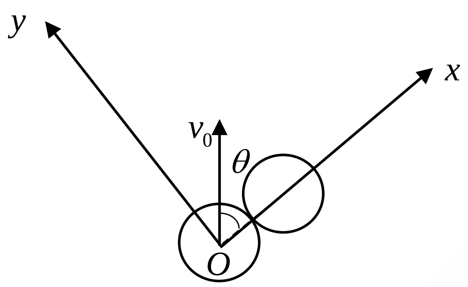
培尖教育2018年学科竞赛夏令营物理模拟卷（十一）

考试时间：150分钟　总分320分

（参考答案）

1、解：（1）如图建系



刚刚碰后，被碰的球初速沿 x 方向，不具有角速度，因而其末态速度也必定沿着 x 方向
母球初速沿着 y 方向，但是由于具有角速度，方向会发生改变

有　$$v_y = v_0 \sin\theta$$

初态接触点只有沿 x 方向的相对运动，因而

$$v_x = \mu g t$$

$$\omega_y = \frac{v_0}{R}\cos\theta - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t$$

纯滚动时，$v_x = \omega_y R$

因而　$t = \dfrac{2v_0\cos\theta}{7\mu g}$，此时 $v_x = \dfrac{5}{7}v_0\cos\theta$

最终的夹角为

$$\theta' = \arctan\left(\frac{7}{5}\tan\theta\right)$$

（2）质心的运动方程为

$$x = \frac{1}{2}\mu g t^2$$

$$y = v_0 \sin\theta t$$

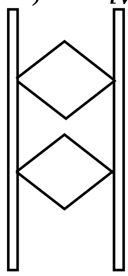
因而　$$x = \frac{\mu g y^2}{v_0^2 \sin\theta^2}$$

由于 $\mu \ll v_0^2 / gl$，因而有

$$2R = \frac{\mu g l^2}{v_0^2 \sin^2\theta}$$

可以得到 $l=\sqrt{\dfrac{2{v_0}^2R\sin^2\theta}{\mu g}}$

2、解：（1）对第 i 个单位进行分析，如下图所示



易得 $P_i=5m\cdot iv+8m(i-\frac{1}{2})v=(13i-4)mv$

$$E_i=\frac{1}{2}\cdot 5m(iv)^2+4\times\frac{1}{2}m\left[\left(i-\frac{3}{4}\right)v\right]^2+4\times\frac{1}{2}m\left[\left(i-\frac{1}{4}\right)v\right]^2$$

$$+8\times\frac{1}{12}ml^2\left(\frac{v}{\sqrt{4l^2-a^2}}\right)^2+8\times\frac{1}{2}m\left(\frac{v}{\sqrt{4l^2-a^2}}\frac{a}{4}\right)^2$$

$$=mv^2(\frac{13}{2}i^2-4i+\frac{5}{4})+mv^2\frac{3a^2+8l^2}{12(4l^2-a^2)}$$

因而有 $P_x=\left(\dfrac{13}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n\right)mv$

$$E=mv^2(\frac{13}{6}n^3+\frac{5}{4}n^2+\frac{1}{3}n)+nmv^2\frac{3a^2+8l^2}{12(4l^2-a^2)}$$

$n=20$ 时，代入可得

$$P_x=2650mv$$

$$E=17840mv^2+20mv^2\frac{3a^2+8l^2}{12(4l^2-a^2)}$$

（2）电机驱动的功率满足

$$P=\frac{dE}{dt}=\frac{dE}{da}\frac{da}{dt}=v\frac{dE}{da}=nmv^3\frac{10al^2}{3(4l^2-a^2)^2}$$

$n=20$ 时，代入可得

$$P=mv^3\frac{200al^2}{3(4l^2-a^2)^2}$$

3、解：（1）忽略相碰过程，当绳子伸到最长时，有

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\times 2mv^2=\frac{1}{2}k(\Delta l)^2+\frac{1}{2}\times 3m(\frac{v}{3})^2$$

解出 $\Delta l=\sqrt{\dfrac{8m}{3k}}v$

若在伸长过程中相碰，则有

$$\triangle l=\sqrt{\frac{8m}{3k}}v\ge\frac{4\pi R}{3}$$

可得 $$v\ge\frac{2\pi R}{3}\sqrt{\frac{3k}{2m}}$$

双振子振动的角频率

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{\mu}}=\sqrt{\frac{3k}{2m}}$$

因而此种情况下用时为

$$t=\frac{\frac{2\pi R}{3}}{2v}+\frac{\arcsin\frac{\frac{4\pi R}{3}}{\triangle l}}{\omega}=\frac{\pi R}{3v}+\sqrt{\frac{2m}{3k}}\arcsin\left(\frac{2\pi R}{3v}\sqrt{\frac{3k}{2m}}\right)$$

若伸长过程中没有相碰，则满足条件

$$\triangle l=\sqrt{\frac{8m}{3k}}v<\frac{4\pi R}{3}$$

这种情况下

$$t=2\left(\frac{\frac{2\pi R}{3}}{2v}+\frac{\frac{\pi}{2}}{\omega}\right)=\frac{2\pi R}{3v}+\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$$

（2）易得 A 走过的角度为

$$\theta_1=\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{3}\frac{a}{a+1}$$

角动量守恒，因而有关系

$$2mR^2\dot{\theta}_2-mR^2\dot{\theta}_1=mRv$$

因而可得

$$2\triangle\theta_2-\triangle\theta_1=\frac{v\triangle t}{R}$$

而 $$\triangle\theta_1=\frac{5\pi}{3}\frac{a}{a+1}$$

$$\triangle\theta_2=\frac{5\pi}{3}\frac{1}{a+1}$$

解出 $$\triangle t=\frac{5\pi R}{3v}\frac{2-a}{a+1}$$

因而用时为

$$t=\frac{\pi R}{6v}+\triangle t=\frac{\pi R}{v}\frac{7-3a}{2(a+1)}$$

4、解：在正常情况下

$$Q_2-Q_1=Q$$

$$\frac{Q_2}{C}+\frac{Q_1}{C}=E$$

$$Q_2=\frac{CE+Q}{2}$$

$$\varphi=\frac{Q_2}{C}$$

$$U=Q\varphi=\frac{QE}{2}+\frac{Q^2}{2C}$$

$$C=\frac{\varepsilon_0 a^2}{\frac{d}{2}}=\frac{2\varepsilon_0 a^2}{d}$$

而在有偏差时

$$dC_{21}=\frac{\varepsilon_0\left(\sqrt{2}a-2x\right)\bullet dx}{h+\theta x}=\frac{\varepsilon_0\left(\sqrt{2}a-2x\right)\bullet dx}{h(1+\frac{\theta x}{h})}$$

由于 a• θ <<d

$$dC_{21}\approx\frac{\varepsilon_0\left(\sqrt{2}a-2x\right)\bullet dx}{h}(1-\frac{\theta x}{h})=\frac{\varepsilon_0}{h}\left(\sqrt{2}a-2x-\frac{\sqrt{2}a\theta x}{h}+\frac{2\theta x^2}{h}\right)\bullet dx$$

同理

$$dC_{22}=\frac{\varepsilon_0}{h}\left(\sqrt{2}a-2x-\frac{\sqrt{2}a\theta x}{h}+\frac{2\theta x^2}{h}\right)\bullet dx$$

$$C_2=\int_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}}\frac{\varepsilon_0}{h}\left(\sqrt{2}a-2x-\frac{\sqrt{2}a\theta x}{h}+\frac{2\theta x^2}{h}\right)\bullet dx+\int_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}}\frac{\varepsilon_0}{h}\left(\sqrt{2}a-2x-\frac{\sqrt{2}a\theta x}{h}+\frac{2\theta x^2}{h}\right)\bullet dx$$

又 $h=\frac{d}{2}+\frac{\sqrt{2}a\theta}{2}$

$$C_2=\frac{2\varepsilon_0 a^2}{d}(1-\frac{\sqrt{2}a\theta}{d})$$

同理

$$C_3=\frac{2\varepsilon_0 a^2}{d}(1+\frac{\sqrt{2}a\theta}{d})$$

$$Q_2 - Q_1 = Q$$

$$\frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{C_3} = E$$

$$\varphi_1 = \frac{Q_2}{C_2}$$

$$U_1 = Q\varphi_1$$

$$\therefore \Delta U = U_1 - U$$

经化简

$$\Delta U = \frac{\sqrt{2a\theta}}{2d} EQ$$

5、解：由于肥皂泡两个表面，

$$P_2 = P + \frac{4\sigma}{R}$$

对于肥皂泡内气体

$$P_2 V = C$$

即

$$P_2 \cdot R^3 = C$$

$$PR^3 + 4\sigma R^2 = C$$

即

$$R^3 \cdot dP + 3R^2 P \cdot dR + 8\sigma R \cdot dR = 0$$

$$dR = -\frac{R^3}{3PR+8\sigma} \cdot dP$$

由于 $P_1 \ll P_0$，可近似认为

$$dR = -\frac{R_0^3}{3P_0R_0+8\sigma} \cdot dP$$

又

$$dP = P_1\omega\cos(\omega t) \cdot dt$$

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{R_0^2P_1\omega}{3P_0R_0+8\sigma}\cos(\omega t)$$

故

$$R = R_0 - \frac{R_0^2 P_1}{3P_0 R_0 + 8\sigma}\sin(\omega t)$$

$$E = 8\pi R^2\sigma = 8\pi R_0^2\sigma\left(1 - \frac{R_0 P_1}{3P_0 R_0 + 8\sigma}\sin(\omega t)\right)^2$$

由于 $P_1 \ll P_0$ 可得 $\frac{P_1 R_0}{3P_0 R_0} \ll 1$，可近似得

$$E \approx 8\pi R_0^2\sigma - \frac{16\pi R_0^3 P_1\sigma}{3P_0 R_0 + 8\sigma}\sin(\omega t)$$

6、解：电动势为

$$\varepsilon = \varepsilon_0\cos^2\omega t = \frac{1}{2}\varepsilon_0(1+\cos 2\omega t)$$

将电动势拆成 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 两项，其中

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\cos 2\omega t$$

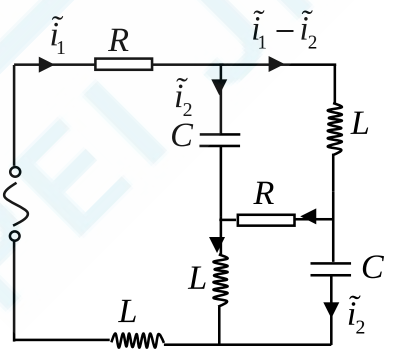
考察 ε_1 的贡献，易得

$$i_{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_0}{4R}$$

考察 ε_2 的贡献

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 e^{i2\omega t}$$

设电流分布如图所示



有回路方程

$$\tilde{i}_2\left(-\frac{iR}{2}\right) - (\tilde{i}_1 - 2\tilde{i}_2)R - (\tilde{i}_1 - \tilde{i}_2)\cdot 2iR = 0$$

$$\tilde{\varepsilon}_2=\tilde{i}_1R+\tilde{i}_2\cdot\left(-\frac{iR}{2}\right)+(\tilde{i}_1-\tilde{i}_2)\cdot 2iR+\tilde{i}_1\cdot 2iR$$

联立解得

$$\tilde{i}_1=\frac{\sqrt{2}\varepsilon_0}{8R}e^{i(2\omega t-\frac{\pi}{4})}$$

$$\tilde{i}_2=\frac{\sqrt{10}\varepsilon_0}{20R}e^{i(2\omega t-\alpha)}$$

$$\alpha=\arctan\frac{1}{3}$$

（1）因而，干路电流为

$$i_{干}=\frac{\varepsilon_0}{4R}+\mathrm{Re}\left[\tilde{i}_1\right]=\frac{\varepsilon_0}{4R}+\frac{\sqrt{2}\varepsilon_0}{8R}\cos(2\omega t-\frac{\pi}{4})$$

（2）通过电阻的电流为（从右向左为正）

$$i_R=\frac{\varepsilon_0}{4R}+\mathrm{Re}\left[\tilde{i}_1-2\tilde{i}_2\right]=\frac{\varepsilon_0}{4R}+\frac{\sqrt{2}\varepsilon_0}{8R}\cos(2\omega t-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{10}\varepsilon_0}{10R}\cos(2\omega t-\arctan\frac{1}{3})$$

7、解：由分析可知光程差对应的相位差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}d\left(\sin\alpha+\sin\beta\right)$$

由几何关系

$$\alpha+\beta=2\theta$$

由和差化积

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}d\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

即

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}d\cdot 2\sin\theta\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

当绿光叠加增强时

$$\delta=2\pi k$$

$$k\lambda=d\cdot 2\sin\theta\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$d\sin\theta=\frac{k\lambda}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

由三角函数知识

$$\left(d\sin\theta\right)_{\min}=\frac{k\lambda}{2}$$

此时垂直入射，同一级无相位差，现象明显

8、解：（1）由归一化条件，可得

$$\int_0^\infty 4\pi r^2 A e^{-\frac{2r}{a}} dr = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{4} 4\pi A = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\pi a^3}$$

（2）电势能表达式为

$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

因而 $$\bar{U} = \int_0^\infty \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \frac{1}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}} 4\pi r^2 dr = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

（3）有

$$\bar{E} = \bar{U} + \bar{E}_k = \bar{U} - \frac{1}{2}\bar{U} = \frac{1}{2}\bar{U} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

（4）由题意

$$\bar{E} + \triangle E = 0$$

因而 $$a = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 \triangle E} = 5.29\times10^{-11} m$$