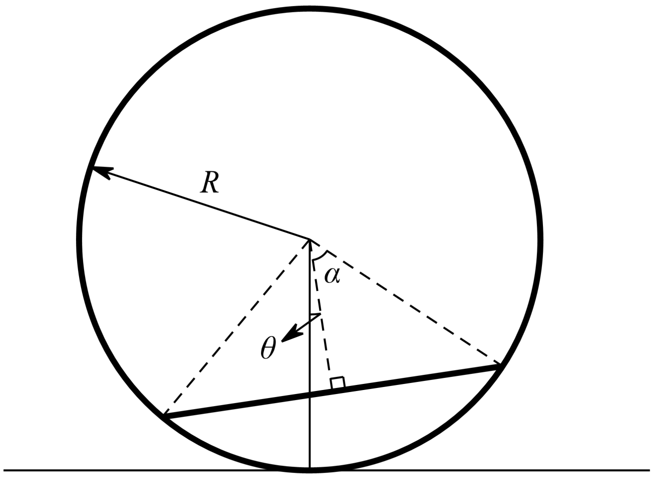
2020 年五一高中物理竞赛刷题班

模 拟 四

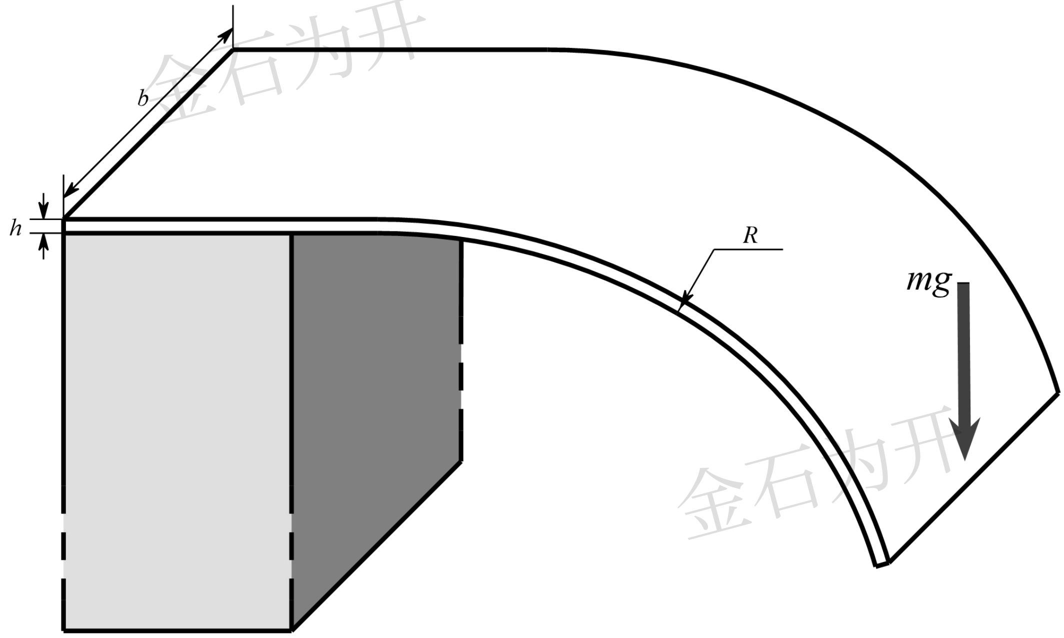
一、（60 分）如图所示，质量为 M、半径为 R 的匀质圆筒内横置一根质量为 m，长为 $2R\sin\alpha$ 的匀质细杆，然后放在完全粗糙的地面上。初态，系统静止，细杆位于圆筒横截面内，且与水平面夹角为 θ_0。自由释放后，试在以下两种情况下，分别求出系统的振动周期 T（用积分表达），并求出当 $\theta_0 \ll 1$（小振动）时振动周期的极限值 T_0。

（1）圆筒内壁完全粗糙；（25 分）

（2）圆筒内壁完全光滑。（35 分）



二、（50 分）跳水用的跳板材质较软，当承受运动员的重力时会发生较大的弯曲。本题我们定量研究跳板的弯曲情况。我们只考虑跳板在竖直平面内的弯曲。如图所示，跳板宽度为 b，厚度为 h，长度为 L，一端固支在水池边上，另一端自由。计算中，跳板的厚度相对于其他线度可以忽略而认为跳板只是一薄层。运动员质量为 m，重力加速度为 g。跳板材料的杨氏模量记为 E，忽略跳板自重。



（1）当跳板弯曲时，跳板任一截面上都会有内力矩存在，称为挠矩。试证明：跳板任一截面上的挠矩 M 与该处弯曲的曲率半径 R 满足关系

$$M = \frac{k}{R}$$

其中 k 是与位置无关的常量；并将 k 用已知量表示出来。（16 分）

（2）设运动员可视为质点，且就站在跳板的自由端。试求出平衡时跳板弯曲形状的参数方程。可保留积分。（26 分）

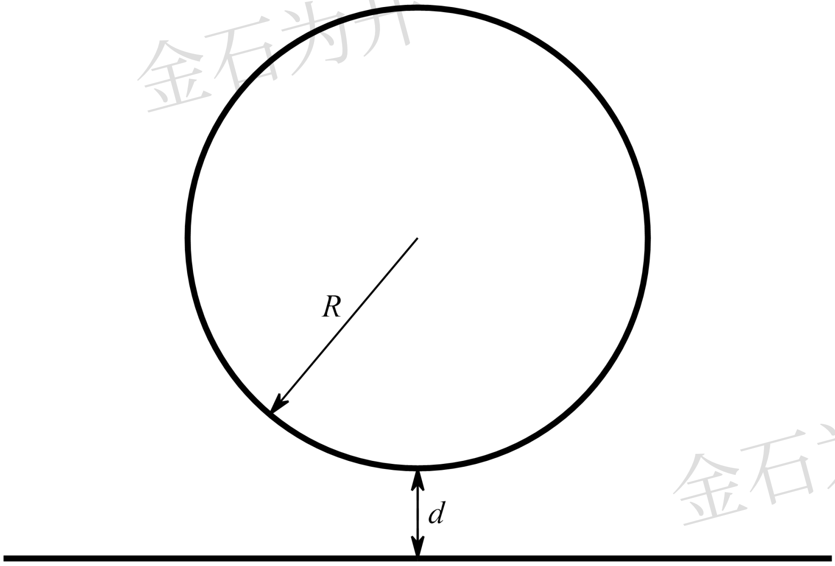
提示：取自然坐标 (l,θ) 有助于简化问题。

（3）求出跳板自由端相对固定端下降的距离 δ。（8 分）

三、（40 分）如图所示，半径为 R 的导体球悬于无穷大导体平板之上，其最低点到平板距离为 d，试对该系统求出：（可用级数表达）

（1）两导体之间电容 C；（28 分）

（2）当 $d\to\infty$ 和 $d\to 0$ 时电容 C 的极限。（12 分）



四、（40 分）本题我们结合理论结果和实验事实，用热力学研究磁场中顺磁质的磁化。

（1）固体顺磁性的来源是固体原子的固有磁偶极矩 μ 在磁场中的顺磁排列。简单地假定各原子之间没有相互作用，原子仅与外磁场 H 发生相互作用，而且 μ 只有平行于 H 和反平行于 H 两种指向，其能量分别为 $-\mu H$ 和 μH .已知热平衡态时某一能量为 ε 的能级上的原子个数比例正比于 $\exp\left(-\varepsilon / k_B T\right)$，$k_B$ 是玻尔兹曼常数。试分别求出 μ 平行和反平行于 H 两种指向的原子数目，然后计算整个顺磁固体的总内能 U，记固体中原子总数为 N 。（5 分）

（2）求出顺磁固体当磁场 H 不变时的热容 C_H，并求出当温度 T 很高时热容 C_H 的极限表达式；当 $H=0$ 时热容是多少？（6 分）

（3）应用玻尔兹曼最著名的公式 $S=k_B\ln\Omega$ 求平衡态下顺磁固体的熵 S .

式中 Ω 的含义为，在各能级粒子数不变的情况下，一切可能发生的微观状态数；然后求出当温度 T 很高时熵的近似表达式。已知可逆绝热过程中熵不变，证明高温下绝热磁化或去磁过程中 C_H 为恒量，忽略耗散和弛豫。（18 分）

可能用到的公式：$\ln N!\approx N\ln N-N \quad (N\gg 1)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+O\left(x^3\right),\quad e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+O\left(x^3\right),\quad \tanh x=x+O\left(x^2\right)\quad (x\ll 1)$$

（4）实际上当 $H=0$ 时热容并非恒等于 0，需结合实验结果修正以上理论。为此，注意到磁化过程可用两个量表征，即磁场强度 H 与磁化强度 M，当磁化发生时外界需要对磁介质做功 $\mathrm{d}W=\mu_0 H\mathrm{d}M$.实验表明温度 T 不太低时磁化强度与磁场强度具有简单的线性关系 $M=\frac{C}{T}H$，C 是常数。实验还表明，温度 T 不太低时，热容的较精确表达式应该用两个参数表达，即 $C_H=\frac{b+\mu_0 CH^2}{T^2}$，b 是另外一个常数。此时理论上仍可以证明熵与 C_H 有着与（3）中相同的依赖关系（你不必证明）。试根据给定的信息，构造出工作于热源 T_1 和 T_2 之间的顺磁介质的可逆卡诺循环（$T_1>T_2$），写出循环过程中的步骤，然后求其热机效率。（11 分）

五、（40 分）n 点完全图指的是由 n 个顶点组成，每两个顶点之间均连有一条边的图形。现在假定一个 n 点完全图中，每一条边都代表一根阻值为 R 的电阻丝。

（1）求出图中任意两个顶点之间的电阻；（5 分）

（2）现在任取图中两个顶点 A 和 B，将连接 A、B 的电阻丝去掉，求出此时图中任意两个顶点之间的电阻。注意分类讨论。（35 分）

六、（50 分）关于磁矩相互作用能的细致讨论。

引言：磁矩是一个小的闭合线圈（“小”指针对观察距离 r 而言），定义 $\boldsymbol{m} \equiv \int I\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 为磁矩，其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 代表以线圈为边界的曲面上任一处的有向面元。

（1）假设闭合线圈呈圆形，半径为 a，通有稳恒电流 I。线圈中心置于坐标原点，且垂直于线圈平面的方向定义为 z 轴，由定义，线圈的磁矩为 $\boldsymbol{m} = I\pi a^2\boldsymbol{e}_z$。试证明，当场点到圆心的距离 $r \gg a$ 时，线圈产生的磁场可近似写为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(3\left(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{e}_r\right)\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{m}\right)$$

其中 $\boldsymbol{e}_r$ 是从原点指向场点的单位矢量。由于任意形状的线圈总可以拆解为一系列无穷小的圆形线圈之叠加，所以只要线圈线度足够小（从而径矢 $\boldsymbol{e}_r$ 不会随着位置改变），这个公式对任意形状的小线圈都适用。（22 分）

（2）证明：一个磁矩 $\boldsymbol{m}$ 在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的磁能是

$$U = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B} \text{（5 分）}$$

（3）考虑两个相距为 r 的磁矩 $\boldsymbol{m}_1$ 和 $\boldsymbol{m}_2$，直接写出它们之间的相互作用能 W；取 $\boldsymbol{m}_1$、$\boldsymbol{m}_2$ 同向平行且均垂直于 $\boldsymbol{e}_r$ 的特例，请问它们吸引还是排斥？（2 分）

（4）上面一问的计算结果与你的直觉是否矛盾？如果矛盾，请指出矛盾的原因。（3 分）

（5）考虑以下两种情形：（i）两个小线圈均先移动至预定的位置，然后先后通上电流 I_1 和 I_2；（ii）两个小线圈彼此都在无穷远处通上了电流 I_1 和 I_2，然后先后移动至各自预定的位置。针对这两种情形，分步计算出做的功。结果与能量守恒是否矛盾？你能够解释（3）问中的“矛盾”了吗？（18 分）

七、（40 分）本题我们讨论磁场对微观粒子运动的影响。

（1）匀强磁场 B 中，一个带电为 q>0 的粒子，在垂直于磁场的平面内作匀速圆周运动。考虑到角动量量子化，请给出粒子的能级。（7 分）

（2）严格的量子力学理论给出了磁场中带电粒子的波函数 ψ 应满足的定态薛定谔方程：

$$\frac{\left(-\mathrm{i}\hbar\nabla-q\boldsymbol{A}\right)^2}{2m}\psi+V\psi=E\psi$$

$\boldsymbol{A}$ 称为磁矢势，它必须满足 $\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 两个条件。试证明：对上述方程的任一个解 ψ，必可找到一个 φ，使得 $\psi=\varphi\exp\left(\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\int\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right)$，而 φ 满足无磁场时的定态薛定谔方程 $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi+V\varphi=E\varphi$。（15 分）

注：式中 $\left(-\mathrm{i}\hbar\nabla-q\boldsymbol{A}\right)^2\psi$ 指的是算符 $\left(-\mathrm{i}\hbar\nabla-q\boldsymbol{A}\right)$ 作为一整体对波函数 ψ 作用两次，即

$$\left(-\mathrm{i}\hbar\nabla-q\boldsymbol{A}\right)^2\psi=\left(-\mathrm{i}\hbar\nabla-q\boldsymbol{A}\right)\cdot\left(-\mathrm{i}\hbar\nabla\psi-q\boldsymbol{A}\psi\right)$$

（3）根据以上结论，构造出匀强磁场 B 对应的磁矢势，并由此解出匀强磁场 B 中运动的带正电 q 的粒子可能的波函数。（18 分）