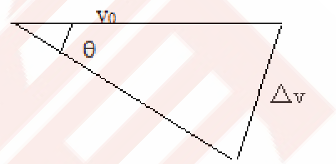
培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（四）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

一、 1.由图示可得

$\triangle v=2v_0\sin\dfrac{\theta}{2}$………①



由牛顿第二定律

$qE=ma$………②

$t_e=\dfrac{\Delta v}{a}=\dfrac{2mvo\sin\theta/2}{qE}$

$x=v_0t-\dfrac{1}{2}a\sin\dfrac{\theta}{2}t^2$

$=\dfrac{2mvo^2}{qE}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}$………③（9’）

$y=\dfrac{1}{2}a\cos\dfrac{\theta}{2}t^2=\dfrac{2mvo^2}{qE}\sin^2\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$………④

$l=\sqrt{x2+y2}=\dfrac{2mvo^2}{qE}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$………⑤（15’）

$R=kl$　$t_b=\dfrac{\theta R}{vo}=\dfrac{2kmvo\theta}{qE}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$………⑥

$\therefore\dfrac{te}{tb}=\dfrac{1}{k\theta\cos\theta/2}$………⑦(20’)

2.$f(\theta)=2\theta\cos\theta/2$

$f(\theta)=1$，$\theta=0.517$ 或 2.78

故 $0<\theta<0.517$，$t_e>t_b$

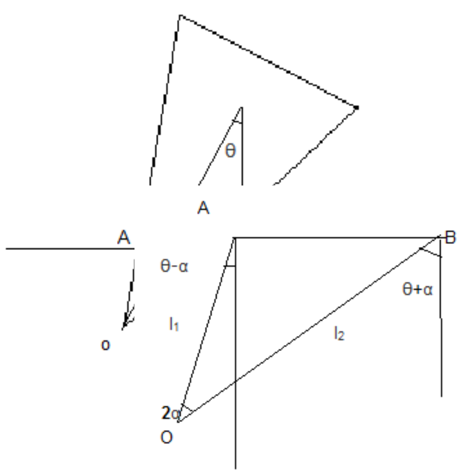
$0.517<\theta<2.78$，$t_e<t_b$

$2.78<\theta<\pi$　$t_e>t_b$(25’)

二、分析受力可知，平衡时圆锥的受到与平板接触边缘两个支持力和重力的作用，故可取截面研究。

我们先积分算出圆锥质心的位置。

$dm=\pi\rho dx\times(\dfrac{a}{h}x)^2$



$x_c=\dfrac{\int x\cdot dm}{\rho\pi a2h\div3}=\dfrac{3}{4}h$………①(5’)

其中 $h=a\div\tan\alpha$………②

取角参量为 θ 来描述平衡位置。

取 ΔOAB 研究

据正弦定理可得

$\dfrac{l1}{\cos(\theta+\alpha)}=\dfrac{l2}{\cos(\theta-\alpha)}=\dfrac{2r}{\sin2\alpha}$………③

l1=$\frac{2\cos(\theta+\alpha)}{\sin 2\alpha}$r，l2=$\frac{2\cos(\theta-\alpha)}{\sin 2\alpha}$r ………④ (12’)

1.H=$\frac{3}{4}h\cos\theta-l1\cos(\theta-\alpha)=\frac{3}{4}h\cos\theta-\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\theta}{\sin 2\alpha}r$ ………⑤(15’)

$\frac{dh}{d\theta}=-\frac{3}{4}h\sin\theta+\frac{2\sin 2\theta}{\sin 2\alpha}r=0$ ………⑥

代入②式可得 $\sin\theta=0$ 或 $\cos\theta=\frac{3a(\cos\alpha)^2}{8r}$ ………⑦(22’)

2.据三力汇交原理，由图中几何关系可得

$(\frac{3}{4}h\sin\theta-l1\sin(\theta-\alpha))\cdot\tan(\theta-\alpha)=(\frac{3}{4}h\sin\theta-l2\sin(\theta+\alpha))\cdot\tan(\theta+\alpha)$ ………⑧(27’)

整理得

$\frac{3}{4}h\sin\theta(\tan(\theta+\alpha)-\tan(\theta-\alpha))=\frac{2r}{\sin 2\alpha\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)}\times$

〔$(\cos(\theta-\alpha)\sin(\theta+\alpha))^2-(\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha))^2$〕

$=\frac{2r}{\sin 2\alpha\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)}\times\sin 2\alpha\sin 2\theta$

$=\frac{2r\sin 2\theta}{\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)}$

进一步整理得

$\frac{3}{4}h\sin\theta\sin 2\alpha=4r\sin\theta\cos\theta$ ………(36’)

解得 $\sin\theta=0$

或 $\theta=\cos-1(\frac{3a(\cos\alpha)^2}{8r})$（40’）

三、首先证明匀强电场中极化圆柱体电荷的分布规律。

根据高斯定理

$E\cdot 2\pi rl=\rho\pi r2l\div\varepsilon_0$

E=$\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$ ………①（5’）

∴极化球中

$E=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$ $\quad\sigma(\theta)=\sigma_0\cos\theta$ ………②（14’）

据电位移连续

$\varepsilon_r(E_0-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$）=E$_0$+$\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$

解得 $\sigma 0$=2$\varepsilon_0 E_0\frac{\varepsilon r-1}{\varepsilon r+1}$ ………③（25’）

∴圆柱体外的场强为 E=E$_0$+$\frac{\sigma}{2\varepsilon 0}=\frac{2\varepsilon r}{\varepsilon r+1}E_0$

∴E（θ）=$\frac{2\varepsilon r}{\varepsilon r+1}E_0cos\theta$ ………④（32’）

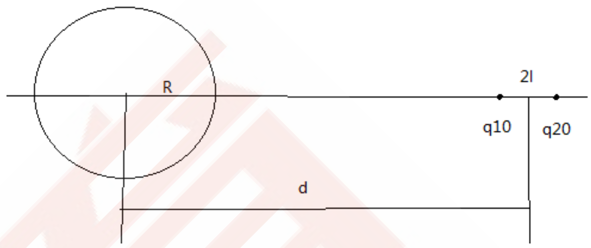
$j=\sigma E\quad dS=lad\theta\quad E={}^{V}\!/_{d}$ ………⑤（38’）

$$I=\int j\cdot dS=\frac{2\sigma\varepsilon r}{\varepsilon r+1}\mathrm{E}_0\int_{-\pi\div2}^{\pi\div2}al\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{2\sigma al\varepsilon rV}{(\varepsilon r+1)d}\text{………⑥（43’）}$$

$$\therefore I/l==\frac{2\sigma a\varepsilon rV}{(\varepsilon r+1)d}\text{………⑦（45’）}$$

四、据像电荷有关结论



$$x1=\frac{R^2}{d-l}=\frac{R^2}{d}(1+\frac{l}{d})$$

$$q1=\frac{R}{d-l}q=\frac{R}{d}(1+\frac{l}{d})q$$

$$x2=\frac{R^2}{d+l}=\frac{R^2}{d}(1-\frac{l}{d})$$

$$q2=-\frac{R}{d+l}q=-\frac{R}{d}(1-\frac{l}{d})q\text{………①（16’）}$$

故像电荷 q1q2 可看成距球心$\frac{2Rq}{d^2}$的点电荷 q3 与电荷量为$\frac{Rq}{d}$，相距$\frac{2R^2l}{d^2}$的电偶极子，同时等效球心的电荷 q4=$-\frac{2Rq}{d^2}$。q3 和 q4 又可以看成一个电偶极子。

可得 p1=p2=$\frac{2R^3l}{d^3}q$

利用电偶极子场强公式$E=\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0r^3}$，可得

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{(d-\frac{R^2}{2d})^3}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{(d-\frac{R^2}{d})^3}$$

$$=\frac{qlR^3}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(d^2-\frac{R^2}{2})^3}+\frac{1}{(d^2-R^2)^3}\right)\text{………②（25’）}$$

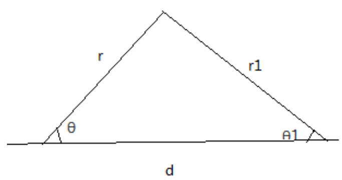
$$W=-\vec{p}\cdot\vec{E}=-\frac{2q^2l^2R^3}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(d^2-\frac{R^2}{2})^3}+\frac{1}{(d^2-R^2)^3}\right)\text{………③（30’）}$$

2.可近似认为两电偶极子在球心处。

$$\therefore r<R\ \ U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4}{R}=-\frac{ql}{2\pi\varepsilon_0d^2}\text{………④}$$

$r>R$ 据余弦定理可得

$$r_1=\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}$$



正 弦 定 理 $\sin\theta_1=\frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}$，

$$\cos\theta_1=\frac{d-r\cos\theta}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}\text{………⑤（40’）}$$

$$\therefore U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\times\frac{2R^3l}{d^3}q\frac{1}{r^2}\cos\theta+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r_1^{\,2}}\cdot(-\cos\theta)$$

………⑥（45’）

$$=\frac{qlR^3\cos\theta}{\pi\varepsilon_0 d^3r^2}+\frac{ql(r\cos\theta-d)}{2\pi\varepsilon_0(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1.5}}$$

五、 1.整体考虑，令 P1、P2 为两板的总辐射本领（热辐射和反射辐射之和）

有 $P_1=e_1+(1-\frac{e_1}{E_1})P_2$

$P_2=e_2+(1-\frac{e_2}{E_2})P_1$………①(10’)

其中 $(1-\frac{e_1}{E_1})$ 与 $(1-\frac{e_2}{E_2})$ 为两板反射率

联立解得 $P_1=\frac{E_1E_2(e_1+e_2)-E_2e_1e_2}{E_1e_2+E_2e_1-e_1e_2}$

$P_2=\frac{E_1E_2(e_1+e_2)-E_1e_1e_2}{E_1e_2+E_2e_1-e_1e_2}$………②(20’)

故 $W=P_1-P_2=\frac{(E_1-E_2)e_1e_2}{E_1e_2+E_2e_1-e_1e_2}$………③(25’)

2.$P_1=e_1+(1-\frac{e_1}{E_1})\alpha T^4$

$P_2=e_2+(1-\frac{e_2}{E_2})\alpha T^4$………④(30’)

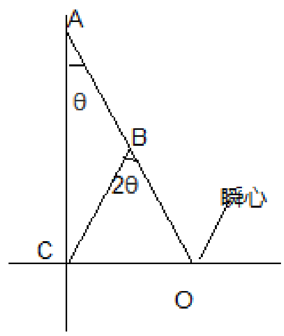
$P_1+P_2=2\alpha T^4$

解得 $T=\sqrt[4]{\frac{E_1E_2(e_1+e_2)}{\alpha(E_1e_2+E_2e_1)}}$………⑤(40’)

六、 1.系统减少的重力势能为

$\Delta E_p=\frac{l}{2}mg(\cos\theta-\frac{1}{2})+\frac{3l}{2}\cdot 2mg(\cos\theta-\frac{1}{2})$

$=\frac{7}{4}mgl(2\cos\theta-1)$………①(5’)



系统转动惯量为

$J=J_1+J_2$

$J_1=\frac{1}{3}ml^2$

$J_2=\frac{1}{12}\cdot 2ml^2+2m\cdot(\frac{1}{4}+1-\cos2\theta)l^2$

得 $J=(3-2\cos2\theta)ml^2$………②(13’)

由机械能守恒得到 $\Delta E_p=\frac{1}{2}J\omega^2$………③

得 $\omega=\sqrt{\frac{7g(2\cos\theta-1)}{2l(3-2\cos2\theta)}}$………④(20’)

2.$a_{Br}=\frac{d^2r}{dt^2}-\omega 2r$

$$=\frac{7g(2\cos\theta-1)}{2(3-2\cos2\theta)}\cdots\cdots\cdots⑤(25')$$

$$a_{B\theta}=2\frac{dr}{dt}\omega+r\beta=l\beta\cdots\cdots\cdots⑥$$

对(4)式求导，得

$$2\omega\beta=\frac{7g}{2l}\cdot\frac{-2\sin\theta(3-2\cos2\theta)-(2\cos\theta-1)\cdot2\sin2\theta\cdot2}{(3-2\cos\theta)^2}\cdot\omega$$

得 $\beta=\frac{7g\sin\theta(4\cos\theta-4(\cos\theta)^2-5)}{2l(3-2\cos2\theta)^2}\cdots\cdots\cdots⑦(38')$

$\therefore a=\sqrt{ar^2+a\theta^2}$

代入数据得

$a=4.17g$ (45')

七、 1. $I=j\cdot\pi(b^2-a^2)\cdots\cdots\cdots①$

$P=2\pi bl\cdot\alpha T^4$

$P=I^2R$

$$R=\frac{l}{\sigma\pi(b^2-a^2)}$$

得 $T=\sqrt[4]{\frac{j2(b^2-a^2)}{2b\alpha\sigma}}\cdots\cdots\cdots②(18')$

2.取 r 处研究内部的空心圆柱

$$P=I^2R=\frac{j2\cdot\pi(r^2-a^2)l}{\sigma}=-k(r)2\pi rl\frac{dT}{dr}\cdots\cdots\cdots③(25')$$

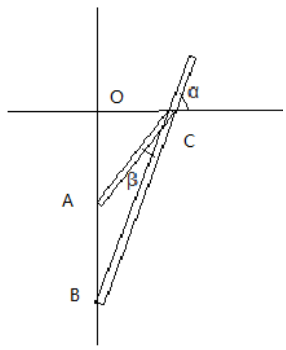
整理得

$$\frac{dT}{dr}=-\frac{j2}{2k\sigma}(r^2-a^2)\cdots\cdots\cdots④$$

积分得

$$T(r)=T_0-\frac{j^2}{6k\sigma}(r^3-a^3)+\frac{j^2a^2}{2k\sigma}(r-a)\cdots\cdots\cdots⑤(40')$$

八、令 OA=h，OB=H，BC=L



据图中几何关系可得

H=L $\sin\alpha$ ………①

$$h=L\cos\alpha\cdot\tan(\alpha-\beta)=L\cos\alpha\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\cdots\cdots\cdots②(10')$$

利用视深公式

$H=nh\cdots\cdots\cdots③$

得 $\tan\alpha=n\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\cdots\cdots\cdots④$

整理得 $\tan\beta(\tan\alpha+\frac{n}{\tan\alpha})=n-1\cdots\cdots\cdots⑤(30')$

可以看出当 $\tan\alpha=\sqrt{n}$ 时

$$\tan\beta_{max}=\frac{n-1}{2\sqrt{n}}\cdots\cdots\cdots⑥(40')$$