培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（二）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

题一：

先根据绳子的受力情况列出绳子的动力学方程，绳子在平行于斜面的方向，受圆柱的支持力，斜面的摩擦力，还有重力的分量。

$$\lambda L\frac{d^2x}{dt^2}2\lambda xg\mathit{sin}=\alpha-k\frac{dx}{dt}L$$

可以化简为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{\lambda}\frac{dx}{dt}-\frac{2g\sin\alpha}{L}x=0$$

这是一个二阶线性常系数齐次微分方程，可以设出其特解为$x=A\exp(\beta t)$

代入原方程解得 β 可以得到

$$\beta^2+\frac{k}{\lambda}\beta-\frac{2g\sin\alpha}{L}=0$$

$$\triangle=\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}$$

解得待定系数 β

$$\beta=-\frac{k}{2\lambda}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}$$

最终的通解是两个特解的线性叠加，即

$$x(t)=A\exp\left[\left(-\frac{k}{2\lambda}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}\right)t\right]+B\exp\left[\left(-\frac{k}{2\lambda}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}\right)t\right]$$

下面结合初始条件来求解两个待定系数

初始状态

$$A+B=X$$

$$\left(-\frac{k}{2\lambda}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}\right)A+\left(-\frac{k}{2\lambda}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}\right)B=0$$

可以将两个待定系数解出来

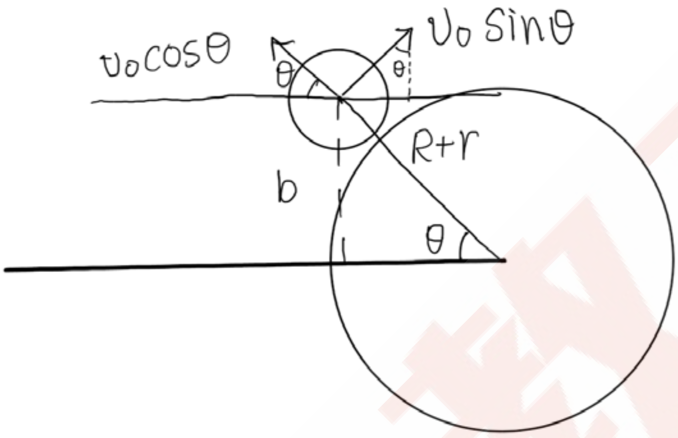
$$A=\frac{\left(-\frac{k}{2\lambda}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}\right)}{\left(-\frac{k}{2\lambda}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}\right)-\left(-\frac{k}{2\lambda}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}\right)}=\frac{-\frac{k}{2\lambda}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}}{\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}}$$

$$B=\frac{\left(-\frac{k}{2\lambda}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}\right)}{\left(-\frac{k}{2\lambda}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}\right)-\left(-\frac{k}{2\lambda}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}\right)}=\frac{\frac{k}{2\lambda}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}}{\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}}$$

可以写出位移随时间的变化公式

$$x(t)=\frac{-\frac{k}{2\lambda}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}}{\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}}\exp\left[\left(-\frac{k}{2\lambda}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}\right)t\right]$$
$$+\frac{\frac{k}{2\lambda}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}}{\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}}\exp\left[\left(-\frac{k}{2\lambda}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\lambda^2}+\frac{8g\sin\alpha}{L}}\right)t\right]$$

题二：



由于几何关系可以得知

$$\sin\theta=\frac{b}{R+r}$$

$$\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{b}{R+r}\right)^2}$$

在碰撞之后，x 和 y 两个方向的速度分别满足

$$v_x=v_0\sin^2\theta-v_0\cos^2\theta$$
$$v_y=2v_0\sin\theta\cos\theta$$
$$v_x=v_0\left[2\left(\frac{b}{R+r}\right)^2-1\right]$$
$$v_y=2v_0\frac{b\sqrt{(R+r)^2-b^2}}{(R+r)^2}$$

可见速度大小仍为v_0，与 x 轴夹角为

$$\varphi=\arccos\frac{2b^2-(R+r)^2}{(R+r)^2}$$

等式两侧取微分

$$-\sin\varphi d\varphi=\frac{4bdb}{(R+r)^2}$$

又因为

$$dN=I_0 2\pi bdbSd\,dn_0$$

将上式代入得

$$dN=\frac{\pi}{2}I_0Sn_0d(R+r)^2\sin\theta\,|d\theta|$$

2、当 θ =60 时，

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{2b^2}{(R+r)^2}-1$$

由此可得

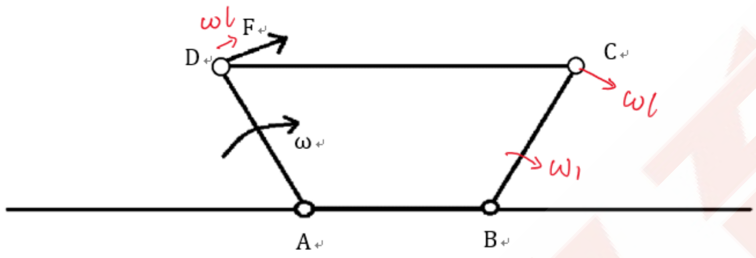
$$b^2=\frac{3(R+r)^2}{4}$$

由于概率与散射截面成正比

可以解得最终的概率为

$$P=\frac{b^2}{(R+r)^2}=75\%$$

题三：



先来计算各个杆的角速度和质心加速度

因为 D 点的速度可以用 AD 杆的角速度方便的求出，如图所示

又因为 C 点的速度必定垂直于 BC 杆，再利用 DC 杆上沿杆方向的速度相等，可以轻松的解得 C 点的速度大小ωl

下面根据角速度来计算加速度

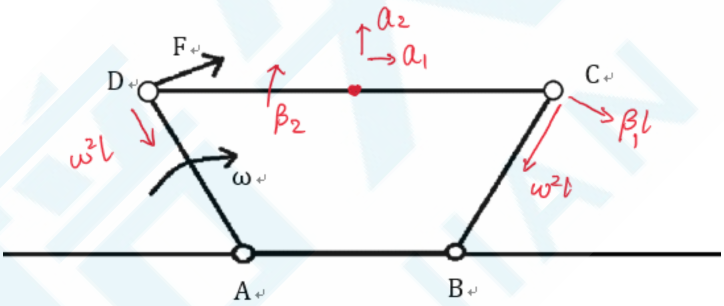
我们已知 AD 无角加速度，那么 D 点的加速度为$\omega^2 l$，方向沿着 DA 方向。

C 点的加速度如果沿着 BC 和垂直于 BC 进行分解可以得到

C 沿着 BC 方向的加速度为$\omega^2 l$

CD 杆的质心水平速度为$\frac{\sqrt{3}}{2}\omega l$

角速度为$\frac{1}{2}\omega$



这样设完未知数之后

利用 D 点的加速度沿着水平和竖直方向的分量

$$\omega^2 l\frac{1}{2}=a_1+\frac{1}{4}\omega^2 l$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 l=a_2+\beta_2 l$$

再利用 C 点的加速度在水平和竖直的分量

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1 l-\frac{1}{2}\omega^2 l=a_1-\frac{1}{4}\omega^2 l$$

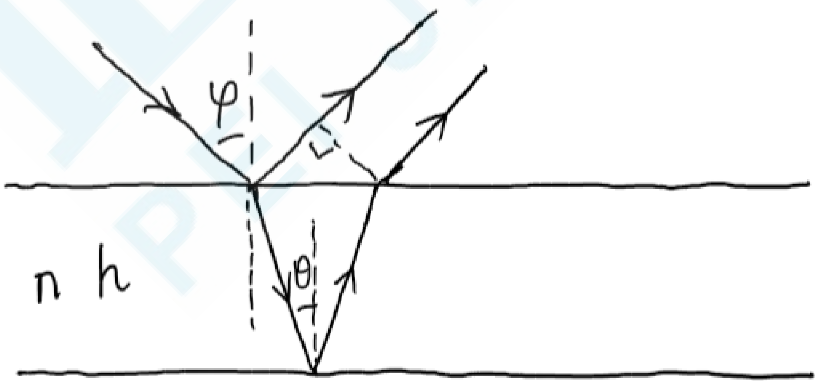
$$\frac{1}{2}\beta_1 l+\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 l=-a_2+\beta_2 l$$

由此可以解得最终的不同的角加速度和 CD 杆质心平动的加速度的值

$$a_1=\frac{1}{4}\omega^2 l$$

$$a_2=-\frac{7\sqrt{3}}{12}$$
$$\beta_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\omega^2$$
$$\beta_2=\frac{\sqrt{3}}{12}\omega^2$$
因此，C 点的加速度为
$$a_{Cx}=\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1 l-\frac{1}{2}\omega^2 l=0$$
$$a_{Cy}=-\left(\frac{1}{2}\beta_1 l+\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 l\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

题四：
取封闭端为 x=0 处建立坐标系，那么加热之后的温度分布可以写出
$$T(x)=\left[100+1400\frac{x}{L}\right]K$$
设横截面积为 A，对于每一小段来列出其理想气体状态方程可以得到
$$p_0Adx=d\nu RT(x)$$
整理可得
$$d\nu R=\frac{p_0AL}{1400}\frac{d\left(1400\frac{x}{L}\right)}{1400\frac{x}{L}+100}$$
将其积分得
$$\nu R=\frac{p_0AL}{1400}\ln\frac{1500}{100}=\frac{p_0AL}{1400}\ln 15$$
在之后将开口端封闭
整体气体满足理想气体状态方程
$$p'AL=\nu RT'$$
代入可以解得之后的压强
$$p'=\frac{3\ln 15}{14}p_0$$
可以简单地从压强得到数密度
$$p'=n'k_BT$$
解得
$$n'=\frac{3\ln 15}{14k_BT}p_0$$
题五：



两光线的光程差是

$$\triangle l=2n\frac{h}{\cos\theta}-2h\tan\theta\sin\varphi$$

由折射定律

$$\sin\varphi=n\sin\theta$$

可以解得

$$\triangle l=2h\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}$$

我们将其求导可以得到当入射角变化一个微小的值时光程差的改变量

$$d\triangle l=\frac{2h\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}$$

可以利用透镜的成像原理得到

$$\Delta\varphi=\frac{\triangle x}{f}$$

由于两个条纹之间的光程差是 λ 可以得到

$$\lambda=\alpha h\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}\right)\triangle\varphi$$

由此可以解得

$$\triangle x=\frac{[n^2-\sin^2\varphi]^{1.5}f\lambda}{2h\alpha(n^2\cos2\varphi+(\sin\varphi)^4)}$$

2、代入数据可以解得

$$\lambda=29nm$$

题六：

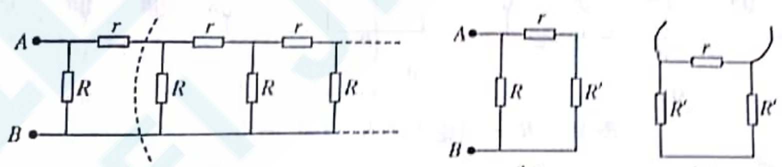
5. 引论：为讨论问题的方便，我们先求图(a)所示的无穷网络 A、B 间的电阻 R'。我们先设 A、B 间的电阻大小为 R'，然后将其虚线右侧的部分的电路与 A、B 间的电路进行比对，可以发现，其虚线右侧部分的电阻与 A、B 间的电阻完全相等，亦为 R'，于是，电路可简化为图(b)的电路，则有

$$R'=\frac{(r+R')R}{R+(r+R')}$$

解得

$$R'=\frac{-r+\sqrt{r^2+4rR}}{2}\quad(负根已舍)$$

下面我们来讨论题中的各问题：



(a) (b) (c)

(1) 对某一电阻 r 两侧的电阻进行观察可知，其两侧的电阻均为 R'，则原题图中相邻两节点间的电路可等效为图(c)所示电路，其等效电阻 R_1 满足

$$R_1=\frac{r(2R')}{r+2R'}$$

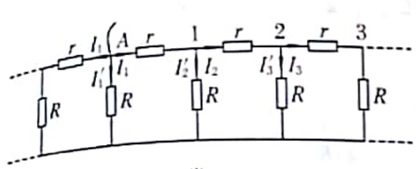
代入 R' 解得

$$R_1=\frac{4rR}{r+4R+\sqrt{r^2+4rR}}=\left(1-\sqrt{\frac{r}{r+4R}}\right)r$$

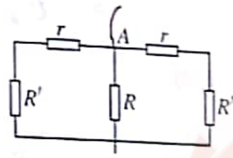
(3) 此时由于 A、B 间的电阻器的个数是有限的,我们不能像(2)中那样处理 A、B 间的位置关系,但它们间的电阻也不是简单的串、并联,因此,必须另辟途径.

解法 1　电流分布法

如图(j)所示,设想有一电流 I 从 A 点流入,经网络流向无穷远处,由于电路的网络是无



(j)



(k)

穷的,根据电路的对称性,经 A 点流向两侧电阻器 r 的电流相等,设为 I_1,流经 A 点下面的电阻器 R 的电流为 I_1',由于该电路可等效为图(k)中的电路,则

$$2I_1+I'_1=I,\quad \frac{I'_1}{I_1}=\frac{r+R'}{R}$$

将 $R'=\dfrac{-r+\sqrt{r^2+4rR}}{2}$ 代入后可解得

$$I_1=\frac{2R}{r+4R+\sqrt{r^2+4rR}}\cdot I=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{r}{r+4R}}\right)I$$

电流流至节点 1 后,分流为 I_2 的 I_2',此时有

$$I_2+I'_2=I_1,\quad \frac{I'_2}{I_2}=\frac{r+R'}{R}$$

解得

$$I_2=\frac{2R}{r+2R+\sqrt{r^2+4rR}}\cdot I_1=\frac{\sqrt{r^2+4rR}-r}{\sqrt{r^2+4rR}+r}I_1$$

不妨令 $q=\dfrac{\sqrt{r^2+4rR}-r}{\sqrt{r^2+4rR}+r}<1$,所以

$$I_2=qI_1$$

同理可得

$$I_3=\frac{\sqrt{r^2+4rR}-r}{\sqrt{r^2+4rR}+r}I_2=q^2I_1$$

……

依此类推,有

$$I_n=q^{n-1}I_1$$

因为第 n 个节点即为 B 点,则 A、B 间的电压 U'_{AB} 为

$$U'_{AB}=(I_1+I_2+\cdots+I_{n-1}+I_n)r=\frac{1-q^n}{1-q}I_1r$$

同样,我们可以再设想有一电流 I 从无穷远处经网络流向 B 点,最终从 B 点流出,此种情况下,A、B 间各节点间的电流方向与 A 点流入的情况相同,但大小与 A 流入时的情况比较,则是反序排列,由此可知,此时 A、B 间的电压同样为 U'_{AB}.

下面我们考虑将上述两种情况进行叠加后的情形,由叠加原理易知,此时网络相当于一电流 I 从 A 流入,从 B 流出,其间各电阻器中的电流即为上述两种情况单独存在时的电流的叠加,于是得这时 A、B 间的电压为

$$U_{AB}=2U'_{AB}=2\times\frac{1-q^{n}}{1-q}I_1 r$$

将 q、I_1 代入，可得

$$U_{AB}=2\times\frac{1-\left(\dfrac{2R}{r+2R+\sqrt{r^2+4rR}}\right)^n}{1-\dfrac{2R}{r+2R+\sqrt{r^2+4rR}}}\times\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{r}{r+4R}}\right)Ir$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{r+4R}{r}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{r}{r+4R}}\right)\left[1-\left(\frac{\sqrt{r^2+4rR}-r}{\sqrt{r^2+4rR}+r}\right)^n\right]Ir$$

由于 A、B 间的电压为 U_{AB}，电路中的电流为 I，所以

$$R_3=\frac{U_{AB}}{I}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{r+4R}{r}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{r}{r+4R}}\right)\left[1-\left(\frac{\sqrt{r^2+4rR}-r}{\sqrt{r^2+4rR}+r}\right)^n\right]r$$

由上式我们可以得到：当 $n=1$ 时，$R_3=R_1$，即第(1)种情况；当 $n\to\infty$ 时，$R_3=R_2$，即第(2)种情况.

题七：（26 分）

$\cancel{mg\sin\theta-kx=m\ddot{x}\quad —①}$

$mg\sin\theta-kx+BIl=m\ddot{x}\quad —①$ 2 分

$E-Bl\dot{x}=IR+L\dfrac{dI}{dt}\quad —②$ 2 分

$\Rightarrow\quad \dot{x}=\dfrac{E-IR-L\dfrac{dI}{dt}}{Bl}$ 1 分

对②式求导

$-Bl\ddot{x}=\dfrac{di}{dt}R+L\dfrac{d^2i}{dt^2}$ 1 分

$\ddot{x}=g\sin\theta-\dfrac{k}{m}x+\dfrac{BlI}{m}$

$=g\sin\theta-\dfrac{k}{mBl}\left(E-IR-L\dfrac{di}{dt}\right)+\dfrac{BlI}{m}$ 2 分

$\Rightarrow -Bl\left(g\sin\theta-\dfrac{k}{Blm}\left(E-IR-L\dfrac{di}{dt}\right)+\dfrac{BlI}{m}\right)=R\dfrac{di}{dt}+L\dfrac{d^2i}{dt^2}$

$-Blg\sin\theta+\dfrac{k}{m}\left(E-iR-L\dfrac{di}{dt}\right)-\dfrac{B^2l^2i}{m}=R\dfrac{di}{dt}+L\dfrac{d^2i}{dt^2}$

$L\dfrac{d^2i}{dt^2}+\left(R+\dfrac{kL}{m}\right)\dfrac{di}{dt}+\left(\dfrac{B^2l^2}{m}+\dfrac{kR}{m}\right)i+Blg\sin\theta-\dfrac{kE}{m}=0$ 4 分

接下来的内容就是解微分方程，这是一个二阶线性常系数微分方程

下面解这个方程

$$L\frac{d^2 i}{dt^2}+\left(R+\frac{kL}{m}\right)\frac{di}{dt}+\left(\frac{B^2l^2}{m}+\frac{kR}{m}\right)i+Blg\sin\theta-\frac{kE}{m}=0$$

~~设 $z=$~~

先求一个非齐次方程的特解 $i_0=\dfrac{-Blmg\sin\theta+kE}{B^2l^2+kR}$ 2 分

下面解齐次方程的通解. 设 $i=Ae^{\lambda t}$

$$\Rightarrow\ LA\lambda^2e^{\lambda t}+\left(R+\frac{kL}{m}\right)\lambda Ae^{\lambda t}+\left(\frac{B^2l^2}{m}+\frac{kR}{m}\right)Ae^{\lambda t}=0$$

$$\Rightarrow\ L\lambda^2+\left(R+\frac{kL}{m}\right)\lambda+\left(\frac{B^2l^2}{m}+\frac{kR}{m}\right)=0$$ 1 分

解得

$$\lambda=\frac{-\left(R+\frac{kL}{m}\right)\pm\sqrt{\left(R+\frac{kL}{m}\right)^2-4L\left(\frac{B^2l^2}{m}+\frac{kR}{m}\right)}}{2L}$$ 3 分

在此处暂不讨论是否出现复数. 若 $\Delta=b^2-4ac<0$. 自动开根为复数

因此可以写出 i 的通解

$$i(t)=A\exp\left[\frac{-\left(R+\frac{kL}{m}\right)+\sqrt{\left(R+\frac{kL}{m}\right)^2-4L\left(\frac{B^2l^2}{m}+\frac{kR}{m}\right)}}{2L}t\right]$$

$$+B\exp\left[\frac{-\left(R+\frac{kL}{m}\right)+\sqrt{\left(R+\frac{kL}{m}\right)^2-4L\left(\frac{B^2l^2}{m}+\frac{kR}{m}\right)}}{2L}t\right]$$

$$+\frac{-Blmg\sin\theta+kE}{B^2l^2+kR}$$ 2 分

A 和 B 由初始条件得出

由②得 $E-Blv_0=\cancel{I(t=0)}\ i(0)R+L\left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0}$ 1 分

初始状态的加速度

$$\ddot{x}(t=0)=g\sin\theta-\frac{k}{m}v_0+Bi(t=0)l.$$

$$Bl\ddot{x}+R\frac{di}{dt}+L\frac{d^2i}{dt^2}=0$$ 1 分

联立以上三式在 $t=0$ 时可求得 A 和 B.

代入得

$$\dot{x}=\frac{E}{Bl}-\frac{R}{Bl}\left[A\exp(\lambda_1t)+B\exp(\lambda_2t)+C\right]-\frac{L}{Bl}\left[A\lambda_1\exp(\lambda_1t)+B\lambda_2\exp(\lambda_2t)\right]$$ 4 分

题八：（20 分）

光在介质中传播速度为 $v' = c/n$ 1 分

利用速度变换公式

$$v_{c_1} = \frac{c/n - v}{1 - \frac{c/n \cdot v}{c^2}} = \frac{\frac{1}{n} - \beta}{1 - \frac{\beta}{n}} c$$ 2 分

$$= \frac{1-n\beta}{n-\beta} \cdot c \quad — ①$$

在地面系中由尺缩效应 2 分

$$a' = \sqrt{1-\beta^2}\, a \quad — ②$$ 2 分

∴光通过介质的时间为

$$t_1 = \frac{a'}{v_{c_1} + v} = \frac{n-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{a}{c}.$$ 2 分

在空气中走过

$$t_1' = \frac{L - v_{c_1} \cdot t_1}{c}$$

$$= \frac{L}{c} - \frac{1-n\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{a}{c}$$ 2 分

同理，在反射回时

$$v_{c_2} = \frac{c/n + v}{1 + \frac{c/n \cdot v}{c^2}} = \frac{\frac{1}{n} + \beta}{1 + \frac{\beta}{n}} c$$ 2 分

$$= \frac{1+n\beta}{n+\beta} c$$

$$t_2 = \frac{a'}{v_{c_2} - v} = \frac{n+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{a}{c}.$$ 2 分

$$t_2' = \frac{L - v_{c_2} t_2}{c} = \frac{L}{c} - \frac{(1+n\beta)a}{\sqrt{1-\beta^2}\, c}$$

$$\therefore t = t_1 + t_1' + t_2 + t_2' \text{ 为}$$

$$t = \frac{2L}{\ } + \frac{2(n-1)}{\ } a$$ 2 分

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left[1 + \frac{\eta\lambda}{2(n-1)a}\right]^2}}$$ 3 分