培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（十一）

考试时间：150 分钟　　总分 320 分

（参考答案）

题一.

月球绕地球运动的动力学方程

$$-\frac{GM}{r^2}=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\text{（6 ‘）}$$

令 $r=r_0+x$， $x<<r_0$，利用角动量 L 守恒，取一阶近似得

$$\ddot{x}+\frac{GM}{r_0^3}x=0\text{（6 ‘）}$$

椭圆轨迹取一阶近似得

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}\approx p(1-e\cos\theta)\text{（6 ‘）}$$

对比可得

$$r_0=p\text{（5 ‘）}$$

此即认为是径向微扰导致正圆轨迹变为椭圆轨迹（近似圆周轨迹）。利用天体轨道参数，得

$$\ddot{x}+\frac{G^4M^4m^6}{L^6}x=0\text{（5 ‘）}$$

记振动频率为 ω，取一阶相对变化量得

$$\frac{\Delta\omega^2}{\omega^2}=\frac{4\Delta M}{M}+\frac{6\Delta m}{m}\approx\frac{6\Delta m}{m}=\frac{6m_0\cos\beta t}{m}\text{（6 ‘）}$$

利用最强烈参变共振的条件，得

$$-\frac{6m_0\pi}{mT_0}<\beta-\frac{4\pi}{T_0}<\frac{6m_0\pi}{mT_0}\text{（6 ‘）}$$

此即该系统发生最强烈参变共振的条件。

题二. 水平粗糙平面上有两个完全相同的匀质刚性小球，其中一个小球静止，另一个小球以纯滚动的运动方式向静止的小球运动，平动速度为 v。随后两球发生碰撞（不一定是正碰），可认为是完全弹性的。求最后两球都达到纯滚动后平动速度 v_A、 v_B 的大小满足的关系。

解：

设碰撞时两球球心连线与初速度方向的夹角为 θ，由弹性碰撞性质得

$$v\cos\theta=v_2-v_1\,(5’)$$

由动量守恒得

$$mv\cos\theta=mv_1+mv_2\,(5’)$$

由角动量守恒得

$$mv_2 r=\frac{7}{5}mv_B r\ (5')$$

利用质心运动定理、角动量定理、冲量定理，由矢量分析得

$$7\vec{v}-5\vec{v}_2=7\vec{v}_A\ (10')$$

矢量式化标量式得

$$v_A^2=v^2+\frac{25}{49}v_2^2+\frac{10}{7}vv_2\cos\theta\ (5')$$

联立消去$\cos\theta$、v_1、v_2得

$$v_A^2-\frac{19}{5}v_B^2=v^2\ (10')$$

题三.

（1）显然各杆角速度相等，由机械能守恒得

$$2\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2+2\times\frac{1}{2}mv_c^2+2\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\omega^2-4mgl\sin\theta=0\quad(3')$$

其中v_c为下杆质心速度，由运动学关联得

$$v_c^2=\left(\frac{9}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)\omega^2l^2\quad(2')$$

其中$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，联立解得

$$\omega=\sqrt{\frac{6\sqrt{2}g}{5l}}\quad(2')$$

再由运动学关联，

$$v_{右}=\omega l\quad(2')$$

$$v_{下}=\sqrt{2}\omega l\quad(2')$$

得

$$v_{右}=\sqrt{\frac{6\sqrt{2}gl}{5}}\quad（2'）$$

$$v_{下}=\sqrt{\frac{12\sqrt{2}gl}{5}}\quad(2')$$

(2)

由牛顿运动定律、角动量定理得

$$mg\frac{\sqrt{2}}{4}l-F_{右x}\frac{\sqrt{2}}{2}l+F_{右y}\frac{\sqrt{2}}{2}l=\frac{1}{3}ml^2 \quad 3'$$

$$-F_{右x}-F_{下x}=ma_{cx} \quad 3'$$

$$mg-F_{右y}-F_{下y}=ma_{cy} \quad 3'$$

(或以 $F_{右x}\frac{\sqrt{2}}{4}l+F_{右y}\frac{\sqrt{2}}{4}l-F_{下x}\frac{\sqrt{2}}{4}l-F_{下y}\frac{\sqrt{2}}{4}l=\frac{1}{12}ml^2\beta$ 代替)

由速度关联：

$$a_{cx}=\tfrac{1}{2}(\beta l+\omega^2 l) \quad 3'$$

$$a_{cy}=\tfrac{3}{2}(\beta l-\omega^2 l) \quad 3'$$

联立解得

$$\beta=\frac{33\sqrt{2}g}{25l},a_{cx}=-\frac{63}{50}g,a_{cy}=\frac{9}{50}g \quad 4'$$

$$F_{右}=0.93n \quad 3'$$

$$F_{下}=0.82r \quad 3'$$

题四.

首先计算所有分子距a的角距离至少为s的概率.对于每个分子，处于某个立体角内的概率正比于这个立体角的大小. 于是某一个分子处于角距离至少为s的立体角范围的概率为

$$p_s=\frac{1}{2}(1+\cos s)$$

而所有分子均处于这个立体角范围内的概率为(除了a还有$n-1$个分子)

$$P_s=p_s^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}(1+\cos s)^{n-1}$$

类似可知，所有分子均处于角距离至少为$s+ds$的立体角范围的概率为

$$P_s'=\frac{1}{2^{n-1}}(1+\cos(s+ds))^{n-1}$$

因此所有分子均处于角距离至少为s的立体角范围并且有至少一个分子不在角距离至少为$s+ds$的立体角范围的概率为

$$Q_sds=P_s-P_s'=\frac{n-1}{2^{n-1}}(1+\cos s)^{n-2}\sin s$$

这也是距a最近的分子角距离为$s\sim s+ds$的概率.
因此最短弧长的期望值为

$$\begin{aligned}\bar{S}&=R\int_0^{\pi}Q_s s ds\\&=\frac{(n-1)R}{2^{n-1}}\int_0^{\pi}\varphi\sin\varphi(1+\cos\varphi)^{n-2}d\varphi\end{aligned}$$

题五.

由能量守恒、动量守恒、狭义相对论能动量关系得

$$E_\pi+E_e=m_1c^2$$

$$E_e^2=\left(m_3c^2\right)^2+p^2c^2$$

$$E_\pi^2=\left(m_2c^2\right)^2+p^2c^2 \quad (4'*3)$$

解得

$$E_\pi = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2m_1} c^2$$ (5’)

在 π^0 介子静止的参考系中，两光子的能动量大小为

$$E'_\gamma = \frac{1}{2} m_2 c^2 , p'_\gamma = \frac{1}{2} m_2 c$$ (4’*2)

在实验室参考系中，当两光子和 π^0 介子的速度方向共线时，速度与 π^0 介子同向的光子能量最大，

速度与 π^0 介子反向的光子能量最小，由洛伦兹变换得光子能量最值

$$E_{\max} = \frac{1}{2} \gamma m_2 c^2 (1+\beta)$$

$$E_{\min} = \frac{1}{2} \gamma m_2 c^2 (1-\beta)$$ (5’*2)

其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_1^2 + m_2^2 - m_3^2}{2m_1 m_2}$ (5’)

题六.

（1）做最低级近似，将感应电荷看作金属棒两端的等量异号电荷，设为 q，由金属棒内场强为 0，有

$\frac{q}{r^2} \sim \frac{Q}{L^2}$ 即 $q \sim \frac{Qr^2}{L^2}$ 5’

又 $F = \frac{kQq}{(L-r)^2} - \frac{kQq}{(L+r)^2} = \frac{kQq}{L^2} \cdot \frac{4r}{L}$ 5’

有 $F \propto \frac{Q^2 r^3}{L^5}$ 5’

即：电荷 2Q 所受到的力为 4F 5’ 两端的负电荷-q 和中间的正电荷 2q，由金属棒内场强为 0

$q \sim \frac{Qr^3}{L^3}$ 5’

又 $F = \frac{2kQq}{L^2} - \frac{2kQqL}{(L^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{Qqr^2}{L^4}$ 10’

即：电荷 2Q 受到的力为 2F 5’

题七.

将宽段导轨上的导体棒标号 1、窄段导轨上的导体棒标号 2，记宽段导轨上的导体棒的最终速度为 v_{f1}、窄段导轨上的导体棒的最终速度为 v_{f2}。最终两根棒均做匀速直线运动，无电流通过，两根棒上的动生电动势均等于最终电容器上的剩余电压，由此可得

$$v_{f2}=2v_{f1} \quad (3’)$$

对两根棒由动量定理得

$$mv_{f1}=2BLq_{f1}$$
$$mv_{f2}=BLq_{f2} \quad (3’*2)$$

由电荷守恒得

$$q_{f1}+q_{f2}+2CBLv_{f1}=CE \quad (4’)$$

联立解得

$$v_{f1}=\frac{2CEBL}{5m+4CB^2L^2}$$
$$v_{f2}=\frac{4CEBL}{5m+4CB^2L^2} \quad (3’*2)$$

将两根棒的动量定理再乘以时间微分 dt 并作积分得

$$mx_{f1}=2BL\int q_1dt=2BLA_1$$
$$mx_{f2}=BL\int q_2dt=BLA_2 \quad (4’*2)$$

设某时刻电容器上的剩余电量为 Q，将基尔霍夫电压方程乘以时间微分 dt 并作积分得

$$\frac{CE\tau-A_1-A_2}{C}-2BLx_{f1}-q_{f1}R=0$$
$$\frac{CE\tau-A_1-A_2}{C}-BLx_{f2}-q_{f2}R=0 \quad (4’*2)$$

联立解得

$$x_{f2}=\frac{\left(6m-2CB^2L^2\right)CEmR+\left(10m+8CB^2L^2\right)CEB^2L^2\tau}{\left(3m+2CB^2L^2\right)\left(5m+4CB^2L^2\right)BL}-\frac{3mCER}{\left(5m+4CB^2L^2\right)BL} \quad (5’)$$

题八.

（1）$$\frac{q^2nr^2}{kT\varepsilon_0}=\frac{r^2}{n}\cdot\frac{d^2n}{dr^2}+\frac{2r}{n}\cdot\frac{dn}{dr}-\frac{r^2}{n^2}\cdot\left(\frac{dn}{dr}\right)^2 \quad (15’)$$

（2）$\frac{3N}{4\pi R^3}+\frac{q^2\left(\frac{3N}{4\pi R^3}\right)^2}{6kT\varepsilon_0}r^2$ (25’)

由高斯定律，

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\phi}{dr}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

由$Boltzman$分布并适当选取电势零点，

$$\ln n = -\frac{q\phi}{kT}$$

代入上式即得答案。 第二问计算$\frac{dn}{dr}, \frac{d^2n}{dr^2}$，并将其余的$n$以$n_0$的值代入,得

$$\alpha = \frac{q^2n_0^2}{6kT\epsilon_0} \approx \frac{q^2(\frac{3N}{4\pi R^3})^2}{6kT\epsilon_0}$$

$$n_0 = \frac{3N}{4\pi R^3} - \frac{3}{5}\alpha R^2 \approx \frac{3N}{4\pi R^3}$$