培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（四）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

1、解：(1)(i)在最低点有

$$mv_1 = mv_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = mgR$$

$$N - mg = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{R}$$

$$\Rightarrow N = 5mg$$

(ii)设水平之间的相互作用冲量为 I，则有

$$I = mv_1$$

$$IR = (\frac{2}{3}mR^2 + mR^2)\omega$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\times\frac{5}{3}mR^2\omega^2 = mgR$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{5}{4}gR} \qquad \omega = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{5g}{4R}}$$

有

$$N - mg = \frac{m(v_1 + R\omega)^2}{R}$$

$$\Rightarrow N = \frac{21}{5}mg$$

(2)　(i)分离时设连线与竖直方向夹角为 θ

$$mv_x = mv$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x + v}$$

$$mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$$

且分离时，有条件

$$\frac{m(v_x + v)^2 + v_y{}^2}{R} = mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \theta \approx 42.94^\circ \left[\alpha = \arccos(\sqrt{3} - 1)\right]$$

(ii)仍设θ角，设水平冲量为I_x。有

$$I_x=mv_x$$

$$I_xR=(\frac{2}{5}mR^2+mR^2)\omega$$

且有$\frac{v_y}{v_x+\omega R}=\tan\theta$

$$mgR(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{5}mR^2\omega^2+\frac{1}{2}m(v_x{}^2+v_y{}^2)$$

分离时，有条件

$$mgR\cos\theta=\frac{m\left[(v_x+\omega R)^2+v_y^2\right]}{R}$$

$$\Rightarrow\cos\theta=44.1^\circ$$

2、解：（1）由题意可得

$$2v_0\sin\theta=gt$$

$$d=v_0\cos\theta t$$

可以得到

$$v_0{}^2\sin 2\theta=gd$$

（2）在竖直方向，速度变为了$ev_0\sin\theta$，因而可得

$$I_N=(1+e)mv_0\sin\theta$$

而 $$I_f\le\mu I_N=\mu(1+e)mv_0\sin\theta$$

有关系

$$mv_0\cos\theta-I_f=mv_x$$

$$I_fr=\frac{2}{3}mr^2\omega$$

因而可得

$$v_x=v_0\cos\theta-\frac{I_f}{m}$$

$$\omega r=\frac{3I_f}{2m}$$

要求接触点速度

$$v_x - \omega r \geq 0$$

因而可得

$$I_f \leq \frac{2}{5} m v_0 \cos\theta$$

因而，若 $\mu \leq \dfrac{2}{5(1+e)\tan\theta}$，则 $I_f = \mu(1+e) m v_0 \sin\theta$，则

$$v_x = v_0\left[\cos\theta - \mu(1+e)\sin\theta\right]$$

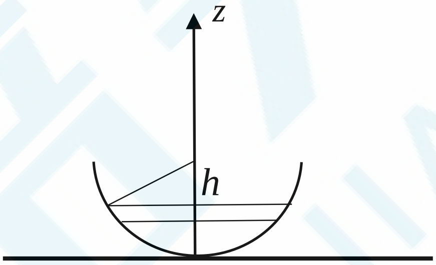
因而 $$\theta' = \arctan\left[\frac{\tan\theta}{1-\mu(1+e)\tan\theta}\right]$$

若 $\mu > \dfrac{2}{5(1+e)\tan\theta}$，则 $I_f = \dfrac{2}{5} m v_0 \cos\theta$，则

$$v_x = \frac{3}{5} v_0 \cos\theta$$

因而 $$\theta' = \arctan\left(\frac{5}{3}\tan\theta\right)$$

3、解：（1）如图所示



$$dq = 2\pi R \sigma dh$$

因而 $$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 - h^2 + (z - R + h)^2}} = \frac{\sigma R dh}{2\varepsilon_0\sqrt{2R^2 + z^2 - 2zR + 2(z-R)h}}$$

积分可得

$$\varphi = \int_0^R \frac{\sigma R dh}{2\varepsilon_0\sqrt{2R^2 + z^2 - 2zR + 2(z-R)h}}$$

$$= \frac{\sigma R}{2(z-R)\varepsilon_0}\left(z - \sqrt{2R^2 + z^2 - 2zR}\right)$$

这个是 $z\neq R$ 的情况，当 $z=R$ 时，易得

$$\varphi=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

（2）在球壳中央，电场强度为

$$E=\int_0^{\pi/2}\frac{\sigma\cdot 2\pi R\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta R d\theta=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

因而受力上满足

$$qE=mg$$

解得 $$m=\frac{\sigma q}{4\varepsilon_0 g}$$

（3）能量上，满足方程

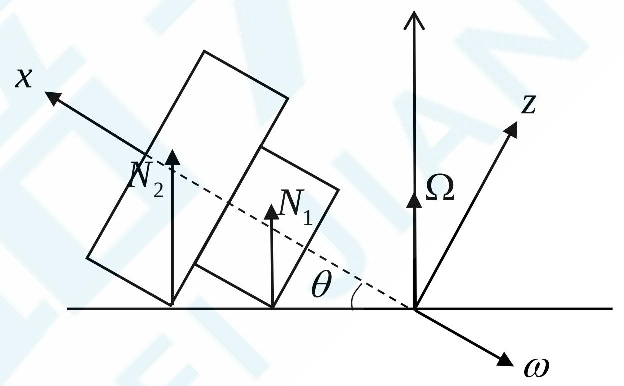
$$q\varphi_0+2mgR=q\varphi+mgz$$

其中，$\varphi_0=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$，$\varphi=\frac{\sigma R}{2(z-R)\varepsilon_0}(z-\sqrt{2R^2+z^2-2zR})$

联立可求得 $z=0.1012R$

（4）再补齐另一半球壳，则其电场必定为零，因而无论是向上微扰还是向下微扰，电场力的变化都是相同的，因而合力的方向也是相同的，运动趋势也相同，但是微扰方向不同，因而该点不可能是稳定平衡位置。

4、解：（1）画出侧视图



有几何关系 $\tan\theta=\frac{R_2-R_1}{h}$

与地面接触点速度为零，因而有

$$\Omega l\cos\theta-\omega l\tan\theta=0$$

解得 $$\Omega=\omega\frac{\tan\theta}{\cos\theta}=\omega\frac{(R_2-R_1)\sqrt{(R_2-R_1)^2+h^2}}{h^2}$$

（2）计算可得

转动惯量中

$$I_{xx}=\frac{1}{2}\rho\pi h(R_1^{\ 4}+R_2^{\ 4})$$

$$I_{zz}=\frac{1}{4}\rho\pi h(R_1^{\ 4}+R_2^{\ 4})+\frac{1}{3}(\frac{h}{R_2-R_1})^3\left[R_2^{\ 2}(2R_2-R_1)^3-R_2^{\ 5}+R_1^{\ 2}R_2^{\ 3}-R_1^{\ 5}\right]$$

因而 $L_z=I_{zz}\omega\tan\theta$

$$L_x=-I_{xx}(\omega-\Omega\sin\theta)=-I_{xx}\omega(1-\tan^2\theta)$$

角动量的水平分量为

$$L=I_{xx}\omega(1-\tan^2\theta)\cos\theta+I_{zz}\tan\theta\sin\theta$$

满足关系

$$N_1\frac{R_1}{\sin\theta}+N_2\frac{R_2}{\sin\theta}-\rho\pi R_1^{\ 2}hg\left(\frac{R_1}{R_2-R_1}h+\frac{1}{2}h\right)\cos\theta-\rho\pi R_2^{\ 2}hg\left(\frac{R_2}{R_2-R_1}h+\frac{1}{2}h\right)\cos\theta$$
$$=\omega L$$

又有关系

$$N_1+N_2=\rho\pi hg(R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2})$$

解得

$$N_1=\frac{\omega L\sin\theta+m_1gl_1\sin\theta\cos\theta+m_2gl_2\sin\theta\cos\theta-(m_1+m_2)gR_2}{R_1-R_2}$$

$$N_2=\frac{\omega L\sin\theta+m_1gl_1\sin\theta\cos\theta+m_2gl_2\sin\theta\cos\theta-(m_1+m_2)gR_1}{R_2-R_1}$$

其中，$L=I_{xx}\omega(1-\tan^2\theta)\cos\theta+I_{zz}\tan\theta\sin\theta$

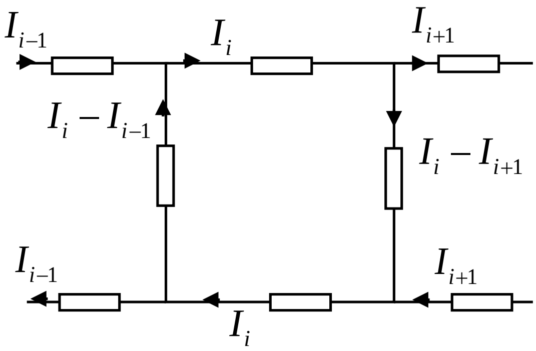
$$I_{xx}=\frac{1}{2}\rho\pi h(R_1^{\ 4}+R_2^{\ 4})$$

$$I_{zz}=\frac{1}{4}\rho\pi h(R_1^{\ 4}+R_2^{\ 4})+\frac{1}{3}(\frac{h}{R_2-R_1})^3\left[R_2^{\ 2}(2R_2-R_1)^3-R_2^{\ 5}+R_1^{\ 2}R_2^{\ 3}-R_1^{\ 5}\right]$$

$$l_1=\frac{R_1}{R_2-R_1}h+\frac{h}{2};l_2=\frac{R_2}{R_2-R_1}h+\frac{h}{2}$$

$$m_1=\rho\pi R_1^{\ 2}h;m_2=\rho\pi R_2^{\ 2}h$$

5、对于第 i 个方框，如图所示



易得回路方程为

$$I_i\frac{2}{3}r+(I_i-I_{i+1})r+I_i\frac{2}{3}r+(I_i-I_{i-1})r=kL^2$$

化简为 $I_{i+1}-\frac{10}{3}I_i+I_{i-1}=-\frac{kL^2}{r}$

因而电流满足形式

$$I_i=A\cdot 3^i+B\cdot 3^{-i}+\frac{3kL^2}{4r}$$

代入 $i=0,i=N+1$，均有 $I=0$

解得 $A=-\frac{3kL^2}{4r}\frac{1-3^{-(N+1)}}{3^{N+1}-3^{-(N+1)}}$

$$B=-\frac{3kL^2}{4r}\frac{3^{N+1}-1}{3^{N+1}-3^{-(N+1)}}$$

因而可得

$$I_i=\frac{3kL^2}{4r}\left[1-3^i\frac{1-3^{-(N+1)}}{3^{N+1}-3^{-(N+1)}}-3^{-i}\frac{3^{N+1}-1}{3^{N+1}-3^{-(N+1)}}\right]$$

对于匀强磁场中的闭合电路，其受力必定为零

功率满足

$$P=kL^2\sum_{i=1}^{N}I_i$$

计算得

$$P=\frac{3k^2L^4}{4r}\left[N-\frac{3(3^N-1)}{2(3^{N+1}+1)}\right]$$

代入 $N=5$，得 $P=\frac{9861}{2920}\frac{k^2L^4}{r}=3.377\frac{k^2L^4}{r}$

6、解：（1）内部压强为 $p=p_0+\dfrac{4\sigma}{r}$

理想气体状态方程为 $pV=\nu RT$

其中 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

结合初态 $r=R_1$

联立可求得 $T(r)=\dfrac{p_0r^3+4\sigma r^2}{p_0R_1^3+4\sigma R_1^2}T_0$

（2）初态，满足

$$dQ=-\kappa\frac{4\pi R_1^2(T_1-T_0)}{d}dt=C_VdT+(p_0+\frac{4\sigma}{R_1})\cdot 4\pi R_1^2dr$$

而 $dT=\dfrac{3p_0R_1^2+8\sigma R_1}{p_0R_1^3+4\sigma R_1^2}T_0dr$

代入可解得

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{\kappa\cdot 4\pi R_1^2(T_1-T_0)(p_0R_1^2+4\sigma R_1)}{d\left[C_V(3p_0R+8\sigma)T_0+4\pi\left(p_0R_1^2+4\sigma R_1\right)^2\right]}$$

（3）（i）肥皂泡带点后，由于带电产生的又一项附加压强为

$$p_e=-\frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0r^4}$$

因而内部压强表达式为

$$p=p_0+\frac{4\sigma}{r}-\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0r^4}$$

结合 $pV=\nu RT$

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

可得 $T(r)=\dfrac{p_0r^3+4\sigma r^2-\dfrac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0r}}{p_0R_1^3+4\sigma R_1^2-\dfrac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0R_1}}T_0$

（ii）由傅里叶热传导定律，可得

$$dQ=-\kappa\frac{4\pi R_1^2(T_1-T_0)}{d}dt=C_VdT+(p_0+\frac{4\sigma}{R_1}-\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0R_1^4})\cdot 4\pi R_1^2dr$$

其中 $$dT=\frac{3p_0R_1^2+8\sigma R_1-\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0R_1^2}}{p_0R_1^3+4\sigma R_1^2-\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0R_1}}T_0dr$$

联立可得

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{\kappa\cdot 4\pi R_1^2(T_1-T_0)(p_0R_1^2+4\sigma R_1-\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0R_1^2})}{d\left[C_V\left(3p_0R+8\sigma-\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0R_1^3}\right)T_0+4\pi\left(p_0R_1^2+4\sigma R_1-\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0R_1^2}\right)^2\right]}$$

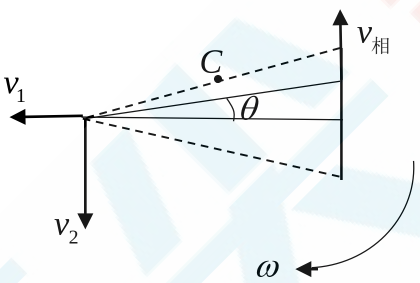
7、解：（1）对于一条边，相对于中心的转动惯量为

$$\Delta I=\frac{1}{12}\frac{m}{n}(2d\tan\frac{\pi}{n})^2+\frac{m}{n}d^2=\frac{m}{n}d^2(1+\frac{1}{3}\tan^2\frac{\pi}{n})$$

因而总的转动惯量为

$$I=n\Delta I=md^2(1+\frac{1}{3}\tan^2\frac{\pi}{n})$$

（2）在某一时刻，呈现如图位形时



可以表示出虫子在地面系中的速度

$$v_{虫x}=-v_1+\omega d\tan\theta$$

$$v_{虫y}=-v_2+\omega d+v_相$$

又有角动量守恒方程，即

$$mv_{虫y}\frac{d}{2}+mv_2\frac{d}{2}-mv_{虫x}\frac{d\tan\theta}{2}-mv_1\frac{d\tan\theta}{2}-I\omega=0$$

又有 $$v_相=\frac{d}{\cos^2\theta}\dot{\theta}$$

化简得到

$$\omega=\frac{\dot{\theta}}{1+\cos^2\theta(2+\frac{2}{3}\tan^2\frac{\pi}{n})}$$

因而可得

$$\alpha = 2n\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta(2+\frac{2}{3}\tan^2\frac{\pi}{n})}$$

当 $n=3$ 时，可得

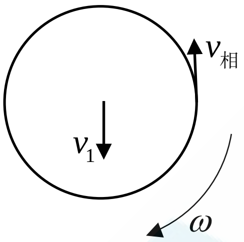
$$\alpha = 1.768rad = 101.32^\circ$$

（3）对于 $n\to\infty$，有

$$d\alpha = \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta(\frac{2}{3}\tan^2\frac{\pi}{n}+2)} \approx \frac{d\theta}{3}$$

因而有 $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$

对于圆的情况来说，则有



角动量关系，满足

$$mv_虫\frac{R}{2}+mv_1\frac{R}{2} = mR^2\omega$$

$$mv_1 = m(v_相 - v_1 - \omega R) = mv_虫$$

解得 $\omega = \dfrac{v_相}{3R}$

因而可得

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

可见两者的结果是相同的。

8、解：

（1）$B_0 = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2\pi RI}{R^2} = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$

（2）$B_z = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2\pi RI}{(R^2+Z^2)}\dfrac{R}{\sqrt{Z^2+R^2}} = \dfrac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$Z \gg R$

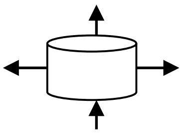
$$B_z = \frac{\mu_0 IR^2}{2Z^\partial}$$

(3)

（i） $Li=\frac{\mu_0 IR^2}{2z_0^3}\pi r^2=\frac{\pi\mu_0 IR^2r^2}{2z_0^3}$

$$i=\frac{\mu_0 I\pi R^2r^2}{2z_0^3L}$$

（ii）



有 $B_z\pi r^2=B_{z+dz}\pi r^2+2\pi rdz*B_r$

$$\Rightarrow B_r=-\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dz}=\frac{r}{2}\frac{\partial\mu_0 IR^2}{2z^4}=\frac{\partial\mu_0 IR^2r}{4z^4}$$

即 $B_r=\frac{\partial\mu_0 IR^2r}{4z^4}$

因而有 $2\pi riB_r=mg$

$$\Rightarrow mg=2\pi r*\frac{\mu_0 I\pi R^2r^2}{2z_0^3L}\frac{3\mu_0 IR^2r}{4z_0^4}=\frac{3\pi^2\mu_0^2I^2R^4r^4}{4z_0^7L}$$

$$\Rightarrow z_0=\sqrt[7]{\frac{3\pi^2\mu_0^2I^2R^4r^4}{4mgL}}$$

因而 $i=\frac{\mu_0 I\pi R^2r^2}{2L}\left(\frac{3\pi^2\mu_0^2I^2R^4r^4}{4mgL}\right)^{-\frac{3}{7}}$

（iii） $z_0\to z_0+\triangle z$ 时

$$F=\frac{3\pi^2\mu_0 I^2R^4r^4}{4(z_0+\triangle z)^7L}=mg\left(1-\frac{7\triangle z}{z_0}\right)$$

$$m\triangle z''=-mg\frac{\triangle z}{z_0}$$

因而有

$$\Rightarrow\triangle z''=-\frac{g}{z_0}\triangle z$$

$$\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{g}{z_0}}=\sqrt{g\sqrt[7]{\frac{4mgL}{3\pi^2\mu_0^2I^2R^4r^4}}}=\sqrt[14]{\frac{4mg^8L}{3\pi^2\mu_0^2I^2R^4r^4}}$$

$$\Rightarrow z=z_0+\triangle z_0\cos\omega t$$