培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（三）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

1、解：（1）由角动量关系

$$mR^2\omega = mv_x R$$

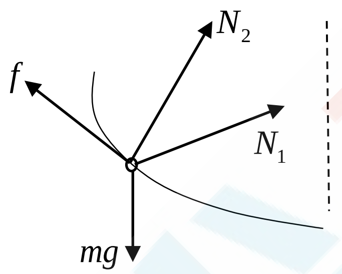
因而可得　$v_x = \omega R$

由相对运动关系可得

$$\frac{v_x - (-\omega R)}{2\pi R} = \frac{v_y}{h}$$

解得　　$v_y = 2\omega R$

受力如图所示：



受力上满足

$$N_1 = m\omega^2 R$$

$$mg - \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}f = ma_y$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}f = ma_x$$

其中　$f = \mu\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$

$$a_x = \beta R$$

$$a_y = 2\beta R$$

可以得到

$$(9-\mu^2)R^2\beta^2 + (2\mu^2 - 6)gR\beta + g^2(1-\mu^2) - 2\mu^2\omega^4 R = 0$$

解得　$\beta = \dfrac{(3-\mu^2)g \pm \mu\sqrt{4g^2 + 2(9-\mu^2)\omega^4 R^2}}{(9-\mu^2)R}$

显然应取负号，因而

$$\beta=\frac{(3-\mu^2)g-\mu\sqrt{4g^2+2(9-\mu^2)\omega^4R^2}}{(9-\mu^2)R}$$

（2）$\beta=0$，因而可得

$$\beta=\frac{(3-\mu^2)g-\mu\sqrt{4g^2+2(9-\mu^2)\omega^4R^2}}{(9-\mu^2)R}=0$$

解得 $\omega=\sqrt[4]{\dfrac{(1-\mu^2)g^2}{2\mu^2R^2}}$

（3）代入数据可得

$$\omega_{\max}=18.425rad/s$$

而 $dt=\dfrac{d\omega}{\beta}=\dfrac{(9-\mu^2)Rd\omega}{(3-\mu^2)g-\mu\sqrt{4g^2+2(9-\mu^2)\omega^4R^2}}$

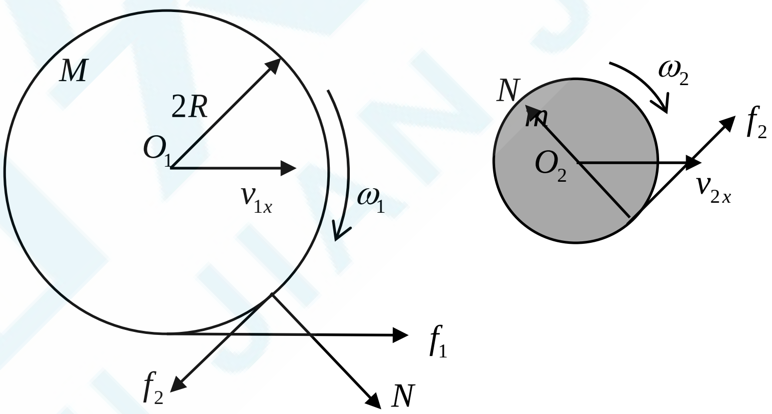
因而可得

$$\Delta t=\int_0^{\omega_{\max}/2}\frac{(9-\mu^2)Rd\omega}{(3-\mu^2)g-\mu\sqrt{4g^2+2(9-\mu^2)\omega^4R^2}}$$

带入计算得

$$\Delta t=0.344s$$

2、解：如图所示



如图设出作用力 f_1,f_2,N 等

由质心运动定理，可得

$$f_1=Ma_{1x}+ma_{2x}$$

转动定理有

$$(f_2-f_1)2R=M(2R)^2\beta_1$$

$$-f_2R=\frac{1}{2}mR^2\beta_2$$

联立消去摩擦力可得

$$Ma_{1x}+2MR\beta_1+ma_{2x}+\frac{1}{2}mR\beta_2=0$$

进而可得守恒量

$$Mv_{1x}+2MR\omega_1+mv_{2x}+\frac{1}{2}mR\omega_2=Const$$

末态，有 $v_{1x}=v_{2x}=v$

由于是纯滚动，满足

$$v=\omega_1\cdot 2R$$

$$-\omega_1\cdot 2R+\omega_2R=0$$

能量上，满足

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega_0^2=mgR+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega_2^2+\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}M(2R)^2\omega_1^2$$

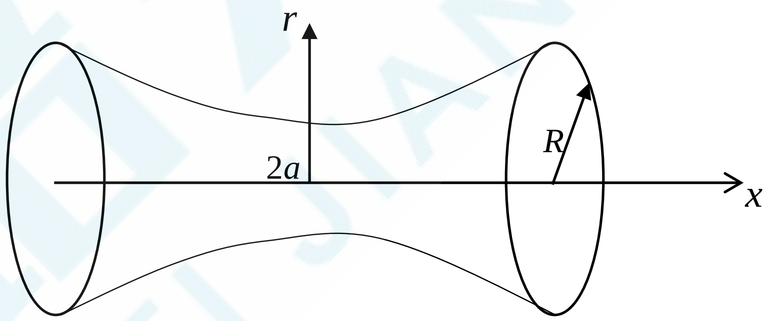
其中由于初态纯滚动可得 $\omega_0=v_0/R$，于是可得上式的守恒量

$$Const=Mv_{1x}+2MR\omega_1+mv_{2x}+\frac{1}{2}mR\omega_2=\frac{3}{2}mv_0$$

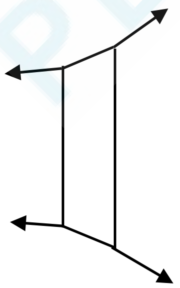
结合以上各式最终可得

$$v_0=\sqrt{\frac{4M+3m}{3M}gR}$$

3、解：如图建立坐标轴



对 $x\rightarrow x+dx$ 的一段分析受力，如图所示



左侧的合力为

$$f_x = 2\times 2\pi r(x)\sigma \frac{1}{\sqrt{1+r'^2(x)}}$$

右侧合力为

$$f_{x+dx} = 2\times 2\pi r(x+dx)\sigma \frac{1}{\sqrt{1+r'^2(x+dx)}}$$

有关系 $f_x = f_{x+dx}$

即有 $$r(x)\frac{1}{\sqrt{1+r'^2(x)}} = r(x+dx)\frac{1}{\sqrt{1+r'^2(x+dx)}}$$

进一步化简

$$r(x)\frac{1}{\sqrt{1+r'^2(x)}} = r(x+dx)\frac{1}{\sqrt{1+r'^2(x+dx)}}$$

$$=\left[r(x)+dr\right]\frac{1}{\sqrt{1+r'^2(x)+2r'(x)d(r')}}$$

$$=\frac{r(x)}{\sqrt{1+r'^2(x)}}\left(1+\frac{dr}{r}-\frac{r'd(r')}{1+r'^2}\right)$$

因而有关系 $\frac{dr}{r}-\frac{r'd(r')}{1+r'^2}=0$

可导出 $$\frac{dr}{r}-\frac{1}{2}\frac{d(1+r'^2)}{1+r'^2}=0$$

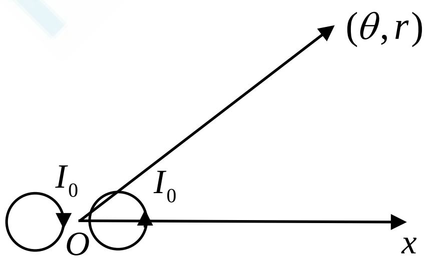
进一步有 $r'^2+1=Cr^2$，其中 C 是待定常量

易得 $$r = Ach\left(\frac{x}{A}\right)$$

其中 A 满足方程

$$R = Ach\left(\frac{a}{A}\right)$$

4、解：如图所示，磁场方向以向下为正方向



则有

$$B(\theta,r)=\frac{\mu_0 a^2 I}{4(r-\frac{d}{2}\cos\theta)^3}-\frac{\mu_0 a^2 I}{4(r+\frac{d}{2}\cos\theta)^3}$$

$$=\frac{\mu_0 a^2 I}{4r^3}\left(1+\frac{3d}{2r}\cos\theta\right)-\frac{\mu_0 a^2 I}{4r^3}\left(1-\frac{3d}{2r}\cos\theta\right)$$

$$=\frac{\mu_0 a^2 Id}{4r^4}\cos\theta$$

即有 $B(\theta,r)=\dfrac{\mu_0 a^2 Id}{4r^4}\cos\theta$

（2）（i）易得 AF 段的电动势为

$$\varepsilon_{AF}=\frac{\mu_0 a^2 Id}{4r^4}av=\frac{\mu_0 a^3 Id}{4r^4}v$$

BE 段的电动势为

$$\varepsilon_{BE}=\frac{\mu_0 a^2 Id}{4(r+a)^4}av=\frac{\mu_0 a^3 Id}{4r^4}v\left(1-\frac{4a}{r}\right)$$

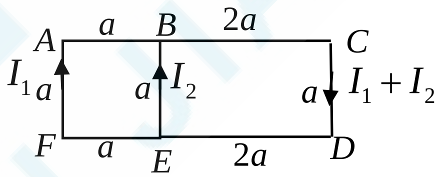
CD 段的电动势为

$$\varepsilon_{CD}=\frac{\mu_0 a^2 Id}{4(r+3a)^4}av=\frac{\mu_0 a^3 Id}{4r^4}v\left(1-\frac{12a}{r}\right)$$

因而回路 $ABEF$ 的电动势为

$$\varepsilon_{ABEF}=\varepsilon_{AF}-\varepsilon_{BE}=\frac{\mu_0 a^4 Id}{r^5}v$$

（ii）设电流分布如图所示



有关系

$$3I_1R-I_2R=\frac{\mu_0 a^4 Id}{r^5}v$$

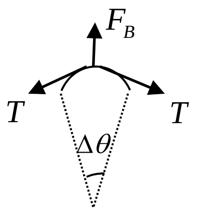
$$I_2R+5(I_1+I_2)R=\frac{2\mu_0 a^4 Id}{r^5}v$$

解得 $I_2R=\dfrac{\mu_0 a^4 Id}{23r^5}v$

因而可得

$$U_{BE}=\varepsilon_{BE}-I_2R=\frac{\mu_0 a^3 Id}{4r^4}v-\frac{24\mu_0 a^4 Id}{23r^5}v$$

5、解：（1）在质心参考系中 有



$$2T\sin\frac{\Delta\theta}{2}-\frac{\Delta\theta}{2\pi}Q\omega R=\frac{\Delta\theta}{2\pi}M\omega^2 RT$$

$$T=\frac{M\omega^2 R}{2\pi}+\frac{Q\omega RB}{2\pi}$$

(2) 写 x y 方向的牛顿第二定律

$$M\ddot{x}=-k\dot{x}-B\dot{y}Q$$

$$M\ddot{y}=-k\dot{y}-QE+BQ\dot{x}$$

取 $z=x+iy$ 可得

$$M(\ddot{x}+i\ddot{y})=-k(\dot{x}+i\dot{y})-iQE+BQi(\dot{x}+i\dot{y})$$

$$\Rightarrow M(\ddot{x}+i\ddot{y})=(-k+BQi)(\dot{x}+i\dot{y})-iQE$$

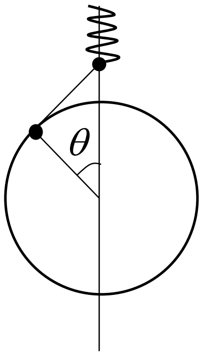
因而有 $M\ddot{z}=(-k+BQi)\dot{z}-iQE=M\dfrac{d\dot{z}}{dt}$

$$\Rightarrow \dot{z}=\frac{iQE}{-k+BQi}(1-e^{\frac{-k+BQi}{M}t})$$

$$\Rightarrow v_x=\frac{1}{B^2Q^2+k^2}\left[BQ^2E\left(1\text{-}e^{-\frac{k}{m}t}\cos\frac{BQ}{M}t\right)-kQE\cdot e^{-\frac{k}{m}t}\sin\frac{BQ}{M}t\right]$$

$$\Rightarrow v_y=-\frac{1}{B^2Q^2+k^2}\left[BQ^2Ee^{-\frac{k}{m}t}\sin\frac{BQ}{M}t+kQE\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\cos\frac{BQ}{M}t\right)\right]$$

6、解：（1）如图设θ



则有

$$E_p = 3mgR\cos\theta + \frac{1}{2}k(2R\cos\theta)^2$$
$$= 3mgR\cos\theta + 2kR^2\cos^2\theta$$

平衡位置处，满足

$\frac{dE_p}{d\theta} = 0$，即有

$$-3mg\sin\theta - 4kR^2\cos\theta\sin\theta = 0$$

因而可得，平衡位置处

$\theta = 0, \pi$；

$$\theta = \pi - \arccos\frac{3mg}{4kR}(要求3mg \le 4kR)$$

（2）$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -3mgR\cos\theta - 4kR^2\cos^2\theta + 4kR^2\sin^2\theta$

可见$\theta = 0$时，上式小于零，为不稳定平衡位置；

$\theta = \pi时, \frac{d^2E_p}{d\theta^2} = 3mgR - 4kR^2$

若$3mg > 4kR$, 为稳定平衡位置

$\theta = \pi - \arccos\frac{3mg}{4kR}(要求3mg \le 4kR)$时

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = 4kR^2\left[1 - \left(\frac{3mg}{4kR}\right)^2\right]$$

可见，若有$3mg < 4kR$，这也是稳定平衡位置

$$E_k = \frac{1}{2}mR^2(1 + 4\sin^2\theta)\dot{\theta}^2$$

因而

$$E=\frac{1}{2}mR^2(1+4\sin^2\theta)\dot{\theta}^2+3mgR\cos\theta+2kR^2\cos^2\theta$$

由能量守恒，可得

$$\frac{dE}{dt}=0$$

$$\Rightarrow mR^2(1+4\sin^2\theta)\dot{\theta}\ddot{\theta}+8\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^3-3mgR\cos\theta\dot{\theta}-4kR^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}=0$$

令 $\theta=\theta_0+\vartriangle\theta$，略去高阶项，分别可得

$\theta=\pi$ 时

$$\vartriangle\ddot{\theta}+\frac{3mg-4kR}{mR}\vartriangle\theta=0$$

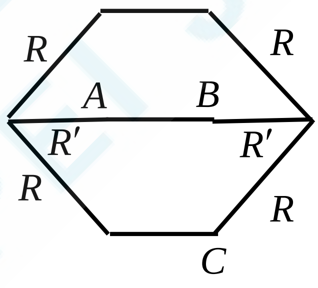
可得出 $f_1=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{3mg-4kR}{mR}}$

$\theta=\pi-\arccos\dfrac{3mg}{4kR}$ 时，可得

$$\vartriangle\ddot{\theta}+\frac{4k\left[1-\left(\dfrac{3mg}{4kR}\right)^2\right]}{m\left[5-\left(\dfrac{3mg}{2kR}\right)^2\right]}\vartriangle\theta=0$$

因此可得 $f_2=\dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{k\left[1-\left(\dfrac{3mg}{4kR}\right)^2\right]}{m\left[5-\left(\dfrac{3mg}{2kR}\right)^2\right]}}$

7、解：电路可做如图等效



易得其中 R'，R 满足

$$\frac{(2R+2r)2r}{2R+4r}=2R$$

$$\frac{\left(\frac{(R+2r)(R'+r)}{R+3r+R'}+R+r\right)r}{\frac{(R+2r)(R'+r)}{R+3r+R'}+R+2r}=R'+R、$$

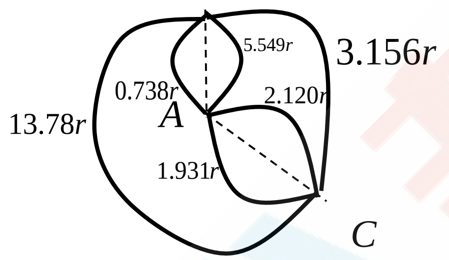
解得 $R=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}r$

$R'=0.08663r$

（1）易得

$$R_1=\frac{(R+\frac{1}{2}r+2R')r}{R+\frac{3}{2}r+2R'}=0.5636r$$

（2）经过星角变换，电路可变为



就是一个普通的串并联电路，可算得

$R_2=0.769r$

8、解:（1）地面系上看，有

$$l_1=l_0\sqrt{1-\beta_1^2}=0.8l_0 \qquad l_2=l_0\sqrt{1-\beta_2^2}=0.6l_0$$

地面系看，2 收到信号时

$$t_1=\frac{L_0}{c-0.8c}=\frac{5L_0}{c}$$

2 头部发出信号时

$$t_2=t_1+\frac{l_0\frac{v_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta_2}}=\frac{5L_0}{c}+\frac{4l_0}{3c}$$

此时 $L=L_0+0.2c\times t_2=2L_0+\dfrac{4}{15}l_0$

因而 1 收到信号时

$$t_3=t_2+\frac{L+l_1+l_2}{1.6c}=\frac{25}{4}\frac{L_0}{c}+\frac{19}{8}\frac{l_0}{c}$$

1 头部收到信号时，时间为

$$t_4=t_3+\frac{l_0\frac{v_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}=\frac{25}{4}\frac{L_0}{c}+\frac{25}{8}\frac{l_0}{c}$$

由于钟慢，可得

$$t_0=t_4\sqrt{1-\beta_1^2}=5\frac{L_0}{c}+\frac{5}{2}\frac{l_0}{c}$$

（2）$l_1=l_0\sqrt{1-\beta_1^2}=0.4c\cdot s$

$$l_2=l_0\sqrt{1-\beta_2^2}=0.3c\cdot s$$

t_1发出信号后，再经历$\vartriangle t$，2 尾部收到信号，满足方程

$$\left[v_2(t_1+\vartriangle t)-l_2\right]^2+v_1^2t_1^2=c^2\vartriangle t^2$$

解得 $\vartriangle t=2.823s$

因而 $t_2=3.823s$

头部发出信号的时间为

$$t_3=t_2+\frac{l_2\frac{v_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta_2^2}}=4.489s$$

再次被 1 接收到的时间满足

$$\left[v_1t_4-l_1\right]^2+v_2^2t_3^2=c^2(t_4-t_3)^2$$

$$t_4=12.384s$$

信号再到头部的时间为

$$t_5=t_4+\frac{l_1\frac{v_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}=12.7586s$$

因而此时头部时钟的读数为

$$t_0=t_5\sqrt{1-\beta_1^2}=10.21s$$