金石为开 2021 五一物理竞赛力电刷题班

模拟测试九答案解析

【题一】解：

（1） 可以列出

$$|F|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1'^2}{r^2}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{g_1'^2}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{r^2} \tag{1.1}$$

化简得到

$$q_1=\sqrt{q_1'^2+\varepsilon_0\mu_0 g_1'^2}=\sqrt{q_1'^2+\frac{g_1'^2}{c}} \tag{1.2}$$

评分：每式 4 分，共 8 分

（2） 首先我们考虑同组的两个粒子之间的作用力

$$\begin{aligned}|F|&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1'^2}{r^2}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{g_1'^2}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{r^2}\\|F|&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2'^2}{r^2}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{g_2'^2}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2^2}{r^2}\end{aligned} \tag{2.1}$$

同（1）得到

$$\begin{aligned}q_1&=\sqrt{q_1'^2+\frac{g_1'^2}{c}}\\q_2&=\sqrt{q_2'^2+\frac{g_2'^2}{c}}\end{aligned} \tag{2.2}$$

再考虑两个异组粒子之间的作用力

$$|F|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1'q_2'}{r^2}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{g_1'g_2'}{r^2} \tag{2.3}$$

得到

$$q_1q_2=q_1'q_2'+\varepsilon_0\mu_0 g_1'g_2'=q_1'q_2'+(\frac{g_1'}{c})(\frac{g_2'}{c}) \tag{2.4}$$

化简得

$$\sqrt{q_1'^2+\frac{g_1'^2}{c}}\sqrt{q_2'^2+\frac{g_2'^2}{c}}=q_1'q_2'+(\frac{g_1'}{c})(\frac{g_2'}{c}) \tag{2.5}$$

两边平方得到

$$q_1'^2(\frac{g_2'}{c})^2+q_2'^2(\frac{g_1'}{c})^2=2q_1'q_2'(\frac{g_1'}{c})(\frac{g_2'}{c}) \tag{2.6}$$

得到

$$\left(\frac{q_1'}{g_1'}-\frac{q_2'}{g_2'}\right)^2=0 \tag{2.7}$$

于是，对于一组电荷和磁荷其需要满足的条件为

$$\frac{q_1'}{g_1'}-\frac{q_2'}{g_2'}=0 \tag{2.8}$$

即，在更一般的情况下，对于不同种类的粒子有

$$\frac{g_i'}{q_i'}=const \tag{2.9}$$

评分：除每式 1 分， 4 分，共 12 分

（3） z 轴上的电荷线密度为 $\lambda=nq$，应用高斯定理得到

在地球人看来这些电荷在粒子 P 处产生的电场和磁场为

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_x=\frac{nq}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_x,\vec{B}=0 \tag{3.1}$$

故作用在粒子 P 上的力为

$$\vec{F}=q\vec{E}=\frac{nq^2}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_x \tag{3.2}$$

利用前述关系式可得

$$\vec{F}=q\vec{E}=\frac{n}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(q'^2+\left(\frac{g'}{c}\right)^2\right)\vec{e}_x \tag{3.3}$$

而在外星人看来

$$\begin{aligned}\vec{E}'&=\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_x=\frac{nq'}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_x\\ \vec{B}'&=\frac{\mu_0\gamma'}{2\pi r}\vec{e}_x=\frac{\mu_0 ng'}{2\pi r}\vec{e}_x\end{aligned} \tag{3.4}$$

恰好有

$$\vec{F}=q'\vec{E}'+g'\vec{B}' \tag{3.5}$$

设结合了磁荷的“洛伦兹力”表达式为

$$\vec{F}=q'(\vec{E}'+\vec{v}\times\vec{B}')+g'(\vec{B}'+\vec{F}''(\vec{v},\vec{E}')) \tag{3.6}$$

联立、得到

$$\begin{aligned}\vec{F}''(\vec{v},\vec{E}') &= -q'\vec{v}\times\vec{B}' \\ &= -q'\vec{v}\times(\frac{1}{c^2}\frac{g'}{q'}\vec{E}') \\ &= -\frac{g'}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}'\end{aligned} \tag{3.7}$$

最后得到“洛伦兹力”的一般表达形式

$$\vec{F} = q'(\vec{E}'+\vec{v}\times\vec{B}')+g'(\vec{B}'-\frac{\vec{v}\times\vec{E}'}{c^2}) \tag{3.8}$$

评分：除每式 2 分，6 分，共 20 分

【题二】解：

（1） 我们考虑电路的叠加原理

对于一根向平面输入电流的导线，假设为 1，假设距离输入点为r处的电流密度为j，电场为$\vec{E}$，那么有

$$\begin{cases} j=\sigma E \\ j\pi rt = I\end{cases} \tag{1.1}$$

于是得到

$$E=\frac{I}{\sigma\pi tr} \tag{1.2}$$

于是这个电场分布在 3，4 探针之间带来的电势差为

$$U_{34}{}^{(1)} = \frac{I}{\sigma\pi t}\ln\frac{d_{14}}{d_{13}} \tag{1.3}$$

对于由 2 输出电流的导线其产生的电势差为

$$U_{34}{}^{(2)} = -\frac{I}{\sigma\pi t}\ln\frac{d_{24}}{d_{23}} \tag{1.4}$$

于是有

$$U_{34}=U_{34}{}^{(1)}+U_{34}{}^{(2)} = \frac{I}{\sigma\pi t}\ln\frac{d_{14}d_{23}}{d_{13}d_{24}} \tag{1.5}$$

同理，对于 3，4 之间的电流分布在 1，2 之间产生的电势差为

$$U_{12} = \frac{I}{\sigma\pi t}\ln\frac{d_{24}d_{31}}{d_{21}d_{34}} \tag{1.6}$$

现在由于我们不知道接点之间的距离，假设

$$d_{12}=a, d_{23}=b, d_{34}=c \tag{1.7}$$

那么有

$$U_{34}=\frac{I_{12}}{\sigma\pi t}\ln\frac{(a+b+c)\cdot b}{(a+b)\cdot(b+c)}<0 \tag{1.8}$$

以及

$$U_{14}=\frac{I_{23}}{\sigma\pi t}\ln\frac{(b+c)(a+b)}{ac}>0 \tag{1.9}$$

我们注意到

$$\begin{aligned}&(b+c)(b+a)\\&=bc+ba+b^2+ac\\&=b(a+b+c)+ac\end{aligned} \tag{1.10}$$

于是有

$$\begin{aligned}&e^{-\frac{|U_{34}|}{|I_{12}|}\sigma\pi t}+e^{-\frac{|U_{14}|}{|I_{23}|}\sigma\pi t}\\&=\frac{(a+b+c)\cdot b}{(a+b)\cdot(b+c)}+\frac{ac}{(b+c)(a+b)}\\&=1\end{aligned} \tag{1.11}$$

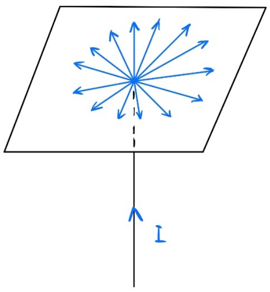
通过对上式的数值解可以得到电导率

$$\sigma=2.8(\Omega\cdot m)^{-1} \tag{1.12}$$

评分：每式 3 分，共 33 分

（2） 要使用安培环路定理，需要考虑恒定电流

将输入平面的导线电流补全，可使导线电流垂直于平面，电流从下方无穷远出发，从接触点流入，并在导电平面上均匀辐向流出，整个体系的电流在无穷远处形成回路，构成完整的电流分布



由对称性可知，平面电流的分布产生的磁场具有轴对称性，即在每个半径的环上，磁场都数值相等，沿切线方向，而且平面上下的磁场方向相反，记此部分磁场为$\vec{B}_1(r,z)$

而导线电流在空间中产生的磁场记为$\vec{B}_2(r,z)$

由安培环路定理，在上方空间中，取环心在轴线上的同心圆为安培环路，由于没有电流穿过，得到

$$(B_1(r,z)+B_2(r,z))2\pi r=0 \tag{1.13}$$

于是

$$B_1(r,z)=-B_2(r,z) \tag{1.14}$$

对于导线产生的磁场 $B_2(r,z)$ 则可通过毕奥-萨伐尔定律积分得到

$$\begin{aligned}\vec{B}_2(r,z)&=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}\\&=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(1-\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}})(-\hat{r}\times\hat{z})\end{aligned} \tag{1.15}$$

于是得到

$$B_1(r,z)=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(1-\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}})\hat{r}\times\hat{z} \tag{1.16}$$

同理，可验证此公式对于下半平面也成立

【题三】解：

（1） 由于回路中没有电阻，故有

$$Blv-L\frac{dI}{dt}=0 \tag{1.1}$$

即

$$\varepsilon=Bl\frac{dx}{dt}=L\frac{dI}{dt} \tag{1.2}$$

由初值 $I_{x=0}=0$

得到

$$I=\frac{Bl}{L}x \tag{1.3}$$

评分：每式 3 分，共 9 分

（2） 杆的运动方程为

$$F-BIl=m\frac{dv}{dt} \tag{2.1}$$

代入

有

$$F-\frac{B^2l^2}{L}x=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.2}$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{B^2l^2}{mL}x-\frac{F}{m}=0 \tag{2.3}$$

为所求的运动方程

其特解为

$$x^*(t)=\frac{LF}{B^2l^2} \tag{2.4}$$

通解为

$$x_0(t)=c_0\cos(\omega t+\phi_0) \tag{2.5}$$

代入初始条件最后得到

$$x(t)=\frac{FL}{B^2l^2}(1-\cos\omega t) \tag{2.6}$$

其中振荡角频率为

$$\omega=\frac{Bl}{\sqrt{mL}} \tag{2.7}$$

评分：3 分，其余每式 2 分，共 15 分

（3） 在

$$t=\frac{\pi}{\omega}(n+\frac{1}{2}) \tag{3.1}$$

时，动能达到极大值

$$\frac{1}{2}mv_m{}^2=\frac{LF^2}{2B^2l^2} \tag{3.2}$$

在

$$t=\frac{n\pi}{\omega} \tag{3.3}$$

时，磁场能达到极大值

$$\frac{1}{2}LI_m{}^2=\frac{LF^2}{2B^2l^2} \tag{3.4}$$

评分：每个时间 2 分，极大值 1 分，共 6 分

【题四】解：

（1） 显然内外球壳为两个极板，故等效的集总电路可以视作电阻与电容的并联（或者串联）

有，两球壳之间的电阻为

$$R=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{\sigma}\frac{dr}{4\pi r^2}=\frac{1}{4\pi\sigma}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}) \tag{1.1}$$

两球壳之间的电容为

$$C=\frac{Q}{\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r^2}dr}=\frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}} \tag{1.2}$$

于是有

$$RC=\frac{\varepsilon}{\sigma} \tag{1.3}$$

由电路的微分方程

$$\begin{cases} Ri-\dfrac{Q}{C}=0 \\ \dfrac{dQ}{dt}=-i \\ Q|_{t=0}=Q_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

得到

$$Q(t)=Q_0e^{-\frac{t}{RC}}=Q_0e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \tag{1.5}$$

评分：每式 2 分，共 10 分

（2） 两球壳之间的电流连续，为

$$i=-\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{\sigma Q_0}{\varepsilon}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \tag{2.1}$$

电流密度为

$$\vec{j}=-\frac{\sigma Q_0}{4\pi\varepsilon r^2}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\hat{r} \tag{2.2}$$

由焦耳定律的微分形式

$$\vec{j}=\sigma\vec{E} \tag{2.3}$$

得到

$$\vec{E}(r)=-\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon r^2}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}\hat{r} \tag{2.4}$$

对于磁场，有

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{H}&=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\&=\vec{j}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\&=(\sigma+\varepsilon\frac{-\sigma}{\varepsilon})\vec{E}\\&=\vec{0}\end{aligned}\tag{2.5}$$

以及

$$\nabla\cdot\vec{B}=0\tag{2.6}$$

得到

$$\vec{B}=0\tag{2.7}$$

于是在球壳内部无磁场

（注意，一定要考虑位移电流项的影响，否则无法得到磁场为 0 的结果）

坡印廷矢量为

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=0\tag{2.8}$$

评分:、每式 3 分，其余每式 2 分，共 18 分

（3） 焦耳热功率密度可以由如下方式推导

沿电流场流线方向取一段长为Δl，截面积为ΔS的体积元

$$p=\frac{dQ}{dVdt}=\frac{\frac{1}{\sigma}\frac{\Delta l}{\Delta S}(j\Delta S)^2dt}{\Delta l\Delta Sdt}=\frac{j^2}{\sigma}=\sigma E^2\tag{3.1}$$

于是有

$$p(r)=\frac{\sigma Q_0^{\ 2}}{16\pi^2\varepsilon^2r^4}e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon}t}\tag{3.2}$$

或者也可以用

$$p=\vec{j}\cdot\vec{E}=\frac{\sigma Q_0^{\ 2}}{16\pi^2\varepsilon^2r^4}e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon}t}\tag{3.3}$$

得到

而此处的电磁场能量密度为

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2\mu}B^2=\frac{Q_0^{\ 2}}{32\pi^2\varepsilon r^4}e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon}t}\tag{3.4}$$

其时间变化率为

$$\frac{dw}{dt}=-\frac{\sigma Q_0{}^2}{16\pi^2\varepsilon^2 r^4}e^{-\frac{2\sigma}{\varepsilon}t} \tag{3.5}$$

于是

$$\nabla\cdot\vec{S}+\frac{dw}{dt}+p=0 \tag{3.6}$$

满足能流的连续性方程，亦即在每处的电磁场能完全转化为该处的焦耳热，在电容器内部没有能量的流动

评分：每式 2 分，共 12 分

【题五】解：

（1） 记势能形式为

$$V(r)=-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{\alpha}{r} \tag{1.1}$$

由有心力场中的 Binet 方程得到

$$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-\frac{F(r)}{m} \tag{1.2}$$

可得轨道的极坐标表达式

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta} \tag{1.3}$$

其中

$$p=\frac{L^2}{m\alpha} \tag{1.4}$$

以及

$$e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \tag{1.5}$$

而半长轴为

$$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{-\alpha}{2E} \tag{1.6}$$

评分：每式 2 分，共 12 分

（2） 每个圆环产生的势能表达式为

$$\phi(r)=q\frac{\frac{Q_i}{2\pi a_i}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_i d\theta}{\sqrt{a_i^2+r^2-2a_i r\cos\theta}}$$

$$=\frac{qQ_i}{8\pi^2\varepsilon_0 a_i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{2r}{a_i}\cos\theta+\frac{r}{a_i}^2}} \tag{2.1}$$

$$\approx\frac{qQ_i}{8\pi^2\varepsilon_0 a_i}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\frac{r}{a_i}\cos\theta-\frac{1}{2}\frac{r}{a_i}^2+\frac{3}{8}(\frac{2r}{a_i}\cos\theta)^2)\,d\theta$$

$$=\frac{qQ_i}{4\pi\varepsilon_0 a_i}(1+\frac{1}{4}\frac{r}{a_i}^2)$$

常数势能的扰动对于质点轨道无影响，于是扰动项可以写作

$$\delta V(r)=\frac{\frac{qQ_i}{4\pi\varepsilon_0}}{4a_i^3}r^2=\frac{qQ_i}{16\pi\varepsilon_0 a_i^3} \tag{2.2}$$

评分：8 分，2 分，共 10 分

（3） 由一阶 Binet 方程得到

$$\frac{1}{2}mh^2(\frac{du}{d\theta}^2+u^2)+V(r)=E \tag{3.1}$$

其中

$$h=\frac{L}{m},u=\frac{1}{r} \tag{3.2}$$

于是得到行星从近日点运行一周又回到近日点的拱心角

$$\phi=2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{Ldr}{r^2\sqrt{2m(E-V(r))-\frac{L^2}{r^2}}} \tag{3.3}$$

当$\delta V(r)=0$时，该式给出未微扰时的拱心角即2π，这意味着轨道是闭合的，现在假定$\delta V(r)$是小量，我们可以对它进行泰勒展开$\phi=2\pi+\delta\phi$，保留一阶得到

$$\delta\phi=2m\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{dr\delta V(r)}{\sqrt{2m(E+\frac{\alpha}{r})-\frac{L^2}{r^2}}} \tag{3.4}$$

考虑化简该式，有

$$\frac{L^2}{2mr_{\min}{}^2}-\frac{\alpha}{r_{\min}}=E \quad (3.5)$$
$$\frac{L^2}{2mr_{\max}{}^2}-\frac{\alpha}{r_{\max}}=E$$

于是得到

$$\delta\phi=-\frac{\frac{qQ_i}{4\pi\varepsilon_0}}{2a_i^3}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{r^3dr}{\sqrt{(r-r_{\min})(r_{\max}-r)}} \quad (3.6)$$

令

$$c=\frac{r_{\max}-r_{\min}}{2},r_0=\frac{r_{\max}+r_{\min}}{2} \quad (3.7)$$

有

$$\begin{aligned}&\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{r^3dr}{\sqrt{(r-r_{\min})(r_{\max}-r)}}\\&=\int_{-c}^{c}\frac{(r+r_0)^3}{\sqrt{c^2-r^2}}dr(r=c\sin\theta)\\&=\frac{\pi}{2}a^3(2+3e^2)\end{aligned} \quad (3.8)$$

由于

$$a=-\frac{\alpha}{2E} \quad (3.9)$$

故 a 与 L 无关

而

$$e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\alpha^2}}\to\frac{de^2}{dL}=\frac{4EL}{m\alpha^2} \quad (3.10)$$

最终得到

$$\delta\phi=\frac{3}{2}\pi\sqrt{1-e^2}(\frac{a}{a_i})^3\frac{Q_i}{-Q} \quad (3.11)$$

当然最后还要将各个带电圆环的影响加在一起

$$|\delta\phi|=\frac{3}{2}\pi\sqrt{1-e^2}\sum_i(\frac{a}{a_i})^3\frac{Q_i}{Q} \quad (3.12)$$

评分：、各 4 分，其余每式 2 分，共 28 分

注：此题背景来自于太阳系中各行星对于水星引力影响产生轨道进动的计算，为理论力学部分的内容，实与电学关系不大。

【题六】解：

（1） 注意到在

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E} \tag{1.1}$$

中的 $\vec{E}$ 是介质中的总宏观电场，而

$$\vec{p}=\alpha\vec{E} \tag{1.2}$$

中的 $\vec{E}$ 是除了这个原子自身电荷所产生的电场以外所有的电场

因此，在介质中原子密度较高时，两者并不一致，应该对其进行修正

（理论解释，6 分）

（2） 介质中的宏观场为

$$\vec{E}=\vec{E}_{self}+\vec{E}_{else} \tag{2.1}$$

对应的两项分别为由于原子自身产生的场的平均值与外部原子产生的平均场

由

$$\vec{p}=\alpha\vec{E}_{else}\to\vec{P}=N\alpha\vec{E}_{else} \tag{2.2}$$

而由平均场定理我们得到

$$\vec{E}_{self}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{R^3} \tag{2.3}$$

于是有

$$\begin{aligned}\vec{E}&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\alpha}{R^3}\vec{E}_{else}+\vec{E}_{else}\\&=(1-\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0R^3})\vec{E}_{else}\\&=(1-\frac{N\alpha}{3\varepsilon_0})\vec{E}_{else}\end{aligned} \tag{2.4}$$

于是得到

$$\begin{aligned}&\vec{P}=\frac{N\alpha}{1-\frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}}\vec{E}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}\\&\to\chi_e=\frac{\frac{N\alpha}{\varepsilon_0}}{1-\frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}}\end{aligned} \tag{2.5}$$

或者，使用相对介电常数表示

$$\alpha=\frac{3\varepsilon_0}{N}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2} \tag{2.6}$$

评分：每式 4 分，共 24 分

【题七】解答：

（1） 允许！因为对于单个电荷，这样的一个电场是沿径向并且轴对称的，因而有

$$\nabla\times\vec{E}=0 \tag{1.1}$$

因而存在标量势，而由叠加原理，此结论对于多电荷体系也成立

评分：2 分，说明 3 分

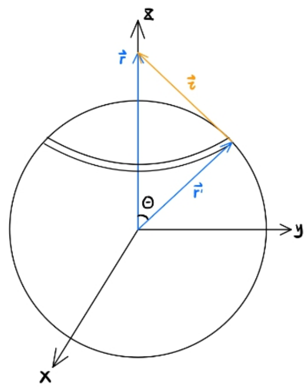
（2） 由电势和电场的关系可得

$$\begin{aligned}V(\vec{r})&=\int_r^\infty E(\vec{r})\cdot d\vec{r}\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\mu\int_r^\infty\frac{e^{-\mu r}}{r}dr+\int_r^\infty\frac{e^{-\mu r}}{r^2}dr\right)\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\int_r^\infty\frac{d(e^{-\mu r})}{r}+\int_r^\infty\frac{e^{-\mu r}}{r^2}dr\right)\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{e^{-\mu r}}{r}\Big|_r^\infty\right)\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\mu r}}{r}\end{aligned} \tag{2.1}$$

评分：4 分

（3） 由于本题中电场已经违背了平方反比定理，我们不能使用从平方反比推导出的高斯定理来得到球内电场为 0 的结果，因此使用积分得到球内电势的表达式

取如图所示的球坐标系，由体系绕 z 轴的旋转对称性，我们可以取微元为如图的一小条环带



源点位置矢量，场点位置矢量，间隔矢量分别记为

$$\vec{r},\vec{r}\,',\vec{\imath}=\vec{r}-\vec{r}\,' \tag{3.1}$$

由余弦定理可得

$$|\vec{\imath}|=\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta} \tag{3.2}$$

小微元段源在场点产生的电势为

$$d\phi=\frac{\frac{2\pi\sin\theta d\theta}{4\pi}Q}{4\pi\varepsilon_0\imath}e^{-\mu\imath}=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\imath}\sin\theta d\theta e^{-\mu\imath} \tag{3.3}$$

于是有

$$V(\vec{r})=\int_0^{\pi}\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\imath}\sin\theta d\theta e^{-\mu\imath} \tag{3.4}$$

然而如果将其看成关于θ的函数并不好积，对微分，我们得到

$$\sin\theta d\theta=\frac{\imath d\imath}{Rr} \tag{3.5}$$

于是可以将其看作是关于$\imath$的积分

$$V(\vec{r})=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 Rr}\left(-\frac{1}{\mu}e^{-\mu\imath}\Big|_{\imath 0}^{\imath 1}\right) \tag{3.6}$$

代入场点处于球内和球外不同的边界条件，得到

$$V(\vec{r})=\begin{cases}\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r}e^{-\mu r}\dfrac{e^{\mu R}-e^{-\mu R}}{\mu R}(r\geq R)\\ \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}e^{-\mu R}\dfrac{e^{\mu r}-e^{-\mu r}}{\mu r}(r<R)\end{cases} \tag{3.7}$$

评分：式 6 分，其余每式 2 分，共 18 分

（4） 内球壳的电势为

$$\begin{aligned}V_2&=V_{12}+V_{22}\\&=\frac{Q_1}{8\pi\varepsilon_0 R_1}e^{-\mu R_1}\frac{e^{\mu R_2}-e^{-\mu R_2}}{\mu R_2}+\frac{Q_2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}e^{-\mu R_2}\frac{e^{\mu R_2}-e^{-\mu R_2}}{\mu R_2}\end{aligned} \tag{4.1}$$

外球壳的电势为

$$\begin{aligned}V_1&=V_{11}+V_{21}\\&=\frac{Q_1}{8\pi\varepsilon_0 R_1}e^{-\mu R_1}\frac{e^{\mu R_1}-e^{-\mu R_1}}{\mu R_1}+\frac{Q_2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}e^{-\mu R_1}\frac{e^{\mu R_2}-e^{-\mu R_2}}{\mu R_2}\end{aligned} \tag{4.2}$$

由于导线连接，内外球壳电势相等，化简得到

$$\beta=\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{R_2}{R_1}\frac{e^{-\mu R_1}}{e^{\mu R_2}-e^{-\mu R_2}}\frac{R_1(e^{\mu R_2}-e^{-\mu R_2})-R_2(e^{\mu R_1}-e^{-\mu R_1})}{R_2e^{-\mu R_1}-R_1e^{-\mu R_2}} \tag{4.3}$$

评分：每式 3 分，共 9 分

（5） 在本题中我们需要把 e^x 展到三阶小量

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \tag{5.1}$$

于是得到

$$\beta=\frac{\mu^2}{6}R_2(R_1+R_2)\le\delta \tag{5.2}$$

得到

$$\mu\le\mu_0=\sqrt{\frac{6\delta}{R_2(R_1+R_2)}}=3*10^{-5}m^{-1} \tag{5.3}$$

评分：每式 3 分，共 9 分

（6） 对于单个电荷，研究从源点到半径为 r 的球面上立体角微元区域内

$$\begin{aligned}\oint_{dS}\vec{E}\cdot d\vec{a}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0r^2}(1+\mu r)e^{-\mu r}r^2\sin\theta d\theta d\phi\\&=\frac{\sin\theta d\theta d\phi}{4\pi\varepsilon_0}(1+\mu r)e^{-\mu r}\end{aligned} \tag{6.1}$$

以及

$$\begin{aligned}\int_{dV}Vd\tau&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^r\frac{e^{-\mu r}}{r}r^2\sin\theta d\theta d\phi\\&=\frac{1}{\mu^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta d\theta d\phi(1-e^{-\mu r}(1+\mu r))\end{aligned} \tag{6.2}$$

于是由叠加原理可得

$$\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{a}+\mu^2\int_V Vd\tau=\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \tag{6.3}$$

微分形式为

$$\nabla\cdot\vec{E}+\mu^2V=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{6.4}$$

评分：后两式每式 3 分，前两式每式 4 分，叠加原理 1 分，共 15 分

【题八】解：

（1） 现在我们考虑氢原子的极化模型：在氢原子的外部施加电场，电子云发生“偏移”，可以看作其等效正电荷中心（质子）向反方向移动，当质子受到电子云的电场力与外场的电场力达到平衡时，位移极化过程结束，原子内部产生了由于位移极化带来的偶极矩（说明 5 分）

于是有

$$E=\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 a^3}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$
$$\rightarrow \alpha=4\pi\varepsilon_0 a^3 \tag{1.1}$$

评分：3 分，说明 5 分，共 8 分

（2） 计算包含在中心半径为 r 的球中的电荷量

$$\begin{aligned}Q_{\text{enc}}&=\int_0^r \rho d\tau=\frac{4\pi q}{\pi a^3}\int_0^r e^{-\frac{2r}{a}}r^2dr\\&=\frac{4q}{a^3}\left[-\frac{a}{2}e^{-\frac{2r}{a}}\left(r^2+ar+\frac{a^2}{2}\right)\right]\Bigg|_0^r\\&=-\frac{2q}{a^2}\left[e^{-\frac{2r}{a}}\left(r^2+ar+\frac{a^2}{2}\right)-\frac{a^2}{2}\right]\\&=q\left[1-e^{-\frac{2r}{a}}\left(1+2\frac{r}{a}+2\frac{r^2}{a^2}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.1}$$

于是得到，当等效位移量为 d 时，外电场强度

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2}\left[1-e^{-\frac{2d}{a}}\left(1+2\frac{d}{a}+2\frac{d^2}{a^2}\right)\right] \tag{2.2}$$

对其进行 Taylor 展开

$$\begin{aligned}e^{-2d/a}&=1-\left(\frac{2d}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2d}{a}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{2d}{a}\right)^3+\cdots\\&=1-2\frac{d}{a}+2\left(\frac{d}{a}\right)^2-\frac{4}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^3+\cdots\end{aligned} \tag{2.3}$$

于是有

$$
\begin{aligned}
&1-e^{-2d/a}\left(1+2\frac{d}{a}+2\frac{d^2}{a^2}\right)\\
&=1-\left(1-2\frac{d}{a}+2\left(\frac{d}{a}\right)^2-\frac{4}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^3+\cdots\right)\left(1+2\frac{d}{a}+2\frac{d^2}{a^2}\right)\\
&=\gamma-7-2\frac{d}{a}-2\frac{d^2}{d^2}+2\frac{d}{a}+4\frac{d^2}{d^2}+4\frac{d_1^3}{d^3}-2\frac{d_1^2}{d^2}-4\frac{d_1^3}{d^3}+\frac{4}{3}\frac{d^3}{a^3}+\cdots\\
&=\frac{4}{3}\left(\frac{d}{a}\right)^3+o((\frac{d}{a})^3)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

最终得到

$$
\begin{aligned}
&E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2}\left(\frac{4}{3}\frac{d^3}{a^3}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{3a^3}(qd)=\frac{1}{3\pi\varepsilon_0 a^3}p\\
&\to\alpha=3\pi\varepsilon_0 a^3
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

评分：除 6 分，其余每式 4 分，共 22 分