培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（十九）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

1（15 分）由抛出点为原点，水平为 x 轴，竖直为 y 轴建立平面直角坐标系

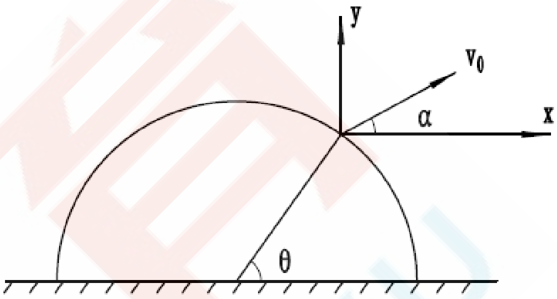
X=$v_0\cos\alpha\cdot t$（1 分）

Y=$v_0\sin\alpha\cdot t$--$\frac{1}{2}gt^2$（1 分）

所以 y=xtanα$-\frac{gx^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)$（2 分）

将 y 视作 tanα 的函数

tanα=$\frac{v_0^2}{gx}$时（1 分），对应最大 y=$\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2$为包络面方程（2 分）



y=−Rsinθ 时

x=$\sqrt{\frac{{v_0}^4}{g^2}+\frac{2{v_0}^2R\sin\theta}{g}}$（2 分）

距球心 s=Rcosθ+$\sqrt{\frac{{v_0}^4}{g^2}+\frac{2{v_0}^2R\sin\theta}{g}}$（1 分）

代入数据 s=2cosθ+$\sqrt{6.25+10\sin\theta}$（1 分）

使$\frac{ds}{d\theta}=0$（计算器表格功能）

位置 θ=0.623rad 时，$\frac{ds}{d\theta}=0$（2 分）

代入得$S_{max}=5.1m$（2 分）

2（1）取一点 O'（x_0，y_0，z_0）

在 O、O'、A 三点共处的平面内以 O' 为原点，水平为 r 轴，竖直为 z' 轴建立坐标系，抛出一物，速度v_0与 r 轴夹角为 θ

r=$v_0\cos\theta\cdot t$（1 分）

z'=$v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$（1 分）

z'=rtanθ$-\frac{gr^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta)$（2 分）

tanθ=$\frac{{v_0}^2}{gr}$时，对应最值 z'=$\frac{{v_0}^2}{2g}-\frac{gr^2}{2v_0^2}$（2 分）

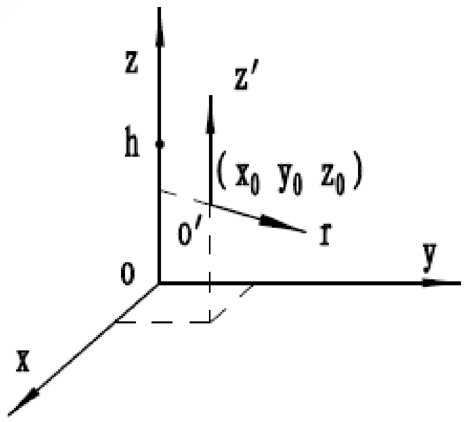
使塔顶在该曲面上即对应最小抛出速度为v_0

塔顶 A 点 r=$-\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，z'=h-z_0（2 分）

h-z_0=$\frac{{v_0}^2}{2g}-\frac{g(x_0^2+y_0^2)}{2v_0^2}$（2 分）

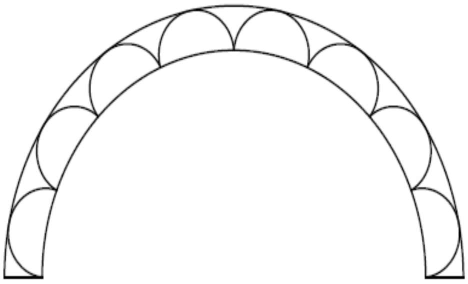
x_0=x, $y_0=y, z_0=z$

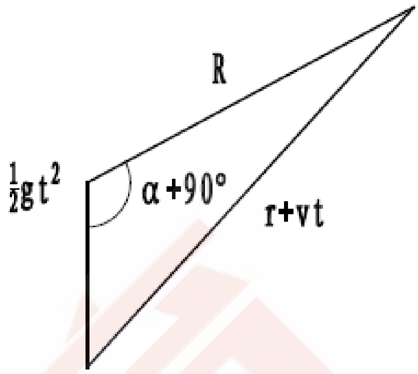
则曲面 z=h$-\frac{{v_0}^2}{2g}+\frac{g(x^2+y^2)}{2v_0^2}$即为所求，是一个旋转抛物面（3 分）



（2）若从半球面上每个点都向各方向发射多个球，每个点发出的球们组成一个半球面，半球面们的包络面为一个新的半球面，类似于球面波的传播，包络面上的点为相同时间内传播的最远点。该半球面的球心初始在 O 点，以加速度 g 自由落体，半球半径初始大小为 r，以 v 的速率膨胀。（5 分）

有余弦定理（r+vt）^{2}=$\left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2+R^2$—$2\times\frac{1}{2}gt^2R\cos(\alpha+90^0)$（3 分）





代入数据，得 t=1.972s（较小的正实数解）。（4 分）

3（1）在以Ω角速度公转的转动系中，圆盘做简单的匀速转动

a=$a_{牵}+a_{科}+a_{相}$（2 分）

x 轴单位向量以 i 表示，y 轴单位向量以 j 表示，z 轴单位向量以 k 表示，在转动系中，A 点速度 v=ω·2R—ΩL=ωR（1 分）

a=$-\Omega^2 L\vec{j}-2\Omega\cdot wR\vec{j}-\omega^2R\vec{k}$

=$-3\Omega\cdot wR\vec{j}-\omega^2R\vec{k}$（3 分）

（2）相对 B 点的角动量

①沿 z 向$L_z=-J_z\Omega$（1 分）

J_z为相对 z 轴的转动惯量

J_z=$mL^2+\frac{1}{4}mR^2$（1 分）

L_z=−（$mL^2+\frac{1}{4}mR^2$）Ω =−m（$\frac{\omega^2}{\Omega^2}+\frac{1}{4}$）Ω（2 分）

②$L_y=\frac{1}{2}mR^2\omega$ （2 分）

L=−m（$\frac{\omega^2}{\Omega^2}+\frac{1}{4}$）Ω$\vec{k}+\frac{1}{2}mR^2\omega\vec{j}$（2 分）

(3)杆为轻杆，两端受力时力方向沿杆

地面对杆的弹力$N_z=mg$（1 分）

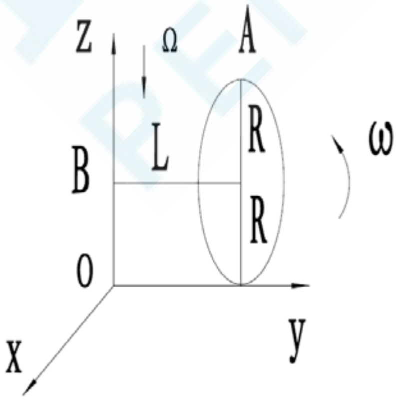
设杆弹力为 T，地面摩擦为 f 则

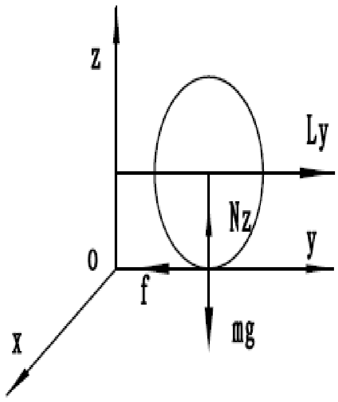
T+f=m$\Omega^2L=m\Omega\omega R$（2 分）

L_y方向在变，故相对 B 点有沿 x 轴的力矩

由角动量定理 fR=ΩL_y（3 分）

故 f=$\frac{1}{2}$mRΩω，（2 分）T=$\frac{1}{2}$mRΩω（2 分）





4(1)$R_{AE}=\frac{2}{3}R$（5 分）

(2)R_{AD}=$\frac{2}{5}$R（5 分）

(3) $R'_{AD}=\frac{2}{3}R$（5 分）

5 质心速度$v_C=\frac{mv_0}{M+m}$（1 分），折合质量 μ =$\frac{mM}{M+m}$（1 分）

取 M 为系，利用二体原理

F=$-\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$=$-\frac{GMm}{r^3}$（$\vec{x}+\vec{y}$）（1 分）

① $F_x=-\frac{GMm}{r^3}x, dp_x=F_x dt$=$-\frac{GMm}{r^3}dt\cdot x$（1 分）

定义 h=$r^2\omega$，由角动量守恒，知 h 为常量

故dp_x=$-\frac{GMm}{r\cdot\frac{h}{\omega}}$dt $\cdot x$=$-\frac{GMm}{rh}\omega dt\cdot x$（1 分）

此处认为坐标系原点随 M 运动而运动但 x，y 轴方向不变

$d\theta=\omega\, dt$，x=rcosθ（1 分）

$dp_x=-\frac{GMm}{h}\cos\theta\ d\theta$ （1 分）

p_x=$-\frac{GMm}{h}$sinθ（2 分）

② 同理$F_y=-\frac{GMm}{r^3}y, dp_y=F_y dt$=$-\frac{GMm}{r^3}dt\cdot y$（1 分）

dp_y=$-\frac{GMm}{r\cdot\frac{h}{\omega}}dt\cdot y$=$-\frac{GMm}{rh}\omega dt\cdot y$（1 分）

y=rsin θ , $dp_y=-\frac{GMm}{h}\sin\theta\ d\theta$ （1 分）

Δp_y=$\frac{GMm}{h}(\cos\theta-1)$ （2 分）

相对速度$v_x=\frac{P_x}{\mu}$=$-\frac{G(M+m)}{Rv_0}\sin\theta$（1 分）

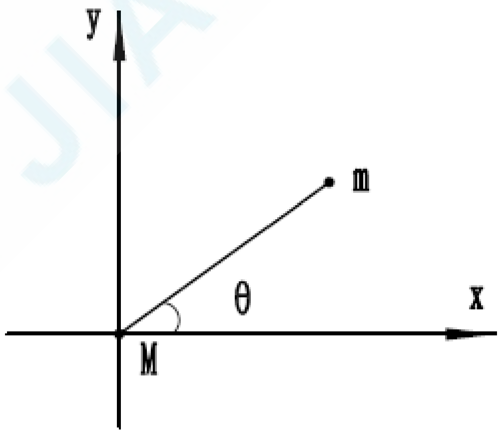
$v_y=v_0+\frac{\Delta p_y}{\mu}$=$v_0-\frac{G(M+m)}{Rv_0}$（1 − cosθ）（1 分）

回至地系，加上质心速度

$v'_x=\frac{M}{M+m}v_x$=$\frac{GM}{Rv_0}\sin\theta$（1 分）

$v'_y=\frac{M}{M+m}v_y+v_c$ （1 分）

v'_y=$v_0-\frac{GM}{Rv_0}$（1 − cosθ）（2 分）



6（1）无限长导线在距自己为 r 处电场，由高斯定理

E • 2πrh=4πkQ，Q=λh（1 分）

故 E=$\frac{2k\lambda}{r}$（1 分）

在圆上任选一点 G（不同于 A、B 两点），到 A 的矢径为$\vec{r_1}$，到 B 的矢径为$\vec{r_2}$

$\vec{E_1}=\frac{2k\lambda}{r_1^2}\vec{r_1}$，$\vec{E_2}=-\frac{2k\lambda}{r_2^2}\vec{r_2}$（1 分）

$\vec{E}$=$\vec{E_1}+\vec{E_2}=\frac{2k\lambda}{r_1^2}\vec{r_1}-\frac{2k\lambda}{r_2^2}\vec{r_2}$（1 分）

设$\overrightarrow{OG}=\vec{r}$，则$\vec{E}\cdot\overrightarrow{OG}$=2kλ（$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$）=0（2 分）

故沿径向电场为 0，电场沿切向得证（1 分）

（2）E=$E_0+E_{极化}$，真空场E_0沿切向，故除 A、B 两点外无极化电荷，仅需计算 A、B 两点的极化电荷，进而计算出总电荷数即可。

将电介质视作一个无限大电介质平面（对导线 A 或 B 来说），取 A 上任意点来研究，如图

h 为辅助量，实际为 0。E_0=$\frac{2k\lambda}{r}$

垂直平面方向E_{z0}=$\frac{2k\lambda}{r^2}$h（1 分）

介质内$E_{z内}$=$\frac{2k\lambda}{r^2}$h+$2\pi k\sigma'$（1 分）

介质外$E_{\varepsilon外}=\frac{2k\lambda}{r^2}h-2\pi k\sigma'$（1 分）

D=$\varepsilon_r\varepsilon_0 E$连续，故有$\varepsilon_r(\frac{2k\lambda}{r^2}h+2\pi k\sigma')=\frac{2k\lambda}{r^2}h-2\pi k\sigma'$（2 分）

有$\sigma'=-\frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon r+1}\cdot\frac{qh}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$（2 分）（用到了$r^2=x^2+h^2$）

$dq'=2\pi x dx\sigma'=-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon r+1}\cdot\frac{qhxdx}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$（1 分）

$q'=-\int_0^{无穷}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon r+1}\cdot\frac{qhxdx}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\int_0^{无穷}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon r+1}\cdot\frac{qhd(x^2+h^2)}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$

$=-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon r+1}q$（2 分）

$q_{总}=(1-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon r+1})q=\frac{2}{\varepsilon_r+1}q$（2 分）

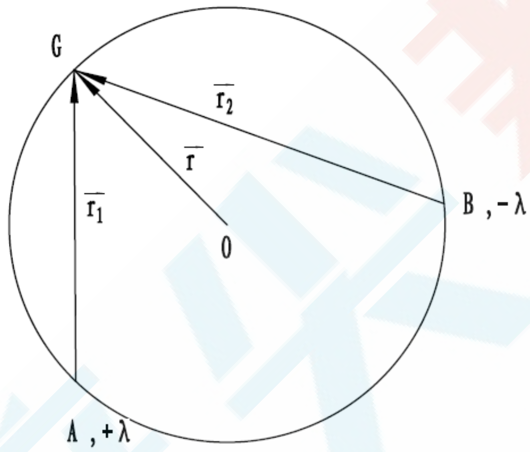
一个点满足此关系，由叠加原理，一根带电直线亦满足此关系

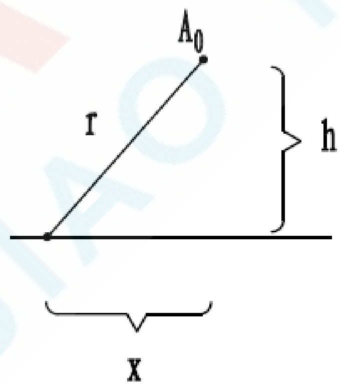
刚好 A、B 处极化电荷大小相等电量相反

E 正比于 q，故$E'=\frac{2}{\varepsilon_r+1}E_0$（1 分）

7（1）由焦耳定律 dP=dU dI（1 分）

而 dI=jdS（1 分）（选取 dS 垂直于 j 方向）





dU=Edl（1 分）（dl 选取沿 E 的方向）

$\vec{j}=\sigma\vec{E}$ （1 分），故 j 与 E 同向 dV=dsdl（1 分）

$\frac{dP}{dV}=j^2/\sigma$ （1 分）

(2)取长为 l 的一段研究

V=$\pi R^2 l$（1 分），　产热功率$P_1=\frac{j^2}{\sigma}V=\frac{j^2}{\sigma}\pi R^2 l$（1 分）

辐射功率$P_2=\alpha T_1^4\cdot 2\pi RL$（1 分）

热平衡时$P_1=P_2$（1 分）

$T_1=\sqrt[4]{\frac{j^2R}{2\alpha\sigma}}$ （2 分）

（3）取半径为 r<R 的柱面，半径 r 内的产热都要从该柱面内流出以保持热平衡

$\frac{dQ}{dt}=-\frac{k\cdot 2\pi rl}{dr}dT$（2 分）

又有$\frac{dQ}{dt}=\frac{j^2}{\sigma}V=\frac{j^2}{\sigma}\pi r^2 l$（2 分）

$dT=-\frac{j^2rdr}{2\sigma k}$（1 分）

$\Delta T=\frac{j^2}{4\sigma k}(R^2-r^2)$ （2 分）

$T_{(r)}=\frac{j^2}{4\sigma k}(R^2-r^2)+\sqrt[4]{\frac{j^2R}{2\alpha\sigma}}$ （1 分）

8（1）两中心重合时，微分电阻 dR=$\rho\frac{dr}{4\pi r^2}$（2 分）

$R_{阻}=\int_r^R \rho\frac{dr}{4\pi r^2}=\frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$（3 分）

（2）在 A 点放置电荷+Q，感应出电像$-\frac{R}{a}Q$，位于射线 BA 上距 B 为$\frac{R^2}{a}$处。（2 分）

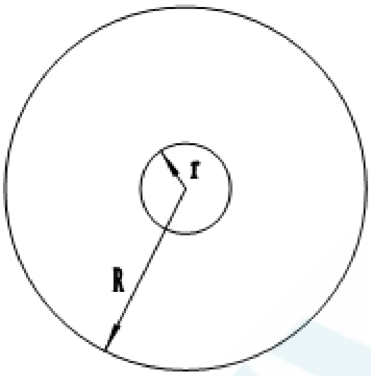
由$\vec{j}=\frac{1}{\rho}\vec{E}$，$I=\oint\vec{j}\cdot\vec{dS}$（4 分）

故$I=\oint\frac{1}{\rho}\vec{E}\cdot\vec{dS}=\frac{4\pi kQ}{\rho}$（2 分）

内壳与外壳间电势降 U=kQ（$\frac{1}{r}-\frac{1}{R-a}$）+$\frac{kRQ}{a}$（$\frac{1}{\frac{R^2}{a}-R}-\frac{1}{\frac{R^2}{a}-a}$）（3 分）

U=kQ($\frac{1}{r}-\frac{R}{R^2-a^2}$)（2 分）

$R_{阻}=\frac{U}{I}=\frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{R^2-a^2}\right)$（2 分）



(1)