培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（八）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

1、解：

设：导弹速度为v

运动学公式：$x = x_0 + vt \dots (1)$

所以某时刻导弹离雷达的距离：$s = |x| = |x_0 + vt| \dots (2)$

设某次脉冲发出后,在T_x后接收到反射脉冲

由于发射和反射走过的路程一样,所以只用了$\frac{T_x}{2}$就与导弹相遇了

所以这道题可以列：$\begin{cases} \left|x_0 + v\cdot\frac{T_1}{2}\right| = c\cdot\frac{T_1}{2} \dots (3) \\ \left|x_0 + v\cdot(T_0 + \frac{T_2}{2})\right| = c\cdot\frac{T_2}{2} \dots (4) \end{cases}$

由于是绝对值方程,因此需要分类讨论

①当$x_0 + v\cdot\frac{T_1}{2} \geqslant 0$、$x_0 + v\cdot(T_0 + \frac{T_2}{2}) \geqslant 0$时：

$$\begin{cases} x_0 + v\cdot\frac{T_1}{2} = c\cdot\frac{T_1}{2} \dots (5) \\ x_0 + v\cdot(T_0 + \frac{T_2}{2}) = c\cdot\frac{T_2}{2} \dots (6) \end{cases}, \therefore\ v = \frac{c(\frac{T_2}{2} - \frac{T_1}{2})}{T_0 + \frac{T_2}{2} - \frac{T_1}{2}} = \frac{c(T_2 - T_1)}{2T_0 + T_2 - T_1} \dots (7)$$

$$\therefore\ x_0 = \frac{cT_0T_1}{2T_0 + T_2 - T_1} \dots (8)$$

②当$x_0 + v\cdot\frac{T_1}{2} \geqslant 0$、$x_0 + v\cdot(T_0 + \frac{T_2}{2}) \leqslant 0$时：

$$\begin{cases} x_0 + v\cdot\frac{T_1}{2} = c\cdot\frac{T_1}{2} \dots (9) \\ x_0 + v\cdot(T_0 + \frac{T_2}{2}) = -c\cdot\frac{T_2}{2} \dots (10) \end{cases}, \therefore\ v = \frac{c(-\frac{T_2}{2} - \frac{T_1}{2})}{T_0 + \frac{T_2}{2} - \frac{T_1}{2}} = -\frac{c(T_2 + T_1)}{2T_0 + T_2 - T_1} \dots (11)$$

$$\therefore\ x_0 = \frac{cT_1(T_0 + T_2)}{2T_0 + T_2 - T_1} \dots (12)$$

③当$x_0 + v\cdot\frac{T_1}{2} \leqslant 0$、$x_0 + v\cdot(T_0 + \frac{T_2}{2}) \leqslant 0$时：

$$\begin{cases} x_0 + v\cdot\frac{T_1}{2} = -c\cdot\frac{T_1}{2} \dots (13) \\ x_0 + v\cdot(T_0 + \frac{T_2}{2}) = -c\cdot\frac{T_2}{2} \dots (14) \end{cases}, \therefore\ v = \frac{-c(\frac{T_2}{2} - \frac{T_1}{2})}{T_0 + \frac{T_2}{2} - \frac{T_1}{2}} = -\frac{c(T_2 - T_1)}{2T_0 + T_2 - T_1} \dots (15)$$

$\therefore\ x_0 = -\frac{cT_1T_0}{2T_0 + T_2 - T_1} \dots (16)$,$\because\ T_0 >> T_1$、$T_2$,所以③要舍去

综上所述：$\begin{cases} \begin{cases} v = \frac{c(T_2 - T_1)}{2T_0 + T_2 - T_1} \\ x_0 = \frac{cT_0T_1}{2T_0 + T_2 - T_1} \end{cases} \\ \begin{cases} v = -\frac{c(T_2 + T_1)}{2T_0 + T_2 - T_1} \\ x_0 = \frac{cT_1(T_0 + T_2)}{2T_0 + T_2 - T_1} \end{cases} \end{cases}$

2、解：

由题意得抛物线的方程为 $y=\dfrac{gx^2}{2v_0^2}$，曲率半径分布 $\rho=\dfrac{\left(v_0^4+g^2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{gv_0^4}$

设任一时刻轮子与抛物线的接触点为 $\left(x,\dfrac{gx^2}{2v_0^2}\right)$，抛物线在该点处切线的倾斜角为 θ

由机械能守恒得 $v=\sqrt{g\left[R(1-\cos\theta)+\dfrac{gx^2}{2v_0^2}\right]}$

注意到轮心轨迹的曲率半径分布为 $\rho'=\dfrac{Rd\theta+\rho d\theta}{d\theta}=R+\rho$

$$m\frac{dv}{dt}=mg\sin\theta-f$$

故由牛顿第二定律得 $mg\cos\theta-N=\dfrac{mv^2}{\rho'}$

$$fR=mR^2\frac{d\omega}{dt}=mR\frac{dv}{dt}$$

即将滑动时 $f=\mu N$

则可得到滑动时的角速度满足的方程

$$\left[\frac{v_0^2g^2Rx}{2\left(v_0^4+g^2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{gx^2}{2v_0^2}\right]\frac{v_0^2}{\sqrt{v_0^4+g^2x^2}}+\frac{gx}{\sqrt{v_0^4+g^2x^2}}=\mu\left[\frac{v_0^2}{\sqrt{v_0^4+g^2x^2}}-\frac{R\left(1-\dfrac{gx}{\sqrt{v_0^4+g^2x^2}}\right)+\dfrac{gx^2}{2v_0^2}}{R+\dfrac{\left(v_0^4+g^2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{gv_0^4}}\right]$$

$$\omega=\frac{1}{R}\sqrt{g\left[R\left(1-\frac{gx}{\sqrt{v_0^4+g^2x^2}}\right)+\frac{g}{2}\right.}$$

3、解：

（1）初态，自感电动势阻碍电流，电感可视为断路，等效电路为 5 个电阻串联再与 1 个电阻并联，即得

A1B1 上的电流 $I_1=\dfrac{5}{6}I$ ①

B2B1 上的电流 $I_2=\dfrac{1}{6}I$ ②

（2）末态，由于电感内阻为零，故可视为导线（短路），等效电路为 6 个电阻并联，即得

A1B1 上的电流 $I_1' = \frac{1}{6}I$ ③

B2B1 上的电流 $I_2' = \frac{1}{6}I$ ④

（3）初态，由于电流分布确定，所以各点间的电势差都是已知的，设 C1B1 上的电流为 I_3，由基尔霍夫节点电流定律得

$$\frac{dI_1}{dt}+\frac{dI_2}{dt}+\frac{dI_3}{dt}=0 \text{⑤}$$

由电压定律得

$$L\frac{dI_3}{dt}=\frac{IR}{3} \text{⑥}$$

所以

$$\frac{dI_1}{dt}+\frac{dI_2}{dt}=-\frac{IR}{3L} \text{⑦}$$

4、解：

①

由于 $R<<H$,所以圆环内受到的磁感应强度等于圆心处的磁感应强度

∴：圆环的磁通量 $\Phi=\frac{\mu_0 I}{2\pi H}\cdot\pi R^2=\frac{\mu_0 IR^2}{2H}$...(1)

现在圆环有个向下的速度 v,给圆环一个极短的时间 $\mathrm{d}t$

则圆环上新的磁通量：$\Phi+\mathrm{d}\Phi=\frac{\mu_0 IR^2}{2(H-v\mathrm{d}t)}=\frac{\mu_0 IR^2}{2H}(1+\frac{v\mathrm{d}t}{H})$...(2)

法拉第电磁感应定律：$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 IR^2 v}{2H^2}$...(3)

②

圆环此瞬间消耗的能量:$\mathrm{d}W_1=P\mathrm{d}t=\varepsilon I\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon^2}{R_Z}\mathrm{d}t=\frac{\mu_0 IR^4}{4H^4R_Z}v^2\mathrm{d}t$...(4)

此瞬间重力做功:$\mathrm{d}W_2=mgv\mathrm{d}t$...(5)

能量守恒:$\mathrm{d}W_2-\mathrm{d}W_1=\mathrm{d}(\frac{1}{2}mv^2)$...(6)

将(10)、(11)代入(12)得：$mgv\mathrm{d}t-\frac{\mu_0 IR^4}{4H^4R_Z}v^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}mv\mathrm{d}v$...(5)

因为某一时刻 v 有最大值：则某一时刻 $\mathrm{d}v=0$...(6)

∴：$\frac{\mu_0 IR^4}{4H^4R_Z}v_{\max}-mg=0$...(7),∴：$v_{\max}=\frac{4H^4R_Z mg}{\mu_0 IR^4}=\frac{h^4R_Z mg}{4\mu_0 IR^4}$...(8)

能量守恒：$mg(h-H)=\frac{1}{2}mv_{\max}{}^2+W_1$...(9)

∴：$\frac{1}{2}mgh>\frac{1}{2}mv_{\max}{}^2=\frac{h^8R_Z{}^2m^3g^2}{32\mu_0{}^2I^2R^8}$...(10)

∴：$R_Z<\frac{4\mu_0 IR^4\sqrt{gh}}{mgh^4}$...(11)

5、解：

（1）$c=0$时由高斯定理得场强分布$E=\begin{cases}0, r\le b\\ \dfrac{\left(r^3-b^3\right)\rho}{3\varepsilon_0 r^2}, b\le r\le a\\ \dfrac{\left(a^3-b^3\right)\rho}{3\varepsilon_0 r^2}, r\ge a\end{cases}$，

则体系的静电能为
$$W=\int_b^a \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\rho^2}{\varepsilon_0^2}\frac{\left(r^3-b^3\right)^2}{9r^4}4\pi r^2dr+\int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\rho^2}{\varepsilon_0^2}\frac{\left(a^3-b^3\right)^2}{9r^4}4\pi r^2dr$$
$$=\frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0}\left(\frac{a^5-b^5}{5}-b^3\left(a^2-b^2\right)+\left(a^6-2a^3b^3+2b^6\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right),$$

（2）分析可知，此问的答案即为上一问的答案叠加上“将小负电球球心移动c，大正电球对其电势能的增量”，故有

$$W'=W+\left[\iint_{\text{小负电球}}-\rho 4\pi r^2dr\frac{2\pi\sin\theta\cdot d\theta}{4\pi}\left(\frac{3}{2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}a^2-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(c^2+r^2+2cr\cos\theta\right)\right)\right]$$
$$-\left[\iint_{\text{小负电球}}-\rho 4\pi r^2dr\frac{2\pi\sin\theta}{4\pi}\left(\frac{3}{2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}a^2-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r^2\right)\right]$$

得$W'=W+\dfrac{2\pi\rho b^3}{9\varepsilon_0}c^2$

6、解：

（1）i.黑洞的质量已给定，即能量已给定，说明这是一个平衡态（不再吸收外界光子），此时的熵应取最大值，即光子数目最大，则单个光子的能量最小、波长最大，由题意知波长应为$2R$（波长大于此值的光子不构成黑洞，波长小于此值的光子不满足平衡条件）

ii.设单个光子能量为E_0，由光子无法逃逸出黑洞

$$E_0-\frac{GME_0}{Rc^2}=0$$

得

$$R=\frac{GM}{c^2}\text{①}$$

由①知

$$E_0=\frac{hc}{2R}=\frac{hc^3}{2GM}\text{②}$$

得光子数

$$N=\frac{Mc^2}{E_0}=\frac{2GM^2}{hc}\text{③}$$

熵值

$$S_0 = k\ln\Omega = kN = \frac{2GkM^2}{hc} ④$$

（2）由于该黑洞由中性粒子构成，故在其形成的过程中无电磁辐射，设形成过程中某时刻黑洞的质量为m、温度为T、熵值为S，由能量守恒知

$$TdS = d\left(mc^2\right) ⑤$$

代入黑洞温度的表达式即得

$$\frac{hc}{8\pi kG}dS = mdm ⑥$$

积分得黑洞真正的熵值

$$S_f = \frac{4\pi GkM^2}{hc} ⑦$$

7、解：

注意到$\nabla\left(n^2\right) = 2n\nabla n = 2n\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla\left[(\nabla L)^2\right]$，故$n^2 - (\nabla L)^2 = 0$，其中$L$为光程

若令$L = S(q,t)$，则上面的方程具有如下形式$\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\vec{r}) = E$，这代表一个经典粒子在

固定势场中的行为，只需使得$2m\left(E - V(\vec{r})\right) = n^2$，此即莫培督原理

注意到$2m\left(E - V(\vec{r})\right) = 2mE_k = m^2v^2$，故有$\frac{d}{ds}\left(mv\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = m\frac{d}{ds}\left(v\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n = m\nabla v$

即得$\frac{d}{ds}\left(v\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla v$

8、解：

（1）对悬空的那部分绳子（长度设为x）由牛顿第二定律得

$$m\frac{x}{L}\cdot\frac{dv}{dt} = -m\frac{x}{L}g + F - \frac{mv^2}{L} ①$$

上式两边同乘以xdx得

$$\frac{m}{L}xv\cdot d(xv) = -\frac{mg}{L}x^2dx + Fxdx ②$$

积分得末态速度

$$v_f = \sqrt{\frac{FL}{m} - \frac{2gL}{3}} ③$$

（2）狭义相对论情景下，能量与质量严格对应，既然绳子物质本身无变化（无新物质生成），便无所谓的“热量”机制，由能量守恒及狭义相对论效应得

$$FL\sqrt{1-\frac{v_f'^2}{c^2}}=\frac{mg}{\sqrt{1-\frac{v_f'^2}{c^2}}}\cdot\frac{L\sqrt{1-\frac{v_f'^2}{c^2}}}{2}+\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_f'^2}{c^2}}}-mc^2\right) \text{④}$$

解得

$$v_f'=c\sqrt{1-\left(\frac{4mc^2}{2mc^2-mgL+\sqrt{\left(2mc^2-mgL\right)^2+16mc^2FL}}\right)^2}$$