培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（十）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

题一：二、解：由于弹性绳只有在拉伸时才有张力，故本题要分段讨论．如图，沿小球运动方向建立坐标轴 Ox，O 在平衡位置．

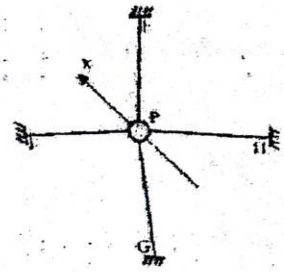


图 1

令小球在任一位置 P(x)处（$-3\sqrt{2}a\le x\le 3\sqrt{2}a$）．四根绳的固定点为 E、F、G、H．则

$$PE=PF=\sqrt{(a+l)^2+x^2-\sqrt{2}(a+l)x}\doteq l+a-\frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$PG=PH=\sqrt{(a+l)^2+x^2+\sqrt{2}(a+l)x}\doteq l+a+\frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

（忽略了二阶及二阶以上小量）

可见，$x=\sqrt{2}a$ 是 PE、PF 紧张、松弛的变化点，$x=-\sqrt{2}a$ 是 PG、PH 紧张、松弛的变化点．

小球所受的弹力和它的弹性势能分别是（只分析 $x>0$ 的情形）

当 $x\ge\sqrt{2}a$ 时，$f=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2k(a+\frac{\sqrt{2}}{2}x)=-k(\sqrt{2}a+x)$，$E=\frac{1}{2}k(\sqrt{2}a+x)^2$，

当 $0\le x<\sqrt{2}a$ 时，$f=\frac{\sqrt{2}}{2}[2k(a-\frac{\sqrt{2}}{2}x)-2k(a+\frac{\sqrt{2}}{2}x)]=-2kx$，$E=k(2a^2+x^2)$．

小球由 $x=3\sqrt{2}a$ 运动到 $x=\sqrt{2}a$ 的过程中作角频率为 $\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 的简谐振动，其平衡位置为 $x=-\sqrt{2}a$．所需时间为

$$t_1=\frac{\arccos\frac{\sqrt{2}a+\sqrt{2}a}{3\sqrt{2}a+\sqrt{2}a}}{\omega_1}=\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}},$$

小球由 $x=\sqrt{2}a$ 运动到 $x=0$ 的过程中作角频率为 $\omega_2=\sqrt{\frac{2k}{m}}$ 的简谐振动，其平衡位置为 $x=0$．设等效振幅为 A，因为小球总能量 $E(3\sqrt{2}a)=16ka^2$，有

$$k(2a^2+A^2)=16ka^2,$$

故 $A=\sqrt{14}a$．该过程所需时间为

$$t_2=\frac{\arcsin\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{14}a}}{\omega_2}=\sqrt{\frac{m}{2k}}\arcsin\frac{\sqrt{7}}{7},$$

从而，小球振动的周期

$$T=4(t_1+t_2)=4\sqrt{\frac{m}{k}}(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{7}}{7}),$$

题二：

解：(1) 设地月距离为 $r_月$（一般的，解答中约定以大写的 R 代表星球半径，小写的 r 代表轨道半径），由开普勒定律

$$\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM},$$

得到

$$r_月=\sqrt[3]{\frac{G(M_E+M_月)T_月^{\ 2}}{4\pi^2}}=3.846\times10^8\ \mathrm{m},$$

在地球参考系中

$$v_月=\frac{2\pi r_月}{T_月}=1.024\times10^3\ \mathrm{m/s},$$

类似的推导可以得到

$$r_E=\sqrt[3]{\frac{GM_S T_E^{\ 2}}{4\pi^2}}=1.495\times10^{11}\ \mathrm{m},$$

地球相对于太阳的速度

$$v_E=\frac{2\pi r_E}{T_E}=2.979\times10^4\ \mathrm{m/s},$$

设飞船在月球表面的速度为 v_0，飞船飞离月球引力场时的速度为 v_1，则

$$-\frac{GM_月 m}{R_月}+\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}=\frac{1}{2}mv_1^{\ 2},$$

为获得最大的绝对速度，飞船飞离月球引力场时速度应与 v 月平行．转入地球引力场中考虑，设飞船离开地球引力场时的速度为 v_2，则

$$-\frac{GM_E m}{r_月}+\frac{1}{2}m(v_1+v_月)^2=\frac{1}{2}mv_2^{\ 2},$$

同样，为获得最大的绝对速度，飞船飞离地球引力场时速度应与 v_E 平行．转入太阳引

力场中考虑，若飞船可巧好离开太阳系，有

$$-\frac{GM_S m}{r_E}+\frac{1}{2}m(v_2+v_E)^2=0,$$

从而，飞船离开太阳系时的速度

$$u_0=v_2+v_E=\sqrt{\frac{2GM_S}{r_E}}=4.214\times10^4\ \mathrm{m/s},$$

有

$$v_2=u_0-v_E=1.235\times10^4\ \mathrm{m/s},$$

$$v_1=\sqrt{\frac{2GM_E}{r_月}+v_2^2}-v_月=1.141\times10^4\ \mathrm{m/s},$$

$$v_0=\sqrt{\frac{2GM_月}{R_月}+v_1^2}=1.165\times10^4\ \mathrm{m/s}\ ,$$

这就是飞船在月球表面应获得的最小的速度. 飞船将沿与地球轨道向切的抛物线轨道飞离太阳系.

(2) 用上面的方法，可以得到

木星

$$r_J=\sqrt[3]{\frac{GM_S T_J^2}{4\pi^2}}=7.782\times10^{11}\mathrm{m},$$

$$v_J=\frac{2\pi r_J}{T_J}=1.306\times10^4\ \mathrm{m/s},$$

火星

$$r_M=\sqrt[3]{\frac{GM_S T_M^2}{4\pi^2}}=2.280\times10^{11}\mathrm{m},$$

$$v_M=\frac{2\pi r_M}{T_M}=2.413\times10^4\ \mathrm{m/s},$$

飞船进入木星公转轨道时的速度为

$$u_1=\sqrt{\frac{2GM_S}{r_J}}=1.847\times10^4\ \mathrm{m/s},$$

其中，沿轨道方向的速度可由角动量守恒得到

$$u_{1\tau}=\frac{u_0 r_E}{r_J}=8.096\times10^3\ \mathrm{m/s},$$

垂直于轨道方向的速度

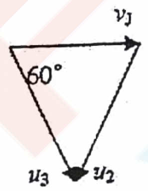
$$u_{1t}=\sqrt{{u_1}^2-{u_{1\tau}}^2}=1.660\times10^4\ \mathrm{m/s},$$

在木星系看来，飞船进入木星引力场时的速度

$$u_{2\tau}=u_{1\tau}-v_J=-4.964\times10^3\ \mathrm{m/s},$$

$$u_{2t}=u_{1t}=1.660\times10^4\ \mathrm{m/s},$$

$$u_2=\sqrt{{u_{2\tau}}^2+{u_{2t}}^2}=1.733\times10^4\ \mathrm{m/s},$$



当飞船飞离木星引力场时，飞船相对于木星的速度为 u_2，设飞船对太阳的速度为 u_3，由速度合成

$${u_3}^2+{v_J}^2-2u_3v_J\cos60°={u_2}^2,$$

解得

$$u_3=1.966\times10^4\ \mathrm{m/s},$$

新轨道的能量与角动量为

$$\frac{E}{m}=-\frac{GM_S}{r_J}+\frac{{u_3}^2}{2}=2.269\times10^7\ \mathrm{J/kg},$$

$$h=u_3r_J\cos60°=7.650\times10^{15}\ \mathrm{m^2/s},$$

由题二推导的公式

$$r_0=\frac{h^2}{GM_S}=4.409\times10^{11}\ \mathrm{m},$$

$$e=\sqrt{1+\frac{2E}{m}\frac{h^2}{G^2{M_S}^2}}=1.073,$$

日

从而近地点

$$r_1=\frac{r_0}{1+e}=2.127\times10^{11}\ \mathrm{m},$$

速度

$$u = \frac{h}{r_1} = 3.597 \times 10^4 m/s$$

日

(3) 在近地点改变轨道后，新轨道的近地点，远地点分别为

$$r_1 = 2.127 \times 10^{11} m, \quad r_2 = r_M = 2.280 \times 10^{11} m,$$

而

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{r_0} = \frac{GM_S}{h^{*2}},$$

故

$$h^* = \sqrt{\frac{GM_S}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}} = 3.822 \times 10^{15} m^2/s,$$

日

从而近地点所需速度

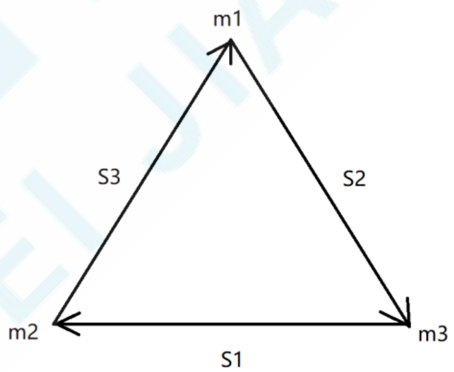
$$u^* = \frac{h^*}{r_1} = 1.797 \times 10^4 m/s,$$

故应减速

$$\Delta u = u - u^* = 1.800 \times 10^4 m/s.$$

题三：

如图设出三个矢量



根据万有引力定律和牛顿第二定律可知

$$\frac{d^2\overrightarrow{r_1}}{dt^2} = \frac{Gm_3}{S_2^3}\overrightarrow{S_2} - \frac{Gm_2}{S_3^3}\overrightarrow{S_3}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{r_2}}{dt^2}=\frac{Gm_1}{S_3^3}\overrightarrow{S_3}-\frac{Gm_3}{S_1^3}\overrightarrow{S_1}$$

两式相减得到

$$\frac{d^2\overrightarrow{S_3}}{dt^2}=\mathrm{Gm_3}\vec{\mathrm{H}}-\frac{G(m_1+m_2+m_3)}{\mathrm{S_3^3}}\overrightarrow{S_3}$$

上式中

$$\vec{\mathrm{H}}=\Sigma\frac{\overrightarrow{S_\iota}}{\mathrm{S_i^3}}$$

同理可知

$$\frac{d^2\overrightarrow{S_\iota}}{dt^2}=Gm_{\mathrm{i}}\vec{H}-\frac{G(m_1+m_2+m_3)}{S_{\mathrm{i}}^3}\overrightarrow{S_\iota}$$

根据初始状态的几何关系可以得知

$$\mathrm{H}=0$$

因此可以写出运动学方程

$$\frac{d^2\overrightarrow{S_\iota}}{dt^2}=-\frac{G(m_1+m_2+m_3)}{S_{\mathrm{i}}^3}\overrightarrow{S_\iota}$$

这样可以发现三个矢量 S 拥有相同的变化规律，因此其将按照相同的规律变化，可知此后的三个质点一直在等边三角形上

2、由上一问可以知道，这个方程就是粒子在平方反比力中运动的方程，因此为了使得其之间的距离在有限值中间变化，应该要求

$$\frac{1}{2}\mathrm{v}_{相}^2-\frac{G(m_1+m_2+m_3)}{S_{相}}<0$$

代入可得

$$\mathrm{v}<\sqrt{\frac{2\mathrm{G}(\mathrm{m_1}+\mathrm{m_2}+\mathrm{m_3})}{3\mathrm{l}}}$$

3、对于上述的运动学方程可以应用开普勒第三定律解得周期

$$\mathrm{T}=2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{G}(\mathrm{m_1}+\mathrm{m_2}+\mathrm{m_3})}}$$

利用初始条件可以解得半长轴 a

$$\frac{1}{2}\mathrm{v}_{相}^2-\frac{\mathrm{G}(m_1+m_2+m_3)}{\mathrm{l}}=-\frac{G(m_1+m_2+m_3)}{2\mathrm{a}}$$

代入解得 a

再代入上述的周期之中可以解得周期

$$T=2\pi G(m_1+m_2+m_3)l\sqrt{\frac{\mathrm{l}}{[2G(m_1+m_2+m_3)-3v^2l]^3}}$$

题四：

（1）S系中P_1开始加速时刻t_{10}和停止时刻t_{1e}分别为

$$t_{10}=\frac{t'_{10}+\frac{v}{c^2}x'_{10}}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big|_{\beta=0.6,t'_{10}=0,x'_{10}=0}=0,\quad t_{1e}=\frac{t'_{1e}+\frac{v}{c^2}x'_{1e}}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big|_{t'_{1e}=1s,x'_{1e}=\frac{1}{2}a_0t'^2_{1e}=0.4cs}=\frac{1.24}{0.8}s=1.55s$$

S系中P_2开始加速时刻t_{20}和停止时刻t_{2e}分别为

$$t_{20}=\frac{t'_{20}+\frac{v}{c^2}x'_{20}}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big|_{t'_{20}=0,x'_{20}=0.6cs}=0.45s$$

$$t_{2e}=\frac{t'_{2e}+\frac{v}{c^2}x'_{2e}}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big|_{t'_{2e}=1s,x'_{2e}=x'_{20}+\frac{1}{2}at'^2_{2e}=1cs}=2s$$

S系中P_1、P_2末速度朝右，大小同为

$$v''_e=\frac{v'_e+v}{1+\frac{v}{c^2}v'_e}\Big|_{v'_e=a_0t'_e=0.8c}=\frac{1.4}{1.48}c=\frac{35}{37}c$$

（1.1） t=1s 时， S系认为P_1、P_2均处于变速运动状态，P_1运动方程：

S'系：$x'_1=\frac{1}{2}a_0t'^2_1$

S系：$\frac{x_1-vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}}=x'_1=\frac{1}{2}a_0t'^2_1=\frac{1}{2}a_0\left(\frac{t_1-\frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2$

$\Rightarrow x_1-0.6cs=\frac{1}{2}0.8\frac{c}{s}\frac{(1-0.6x_1)^2s^2}{0.8}=0.5(1-1.2x+0.36x_1^2)cs$

$\Rightarrow 2x_1-1.2cs=1cs-1.2x+0.36x_1^2$

$\Rightarrow 0.36x_1^2-3.2x+2.2=0, x_1$单位 cs

$\Rightarrow x_1=\frac{1}{2\times0.36}(3.2\pm\sqrt{(3.2)^2-4\times0.36\times2.2})cs=\begin{cases}8.14cs\\0.751cs\end{cases}$

为使$t'_1=\frac{t_1-\frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}>0$，故应将$x_1$=8.14cs 舍去。

得 x_1'=0.751cs

P_2的运动方程：

S'系：$x'_2=x'_{20}+\frac{1}{2}a_0t'^2_2$

S系：$\frac{x_2-vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}}=x'_2=x'_{20}+\frac{1}{2}a_0t'^2_2=L_0+\frac{1}{2}a_0\left(\frac{t_2-\frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2$

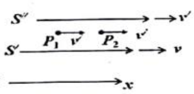
$\Rightarrow x_2-0.6cs=0.8\times0.6cs+\frac{1}{2}\times0.8\frac{c}{s}\frac{(1-0.6x_2)^2s^2}{0.8}=0.48cs+0.5\times(1-1.2x_2+0.36x_2^2)cs$

$\Rightarrow 2x_2-1.2cs=0.96cs+1cs-1.2x_2+0.36x_2^2$

$\Rightarrow 0.36x_2^2-3.2x_2+3.16=0$，$x_2$单位 cs

$\Rightarrow x_2=\frac{1}{2\times0.36}(3.2\pm\sqrt{(3.2)^2-4\times0.36\times3.16})cs=\begin{cases}7.76cs\\1.13cs\end{cases}$

为使$t'_2=\frac{t_2-\frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}>0$，故应将$x_2$=7.76cs 舍去。



得 x_2=1.13cs

最终得 $L_1=x_2-x_1$=0.379cs

（1.2）t=2s 时，S系认为P_1、P_2均已处于匀速运动状态，它们的间距L_2从此保持不变。设置沿x'轴相对S'系的速度$v'=a_0t_e'$=0.8c

运动的惯性系S''，如图 1 所示。S''系既不认可P_1、P_2同时变速，也不认可它们同时停止变速。但经过足够长的时间后，必然认可P_1、P_2间距恒为L_0，此L_0即为速度v'=0.8c 运

动直尺 P_1P_2 的长度，有 $L_0=L_{动}=\sqrt{1-\beta^2}L_{静}\Rightarrow L_{静}=L_0/\sqrt{1-\beta'^2}\,|_{\beta'=\frac{v'}{c}=0.8}$

S'' 系相对 S 系沿 x 轴运动速度为 $v''=\dfrac{v'+v}{1+\dfrac{v}{c^2}v'}\Big|_{v=0.6c,v'=0.8c}=\dfrac{35}{37}c$

S 系中直尺 P_1P_2 的运动长度即为 L_2，故有

$$L_2=\sqrt{1-\beta''^2}L_{静}=[\sqrt{1-\beta''^2}/\sqrt{1-\beta'^2}]L_0\,\Big|_{\beta'=\frac{4}{5},\beta''=\frac{35}{37}}=\frac{20}{37}L_0$$

$$\Rightarrow L_2=\frac{12}{37}cs=0.324cs$$

（1.3）S 系中 P_1 于 $t_{10}=0$ 先沿 x 轴加速，P_2 于 $t_{20}=0.45\text{s}$ 后加速；P_1 于 $t_{1e}=1.55\text{s}$ 相对 S 系先达到 $v''=\dfrac{35}{37}c$ 速度，P_2 于 $t_{2e}=2\text{s}$ 相对 S 系后达到 $v_e''=\dfrac{35}{37}c$。整个过程中，P_1 追击 P_2 的右行（沿 x 轴）相对速度一直大于零，故其间距离一直缩短，直到最后达到 L_2 后不再变化，据此可知：

$$L_{\min}=L_2=\frac{12}{37}cs=0.324\text{cs}$$

$$L_{\max}=\sqrt{1-\beta^2}L_0=\frac{12}{25}cs=0.48cs$$

（2）S 系中 P_1 开始右行（沿 x 轴负方向）加速时刻 t_{10} 和停止加速时刻 t_{1e} 分别为：

$$t_{10}=0$$

$$t_{1e}=\frac{t_{1e}'+\dfrac{v}{c^2}x_{1e}'}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big|_{t_{1e}'=1s,x_{1e}'=-\frac{1}{2}at_{1e}'^2=-0.4cs}=0.95s$$

S 系中 P_2 开始左行加速时刻 t_{20} 和停止加速时刻 t_{2e} 分别为

$$t_{20}=0.45\text{cs}$$

$$t_{2e}=\frac{t_{2e}'+\dfrac{v}{c^2}x_{2e}'}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big|_{t_{2e}'=1s,x_{2e}'=x_{20}'-\frac{1}{2}at_{2e}'^2=0.2cs}=1.4s$$

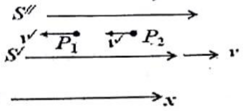
S 系中 P_1、P_2 初速朝右，沿 x 轴方向值 v=0.6c；S 系中 P_1、P_2 末速朝左，沿 x 轴方向值为：

$$v''=\frac{v_e'+v}{1+\dfrac{v}{c^2}v_e'}\Big|_{v=0.6c,v_e'=-at_e'=-0.8c}=-\frac{5}{13}c$$

S 系中 P_1 于 $t_{10}=0$ 先朝左加速，P_2 于 $t_{20}=0.45\text{s}$ 后朝左加速；P_1 于 $t_{1e}=0.95\text{s}$ 相对 S 系先达到左行速度$|v''|=\dfrac{5}{13}c$，P_2 于 $t_{2e}=1.4\text{s}$ 相对 S 系后达到左行速度$|v'|=\dfrac{5}{13}c$。整个过程中 P_1、P_2 间的分离速度一直大于零，故其间距离一直在增大，直到最后 $t_{2e}=1.4\text{s}$ 时两者间相对速度降为零，间距达最大 $L_{\max}$，而后不再变化，据此可知

$$L_{\min}=\sqrt{1-\beta^2}L_0=\frac{12}{25}cs=0.48cs$$

为求 $L_{\max}$，仿照（1.3）的求解，设置沿 x' 轴相对 S' 系以速度 $v'=-at_e'=-0.8c$。



10

运动的惯性系 S'，如题图 2 所示。S'' 系既不认可 P_1、P_2 同时变速，也不认可它们同时停止变速。但经过足够长的时间后，必然认可 P_1、P_2 均相对 S'' 静止，其间距离记为 $L_{静}$，S' 系中 P_1、P_2 间距恒为 L_0，即有：

$$L_0=L_{动}=\sqrt{1-\beta'^2}L_{静}\Rightarrow L_{静}=L_0/\sqrt{1-\beta'^2}\,\Big|_{\beta'=\frac{v'}{c}=-0.8}$$

S'' 系相对 S 系沿 x 轴运动速度为 $v''=-\dfrac{5}{13}c$

故 S 系中测得的 P_1、P_2 间距即 $L_{\max}$ 为

$$L_{\max}=\sqrt{1-\beta''^2}L_{静}=[\sqrt{1-\beta''^2}/\sqrt{1-\beta'^2}]L_0\,\Big|_{\beta'=-\frac{4}{5},\beta''=-\frac{5}{13}}=\frac{20}{13}L_0\Rightarrow L_{\max}=\frac{12}{13}cs=0.923cs$$

题五:

解：(1) 设此时压强为 p_1，能顶起重物要求：$p_1S = p_0S + mg$。

由理想气体状态方程得到：$\dfrac{p_0V_0}{T_0} = \dfrac{p_1V_0}{T_1}$，得 $T_1 = (\dfrac{mg}{p_0S}+1)T_0$。

(2) 过程中没有做功也没有散热，由热力学第一定律，吸收的热量用来增加气体的内能，设气体摩尔数为 n_0，则有：

$$Q_1 = n_0C_V(T_1 - T_0) = 2.5(n_0RT_1 - n_0RT_0)$$

由理想气体状态方程得到：

$$Q_1 = 2.5(p_1V_0 - p_0V_0) = \frac{2.5mgV_0}{S}$$

(3) 由于吸热总量大于 Q_1，因此会有部分气体从气阀喷出，喷出时可认为锅内压强不变，体积也不变，设某时刻内部剩余气体摩尔数变为 n，温度变为 T，则有：

$$p_1V_0 = nRT$$

因此得到变化量之间的关系：

$$nRdT + RTdn = 0$$

由热力学第一定律，往外喷的时候吸收的热量用于锅内气体内能增加和喷出气体做功：

$$nC_VdT + p_1dV = dQ$$

喷出气体所占的体积与喷出气体的摩尔数成正比，因此有：$\dfrac{dV}{V_0} = -\dfrac{dn}{n}$

综合以上三个式子得到：$(2.5nR + \dfrac{p_1V_0}{T})dT = dQ$

得到：$\dfrac{dV}{V_0} = \dfrac{dQ}{3.5p_1V_0}$

从开始喷出到吸收的总热量为 Q_2 为止积分：$\displaystyle\int_{T_1}^{T}\frac{dT}{T} = \int_{Q_1}^{Q_2}\frac{dQ}{3.5p_1V_0}$

得到 $$T_2 = T_1\exp(\frac{Q_2-Q_1}{3.5p_1V_0}) = T_0(\frac{mg}{p_0S}+1)\exp[\frac{Q_2 - \frac{2.5mgV_0}{S}}{3.5(\frac{mg}{S}+p_0)V_0}]$$

(4) 之后为等容过程，压强与热力学温度成正比，因此有：

$$p_3 = p_1\frac{T_0}{T_2} = p_0\exp[\frac{-Q_2 + \frac{2.5mgV_0}{S}}{3.5(\frac{mg}{S}+p_0)V_0}]$$

题六：

解 (a) 不妨设立方体顶角 A 接电源正极．由于对称性，A 点的三条边流出的电流相等，设为 i．同样 G 点的三条边流过的电流相等，由于电荷守恒，应与 A 点的三条边流出的电流相等，也为 i．在 B 点，由于对称性，BC、BF 中的电流应相同．再根据基尔霍夫第一定理，BC、BF 中的电流为 $i/2$．这样 AG 间的电阻为

$$R_{AG}=\frac{U_{AG}}{I}=\frac{U_{AB}+U_{BC}+U_{CG}}{3i}=\frac{iR+iR/2+iR}{3i}=\frac{5}{6}R$$

另解 由于对称性，B、D 和 E 三点电势相等，故可以用导线连接而不会改变线路的电流状态．对于 C、H 和 F 来说，情况也一样．故 AB、AD、AE 可视为并联，CG、FG、HG 也一样．可得 12 个阻值为 R 的电阻的等效电路如题图 3.19(b)所示．这也是简单的串并联电路，故 AG 间的电阻为

$$R_{AG}=\frac{1}{3}R+\frac{1}{6}R+\frac{1}{3}R=\frac{5}{6}R$$

(b) 若电源在 G 点的接线沿一条边做微小移动，由于对称性，沿 GC、GE、GH 效果是一样的，不妨设沿 GC 移动到 S 点，如题图 3.19(c)所示．假设 $|GS|/|GC|=x$，因导线电导率均匀，从而 GS 间电阻为 xR，而 CS 间电阻为 $(1-x)R$．这一立方体电路关于 $ACGE$ 面对称，可将它视为相同两部分电路的并联，每一部分的等效电路如题图 3.19(d)所示．电流也已在图中标出，如果求得某一电阻的电流为负值，则表示电流方向与假设的相反．设 AS 间的电压为 V，根据基尔霍夫定律列出节点和回路方程如下

$$i_1=i_3+j \tag{1}$$

$$i_2=i_4-j \tag{2}$$

$$i_1R+jR=i_2(R+2R) \tag{3}$$

$$jR+i_4(R+2xR)=i_3(R+2R-2xR) \tag{4}$$

$$i_1R+i_3(R+2R-2xR)=V \tag{5}$$

由式(1)~式(4)解得

$$i_2=\frac{4-x}{8+x}i_1,\qquad i_3=\frac{4+5x}{8+x}i_1 \tag{6}$$

代入式(5)即得 i_1，这样得 i_1，i_2 如下

$$i_1=\frac{8+x}{20+8x-10x^2}\cdot\frac{V}{R},\qquad i_2=\frac{4-x}{20+8x-10x^2}\cdot\frac{V}{R} \tag{7}$$

这样求得等效电路的电阻为

$$R'=\frac{V}{i_1+i_2}=\frac{20+8x-10x^2}{12}R=\frac{10+4x-5x^2}{6}R$$

因此 AS 间的电阻为

$$R_{AS}=R'/2=\frac{10+4x-5x^2}{12}R \tag{8}$$

由此可见，若电源在 G 点的接线沿一条边做微小移动(x 很小)，则该电源的外电阻将增大，若移动到 x=2/5 则达到最大．此外式(8)中取 x=1 则又给出题 3.18 的结果．

题七：

解：(1) 粒子圆运动的向心力由电场力提供，则 $qE=\frac{qk}{R}=m\frac{v_0^2}{R}$，得 $v_0=\sqrt{\frac{kq}{m}}$ ①

(2) 当 v_0 方向偏离小角度 β 时，粒子运动可以近似处理为圆运动与径向运动的叠加，相应地可将电场力分解为做圆运动的向心力和径向小运动所需的径向力，若径向力为线性恢复力，则径向小运动为简谐运动，粒子从 A 点运动 P 点的所需的时间应为径向简谐运动的半周期，在此半周期内圆运动的转角即为方位角 θ。

粒子在半圆轨道上任意一点处(离轴线距离为 r)所受电场力分解为两个力：圆运动的向心力 F_0 和径向力 F_r，即 $-q\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}_0+\boldsymbol{F}_r$。

以径向向外为正，则将 $E=\frac{k}{r}$，$F_0=-m\frac{v_\theta^2}{r}$ 代入，其中 v_θ 是圆运动速度，得 $F_r=-\frac{kq}{r}+m\frac{v_\theta^2}{r}$ ②

设粒子在 r 处径向速度为 v_r，总速度值为 v，则 $v^2=v_\theta^2+v_r^2$。

由能量守恒得 $\frac{1}{2}mv^2+(-q)U(r)=\frac{1}{2}mv_0^2+(-q)U(R)$，

代入 $U(r)=k\ln\frac{b}{r}$，$U(R)=k\ln\frac{b}{R}$，

得 $v_\theta^2=\left(v_0^2-\frac{2qk}{m}\ln\frac{r}{R}\right)-v_r^2$。

设 $\Delta r=r-R$，并利用①式化简得

$$v_\theta^2=v_0^2\left[1-2\ln\left(1+\frac{\Delta r}{R}\right)\right]-v_r^2=v_0^2\left(1-\frac{2\Delta r}{R}\right)-v_r^2=v_0^2\left(1-\frac{2\Delta r}{R}\right) \quad ③$$

这是利用小偏离关系 $\Delta r\ll R$，所以 $\ln\left(1+\frac{\Delta r}{R}\right)=\frac{\Delta r}{R}$，同样因小偏离，有 $v_r\ll v_\theta$，将式③代入式②

$$F_r=-\frac{kq}{r}+\frac{mv_0^2}{r}\left(1-\frac{2\Delta r}{R}\right)=-\frac{2mv_0^2\Delta r}{Rr}=-\frac{2mv_0^2}{R^2}\Delta r。$$

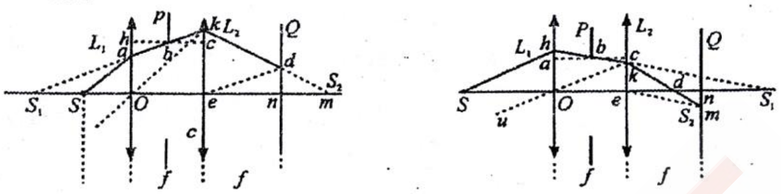
可见，F_r 为线性恢复力，其周期为 $T=2\pi\sqrt{\frac{R^2}{2v_0^2}}=\sqrt{2}\pi R/v_0$。

粒子经半周期后从 A 点到达 P 点，转过角度为 $\theta=\frac{v_0}{R}\cdot\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}=127°$。

可见 θ 与 β 无关，即 P 点与 β 值无关。

题八：

【解析】情形 1：光路图如图(a) 所示，副光轴 ok、ed 分别与光线 Sa、ak 平行. Sa、ak、cd 分别为边缘光线. $\triangle den \sim \triangle kbc$，得：



(a) (b)

第六题

$$\frac{kc}{0.2D}=\frac{1}{2} \tag{1}$$

解得：$kc=0.1D$. $aO=0.4D$，$ek=0.6D$. $\triangle OaS_1 \sim \triangle ecS_1$，得 S 经 L_1 所成像像距 v_1 满足：

$$\frac{v_1}{v_1+f}=\frac{0.4D}{0.6D}=\frac{2}{3} \tag{2}$$

物距 u 满足：

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{-v_1}=\frac{1}{f} \tag{3}$$

解得：$v_1=2f$，$u=\frac{2f}{3}$. 由光路图定性分析可知，u 越小，在屏上光斑面积就越大. 因而，为使 L_1 左方主轴上的发光点 S 在 Q 上所成光斑的直径不超过 $0.4D$，则 $u \geqslant \frac{2f}{3}$.

情形 2：成像光路图如图(b) 所示. $\triangle enm \sim \triangle bck$，得：

$$\frac{kc}{0.2D}=\frac{1}{2} \tag{4}$$

$kc=0.1D$，$aO=0.6D$，$ek=0.4D$.

$\triangle OaS_1 \sim \triangle ecS_1$，得：

$$\frac{v_1}{v_1-f}=\frac{0.6D}{0.4D}=\frac{3}{2} \tag{5}$$

物距 u 满足：

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v_1}=\frac{1}{f} \tag{6}$$

解得：$v_1=3f$，$u=\frac{3f}{2}$. 由光路图定性分析可知，u 越大，在屏上光斑面积就越大. 因而，为使 L_1 左方主

轴上的发光点 S 在 Q 上所成的光斑的直径不超过 0.4D，则$u \le \frac{3f}{2}$，综合得$\frac{2f}{3} \le u \le \frac{3f}{2}$