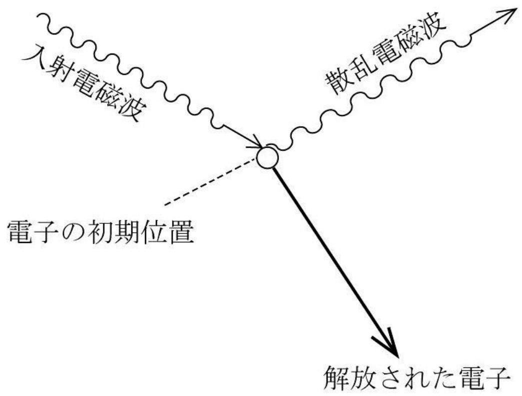

图2.

Q6 用电子质量m_e、光速c、普朗克常数h、入射电磁波的波长λ和电磁波散射后的波长来表示电子从物质中解放出来后的能量E。然而，假设散射前电子的能量等于其静止能量，因为与E*相比，*功函数足够小，可以忽略不计。

Q7 光子动量矢量$\vec{p}$的方向是电磁波的传播方向。与此方向平行，幅度为

1，用$\vec{n}$表示，动量矢量$\vec{p}$，*其*大小用公式（7）表示，为

$$\vec{p} = \frac{h}{lambda}\vec{n} \tag{8}$$

该表达式表示为：。在图2中，光子和电子在散射前后所拥有的动量之和是守恒的。

*相对于*散射前和散射后的电磁波，发射电子的动量$\vec{p}$，λ，λ ，$\vec{n}$ ，$\vec{n}$和plas。

用nk常数h表示。

问题8 利用上述内容，推导出以下方程式。

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) \tag{9}$$

然而，θ是$\vec{n}$和$\vec{n}$之间的角度$'$ 。 请注意，由于$\vec{n}$和$\vec{n}'$ ，其量级为1 $\vec{n}\cdot\vec{n} = \vec{n}'\cdot\vec{n}' = 1$。

问题9 为了通过实验证实方程（9）成立，必须准备一个合适的入射电磁波进行测量。$\lambda=\frac{1}{2}\lambda'$，$\theta=60°$ 入射电磁波的波长是多少λ ？是効数字 1 以数字形式回答。同时 ，求此时解放的电子的能量，单位为eV めよ。

这里确定的波长的电磁波属于X-射线。康普顿用X射线来解释电磁波的量子理论，在对建筑有贡献。此外，方程（9）右侧有长度尺寸的因素 $\frac{h}{m_e c}$ 被称为康普顿波长。是。

[四]

此外，使用短波长的电磁波会导致成对产生的现象，即只要有一个光子被湮灭，就会产生一对粒子和一个反粒子。粒子-反粒子的一个例子是电子-正电子对。正电子是一种质量与电子相等、电量符号相反的粒子。

如果-e和质量为m_e ，正电子的电量和质量分别为e和m_e 。因此，正电子*的*动量p和能量E之间的关系与电子的关系相同，方程式（1）成立。

首先，假设成对生产是一个反应，如图3（a）所示。在该图所示的反应中，假设反应前光子拥有的能量在反应后被平均分成电子和正电子。假设光子*的*动量$\vec{p}_\gamma$*被*转化为正电子和电子的动量之和$\vec{p}_+$和$\vec{p}_-$。关系$|\vec{p}_+| = |\vec{p}_-|$*在*这些质点之间建立，而方向$\vec{p}_+$和$\vec{p}_-$*是*$p_\gamma$*相对*于$\vec{p}_\gamma$的方向*是* 对称的，所以$\vec{p}_+ + \vec{p}_-$的方向与$\vec{p}_\gamma$相同。设$\theta$*为*$\vec{p}_+$和$\vec{p}_-$之间的角度。

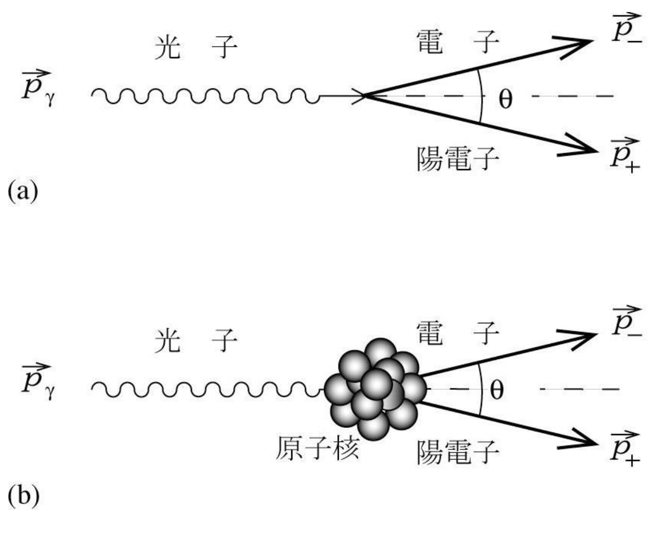

图3.

Q10 找出在图3(a)所示的反应中产生一个$|\vec{p}_+| = 0$的电子和一个$|\vec{p}_-| = 0$的电子对所需的光的能量，单位为eV。

电子-正电子配对实验需要使用能量至少和这里获得的一样高的电磁波。
如果像上一个问题那样，光子最初有动量，但产生的电子和正电子的动量为零，那么动量守恒定律就不被满足。

问题11 说明即使有更高能量的光子，在图3(a)的反应中动量也不守恒，因为$|\vec{p}_+ + \vec{p}_-| < |\vec{p}_\gamma|$。
提示：比较$|\vec{p}_+ + \vec{p}_-|^2$和$|\vec{p}_\gamma|^2$，以方便计算。

因此，要发生成对产生，必须有其他粒子接受光子的动量和电子-正电子对的动量之间的差异。由于这个原因，在进行成对产生的实验时，将γ射线照射到材料上，使光子的动量也被赋予该材料中的核子。图3(b)显示了这是如何做到的。在下文中，让从光子那里获得动量的原子核的质量为M，动量为$\vec{q}$。同时，使用非相对论极限下的核子能量的表达方式。

Q12 在图3(b)所示的反应中，用字母m_e，M，c或其一部分来表示制造一个电子-正电子对所需的光子能量$h\nu$，即$|\vec{p}_+| = |\vec{p}_-| = 0$。同时找出反应后原子核的速度，并确认使用非相对论极限方程计算原子核的能量是合理的。

(参考。)

光的速度 $c = 3.00 \times 10^{8}$ m/s
电子质量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg
质子的质量 $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg
普朗克常数 $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J-s

能源转换 $1\ \mathrm{eV} = 1.60 \times 10^{-19}$ J

问题3（100分）

如有必要，请使用题末的微分和积分公式以及物理常数。

在地球电离层之外和太阳系各行星之间的磁层中扩散的稀薄气体，通常是被电离成电子和阳离子的等离子体（电离气体）。这些等离子体是在磁场和电场的强烈影响下驱动的。让我们考虑带电粒子在磁场和电场中的运动，这是等离子体运动的基础。

[I]

统一的X方向电场 $\vec{E}$（E，0，0）和统一的Z方向的磁通密度 $\vec{B}$ =（0，0，B）。考虑一个电荷量为q、质量为m的带电粒子在磁场中的运动。将带电粒子的位置表示为（x，y，z），其速度表示为（V_x，V_y，V_z），我们有

$$m\frac{dV_x}{dt} = q(E + BV_y)$$
$$m\frac{dV_y}{dt} = -qBV_x \tag{1}$$
$$m\frac{dV_z}{dt} = 0$$

众所周知，该方程可写为这样的方程被称为运动方程，这个方程的左手边是加速度乘以质量，右手边是电磁场对带电粒子施加的力。请注意，这里的E和B都被假定为在时间上是恒定的。另外，根据第三个方程，很容易看出运动在z方向上是恒速的，所以在[I]中，将只详细考虑垂直于z轴的平面上的运动。首先，让电场$E = 0$。在这一点上，从运动方程（1）来看，我们有

$$m\frac{dV_x}{dt} = qBV_y, \qquad m\frac{dV_y}{dt} = -qBV_x \tag{2}$$

得出。

Q1 (2) 从公式可以看出

$$\frac{d^2 V_x}{dt^2} = -\omega_c^2 V_x, \qquad \frac{d^2 V_y}{dt^2} = -\omega_c^2 V_y \tag{3}$$

QB。

推导出以下内容。

然而，应该指出的

是

$$\omega_c = \frac{\quad}{m} \tag{4}$$

在。

Q2方程（3）表明，带电粒子以角频率$|\omega_c|$在x和y方向上进行单一振荡。

$|\omega_c|$称为回旋角频率。t=0，V_x=0，$V_y = V_\perp > 0$ としたとき，時刻 t における V_x，V_y 为

$$V_x(t) = V_\perp \sin(\omega_c t), \qquad V_y(t) = V_\perp \cos(\omega_c t)$$

表明情况是这样的。

Q3 同时，求在t=0时处于$x=\frac{-V_\perp}{\omega_c}$、$y$=0的粒子在$t$时间的位置$x(t)$、$y(t)$和电荷量

电粒子的半径为

$$r_c=\frac{V_\perp}{|\omega_c|} \tag{5}$$

证明该系统的圆周运动是回旋加速器的圆周运动。这种圆形运动被称为回旋运动，r_c 被称为回旋半径。注意，使用带电粒子的位置坐标（x，y），其速度矢量为

$$V_x(t)=\frac{dx}{dt}, \quad V_y(t)=\frac{dy}{dt}$$

你可以写。

Q4 地磁场的大小因地而异，但在东京附近约为3×10^{-5} T（特斯拉）。找到东京的电子的回旋角频率。

Q5 求一个速度为 3.2×10^{7} m/s的电子在东京的回旋加速器半径r_c（电子在约3000伏电压下加速的速度），求这个回旋加速器半径与地球半径的比值，后者为6.4×10^{6} m。

以地球半径的尺度来看，地球的磁场在不同的地方是不同的。然而，如果回旋加速器的半径比地球半径小得多，带电粒子就可以被视为在均匀磁场中做圆周运动。

现在考虑方程（1）中E不为零的情况。

Q6 在这个时候$U_x = V_x$，$U_y = V_y + \frac{E}{B}$ 那么运动方程（1）为

$$m\frac{dU_x}{dt} = qBU_y, \quad m\frac{dU_y}{dt} = -qBU_x$$

表明它可以被改写为。

Q7 用$V_\perp$，ω_c，E，B和t表示初始条件$U_x(0) = 0$，$U_y(0) = V_\perp > 0$ 时的$V_x(t)$，$V_y(t)$。

问题8 根据这个结果，设$x(t)$和$y(t)$是t=0时处于$x=\frac{-V_\perp}{\omega_c}$和$y$=0的粒子在$t$时间的位置

找到并说明轨迹（$x(t), y(t)$）的近似形状，对于$q>0$和$q<0$的每种情况。

Q9 在上述例子中，电场在x方向。对于$q>0$和$q<0$的每种情况，说明轨道的大致形状。

上述结果表明，带电粒子在均匀磁场和电场中垂直于磁场的平面内的运动是回旋运动和垂直于电场和磁场的恒速直线运动的叠加。这种恒速直线运动可以被认为是圆周运动旋转中心的移动，被称为$E\times B$漂移。

Q10 解释一下当施加垂直于磁场的电场时，等离子体（电子和阳离子被电中和的气体）在磁场中的整体运动。

[二]

接下来，考虑一个带电粒子的运动，因为它绕着弯曲的磁场线，如图1所示。Z轴取自带电粒子回旋运动的旋转中心方向。磁场线的分布是围绕Z轴对称的。当磁场线以这种方式弯曲时，磁通密度的值沿Z轴是不均匀的。在这种情况下，其中的带电粒子在*Z方向*上进行了加速运动。当粒子在*Z*方向运动时，如果在回旋运动的一个周期内，磁通密度的变化足够小于该点*的B*值，其内部的运动可以认为是回旋运动在*X-Y*平面的运动和其旋转中心的Z轴运动。

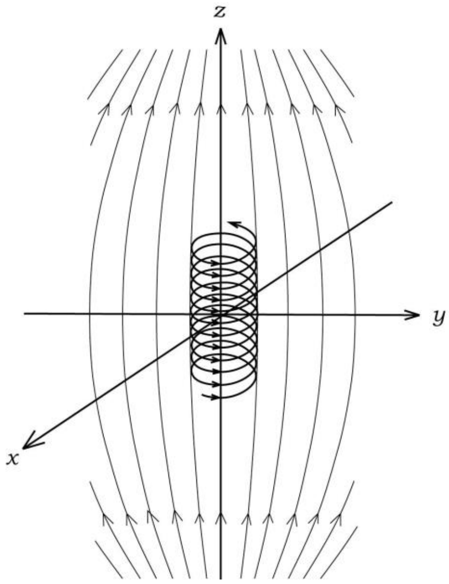

图1.

然而，回旋运动的角频率可以用圆心处的磁通密度B_z （z）来计算，即为

$$\Omega_c(z) = \frac{qB_z(z)}{m} \tag{6}$$

变化如下：

另一方面，V_z，在[I]中是恒定的，它有一个z依赖性。因此，我们考虑一个带电粒子在*Z*方向的加速运动。为此，我们使用回旋加速器半径r_c 和圆周运动速度$V_\perp$ > 0 と ω_c 之间的关系（方程（5）在第三部分）和以下两个规律。

(1) 在这里，磁场的变化足够缓慢，因此，作用在带电粒子上的磁场力总是可以被认为是指向旋转中心的。因此，圆周运动的恒定面积速度定律

$$r_c V_\perp = C_1 \text{ (常数)} \tag{7}$$

假设：

(2) 磁场产生的力垂直于速度，不做功，所以动能是恒定的。

$$\frac{1}{2}m V^2_z + V^2 = C_2 \text{ (常数)} \tag{8}$$

成立。

问题11 用$V_\perp(0)$, $V_z(0)$, $B_z(0)$, q和m表示方程(2)和(8)中的C_1和C_2。

Q12 当粒子的运动在z方向移动，B_z发生变化时，$\frac{1}{2}mV_\perp(z)^2$与$B_z(z)$成正比

表明它是有变化的。Q13

现在的函数为z

$$U(z) = \frac{mV_\perp(0)^2 B_z(z)}{2B_z(0)}$$

被引入，在粒子在Z方向的运动中，其

$$\frac{1}{2}mV_z(z)^2 + U(z) = C_2 \tag{9}$$

证明这两者之间的关系是有效的。

方程（9）可以被视为带电粒子在Z方向的一维运动中的机械能守恒定律，如果$U(Z)$被视为关于Z的势能。这表明，当磁通密度发生变化时，在磁场线的方向上有一个力作用于带电粒子。

在下文中，假设磁通密度$B_z(z)$是一个相对于$z = 0$的对称函数，在$z = 0$处为最小值，并随$|z|$增加。图1中表示的磁场是这种场的一个例子。

Q14 如图2所示，一块板子位于磁场中的$z=\pm L$处，撞击板子的带电粒子被吸收和湮灭了。磁通量密度的最大值B_z（L）与最小值B_z（0）的比值为

$$M = \frac{B_z(L)}{B_z(0)}$$

然后用M来表示带电粒子在不撞击板的情况下做往复运动的条件$V_\perp$（0）和V_z（0）。

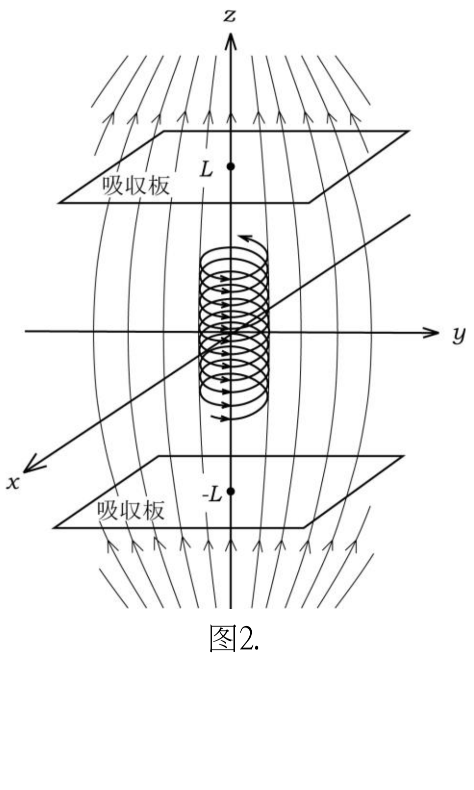

图2.

让我们考虑一个空间（速度空间），其三个坐标为V_x，V_y 和 V_z。前面问题的结果表明，代表带电粒子在z=0处的速度的点不存在于锥体的区域内，其轴线在方向V_z。这种锥体被称为损耗锥，是限制在地球磁层中的等离子体的特征，例如。如图2所示，在最小磁通密度点周围的速度空间中，带电粒子被限制在损失锥体之外的区域，这被称为 "磁镜效应"。

问题15 如果在速度空间中说明损失锥的形状，损失锥的顶角为2θ，则$\sin\theta$

可以用磁通密度的最大值和最小值之间的比率M来表示。

被地球磁场的磁镜效应困住的带电粒子群（磁层等离子体）有时会被从太阳吹来的等离子体风摇动，导致带电粒子从磁镜（磁层）中漏出，进入南极和北极附近的电离层，在那里，磁层的磁场线一直到表面。众所周知，这将导致极光的出现。

(参考。)

在下面的公式中，让a是一个常数。

$$\frac{d\sin(ax)}{dx} = a\cos(ax)\text{。}\quad \frac{d\cos(ax)}{dx} = -a\sin(ax)$$

$$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C\text{。}\quad \int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + C$$

电子质量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg

电的元素量 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C