培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（十四）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

T1

第一次落地时，有

$$\frac{1}{2}mv_z^2 = mg(h-R)$$

因此

$$v_z = \sqrt{2g(h-R)} \qquad (2')$$

由恢复系数的定义，

$$v_z' = ev_z = e\sqrt{2g(h-R)} \qquad (2')$$

由动量定理，

$$N = \int ndt = (1+e)m\sqrt{2g(h-R)}$$

触地点速度为

$$\vec{v_s} = \vec{v_o} + \vec{\omega} \times \vec{R} \qquad (2')$$

动力学方程:

$$m\frac{d\vec{v_o}}{dt} = \vec{f} \qquad (3')$$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{R} \times \vec{f} \qquad (3')$$

$$I = \frac{2}{5}mR^2 \qquad (3')$$

$\therefore$

$$\frac{d\vec{v_s}}{dt} = -\vec{n_s} \cdot \mu n \frac{7}{2m} \qquad (3')$$

$$|\vec{n_s}| = 1$$

分情况讨论:

(1).在球离地前，$|v_s| > 0$

$$\Delta v_s = \int \frac{dv_s}{dt}dt = -\frac{7}{2}\mu(1+e)\sqrt{2g(h-R)}$$

$$\Delta v = \int \frac{f}{m}dt = -\mu(1+e)\sqrt{2g(h-R)} \qquad (2')$$

由图可得，

$$\tan\phi = \frac{\omega_0 R}{v_0}$$

故

$$v_x' = v_0 - |\Delta v|\cos\phi \qquad (3')$$

$$v_y' = -|\Delta v|\cos\phi \qquad (3')$$

而两次落地的时间间隔为

$$\tau = \frac{2e}{g}\sqrt{2g(h-R)} \qquad (2')$$

最终位移为

$$(v_x'\tau, v_y'\tau)=\left(2e\sqrt{\frac{2(h-R)}{g}}v_0\left[1-\frac{\mu(1+e)\sqrt{2g(h-R)}}{\sqrt{\omega_0^2R^2+v_0^2}}\right],-4\mu e(1+e)(h-R)\frac{\omega_0R}{\sqrt{\omega_0^2R^2+v_0^2}}\right) \qquad (3')$$

(2).$|v_s|$已变为0,$|\Delta v_s|=v_s=\sqrt{\omega_0^2R^2+v_0^2}$
又

$$|\Delta v|=\int\frac{f}{m}dt=\frac{2}{7}|\Delta v_s|$$

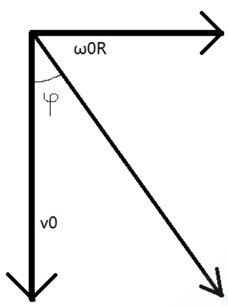
∴

$$v_x'=v_0-|\Delta v|\cos\phi=\frac{5}{7}v_0 \qquad (3')$$

$$v_y'=-|\Delta v|\cos\phi=\frac{2}{7}\omega_0R \qquad (3')$$

最终位移为

$$(v_x'\tau, v_y'\tau)=\left(\frac{10ev_0}{7g}\sqrt{2g(h-R)},\frac{4e\omega_0R}{7g}\sqrt{2g(h-R)}\right) \qquad (3')$$



T2
显然球壳不会有z方向的运动.
现设球心坐标x,以球心为原点，z方向为极轴建立球坐标系.
转动惯量

$$I=\frac{2}{3}mR^2 \qquad (3^{'})$$

对于处于磁场中的某面元dS,

$$d\vec{F}=\sigma B[-\omega R\sin\theta\cos\phi\vec{e_x}+(\dot{x}-\omega R\sin\theta\sin\phi)\vec{e_y}] \qquad (4^{'})$$

故总受力

$$\begin{aligned}F_x&=-\sigma B\int_{\arcsin\frac{|x|}{R}}^{\pi-\arcsin\frac{|x|}{R}}\int_{-\arccos\frac{|x|}{R\sin\theta}}^{\arccos\frac{|x|}{R\sin\theta}}\omega R\sin\theta\cos\phi\cdot R^2\sin\theta d\theta d\phi\\&=-\sigma\pi\omega BR^3(1-\frac{x^2}{R^2}) \qquad (10^{'})\end{aligned}$$

由于系统能量守恒,即

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_x^2+\frac{1}{2}I\omega^2\right)=0 \qquad (5^{'})$$

∴

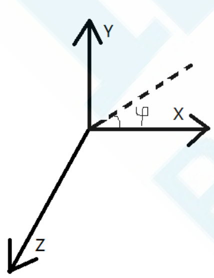
$$v_xF_x+\omega M=0 \qquad (3^{'})$$

$$M=-\frac{\dot{x}F_x}{\omega} \qquad (3^{'})$$

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt}&=\frac{d\omega}{dx}v_x\\&=\frac{M}{I}\\&=\frac{3}{2m}\sigma\pi BR\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)v_x \qquad (6^{'})\end{aligned}$$

∴

$$\begin{aligned}\omega&=\int\frac{d\omega}{dx}dx\\&=\int_{-R}^{R}\frac{3}{2m}\sigma\pi BR\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)dx\\&=\frac{2\sigma\pi BR^2}{m} \qquad (6^{'})\end{aligned}$$



T3

将圆锥表面展开,则绳必为一线段。

记质点P,A, X夹角ξ,A, P, X夹角δ,$PA = s$.由余弦定理,

$$s^2 + d^2 - 2sd\cos\xi = l^2 \qquad (3')$$

由正弦定理，

$$\frac{\sin\delta}{d} = \frac{\sin\xi}{l} \qquad (3')$$

容易看出，

$$\xi = \sin\beta\theta \qquad (3')$$

由此可解得

$$s = d\cos\xi + \sqrt{l^2 - d^2\sin\xi^2} \qquad (3')$$

以A为原点计算质点高度h:

过质点的平面在圆锥上截出的圆的圆心高度

$$h_1 = -s\cos\beta\sin\alpha \qquad (3')$$

质点相对圆心高度

$$h_2 = s\sin\beta\cos\alpha\cos\theta \qquad (3')$$

故质点高度

$$h = h_1 + h_2 = s(\sin\beta\cos\alpha\cos\theta - \cos\beta\sin\alpha) \qquad (2')$$

由能量守恒，有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg[-s(\theta)\cos\beta\sin\alpha + s(\theta)\cos\alpha\sin\beta\cos\theta]|_{\theta=\theta}^{\theta=0} \qquad (4')$$

为了使方程中不出现绳子拉力以简化运算，对质点列垂直于圆锥表面方向$\vec{n_\beta}$的动力学方程

$$mg_\beta = ma_\beta \qquad (4')$$

为计算a_β，建立球坐标系(s, β, θ)

由球坐标下加速度表达式，

$$a_\beta = -s\dot{\theta}^2\sin\beta\cos\beta \qquad (4')$$

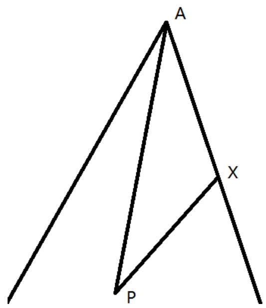
而重力加速度的分量为

$$g_\beta = -g(\cos\alpha\cos\beta\cos\theta + \sin\alpha\sin\beta) \qquad (4')$$

最后得方程

$$2\cot\beta\left[1 - \frac{d^2}{l^2}\sin\theta\sin\beta^2\right]\left[\left(d\cos(\theta\sin\beta) + \sqrt{l^2 - d^2\sin(\theta\sin\beta)^2}\right)(\sin\beta\cos\alpha\cos\theta - \cos\beta\sin\alpha)\right]_\theta^0$$
$$= \cos\alpha\cos\beta\cos\theta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (4')$$

保留此方程即可



T4

(1).由球面折射成像，

$$\frac{1}{u}+\frac{n}{v}=\frac{n-1}{\rho} \qquad (1^{'})$$

∴

$$v=\frac{n}{n-1}\rho$$

对零级像,$-v=u'$

$$\frac{n}{u'}+\frac{1}{v_0}=\frac{1-n}{-\rho} \qquad (1^{'})$$

∴

$$v_0=\frac{\rho}{2(n-1)}$$

对k级像，设出射前的像，物距u_k

$$u_0=\frac{n}{n-1}\rho$$

被球面两次反射

$$-\frac{1}{u_{k-1}}+\frac{1}{v}=\frac{2}{\rho} \qquad (1^{'})$$

$$-\frac{1}{v}+\frac{1}{u_k}=\frac{2}{\rho} \qquad (1^{'})$$

最后的折射成像：

$$-\frac{n}{u_k}+\frac{1}{v_k}=\frac{1-n}{-\rho} \qquad (2^{'})$$

可得递推式

$$\frac{1}{u_k}=\frac{1}{u_{k-1}}+\frac{4}{\rho} \qquad (3^{'})$$

由$k=0$时$\frac{1}{u_k}=\frac{1}{u_0}=\frac{n-1}{n\rho}$得

$$\frac{1}{u_k}=\frac{4k}{\rho}+\frac{n-1}{n\rho}$$

∴

$$u_k=\frac{\rho}{4k+\frac{n-1}{n}} \qquad (2^{'})$$

$$v_k=\frac{\rho}{4nk+2(n-1)} \qquad (2^{'})$$

(2).对于零、一级像，

$$v_0=\frac{\rho}{2(n-1)} \qquad (1^{'})$$

$$v_1=\frac{\rho}{2(3n-1)} \qquad (1^{'})$$

由能量守恒，

$$A^2 = A_r^2 + A_t^2$$

由振幅透射率的定义，

$$A_r = rA$$

故

$$A_t = \sqrt{1-r^2}A \qquad (4^{'})$$

容易得

$$A_0 = (1-r^2)A \qquad (2^{'})$$
$$A_1 = r^2(1-r^2)A \qquad (2^{'})$$

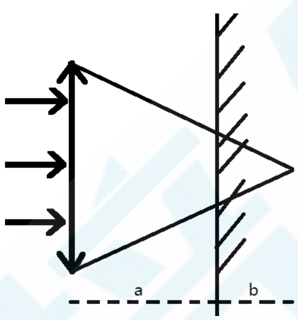
这个结果正比于最终成的像的亮度，因此要计算在屏上的振幅，需要再乘一个因子 考虑到在空间中传播时能量守恒，屏上的照度应当反比于b^2而正比于$(a+b)^2$.又由于本题中两个像点离屏幕距离一致，故屏上照度只正比于$(a+b)^2$,即

$$A_0^{'} = A_0 \times v_0 \qquad (3^{'})$$
$$A_1^{'} = A_1 \times v_1 \qquad (3^{'})$$

$\therefore$

$$I_{max} = (A_0^{'} + A_1^{'})^2 \qquad (2^{'})$$
$$I_{min} = (A_0^{'} - A_1^{'})^2 \qquad (2^{'})$$

$$\gamma = \frac{2(3n-1)(n-1)r^2}{(n-1)^2r^4 + (3n-1)^2} \qquad (7^{'})$$



T5

取柱坐标$O\rho\phi z$，设初位置为(ρ,z)，碰前速度为v，有

$$v^2=2g(z+R\cos\theta)\qquad(4^{'})$$

碰后，

$$v_r=-ev\cos\theta\qquad(4^{'})$$
$$v_\theta=-v\sin\theta\qquad(4^{'})$$

所以

$$v_x=ev\sin\theta\cos\theta+v\sin\theta\cos\theta\qquad(4^{'})$$
$$v_y=ev\cos^2\theta-v\sin^2\theta\qquad(4^{'})$$

从碰撞到碗边用时

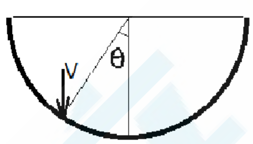
$$t=\frac{R+\rho}{(1+e)v\sin\theta\cos\theta}\qquad(4^{'})$$

因此有

$$R\cos\theta=(e\cos^2\theta-\sin^2\theta)vt-\frac{1}{2}gt^2\qquad(4^{'})$$

消去t并代入$\rho=R\sin\theta\qquad(4^{'})$得

$$z=\sqrt{R^2-\rho^2}\left(\frac{R^3}{4(1+e)\rho(R-\rho)\left[eR-(1+e)\rho\right]}-1\right)\qquad(8^{'})$$



T6

由能量守恒，设A振幅为θ_0.有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad (4^{'})$$

设某时刻A端绳长x，绳上拉力为

$$\begin{aligned} F &= mg\cos\theta + \frac{mv^2}{x} \\ &= mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0) \\ &= mg\left(1 - \frac{3}{2}\theta^2 + \theta_0^2\right) \qquad (6^{'}) \end{aligned}$$

近似的，可以认为

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\omega t \qquad (4^{'})$$

代入上式并对时间求平均

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} mg\left(1 - \frac{3}{2}\theta^2 + \theta_0^2\right)dt \\ &= mg(1 + \frac{1}{4}\theta_0^2) \qquad (6^{'}) \end{aligned}$$

记振动自由度内的能量为E，有

$$dE = -(F - mg)dx = -\frac{1}{4}mg\theta_0^2 = d\left(\frac{1}{2}mgx\frac{\theta_0^2}{2}\right) \qquad (6^{'})$$

即

$$\frac{d\left(\theta_0^2\right)}{(\theta_0^2)} = -\frac{3}{2}\frac{dx}{x}$$

$$\theta_0^2 = \delta^2\left(\frac{L}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (4^{'})$$

由能量守恒，

$$\frac{1}{2}2mv^2 = \frac{1}{2}mgL\frac{\delta^2}{2} - \frac{1}{2}mgx\frac{\theta_0^2}{2} \qquad (4^{'})$$

∴

$$v = \frac{\delta}{2}\sqrt{gL(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})} \qquad (6^{'})$$

T7

(1).简单的能量守恒.

$$\frac{C_V}{R}P_1V_1=\frac{C_V}{R}P_0(V_1+V_4)+P_0V_4 \qquad (4')$$

V_4为向左推活塞前3的体积.

$$P_0V_4^{\gamma}=P_2V_3^{\gamma} \qquad (4')$$

∴

$$V_3=(\frac{P_0}{P_2})^{\frac{1}{\gamma}}\cdot\frac{P_1-P_0}{\gamma P_0}V_1 \qquad (3')$$

且已知$P_3=P_2$

$$P_1V_1=n_1RT_0 \qquad (2')$$

$$\frac{n_3}{n_1-n_3}=\frac{V_4}{V_1} \qquad (2')$$

∴

$$n_3=\frac{V_4}{V_1+V_4}n_1 \qquad (2')$$

$$T_3=\frac{P_2}{\gamma P_0P_1}(\frac{P_0}{P_2})^{\frac{1}{\gamma}}[P_1+(\gamma-1)P_0]T_0 \qquad (3')$$

设想dt时间内,还未进入2的气体相当于作绝热过程. 所以3中气体在作物质量减少的“绝热过程”,因此其强度量仍满足绝热过程的关系式

$$T_3^{\gamma}P_3^{1-\gamma}=T_4^{\gamma}P_4^{1-\gamma} \qquad (6')$$

$$P_4V_2=N_2RT_0 \qquad (3')$$

$$P_4\frac{V_1}{2}=N_3RT_4 \qquad (3')$$

$$N_2+N_3=n_2+n_3 \qquad (1')$$

$$n_2=\frac{P_2V_2}{RT_0} \qquad (1')$$

得方程

$$T_4^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\frac{P_2V_2}{T_0}+T_4^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{P_2V_1}{2}=(n_2+n_3)RT_3^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad (6')$$

保留此方程即可.

T8

(1).平衡时，

$$I=0,\Delta u=Blv-u_E=0 \tag{1}$$

其中v为最终速度，u_E为两球间电势差

$$u_E=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}-\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a}=\frac{q}{2\pi\epsilon_0 a} \tag{2}$$

牛顿第二定律：

$$m\frac{dv}{dt}=-\frac{dq}{dt}Bl \tag{3}$$

$\therefore \quad m(v-u)=-qBl$ 由前几式，

$$v=\frac{m}{m+2\pi\epsilon_0 aB^2l^2}u \tag{4}$$

$$q=\frac{2\pi\epsilon_0 aBlm}{m+2\pi\epsilon_0 aB^2l^2}u \tag{5}$$

(2).$S=\frac{\pi d^2}{4}$，故金属杆电阻

$$R=\frac{l}{\sigma S}=\frac{4l}{\pi d^2\sigma} \tag{6}$$

设某时刻卫星速度v，角速度$\dot{\theta}$，杆与速度方向夹角θ，则电动势

$$E=E_1+E_2$$

其中E_1为平动分量：

$$E_1=-Bvl\sin\theta \tag{7}$$

E_2为转动分量：

$$E_2=\int_{\frac{l}{2}-\Delta}^{\frac{l}{2}+\Delta}B\dot{\theta}xdx=B\dot{\theta}l\Delta \tag{8}$$

$\therefore \quad E=Bl(\dot{\theta}l\Delta-v\sin\theta)$

$$I=\frac{E}{R}=\frac{\pi Bd^2\sigma}{4}(\dot{\theta}l\Delta-v\sin\theta) \tag{9}$$

力矩

$$M=\int_{\frac{l}{2}-\Delta}^{-\frac{l}{2}+\Delta}IBxdx=IBl\Delta=\frac{\pi B^2ld^2\sigma\Delta}{4}(\dot{\theta}\Delta-v\sin\theta) \tag{10}$$

转动惯量J，在$\dot{\theta_\Delta}\gg v$的情况下

$$E=Bl\dot{\theta}l\Delta$$

$$I=\frac{\pi Bd^2\sigma}{4}\dot{\theta}l\Delta$$

$$M=\frac{\pi B^2ld^2\sigma\Delta^2}{4}\dot{\theta}$$

$$P = IE = \frac{\pi^2 B^2 d^2 \Delta^2 \sigma l}{4} \dot{\theta}^2$$

$$J\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{\pi B^2 d^2 l\sigma}{4} \Delta^2 \dot{\theta}$$

$\therefore$

$$J\frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = \frac{\pi B^2 d^2 l\sigma \Delta^2}{4} dt \qquad *$$

$$Jd\dot{\theta} = \frac{\pi B^2 d^2 l\sigma \Delta^2}{4} d\theta \qquad **$$

由$*$，

$$\omega_f = \omega \exp^{-\frac{\pi B^2 d^2 l\sigma \Delta^2}{4J}\tau} \tag{11}$$

$$\theta_f = \frac{4J}{\pi B^2 d^2 \Delta^2 \sigma l} \omega (1 - \exp^{-\frac{\pi B^2 d^2 l\sigma \Delta^2}{4J}\tau}) \tag{12}$$

由$**$

$$J(\omega - \dot{\theta}) = \frac{\pi B^2 d^2 l\sigma \Delta^2}{4} \theta \tag{13}$$

由(15)

$$dQ = Pdt = \frac{\pi B^2 d^2 \Delta^2 \sigma l}{4} \dot{\theta} d\theta \tag{14}$$

$$= \frac{\pi B^2 d^2 \Delta^2 \sigma l}{4} (\omega - \frac{\pi B^2 d^2 \Delta^2 \sigma l}{4J} \theta d\theta) \tag{15}$$

由(22)

$$Q = \frac{\pi B^2 d^2 \Delta^2 \sigma l}{4} (\omega \theta_f - \frac{\pi B^2 d^2 \Delta^2 \sigma l}{8J} \theta_f^2) \tag{16}$$

由机械能守恒，

$$Q = \Delta E = \frac{1}{2} J(\omega^2 - \omega_f^2) + \frac{1}{2}(u^2 - v_f^2) \tag{17}$$

最终答案为(11),(16),(17)式.10式之后的EIMP四个式子均写出可得4分.15,16,17均为$4'$，其余标号式子$2'$