培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（六）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

学校：________ 姓名：________ 学号：________ 装 订 线

一、多级管道中的流体流动

设液体密度为 ρ，对于 A_iB_i 液面，设液体流速为 v_i，面积为 S_i，液体压强为 p_i，则由题意知

$$S_i=\frac{S_0}{2^i} \quad ①$$

根据连续性方程

$$S_0v_0=S_iv_i \quad ②$$

按题中所述，液体可视为定常流动，故满足伯努利方程

$$p_{i+1}+\frac{1}{2}\rho v_{i+1}^2=p_i+\frac{1}{2}\rho v_i^2+\rho gh \quad ③$$

由①②③式得到 p_i 的递推公式

$$p_{i+1}-p_i=\rho gh-\frac{3}{2}\rho v_0^2\cdot 4^i \quad ④$$

将递推公式累加，得到 p_i 的通项公式

$$p_i=p_0+i\rho gh-\frac{3}{2}\rho v_0^2\sum_{j=0}^{i-1}4^j \quad ⑤$$

利用等比数列的求和公式，得到

$$p_i=p_0+i\rho gh-\frac{1}{2}\rho v_0^2\left(4^i-1\right) \quad ⑥$$

当 i=k 时，即最下面一段的底部截面处，由于与外界大气相通，有

$$p_k=p_0 \quad ⑦$$

将⑦式代入⑥式，得

$$v_0=\sqrt{\frac{2kgh}{4^k-1}} \quad ⑧$$

因此液体体积流量为

$$Q_V=S_0v_0=S_0\sqrt{\frac{2kgh}{4^k-1}} \quad ⑨$$

评分标准：①式 3 分，②③式各 3 分，④⑤式各 3 分，⑥式 3 分，⑦式 2 分，⑧式 5 分，⑨式 4 分。满分 29 分。

二、直流电缆中的电磁场

（1）设稳定状态下，内侧导体单位长度带电量为 λ，设距离轴线 r 处的电位移为 D，则由对称性知其方向径向向外，其大小由高斯定理给出：

$$D(r)\cdot 2\pi rl=\lambda l \quad ①$$

在两种介质中分别有

$$D(r)=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_1(r),R_1<r<R_2 \quad ②$$

$$D(r)=\varepsilon_0\varepsilon_{r2}E_2(r),R_2<r<R_3 \quad ③$$

根据电势差与电场强度的关系有

$$V=\int_{R_1}^{R_2}E_1(r)dr+\int_{R_2}^{R_3}E_2(r)dr \quad ④$$

将①②③式代入④式并积分，得到

$$\lambda=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}V}{\varepsilon_{r1}\ln\frac{R_3}{R_2}+\varepsilon_{r2}\ln\frac{R_2}{R_1}} \quad ⑤$$

设介质交界面上极化电荷（此处没有自由电荷）的面电荷密度为σ，则单位面积电荷受力为

$$\frac{\Delta f}{\Delta S}=\sigma\cdot\frac{1}{2}\left[E_1(R_2)+E_2(R_2)\right] \quad ⑥$$

根据高斯定理有

$$\sigma=\varepsilon_0\left[E_2(R_2)-E_1(R_2)\right] \quad ⑦$$

联立①②③④⑤⑥⑦式得

$$\frac{\Delta f}{\Delta S}=\frac{\varepsilon_0\left(\varepsilon_{r1}^2-\varepsilon_{r2}^2\right)V^2}{2R_2^2\left(\varepsilon_{r1}\ln\frac{R_3}{R_2}+\varepsilon_{r2}\ln\frac{R_2}{R_1}\right)^2} \quad ⑧$$

（2）根据电容的定义有

$$\lambda\Delta l=V\Delta C \quad ⑨$$

由⑤⑨式得单位长度的电容

$$\frac{\Delta C}{\Delta l}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}\ln\frac{R_3}{R_2}+\varepsilon_{r2}\ln\frac{R_2}{R_1}} \quad ⑩$$

根据自感磁能公式有

$$\iiint\frac{B^2}{2\mu_0}dV=\frac{1}{2}\Delta LI^2 \quad ⑪$$

在本题中，根据安培环路定理

$$B(r)\cdot 2\pi r=\mu_0 I \quad ⑫$$

因此，⑪式即

$$\int_{R_1}^{R_3}\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2\cdot 2\pi r\Delta l dr=\frac{1}{2}I^2\Delta L \quad ⑬$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta l}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_3}{R_1} \quad ⑭$$

（3）在直流电缆的一个横截面上，以该平面与轴的交点为圆心分出一系列环带，每个环带上的能流密度相同，因此能流的运算式为

$$P=\int_{R_1}^{R_3}S(r)\cdot 2\pi r dr=\frac{1}{\mu_0}\int_{R_1}^{R_3}E(r)B(r)\cdot 2\pi r dr \quad ⑮$$

将⑫式代入⑮式，立刻得到

$$P=I\cdot\int_{R_1}^{R_3}E dr=VI \quad ⑯$$

即电源输入直流电缆的电功率。

评分标准：第（1）问 18 分，第（2）问 9 分，第（3）问 8 分。①②③④式各 2 分，⑥式 4 分，⑦⑧式各 3 分，⑨⑩⑫式各 2 分，⑭式 3 分，⑮⑯式各 4 分。满分 35 分。

三、有心力场下天体运动的修正

（1）根据题给的势能公式，可以得到星体受到的有心力为

$$f(r)=-\frac{dV}{dr}=-\frac{GMm}{r^2}+\frac{k\alpha}{r^{k+1}} \quad ①$$

以力心为极点建立平面极坐标系，则由牛顿第二定律

$$f(r)=m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right) \quad ②$$

由角动量的定义

$$L = mr^2\dot{\theta} \qquad ③$$

②③式联立可消去角速度 $\dot{\theta}$，从而将方程转化为只与 r 有关。但这个方程的自变量为 t，因此不能得到轨迹方程。由求导运算中的链式法则可将其转化

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} \qquad ④$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{L^2}{m^2r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2L^2}{m^2r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \qquad ⑤$$

此时方程转化为 r 对 θ 的微分方程，但仍难以求解，为此作换元 $u = \frac{1}{r}$，则

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} \qquad ⑥$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{2}{u^3}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} \qquad ⑦$$

联立①②③④⑤⑥⑦式，整理可得如下微分方程：

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{mk\alpha}{L^2}u^{k-1} = \frac{GMm^2}{L^2} \qquad ⑧$$

容易发现，当 α=0，即只考虑万有引力作用时，方程⑧类似简谐振动方程，得到的应为三角函数解。按照提示，对应的运动轨迹为圆锥曲线，符合实际情况。若在 α 不为 0 时也得到圆锥曲线，则只能是令那一项等于一个常数，并入⑧式右侧的常数项，即

$$k = 1 \qquad ⑨$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2 - mk\alpha}{L^2} \qquad ⑩$$

该方程的通解为

$$u = \frac{GMm^2 - mk\alpha}{L^2} + A\cos\theta \qquad ⑪$$

其中 A 为待定积分常量，由星体运动的初始条件（如机械能）决定。上式可变换为圆锥曲线的形式，即（总可适当取极轴方向使之指向近心点）

$$r = \frac{\dfrac{L^2}{m(GMm - k\alpha)}}{1 + A'\cos\theta} \qquad ⑫$$

其中 A' 表示另一常量，此时方程变为圆锥曲线方程，半通径显然为

$$p = \frac{L^2}{m(GMm - k\alpha)} \qquad ⑬$$

（2）⑧式中，若令附加作用项与 u 的一次项合并而非与常数项合并，则仍可得到一个线性微分方程，且积分结果中三角函数内的系数不再是 1，故运动轨迹为进动的椭圆。当 k 取其它值时，附加作用项不能与其它项合并，即得不到线性微分方程，自然也得不到进动的椭圆运动解。于是，k 的取值及方程为

$$k = 2 \qquad ⑭$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{mk\alpha}{L^2}\right)u = \frac{GMm^2}{L^2} \qquad ⑮$$

这仍是一个简谐振动方程，若引入

$$\omega^2 = 1 + \frac{mk\alpha}{L^2} \qquad ⑯$$

则该方程的解（用 r 表达）为

$$r = \frac{1}{\dfrac{GMm^2}{\omega^2L^2} + A\cos\omega\theta} \qquad ⑰$$

其中 A 为与初始条件有关的常量。由于 $\omega\neq1$，椭圆（如果轨迹封闭）是进动的。当三角函数内的代数式 $\omega\theta$ 取到 2π 时，星体从近心点再一次转到近心点，但经过的角度 θ 不等于 2π，其差值便是进动角 φ：

$$\varphi=2\pi-\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{mk\alpha}{L^2}}}\right) \quad ⑱$$

评分标准：第（1）问 28 分，第（2）问 13 分。①②③④⑤⑥⑦式各 2 分，⑧式 5 分，⑨式 2 分，⑩⑫式各 2 分，⑬式 3 分，⑭式 2 分，⑮⑯⑰式各 2 分，⑱式 5 分。

四、刚体的二维碰撞

根据题意，两球之间没有摩擦，故碰撞过程外力矩几乎为 0，两球的转动角速度不发生变化。A 球仍保持原来纯滚动时的角速度 ω_0，其大小满足

$$v_0=\omega_0 R \quad ①$$

方向指向 y 轴正向。而 B 球角速度为 0。设碰撞后二者的质心速度分别为 v_A, v_B，则由完全弹性碰撞的性质知道，在垂直接触面（切面）方向上二者交换速度分量，沿接触面（切面）方向上二者速度分量分别不变。即

$$v_A=v_0\cos\theta \quad ②$$

$$v_B=v_0\sin\theta \quad ③$$

A 的速度方向垂直于二者连心线指向右下方，B 的速度方向平行于二者连心线指向右上方。此后，A 由于速度与角速度方向不匹配，不能作纯滚动，但在滑动摩擦力作用下趋向于纯滚动，这个运动是二维的，比较复杂。而 B 球也在摩擦力作用下趋于纯滚动，这个运动是一维的，比较简单。

先考虑 B 的运动。初始时 B 有质心速度 v_B，但无角速度，故最低点存在与地面的相对速度，从而受到反向于质心速度的摩擦力，此时的质心运动定理为

$$\mu mg=ma_C \quad ④$$

取质心参考系，以质心为参考点，由转动定理

$$\mu mgR=\frac{2}{5}mR^2\beta \quad ⑤$$

其中 β 为角加速度。在滑动摩擦力的作用下，角速度增大，质心速度减小，直至二者匹配达到纯滚动状态，设达到此状态需时间 t_B，则

$$v_B-a_C t_B=\beta R t_B \quad ⑥$$

由④⑤⑥式得到

$$t_B=\frac{2v_0\sin\theta}{7\mu g} \quad ⑦$$

再讨论 A 的运动：碰撞刚结束时，A 的质心速度与角速度方向和大小均不匹配，但均沿水平方向，因此可以用矢量形式表达。取质心参考系，以质心为参考点，摩擦力矩始终沿水平方向，故角速度也始终不会有竖直分量。A 球最低点的速度为

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \quad ⑧$$

其中 $\mathbf{r}$ 表示由质心指向最低点的常矢量，将上式两边对时间 t 求导得

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d\mathbf{v}_C}{dt}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r} \quad ⑨$$

由质心运动定理和转动定理分别有

$$\mathbf{f}=m\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} \quad ⑩$$

$$\mathbf{r}\times\mathbf{f}=\frac{2}{5}mR^2\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad ⑪$$

将式代入⑨式，得

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{7}{2m}\mathbf{f} \qquad ⑫$$

根据滑动摩擦力的性质，**f** 的方向恒与 **v** 相反，且大小为常量 μmg，故最低点的速度 v 随时间均匀减小，直至为 0，此时达到纯滚动状态，球 A 将作匀速直线运动。在这一过程中，由于 **v** 的方向不变，**f** 的方向也不变，故球 A 的质心运动轨迹为抛物线。

首先求出 **v** 的初始值。根据⑧式及余弦定理可得

$$v^2=v_A^2+v_0^2-2v_Av_0\cos\theta \qquad ⑬$$

其方向（容易得到）与 y 轴的夹角恰为θ，设从碰撞时刻算起，$t=t_B$ 时球 A 达到纯滚动状态。则由式知

$$\frac{7}{2m}\cdot\mu mgt_A=v \qquad ⑭$$

联立式得

$$t_A=\frac{2v_0\sin\theta}{7\mu g} \qquad ⑮$$

对比式可知 $t_A=t_B$，即 B 达到纯滚动状态的时刻，A 恰好也达到纯滚动状态。此时 A 的两个速度分量分别为

$$v_{Ax}=v_A\cos\theta+\mu g\sin\theta\cdot t_A$$
$$v_{Ay}=-v_A\sin\theta+\mu g\cos\theta\cdot t_A \qquad ⑯$$

此时 A 的坐标则为

$$x_{A0}=v_A\cos\theta\cdot t_A+\frac{1}{2}\mu g\sin\theta\cdot t_A^2$$
$$y_{A0}=-v_A\sin\theta\cdot t_A+\frac{1}{2}\mu g\cos\theta\cdot t_A^2 \qquad ⑰$$

此后 A 将保持该时刻的速度作匀速直线运动，即以此为计时零点，A 的坐标随时间变化的函数关系为

$$x_A=x_{A0}+v_{Ax}t$$
$$y_A=y_{A0}+v_{Ay}t \qquad ⑱$$

联立式得

$$x=\frac{2v_0^2\sin\theta\left(1+6\cos^2\theta\right)}{49\mu g}+\frac{2+5\cos^2\theta}{7}v_0t$$
$$y=-\frac{12v_0^2\cos\theta\sin^2\theta}{49\mu g}-\frac{5}{7}v_0\sin\theta\cos\theta\cdot t \qquad ⑲$$

评分标准：①②③④⑤⑥式各 2 分，⑦式 4 分，⑧⑨⑩⑪⑫⑬式各 2 分，⑮式 4 分，⑯⑰⑱式各 3 分，⑲式 5 分。满分 45 分。

五、固体的热传递问题

（1）取坐标区间为 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 的一小段扁圆柱形热导体，在稳定时该段热导体吸收热量的速率应等于释放热量的速率，或者说它通过两个截面从两侧导体中净吸热速率应等于通过侧面向环境放热的速率，即

$$\frac{\delta Q_{侧}}{\delta t}=\frac{\delta Q_{环}}{\delta t} \qquad ①$$

根据傅里叶热传导定律

$$\frac{\delta Q_{侧}}{\delta t}=\kappa\left(x+dx\right)\pi R^2\frac{dT}{dx}\Big|_{x+dx}-\kappa\left(x\right)\pi R^2\frac{dT}{dx}\Big|_x \qquad ②$$

改用微分形式表达，即

$$\frac{\delta Q_{侧}}{\delta t}=\pi R^2\frac{d}{dx}\left(\kappa\frac{dT}{dx}\right)dx \qquad ③$$

根据题给的公式有

$$\frac{\delta Q_{环}}{\delta t}=\beta\cdot 2\pi Rdx\left(T-T_0\right) \quad ④$$

将③④式带入①式得

$$\kappa\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{d\kappa}{dx}\frac{dT}{dx}-\frac{2\beta}{R}T=-\frac{2\beta}{R}T_0 \quad ⑤$$

将题中给出的$\kappa=\kappa\left(x\right)$的函数表达式带入⑤式中，整理得

$$\left(x+L\right)^2\frac{d^2T}{dx^2}+2\left(x+L\right)\frac{dT}{dx}-\frac{2\beta L^2}{\kappa_0 R}T=-\frac{2\beta L^2}{\kappa_0 R}T_0 \quad ⑥$$

作换元 $x'=x+L$，则⑥式转化为方程

$$x'^2\frac{d^2T}{dx'^2}+2x'\frac{dT}{dx'}-\frac{2\beta L^2}{\kappa_0 R}T=-\frac{2\beta L^2}{\kappa_0 R}T_0 \quad ⑦$$

按照题中的提示，这正是一个欧拉方程，故应再作一次换元：$x'=e^t$，此时

$$\frac{dx'}{dt}=e^t \quad ⑧$$

$$\frac{dT}{dx'}=\frac{dT}{dt}\frac{dt}{dx'}=e^{-t}\frac{dT}{dt} \quad ⑨$$

$$\frac{d^2T}{dx'^2}=e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dT}{dt}\right)=e^{-2t}\left(\frac{d^2T}{dt^2}-\frac{dT}{dt}\right) \quad ⑩$$

将⑧⑨⑩式代入⑦式，得到

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{dT}{dt}-2T=-2T_0 \quad ⑪$$

这是一个二阶线性常系数非齐次的微分方程，很容易看出它的特解为$T=T_0$，为求这个方程的齐次通解，先求其特征根。该方程的特征方程为

$$r^2+r-2=0 \quad ⑫$$

得特征根 $r_1=1$，$r_2=-2$。故该方程的完整通解为

$$T=C_1x'+\frac{C_2}{x'^2}+T_0 \quad ⑬$$

其中 C_1，C_2 为积分常量。代入边界条件：$x'=L,T=T_1\,;\,x'=2L,T=T_2$ 得

$$C_1=\frac{4T_2-3T_0-T_1}{7L}$$

$$C_2=\frac{4L^2}{7}\left(2T_1-T_2-T_0\right) \quad ⑭$$

于是，柱体的温度 T 随横坐标 x 的分布函数为

$$T\left(x\right)=\frac{4T_2-3T_0-T_1}{7L}\left(x+L\right)+\frac{4L^2}{7\left(x+L\right)^2}\left(2T_1-T_2-T_0\right)+T_0 \quad ⑮$$

（2）将$T_1=\dfrac{T_0+T_2}{2}$代入式中，得温度分布函数

$$T\left(x\right)=\frac{T_2-T_0}{2L}x+\frac{T_2+T_0}{2} \quad ⑯$$

从初始状态到末状态，设计一条可逆途径，即温度十分缓慢地变化。则每一小段热导体的熵变为

$$d\Delta S=c\rho\pi R^2dx\int_{T_0}^{T}\frac{dT'}{T'}=c\rho\pi R^2\ln\frac{T\left(x\right)}{T_0}dx \quad ⑰$$

其中使用T'是为了防止与积分上限的 T 混淆。将式代入式，得

$$d\Delta S=c\rho\pi R^2\ln\left(\frac{T_2+T_0}{2T_0}+\alpha x\right)dx \quad ⑱$$

其中$\alpha=\frac{T_2-T_0}{2T_0L}$，将上式从 0 到 L 积分，并利用题给的积分公式进行换元

$$\int\ln(b+\alpha x)dx=\frac{1}{\alpha}\int\ln(b+\alpha x)d(b+\alpha x)=\frac{1}{\alpha}\left[(b+\alpha x)\ln(b+\alpha x)-(b+\alpha x)\right]+C \quad ⑲$$

其中 b 为常数，在本题中$b=\frac{T_2+T_0}{2T_0}$积分得到总熵变

$$\Delta S=c\rho\pi R^2L\left(\frac{2T_2}{T_2-T_0}\ln\frac{T_2}{T_0}-\frac{T_2+T_0}{T_2-T_0}\ln\frac{T_2+T_0}{2T_0}-1\right) \quad ⑳$$

评分标准：第（1）问 38 分，第（2）问 12 分。①式 3 分，②式 5 分，④式 4 分，⑤式 4 分，⑦⑧⑨⑩⑪式各 2 分，⑬式 4 分，⑭式 4 分，⑮式 4 分，⑯⑰⑱⑲各 2 分，⑳式 4 分。满分 50 分。

六、组合光栅

（1）首先考虑光栅每条缝的单缝衍射效应。设该元件某一束平行出射光的出射角（光传播方向与入射光方向的夹角）为θ，则经过单缝的平行光，在该出射角上每两条光线之间都会产生角度造成的光程差（即相位差），表现在振幅矢量图上，就是若干模长很小、存在微小夹角的矢量首尾相连形成一段圆弧，圆弧对应的弦长即为衍射光的振幅。设圆弧对应的半径为R，则由几何关系

$$A_{衍}=2R\sin\frac{\varphi}{2} \quad ①$$

其中φ为圆弧的圆心角，也即单缝两端出射光线的相位差。这两条光线的光程差为

$$\Delta=a\sin\theta \quad ②$$

根据光程差与相位差的关系

$$\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta \quad ③$$

圆弧的弧长表示$\varphi=0$时的振幅，也就是光直线传播时的振幅，这个振幅与题中所给的光强I_0是相对应的，设它为A_0，则

$$R\varphi=A_0 \quad ④$$

联立①②③④式得到单缝衍射后的振幅与入射光振幅之间的关系

$$A_{衍}=A_0\frac{\sin\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}} \quad ⑤$$

引入$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$，并考虑到光强正比于振幅的平方，可以得到单缝衍射后的光强和入射光光强之间的关系

$$I_{衍}=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \quad ⑥$$

再考虑多条缝之间的干涉效应。入射到不同缝中的光线，不仅由于出射方向产生光程差（即相位差），也因入射位置不同在介质中的光程不同，进而产生光程差（即相位差），现规定出射光指向右上方向θ角为正，则两种因素造成的总光程差为

$$\Delta'=d\sin\theta+n_0\chi sd \quad ⑦$$

由③⑦式可得对应的相位差为

$$\delta=\frac{2\pi d}{\lambda}(\sin\theta+n_0\chi s) \quad ⑧$$

考虑了单缝衍射后，从每条缝射出的光束可看作振幅矢量图中一个模长为A的矢量，且每两条相邻光束（从相邻的缝中射出）对应的矢量之间的夹角为δ，N个这样的矢量首尾相连叠加而成的即是干涉后的总矢量，其模为干涉后的合振幅。由几何关系

$$2l\sin\frac{\delta}{2}=A_{衍}$$ ⑨

$$2l\sin\frac{N\delta}{2}=A$$ ⑩

由⑤⑨⑩式得到合振幅与入射光振幅的关系

$$A=A_0\frac{\sin\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}\frac{\sin\frac{N\pi d}{\lambda}(\sin\theta+n_0\chi s)}{\sin\frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta+n_0\chi s)}$$ ⑪

若引入 $\beta=\frac{\pi d}{\lambda}(\sin\theta+n_0\chi s)$，则上式可以转化为某一角度上的光强与入射光强之间的关系（光强角分布函数）：

$$I(\theta)=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$ ⑫

（2）条纹缺级，亦即单缝衍射因子为零（由于 N 很大，衍射效应只是对干涉效应起调制作用），意味着：

$$\alpha=k\pi(k=1,2,3,\cdots)$$ ⑬

$$\sin\theta=\frac{k\lambda}{a}(k=1,2,3,\cdots)$$ ⑭

存在缺级现象的条件即使上式有解，即

$\lambda<a$ ⑮

除此之外，还会有干涉极小引起的暗条纹出现，此时干涉因子为零，即

$$N\beta=k'\pi(k'=1,2,3,\cdots,N-1)$$ ⑯

注意 $\beta=0,\pi$ 是不可取的，因为根据洛必达法则，此时干涉因子的极限为 1 而不是 0（取极限是因为实际上此时角分布函数表达式已不成立，但容易证明此时的光强等于角分布函数中取极限后的光强值），故并不是干涉极小。上式中取 $k'=\pm1$ 即得到一级暗条纹的表达式：

$$\theta=\arcsin\left(-n_0\chi s\pm\frac{\lambda}{Nd}\right)$$ ⑰

存在这类暗条纹的条件是上式有解，即

$$\frac{\lambda}{Nd}+n_0\chi s<1$$ ⑱

评分标准：第（1）问 26 分，第（2）问 9 分。振幅矢量法的必要解释（或图解）4 分，①式 1 分，②③式 2 分，④式 1 分，⑥式 3 分，⑦⑧式各 3 分，⑨⑩式各 2 分，⑫式 3 分，对极小值的分析 2 分，⑯⑰各 2 分，⑱式 3 分。

七、交流电路的阻抗设计

（1）设通过 AB 间直接连接的电感的电流为 I_2，流经上面电感的电流为 I_1，流经电感 L'的电流为 I'。在似稳条件下，利用复数法：

$$\tilde{U}_A-\tilde{U}_B=\tilde{I}_2\cdot \mathrm{j}\omega L$$ ①

$$\tilde{U}_A-\tilde{U}_B=\tilde{I}_1\left(\mathrm{j}\omega L+\frac{R\cdot \mathrm{j}\omega L'}{R+\mathrm{j}\omega L'}\right)$$ ②

利用①②得

$$\tilde{I}_2=\tilde{I}_1\left(1+\frac{RL'}{LR+\mathrm{j}\omega LL'}\right)$$ ③

再次利用回路方程得

$$Ee^{\mathrm{j}\omega t}=(\tilde{I}_1+\tilde{I}_2)R+\tilde{I}_2\cdot \mathrm{j}\omega L$$ ④

$$\tilde{I}'=\tilde{I}_1\cdot\frac{R}{R+\mathrm{j}\omega L'} \quad ⑤$$

由③④⑤式得到流经电感 L' 的电流的复数表达式：

$$\tilde{I}'=\frac{ER}{2R^2+R^2\frac{L'}{L}-\omega^2LL'+\mathrm{j}\left(3R\omega L'+R\omega L\right)}e^{\mathrm{j}\omega t} \quad ⑥$$

为计算方便，引入无量纲实数 $\eta=\frac{\omega L}{R},\xi=\frac{\omega L'}{R}$，则⑥式可简化为

$$\tilde{I}'=\frac{E}{R}\frac{e^{\mathrm{j}\omega t}}{2+\frac{\xi}{\eta}-\xi\eta+\mathrm{j}\left(3\xi+\eta\right)} \quad ⑦$$

将该复数转化为完全复指数形式，得：

$$\tilde{I}'=\frac{E}{R}\frac{e^{\mathrm{j}(\omega t-\varphi)}}{\sqrt{\left(2+\frac{\xi}{\eta}-\xi\eta\right)^2+\left(3\xi+\eta\right)^2}} \quad ⑧$$

其中的 φ 满足

$$\tan\varphi=\frac{3\xi+\eta}{2+\frac{\xi}{\eta}-\xi\eta} \quad ⑨$$

对⑧式左右两侧取实部，即可得到电流随时间变化的表达式：

$$I'=\frac{E}{R}\frac{\cos\left(\omega t-\varphi\right)}{\sqrt{\left(2+\frac{\xi}{\eta}-\xi\eta\right)^2+\left(3\xi+\eta\right)^2}} \quad ⑩$$

其中 φ 的表达式由⑨给出。

（2）若连入端口的是一般的阻抗，则可设其对应的复阻抗为 $\tilde{Z}$，类似②式有

$$\tilde{U}_A-\tilde{U}_B=\tilde{I}_1\left(\mathrm{j}\omega L+\frac{R\tilde{Z}}{R+\tilde{Z}}\right) \quad ⑪$$

由①⑪式得

$$\tilde{I}_2=\tilde{I}_1\left[1-\frac{\mathrm{j}R\tilde{Z}}{\omega L\left(R+\tilde{Z}\right)}\right] \quad ⑫$$

类似④⑤式有

$$\tilde{I}'=\tilde{I}_1\cdot\frac{R}{R+\tilde{Z}} \quad ⑬$$

$$\tilde{I}_1\cdot\mathrm{j}\omega L=\tilde{I}_C\cdot\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \quad ⑭$$

$$Ee^{\mathrm{j}\omega t}=\left(\tilde{I}_1+\tilde{I}_2+\tilde{I}_C\right)R+\tilde{I}_2\cdot\mathrm{j}\omega L \quad ⑮$$

由⑫⑭⑮式得

$$\frac{E}{R+\tilde{Z}}e^{\mathrm{j}\omega t}=\tilde{I}'\left[2-\omega^2LC+\frac{\tilde{Z}}{R+\tilde{Z}}+\mathrm{j}\left(\eta-\frac{\tilde{Z}}{\eta R+\eta\tilde{Z}}\right)\right] \quad ⑯$$

代入题给的数值，并取其中各量单位均为国际单位，则

$$e^{\mathrm{j}\omega t}=\tilde{I}'\left(1+2\frac{\tilde{Z}}{R}+\mathrm{j}\right) \quad ⑰$$

假设 $\tilde{Z}=R\left(\alpha+\mathrm{j}\beta\right)$，其中 α，β 均为无量纲实数。代入上式后得

$$e^{\mathrm{j}\omega t}=\tilde{I}'\left[1+2\alpha+\mathrm{j}\left(1+2\beta\right)\right] \quad ⑱$$

上式两侧取共轭复数，得到

$$e^{-\mathrm{j}\omega t}=\tilde{I}'^{*}\left[1+2\alpha-\mathrm{j}(1+2\beta)\right] \quad ⑲$$

由⑱⑲式联立得到该组合元件的有功功率

$$P=\tilde{I}\tilde{I}'^{*}\cdot\mathrm{Re}\left(\tilde{Z}\right)=\frac{\alpha R}{(1+2\alpha)^2+(1+2\beta)^2} \quad ⑳$$

注意到 α，β 的取值是独立的，故无论 α 取何值，β 的取值总能在使得其所在平方项为 0 时使有功功率最大，故 $\beta=-\frac{1}{2}$，在此情形下

$$P=\frac{\alpha R}{(1+2\alpha)^2}=\frac{R}{4\alpha+4+\frac{1}{\alpha}}\le\frac{R}{4+2\sqrt{4}}=12.5\mathrm{W}$$

取得最大值的条件即为分母中的均值不等式的取等条件，$\alpha=\frac{1}{2}$，可见 $\tilde{Z}=50(1-\mathrm{j})\Omega$，由于电阻 R，电容 C 的复阻抗分别为 100Ω 和 $-\mathrm{j}100\Omega$，故可将两个电阻 R 并联后再与两个电容 C 串联，即可得到满足题目要求的组合元件。

评分标准：第（1）问 17 分，第（2）问 23 分。③④⑤式各 2 分，⑥或⑦式 3 分，⑧式 3 分，⑨式 2 分，⑩式 3 分，⑫⑬⑭⑮各 2 分，⑯式 3 分，⑰⑲⑳式各 3 分，功率最大的条件 1 分，组合元件的设计方法 2 分。满分 35 分。

八、辐射的物理分析

（1）（a）由题意知，X 射线是阴极射线（电子流）打在靶原子上产生的。韧致辐射中没有分立的谱线，故并不是由量子效应所产生，根据题干的提示，容易猜测该类辐射是由电子在于靶原子碰撞后减速时发生电磁辐射而产生。对一个电子分析，对于加速过程，由动能定理

$$eU=E_k \quad ①$$

加速后的电子与靶原子发生碰撞从而减速，碰撞中电子将损失一部分能量，转化为电磁波的能量。极限情况下，电子的动能全部损失（完全非弹性碰撞），全部转化为电磁波的能量，此时波长达到最小值，即

$$E_k=\frac{hc}{\lambda_0} \quad ②$$

联立①②式得

$$\lambda_0=\frac{hc}{eU} \quad ③$$

（b）根据题意，特征谱线是由量子效应引起的。根据玻尔理论，当中心电荷数为 Z 时，核外第 n 能级的能量 E_n 满足：

$$E_n=\frac{1}{2}mv^2-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} \quad ④$$

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}=m\frac{v^2}{r_n} \quad ⑤$$

$$mvr_n=n\hbar\left(n=1,2,3,\cdots\right) \quad ⑥$$

联立④⑤⑥式得核外电子的能级公式：

$$E_n=-\frac{mZ^2e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2n^2\hbar^2}=-\frac{mZ^2e^4}{8n^2\varepsilon_0^2h^2}\left(n=1,2,3,\cdots\right) \quad ⑦$$

在本题中，K 层的两个电子中有一个电子被电离，产生一个电子空穴。其它壳层的电子跃迁到 K 层产生辐射光子。注意到 K 层剩余电子的屏蔽作用，其它电子跃迁的全过程始终在 K 层外侧，而剩余电子在球对称区间内出现在任何位置概率与相对原子核的取向无关，故可近似将 Z 改取为 Z-1，利用⑦式得：

$$h\nu=\frac{m(Z-1)^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^2}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right) \quad ⑧$$

这里的 n 表示跃迁电子初始时所在的能级的主量子数（即⑦式中的 n）。由此即得 K-X 射线频率的量子表达式：

$$\nu=\frac{m(Z-1)^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^3}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)(n=2,3,4,\cdots) \quad ⑨$$

（2）由惠更斯原理及类比力学中的冲击波（艏波）现象，容易看出

$$\cos\theta=\frac{c}{nv}=\frac{1}{n\beta} \quad ⑩$$

其中 $\beta=\frac{v}{c}$，为方便后续计算，再引入 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$，则根据相对论质量变换公式

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma m_0c^2 \quad ⑪$$

根据相对论的能量动量关系

$$E=\sqrt{P^2c^2+m_0^2c^4} \quad ⑫$$

当粒子速度很大时，$P\gg m_0c$，故 $E\approx Pc$，代入⑪式得

$$\gamma=\frac{P}{m_0c} \quad ⑬$$

将上式两边微分（由于相对误差都是正值，这里不考虑求微分后的正负号问题），得

$$d\gamma=\frac{P}{m_0^2c}dm_0 \quad ⑭$$

再次利用速度很大的条件作近似和微分：

$$\beta=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\approx1-\frac{1}{2\gamma^2}\Rightarrow d\beta=\frac{d\gamma}{\gamma^3} \quad ⑮$$

⑩式两端求微分可得

$$\sin\theta d\theta=\frac{d\beta}{n\beta^2} \quad ⑯$$

联立⑬⑭⑮⑯式得（可以将 $d\theta$ 换成 $\delta\theta$）

$$\frac{dm_0}{m_0}=\frac{v}{c^2-v^2}\sqrt{n^2v^2-c^2}\,\delta\theta \quad ⑰$$

（3）设电子由于电磁辐射受到的阻力为 F，则该阻力作的负功率应等于辐射功率，即

$$-\int_{t_1}^{t_2}Fvdt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{c^3}\dot{v}^2dt=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\int_{t_1}^{t_2}\dot{v}dv \quad ⑱$$

根据题给的分部积分公式，有

$$\int\dot{v}dv=\Delta(v\dot{v})-\int vd\dot{v}=\Delta(v\dot{v})-\int v\ddot{v}dt \quad ⑲$$

将积分上下限之间取成一个周期，则由于辐射作用较弱，$v\dot{v}$ 不变，故由⑱⑲式得

$$F=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\ddot{v} \quad ⑳$$

故可以列出电子的完整动力学方程：

$$m\ddot{x}=-kx+\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\dddot{x} \quad (21)$$

按照题中所给的提示，可以作为零级近似，先忽略辐射阻尼项，则方程变为无阻尼自由振动方程，其解显然为

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{22}$$

由（22）式可得 $\ddot{x} = -\frac{k}{m}\dot{x}$，因此（21）式转化为

$$\ddot{x} + \frac{e^2 k}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{23}$$

这是一个标准的阻尼振动方程，其通解为

$$x(t) = x_0 \exp\left(-\frac{ke^2}{12\pi\varepsilon_0 mc^3}t\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k^2 e^4}{144\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 c^6}}t\right) \tag{24}$$

评分标准：第（1）问 17 分，第（2）问 13 分，第（3）问 20 分。①②③式每式 2 分，④⑤⑥式每式 1 分，⑦式 3 分，⑧式 4 分，⑨式 1 分，⑩式 3 分，⑪⑫⑬式各 1 分，⑭⑮⑯式各 2 分，⑰式 1 分，⑱⑲式各 2 分，⑳式 3 分，（21）式 2 分，近似过程 3 分，（22）（23）式 2 分，（24）式 4 分。满分 50 分。