金石为开2020年暑假物理刷题班模拟一参考答案

T1-解答

（1） 求烟囱绕底部轴的转动惯量

$$I_0=\int_0^h\left(\frac{R^2+r^2}{4}+x^2\right)\frac{m}{h}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}m\left(R^2+r^2\right)+\frac{1}{3}mh^2 \quad (1.1)$$

在切向方向我们只需要求出烟囱的角加速度就可以求出切向力

由角动量定理

$$I_0\ddot{\theta}=\frac{h}{2}mg\sin\theta \quad (1.2)$$

得到

$$\ddot{\theta}=\frac{6gh\sin\theta}{3(R^2+r^2)+4h^2} \quad (1.3)$$

对于从 x 到末端的一段烟囱

有

$$T(x)+\left(1-\frac{x}{h}\right)mg\sin\theta=\left(1-\frac{x}{h}\right)m\frac{h+x}{2}\ddot{\theta} \quad (1.4)$$

于是得到

$$T(x)=mg\sin\theta\left(1-\frac{x}{h}\right)\left[\frac{3h(h+x)}{3\left(R^2+r^2\right)+4h^2}-1\right] \quad (1.5)$$

正方向与烟囱倒向的方向相同

评分：每式 2 分

（2） 作用在从 x 到末端这段烟囱上的力矩（相对于质心）有

切向力的力矩、连接处的扭力矩

带来的效果是加速转动

于是根据角动量定理

$$M(x)-T(x)\frac{h-x}{2}=I(x)\ddot{\theta} \quad (2.1)$$

其中 $I(x)$ 是上面一段从 x 到末端的烟囱相对于其质心的转动惯量，根据比例计算我们可以得到

$$I(x)=\left(1-\frac{x}{h}\right)\cdot\frac{1}{4}m(R^2+r^2)+\frac{1}{12}(1-\frac{x}{h})m(h-x)^2 \quad (2.2)$$

有

$$I(x)=(1-\frac{x}{h})(\frac{1}{4}m\left(R^2+r^2\right)+\frac{1}{12}m(h-x)^2)$$ * MERGEFORMAT (2.3)

最后得到

$$M(x)=\frac{1}{2}mg\sin\theta(1-\frac{x}{h})x\frac{2h^2-2hx+3(R^2+r^2)}{4h^2+3(R^2+r^2)}$$ * MERGEFORMAT (2.4)

接下来计算曲率半径

由于杨氏模量

$$E=\frac{\frac{dF}{dS}}{\frac{dl}{dx}}$$ * MERGEFORMAT (2.5)

且根据几何关系

$$dl=yd\theta=y\frac{dx}{\rho(x)}$$ * MERGEFORMAT (2.6)

于是

$$M(x)=\int y\mathrm{d}F=\frac{E}{\rho(x)}\int y^2\mathrm{d}S=\frac{\pi E}{4\rho(x)}\left(R^4-r^4\right)$$ * MERGEFORMAT (2.7)

解得

$$\rho(x)=\frac{\pi E(R^4-r^4)}{2mg(1-\frac{x}{h})x\sin\theta}\frac{3(R^2+r^2)+4h^2}{2h^2-2hx+3(R^2+r^2)}$$ * MERGEFORMAT (2.8)

评分：每式 2 分

（3） 记

$$\alpha=\frac{x}{h}$$ * MERGEFORMAT (3.1)

于是有

$$M(x)=\frac{1}{2}mgh\sin\theta(1-\alpha)\alpha\frac{2h^2(1-\alpha)+3(R^2+r^2)}{4h^2+3(R^2+r^2)}$$ * MERGEFORMAT (3.2)

转化为求

$$f(\alpha)=(1-\alpha)\alpha(1-\alpha+k)$$ * MERGEFORMAT (3.3)

的极大值

其中

$$k=\frac{3(R^2+r^2)}{2h^2} \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.4)}$$

令

$$\begin{aligned}f'(\alpha)&=\frac{d}{d\alpha}(\alpha(\alpha-1)(\alpha-(k+1)))\\&=(\alpha-1)(\alpha-(k+1))+\alpha(\alpha-(k+1))+\alpha(\alpha-1)\\&=3\alpha^2-(2k+4)\alpha+(k+1)=0\end{aligned} \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.5)}$$

于是有

$$\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{2+k-\sqrt{k^2+k+1}}{3}\\ \alpha_2=\dfrac{2+k+\sqrt{k^2+k+1}}{3}>1\end{cases} \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.6)}$$

舍去第二根，解得

$$\alpha=\frac{2+k-\sqrt{k^2+k+1}}{3},\quad k=\frac{3(R^2+r^2)}{2h^2} \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.7)}$$

为最先折断的点（也可以验证一下二阶导小于 0，确为极大值）

当 k 为 0 时，回到我们熟悉的结论（杆子在 1/3 处最容易折断）

评分：每式 2 分

T2-解答

（1） 这一小问其实就是导出泊肃叶公式

取一个半径为 r，与管道同轴的一段圆柱形液体，质心加速度为零，水平方向朝右的压力差应该与 r 柱面外液体通过 r 柱面施加的朝左的粘性力平衡

于是有

$$\Delta p\cdot\pi r^2\ \Delta p\cdot\pi r^2=-\eta\cdot 2\pi r\Delta L\cdot\frac{dv}{dr} \text{* MERGEFORMAT (1.1)}$$

由于边界条件

$$v(R)=0 \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.2)}$$

得到

$$v(r)=\frac{\Delta p}{4\eta\Delta L}(R^2-r^2) \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.3)}$$

为了后面计算方便，记

$$k=\frac{\Delta p}{4\eta\Delta L} \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.4)}$$

流量

$$\begin{aligned}Q&=\int_0^R 2\pi rdr\cdot v(r)=2\pi k\int_0^R r(R^2-r^2)dr\\&=2\pi\frac{\Delta p}{4\eta\Delta L}\cdot(\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4})\\&=\frac{\pi\Delta pR^4}{8\eta\Delta L}\end{aligned} \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.5)}$$

显然，增加管的半径对增加流量更加有效

评分：每式 4 分，4 分，结论 2 分

(2) 同样还是取一半径为 r，长度为 L 的与管道同轴的一段圆柱形液体，先求稳态时这段液体中带电粒子所产生的电场与磁场

这段液体所带总电荷量为

$$Q(r)=\int_0^r n(r)2\pi rdrqL \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.1)}$$

高斯定理

$$E(r)\cdot 2\pi rL=\frac{Q(r)}{\varepsilon_0} \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.2)}$$

于是有

$$E(r)=\frac{q}{\varepsilon_0 r}\int_0^r n(r)rdr \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.3)}$$

计算电流

$$\begin{aligned}I(r)&=\int_0^r n(r)qv(r)2\pi rdr\\&=2\pi kq\int_0^r n(r)r(R^2-r^2)dr\end{aligned} \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.4)}$$

根据安培环路定理

$$B\cdot 2\pi r=\mu_0 I \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.5)}$$

于是有

$$B=\frac{\mu_0 kq}{r}\int_0^r n(r)r(R^2-r^2)dr \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.6)}$$

在沿管道轴线方向，磁场力和电场力均为 0

在沿径向方向

$$q(E-v(r)B)=0 \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.7)}$$

于是得到

$$\frac{q}{\varepsilon_0 r}\int_0^r n(r)rdr-k(R^2-r^2)\cdot\frac{\mu_0 kq}{r}\int_0^r n(r)r(R^2-r^2)dr=0 \quad (2.8)$$

化简得

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0 k^2}\int_0^r n(r)rdr-(R^2-r^2)\int_0^r n(r)r(R^2-r^2)dr=0 \quad (2.9)$$

对积分式进行求导

$$\frac{n(r)}{\mu_0\varepsilon_0 k^2}-(R^2-r^2)^2 n(r)+2\int_0^r n(r)r(R^2-r^2)dr=0 \quad (2.10)$$

发现还有一个积分号

于是继续求导

$$\left(\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0 k^2}-(R^2-r^2)^2\right)\frac{dn}{dr}+6nr(R^2-r^2)=0 \quad (2.11)$$

分离变量并且换元

$$\frac{dn}{n}+\frac{3}{2}\frac{d\left(\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0 k^2}-(R^2-r^2)^2\right)}{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0 k^2}-(R^2-r^2)^2}=0 \quad (2.12)$$

两边积分，代入边界条件

以及

$$\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}=c^2 \quad (2.13)$$

得到

$$n(r)=n_0\left(\frac{c^2-k^2(R^2-r^2)^2}{c^2-k^2R^4}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.14)$$

评分：除、每式 2 分

T3-解答

（1） 双孔的随机运动，将导致固定场点 P 的相位差的不稳定，相应地就会引起 P 点相干强度的不稳定由于观测时间远大于双孔颤动的周期，从统计的眼光来看，可以把时间上的平均转化为空间上的平均（可以想象视觉暂留效果），可以在空间上引入双孔密度分布函数 $f(\Delta)$

假设总共有 N **对**双孔，则

$$dN = Nf(\Delta)d\Delta \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.1)}$$

且有归一化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta)d\Delta = 1 \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.2)}$$

每个双孔上的光强

$$i_0 = \frac{I_0}{N} \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.3)}$$

每对双孔在屏幕上产生的光强为

$$dI = 2i_0(1+\cos\Delta\phi) \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.4)}$$

其中 $\Delta\phi$ 为相位差

$$\Delta\phi = (d_0+\Delta)\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x}{D} \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.5)}$$

记

$$\phi_0 = \frac{2\pi x}{D\lambda}d_0 \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.6)}$$

则总光强为非相干叠加

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dI = 2i_0N\int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta)(1+\cos(\phi_0+\frac{2\pi x}{D\lambda}\Delta))d\Delta \\ &= 2i_0N\int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta)d\Delta + 2i_0N\int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta)\cos(\phi_0+\frac{2\pi x}{D\lambda}\Delta)d\Delta \end{aligned} \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.7)}$$

利用、化简得

$$I(x) = 2I_0(1+\cos\phi_0\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\frac{2\pi x}{D\lambda}\Delta)f(\Delta)d\Delta - \sin\phi_0\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\frac{2\pi x}{D\lambda}\Delta)f(\Delta)d\Delta)$$

* MERGEFORMAT (1.8)

由于 $f(\Delta)$ 为偶函数，后一个积分为 0

得到

$$I(x) = 2I_0(1+\cos\phi_0\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\frac{2\pi x}{D\lambda}\Delta)f(\Delta)d\Delta) \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.9)}$$

由于衬比度的定义可以得到

$$\gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\frac{2\pi x}{D\lambda}\Delta)f(\Delta)d\Delta \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.10)}$$

因为 $\cos\phi_0$ 是一个迅变函数

对于方垒型有

$$\gamma(x)=\int_{-\frac{\Delta_0}{2}}^{+\frac{\Delta_0}{2}}\cos(\frac{2\pi x}{D\lambda}\Delta)\frac{1}{\Delta_0}d\Delta$$
$$=\int_{-\frac{\pi\Delta_0 x}{D\lambda}}^{+\frac{\pi\Delta_0 x}{D\lambda}}\cos(\frac{2\pi x}{D\lambda}\Delta)\frac{1}{\Delta_0}d(\frac{2\pi x}{D\lambda}\Delta)\frac{D\lambda}{2\pi x}$$ * MERGEFORMAT (1.11)
$$=\frac{\sin(\frac{\pi\Delta_0 x}{D\lambda})}{\frac{\pi\Delta_0 x}{D\lambda}}$$

评分：每式 2 分

(2) 对于高斯型分布

$$f(\Delta)=Ce^{-\alpha\Delta^2}$$ * MERGEFORMAT (2.1)

由归一化条件得到

$$C=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$ * MERGEFORMAT (2.2)

具体计算

$$\gamma(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\frac{2\pi x}{D\lambda}\Delta)f(\Delta)d\Delta$$
$$=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\frac{2\pi x}{D\lambda}\Delta)\cdot e^{-\alpha\Delta^2}d\Delta$$ * MERGEFORMAT (2.3)

同样换元

$$u=\frac{2\pi x}{D\lambda}\Delta$$ * MERGEFORMAT (2.4)

有

$$\gamma(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\frac{2\pi x}{D\lambda}\Delta)\cdot e^{-\alpha\Delta^2}d\Delta$$
$$=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos u\cdot e^{-\alpha\cdot\frac{D^2\lambda^2}{4\pi^2x^2}u^2}\cdot\frac{D\lambda}{2\pi x}du$$ * MERGEFORMAT (2.5)
$$=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{D\lambda}{2\pi x}\cdot 2\int_0^{+\infty}\cos u\cdot e^{-ku^2}du\quad(k=\alpha\cdot\frac{D^2\lambda^2}{4\pi^2x^2})$$

计算积分

由

$$\cos u=\frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}$$ * MERGEFORMAT (2.6)

得到

$$\int_0^{+\infty}\cos u\cdot e^{-ku^2}du=\frac{1}{2}(\int_0^{\infty}e^{-k(u^2-\frac{i}{k}u)}du+\int_0^{\infty}e^{-k(u^2+\frac{i}{k}u)}du) \quad (2.7)$$

设

$$\frac{i}{k}=2\beta \quad (2.8)$$

有

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\cos u\cdot e^{-ku^2}du\\&=\frac{1}{2}(\int_0^{\infty}e^{-k(u^2-\frac{i}{k}u)}du+\int_0^{\infty}e^{-k(u^2+\frac{i}{k}u)}du)\\&=\frac{1}{2}(\int_{-\beta}^{\infty}e^{-k((u-\beta)^2-\beta^2)}d(u-\beta)+\int_{\beta}^{\infty}e^{-k((u+\beta)^2-\beta^2)}d(u+\beta))\\&=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4k}}(\int_0^{\infty}e^{-kx^2}dx+\int_{-\beta}^{0}e^{-kx^2}dx+\int_0^{\infty}e^{-kx^2}dx-\int_0^{\beta}e^{-kx^2}dx)\end{aligned} \quad (2.9)$$

由于偶函数，第 2、4 项消去

最后得到

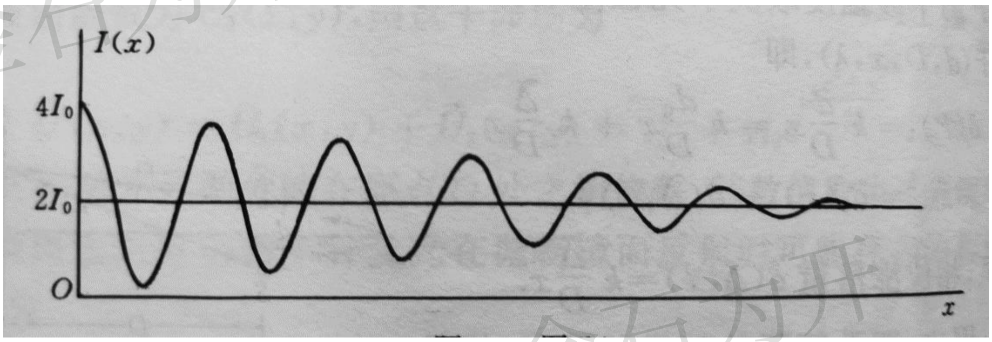
$$\int_0^{+\infty}\cos u\cdot e^{-ku^2}du=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4k}}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \quad (2.10)$$

得到

$$\gamma(x)=e^{-\frac{\pi^2x^2}{\alpha D^2\lambda^2}} \quad (2.11)$$

也是高斯型分布

评分：除、每式 5 分外，其余每式 2 分



T4-解答

（1） 求布儒斯特角

由题意

$$\tilde{r}_P=\frac{n_2\cos i_1-n_1\cos i_2}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}=0 \quad (1.1)$$

于是有

$$n_2\cos i_1 - n_1\cos i_2 = 0$$ * MERGEFORMAT (1.2)

又因为

$$n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2$$ * MERGEFORMAT (1.3)

得到

$$\cos^2 i_1 = \frac{1-(\frac{n_1}{n_2})^2}{(\frac{n_2}{n_1})^2-(\frac{n_1}{n_2})^2}$$ * MERGEFORMAT (1.4)

以及

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$$ * MERGEFORMAT (1.5)

评分：每式 2 分

（2） 8 块玻璃有 16 个空气-玻璃界面

根据偏振度的定义

$$p=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m}=\frac{I_p-I_s}{I_p+I_s}=\frac{1-\frac{I_s}{I_p}}{1+\frac{I_s}{I_p}}$$ * MERGEFORMAT (2.1)

于是我们需要计算出射的 s 光和 p 光的光强之比

对于第一次折射（空气-玻璃）

由于

$$\cos i_1=\sin i_2=\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}},\sin i_1=\cos i_2=\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}$$ * MERGEFORMAT (2.2)

得到

$$\begin{cases}\tilde{t}_P=\frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}=\frac{n_1}{n_2}\\ \tilde{t}_S=\frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}=\frac{2n_1^2}{n_1^2+n_2^2}\end{cases}$$ * MERGEFORMAT (2.3)

得到

$$\frac{I_{s1}}{I_{p1}}=\frac{I_s}{I_p}{\frac{\tilde{t}_S}{\tilde{t}_p}}^2={\frac{2n_1n_2}{n_1^2+n_2^2}}^2$$ * MERGEFORMAT (2.4)

第二次折射（玻璃-空气），即下标 1、2 互换

$$\begin{cases} \widetilde{t_P}' = \dfrac{2n_2\cos i_2}{n_1\cos i_2 + n_2\cos i_1} = \dfrac{n_2}{n_1} \\ \widetilde{t_S}' = \dfrac{2n_2\cos i_2}{n_2\cos i_2 + n_1\cos i_1} = \dfrac{2n_2^{\ 2}}{n_1^{\ 2}+n_2^{\ 2}} \end{cases}$$ * MERGEFORMAT (2.5)

于是

$$\frac{I_{s2}}{I_{p2}} = \frac{I_{s1}}{I_{p1}}\left(\frac{\widetilde{t_S}'}{\widetilde{t_p}'}\right)^2 = \left(\frac{2n_1n_2}{n_1^{\ 2}+n_2^{\ 2}}\right)^4$$ * MERGEFORMAT (2.6)

这样递推有

$$\frac{I_s'}{I_p'} = \left(\frac{2n_1n_2}{n_1^{\ 2}+n_2^{\ 2}}\right)^{32} = 0.0772$$ * MERGEFORMAT (2.7)

于是偏振度为

$$p = 0.857$$ * MERGEFORMAT (2.8)

可见偏振度还是比较高的，尽管不是理想的偏振光

优点：分束偏振器不需要吸收和耗散另一个偏振态的能量，因此它们更适合与高强度光束（例如激光）一起使用。例如在实验室中见到的普通偏振片（在透明赛璐璐基片上蒸镀一层某种硫酸碘奎宁晶粒制成）无法承受高强度的光束

评分：每式 2 分，答案 3 分，优点 3 分

T5-解答

（1） 浮力

$$F = \frac{4}{3}\pi R_0^{\ 3}\rho_a g$$ * MERGEFORMAT (1.1)

重力

$$G = (\frac{4}{3}\pi R_0^{\ 3}\rho_i + 4\pi R_0^{\ 2}t\rho_s)g$$ * MERGEFORMAT (1.2)

于是有

$$\rho_a - \rho_i = \frac{3t}{R_0}\rho_s$$ * MERGEFORMAT (1.3)

由于

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{p_i}{p_a} = \frac{p_a + \dfrac{4\gamma}{R_0}}{p_a} = 1 + \frac{4\gamma}{R_0 p_a}$$ * MERGEFORMAT (1.4)

于是有

$$T_i = T_a \frac{1+\frac{4\gamma}{R_0 p_a}}{1-\frac{3t}{R_0}\frac{\rho_s}{\rho_a}} \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.5)}$$

代入数值
得到

$$T_i = 307.1K \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.6)}$$

评分：除最后一式 2 分，每式 3 分

（2） 这里

$$6\pi\eta R_0 u = G - F \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.1)}$$

于是有

$$u = \frac{4\pi R_0^2 t\rho_s g + \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_a (\frac{\rho_i}{\rho_a}-1)g}{6\pi\eta R_0} \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.2)}$$

由于现在温度相同

$$\frac{\rho_i}{\rho_a} = \frac{p_i}{p_a} = \frac{p_a + \frac{4\gamma}{R_0}}{p_a} = 1 + \frac{4\gamma}{R_0 p_a} \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.3)}$$

化简得

$$u = \frac{2R_0 t\rho_s g}{3\eta} + \frac{8R_0\rho_a \gamma g}{9\eta p_a} \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.4)}$$

代入数值

$$u = 0.364m/s \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.5)}$$

评分：每式 3 分

（3） 静电压强

$$p_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2})^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R_1^4} \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.1)}$$

内部气体压强

$$p_i' = (p_a + \frac{4\gamma}{R_0})\frac{R_0^3}{R_1^3} \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.2)}$$

现在有压强平衡

$$p_i'+p_e=p_a \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.3)}$$

于是

$$(p_a+\frac{4\gamma}{R_0})\frac{R_0^{\ 3}}{R_1^{\ 3}}+\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R_1^{\ 4}}=p_a \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.4)}$$

为所求方程

评分：每式 2 分

(4) 设改变量ΔR

有

$$p_a\frac{3\Delta R}{R_0}=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R_0^{\ 4}} \qquad \text{* MERGEFORMAT (4.1)}$$

于是

$$\Delta R=\frac{q^2}{96\pi^2\varepsilon_0 R_0^{\ 4}p_a}R_0 \qquad \text{* MERGEFORMAT (4.2)}$$

现在有

$$\frac{4}{3}\pi(R_0+\Delta R)^3\rho_a g=4\pi R_0^{\ 2}t\rho_s g+\frac{4}{3}\pi R_0^{\ 3}\rho_a g \qquad \text{* MERGEFORMAT (4.3)}$$

得到

$$\rho_a\Delta R=\rho_s t \qquad \text{* MERGEFORMAT (4.4)}$$

于是

$$q=\sqrt{\frac{96\varepsilon_0\pi^2R_0^{\ 3}\rho_s t p_a}{\rho_a}}=2.56*10^{-7}C \qquad \text{* MERGEFORMAT (4.5)}$$

评分：每式 2 分

T6-解答

(1) 显然有

$$x=\beta_0 ct \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.1)}$$

以及

$$y=\frac{1}{2}\frac{F}{m_0}t^2 \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.2)}$$

于是

$$y=\frac{F_0x^2}{2m_0\beta_0{}^2c^2} \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.3)}$$

评分：每式 2 分

(2) 设合速度

$$v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2}=\beta c \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.1)}$$

有 y 方向动量

$$\frac{m_0v_y}{\sqrt{1-\beta^2}}=F_0t \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.2)}$$

在 x 方向动量

$$\frac{m_0v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{m_0\beta_0c}{\sqrt{1-\beta_0{}^2}} \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.3)}$$

于是

$$\beta^2c^2=\left(\frac{F_0t\sqrt{1-\beta^2}}{m_0}\right)^2+\left(\frac{\beta_0c\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta_0{}^2}}\right)^2 \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.4)}$$

得到

$$\beta^2=(1-\beta^2)\cdot\left(\frac{\beta_0{}^2}{1-\beta_0{}^2}+\frac{F_0{}^2t^2}{m_0{}^2c^2}\right) \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.5)}$$

化简得

$$\beta^2=\frac{\beta_0{}^2+\left(\frac{F_0t}{m_0c}\right)^2(1-\beta_0{}^2)}{1+\left(\frac{F_0t}{m_0c}\right)^2(1-\beta_0{}^2)} \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.6)}$$

得到

$$\sqrt{1-\beta^2}=\sqrt{1-\frac{\beta_0{}^2+\left(\frac{F_0t}{m_0c}\right)^2(1-\beta_0{}^2)}{1+\left(\frac{F_0t}{m_0c}\right)^2(1-\beta_0{}^2)}}=\sqrt{1-\beta_0{}^2}\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{F_0t}{m_0c}\right)^2(1-\beta_0{}^2)}}$$

* MERGEFORMAT (2.7)

于是

$$v_x=\frac{\beta_0c\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta_0{}^2}}=\beta_0c\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{F_0t}{m_0c}\right)^2(1-\beta_0{}^2)}} \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.8)}$$

有

$$\frac{dx}{dt}=v_x=\frac{\beta_0 c^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{1-\beta_0^2}+\left(\frac{Ft}{m_0}\right)^2}} \tag{2.9}$$

于是

$$\int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^t \frac{m_0\beta_0 c^2}{F_0\sqrt{1-\beta_0^2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\frac{m_0^2c^2}{F_0^2(1-\beta_0^2)}+t^2}} \tag{2.10}$$

解得

$$x(t)=\frac{m_0\beta_0 c^2}{F_0\sqrt{1-\beta_0^2}}\operatorname{arcsinh}\frac{F_0 t\sqrt{1-\beta_0^2}}{m_0 c} \tag{2.11}$$

或者

$$t(x)=\frac{m_0 c}{F_0\sqrt{1-\beta_0{}^2}}\sinh\left(\frac{xF_0\sqrt{1-\beta_0{}^2}}{m_0\beta_0 c^2}\right) \tag{2.12}$$

由

$$\frac{dx}{dy}=\frac{v_x}{v_y}=\frac{m_0\beta_0 c}{F_0 t\sqrt{1-\beta_0^2}}=\frac{\beta_0}{\sinh\left(\frac{xF_0\sqrt{1-\beta_0{}^2}}{m_0\beta_0 c^2}\right)} \tag{2.13}$$

于是

$$\int_0^x \sinh\left(\frac{xF_0\sqrt{1-\beta_0{}^2}}{m_0\beta_0 c^2}\right)dx=\beta_0\int_0^y dy \tag{2.14}$$

得到

$$\frac{m_0\beta_0 c^2}{F_0\sqrt{1-\beta_0{}^2}}\left(\cosh\frac{xF_0\sqrt{1-\beta_0{}^2}}{m_0\beta_0 c^2}-1\right)=\beta_0 y \tag{2.15}$$

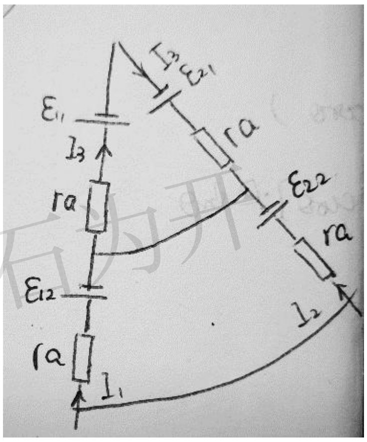
最后得到

$$y(x)=\frac{m_0 c^2}{F_0\sqrt{1-\beta_0^2}}\left(\cosh\frac{F_0 x\sqrt{1-\beta_0^2}}{m_0\beta_0 c^2}-1\right) \tag{2.16}$$

评分：除-、每式 2 分

T7-解答

（1） 电路图



显然有

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &= \frac{3}{2}B\omega_1 a^2 \\ \varepsilon_{22} &= \frac{3}{2}B\omega_2 a^2 \\ \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2}B\omega_1 a^2 \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2}B\omega_2 a^2\end{aligned}$$ * MERGEFORMAT (1.1)

这样，稳定时棒的角加速度为 0，因此棒上的电流也为 0

设稳态时电容上剩下的电荷为 q_f

有

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = \frac{q_f}{C} \to q_f = \frac{3}{2}CBa^2\omega_f$$ * MERGEFORMAT (1.2)

其中 ω_f 为两根棒的共同角速度

施加在第一根棒上的力矩（逆时针，与角速度正方向相同）

$$M_1 = BI_1 a\frac{3}{2}a + BI_3 a\frac{a}{2} = \frac{1}{3}m_1(2a)^2\frac{d\omega_1}{dt}$$ * MERGEFORMAT (1.3)

得到

$$3I_1 + I_3 = \frac{8m_1}{3B}\frac{d\omega_1}{dt}$$ * MERGEFORMAT (1.4)

同理有

$$3I_2 - I_3 = \frac{8m_2}{3B}\frac{d\omega_2}{dt}$$ * MERGEFORMAT (1.5)

相加有

$$I_1 + I_2 = \frac{8}{9B}\frac{d}{dt}(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$$ * MERGEFORMAT (1.6)

由于

$$q_f = Q - \int_0^t (I_1 + I_2) dt \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.7)}$$

初始角速度均为 0，于是

$$q_f = CU_0 - \frac{8}{9B}(m_1 + m_2)\omega_f \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.8)}$$

与联立得到

$$\omega_f = \frac{18BCU_0}{16(m_1 + m_2) + 27CB^2a^2} \qquad \text{* MERGEFORMAT (1.9)}$$

评分：每式 2 分

(2) 焦耳热为全部损耗的能量

$$\begin{aligned} Q_{loss} &= \frac{1}{2}CU_0^2 - \frac{q_f^2}{2C} - \frac{1}{2}\frac{1}{3}(m_1 + m_2)(2a)^2 \omega_f^2 \\ &= \frac{8(m_1 + m_2)CU_0^2}{16(m_1 + m_2) + 27CB^2a^2} \end{aligned} \qquad \text{* MERGEFORMAT (2.1)}$$

评分：6 分

(3) 我们在（1）问中已经得到

$$3I_1 + I_3 = \frac{8m_1}{3B}\frac{d\omega_1}{dt} \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.1)}$$

以及

$$3I_2 - I_3 = \frac{8m_2}{3B}\frac{d\omega_2}{dt} \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.2)}$$

这样将他们相减

$$3(I_1 - I_2) + 2I_3 = \frac{8}{3B}(m_1\frac{d\omega_1}{dt} - m_2\frac{d\omega_2}{dt}) \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.3)}$$

在电路中列出 KVL，记 $R = ra$

靠下面的回路：

$$I_1R - I_2R = \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} = \frac{3}{2}Ba^2(\omega_2 - \omega_1) \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.4)}$$

靠上面的回路：

$$2I_3R = \frac{1}{2}Ba^2(\omega_2 - \omega_1) \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.5)}$$

这样代入就有

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{8}{15B^2a^2}(m_1\frac{d\omega_1}{dt} - m_2\frac{d\omega_2}{dt}) \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.6)}$$

积分，得到棒 1 相对于棒 2 的转角

$$\Delta\theta = -\frac{8}{15B^2a^2}(m_1\omega_1 - m_2\omega_2) \qquad \text{* MERGEFORMAT (3.7)}$$

初始时，棒 1 相对于棒 2 在逆时针方向领先 θ_0

末态

$$\theta_f=\theta_0+\frac{8}{15B^2a^2}(m_2-m_1)\omega_f \quad \text{* MERGEFORMAT (3.8)}$$

由于题目中 $m_1<m_2$，于是只需要

$$\theta_f<2\pi \quad \text{* MERGEFORMAT (3.9)}$$

代入

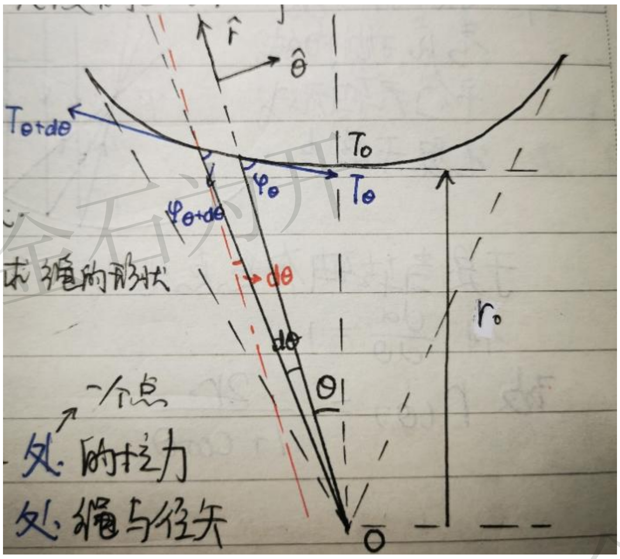
得到

$$\begin{aligned}U_0&<\frac{15Ba^2(2\pi-\theta_0)(16(m_1+m_2)+27CB^2a^2)}{144RC(m_2-m_1)}\\&=\frac{15Ba(2\pi-\theta_0)(16(m_1+m_2)+27CB^2a^2)}{144rC(m_2-m_1)}\end{aligned} \quad \text{* MERGEFORMAT (3.10)}$$

评分：-每式 2 分，

T8-解答

（1） 采用受力分析



假设 T_θ 为极角 θ 处绳子的拉力

φ_θ 为此处绳子与径矢之间的夹角有

切向受力平衡

$$T_\theta\sin\varphi_\theta-T_{\theta+d\theta}\sin(\varphi_{\theta+d\theta}+d\theta)=0 \quad \text{* MERGEFORMAT (1.1)}$$

径向受力平衡

$$T_{\theta+d\theta}\cos(\varphi_{\theta+d\theta}+d\theta)-T_\theta\cos\varphi_\theta=\lambda\frac{rd\theta}{\sin\varphi_\theta}(g\frac{R^2}{r^2}) \quad \text{* MERGEFORMAT (1.2)}$$

以及几何关系

$$\tan\varphi=\frac{rd\theta}{dr} \quad \text{* MERGEFORMAT (1.3)}$$

得到

$$T_\theta r\sin\varphi_\theta=C \quad \text{* MERGEFORMAT (1.4)}$$

这其实就是力矩平衡

以及

$$T_\theta-T_0=\lambda gR^2(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}) \quad \text{* MERGEFORMAT (1.5)}$$

这其实就是对一小段绳子分析的虚功原理

由于

$$\sin\varphi_\theta=\frac{rd\theta}{\sqrt{(dr)^2+(rd\theta)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{dr}{rd\theta})^2}} \quad \text{* MERGEFORMAT (1.6)}$$

于是

$$(T_0+\lambda gR^2(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}))\frac{r}{\sqrt{1+(\frac{dr}{rd\theta})^2}}=C=T_0r_0 \quad \text{* MERGEFORMAT (1.7)}$$

得到

$$(T_0+\lambda gR^2(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}))\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{r})^2+(\frac{dr}{r^2d\theta})^2}}=T_0r_0 \quad \text{* MERGEFORMAT (1.8)}$$

由于

$$\frac{dr}{r^2d\theta}=\frac{-d(\frac{1}{r})}{d\theta} \quad \text{* MERGEFORMAT (1.9)}$$

我们很自然地想到换元

$$u=\frac{1}{r} \quad \text{* MERGEFORMAT (1.10)}$$

于是有

$$(1+\frac{\lambda gR^2}{T_0}(u_0-u))\frac{1}{\sqrt{u^2+(\frac{du}{d\theta})^2}}=\frac{1}{u_0}$$ * MERGEFORMAT (1.11)

进一步整理

$$\int d\theta=\int-\frac{du}{\sqrt{(u_0+\frac{\lambda gR^2u_0}{T_0}(u_0-u))^2-u^2}}$$ * MERGEFORMAT (1.12)

代入

$$T_0=\frac{2\lambda gR^2}{r_0}$$ * MERGEFORMAT (1.13)

得到

$$\int d\theta=\int-\frac{du}{\sqrt{(\frac{3}{2}u_0-\frac{1}{2}u)^2-u^2}}$$

$$=\int-\frac{du}{\sqrt{-\frac{3}{4}u^2-\frac{3}{2}u_0u+\frac{9}{4}{u_0}^2}}=-\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\int\frac{d(u_0+u)}{\sqrt{4{u_0}^2-(u_0+u)^2}}$$ * MERGEFORMAT (1.14)

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3}\arccos\frac{\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r}}{\frac{2}{r_0}}+C$$

代入积分常数得到

$$r(\theta)=\frac{\frac{r_0}{2}}{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\theta-\frac{1}{2}}$$ * MERGEFORMAT (1.15)

评分：每式 2 分

(2) 由于知道拉力最大处在绳子的端点处

$$T_1-T_0=\lambda gR^2(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r})\to\frac{1}{r}=\frac{3}{r_0}-\frac{T_1}{\lambda gR^2}$$ * MERGEFORMAT (2.1)

由于

$$\frac{1}{r}=\frac{2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\varphi_c}{2})-1}{r_0}$$ * MERGEFORMAT (2.2)

比较得到

$$\varphi_c = \frac{4}{\sqrt{3}}\arccos(2-\frac{T_1 r_0}{2\lambda g R^2}) \quad \text{* MERGEFORMAT (2.3)}$$

评分：前两式每式 3 分，答案 4 分