培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（十五）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

题一.

（1）设小球到达圆环最低点时速度为 v_1，圆环对其弹力为 T，记 $g=\dfrac{qE}{m}$

因为洛伦兹力不做功，由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}mv_1^2=mgr$$

由牛顿第二定律得

$$T+qv_1B-mg=m\frac{v_1^2}{r}$$

解得

$$T=3mg-qB\sqrt{2gr}$$

由牛顿第三定律知小球对圆环的压力即为此，已规定取正时压力方向向下

（1）设任意时刻小球的速度向下的分量为 v_y，某一时刻小球与圆环组成的系统在左右方向上的动量大小为 p_x，注意到仅有小球所受洛伦兹力的水平分量对系统在左右方向上的动量变化有贡献，则对系统由左右方向的动量定理得

$$p_x=qB\sum\left(v_y\cdot\Delta t\right)=qBr\cos\beta$$

（2）设任意时刻小球与圆环间的相对速度为 u，则联立上一问的结论、机械能守恒定律并通过“配平方”可得

$$mgr\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot\left(\left(\frac{p_x}{2m}\right)^2+\left(\frac{u\sin\beta}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{m\cdot m}{m+m}\cdot u^2$$

极易解得

$$u^2=\frac{\cos\beta\cdot\left(4-\dfrac{q^2B^2r}{m^2g}\cos\beta\right)}{1+4\sin^2\beta}\cdot gr$$

上式括号里面应大于等于零恒成立，故得

$$\frac{q^2B^2r}{m^2g}<4$$

此即题给各物理参数间应满足的条件。

题二.

解：分两阶段讨论小球沿斜面的爬高.

第一阶段，从开始到小球在斜面刚好达到纯滚动状态

此阶段斜面摩擦力斜向上，是动摩擦力，如图所示，可列方程：

$$N = mg\cos\theta，\quad f = \mu N，$$

$$f - mg\sin\theta = ma_c，\quad v_c = a_c t，$$

$$fr = I_c\beta，\quad I_c = \frac{2}{5}mr^2，\quad \omega = \omega_0 - \beta t，$$

解得

$$a_c = (\mu\cos\theta - \sin\theta)g > 0，\quad v_c = (\mu\cos\theta - \sin\theta)gt，$$

$$\beta = 5\mu g\cos\theta/2r，\quad \omega = \omega_0 - (5\mu g\cos\theta/2r)t.$$

刚达到滚动时，有

$$\omega r = v_{c1}，$$

该时刻与球心速度分别为

$$t_1 = 2\omega_0 r/(7\mu\cos\theta - 2\sin\theta)g，$$

$$v_{c1} = 2\omega_0 r(\mu\cos\theta - \sin\theta)/(7\mu\cos\theta - 2\sin\theta).$$

此阶段小球沿斜面爬升路程为

$$l_1 = v_{c1}^2/2a_c = 2\omega_0^2 r^2(\mu\cos\theta - \sin\theta)/(7\mu\cos\theta - 2\sin\theta)^2 g.$$

第二阶段，从刚进入纯滚动状态到小球中心沿斜面向上速度将为零.此过程中斜面对小球必定有向上的静摩擦力 f',此力一方面使 ω 继续减小，同时与重力分力联合使 v_c 也减小，两者配合，保证小球与斜面接触点速度为零.

可列方程组：

$$mg\sin\theta - f' = ma_c'，$$

$$f'r = I_c\beta，$$

$$a_c' = \beta r，$$

解得

$$a_c' = \frac{5}{7}g\sin\theta，$$

第二阶段小球沿斜面爬升的路程为

$$l_2 = v_{c1}^2/2a_c' = 14\omega_0^2 r^2(\mu\cos\theta - \sin\theta)^2/5g\sin\theta(7\mu\cos\theta - 2\sin\theta)^2，$$

最后，小球爬升的高度为

$$h = (l_1 + l_2)\sin\theta = \frac{2\omega_0^2 r^2(\mu\cos\theta - \sin\theta)}{5(7\mu\cos\theta - 2\sin\theta)g}.$$

题三.

(1)记水面高度 H_1,进入部分体积 V，以上为正方向，浮子底面高度 H_2，水的体积 V_1

$\because V_1 = SH_1 - V$ =常数

$\therefore dV_1 = S \cdot dH_1 - dV = 0$ ①

F= ρ gV

$\because$ V= $\frac{1}{3}\pi R^3 H \cdot \frac{h^3}{H^3} = \frac{\pi R^2}{3H^2} h^3$

$\therefore dV = \frac{\pi R^2}{H^2} h^2 \cdot dh$ ②

$\because H_2 = H_1 + H - h$ ③

$\therefore dH_2 = dH_1 - dh$ ④

又由①得 $S \cdot dH_1 = dV$ ⑤

带入②得 $dH_1 = \frac{\pi R^2 h^2}{SH^2} dh$ ⑥

将⑥代入④得 $dH_2 = (\frac{\pi R^2 h^2}{SH^2} - 1)dh$ ⑦

又 $dF = \rho g \cdot dV = \rho g \frac{\pi R^2 h^2}{H^2} \cdot dh$ ⑧

将⑦代入⑧得 $dF = -\frac{\rho g \frac{\pi R^2 h^2}{H^2}}{1 - \frac{\pi R^2 h^2}{SH^2}} \cdot dH_2$

由于 H_2 是浮子真实高度，$\therefore$ $\omega = \sqrt{\frac{\rho g \frac{\pi R^2 h^2}{H^2}}{M(1 - \frac{\pi R^2 h^2}{SH^2})}}$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{M(1 - \frac{\pi R^2 h^2}{SH^2})}{\rho g \frac{\pi R^2 h^2}{H^2}}}$ $=2\pi \sqrt{\frac{h}{3g}(1 - \frac{\pi R^2 h^2}{SH^2})}$ ⑨

(2)

由微元知识 $dV = S_1 \cdot dh$

将 $S_1=\dfrac{\pi R^2 h^2}{H^2}$ 代入⑨得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M(1-\frac{S_1}{S})}{\rho g S_1}}$$

即

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M(S-S_1)}{\rho g S_1 S}}$$

题四.

(1)由高考知识可得

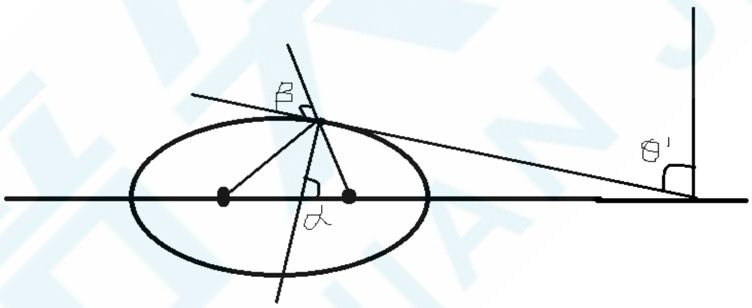
$$B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

(2)由毕奥——萨法尔定律可得焦点处的磁场

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\left|d\vec{l}\times\vec{r}\right|}{r^3}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{r^2 d\theta}{r^3}=\frac{\mu_0 I}{4\pi p}\cdot\int_0^{2\pi}(1+e\cos\theta)d\theta=\frac{\mu_0 I}{2p}$$

(3)P 点处的磁场可求，由毕奥——萨法尔定律可得

$$B_p=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\int\frac{\left|d\vec{l}\times\left(\vec{\Delta}+\vec{r}\right)\right|}{(r-\Delta\sin\theta)^3}\approx\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\left(\int_0^{\pi}\frac{\left|d\vec{l}\times\vec{r}\right|}{r^3}\cdot\left(1+\frac{3\Delta}{r}\sin\theta\right)\right)+\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\left(\int\frac{\left|d\vec{l}\times\vec{\Delta}\right|}{r^3}\right)$$



现来研究上式第二项的处理。

首先证明一个平面几何的结论：

考虑椭圆上一点 A，过 A 作椭圆的切线及其垂线 AK，由椭圆光学性质、正弦定理、角平分线定理得

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}=\frac{|AF_2|}{|MF_2|}=\frac{|AF_1|}{|MF_1|}=\frac{|AF_1|+|AF_2|}{|MF_1|+|MF_2|}=\frac{2a}{2c}=\frac{1}{e}$$

所以

$$\left|d\vec{l}\times\vec{\Delta}\right|=dl\cdot\Delta\cdot\sin\theta'=dl\cdot\Delta\cdot\frac{1}{e}\cdot\cos\beta=dr\cdot\Delta\cdot\frac{1}{e}$$

⑤代入③得

$$B_p=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\int_0^{\pi}\frac{r^2}{r^3}\cdot\left(1+\frac{3\Delta}{r}\sin\theta\right)d\theta+\frac{\mu_0 I\Delta}{4\pi e}\cdot\int_{\frac{p}{1+e}}^{\frac{p}{1-e}}\frac{dr}{r^3}$$

椭圆的极坐标表达式

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$$

计算积分后，可得

$$\delta B=\frac{\mu_0 I\Delta}{2\pi p^2}+\frac{\mu_0 I\Delta}{4\pi e p^2}\left((1+e)^3-(1-e)^3\right)$$

题五.

（1）由静磁场的安培环路定理知外圈钨丝对内圈钨丝无影响，由右手定则结合对称性可判断内圈每根钨丝所受安培力方向指向圆心，设单位长度安培力为 F_0，由无限长直载流导线激发的磁感应强度表达式可得

$$F_0=\frac{(N-1)\mu_0 I_0^2}{4\pi r_0}$$

（2）由静磁场的安培环路定理知内圈钨丝在外圈每根钨丝处激发的合磁感应强度等价于将内圈钨丝全部移至圆心而在外圈每根钨丝处激发的磁感应强度，设内圈钨丝提供给外圈每根钨丝的单位长度安培力为 F_1，则

$$F_1=\frac{\mu_0 N I_0^2}{2\pi R_0}$$

设外圈除某根钨丝外剩下的全部钨丝提供给该根钨丝的单位长度安培力为 F_2，则

$$F_2=\frac{(M-1)\mu_0 I_0^2}{4\pi R_0}$$

设外圈每根钨丝单位长度所受的安培力为 F_0'，则

$$F_0'=F_1+F_2=\frac{(M+2N-1)\mu_0 I_0^2}{4\pi R_0}$$

（3）设某时刻 t 内圈钨丝向圆心平移的速度大小为 v，与圆心距离为 x，由牛顿第二定律

$$\lambda\frac{dv}{dt}=\frac{(N-1)\mu_0 I_0^2}{4\pi x}$$

设内圈钨丝与圆心距离为 r 时的速度大小为 v_1，上式两边同乘以 dx 并积分得

$$v_1=\sqrt{\frac{(N-1)\mu_0 I_0^2}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_0}{r}}$$

（4）设两根导线的安培相互作用力为 F_3，由毕奥萨法尔定律可得

$$F_3=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}\cdot\int_0^b\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2+a^2}}\right)dx$$

运用本试卷提供的积分公式（或换元积分法）得

$$F_3=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}-1\right)$$

（5）经过详细推导后可知，考虑到钨丝长度有限而进行的修正是二阶小量及更高阶的小量的影响（由题意，可略去），答案即为第（3）小问的答案：

$$v_2=\sqrt{\frac{(N-1)\mu_0 I_0^2}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_0}{r}}$$

题六.

①：根据上面一问的两个式子 $\begin{cases} p(z)=\dfrac{kT_0}{m}\rho(z)\ldots(3) \\ \mathrm{d}\,p=-\rho g\,\mathrm{d}\,z\ldots(6) \end{cases}$

得任意时刻：$\dfrac{\mathrm{d}\,p}{p}=-\dfrac{mg}{kT}\mathrm{d}\,z\ldots(13)$，温度跟能量有关，这里就不在用 T_0，等下再补回来。

定积分：$\dfrac{p_G}{p}=e^{-\frac{mg(h-z)}{kT}}\ldots(14)$，$\begin{cases} p_G\text{是活塞给气体的压强} \\ h\text{是汽缸离地的高度} \\ z\text{是气体离地的高度} \end{cases}$

$\therefore$：$p=p_G e^{\frac{mg(h-z)}{kT}}\ldots(15)$，$\therefore$：$\rho=\dfrac{mp_G}{kT}e^{\frac{mg(h-z)}{kT}}\ldots(16)$

$\because$：$m\bullet N_A=\mu$，$\therefore$：$\begin{cases} p=p_G e^{\frac{\mu g(h-z)}{N_A kT}}=p_G[1+\dfrac{\mu g(h-z)}{N_A kT}] \\ \rho=\dfrac{\mu p_G}{N_A kT}e^{\frac{\mu g(h-z)}{N_A kT}}=\dfrac{\mu p_G}{N_A kT}[1+\dfrac{\mu g(h-z)}{N_A kT}] \end{cases}\ldots(17)$，（$\mu$ 很小）

而 $\int_0^h\rho S\,\mathrm{d}\,z=S\int_0^h\dfrac{\mu p_G}{N_A kT}e^{\frac{\mu g(h-z)}{N_A kT}}\mathrm{d}\,z=\dfrac{p_G S}{g}(e^{\frac{\mu g h}{N_A kT}}-1)=\dfrac{p_G S\mu h}{N_A kT}=n\mu\ldots(18)$

$\therefore$：$p_G S=\dfrac{nN_A kT}{h}\ldots(19)$，$\therefore$：$H_0=\dfrac{nN_A kT_0}{p_0 S}\ldots(20)$

②：(a)求质心：

$$\text{则}h_C=\frac{\int_0^h\rho Sz\,\mathrm{d}\,z}{n\mu}=\frac{\mu p_G S\int_0^h[1+\frac{\mu g(h-z)}{N_A kT}]z\,\mathrm{d}\,z}{n\mu N_A kT}$$

$$=\frac{\mu p_G S[\frac{1}{2}(1+\frac{\mu gh}{N_A kT})h^2-\frac{\mu gh^3}{3N_A kT}]}{n\mu N_A kT}=\frac{p_G S[\frac{1}{2}(1+\frac{\mu gh}{N_A kT})h^2-\frac{\mu gh^3}{3N_A kT}]}{nN_A kT}$$

$$=\frac{p_G S}{2nN_A kT}h^2\ldots(21)$$

(b)能量守恒：外力做的功＋势能减少量＝气体吸热总能量

$$p_GS(-\mathrm{d}h)+n\mu g\cdot[-\mathrm{d}(\frac{p_GS}{2nN_AkT}h^2)]=\frac{5}{2}nR\,\mathrm{d}T...(23)$$

$$\because:\ p_GS=\frac{nN_AkT}{h}...(19)$$

$$\therefore:\frac{nN_AkT}{h}(-\mathrm{d}h)+-n\mu g\,\mathrm{d}(\frac{\frac{nN_AkT}{h}}{2nN_AkT}h^2)=\frac{5}{2}nR\,\mathrm{d}T$$

$$\therefore:\frac{nN_AkT}{h}(-\mathrm{d}h)-\frac{1}{2}n\mu g\,\mathrm{d}h=\frac{5}{2}nR\,\mathrm{d}T...(24)$$

$$\therefore:-\frac{1}{2}\mu gh\,\mathrm{d}h=\frac{5}{2}R(\frac{2}{5}T\,\mathrm{d}h+h\,\mathrm{d}T)...(25)$$

$$\therefore:-\frac{1}{2}\mu gh^{\frac{2}{5}}\,\mathrm{d}h=\frac{5}{2}Rh^{-\frac{3}{5}}(\frac{2}{5}T\,\mathrm{d}h+h\,\mathrm{d}T)=\frac{5}{2}R\,\mathrm{d}(h^{\frac{2}{5}}T)...(26)$$

$$\therefore:-\frac{5}{14}\mu g[(\frac{H_0}{2})^{\frac{7}{5}}-H_0^{\frac{7}{5}}]=\frac{5}{2}R[(\frac{H_0}{2})^{\frac{2}{5}}T-H_0^{\frac{2}{5}}T_0]...(27)$$

$$\therefore:\ T=\frac{(2^{\frac{7}{5}}-1)\mu gnN_AkT_0}{14p_0SR}+2^{\frac{2}{5}}T_0...(28)$$

$$\therefore:\ F=p_GS-p_0S=(2^{\frac{7}{5}}-1)(\frac{\mu gnN_Ak}{7R}+p_0S)...(29)$$

③计算器可得...

题七.

（1）在以速度大小 $v_0=\dfrac{E}{B}$ 向 x 轴正方向平动的惯性参考系 K 中，根据伽利略变换，电场强度变为零，磁感应强度仍为 B。在 $K(x',y')$ 系中，粒子做匀速圆周运动，运动轨迹

$$x'=-\frac{mv_0}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

$$y'=\frac{mv_0}{qB}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)-1\right)$$

换回实验室参考系中，得到粒子在实验室参考系中的运动轨迹

$$x=x'+v_0t$$
$$y=y'$$

代入 $v_0=\dfrac{E}{B}$ 得

$$x=\frac{E}{B}t-\frac{mE}{qB^2}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

$$y=\frac{mE}{qB^2}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)-1\right)$$

显然这表示一条摆线（滚轮线）

（2）设某时刻粒子的动量为(p_x,p_y)，坐标为(x,y)，质量为m'。由x方向动量定理得

$$dp_x=-qBv_y\cdot dt$$

等式两边累加求和得

$$p_x=-qBy$$

由能量守恒得

$$-qEy=m'c^2-mc^2$$

由狭义相对论知

$$m'c^2=\sqrt{\left(mc^2\right)^2+\left(p_x^2+p_y^2\right)c^2}$$

联立以上各式并利用$E=cB$得

$$p_y=-\sqrt{-2mqEy}$$

将p_x、p_y作比值

$$\frac{p_y}{p_x}=\frac{m'\frac{dy}{dt}}{m'\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{-2mqEy}}{-qBy}$$

分离变量得

$$\sqrt{\frac{qB^2y}{-2mE}}dy=dx$$

积分，得到粒子的运动轨迹

$$x=\sqrt{\frac{2qB^2}{9mE}}(-y)^{\frac{3}{2}}$$

（3）记实验室参考系为S系，根据狭义相对论中电磁场的洛伦兹变换，在以速度大小$u=\frac{c^2B}{E}$向x轴正方向平动的惯性参考系S'中，磁感应强度记为B'，电场强度记为E'

$$B'=0$$

$$E'=E\sqrt{1-\frac{B^2c^2}{E^2}}$$

在 S' 系中，粒子的运动方程为

$$x'=0$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{\left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2}{c^2}}}\cdot\frac{dy'}{dt'}=-qE't'$$

第二式整理得

$$\frac{dy'}{dt'}=-\frac{qE't'}{\sqrt{q^2E'^2t'^2+m^2c^2}}$$

积分得

$$y'=-\frac{mc^2}{qE'}\left(\sqrt{1+\left(\frac{qE'}{mc}t'\right)^2}-1\right)$$

由坐标的洛伦兹变换得

$$t=\frac{t'+\frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{B^2c^2}{E^2}}}$$

$$x=\frac{x'+ut'}{\sqrt{1-\frac{B^2c^2}{E^2}}}$$

$$y=y'$$

代入得

$$x=\frac{c^2B}{E}t$$

$$y=-\frac{mc^2}{qE\sqrt{1-\frac{B^2c^2}{E^2}}}\cdot\left(\sqrt{1+\left(\frac{qE}{mc}\left(1-\frac{B^2c^2}{E^2}\right)t\right)^2}-1\right)$$

此即粒子的运动轨迹