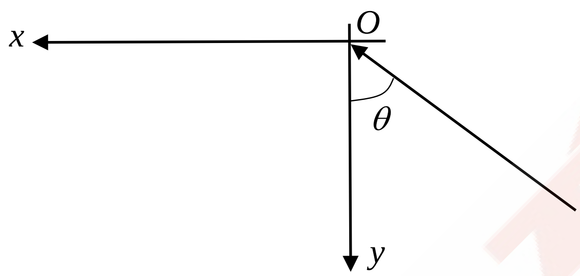
培尖教育2018年学科竞赛夏令营物理模拟卷（五）

考试时间：150分钟　总分320分

（参考答案）

1、解：如图建系



刚刚碰后，有

$$\vec{\omega}_0=\frac{v}{R}(\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j})$$

$$\vec{v}_0=v(\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{j})$$

接触点速度为

$$\vec{v}_D=2v\cos\theta\hat{j}$$

因而此时　$\vec{f}=-\mu mg\hat{j}$

注意到摩擦力只改变y方向的速度和x方向的角速度，因而x方向的相对速度不变，而y方向相对速度改变，因而摩擦力只沿y方向，因而可得

$$v_x=v_0\sin\theta$$

$$v_y=v_0\cos\theta-\mu gt$$

而　$$\omega_x=\frac{v}{R}\cos\theta-\frac{5\mu g}{2R}t$$

稳定时，有　$v_y+\omega_xR=0$

解得　$$t=\frac{4v_0\cos\theta}{7\mu g}$$

有末态　$$v_x=v_0\sin\theta$$

$$v_y=\frac{3}{7}v_0\cos\theta$$

（1）$\vartriangle\theta=\arctan(\frac{v_x}{v_y})-\theta=\arctan(\frac{7}{3}\tan\theta)-\theta$

（2）$v_x=v_0\sin\theta$

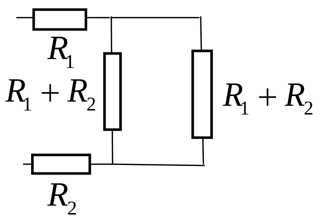
$$v_y = v_0 \cos\theta - \mu g t$$

因而可得轨迹方程

$$y = \frac{x}{\tan\theta} - \frac{\mu g}{2v^2 \sin^2\theta} x^2$$

（3）$t = \dfrac{4v_0 \cos\theta}{7\mu g}$

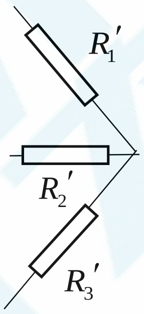
2、解：（1）求解 R_{13} 的时候，中间电路都是等势的，因而有如图所示情形



$$\frac{R_{13}(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_{13}} + R_1 + R_2 = R_{13}$$

解得 $$R_{13} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(R_1 + R_2)$$

（2）根据等效电阻理论，电路可以等效成为一个三端完全电阻，如图所示



易得

$$R_1' + R_3' = R_{13}$$

且由于中间等势，满足

$$R_1' / R_1 = R_3' / R_2$$

又有串并联关系

$$\frac{\left[\dfrac{(R_2 + R_3')R_2'}{R_2 + R_3' + R_2'} + R_1'\right] R_1}{\dfrac{(R_2 + R_3')R_2'}{R_2 + R_3' + R_2'} + R_1 + R_1'} + R_1 + r = R_1' + R_2'$$

解得 $R_1' = \frac{\sqrt{5}+1}{2}r$

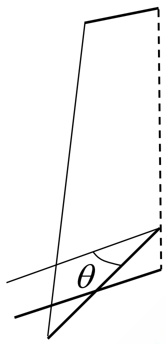
$$R_2' = 1.103r$$

$$R_3' = \frac{3(1+\sqrt{5})}{2}r$$

因而可得 $R_{12} = 2.721r$

$$R_{23} = 5.957r$$

3、解：（1）如图所示



有 $\vartriangle h = H - \sqrt{(R-r)^2 + H^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)} \approx \frac{Rr}{2H}\theta^2$

因而总能量可以写为

$$E = Mg\frac{Rr}{2H}\theta^2 + \frac{1}{2}M(\frac{Rr}{H}\theta\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

而总能量不随时间变化，因而有 $dE/dt = 0$，约去高阶项，可得

$$Mg\frac{Rr}{H}\dot{\theta}\theta + I\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

由于 $\dot{\theta}$ 不恒为零，因而可得

$$\ddot{\theta} + \frac{MgRr}{IH}\theta = 0$$

因而其小振动的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{IH}{MgRr}}$$

（2）考虑到绳子的质量后，动能需要加上绳子的动能项，其表达式为

$$3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}mR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

以及绳子的重力势能项，表达式为

$$3mg\times\frac{1}{2}\vartriangle h=\frac{3mgRr}{4H}\theta^2$$

因而总能量可以写为

$$E=Mg\frac{Rr}{2H}\theta^2+\frac{1}{2}M(\frac{Rr}{H}\theta\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2+\frac{3mgRr}{4H}\theta^2$$

总能量不随时间变化，因而有 $dE/dt=0$，略去高阶项

$$(I+mR^2)\dot{\theta}\ddot{\theta}+(\frac{MgRr}{H}+\frac{3mgRr}{2H})\dot{\theta}\theta=0$$

由于 $\dot{\theta}$ 不恒为零，因而有

$$\ddot{\theta}+\frac{(2M+3m)gRr}{2H(I+mR^2)}\theta=0$$

进而可得其周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2H(I+mR^2)}{(2M+3m)gRr}}$$

4、解：（1）$I_{10}=\dfrac{m}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}a/2}(\frac{\sqrt{3}}{2}a-x)\frac{2}{\sqrt{3}}x^2dx=\frac{1}{8}ma^2$

$$I_{20}=\frac{m}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}\int_0^{\sqrt{3}a/2}x\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{12}(x\frac{2}{\sqrt{3}})^2+(x\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2\right]dx=\frac{7}{24}ma^2$$

因而 $I=2(I_{10}+I_{20})=\dfrac{5}{6}ma^2$

（2）与地面夹角为 θ 时，质心高为

$$h=\frac{\sqrt{3}}{6}a\sin\theta+\frac{\sqrt{6}}{12}a\cos\theta\approx\frac{\sqrt{6}}{12}a+\frac{\sqrt{3}}{6}a\theta$$

因而有 $4mg\dfrac{\sqrt{3}}{6}a(\theta_0-\theta)=\dfrac{1}{2}\dfrac{5}{6}ma^2\dot{\theta}^2$

解得 $\dot{\theta}=\sqrt{\dfrac{8\sqrt{3}g(\theta_0-\theta)}{5a}}$

因而 $t_0=\displaystyle\int_0^{\theta_0}\sqrt{\frac{5a}{8\sqrt{3}g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0-\theta}}=\sqrt{\frac{5a\theta_0}{2\sqrt{3}g}}$

因而时间为

$$t=t_0+2et_0+2e^2t_0+\cdots=t_0+\frac{2e}{1-e}t_0=\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{5a\theta_0}{2\sqrt{3}g}}$$

（3）对于一个匀质正四面体，对于其一边的转动惯量为

$$I_0=\frac{7}{40}ma^2$$

质心高为

$$h=\frac{\sqrt{3}}{6}a\sin\theta+\frac{\sqrt{6}}{12}a\cos\theta\approx\frac{\sqrt{6}}{12}a+\frac{\sqrt{3}}{6}a\theta$$

正四面体装满蜂蜜后，其绕着一条边的转动惯量为

$$I=\frac{5}{6}ma^2+\frac{7}{40}ma^2=\frac{121}{120}ma^2$$

因而有 $5mg\frac{\sqrt{3}}{6}a(\theta_0-\theta)=I\dot{\theta}^2$

$$\dot{\theta}=\frac{10}{11}\sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{a}(\theta_0-\theta)}$$

因而 $\dot{\theta}=\frac{10}{11}\sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{a}(\theta_0-\theta)}$

进而可得

$$t=\frac{1+e}{1-e}t_0=\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{11}{5}\sqrt{\frac{a\theta_0}{\sqrt{3}g}}$$

5、解：（1）设计一个如图所示的循环

$$\begin{tikzcd} S_1,T_2 \arrow[r] & S_2,T_2 \arrow[d] \\ S_1,T_1 \arrow[u] & S_2,T_1 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$S_1>S_2$

则吸热量为

$$Q_1=\Delta U+\Delta W=a(S_2-S_1)-\sigma(S_2-S_1)=bT_2(S_1-S_2)$$

放热量为

$$Q_2=\left|\Delta U+\Delta W\right|=\left|a(S_1-S_2)-\sigma(S_1-S_2)\right|=bT_1(S_1-S_2)$$

因而循环效率为

$$\eta=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_1}{T_2}$$

（2）有 $dQ=-\sigma dS+adS+CdT=0$

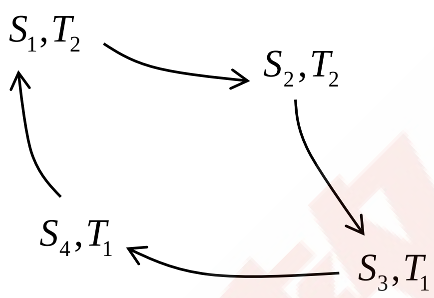
可得

$$bTdS = CdT$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{bdS}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{C}(S_2 - S_1) = \ln\frac{T_2}{T_1}$$

（3）考虑如下过程，其中$S_1 > S_2$



易得吸热量为$Q_1 = bT_2(S_1 - S_2)$，放热量为$Q_2 = bT_1(S_4 - S_3)$

注意到绝热方程满足

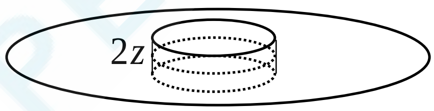
$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{b}{C}(S_2 - S_3) = \frac{b}{C}(S_1 - S_4)$$

可以得到　$S_2 - S_3 = S_1 - S_4$

因而有　$S_1 - S_2 = S_4 - S_3$

因而　$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_1(S_4 - S_3)}{T_2(S_1 - S_2)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

6、解：（1）作如图所示的高斯面



对于中间的高斯面，有

$$2 \times \frac{2\pi R\lambda z}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\pi r^2 + E(r) \times 2\pi r \times 2z = 0$$

解得 $E(r)=-\dfrac{\lambda r}{4\varepsilon_0 R^2}$

因而有 $\ddot{r}+\dfrac{q\lambda r}{4m\varepsilon_0 R^2}=0$

因而其径向做的是简谐运动，径向满足

$$r(t)=r_0\left|\cos\sqrt{\frac{q\lambda}{4m\varepsilon_0 R^2}}t\right|$$

（2）在中间时电势能为

$$E=\frac{2\pi R\lambda q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q\lambda}{2\varepsilon_0}$$

因而初态的电势能为

$$E(r_0)=E+\int_0^{r_0}\frac{\lambda r}{4\varepsilon_0 R^2}dr=\frac{q\lambda}{2\varepsilon_0}+\frac{\lambda r_0{}^2}{8\varepsilon_0 R^2}=\frac{q\lambda}{2\varepsilon_0}(1+\frac{r_0{}^2}{4R^2})$$

因而系统的电势能为

$$U_0=W+\frac{q\lambda}{2\varepsilon_0}(1+\frac{r_0{}^2}{4R^2})$$

（3）给一个微扰后，会向无穷远运动，因而能量上满足

$$E(r_0)=\frac{1}{2}mv^2$$

解得 $v=\sqrt{\dfrac{q\lambda}{m\varepsilon_0}\left(1+\dfrac{r_0{}^2}{4R^2}\right)}$

7、解：（1）$d<R$ 时，

对内，有大小为 $-\dfrac{R}{d}q$ 位于 $\dfrac{R^2}{d}$ 处

对外，有一个 $-q$ 位于 d 处（抵消原电荷），有一个 q 位于球心处

$d>R$ 时，

对内，有一个 $-q$ 位于 d 处（抵消原电荷）

对外，有大小为 $-\dfrac{R}{d}q$ 位于 $\dfrac{R^2}{d}$ 处，有大小为 $\dfrac{R}{d}q$ 的电荷位于球心处

（2）对外均相等，因为要满足高斯定理
对内均不相等，差了一部分均匀分布的电荷
（3）在电荷周围聚集了一批束缚电荷，满足

$Q+Q'=Q/\varepsilon_1$

设出面密度分布$\sigma(r)$，则在r处，垂直于介质面，上下的电场分别为

$$E_{1\perp}=\frac{Qh}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E_{2\perp}=\frac{Qh}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

边界条件　$\varepsilon_1E_{1\perp}=\varepsilon_2E_{2\perp}$

联立解得　$\sigma(r)=\dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)Qh}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$

8、解：（1）我们考察速度处于$v\to v+dv$的分子，在dt时间，这一部分泄流出去的分子数为

$$n_0f(v)vdvA\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\pi\sin\theta}{4\pi}\cos\theta d\theta=\frac{1}{4}n_0Af(v)vdv$$

因而单位时间出去的总的分子数为

$$\frac{dN}{dt}=\frac{1}{4}n_0A\int_0^{\infty}vf(v)dv$$

（2）处于$v\to v+dv$的分子，单位时间出去的分子数为

$$\frac{1}{4}n_0Avf(v)dv$$

因而有关系

$$\frac{\frac{1}{4}n_0Avf(v)dv}{\frac{1}{4}n_0A\int_0^{\infty}vf(v)dv}=f_{+1}(v)dv$$

可导出　$f_{+1}(v)=\dfrac{f(v)v}{\int_0^{\infty}f(v)vdv}=\dfrac{f(v)v}{\bar{v}}$

（3）　$f_{+2}(v)=\dfrac{f_{+1}(v)v}{\int_0^{\infty}f_{+1}(v)vdv}=\dfrac{f(v)v^2}{\int_0^{\infty}f(v)v^2dv}$

进而可得　$f_{+i}(v)=\dfrac{f(v)v^i}{\int_0^{\infty}f(v)v^idv}$

（4）（i）　$f_{+i}(v)=\dfrac{f_3(v)v^i}{\int_0^{\infty}f_3(v)v^idv}\propto\dfrac{f_3(v)v^i}{(\sqrt{\frac{kT}{m}})^i}\propto v^{2+i}(\dfrac{m}{2\pi kT})^{\frac{i+3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$

而考虑到 $f_n(v)=A_n v^{n-1}(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$

当 $n=i+3$ 时，除了前面的系数全部一样

考虑到均要满足归一化条件，因而必然有前面的系数也相同，即必有

$$f_{+i}(v)=f_{3+i}(v)$$

即三维气体泻流 i 次后，其速率分布即为 3+i 维的气体在 T 下的麦克斯韦分布。

（ii）

$$f_n(v)=\frac{f_3(v)v^{n-3}}{\int_0^\infty f_3(v)v^{n-3}dv}=\frac{v^{n-1}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}{\int_0^\infty v^{n-1}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv}=\frac{v^{n-1}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}{\left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x^2}dx}$$

$$=A_n v^{n-1}(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

因而可得

$$A_n=\frac{\pi^{n/2}}{\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x^2}dx}$$

因而有 $S_n=\frac{\pi^{n/2}}{\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x^2}dx}R^{n-1}$

（iii） $n=4$ 时，可得

$$S_4=\frac{\pi^2}{\int_0^\infty x^3e^{-x^2}dx}R^3=2\pi^2R^3$$