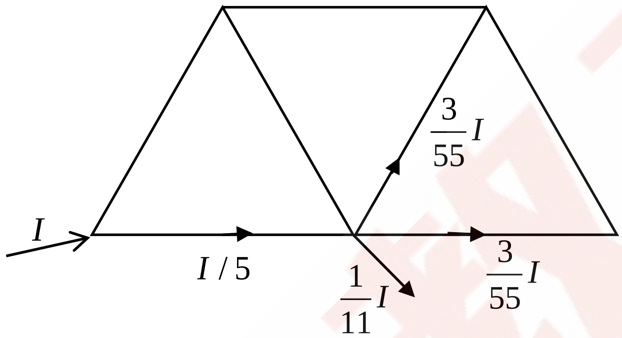
培尖教育2018年学科竞赛夏令营物理模拟卷（二）

考试时间：150分钟　　总分320分

（参考答案）

1、解：（1）根据电流分布法，从a点流入I，从其他所有节点流出$\frac{I}{11}$，再从除b点所有点流入一个$\frac{I}{11}$，从b点流出I，两者叠加相当于从a点流入$\frac{12}{11}I$，从b点流出$\frac{12}{11}I$

对于流入过程，有



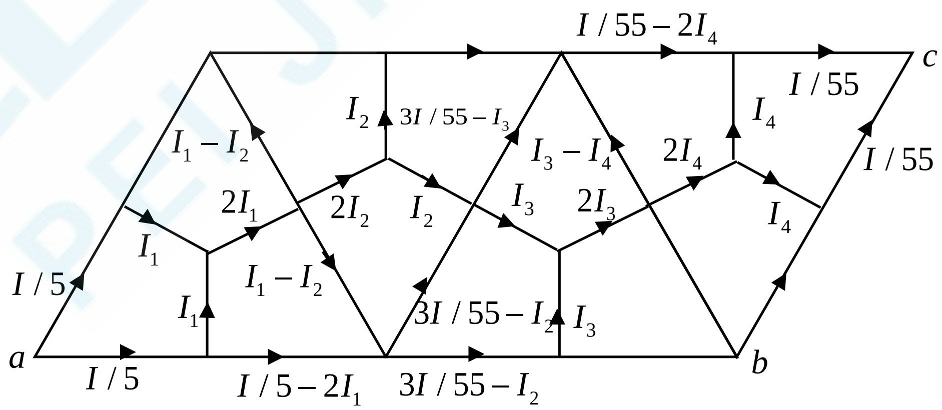
根据对称性可得a点流入过程电流如图分布，由于a、b点也是对称的，因而

$$U=2(\frac{I}{5}r+\frac{3}{55}Ir)=\frac{28}{55}Ir$$

进而可求得

$$R_{ab}=\frac{U}{12I/11}=\frac{7}{15}r$$

（2）仍采用电流分部法，仍是从a点流入I，从其他所有正二十面体节点流出$\frac{I}{11}$，再从除b点所有正二十面体节点点流入一个$\frac{I}{11}$，从b点流出I，两者叠加相当于从a点流入$\frac{12}{11}I$，从b点流出$\frac{12}{11}I$



如图所示，其中c是正二十面体中与a相对的点

根据基尔霍夫回路方程，可得

$$I_1\frac{r}{2}+2I_1\frac{r}{2}+(I_1-I_2)\frac{r}{2}-(\frac{I}{5}-2I_1)\frac{r}{2}=0$$

$$2I_2\frac{r}{2}+I_2\frac{r}{2}-(\frac{3I}{55}-I_2)\frac{r}{2}-(I_1-I_2)\frac{r}{2}=0$$

$$I_3\frac{r}{2}+2I_3\frac{r}{2}+(I_3-I_4)\frac{r}{2}-(\frac{3I}{55}-I_3)\frac{r}{2}=0$$

$$2I_4\frac{r}{2}+I_4\frac{r}{2}-(\frac{I}{55}-2I_4)\frac{r}{2}-(I_3-I_4)\frac{r}{2}=0$$

解得 $$I_1=\frac{2}{55}I, I_2=\frac{1}{55}I, I_3=\frac{19}{1595}I, I_4=\frac{8}{1595}I$$

考虑到对称性，可得压降为

$$U=2\left[\frac{I}{5}\frac{r}{2}+(\frac{I}{5}-2I_1)\frac{r}{2}+(\frac{3}{55}I-I_2)\frac{r}{2}+(\frac{3}{55}I-I_3)\frac{r}{2}\right]$$

因而电阻为

$$R_{ab}=\frac{U}{12I/11}=\frac{54}{145}r$$

2、解：（1）由能量守恒，可得

$$(2M+4m)gh=\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega_0{}^2\times 2+\frac{1}{2}\times 4m\omega_0{}^2r_0{}^2+\frac{1}{2}\times 4k(r_0-l_0)^2$$

受力上满足

$$m\omega_0{}^2r_0=k(r_0-l_0)$$

联立可得

$$(2M+4m)gh-\frac{1}{2}MR^2\omega_0{}^2-2m\omega_0{}^2l_0{}^2\left(\frac{k}{k-m\omega_0{}^2}\right)^2-2kl_0{}^2\left(\frac{m\omega_0{}^2}{k-m\omega_0{}^2}\right)^2=0$$

此即 ω_0 随时间的变化关系。

（2）角动量

$$L=MR^2\omega+4mr^2\omega$$

而 $$m\omega_0{}^2r=k(r-l_0)$$

联立可得

$$L=MR^2\omega+4ml_0{}^2\omega(\frac{k}{k-m\omega^2})^2$$

而有关系 $M_f=-\frac{dL}{dt}$

因而可得

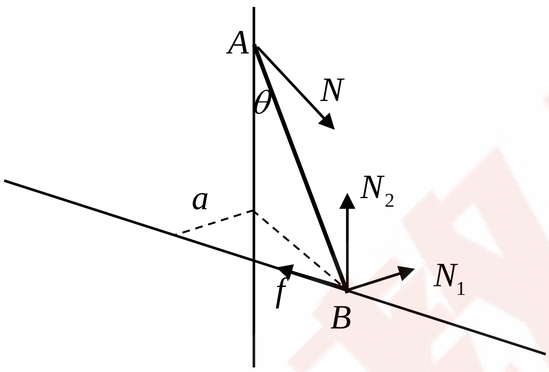
$$\frac{d\omega}{dt}=-\frac{M_f}{MR^2+\frac{16m^2k^2l_0{}^2\omega^2}{(k-m\omega^2)^3}+\frac{4mk^2l_0{}^2}{(k-m\omega^2)^2}}$$

（3）有 $L_0 - M_f t = 0$

而 $$L = MR^2\omega_0 + 4ml_0{}^2\omega_0(\frac{k}{k - m\omega_0{}^2})^2$$

因而可得 $$t = \frac{1}{M_f}\left[MR^2\omega_0 + 4ml_0{}^2\omega_0(\frac{k}{k - m\omega_0{}^2})^2\right]$$

3、如图所示



易得有力矩关系

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta = Nl\cos\theta$$

可得 $$N = \frac{mg}{2}\tan\theta$$

竖直方向，有

$$N_2 = mg$$

受力上又有

$$N\frac{a}{l\sin\theta} = N_1$$

$$N\frac{\sqrt{(l\sin\theta)^2 - a^2}}{l\sin\theta} = f$$

解得

$$N_1 = \frac{mga}{2l\cos\theta}$$

$$f = \frac{mg\sqrt{l\sin^2\theta - a^2}}{2l\cos\theta}$$

临界时 $$f = \mu\sqrt{N_1{}^2 + N_2{}^2}$$

有 $$\theta_{\max} = \arccos\sqrt{\frac{l^2 - (1+\mu^2)a^2}{(1+4\mu^2)l^2}}$$

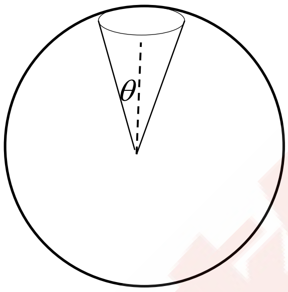
由于几何关系，有

$$\theta_{\min}=\arcsin\frac{a}{l}$$

因而可得

$$\arcsin\frac{a}{l}\le\theta\le\arccos\sqrt{\frac{l^2-(1+\mu^2)a^2}{(1+4\mu^2)l^2}}$$

4、解：（1）如图所示，θ是小角度



对那一小片区域，受力上满足

$$p\pi R^2\sin^2\theta=2a\times2\pi R\sin\theta\times\sin\theta$$

解得 $$p=\frac{4a}{R}$$

（2）当半径变为$R\to R+\vartriangle R$时，满足

$$p(R+\vartriangle R)^3=p_0R^3$$

可算出

$$p=\frac{4a}{R}(1-\frac{3\vartriangle R}{R})$$

仍对那一小块分析，受力上满足

$$\frac{4a}{R}(1-\frac{3\vartriangle R}{R})\pi(R+\vartriangle R)^2\sin^2\theta-2a\times2\pi(R+\vartriangle R)\sin\theta\times\sin\theta=\frac{1-\cos\theta}{2}m\vartriangle\ddot{R}$$

化简可得

$$-32a\pi\vartriangle R=m\vartriangle\ddot{R}$$

因而 $$t_1=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{32\pi a}{m}}}=\sqrt{\frac{\pi m}{8a}}$$

（3）易得

$$p(R+\vartriangle R)^{3\times\frac{7}{5}}=p_0R^{3\times\frac{7}{5}}$$

可算出 $p=\frac{4a}{R}(1-\frac{21\vartriangle R}{5R})$

仍对那一小块分析，有

$$\frac{4a}{R}(1-\frac{21\vartriangle R}{5R})\pi(R+\vartriangle R)^2\sin^2\theta-2a\times2\pi(R+\vartriangle R)\sin\theta\times\sin\theta=\frac{1-\cos\theta}{2}m\vartriangle\ddot{R}$$

化简可得

$$-\frac{256}{5}a\pi\vartriangle R=m\vartriangle\ddot{R}$$

因而可得

$$t_2=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{256a\pi}{5m}}}=\sqrt{\frac{5\pi m}{64a}}$$

可见有关系

$$t_1>t_2$$

5、解：（1）将速度分为径向速度 v_r 以及横向速度 $v_\perp$

则有 $L=mv_\perp r$

能量表达式为

$$E=V(r)+\frac{1}{2}mv_r{}^2+\frac{1}{2}mv_\perp{}^2$$

$$=\frac{1}{2}mv_r{}^2+\left[V(r)+\frac{L^2}{2mr^2}\right]$$

注意到由于有心力情况，角动量守恒，因而 $\frac{L^2}{2mr^2}$ 只与 r 有关，我们可以把能量表达式看成是在径向的动能和径向势能与有效势能的和，有效势能即 $\frac{L^2}{2mr^2}$；

（2）在径向上，受力为

$$F(r)=-\frac{dV_{eff}}{dr}=-V'(r)+\frac{L^2}{mr^3}$$

应当注意到，平衡时，满足

$$-V'(r_0)+\frac{L^2}{mr_0{}^3}=0$$

可得 $L^2=mr_0^3V'(r_0)$

若可以保持稳定平衡，要求

$$\left.\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0}=V''(r_0)+\frac{3mV'(r_0)}{r_0}>0$$

因而径向运动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{V''(r_0)+\frac{3mV'(r_0)}{r_0}}{m}}$$

6、解：（1）

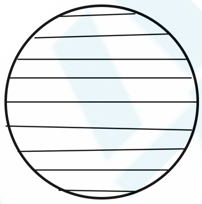
根据毕奥萨法尔拉普拉斯定律，可得

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ib}{(r-a/2)^2}-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ib}{(r+a/2)^2}-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia}{r^2}\frac{b}{2r}-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia}{r^2}\frac{b}{2r}$$

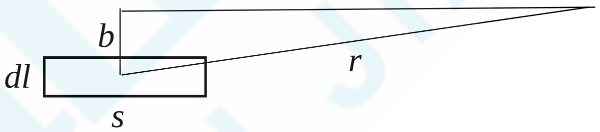
化简可得

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ib}{r^2}(1+\frac{a}{r})-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ib}{r^2}(1-\frac{a}{r})-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia}{r^2}\frac{b}{2r}-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia}{r^2}\frac{b}{2r}=\frac{\mu_0 Iab}{4\pi r^3}$$

（2）将圆环如图分解，中间的每条线上没有电流，可看成上下的两个圆环一个顺流一个反流



考察其中的一个线框微元，如图所示



由于只在垂直于圆环平面上有磁场，这一分量为

$$dB_{\perp}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{(r-\frac{s}{2})^2}-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{(r+\frac{s}{2})^2}-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Is}{r^2}\frac{b+\frac{dl}{2}}{r}+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Is}{r^2}\frac{b-\frac{dl}{2}}{r}=\frac{\mu_0 Isdl}{4\pi r^3}$$

即 $dB_{\perp}=\frac{\mu_0 Isdl}{4\pi r^3}=\frac{\mu_0 IdS}{4\pi r^3}$，因而可得 $B=\frac{\mu_0 IS}{4\pi r^3}=\frac{\mu_0 a^2 I}{4r^3}$

（3）（i）易得，一环在另一环中产生的磁通量为

$$\Phi=\frac{\mu_0 a^2 I}{4r^3}\times\pi a^2=\frac{\mu_0\pi a^4}{4r^3}I$$

因而互感系数为

$$M=\frac{\mu_0\pi a^4}{4r^3}$$

（ii）电流均以逆时针为正，则有

$$M\frac{dI_1}{dt}-L\frac{dI_2}{dt}=I_2R$$

$$M\frac{dI_2}{dt}-L\frac{dI_1}{dt}=I_1R$$

解得 $I_1=\frac{I_0}{2}(e^{-\frac{Rt}{L-M}}+e^{-\frac{Rt}{L+M}})$

$$I_2=\frac{I_0}{2}(e^{-\frac{Rt}{L-M}}-e^{-\frac{Rt}{L+M}})$$

7、解：（1）焦距满足方程

$$\frac{n}{V_1}=\frac{n-1}{R_1}$$

$$-\frac{n}{V_1}+\frac{1}{f}=\frac{1-n}{-R_2}$$

解得 $f=10m$

（2）该透镜的体积由两个球缺组成，体积分别为

$$V_1=\frac{\pi}{3}h_1^2(3R_1-h_1)\text{；}\quad h_1=R_1-\sqrt{R_1^2-R_0^2}$$

$$V_2=\frac{\pi}{3}h_2^2(3R_2-h_2)\text{；}\quad h_2=R_2-\sqrt{R_2^2-R_0^2}$$

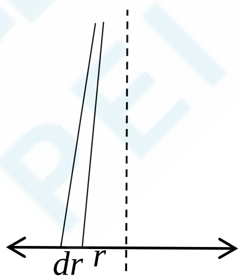
因而总的体积为

$$V=V_1+V_2$$

因而质量为

$$m=\rho V=1.178\times10^{-1}kg$$

（3）如图所示



从 $r\to r+dr$ 的一段，在 Δt 时间，y 方向的动量改变量为

$$\frac{I\Delta t\times2\pi rdr}{c}(1-\frac{f}{\sqrt{r^2+f^2}})$$

因而 $dF=\frac{I\times 2\pi rdr}{c}(1-\frac{f}{\sqrt{r^2+f^2}})$

竖直方向上施加的力的大小为

$$F=\int_0^{R_0}\frac{2\pi Ir}{c}(1-\frac{f}{\sqrt{r^2+f^2}})dr=\frac{\pi I}{c}(R_0^{\ 2}-2f\sqrt{R_0^{\ 2}+f^2}+2f^2)$$

又满足关系

$$F=mg$$

解得 $I=4.41\times 10^{14}W/m^2$

8、解：（1）对于顺水的情形，存在关系

$$v_1=\frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{nc}}\approx(\frac{c}{n}+v)(1-\frac{v}{nc})\approx\frac{c}{n}+v-\frac{v}{n^2}$$

$$v_2=\frac{\frac{c}{n}-v}{1-\frac{v}{nc}}\approx(\frac{c}{n}-v)(1+\frac{v}{nc})\approx\frac{c}{n}-v+\frac{v}{n^2}$$

因而造成的光程差为

$$\frac{c}{v_2}\times 2l-\frac{c}{v_1}\times 2l=2l\left[\frac{c}{\frac{c}{n}-v+\frac{v}{n^2}}-\frac{c}{\frac{c}{n}+v-\frac{v}{n^2}}\right]\approx 4l\left(\frac{n^2v}{c}-\frac{v}{c}\right)=\frac{4lv}{c}(n^2-1)$$

进而有关系

$$\frac{4lv}{c}(n^2-1)=N\lambda$$

解得 $N=0.1848$

（2）在以太学说中，满足关系

$$\delta=\frac{2lc}{\frac{c}{n}-kv}-\frac{2lc}{\frac{c}{n}+kv}\approx\frac{4lvn^2k}{c}=N\lambda$$

因而可解得

$$k=\frac{N\lambda c}{4lvn^2}=0.4375$$