

# 物理チャレンジ 2021

## 第 2 チャレンジ

### 理論問題

2021 年 8 月 17 日 (火)

理論問題にチャレンジ 13 : 00 ~ 18 : 00

理論問題にチャレンジする前に下記の＜注意事項＞をよく読んでください。

問題は、大問 4 題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

#### ＜注意事項＞

1. 試験中は、解答者本人と解答している手元を ZOOM でモニタし、記録します。
2. 解答中に、他の人の助言を受けたり、通信機能などを用いて解を検索するなどの行為は禁止します。このような不正行為が発覚した場合、物理チャレンジ参加の資格と権利を失います。
3. 問題用紙は表紙、裏表紙を含め 26 枚 (問題は 24 ページ) です。解答用紙は 17 枚です。
4. 「机の上に置いてよいもの」以外は片付けてください。参考図書 (教科書、参考書、問題集、ノート、専門書) の参照は禁止です。
5. 開始時間になるまで解答は始めないでください。すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
6. 解答は、最終的な答えのみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
7. オンライン試験の解答はスキャナー等で PDF にして送信するため、解答作成には特別な注意を払う必要があります。解答ははっきりと濃く書き、消しゴムを使う場合には、きちんと消してください。
8. チャレンジ開始から 200 分 (3 時間 20 分) 経過するまでは、原則として、途中終了することはできません。200 分経過 (16:20) 後は、終了希望者は連絡したうえで、次の終了後の作業を行ってください。
9. 終了の合図があったら解答作業はやめ、すべての解答用紙 (無解答の用紙も含む) にチャレンジ番号・氏名が記入されていることを確認の上、速やかに解答用紙をスキャナー等で PDF にして送信してください。また、送信後、送信ファイルをダウンロードして、確実に送信されていることを確認してください。

## 第 1 問 (80 点)

### 海に浮かぶ氷山の安定な配置

「氷山の一角」という表現があるが，海に浮かぶ氷山は水面に出ている部分は 1 割程度で，残りの 9 割は水中に隠れている。隠れている部分はどのようなのだろう。海中深く縦に立っているのだろうか？それとも，海面近く横に寝ているのだろうか？

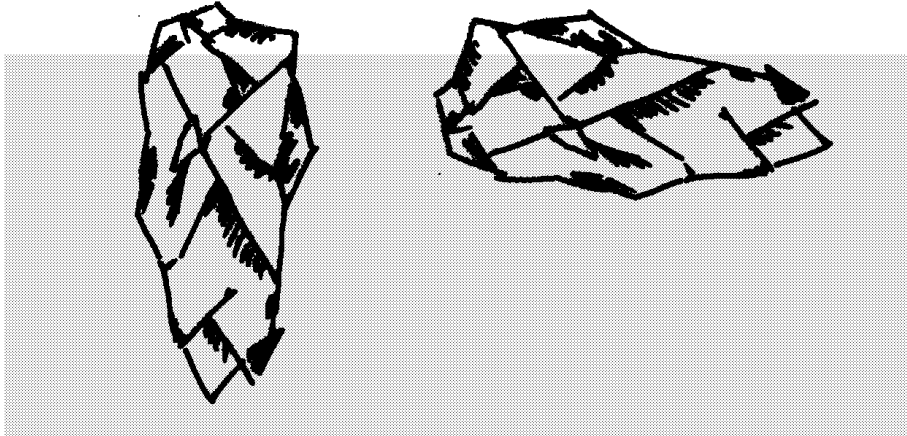


図 1. 縦に深く立っている氷山（左）と，横に寝ている氷山（右）。

問題を単純化するために，奥行方向は無視して空間は 2 次元とし，紙面に平行な面内の運動のみを考える。幅  $W$ ，高さが  $H$  で縦長 ( $H > W$ ) の長方形の氷の塊が，図 2 のように縦に，あるいは図 3 のように横に浮かんでいるとして，これらの状態が安定かどうか，すなわち，少し傾けても元の向きに戻るかどうかを考察しよう。

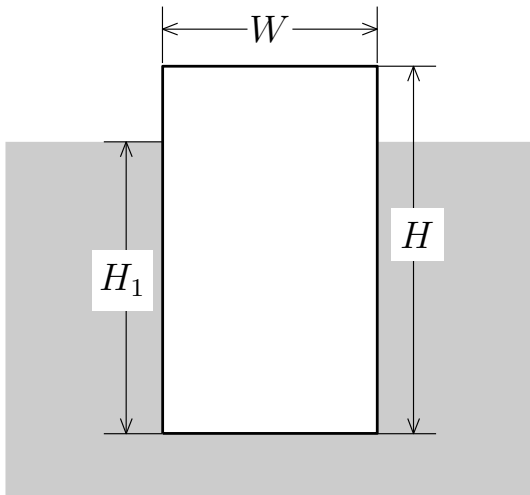


図 2. 縦に浮かんだ長方形の氷

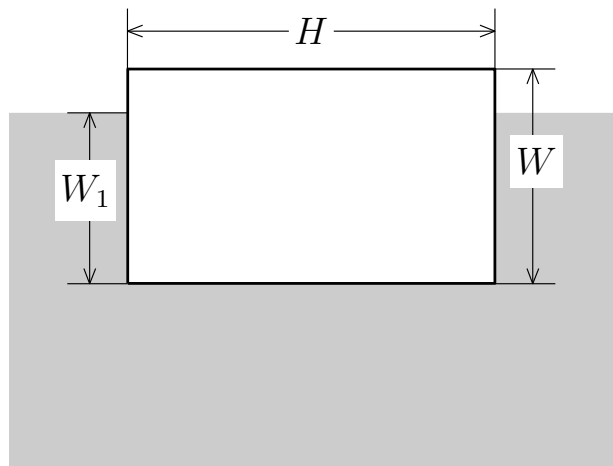


図 3. 横に浮かんだ長方形の氷

以下では，氷および水の単位面積あたりの密度を，それぞれ  $\rho_{ic}$  および  $\rho_{wa}$ ，重力の加速度を  $g$ ，また，氷の比重を  $\rho = \frac{\rho_{ic}}{\rho_{wa}}$ ，長方形の氷の質量を  $M = HW\rho_{ic}$  とする（表 1）。

解答は、適宜各問の趣旨に応じて、表 1 および設問までに定義した記号を用いて答えよ。

記号	物理量
$g$	重力の加速度
$\rho_{\text{wa}}$	水の密度（単位面積あたり）
$\rho_{\text{ic}}$	氷の密度（単位面積あたり）
$\rho$	氷の比重 $\left(\frac{\rho_{\text{ic}}}{\rho_{\text{wa}}}\right)$
$H$	氷山の高さ
$W$	氷山の幅
$M$	氷山の質量 $(HW\rho_{\text{ic}})$
$(X_0, Y_0)$	基準状態の氷山の重心座標
$\theta$	氷山の傾き角

表 1. 物理量の記号の表

まず、浮力について考えよう。物体が周囲の水（または流体）から受ける力を浮力という。浮力の大きさは押しのけられた水に働いていた重力に等しく、その向きは重力と逆である。これをアルキメデスの原理という。また、押しのけられた水の重心を浮心といい、浮力の作用点とみなすことができる。

問 1 なぜ「浮力の大きさは押しのけられた水に働いていた重力と等しい」のか、説明せよ。ただし、大気圧の影響は無視してよい。

[ヒント] 仮想的に、物体表面と同じ形をした薄くて軽い膜を考えて、内側と外側から膜に働く力の釣り合いを考えよ。

問 2 図 2 のように、幅  $W$ 、高さ  $H$  の長方形の氷がまっすぐ縦に浮かんでいるとする。解答欄の左図に、氷の重心  $G$  の位置を黒丸（●）で、右図に浮心  $G'$  の位置を白丸（○）で示し、それぞれの図に氷に働く重力および浮力を、その大きさ・向き・作用点に注意して、矢印で表せ。さらに、水面の下に沈んでいる部分の長さ  $H_1$  を求めよ。

問 3 同様に、図 3 のように長方形の氷が横になって浮かんでいるときの、水面下に沈んでいる部分の長さ  $W_1$  を求めよ。

浮かんだ氷山の配置の安定性は、系の位置エネルギーを調べることによって判定できる。

まず、氷の柱が縦になって浮かんでいる場合と、横になって浮かんでいる場合の位置エネルギーを比較してみよう。

重力の位置エネルギーを考えるために、座標軸を図 4 のようにとり、原点  $O$  を海面上にとる。ただし、海は非常に大きいので、氷が水を押しのけることによる海面の高さの変化は無視できるとする。

系の位置エネルギーとしては、氷の位置エネルギーだけではなく、周りの水の位置エネルギーも考慮しなければならない。しかし、海の水全体の位置エネルギーは膨大で、また、海の形状にも依存する。そこで、基準状態を決めてその位置エネルギーを  $U_0$  とし、それからの差を考えることにする。

基準状態として、図 4 のように氷が空中にあって水に浸かっていない仮想的な状態を考える。基準状態の氷の重心  $G$  の座標を  $(X_0, Y_0)$  とする。

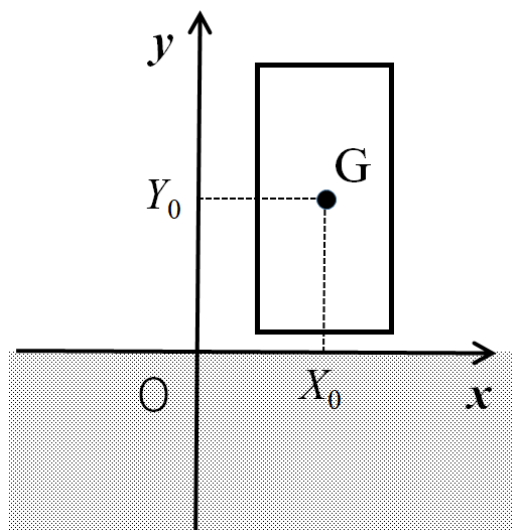


図 4. 基準状態の氷山の配置と座標軸

まず、長方形の氷の柱が縦に浮かんでいる状態（図 2）を考えよう。氷が水に浸かる際に押しのけた水は、広い海面に薄く広がり、海面の高さは変わらないとする。

問 4 氷の重心の  $y$  座標  $y_H$  および浮心の  $y$  座標  $y'_H$  を、 $H$  および  $H_1$  を用いて表せ。

問 5 氷の位置エネルギーを  $U_{ic}$  として、基準状態の氷の位置エネルギー  $U_{0,ic}$  との差  $\Delta U_{ic} = U_{ic} - U_{0,ic}$  を、氷の重心座標  $y_H$  および  $Y_0$  を用いて表せ。

問 6 水の位置エネルギーを  $U_{wa}$  として、基準状態の水の位置エネルギー  $U_{0,wa}$  との差  $\Delta U_{wa} = U_{wa} - U_{0,wa}$  を、浮心の座標  $y'_H$  を用いて表せ。

問 7 以上の結果から、縦に浮かんでいる状態の位置エネルギー  $U_H$  の基準状態の位置エネルギー  $U_0$  からの変化  $\Delta U_H = U_H - U_0$  は

$$\Delta U_H = Mg \left( \frac{1}{2}(1 - \rho)H - Y_0 \right)$$

で与えられることを示せ。

次に，長方形の氷の柱が横に浮かんでいる状態（図 3）を考えよう。これまでの考察は  $H$  と  $W$  の大小関係には依存しないので，この場合の位置エネルギーの変化  $\Delta U_W$  は，これまでの結果を用いて直ちに求めることができる。

問 8 横に浮かんでいる状態の，位置エネルギーの基準状態からの変化  $\Delta U_W = U_W - U_0$  を求めよ。

問 9 これらの結果を用いて，縦に浮かんでいる状態と，横に浮かんでいる状態のどちらの位置エネルギーがより小さいか求めよ。ただし，氷は縦長  $H > W$  とする。

さて，氷山の配置の安定性を位置エネルギーを用いて議論しよう。

氷山はより小さな位置エネルギーの配置へ自発的に向きを変えるが，逆に，位置エネルギーの小さな配置からより大きな配置へは，外力を加えない限り自ら変わることはない。特に，位置エネルギーが最小または極小の配置にある氷山は，向きの微小な変化に対して必ず位置エネルギーが増加するので，力学的に安定である。

図 5 の右のように，縦に浮かんでいる状態から角度  $\theta$  傾いた状態を考えよう。そのときの位置エネルギーを  $U_H(\theta)$  とする。 $U_H(0)$  は縦に浮かんでいるときの位置エネルギー  $U_H$ ， $U_H(\pi/2)$  は横に浮かんでいるときの位置エネルギー  $U_W$  である。以下では，傾き角  $\theta$  は微小で喫水線が長方形の角に達していないとする。

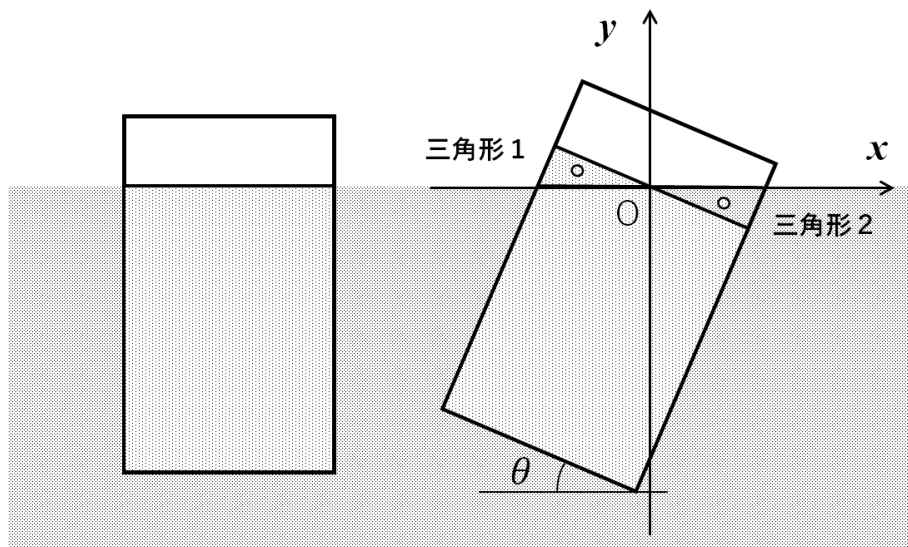


図 5. 縦に浮かんだ氷（左）と，仮想的に角度  $\theta$  傾いて浮かんだ氷（右）。

氷山をゆっくりと傾けたとする。傾いた状態でも浮力の大きさは同じでなければならないので，氷の海面の下の部分の面積は傾き角  $\theta$  に依存しない。そのため，右図で  $\circ$  を付した 2 つの

三角形 1 と 2 の面積は等しい。これから、縦に浮かんだときの喫水線と傾いて浮かんだときの喫水線は、ちょうど互いの midpoint で交わることがわかる。この midpoint を原点  $O$  として座標軸をとり、傾き角が  $\theta$  のときの氷山の重心  $G$  の座標を  $(x_\theta, y_\theta)$ 、浮心  $G'$  の座標を  $(x'_\theta, y'_\theta)$  とする。

問 10 傾き角が  $\theta$  のときの、系の位置エネルギーの基準状態との差  $\Delta U_H(\theta) = U_H(\theta) - U_0$  を、重心と浮心および基準状態の重心の  $y$  座標  $y_\theta, y'_\theta, Y_0$  を用いて表せ。

問 11  $\theta$  だけ傾いたときの氷の重心  $G$  の座標  $(x_\theta, y_\theta)$  を求めよ。

次に、この状態の浮心  $G'$  の座標  $(x'_\theta, y'_\theta)$  を求めたい。これは、

- 三角形 1 の面積  $S_1$  と、その重心座標  $(x_1, y_1)$
- 三角形 2 の面積  $S_2$  と、その重心座標  $(x_2, y_2)$
- 氷の水面下の部分の面積  $S$

を用いて表され、これらの量は簡単な幾何学的な考察などから、容易に求めることができる。

問 12 上で定義した、 $S_1, (x_1, y_1), S_2, (x_2, y_2)$ , および  $S$  を求めよ。

問 13 上で定義した量と  $y'_H$  を用いて、浮心  $G'$  の座標  $(x'_\theta, y'_\theta)$  を表わせ。

以上の結果を用いて、問 10 で求めた  $\Delta U_H(\theta)$  を表 1 の記号を用いて表わすと

$$\Delta U_H(\theta) = MgH \left( \frac{1}{2} (1 - \rho) \cos \theta + \frac{1}{24\rho} \left( \frac{W}{H} \right)^2 \tan \theta \sin \theta \right) - MgY_0 \quad (1)$$

となる。

問 14  $\Delta U_H(\theta)$  の表式 (1) を導け。

傾き角  $\theta$  を微小 ( $|\theta| \ll 1$ ) として、式 (1) の  $\Delta U_H(\theta)$  を  $\theta$  の 2 次 ( $\theta^2$ ) まで展開すると

$$\frac{1}{MgH} (\Delta U_H(\theta) + MgY_0) \doteq \frac{1}{2} (1 - \rho) + \frac{1}{4}\rho \left( 1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{6} \left( \frac{W}{\rho H} \right)^2 \right) \theta^2 \quad (2)$$

が得られる。

問 15  $|\theta| \ll 1$  における三角関数の展開式

$$\sin \theta \doteq \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \cdots, \quad \cos \theta \doteq 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \cdots, \quad \tan \theta \doteq \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \cdots$$

を用いて、式 (1) より展開式 (2) を導け。

- 問 16 展開式 (2) を用いて、氷が縦に浮かんでいる状態から微小角度傾けたときに、もとの戻るための条件を求めよ。
- 問 17 同様に、氷が横に浮かんでいる状態から微小角度傾けたときに、もとの戻るための条件を求めよ。
- 問 18  $\rho = 0.90$  のとき、上の 2 つの条件はどうなるか。縦長の氷の場合 ( $H > W$ ) に、縦に浮かんだ氷と横に浮かんだ氷の安定性の条件を、有効数字 2 桁で具体的な数値を用いて議論せよ。

この問題では、2 次元世界で長方形の氷山が真っすぐ立っている場合の安定性を検討した。一般には斜めの状態で安定になる条件もあり、形状を長方形に限っても、任意の比重や縦横比で浮かんだ物体の安定な姿勢を求めるのは、簡単ではない。現実の 3 次元の問題では、奥行き方向にも回転する可能性があり、さらに複雑である。

## 第2問 (60点)

### 長さの変わる振り子

[A] 図1のように、長さ  $\ell_0$  の糸に質量  $m$  の小さなおもりを下げて単振り子を1つの鉛直面内で振動させる。糸が鉛直となす角を  $\theta$ 、最下点から円周に沿ったおもりの変位を  $x$  と表す(ともに右向きを正とする)。 $|\theta|$  は1に比べて十分小さく、 $\sin \theta \doteq \theta$ 、 $\cos \theta \doteq 1 - \frac{1}{2} \theta^2$  と近似できる。また、糸の質量や伸び縮みは無視し、重力加速度の大きさを  $g$  とする。

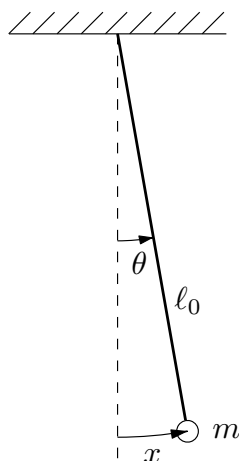


図1.

問1 時間を  $t$  として、円周に沿ったおもりの運動方程式を次の形に書くとき、力  $F$  を  $x$  を用いて表せ。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \quad (1)$$

問2  $x$  を  $\theta$  で表し、 $\theta$  の振幅を  $A$ 、時刻  $t = 0$  のとき  $\theta = 0$  として、運動方程式(1)から  $\theta$  を  $t$  の関数として求めよ。

問3 おもりの運動エネルギー  $K$  を  $t$  の関数として求めよ。

問4 最下点を基準として、おもりの位置エネルギー  $U$  を  $t$  の関数として求めよ。

問5 全エネルギー  $E = K + U$  を求め、 $E$  が一定であることを示せ。

問6 糸の張力  $S$  は、おもりに働く重力の糸の方向の成分と遠心力の和である。 $S$  が、時間  $t$  に依存する項と  $t$  に依存しない項の和として、次の式(2)の形に表されることを示せ。

$$S(t) = C_0 + C_1 \cos(2\omega t) \quad (2)$$

ここで、 $C_0$ 、 $C_1$ 、 $\omega$  は正の定数である。また、 $C_0$ 、 $C_1$ 、 $\omega$  を  $m, g, \ell_0, A$  を用いて表せ。



[B] [A] の単振り子の支点が小さな穴になっていて、穴を通して糸の長さを変化できるとする。糸の長さを変化させたとき、単振り子の振動がどのように変化するかを考えよう。

問 7 糸の長さが変化すると振り子は糸を通じて仕事をされる。糸の長さが時間  $t$  に依存する関数  $\ell(t)$  と表されるとき、振り子になされる単位時間あたりの仕事 (仕事率) を糸の長さ  $\ell(t)$  と糸の張力  $S(t)$  により表せ。

一般に、糸の長さが変化すると、糸の張力  $S(t)$  は式 (2) とは違ってくる。しかし、以下の問いでは、糸の長さの変化が十分小さな場合を考え、 $S(t)$  として式 (2) を用いてよい。

問 8 はじめに、 $\ell(t)$  の時間変化率が  $\omega$  に比べて十分小さい場合を考える。この場合に振り子になされる仕事を求めるには、式 (2) の右辺で、 $\omega$  で振動する第 2 項の寄与を無視して、第 1 項だけ考慮すればよい。

(a) 上のように考えて、糸の長さを微小量  $\Delta\ell$  だけ変化させるとき、振り子になされる仕事  $\Delta W$  を求めよ。 $\Delta\ell > 0$  のとき、糸の長さは長くなることに注意せよ。

糸の長さが  $\Delta\ell$  だけ変化すると振動の最下点は下向きに  $\Delta\ell$  だけ変化する。したがって、問 4 で定義した、最下点を位置エネルギーの基準とした振り子のエネルギー  $E$  は、問 8(a) の  $\Delta W$  から基準の変化による部分を差し引いて、次式の  $\Delta E$  だけ変化する。

$$\Delta E = \Delta W - (-mg\Delta\ell) = \Delta W + mg\Delta\ell$$

(b) 糸の長さが変化すると振り子の周期  $T$  も  $T + \Delta T$  に変化する。このとき、微小量  $\Delta\ell$  について 1 次の範囲では、次の関係式 (3) が成り立つことを示せ。

$$\frac{\Delta E}{E} + \frac{\Delta T}{T} = 0 \quad (3)$$

一般に、 $|\delta|$  が 1 に比べて十分小さいとき、 $(1 + \delta)^\alpha \approx 1 + \alpha\delta$  と近似できることに注意せよ。

エネルギー  $E$  と周期  $T$  の積の変化  $(E + \Delta E)(T + \Delta T) - ET$  は、 $\Delta\ell$  について 1 次の範囲では近似的に

$$ET \left( 1 + \frac{\Delta E}{E} + \frac{\Delta T}{T} \right) - ET = ET \left( \frac{\Delta E}{E} + \frac{\Delta T}{T} \right)$$

と表されるから、式 (3) は積  $ET$  がこの範囲で一定に保たれることを意味する。

(c) 糸の長さ  $\ell$  をゆっくり変化させたとき、振り子の振幅  $A\ell$  は  $\ell$  にどのように依存するか。

問9 次に、糸の長さが次のように変化したとする。

$$\ell(t) = \ell_0 - a \sin(\Omega t)$$

ここで、 $0 < a \ll \ell_0$  であり、 $\Omega (> 0)$  は  $\omega$  と同程度の大きさをもつとする。

- (a) 式 (2) を用いて、時刻 0 から  $t$  までに振り子になされる仕事を求めよ。ただし、問 8 の場合と違って、このときには式 (2) の右辺第 2 項の寄与を無視できないことに注意せよ。
- (b)  $\Omega = 2\omega$  のとき、十分時間が経つと、振り子のエネルギーが  $t$  に比例して増加することを示せ。

ブランコを「こぐ」ときに重心の位置を移動するのは、問 9 で糸の長さを変えるのと同じ効果をもつと考えることができる。

### 第3問 (80 点)

#### 単極発電機と単極モーター

一様な磁場中において、磁場と平行な回転軸のまわりに一定の角速度  $\omega$  で図 1 の向きに回転する半径  $a$  の導体円板を考えよう。磁場の磁束密度の大きさは  $B$  とする。

回転軸から距離  $r$  の地点にある電荷  $q$  の荷電粒子は、半径  $r$  の円の接線方向に速さ  $v = \omega r$  で運動しているので、磁場から力を受ける。荷電粒子が力を受けるということは起電力が発生することを意味する。

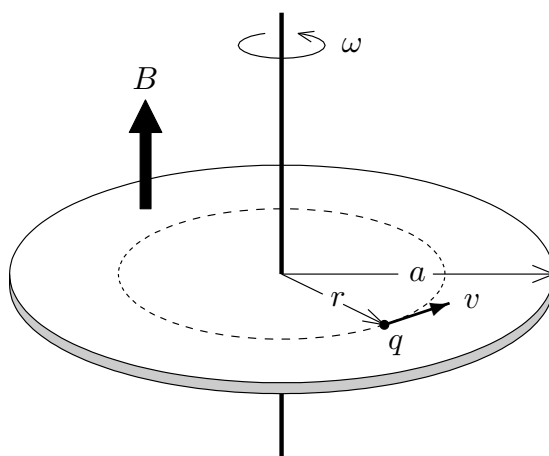


図 1.

問 1 電荷  $q > 0$  の場合に、荷電粒子が受ける力の大きさと方向を求めよ。

問 2  $q$  の正負に関係なく、回転軸から距離  $r$  と  $r + dr$  との微小区間に生じる電位差 (誘導起電力) は  $\omega r B dr$  と表されることを、基本法則に基づいて説明せよ。

問 3 前問で求めた電位差を用いて、円板の中心 ( $r = 0$ ) と周縁 ( $r = a$ ) との間の誘導起電力  $\mathcal{E}$  が

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \omega B a^2 \quad (1)$$

と表されることを導け。

したがって図 2 のように、円板の周縁と導電性の中心軸との間に負荷抵抗をつなぐと電流が流れる。一般に磁場中で導体が運動することによって誘導電流が生じる現象を単極誘導、これを利用した発電機を単極発電機という。

抵抗  $R$  に定常的に電流  $I$  が流れると電力を消費するので、円板の角速度を一定  $\omega$  に保つためには、中心軸のまわりに回転させる向きの力のモーメントを円板に加える必要がある。力の

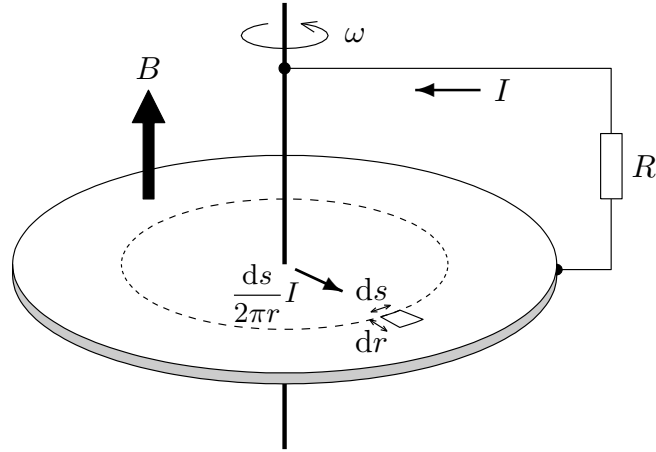


図 2.

モーメントの大きさをここではトルクと呼ぶ。円板の回転を一定に保つのに必要なトルクを求めよう。以下では円板や導線および中心軸の抵抗は無視できるものとし、円板上の電流は中心から周縁に向かって放射状に全方向に一様に流れるものとする。このとき中心から距離  $r$  の同心円周上の微小長さ  $ds$  の円弧を通して中心から縁に向かう電流は  $\frac{ds}{2\pi r} I$  である。

問 4 円板には回転軸に平行で上向きの磁場がかかっており、電流には磁気力が働く。円板上の微小面積  $ds dr$  の電流に作用する磁気力は同心円の接線に平行で回転の向きとは逆方向であり、その大きさは

$$\frac{IB}{2\pi r} ds dr \quad (2)$$

と表されることを、基本法則に基づいて説明せよ。

問 5 微小面積に作用する磁気力のトルクは

$$\frac{IB}{2\pi r} ds dr \times r = \frac{IB}{2\pi} ds dr \quad (3)$$

と表される。円板全体に作用するトルクは次式で表されることを示せ。

$$N = \frac{1}{2} IBa^2 \quad (4)$$

ヒント：式 (3) を  $s$  について半径  $r$  の同心円の 1 周にわたって積分し、次に  $r$  について積分するとよい。

このトルクは円板の回転を止めようとするので、円板の角速度を一定に保つためには、回転の向きに式 (4) で与えられるトルクを加えなければならない。

仮に円板の中心から距離  $r$  の点に、力  $F$  を半径  $r$  の同心円の接線方向に加えてトルク  $N = rF$  を与えるでしょう。この場合、力の方向は作用点の速度の方向に等しいので、単位時

間あたりに力がなす仕事 (仕事率)  $P$  は力と作用点の速さの積  $Fv$  である。 $v = \omega r$  であるから、次の関係が成り立つ。

$$P = Fv = Fr\omega = N\omega$$

トルクが多くの力による場合でも、トルクのなす仕事率は一般に  $N\omega$  と表される。

問 6 式 (1) で与えられる起電力  $\mathcal{E}$  が発生するとき、負荷抵抗  $R$  の回路を流れる電流は  $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$  である。このとき、円板の角速度を一定に保つために必要なトルクのなす仕事率  $N\omega$  を求めよ。一方、抵抗で消費される電力を計算し、それが  $N\omega$  に等しいこと (エネルギー保存則が成り立っていること) を確かめよ。

次に、一様な磁場中に置かれた導体円板の中心と周縁との間に、図 3 のようにスイッチ  $S$  と起電力  $V$  の電池を挿入する。先と同様に、円板、導線、中心軸の抵抗は無視できるとし、円板上の電流は周縁部から中心に向かって一様に流れるものとする。

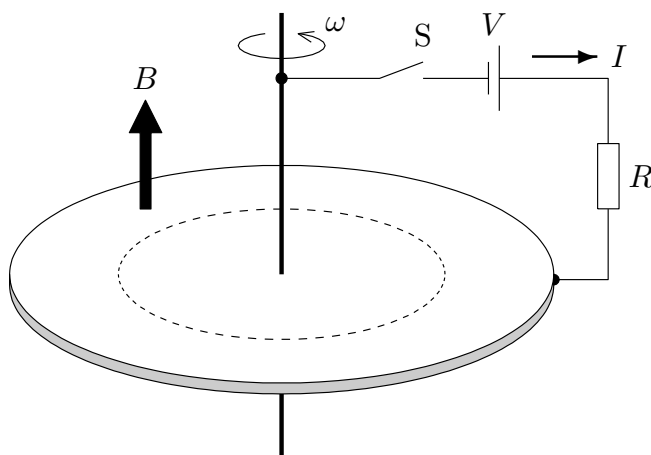


図 3.

はじめスイッチ  $S$  は “off” で、円板は静止しているとする。スイッチ  $S$  を “on” にすると、回路には電流  $I = \frac{V}{R}$  が流れ、円板を図 3 に示した向きに回転させようとするトルクが発生するが、円板には慣性があるので、スイッチを入れた瞬間にはまだ角速度は 0 である。このときの初期トルクの大きさ  $N_0$  は式 (4) を使って、次式で与えられる。

$$N_0 = \frac{1}{2} I B a^2 = \frac{V B a^2}{2R} \quad (5)$$

このトルクを受けて円板は回り始める。円板の角速度が  $\omega$  になったとき、式 (1) で与えられる誘導起電力  $\mathcal{E}$  が発生する。この起電力は、電池の起電力による電流とは逆方向に電流を流そうとする逆起電力であるので、回路を流れる電流は

$$I = \frac{V - \mathcal{E}}{R} \quad (6)$$

となり，円板を回転させるトルクは

$$N = \frac{1}{2}IBa^2 = \frac{V - \mathcal{E}}{2R} Ba^2 = N_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_m}\right) \quad (7)$$

となる。ただし  $\omega_m$  は

$$\omega_m = \frac{2V}{Ba^2} \quad (8)$$

である。

ここで剛体の回転運動を記述する運動方程式について，簡単な解説をしておこう。

まず，質量  $m$  の質点が，一平面上において定点  $O$  を中心とする半径  $r$  の円軌道を，軌道の接線方向の力  $F$  を受けて速さ  $v$  で運動しているとしよう (図 4 参照)。質点には向心力  $m \frac{v^2}{r}$  が作用しているが， $r$  は一定と考えているので，ここでは動径方向の運動は問題としない。質点の接線方向の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (9)$$

である。この式の両辺に  $r$  をかけて，質点の速度  $v$  と回転の角速度  $\omega$  との関係式  $v = r\omega$  を使うと式 (9) は

$$mr^2 \frac{d\omega}{dt} = rF \quad (10)$$

となる。ここで  $I_m = mr^2$  と  $N = rF$  を導入すると上式は

$$I_m \frac{d\omega}{dt} = N \quad (11)$$

と表される。

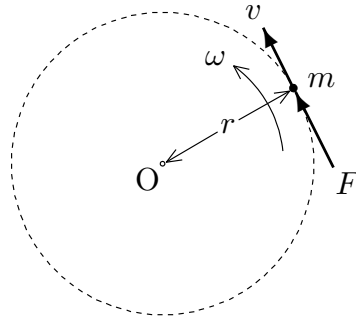


図 4.

剛体は多くの質点  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $n$  は総数) の集合と考えることができる。剛体が固定軸のまわりに回転している場合には，剛体を構成するすべての質点の角速度は等しいので，固定軸から各質点までの距離を  $r_i$  として  $I_m = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$  ととれば，式 (11) が適用できる。ただし各質点に接線方向の力  $F_i$  が作用する場合にはトルクは  $N = \sum_{i=1}^n r_i F_i$  である。

$I_m$  を慣性モーメントという (電流の  $I$  と混同しないように)。式 (11) は剛体の回転運動を記述する運動方程式である。

半径  $a$ 、質量  $M$  の一様な円板が、中心を通り円板面に垂直な軸のまわりに回転する場合に、その慣性モーメントは次の式で与えられることが計算される。

$$I_m = \frac{1}{2} M a^2 \quad (12)$$

回転している剛体の運動エネルギーについても考察しておこう。剛体が角速度  $\omega$  で回転運動しているとき、その運動エネルギーは、慣性モーメント  $I_m$  を使って

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} I_m \omega^2 \end{aligned} \quad (13)$$

と表される。

さて、図 3 の導体円板の慣性モーメントを  $I_m$  とすると、円板に作用しているトルクは式 (7) で与えられるので、円板の回転運動は次の式で記述される。

$$I_m \frac{d\omega}{dt} = N_0 \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_m} \right) \quad (14)$$

ただし円板の回転軸における摩擦や円板の周縁と電極との接触における摩擦等、回転運動に対する力学的な抵抗はないものとする。

問 7 運動方程式 (14) の解は、円板が回り始める瞬間を  $t = 0$  とすると、定数  $\tau$  (ギリシャ文字タウ) を使って

$$\omega(t) = \omega_m \left( 1 - e^{-t/\tau} \right) \quad (15)$$

と表される。定数  $\tau$  を  $I_m$ 、 $N_0$ 、 $\omega_m$  を用いて表せ。

したがって十分に時間が経つと角速度は一定の  $\omega_m$  となることがわかる。このような原理のモーターを単極モーターという。

円板の角速度が  $\omega$  のとき、回路を流れる電流  $I$  は式 (6) で与えられるから、電池が供給する電力  $P_B$  は

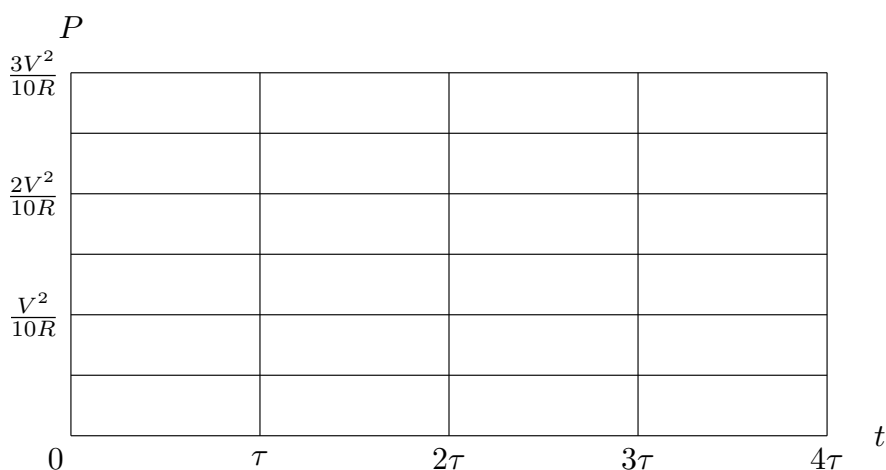
$$P_B = IV = \frac{V - \mathcal{E}}{R} V \quad (16)$$

と表される。

問 8 トルク  $N$  が単位時間あたりになす仕事 (仕事率)  $P$  は、先に述べたように  $P = N\omega$  である。 $P$  を  $\omega$  の関数として  $N_0$ 、 $\omega_m$  を使って表せ。

問 9 エネルギー保存則を考えると，電池が供給する電力  $P_B$  は，抵抗で消費される電力  $P_R$  と円板を回転させるトルクのなす仕事率  $P$  との和に等しいはずである。 $P_R$  と  $P$  を求め， $P_R + P = P_B$  が成り立っていることを確かめよ。

問 10 トルクのなす仕事率  $P$  を時間  $t$  の関数として， $V$ ， $R$  および  $\tau$  を使って表せ。また  $P$  の最大値を求めよ。次に解答用紙のマス目に，下図のように  $P$ ， $t$  の目盛りを記入し， $0 \leq t \leq 4\tau$  の範囲で  $P(t)$  のグラフの概形を描け。



問 11 円板が回転し始めてから一定の角速度  $\omega_m$  になるまでの間にトルクがなす仕事  $W \left( = \int_0^\infty P(t) dt \right)$  を計算せよ。力学の法則によれば，物体が受けた仕事は物体の運動エネルギーの増加に等しい。求めた仕事  $W$  が，慣性モーメント  $I_m$  の円板が角速度  $\omega_m$  で回転しているときの運動エネルギー  $\frac{1}{2} I_m \omega_m^2$  に等しいことを確かめよ。



## 第 4 問 (80 点)

### 光の粒子性とレーザー冷却

20 世紀に入り、物理学のいろいろな方面で古典論の限界が明らかになり、新たな物理理論の必要性が認識されるようになった。そのような状況下で登場したのが、光の速さに近い高速での運動や宇宙のような非常に大きな世界を考察する相対性理論と、原子レベルなどのミクロな世界を考察する量子論である。本問では、量子論の本質を明らかにする重要な実験の原理について考察する。

#### I 光子のエネルギーと運動量

光は干渉や回折という現象を引き起こすので、20 世紀初頭まで光は波動であると考えられてきた。ところが、アインシュタインは、光は波動という性質をもつだけでなく、振動数  $\nu$ 、波長  $\lambda$  の光は、真空中でエネルギー

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (1)$$

運動量

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (2)$$

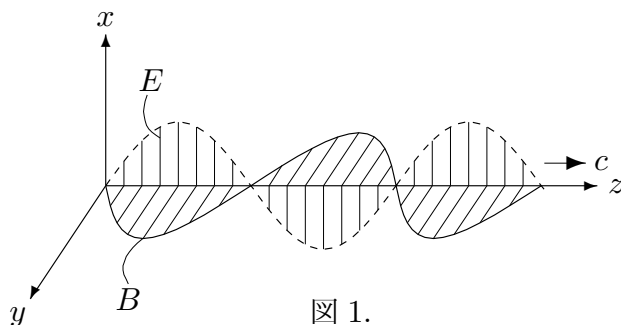
の粒子としての性質をもつと主張した。ここで、 $h$  はプランク定数、 $c$  は真空中での光速である。光子のエネルギーの式 (1) は、プランクによる量子仮説を基にして考えられ、これを用いて光電効果という現象をうまく説明できることが示された。一方、運動量の式 (2) は、古典的な電磁気学から、さらに相対性理論との整合性からも考えられ、後に、コンプトン効果という現象を説明するのに使われた。

ここでは、エネルギーの式 (1) を基に、電磁気学の性質を用いて運動量の式 (2) を導いてみよう。

電磁気学によれば、光は電磁波である。 $x$  方向に振動する電場  $E$  と  $y$  方向に同位相で振動する磁束密度  $B$  の波からなり  $z$  方向に速さ  $c$  で伝播する電磁波を考える (図 1)。このとき、 $E$  と  $B$  の間には、

$$E = cB \quad (3)$$

の関係が成り立つ。



問 1 図 2 のように，真空中で電気量  $q$  をもつ電荷が電磁波の電場から力を受けて  $x$  方向に速さ  $v$  で運動していたとする。微小時間  $\Delta t$  に電荷が  $x$  方向の電場  $E$  から受けとるエネルギー  $\Delta\varepsilon$  と  $y$  方向の磁束密度  $B$  から受けとる運動量  $\Delta p$  を求め， $\Delta\varepsilon$  と  $\Delta p$  の間に成り立つ関係式を，式 (3) を用いて求めよ。

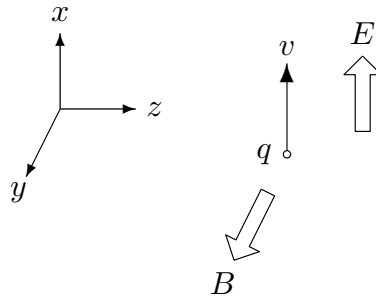


図 2.

問 1 の結果は，電磁波が電荷に与えるエネルギー  $\Delta\varepsilon$  と運動量  $\Delta p$  の比が一定であることを表している。そこで，電磁波のエネルギーが 0 のとき運動量も 0 であることを用いれば，電磁波のエネルギー  $\varepsilon$  とその運動量  $p$  の間に，関係式  $\varepsilon = cp$  の成り立つことがわかる。したがって，電磁波を光子の集合体とみなす限り，光子のエネルギーと運動量の間に式 (2) が成り立たなければならない。

問 2 図 3 のように，真空中から屈折率  $n (> 1)$  の透明な物質の滑らかな表面 ( $y$ - $z$  平面) に，光 (光子) が入射している。このとき，光子の表面に平行な運動量成分は保存する。真空中での光子の運動量の大きさを  $p$  とする。

(a) 屈折率  $n$  を用いて入射角  $\theta$  と屈折角  $\phi$  の間の関係式を導け。

(b) 透明な物質中での光子の運動量の  $x$  成分の大きさ  $p'_x$  を  $\theta, n, p$  で表せ。

[ヒント] 真空中で振動数  $\nu$ ，波長  $\lambda$  の光が屈折率  $n$  の透明物質中に入射すると，光の振動数  $\nu$  は変化せず，光速は  $\frac{c}{n}$ ，波長は  $\frac{\lambda}{n}$  になる。

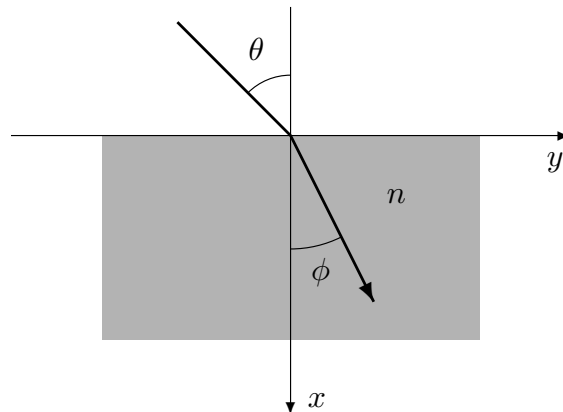


図 3.

## 光圧

日常の環境のもとでは光の運動量はきわめて小さく、その運動量は通常は無視される。しかし、長時間大きい面積に太陽光が当たる人工衛星は光の運動量の影響を受ける。このことを利用して、人工衛星の軌道制御等が行われている。

問3 2010年に打ち上げられた人工衛星イカロス (IKAROS) は、質量がおおよそ 300 kg で、一辺 14 m の正方形の帆をはり、太陽光を受けながら現在も宇宙を航行している。太陽光は帆に垂直にあたって完全反射するとして、100 時間太陽光の圧力を受け続けたときの速度変化を求めよ。太陽光が帆で完全反射すると、帆にあたった太陽光の運動量は、大きさを変えずに反転する。ただし、太陽光の強度 (単位時間あたり太陽光に垂直な単位面積を通過する太陽光のエネルギー) を  $1.0 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ 、真空中の光速を  $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$  とする。

## II 不確定性原理

量子論の中心的概念に、「不確定性原理」がある。不確定性原理は、はじめ、1925 年にハイゼンベルクによって提唱されたものであり、原子レベルのミクロな物体を考えるとき必要になる。不確定性原理は、ミクロな粒子の位置と運動量は、同時に決めることはできず、位置の  $x$  座標の不確かさ  $\Delta x$  と運動量の  $x$  成分  $p_x$  の不確かさ  $\Delta p_x$  の間には、

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \left( \hbar = \frac{h}{2\pi}, h \text{ はプランク定数} \right) \quad (4)$$

の関係が成り立つというものである。粒子の位置を正確に決めようとする ( $\Delta x$  を小さくする) と、運動量の不確かさ  $\Delta p_x$  が大きくなってしまい、逆に、運動量を正確に決めようとする ( $\Delta p_x$  を小さくする) と、位置の不確かさ  $\Delta x$  が大きくなってしまう。

### 粒子の波動性を用いた解釈

ド・ブロイは、アインシュタインが主張するように、波動が粒子性をもつならば、粒子と思われていたものも波動性をもつのではないかと考えて、運動量  $p$  の粒子は、波長

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (5)$$

の波動の性質をもつと考えた。このときの波長  $\lambda$  をド・ブロイ波長という。

図 4(a) のように、スリットに沿って  $x$  軸をとり、幅  $\Delta x$  のスリットに垂直に、運動量の大きさ  $p$  の粒子線をあてる。このとき、スリットを通過する粒子の位置の  $x$  座標には、スリット幅  $\Delta x$  だけの不確かさがある。

粒子線を波長  $\lambda = \frac{h}{p}$  の波動とみなすと、波動は回折を起こす。スリット幅  $\Delta x$  が波長  $\lambda$  より十分に広ければ、粒子線は直進してほとんど回折しないが、 $\Delta x$  が  $\lambda$  に近づくとつれて

回折が大きくなり粒子線の進行方向は広がる。スリットによる回折角 (スリット入射前の波の進行方向からの偏向角) を  $\theta$  とするとき、粒子線の強度分布は図 4(b) のようになる。以下、 $\theta \geq 0$  の範囲で考える。

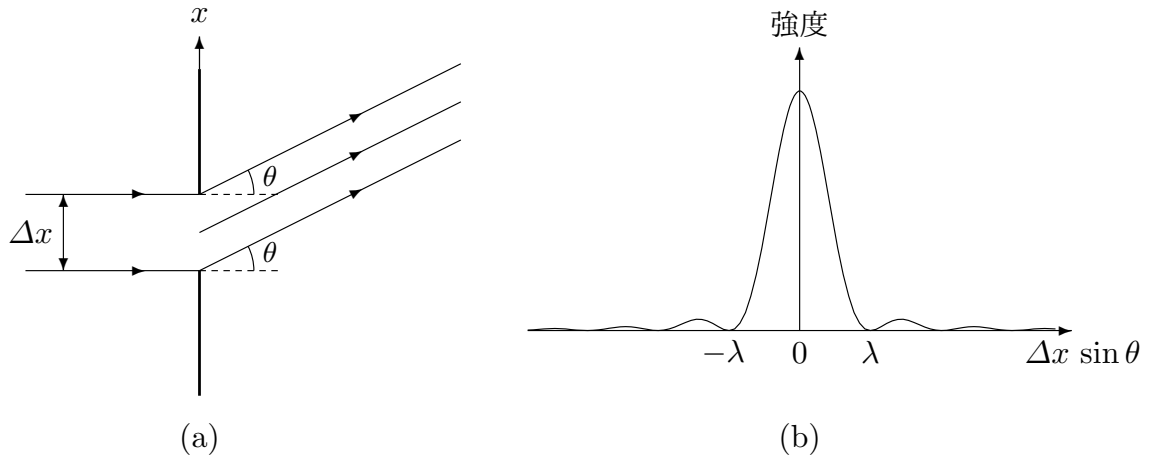


図 4.

問 4 回折角  $\theta$  が 0 から次第に増加すると、スリットから十分に遠いところで観測される粒子線の強度は減少し、

$$\Delta x \sin \theta_0 = \lambda \quad (6)$$

を満たす角  $\theta = \theta_0$  のところで強度がはじめて 0 になる。このことを粒子線の波動性より説明せよ。

図 4(b) と問 4 の結果より、回折角  $\theta > \theta_0$  の方向に進む粒子はほとんど存在せず、粒子は回折角  $\theta < \theta_0$  の範囲に進むことを示している。このとき、 $\theta_0$  は粒子線の回折角のほぼ上限値と考えられる。

問 5 幅  $\Delta x$  のスリットを通過し、回折角の上限値  $\theta_0$  の方向に進む粒子のもつ運動量の  $x$  成分を  $\Delta p_x$  とする。式 (5), (6) を用いて、関係式

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = h \quad (7)$$

が成り立つことを導け。

粒子線を幅  $\Delta x$  のスリットに垂直に入射させると、スリットを通過する瞬間、粒子の  $x$  座標には  $\Delta x$  だけの不確かさが残り、その結果、粒子の運動量の  $x$  成分には  $\Delta p_x$  だけの不確かさが生じる。これらの間に式 (7) の関係が成り立つ。したがって、スリットの幅  $\Delta x$  を狭くしてスリットを通過する粒子の  $x$  座標の不確かさを小さくすると、粒子のもつ運動量の  $x$  成分の不確かさが増加する。逆に、スリットを通過する粒子の運動量の  $x$  成分の不確かさを小さく

くするには、スリット幅  $\Delta x$  を大きくして粒子の  $x$  座標の不確かさを大きくしなければならない。このことを量子力学を用いて求めると、対応する不確かさ  $\Delta x, \Delta p_x$  の間に不確定性関係 (4) が導かれる。

不確定性関係は、時間とエネルギーについても同様に成り立つことが知られている。ある時刻  $t$  における粒子のエネルギーを  $E$  とすると、時刻の不確かさ  $\Delta t$  とエネルギーの不確かさ  $\Delta E$  の間に、

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

の関係が成り立つ。

量子力学では、一般に粒子の位置と運動量の間、および、時刻とエネルギーの間に不確定性関係が成り立つため、しばしばこれを原理と考えて、**不確定性原理**と呼ぶ。

### III ボース粒子とフェルミ粒子

量子論では不確定性原理により、ミクロな粒子がどのような位置に見出されるかは、確率的に決められるだけである。粒子の状態は、量子力学的な波動関数 (一般的には複素数)  $\psi(x)$  で与えられ、粒子が位置  $x$  に見出される確率 (密度) は  $|\psi(x)|^2$  (実数) で表される。

図 5(a), (b) のように、ミクロな同種の粒子 A と B が衝突する場合を考えてみよう。衝突により (a) のように 2 つの粒子が互いに入れ替わらないか、(b) のように互いに入れ替わるかは、通常の古典的な粒子であれば、衝突過程をよく見ていればわかるはずであるが、不確定性原理の成り立つ量子論ではそうはいかない。衝突の瞬間、2 つの粒子は重なってしまい、粒子 A が左側にいる (a) か、右側にいる (b) か、区別できなくなる。

“量子論では同種粒子は区別できず、それらを入れ替えても物理的状态は等しい。”

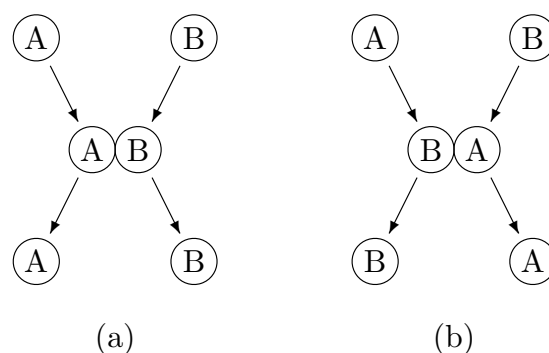


図 5.

位置  $x_1$  と  $x_2$  をとり、それぞれに同種粒子 A あるいは B が入る場合を考える。粒子 A と B を入れ替えても物理的状态が等しいということから、A が  $x_1$  におり B が  $x_2$  にいる確率と B が  $x_1$  におり A が  $x_2$  にいる確率は等しくなければならない。A が位置  $x_1$  に入り、B が位置  $x_2$  に入ったときの波動関数を  $\psi(x_1, x_2)$ , A が  $x_2$  に入り、B が  $x_1$  に入ったときの

波動関数を  $\psi(x_2, x_1)$  と表すと,

$$|\psi(x_1, x_2)|^2 = |\psi(x_2, x_1)|^2 \quad \therefore \psi(x_1, x_2) = \pm \psi(x_2, x_1) \quad (8)$$

となる\*1。そこで、粒子を入れ替えても波動関数の符号が変化しない (式 (8) で+符号をもつ) 粒子をボース粒子, 符号の変化する粒子をフェルミ粒子と呼ぶ。

問 6 ボース粒子どうしであれば粒子 A と B は同じ位置  $x$  に入ることができ, フェルミ粒子どうしでは同じ位置  $x$  に入ることとはできないことを, 式 (8) を用いて示せ。このフェルミ粒子の性質をパウリの排他律という。

一般に, 偶数個のフェルミ粒子からなる複合粒子はボース粒子となり, 奇数個のフェルミ粒子からなる複合粒子はフェルミ粒子となる。

原子核は陽子と中性子からなり, 陽子も中性子もフェルミ粒子である。また, 電子もフェルミ粒子である。中性の原子を考えると, 陽子の数と電子の数は等しいので, 中性子の数が偶数であるか, 奇数であるかによってその原子がボース粒子であるかフェルミ粒子であるかが決まる。したがって, 例えば, 中性子 2 個の中性のヘリウム 4 ( $^4\text{He}$ ) はボース粒子であり, 中性子が 1 個の中性のヘリウム 3 ( $^3\text{He}$ ) はフェルミ粒子である。また, 中性のナトリウム 23 ( $^{23}\text{Na}$ ) は, 中性子が 12 個でありボース粒子である。

相互作用していないボース粒子の系は理想ボース気体とよばれ, 温度を下げていくと絶対零度に達する前にマクロな数の粒子が同じ最低エネルギー状態に落ち込んでしまう。この現象をボース-アインシュタイン (BE) 凝縮という。BE 凝縮を起こす現象としては, 以前より, 超伝導現象 (金属の電気抵抗が 0 になる現象) と液体ヘリウムの超流動現象 (液体の粘性が 0 になる現象) が知られていたが, これらの物質では, 粒子間隔が狭く, 粒子間の相互作用が大きい。そのため, 理想ボース気体の BE 凝縮とみなすことは難しい。

以下では, 次の物理定数は自由に使ってよい。

真空中の光速:  $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$

プランク定数:  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

ボルツマン定数:  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

統一原子質量単位:  $m_u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Na 原子の質量:  $m = 23m_u$

#### IV 中性原子のレーザー冷却

液体あるいは固体では, 原子間隔が狭いため原子間の相互作用が大きく, 一般に, 粒子自身の量子効果を観測することは難しい。そこで, 原子間隔の大きな中性原子 (ボース粒子) の気

---

\*1 入れ替えを 2 回行えば元に戻るはずであるから,  $0, \pi$  以外の波動関数の位相の違いを考える必要はない。

体を極低温にまで冷却し、原子のド・ブロイ波長を平均原子間隔  $d$  程度に大きくすれば、原子は古典的な質点とみなすことができなくなり、量子効果が顕わに現れるであろう。そのとき、原子気体は理想的なボース気体となり、BE 凝縮が理想的な形で発現すると考えられる。

そこでここでは簡単に、BE 凝縮発現条件は、原子数密度を  $n$ 、原子の熱ド・ブロイ波長 (原子の熱運動によるド・ブロイ波長) を  $\lambda$  として、

$$n\lambda^3 \geq 1 \quad (9)$$

と表されると仮定する。

近年、レーザー光を用いて原子気体を極低温に冷却して制御することが可能になり、それにより BE 凝縮の研究が大きく発展し、それらの研究に対して、いくつかのノーベル物理学賞が与えられた。以下では、熱運動している中性原子気体にレーザー光を当てることにより、どこまで原子気体を冷却することができるかを考える。

原子数密度  $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$  で質量数 23 の  $^{23}_{11}\text{Na}$  の中性原子気体を考える。

問 7 (a) 原子気体の平均粒子間隔  $d$ 、すなわち、BE 凝縮を起こすド・ブロイ波長の臨界値  $\lambda_c$  を、有効数字 1 桁で概算せよ。

(b) 原子気体を理想気体と考えて、その平均運動エネルギーをもつ原子のド・ブロイ波長が条件 (9) を満たすとして、臨界 (絶対) 温度  $T_c$  を有効数字 1 桁で求めよ。

厳密な計算によれば、臨界温度  $T_c$  は、ここで求めた値より数分の 1 倍程度に小さくなることが知られている。

## V 2 準位原子にレーザー光を当てる

Na 原子をエネルギー  $E_1$  の基底状態とエネルギー  $E_2$  の励起状態の 2 準位をもつ質量  $m$  の原子と見なすことにしよう。Na 原子が速さ  $v$  で等速直線運動しているとき、運動に沿って両側から、図 6 のようにレーザー光線を当てる。本問では相対論を考慮する必要はない。また、以下の問には、プランク定数を  $h$  として  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  を用いて答えよ。

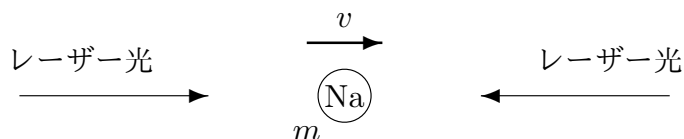


図 6.

以下では、

$$\hbar\omega_0 = E_2 - E_1 = 2.11 \text{ eV} \quad (1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J})$$

とする。

問 8 速さ  $v$  で直線運動している基底状態の Na 原子が原子の進行方向と逆向きに原子の右側から照射する角振動数  $\omega_R$  のレーザー光を吸収して励起状態に遷移するとき、原子と光子の系のエネルギー保存則と運動量保存則を書き下せ。その上で、照射するレーザー光の角振動数  $\omega_R$  と原子の運動エネルギーの変化  $\Delta E_{\text{abs}}$  を、 $\omega_0, \hbar, c, v$  の中から必要な文字を用いてそれぞれ求めよ。その際、

$$\frac{\hbar\omega_0}{2mc^2} \ll \frac{v}{c} \ll 1$$

であるとして、 $\omega_R$  と  $\Delta E_{\text{abs}}$  を、 $\frac{v}{c}$  の 1 次の項までの近似式で表せ。

原子の左側からレーザー光を照射した場合、原子が吸収する光の角振動数  $\omega_L$  は  $\omega_0$  より大きくなる。実際には、原子は右向きに動いているか、左向きに動いているかわからないが、原子の両側から  $\omega_0$  より小さな角振動数  $\omega_R$  のレーザー光を原子の両側から照射すれば、原子の進行方向と逆向きのレーザー光のみを吸収し、原子の運動エネルギーは減少する。その結果、原子気体の温度が低下する (冷却される)。

問 9 図 7 のように、速さ  $v_1$  で直線運動している励起状態の Na 原子が、原子の進行方向と角  $\theta$  をなす向きに光を放出するとき、放出する光の角振動数  $\omega$  を、前問 8 と同様の近似をして  $\theta, \omega_0, c, v_1$  を用いて求めよ。また、光子の放出方向はランダムである ( $\overline{\cos \theta} = 0$ ) ことを考慮するとき、光子放出時の Na 原子の運動エネルギー変化の放出方向に関する平均値  $\overline{\Delta E_{\text{emi}}}$  を、 $\omega, c, \hbar, m$  を用いて求めよ。  
光子放出時、反跳の運動量  $\frac{\hbar\omega}{c}$  を受けて運動エネルギーの平均値は  $\overline{\Delta E_{\text{emi}}}$  だけ増加し、原子気体の温度が上昇する (加熱される)。

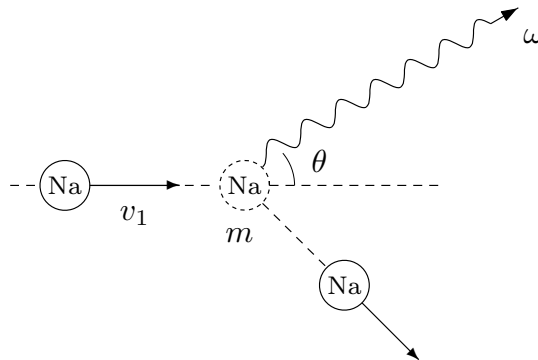


図 7.



問 10 Na 原子の平均運動エネルギーが、前問 9 で求めた  $\overline{\Delta E_{\text{emi}}}$  と同程度になると、原子気体のこれ以上の冷却が望めなくなる。放出する光の振動数  $\omega$  を  $\omega_0$  と近似して、このときの原子気体を理想気体と考えて、原子の平均運動エネルギーを与える気体の温度  $T_0$  を有効数字 2 桁で求めよ。

$T_0 < T_c$  であるから、問 10 で求めた温度まで気体を冷却することができれば、Na 原子気体で BE 凝縮を発現させることができる。

## VI Na 原子の冷却限界

一般に励起状態には、励起状態の寿命 (あるエネルギー値をとる時間の不確かさ) と不確定性関係で結びついたエネルギーの不確かさがあり、これを励起状態のエネルギー準位の自然幅という。

問 10 で求めた冷却温度  $T_0$  は、励起状態の自然幅を無視できるときである。実際には、エネルギー準位には、自然幅があり、通常のレーザー光を用いた冷却法では温度を  $T_0$  まで冷却することはできない。励起状態のエネルギーに  $\Delta E$  の幅があるとする。そのとき、原子の運動エネルギーが  $\Delta E$  程度に小さくなると、原子が光子を吸収する際の温度低下と光子を放出する際の温度上昇がバランスし、それ以上の冷却が起きなくなる。

ここでは、Na 原子の励起状態の自然幅を、

$$\Delta E = 1.72 \times 10^{-8} \text{ eV}$$

とする。

問 11 エネルギー準位の自然幅  $\Delta E$  のエネルギーが原子の運動エネルギーとして残るとして、通常の冷却法で得られる原子気体の限界温度  $T_d$  を、原子気体を理想気体とみなして有効数字 2 桁で求めよ。

現在では、温度を  $T_d$  より、さらに  $T_c$  より低温に冷却する方法が考案され、実際に BE 凝縮状態が実現され観測されている。

