培尖教育2018年学科竞赛夏令营物理模拟卷（七）

考试时间：150分钟　总分320分

（参考答案）

1、解(1)假设小球在最低点的速度大小为v_m。对全过程由能量和角动量守恒得：

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_m^2-mgh_m \quad ①$$

$$mv_0r=mv_m\sqrt{r^2-h_m^2} \quad ②$$

联立①②可得一元二次方程：$v_m^4-v_0^2v_m^2-4g^2r^2=0$ ③

其唯一的合理解为：$v_m=\sqrt{\frac{1}{2}\left(v_0^2+\sqrt{v_0^2+16g^2r^2}\right)}$ ④

代入解得$h_m=\frac{\sqrt{v_0^4+16g^2r^2}-v_0^2}{4g}$ ⑤

（2）小球始终在碗面上运动，故有：$\dot{r}=\ddot{r}=0$ ⑥

而在最低点，$\theta=\theta_{\min}=\arccos\left(\frac{h_1}{r}\right)$，因此有$\dot{\theta}=0$ ⑦

$$\dot{\varphi}=\frac{v_1}{r\sin\theta}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(v_0^2+\sqrt{v_0^4+16g^2r^2}\right)}\sqrt{\frac{8g^2r^2}{v_0^2\left(\sqrt{v_0^4+16g^2r^2}-v_0^2\right)}}\frac{1}{r}=\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^4+16g^2r^2}}{2v_0r} \quad ⑧$$

又在最低点速度最大，故$\ddot{\varphi}=0$ ⑨

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta=-\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^4+16g^2r^2}}{2r}$$

因此，小球的加速度为$a_\theta=-g\sin\theta=-\frac{v_0}{4r}\sqrt{2\left(\sqrt{v_0^4+16g^2r^2}-v_0^2\right)}$ ⑩

$$a_\varphi=0$$

评分标准：本题共40分，第（1）问18分，第（2）问22分，①②⑤⑦⑧式各4分，③④⑥式各3分 ，⑨式2分， ⑩式9分(全对才得分)

2、解：由题意知气体可以近似认为时刻处于平衡态假设t时刻气体压强p，温度T，膜的半径为r，则有$p=\frac{4\gamma}{r}$ ①

设气体的物质的量为ν，则由理想气体状态方程得：

$$\frac{p_0\frac{4}{3}\pi r_0^3}{T_0}=\frac{p\frac{4}{3}\pi r^3}{T}=\nu R$$ ②

即 $\frac{r_0^2}{T_0}=\frac{r^2}{T}$ 以及 $\nu=\frac{16\pi\gamma r_0^2}{3T_0R}$ ③

由热力学第一定律得 $\nu C_v dT+d(8\pi r^2\gamma)=-4\pi r^2\sigma T^4 dt$ ④

联立③④并代入 $C_v=5R/2$，得 $\frac{dT}{T^5}=-\frac{3\sigma}{16\gamma}dt$ ⑤

积分，有：$\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T^5}=-\frac{3\sigma}{16\gamma}\int_0^t dt$，得 $T=\frac{T_0}{\sqrt[4]{1+\frac{3\sigma T_0^4 t}{4\gamma}}}$ ⑥

在 t 时刻，取肥皂泡上半顶角 $\varphi<<1$ 对于的立体角所包含的一小块分析在小震动的过程中假设半径从 r 增加到 r+x(x<<r)，则这一块肥皂泡膜的质量近似为

$$\Delta m\approx\frac{\pi(r\varphi)^2}{4\pi r^2}m=\frac{\varphi^2}{4}m$$ ⑦

在震动过程中满足绝热方程 $\frac{4\gamma}{r}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^{7/5}=p'\left(\frac{4}{3}\pi(r+x)^3\right)^{7/5}$ ⑧

故气体对这一小块膜的压力为：$F_1=p'S'=\frac{4\gamma}{r}\left(1+\frac{x}{r}\right)^{-21/5}\pi r^2\left(1+\frac{x}{r}\right)^2\varphi^2\approx4\gamma\pi r\varphi^2\left(1-\frac{11x}{5r}\right)$

⑨

周围的膜对这一小块向内的拉力为：

$$F_2=2\bullet2\pi r\gamma\varphi^2\left(1+\frac{x}{r}\right)$$ ⑩

因此，此块肥皂泡膜径向振动的动力学方程为：

$$\Delta m\ddot{x}=F_1-F_2$$ ⑪

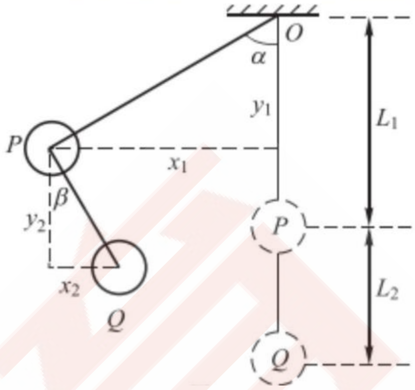
联立⑦⑨⑩⑪，得 $\ddot{x}+\frac{256\pi\sigma}{5m}x=0$ ⑫

这是一个简谐振动方程，这表明振动周期 $T_v=\sqrt{\frac{5\pi m}{64\sigma}}$ 为常量 ⑬

因此，振动 N 个周期后气体的温度为 $\frac{T_0}{\sqrt[4]{1+\frac{3\sigma T_0^4N}{4\gamma}\sqrt{\frac{5\pi m}{64\sigma}}}}$ ⑭

评分标准：本题共 40 分，①③⑦⑪式各 2 分，②④⑨⑩式各 3 分，⑤⑥⑧⑫⑭式各 4 分

3、解：(1) 假设静止时 P 到悬挂点连线和 P、Q 连线和竖直方向夹角分别为 α、β。P 球球心到悬挂点（记为 O）和两球球心距离分别为 $L_1=4L+R, L_2=2L+R$。两球再次静止时的示意图如图所示：



对 Q 由平衡得：$\tan\beta=\dfrac{3qE}{4mg}=\dfrac{3}{4}$ ①

对 P、Q 整体有：$\tan\alpha=\dfrac{15qE-3qE}{(5m+4m)g}=\dfrac{4}{3}$ ②

由几何关系得 P 上升的高度为以及向左移动的距离分别为：

$h_1=L_1(1-\cos\alpha)$ 和 $x_1=L_1\sin\alpha$ ③

Q 上升的高度 $h_2=(4+2)L+3R-y_1-y_2=6L+3R-L_1\cos\alpha-L_2\cos\beta$ ④

Q 向左的位移 $x_3=x_1-x_2=L_1\sin\alpha-L_2\sin\beta$ ⑤

假设系统产生的热量为 Q_0，则由能量守恒得：

$Q_0=15qEx_1-3qEx_3-5mgh_1-4mgh_2$ ⑥

联立以上各式解得所求热量：$Q_0=26mgL+8mgR$ ⑦

(2) 剪短细线后 Q 受到电场力和重力的合力大小为 F=5mg,和竖直方向夹角 β 且斜向下。假设金属球沿 **F** 方向位移 s，垂直此方向速度为 v。由动能定理得：

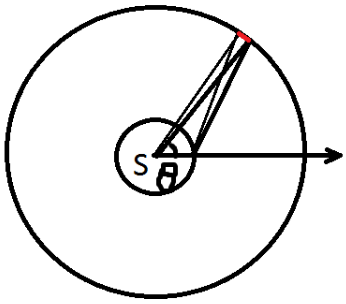
$Fs=\dfrac{1}{2}\cdot 4mv^2$ ⑧

由动量定理得 $4mdv=3qB\dfrac{ds}{dt}dt=3qBds$ ⑨

两边积分并和⑧联立，得最大速度 $v_m=\dfrac{10mg}{3qB}$ ⑩

评分标准：本题 40 分，第（1）问 29 分第（2）问 11 分，①②③⑥式各 4 分，④⑤⑧⑨式各 3 分，⑦式 7 分，⑩式 5 分

4、解：（1）如图所示，以太阳为极点，太阳到水星的射线为极轴建立极坐标(ρ,θ)，取环上θ到θ+dθ的一段，由对称性知，只需考虑沿极轴的分量。这一段产生的引力的分量为



$$dF=\frac{GM_J\frac{d\theta}{2\pi}M_m\left(R_J\cos\theta-R_m\right)}{\left(R_J^2+R_m^2-2R_JR_m\cos\theta\right)^{3/2}}=\frac{GM_JM_m}{2\pi R_J^2}\frac{\cos\theta-R_m/R_J}{\left(1+\left(R_m/R_J\right)^2-2\,R_m/R_J\cos\theta\right)^{3/2}}d\theta \quad ①$$

令小量$\frac{R_m}{R_J}=\delta$代入上面的积分，并保留一阶小量，得：

$$dF=\frac{GM_JM_m}{2\pi R_J^2}\left(\cos\theta+3\delta\cos^2\theta-\delta\right)d\theta \quad ②$$

积分得：$F=\int_0^{2\pi}\frac{GM_JM_m}{2\pi R_J^2}\left(\cos\theta+3\delta\cos^2\theta-\delta\right)d\theta=\frac{GM_JM_m\delta}{2R_J^2}=\frac{GM_JM_mR_m}{2R_J^3}$ ③

这是一个和到太阳距离正比且沿径向向外的力

附注：本问也可以通过万有引力和点电荷作用力函数形式的等效性在水星轨道上做柱形高斯面从而求解，若论证过程逻辑合理且答案正确也可给全分。

（2）在（1）中所述的极坐标中，水星径向运动的动力学方程为

$$\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2=-\frac{GM_S}{R_J^2}+\frac{GM_J}{2R_j^3}\rho \quad ④$$

由角动量守恒得：$M_J\rho^2\dot{\theta}=L=Const$ ⑤

把⑤代入④得：$\ddot{\rho}=-\frac{GM_S}{R_J^2}+\frac{GM_J}{2R_j^3}\rho+\frac{L^2}{M_J^2\rho^3}$ ⑥

假设水星做圆周运动时对应的角速度为ω_0，对于的半径为ρ_0，则有：

$$\omega_0^2\rho_0=\frac{GM_S}{\rho_0^2}-\frac{GM_J\rho_0}{2R_J^3}=\frac{GM_S}{\rho_0^2}\left(1-\frac{M_J\rho_0^3}{2M_SR_J^3}\right) \quad ⑦$$

令 $\frac{M_J\rho_0^3}{2M_S R_J^3}=\alpha(\alpha<<1)$，再令水星运动时有 $\rho=\rho_0+x(x<<\rho_0)$，代入并化简，得径向运动方程为：$\ddot{x}+\omega_0^2(1-3\alpha)x=0$ ⑧

由于水星角向运动角频率即为 ω_0 而径向振动角频率为 $\omega_0\sqrt{1-3\alpha}\approx\omega_0\left(1-\frac{3\alpha}{2}\right)$，因此，水星的进动角速度为 $\Omega=\frac{3\alpha}{2}\omega_0$ ⑨

故水星一个世纪进动角度为 $\Delta\varphi=\Omega t$，代入数字解得

$\Delta\varphi=7.677\times10^{-4}rad=158.3''$ ⑩

评分标准：本题共 40 分，第（1）问 13 分，第（2）问 27 分，④⑤⑥式各 2 分，①⑦式各 3 分，③⑨⑩式各 4 分，②式 6 分，⑧式 10 分

5、解：（1）由机械能守恒定律得：$\frac{1}{2}Mv_0^2+\lambda gL^2+MgL=\frac{1}{2}\bullet4\lambda gL^2$ ①

解得所求初速度为 $v_0=\sqrt{2gL\frac{\lambda L-M}{M}}$ ②

（3）（i）物体向下运动时，系统的动能为 $E_k=\frac{1}{2}(M+\lambda(2L+\pi R))\dot{y}^2$ ③

系统的势能为 $E_p=\frac{1}{2}4\lambda gy^2-Mgy-\lambda gy^2$ ④

由机械能守恒定律得：$\frac{d}{dt}(E_k+E_p)=0$，代入③④并整理，得：

$\ddot{y}+\frac{2\lambda g}{M+\lambda(\pi R+2L)}\left(y-\frac{M}{2\lambda}\right)=0$ ⑤

代入初始条件：$y_{t=0}=0,\dot{y}_{t=0}=0$ 得所求的表达式为

$y(t)=\frac{M}{2\lambda}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{2\lambda g}{M+\lambda(\pi R+2L)}}t\right)\right)$ ⑥

（ii）由（i）知 $\ddot{y}=\frac{Mg}{M+\lambda(\pi R+2L)}\cos\left(\sqrt{\frac{2\lambda g}{M+\lambda(\pi R+2L)}}t\right)$ ⑦

由牛顿第二定律得：
$$\begin{aligned}&(M+\lambda L)g-T_1=(M+\lambda L)\ddot{y}\\&T_2-\lambda Lg-4\lambda gy=\lambda L\ddot{y}\end{aligned}$$ ⑧

解得

$$T_1(t)=(M+\lambda L)g\left[1-\frac{M}{M+\lambda(\pi R+2L)}\cos\left(\sqrt{\frac{2\lambda g}{M+\lambda(\pi R+2L)}}t\right)\right]$$

$$T_2(t)=\lambda g\left[L+\frac{ML}{M+\lambda(\pi R+2L)}\cos\left(\sqrt{\frac{2\lambda g}{M+\lambda(\pi R+2L)}}t\right)+\frac{2M}{\lambda}\left(1-\cos\left(\sqrt{\frac{2\lambda g}{M+\lambda(\pi R+2L)}}t\right)\right)\right]$$

⑨

（iii）绳子整体在水平方向的动量大小为

$$p_x=\int_0^{\pi}\lambda Rd\phi\bullet\dot{y}\sin\phi=2\lambda R\dot{y}$$ ⑩

对整体由动量定理得：$dp_x/dt=N_{//}(t)$ ⑪

故 $N_{//}(t)=2\lambda R\ddot{y}=\frac{2\lambda RMg}{M+\lambda(\pi R+2L)}\cos\left(\sqrt{\frac{2\lambda g}{M+\lambda(\pi R+2L)}}t\right)$ ⑫

评分标准:本题共 40 分，第（1）问 5 分，第（2）问 35 分，其中(i)12 分，(ii）14 分，(iii）9 分，①③④式各 2 分，②⑦⑩⑪⑫式各 3 分，⑤⑥式各 4 分，⑧式 5 分，⑨式 6 分

6、解：（1）设物体匀速下落时，通过 R 的电流为I_0，C 转动的角速度为ω_0，则匀速运动时，

由能量守恒得 $Mg\omega_0R_C=I_0^2R$ ①

又动生电动势 $\varepsilon=\frac{1}{2}B\omega_0R_A^2+\frac{1}{2}B\omega_0\frac{R_A}{R_B}R_B^2=I_0R$ ②

而 $v_0=\omega_0R_C$ ③

联立以上各式解得 $v_0=\frac{4MgRR_C^2}{B^2R_A^2(R_A+R_B)^2}$ ④

附注：本问也可以用动力学方法求解，过程合理答案正确也可给分

（2）假设任一时刻流过 R 的电流为I，M 向下运动的速度为 v,则 A 和 C 的角速度$\omega=\frac{v}{R_C}$，

假设绳中张力为 T，A、B 间的摩擦力为 f 则系统的动力学方程为：

$$Mg-T=M\dot{\omega}R_C=M\dot{v}$$

$$fR_B-\frac{1}{2}IBR_B^2=\frac{1}{2}m_BR_B^2\frac{R_A}{R_B}\dot{\omega}$$ ⑤

$$TR_C-\frac{1}{2}IBR_A^2-fR_A=\left(\frac{1}{2}m_AR_A^2+\frac{1}{2}m_CR_C^2\right)\dot{\omega}$$

消去 f、T,并利用 $I = {dq}/{dt}$,得：

$$dt = \frac{R_A(R_A+R_B)B}{2MgR_C}dq + \frac{2MR_C^2+(m_A+m_B)R_A^2+m_CR_C^2}{2MgR_C^2}dv \quad ⑥$$

积分得：$v(t) = \frac{2MgR_C^2}{2MR_C^2+(m_A+m_B)R_A^2+m_CR_C^2}t - \frac{R_AR_C(R_A+R_B)B}{2MR_C^2+(m_A+m_B)R_A^2+m_CR_C^2}q(t)$ ⑦

此即所求的关系式（附注：本题不可以用简单的能量守恒直接求出）

（3）由（2）知 $\frac{dv}{dt} = \frac{2MgR_C^2}{2MR_C^2+(m_A+m_B)R_A^2+m_CR_C^2} - \frac{R_AR_C(R_A+R_B)B}{2MR_C^2+(m_A+m_B)R_A^2+m_CR_C^2}\frac{dq}{dt}$,

又由于 $\frac{dq}{dt} = I = \frac{B\omega R_A(R_A+R_B)}{2R} = \frac{BR_A(R_A+R_B)}{2RR_C}v$ ⑧

代入上式并整理，得：

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R_A^2(R_A+R_B)^2B^2}{2R[2MR_C^2+(m_A+m_B)R_A^2+m_CR_C^2]}v = \frac{2MgR_C^2}{2MR_C^2+(m_A+m_B)R_A^2+m_CR_C^2} \quad ⑨$$

解方程并利用 $v_{t=0}=0$，得所求的关系式为：

$$v(t) = \frac{4MgRR_C^2}{R_A^2(R_A+R_B)^2B^2}\left[1-\exp\left(-\frac{R_A^2(R_A+R_B)^2B^2}{2R[2MR_C^2+(m_A+m_B)R_A^2+m_CR_C^2]}t\right)\right] \quad ⑩$$

评分标准：本题共 40 分，第（1）问 9 分，第（2）问 19 分，第（3）问 12 分，①②③⑦式各 2 分，④式 3 分，⑧⑨⑩式各 4 分，⑤式 9 分，⑥式 8 分

7、解：换到一个相对 S 系沿 v_0 方向以 $\beta_C c$ 的速度向右运动的参考系，使得两个粒子的总动量在此参考系中为 $p' = \gamma_C\left(4m_0\sqrt{\gamma^2-1}c - \beta_C\frac{4\gamma m_0c^2+m_0c^2}{c}\right) = 0$ ①

即有：$\beta_C = \frac{4\sqrt{\gamma^2-1}}{4\gamma+1}$ ②

故有 $\gamma_C = 1\Big/\sqrt{1-\beta_C^2} = \frac{4\gamma+1}{\sqrt{8\gamma+17}}$ ③

故在此参考系中 He 的动量为 $p'_{He} = \gamma_C\left(4m_0\sqrt{\gamma^2-1} - \beta_C\frac{4m_0c^2}{c}\right) = \frac{4\sqrt{\gamma^2-1}}{\sqrt{8\gamma+17}}m_0c$ ④

在此参考系中，为了同时满足能动量守恒，唯一的解是两者以原速度反弹，假设此参考下 He 的偏转角为 θ'，即对于 He，有：

$$p_x'=\frac{4\sqrt{\gamma^2-1}}{\sqrt{8\gamma+17}}m_0c\cos\theta',\ p_y'=\frac{4\sqrt{\gamma^2-1}}{\sqrt{8\gamma+17}}m_0c\sin\theta'$$

再换回 S 系，由洛伦兹变换得：

$$p_x=\gamma_C\left(p_x'+\beta_C\frac{\sqrt{p'^2c^2+16m_0^2c^4}}{c}\right)=4\sqrt{\gamma^2-1}\frac{4\gamma+1}{8\gamma+17}\left(\cos\theta'+\frac{4(\gamma+4)}{4\gamma+1}\right)m_0c \quad ⑤$$

$$p_y=p_y'=\frac{4\sqrt{\gamma^2-1}}{\sqrt{8\gamma+17}}m_0c\sin\theta'$$

于是有 $\tan\theta=\frac{p_y}{p_x}=\frac{\sqrt{8\gamma+17}\sin\theta'}{(4\gamma+1)\cos\theta'+4(\gamma+4)}$ ⑥

$$\frac{d(\tan\theta)}{d\theta'}=\sqrt{8\gamma+17}\frac{\cos\theta'[(4\gamma+1)\cos\theta'+4(\gamma+4)]+\sin\theta'^2(4\gamma+1)}{[(4\gamma+1)\cos\theta'+4(\gamma+4)]^2}=0 \quad ⑦$$

解得 $\cos\theta'=-\frac{4\gamma+1}{4(\gamma+4)},\sin\theta'=\sqrt{1-\cos\theta'^2}=\frac{\sqrt{15(8\gamma+17)}}{4(\gamma+4)}$ ⑧

代入⑥即得：$\theta=\arctan\frac{1}{\sqrt{15}}\approx0.2527rad$ ⑨

评分标准：本题 40 分，④⑥⑦⑧⑨式各 4 分，②③式各 3 分，①式 6 分，⑤式 8 分

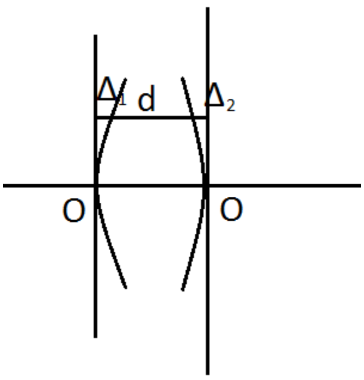
8、解：（1）假设第 k 个衍射屏的入射波前和出射波前分别为 $\tilde{U}_k$ 和 $\tilde{U}'_k$，则由定义得，

$$\tilde{t}(x,y)=\frac{\tilde{U}'_n}{\tilde{U}_1}=\frac{\tilde{U}'_n}{\tilde{U}_n}\frac{\tilde{U}'_{n-1}}{\tilde{U}_{n-1}}\cdots\frac{\tilde{U}'_1}{\tilde{U}_1} \quad ①$$

注意到恒有 $\tilde{U}_k=\tilde{U}_{k-1}$，因此，$\tilde{t}(x,y)=\prod_{k=1}^{n}\tilde{t}_k(x,y)$ ②

（2）假设透镜所在平面为 xOy 平面，z 轴从物指向像，透镜中心为原点。在旁轴近似下，倾斜因子可以忽略。在透镜两侧做垂直于 z 轴的切平面，如图所示，则相位差

$$\varphi(x,y)=k(\Delta_1+\Delta_2+nd)=\varphi_0-k(n-1)(\Delta_1+\Delta_2) \quad ③$$



前面的常数不影响波前分布，可以忽略，而由几何关系得

$$\Delta_1=R_1-\sqrt{R_1^2-(x^2+y^2)}\approx\frac{x^2+y^2}{2R_1}$$

$$\Delta_2=R_2-\sqrt{R_2^2-(x^2+y^2)}\approx\frac{x^2+y^2}{2R_2} \quad ④$$

注意到由磨镜者公式，有$\varphi=-k(n-1)\left(\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{2R_2}\right)(x^2+y^2)=-k\frac{x^2+y^2}{2f}$ ⑤

其中 f 为透镜焦距.因此，所求的透镜的屏函数为 $\tilde{t}_L(x,y)=e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2f}}$ ⑥

（3）在（2）中所述的坐标系中，假设（0，h,-u)处有一物发出同心球面波，则其在透镜平面上的波函数为 $\tilde{U}_1(x,y)=\frac{A}{\sqrt{x^2+(y-h)^2+(0+u)^2}}e^{ik\sqrt{x^2+(y-h)^2+(0+u)^2}}\approx\frac{A}{u}e^{ik\left(\varphi'_0-\frac{yh}{u}+\frac{x^2+y^2}{2u}\right)}$ ⑦

因此，出射波前为：$\tilde{U}_2(x,y)=\tilde{U}_1(x,y)\tilde{t}_L(x,y)=\frac{A}{u}e^{ik\left(-\frac{yh}{u}+\frac{x^2+y^2}{2u}\right)}e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2f}}=\frac{A}{u}e^{ik\left(-\frac{yh}{u}-\frac{x^2+y^2}{2v}\right)}=\frac{A}{u}e^{-ik\left(\frac{x^2+(y+vh/u)^2}{2v}\right)}$ ⑧

其中$v=\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{u}\right)^{-1}$，上面式子是在题中所述的近似下，即认为想 x,y,h 都远小于 u 的情况下化简的。而这个式子的意义，代表一个向点$(0,-vh/u,v)$汇聚的同心球面波，即可以得出物距像距的公式为$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$以及放大率公式$M=-\frac{v}{u}$ ⑨

（4）由前面的问题可以看出，凡是波前发生了改变，使得后方光场和自由光场的复振幅分布不再相同，即可认为发生了衍射。即衍射不仅是对暗处而言的，在明亮的光场中也可以发生衍射，因此，类似于“绕射”的理解是片面的（意思对即可）

评分标准：第（1）问 5 分，第（2）问 14 分，第（3）问 14 分，第（4）问 7 分，①式 2 分，②③⑤式各 3 分，④⑥式各 4 分，⑦⑧式各 5 分，⑨式 4 分，需要有文字说明