培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（一）

考试时间：150 分钟　　总分 320 分

学校：　　姓名：　　学号：　　装　订　线

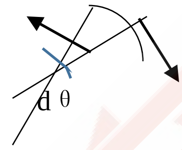
（参考答案）

1（20 分）由几何关系 $dN=2\cdot 0.5Td\theta=Td\theta$（无向心加速度）（2 分）

$df=\mu dN=\mu Td\theta$（3 分）

$dT-df=dm\beta r$(3 分)

$dm=\lambda rd\theta$（2 分）



故 $dT=d\theta(\mu T+\lambda r^2\beta)$（3 分）

故$\frac{d(\mu T+\lambda r^2\beta)}{\mu T+\lambda r^2\beta}=\mu d\theta$ (3 分)

$\ln\frac{\mu F1+\lambda r^2\beta}{\mu F2+\lambda r^2\beta}=\mu\theta$ 即为所求（4 分）

2(22 分)（1）①充分性如图答 2—1，$\vec{r}=\vec{x}+\vec{y}$，$\alpha=1$ 时，$\vec{F}=-GMm\vec{r}=-GMm(\vec{x}+\vec{y})$（3 分）

有$\vec{F}=m\vec{a}$（1 分）

故 $ax+GMx=0,ay+GMy=0$（2 分）

故 $wx=wy=\sqrt{GM}$,两方向简谐振动频率相等，故轨迹为李萨如图形中的椭圆（不考虑直线的情况）（2 分）

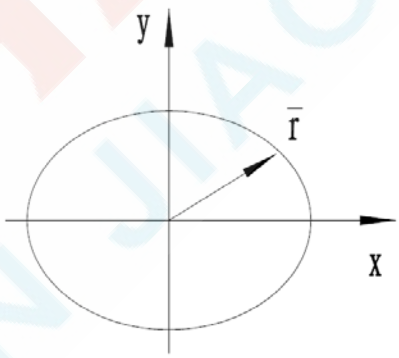
②必然性如图答 2—2 所示，设 A（A,0）,B(0,B),OA=A,OB=B,A 点曲率半径 $\rho A=\frac{B^2}{A}$, $\rho B=\frac{A^2}{B}$。（2 分）

A 点的动力学方程：$GMmA^\alpha=m\frac{vA^2}{\rho A}$（1 分）

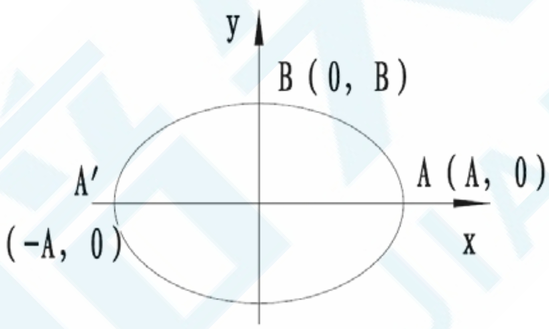
B 点的动力学方程 $GMmB^\alpha=m\frac{vB^2}{\rho B}$（1 分）

角动量守恒 mAVA=mBVB（2 分）

故$\frac{A^\alpha}{B^\alpha}=\frac{A}{B}$，$\alpha=1$ 必然性得证（1 分）



答 2-1



答 2-2

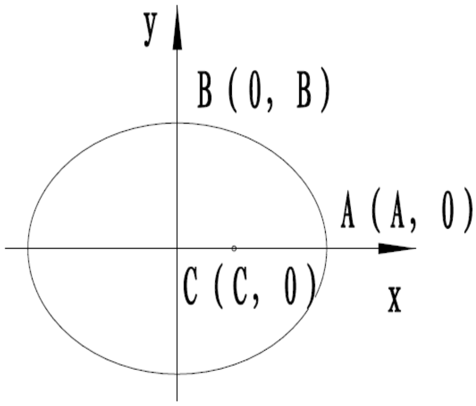
（2）如图答 2—3 所示 A(A,0),A’(-A,0),C(C,0)

$F=GMmr^\alpha$,A、A’处曲率半径相同记为 ρ

A：$GMm(A-C)^\alpha=m\frac{v^2}{\rho}$（2 分）

A’：$GMm(A+C)^\alpha=m\frac{v'^2}{\rho}$（2 分）

角动量守恒：mV（A-C）=mV'（A+C）（3 分）

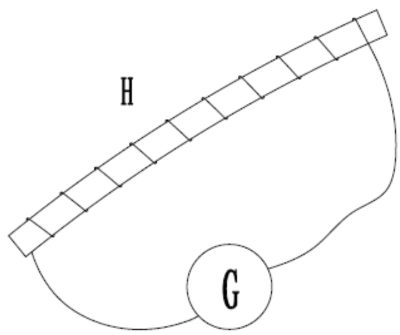


答 2-3

故$\frac{A^{\alpha}}{B^{\alpha}}=\frac{B^2}{A^2}$, α =-2 必然性得证（1 分）

3（1）Fx=KL（1 分）
换系后，L'=L$\sqrt{1-\beta^2}$（1 分）
β =$\frac{v}{c}$
由力的变换式得 Fx'=Fx（1 分）
K'L'=KL（1 分）
K'=K/$\sqrt{1-\beta^2}$（2 分）
(2)Fy=Kl（1 分）
Fy'=Fy$\sqrt{1-\beta^2}$（1 分）
L'=L（1 分）
K'L'=KL$\sqrt{1-\beta^2}$（1 分）
K'=K$\sqrt{1-\beta^2}$（2 分）
(3)针对（1）中情况 K1=K/$\sqrt{1-\beta^2}$
L1=L$\sqrt{1-\beta^2}$（K1，L1 表达式共 1 分）
截面积 S=$\int dydz$（1 分）
y,z 为换系不变量，故其微分也为换系不变量
故 S1=S（1 分）
故$\frac{K1L1}{S1}=\frac{KL}{S}$（1 分）
针对（2）中情况，K2=K$\sqrt{1-\beta^2}$
L2=L（K2，L2 表达式共 1 分）
S2=$\int dx'dy'=\int dx\sqrt{1-\beta^2}$dy=S$\sqrt{1-\beta^2}$（1 分）
故$\frac{K2L2}{S2}=\frac{KL}{S}$（2 分）
验证得杨氏模量是换系不变量

4 （18 分） ε e=N$\frac{d(BS)}{dt}$（3 分）
N=NL,L 为磁通区的长度
ε e—L$\frac{di}{dt}$—iR=0（3 分）
B= μ H= μ 0H（1 分）
故 nL μ 0HS=L Δ i+qR（2 分）
前后均有 i=0，故 Δ i=0（2 分）



答 4-1

故 $nL\mu_0 HS=qR$（3 分）

$\varepsilon_m=\int H\cdot dl$=HL(外侧近似 H=0)（2 分）

$\varepsilon_m=\frac{qR}{Sn\mu_0}$（2 分）

注：未考虑自感而结果正确的扣 5 分

5（25 分）

（1） 在火箭瞬时静止系中，$-dmv_0=mdv_1$，（2 分）

火箭相对地系速度变为：$v'=\frac{v+dv_1}{1+\frac{v\,dv_1}{c^2}}$ （2 分）

$$dv=v'-v=\frac{dv_1\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{1+\frac{v\,dv_1}{c^2}}$$

$dv\approx-\frac{dmv_0}{m}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$（2 分）

故 $\frac{d\left(\frac{v}{c}\right)}{1-\frac{v}{c}}+\frac{d\left(\frac{v}{c}\right)}{1+\frac{v}{c}}=-\frac{2v_0}{c}\cdot\frac{dm}{m}$

$\therefore\ -\frac{d\left(1-\frac{v}{c}\right)}{1-\frac{v}{c}}+\frac{d\left(1+\frac{v}{c}\right)}{1+\frac{v}{c}}=-\frac{2v_0}{c}\cdot\frac{dm}{m}$ （2 分）

$-ln(1-\beta)+ln(1+\beta)=\frac{2v_0}{c}Ln\frac{m_0}{m}$（2 分）

$v=\beta c=\frac{\left(\frac{m_0}{m}\right)^{\frac{2v0}{c}}-1}{\left(\frac{m_0}{m}\right)^{\frac{2v0}{c}}+1}$（2 分）

（2） 记竖直向下为正方向，有

$mg-kv^2=m\frac{dv}{dt}$（2 分）

$dt=\frac{m\,dv}{mg-kv^2}$（1 分）

故 $dt=\frac{m\,dv}{(\sqrt{mg}-\sqrt{k}v)(\sqrt{mg}+\sqrt{k}v)}$（4 分）

$dt=\frac{m}{2\sqrt{Kmg}}\left[\frac{d(\sqrt{k}v)}{\sqrt{mg}-\sqrt{k}v}+\frac{d(\sqrt{k}v)}{\sqrt{mg}+\sqrt{k}v}\right]$（2 分）

$=\frac{m}{2\sqrt{Kmg}}\left[-\frac{d(\sqrt{mg}-\sqrt{k}v)}{\sqrt{mg}-\sqrt{k}v}+\frac{d(\sqrt{mg}+\sqrt{k}v)}{\sqrt{mg}+\sqrt{k}v}\right]$（2 分）

故 $t=\frac{m}{2\sqrt{Kmg}}\left[-Ln\frac{\sqrt{mg}-\sqrt{k}v_1}{\sqrt{mg}-\sqrt{k}v_0}+Ln\frac{\sqrt{mg}+\sqrt{k}v_1}{\sqrt{mg}+\sqrt{k}v_0}\right]$（2 分）

6（15 分） $p_0V_0^{\gamma}=pV^{\gamma}$，P=P0+mg/S（3 分）

微小振动时，PV^{γ}=常量（2 分）

$\frac{dp}{p}+\gamma\frac{dV}{V}=0$，$\gamma=4/3$（2 分）

dF=dP·S=ma，dV=Sdx（2 分）

故$\frac{4S^2\Delta xp}{3V}$+ma=0,a=$\ddot{\Delta x}$（2 分）

$V=\left(\frac{P0}{P0+mg/s}\right)^{0.75}V0$（2 分）

$\omega=\sqrt{\frac{4S^2P}{3mV}}=\sqrt{\frac{4(P0+\frac{mg}{s})^{1.75}s^2}{3mV0P0^{0.75}}}$（2 分）

7（20 分）(1) $E0=\frac{m0\,c^2}{\sqrt{1-v0^2/c^2}}$（1 分）

E=E0+nUq（1 分）

$E=\sqrt{p^2c^2+m_0{}^2c^4}$（1 分）

$qvB=mv^2/r$（1 分）

故 $r=\frac{mv}{qB}=\frac{P}{qB}$（1 分）

r=$\frac{\sqrt{(\frac{m0c^2}{\sqrt{1-\frac{v0^2}{c^2}}}+nUq)^2-m0^2c^4}}{cqB}$（2 分）

(2)加速 i 次 Ei=$\frac{1}{2}m_0v_0^2$+iUq（1 分）

加速 i+1 次 Ei+1=$\frac{1}{2}m_0v_0^2$+(i+1)Uq（1 分）

Ei=$\frac{1}{2}m_0vi^2$（1 分）

Ei+1=$\frac{1}{2}m_0v_{i+1}^2$（1 分）

qvB=m$\frac{v^2}{r}$

故 r=$\frac{m_0v}{qB}$（1 分）

$r_{i+1}{}^2$-ri^2=（$\frac{m0}{qB}$）^{2}（$v_{i+1}^2-vi^2$）

=$\frac{2m0U}{qB^2}$（2 分）

（3）　qvB=m$\frac{v^2}{R}$时（1 分）

对应最大速度

P=mv=qBR（1 分）

E=mc^2=$\sqrt{p^2C^2+m_0^2C^4}$（1 分）

m=$\frac{1}{c}\sqrt{P^2+m_0^2C^2}$（1 分）

$v_m=\frac{p}{m}=\frac{qBRc}{\sqrt{q^2B^2R^2+m_0^2c^2}}$（2 分）

8（20 分）电子球一层层积累，积累至半径为 r 时

$\varphi=\frac{kq}{r}$（1 分）

dq=4π$r^2d\rho$（1 分）

$dEe=\varphi\, dq$（1 分）

$dEe=k\rho\frac{4}{3}\pi r^3\cdot 4\pi r d r\rho$（1 分）

$Ee=\frac{3}{5}k\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^2$（1 分）

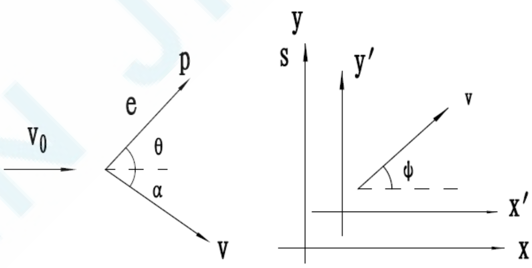
$e=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$（1 分）

故$Ee=\frac{3}{5}k\frac{e^2}{R}$（1 分）

同理引力势能$E_G=-\frac{3}{5}\frac{Gm_e^2}{R}$（1 分）

$\frac{3}{5}k\frac{e^2}{R}-\frac{3}{5}\frac{Gm_e^2}{R}$<$m_ec^2$

R>$\frac{3}{5}\frac{ke^2-Gm_e^2}{c^2}$（2 分）



答 8-1

(2)能量守恒 $hv_0+mec^2=hv+\sqrt{p^2c^2+m_e^2c^4}$（2 分）

动量守恒余弦定理表达形式$p^2=\left(\frac{hv}{c}\right)^2-\left(\frac{hv_0}{c}\right)^2-\frac{2^{h^2vv_0}}{c^2}\cos\alpha$（2 分）

$(nv_0+m_ec^2-hv)^2=p^2c^2+m_e^2c^4$

故$(v_0-v)m_eC^2=hvv_0(1-\cos\alpha)$（2 分）

质心系（零动量系）速度$v=\frac{P}{M}$（1 分）

P=$\frac{hv_0}{c}$,M=me+$\frac{hv_0}{c^2}$

电子在质心系中速度也为 v，碰后两 v 同向时对应电子在地系中最大速度$v_m=\frac{2v}{1+v^2/c^2}$（1 分）

（对应图中Φ=0）

故$v_m=\frac{2hv_0C(m_ec^2+hv_0)}{(m_ec^2+hv_0)^2+(hv_0)^2}$（2 分）

直接计算写出即可）