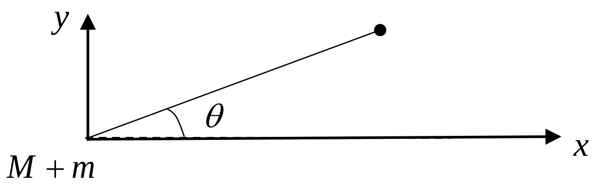
培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（十）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

1、解：（1）在 M 参考系中看，中心天体质量修正为$(M+m)$



$$\frac{G(M+m)x}{r^3}=-a_x=-\frac{dv_x}{dt}$$

而 $dt=\dfrac{d\theta}{\dot{\theta}}$

且 $mr^2\dot{\theta}=mv_0R$

因而 $dt=\dfrac{r^2}{v_0R^2}d\theta$

因而有 $dv_x=-\dfrac{G(M+m)}{r^3}xdt=-\dfrac{G(M+m)}{v_0R}\dfrac{x}{r}d\theta=-\dfrac{G(M+m)}{v_0R}\cos\theta d\theta$

积分可得 $v_x=-\dfrac{G(M+m)}{Rv_0}\sin\theta$

同理可得 $v_y=v_0-\dfrac{G(M+m)}{v_0R}(1-\cos\theta)$

返到地面参考系，可得

$$v_{mx}=-\frac{GM}{Rv_0}\sin\theta$$

$$v_{my}=v_0-\frac{GM}{Rv_0}(1-\cos\theta)$$

$$v_{Mx}=\frac{Gm}{Rv_0}\sin\theta$$

$$v_{My}=\frac{Gm}{Rv_0}(1-\cos\theta)$$

（2）有 $\dfrac{G(M+m)}{R^2}=\dfrac{{v_0}^2}{R}$，解得 $v_0=\sqrt{\dfrac{G(M+m)}{R}}$

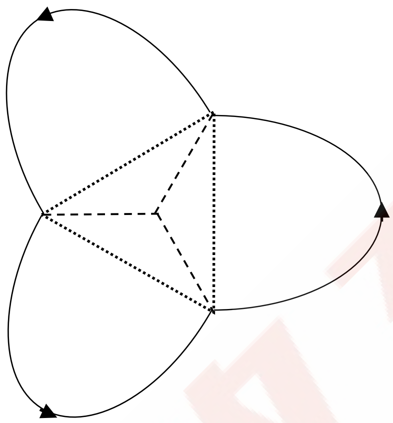
（3）（i）$v_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\dfrac{G(M+m)}{R}}\approx\sqrt{\dfrac{GM}{2R}}$

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2-\frac{GMm}{R}=-\frac{GMm}{2a}$$

解得 $a=\dfrac{2}{3}R$

因而有　$c = R - a = \frac{1}{3}a$，$b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

（ii）



轨迹如图，其周期为

$$T = 3\Delta t = 3\times\frac{\frac{\pi}{2}ab + bc}{\pi ab}\times 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 2(1+\pi)\sqrt{\frac{2R^3}{3GM}}$$

2、解：（1）受力平衡，满足

$$m_1 g = m_2 g + k_0 x$$

解得　$x_0 = \frac{mg}{k}$

（2）有总能量为

$$E = \frac{1}{2}(m+2m)\dot{x}^2 - mg\times 2x + mgx + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mR^2(\frac{\dot{x}}{R})^2$$

即　$E = \frac{7}{4}\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}kx^2$

总能量不随时间变化，因而有

$\frac{dE}{dt} = 0$,即可得到

$$\frac{7}{2}m\dot{x}\ddot{x} - mg\dot{x} + kx\dot{x} = 0$$

进而有　$\ddot{x} = -\frac{2k}{7m}(x - x_0)$

因而　$\omega = \sqrt{\frac{2k}{7m}}$

即有　$x = \frac{2mg}{k}\cos\sqrt{\frac{2k}{7m}}t + \frac{mg}{k}$

（3）绳子上行时，有

$T_2 > T_1$，可导出 $T_2 = \frac{5}{4}T_1$

绳子下行时，有

$T_1 > T_2$，可导出 $T_1 = \frac{5}{4}T_2$

最终稳定时，$T_1 = 2mg$，因而有 $\frac{8}{5}mg \le T_2 \le \frac{5}{2}mg$，进而可导出

$$\frac{3mg}{5k} \le x \le \frac{3mg}{2k}$$

绳子上行时

$$T_2 = \frac{5}{4}T_1$$

$$T_2 - mg - kx = m\ddot{x}$$

$$2mg - T_1 = 2m\ddot{x}$$

可得 $\ddot{x} = -\frac{2k}{7m}(x - \frac{3mg}{2k})$

下行时

$$T_1 = \frac{5}{4}T_2$$

$$T_2 - mg - kx = m\ddot{x}$$

$$2mg - T_1 = 2m\ddot{x}$$

可得 $x = -\frac{5k}{13m}(x - \frac{3mg}{5k})$

初态 $x_1 = -\frac{mg}{k}$，经历一个下行过程，坐标变为 $\frac{11mg}{5k}$，再经历一个上行过程，坐标变为 $\frac{4mg}{5k}$，可以保持稳定

因而用时为

$$\Delta t = \pi(\sqrt{\frac{7m}{2k}} + \sqrt{\frac{13m}{5k}})$$

产生的热量为

$$\Delta Q = U_1 - U_2 = \frac{99}{50}\frac{m^2g^2}{k}$$

3、解：（1）绝热过程，满足

$$P_1V_0^{5/3} = P_C(2V_0)^{5/3}$$

得到 $P_C = 2^{-5/3}P_1$

等温过程，则有 $P_C \cdot 2V_0 = P_B \cdot 3V_0$

解得 $P_B=\frac{2^{-2/3}}{3}P_1$

因而可得 AB 的过程方程为

$$P=P_1\left[\frac{3}{2}-\frac{2^{-5/3}}{3}-\frac{V}{V_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{2^{-5/3}}{3}\right)\right]$$

因而 $$T=\frac{P_1V_0}{\nu R}\frac{V}{V_0}\left[\frac{3}{2}-\frac{2^{-5/3}}{3}-\frac{V}{V_0}\left(\frac{1}{2}-\frac{2^{-5/3}}{3}\right)\right]$$

不难得到 $V=1.766V_0$ 时，有 $T_1=1.232\frac{P_1V_0}{\nu R}$

显然最低温度为 $T_2=\frac{P_B\cdot 3V_0}{\nu R}=0.630\frac{P_1V_0}{\nu R}$

（2）记过程方程为

$$P=P_1\left[a-b\frac{V}{V_0}\right]$$

则有

$$dQ=PdV+\nu\frac{3}{2}RdT=P_1\left[a-b\frac{V}{V_0}\right]dV+\frac{3}{2}P_1\left[a-2b\frac{V}{V_0}\right]dV$$

$$=P_1\left[\frac{5}{2}a-4b\frac{V}{V_0}\right]dV$$

因而吸放热临界点 $V=2.207V_0$

这一段过程，吸热量为

$$Q_1=1.151P_1V_0$$

而接下来一段放热量为

$$Q_2=0.496P_1V_0$$

等温过程放热

$$Q_3=0.255P_1V_0$$

因而循环效率为

$$\eta=1-\frac{Q_2+Q_3}{Q_1}=34.7\%$$

卡诺循环效率为

$$\eta'=1-\frac{T_2}{T_1}=48.8\%$$

因而两者的效率比为

$$\frac{\eta}{\eta'}=0.710$$

4、解:(1)对于导体球,有不均匀分布的电荷 $-\frac{R}{r_1}q_1$,其余部分是均匀分布的电荷,大小为 $q_2+\frac{R}{r_1}q_1$,

因而导体球的电势为

$$\varphi_1=\frac{q_2+\frac{R}{r_1}q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

（2）对 q_2，其电势我们从内球壁上离它最近的一点开始计算

球壳的电势为

$$\varphi_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}=\varphi_{1q_2}+\varphi_{1除q_2}$$

对我们选定的点

$$\varphi_{1q_2}=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0(r-r_2)}$$

从选定的点到 q_2，其电势差为

$$\vartriangle\varphi=\frac{-\frac{r}{r_2}q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\frac{r^2}{r_2}-r_2}-\frac{1}{\frac{r^2}{r_2}-r}\right)=-\frac{rq_2}{4\pi\varepsilon_0(r^2-r_2{}^2)}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0(r-r_2)}$$

因而 $\varphi_2=\varphi_{1除q_2}+\vartriangle\varphi=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{rq_2}{4\pi\varepsilon_0(r^2-r_2{}^2)}$

（3）易得电势能为

$$E=\frac{1}{2}q_1\varphi_{q1}+\frac{1}{2}q_2\varphi_2$$

$$=\frac{1}{2}q_1\left[\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{Rq_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}-\frac{Rq_1}{4\pi\varepsilon_0(r_1^2-R^2)}\right]+\frac{1}{2}q_2\left[\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{rq_2}{4\pi\varepsilon_0(r^2-r_2{}^2)}\right]$$

$$=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{Rq_1{}^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1^2}-\frac{Rq_1{}^2}{8\pi\varepsilon_0(r_1^2-R^2)}+\frac{q_2{}^2}{8\pi\varepsilon_0 R}-\frac{rq_2{}^2}{8\pi\varepsilon_0(r^2-r_2{}^2)}$$

5、解：（1）满足玻尔兹曼分布，即

$$n(h)=n_0e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

总的粒子数又要满足

$$N=\int_0^l n(h)Sdh=\frac{n_0SkT}{mg}\left(1-e^{-\frac{mgl}{kT}}\right)$$

因而可得

$$n_0=\frac{Nmg}{SkT(1-e^{-\frac{mgl}{kT}})}$$

因而 $n(h)=\frac{Nmg}{SkT(1-e^{-\frac{mgl}{kT}})}e^{-\frac{mgh}{kT}}$

（2）气体分子的重力势能为

$$E_p=\int_0^l n(h)Smghdh=Nmg\left(\frac{kT}{mg}-\frac{l}{e^{\frac{mgl}{kT}}-1}\right)$$

因而质心与桌面高度为

$$h_C=\frac{E_p+Mg\frac{l}{2}}{Mg+Nmg}=\frac{2Nmg\left(\frac{kT}{mg}-\frac{l}{e^{\frac{mgl}{kT}}-1}\right)+Mgl}{2Nmg+2Mg}$$

6、解：我们考察 x,y 方向分别成像

（1）若同时正立，则有

$$x:\frac{1}{u}+\frac{1}{L-f}=-\frac{1}{f}$$

$$y:\frac{1}{u}+\frac{1}{L+f}=\frac{1}{f}$$

解出 $u_1=\frac{f(f-L)}{L};u_2=\frac{f(f+L)}{L}$

两者显然是不能同时满足的

（2）若同时倒立，则有 $u=v$（光路对称），因而有

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{L-s_1}=-\frac{1}{f}$$

可以解出

$$u=v=\frac{f(f+\sqrt{f^2+L^2})}{L}$$

此时成像等大反方向

（3）若 x正y倒，则有

$$x:\frac{1}{u}+\frac{1}{L-f}=-\frac{1}{f}$$

$$y:\frac{1}{u}+\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f};\frac{1}{v}+\frac{1}{L-s_1}=\frac{1}{-f}$$

解得

$$u=\frac{f(f-L)}{L};v=-\frac{f(f^2-2fL+2L^2)}{2L^2}$$

注意到 $v<0$，因而此种情况不成立

（4）若 x倒y正，则有

$$u=\frac{f(f+L)}{L};v=\frac{f(f^2+2fL+2L^2)}{2L^2}$$

此时等大关于 y 轴对称

7、解：（1）电流环平面的磁场为

$$B=\frac{\mu_0 SI}{4\pi r^3}$$

方向向下为正，受力上，满足

$$\frac{mv_0^{\ 2}}{r_0}=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_0^{\ 2}}-\frac{\mu_0 SI}{4\pi r_0^{\ 3}}qv_0$$

解得 $$v_0=-\frac{\mu_0 SIq}{8m\pi r_0^{\ 2}}+\sqrt{\left(\frac{\mu_0 SIq}{8m\pi r_0^{\ 2}}\right)^2+\frac{Qq}{4\pi m\varepsilon_0 r_0}}$$

（2）力矩满足

$$M=-q\dot{r}Br$$

因而 $$dL=-qBrdr=-\frac{\mu_0 SIq}{4\pi r^2}dr$$

可得 $$L-\frac{\mu_0 SIq}{4\pi r}=Const$$

当 $r_0\to r_0+\triangle r$ 后，有

$$mv_0 r_0-\frac{\mu_0 SIq}{4\pi r_0}=mv(r_0+\triangle r)-\frac{\mu_0 SIq}{4\pi(r_0+\triangle r)}$$

可得 $$v=v_0(1-\frac{\triangle r}{r_0})-\frac{\mu_0 SIq}{4\pi r_0^{\ 3}m}\triangle r$$

径向受力方程

$$\frac{\mu_0 SIq}{4\pi(r_0+\triangle r)^3}qv-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(r_0+\triangle r)^2}=m\triangle\ddot{r}-\frac{mv^2}{r_0+\triangle r}$$

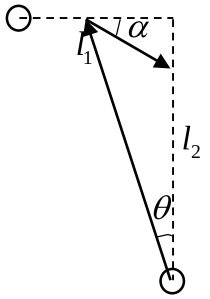
最后化简可得

$$\triangle\ddot{r}+\left[\frac{\mu_0 SIqv_0}{4\pi mr_0^{\ 3}}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{\mu_0 SIq}{4\pi r_0^{\ 3}mv_0}\right)+\frac{Qq}{4\pi m\varepsilon_0 r_0^{\ 2}}\left(\frac{1}{r_0}+\frac{\mu_0 SIq}{2\pi r_0^{\ 3}mv_0}\right)\right]\triangle r=0$$

因而，径向运动的角频率为

$$\omega=\left[\frac{\mu_0 SIqv_0}{4\pi mr_0^{\ 3}}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{\mu_0 SIq}{4\pi r_0^{\ 3}mv_0}\right)+\frac{Qq}{4\pi m\varepsilon_0 r_0^{\ 2}}\left(\frac{1}{r_0}+\frac{\mu_0 SIq}{2\pi r_0^{\ 3}mv_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

8、解：（1）地面系中，设经过 $\triangle t_1$ A 会收到电磁信号



$$l_1 = 6c\cdot s; l_2 = 8c\cdot s$$

有几何关系

$$\sqrt{c^2\Delta t_1{}^2 - l_2{}^2} + 0.6c\cdot\Delta t_1 = l_1$$

解得 $\Delta t_1 = 8.08s$

因而 $t_A = t_0 - (10s - \Delta t_1)\sqrt{1-\beta_1^2} = t_0 - 1.534s$

接收到的频率满足多普勒效应

$$f_A = f_0\frac{\sqrt{1-\beta_2^2}}{1-\beta_2\cos\theta}\frac{1+\beta_1\sin\theta}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = 3.911f_0$$

（2）设再经过 Δt_2 时间 B 收到信号，则有几何关系

$$\sqrt{(c\cdot\Delta t_2)^2 - (l_1 - 0.6c\cdot\Delta t_1)^2} + 0.8c(\Delta t_1 + \Delta t_2) = l_2$$

解得 $\Delta t_2 = 1.264s$

因而 $t_B = t_0 - (10s - \Delta t_1 - \Delta t_2)\sqrt{1-\beta_1^2} = t_0 - 0.392s$

接收到的频率

$$f_B = f_0\frac{\sqrt{1-\beta_1^2}}{1-\beta_1\cos\alpha}\frac{1+\beta_2\sin\alpha}{\sqrt{1-\beta_2^2}} = 3.911f_0$$