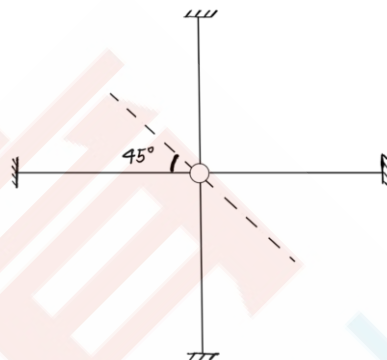


## 培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（十）

考试时间：150 分钟 总分 320 分  
(请在答题卷上作答)

题一：

在光滑的水平桌面上，四根相同的弹性绳一端系在质量为  $m$  的小球上，另一端固定。如图所示，相邻的绳的夹角为  $90^\circ$ ，绳子原长为  $l$ ，弹性系数为  $k$ 。小球在中心位置时，每根弹性绳子的伸长量均为  $a$  ( $a < l$ )，将小球沿着虚线方向拉离平衡位置，位移为  $3\sqrt{2}a$ ，并且从静止状态释放，求小球的振动周期。



题二：

3000 年 ShyLois 打算乘坐宇宙飞船从月球出发离开太阳系进行一次星际旅行，她请你做她的飞行技术顾问，你需要帮助她解决以下的问题：

(1) 她计划让宇宙飞船从月球出发时就获得足以脱离太阳的能量，那么在月球表面飞船至少应该获得多大的速度？此时飞船将以怎样的轨道飞出太阳系？

(2) 采用前一问的方案，ShyLois 开始了她的星际旅行。可是当飞船飞行一段时间之后，ShyLois 发现她将一份重要的资料遗忘在了火星上，因此她不得不改变飞行计划。由于飞船恰好即将进入木星的引力场，于是 ShyLois 决定不使用飞船动力而让飞船在木星引力的作用下改变飞行轨道。设改变轨道之后，飞船沿与木星速度方向夹角为  $60^\circ$  的方向向木星轨道内侧飞去，则该轨道的近地点距离太阳的距离为多少？此时速度为多大？

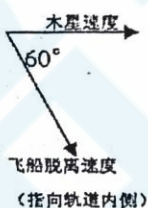


图 3

日

(3) ShyLois 希望在上述轨道的近地点让飞船沿速度方向（或其反方向）加速再次改变轨道，使飞船轨道与火星轨道相切。计算所需要的速度的改变量。

在本题中，假定所有星球在同一个平面的运动，假定各行星轨道为圆轨道。

本题中需要的数据

太阳质量  $M_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

地球质量  $M_E = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$

月球质量  $M_M = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg}$

月球公转周期  $T_M = 27.3 \text{ days}$  (恒星月)

月球半径  $R_M = 1.74 \times 10^6 \text{ m}$

地球公转周期  $T_E = 365 \text{ days}$

火星公转周期  $T_M = 687 \text{ days}$

木星公转周期  $T_J = 4333 \text{ days}$

万有引力常数  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

题三：

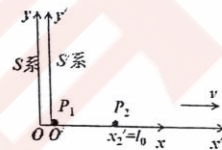
有三个质点位于等边三角形的三个顶点之上，质量为 $m_1$ 和 $m_2$ 和 $m_3$ ，它们受到且仅仅受到之间的万有引力。开始时三个质点具有相同的指向下一个质点的速度 $v$ 。1 指向 2，2 指向 3，3 指向 1。（等边三角形边长为 $l$ ）

- 1、求证三个质点此后一直位于正三角形的三个顶点之上；
- 2、为了使得此系统作周期运动， $v$  所需要的条件；
- 3、若 $v$  满足（2）中的条件，求系统运动的周期 $T$ 。

题四：

惯性系 $S$ 、 $S'$ 间相对关系如图所示，其间相对速度 $v=0.6c$ ， $O$ 、 $O'$ 重合时 $t=t'=0$ 。质点 $P_1$ 、 $P_2$ 开始时分别静止于 $S'$ 系 $x'_1=0$ 、 $x'_2=L_0=0.6cs$ 处。

（1）设 $P_1$ 、 $P_2$ 于 $t'=0$ 开始，同时以加速度 $a_0=0.8c/s$ 沿 $x'$ 轴方向作匀变速运动， $t'=1s$ 时同时停止变速，相对 $S'$ 系作匀速直线运动。



（1.1）在 $S$ 系中计算 $t=1s$ 时 $P_1$ 、 $P_2$ 的间距 $L_1$ ；

（1.2）在 $S$ 系中计算 $t=2s$ 时 $P_1$ 、 $P_2$ 的间距 $L_2$ ；

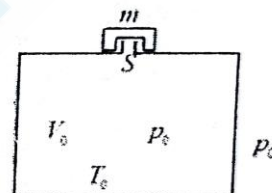
（1.3）在 $S$ 系中计算 $t \geq 0$ 时间范围， $P_1$ 、 $P_2$ 的最小间距 $L_{min}$ 和最大间距 $L_{max}$ 。

（2）改设 $P_1$ 、 $P_2$ 于 $t'=0$ 开始，同时以加速度 $a=0.8c/s$ 沿 $x'$ 轴负方向作匀变速运动， $t'=1s$ 时同时停止变速，相对 $S'$ 系作匀速直线运动。试在 $S$ 系中计算 $t \geq 0$ 时间范围， $P_1$ 、 $P_2$ 的最小间距 $L_{min}$ 和最大间距 $L_{max}$ 。

$$\text{提示: } \int \frac{d\theta}{\cos^n \theta} = \frac{\sin \theta}{(n-1)\cos^{n-1} \theta} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{d\theta}{\cos^{n-2} \theta}$$

题五：

如图一个容积为 $V_0$ 的高压锅，初态温度为 $T_0$ ，内部有压强为 $p_0$ 的理想气体，该气体定容摩尔热容量为 $C_V=2.5R$ 。气阀的面积为 $S$ ，上面的重物质量为 $m$ ，重力加速度为 $g$ ，外面大气压强为 $p_0$ 。



（1）至少需要升温到 $T_1$ 为多少才能把重物顶起？

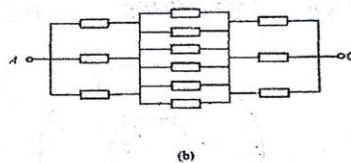
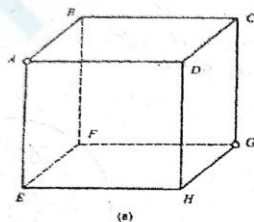
（2）如果这个过程中不考虑容器壁散热，则高压锅至少需要吸热 $Q_1$ 为多少才能把重物顶起？

（3）如果高压锅吸热总量为 $Q_2 > Q_1$ ，则此时高压锅内的温度 $T_2$ 为多少？

（4）之后再将温度降低到初态，但是气体不会从气阀回到高压锅内，则此时锅内压强 $p_3$ 为多少？

题六：

如题图 3.19(a)所示，立方体框架 $ABCDEFGH$ ，它的 12 条边为电导率均匀的导线，每边的电阻均为 $R$ 。现在 $AG$ 间接一直流电源，忽略所有的接触电阻，试求：（a）该电源的外电阻是多少？（b）若电源在 $G$ 点的接线沿一条边做微小移动，请问这一电阻是增大还是减小？

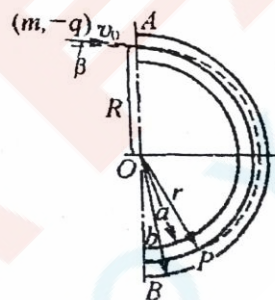


题七：

如图所示，两同轴带电无限长半圆柱面，内外圆柱面半径为  $a, b$ 。设在  $a < r < b$  区域内只有径向电场，电势和场强分布为  $U = k \ln b / r$ ,  $E = k / r$ ，其中  $k$  和  $b$  为常量。今有质量为  $m$ 、初速为  $v_0$ 、带电量为  $-q$  ( $q > 0$ ) 的粒子从左方射入，且  $v_0$  既与圆柱面轴线垂直又与入射处直径垂直。

(1) 试问  $v_0$  为何值时可使粒子沿半径为  $R$  的半圆轨道运动？ ( $a < R < b$ )

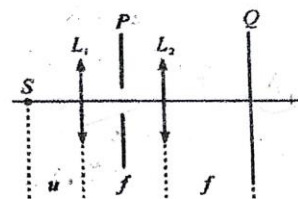
(2) 若入射方向与上述  $v_0$  偏离一个很小的角度  $\beta$ ，其他条件不变，则粒子将偏离(1)中的半圆轨道。设新轨道与原半圆轨道相交于图中  $P$  点。试证明：对于很小的  $\beta$  角， $P$  点的位置与  $\beta$  角无关，并求出  $P$  点的方位角  $\theta = \angle AOP$  的数值。题中取近似关系：当  $|x| \ll 1$  时， $\ln(1+x) \approx x$ 。



第 7 题图

题八：

(20 分) 如图所示，焦距都是  $f$  的会聚透镜  $L_1, L_2$  共轴放置，相距为  $f$ ，在它们中间放有不透光的屏  $P$ ， $P$  上开有直径为  $D$  的小孔，孔心在主轴上，在  $L_2$  的右方  $f$  远处放置屏  $Q$ ，为使  $L_1$  左方主轴上的发光点  $S$  在  $Q$  上所成光斑的直径不超过  $0.4D$ ，求光点  $S$  对应的物距 (到透镜  $L_1$  光心的距离)  $u$  可取的范围。



第六题