

培尖教育 2018 年杭州校区高端物理 VIP 班

模拟测试卷（四）

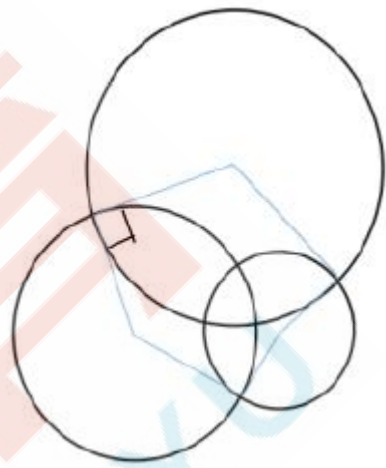
一、 求解下列两根问题

(1) 三个球面互相重叠，如图为过三个球心的平面所截得的截面

图，图中三个圆相处的切线两两垂直。设它们的半径分别为 $\alpha r, \beta r, \gamma r$ 。

现在在球面内部填充导体，求体系的电容

(2) 给你依托橡皮泥，可以任意改变形状但是橡皮泥密度不可改变。橡皮泥带均匀电荷体密度 ρ 。现指定真空中一个点 O ，要求这个点处的电场强度最大，求橡皮泥的球坐标方程（橡皮泥对称轴沿球坐标极轴方向，可以保留一个跟橡皮泥总体积相关的常数）



二、许多 α 粒子从远处的不同位置出发，向一个重原子核飞来，

速度均为 \vec{v}_0 。设 α 粒子质量 m ，与原子核之间斥力为 $F = \frac{mk}{r^2}$ 。近似认为原子核不动，不考虑相对论以及量子效应。

(1) 已知瞄准距离 d ，粒子质量 m, k, v ，求粒子的轨道的极坐标方程（以 \vec{v}_0 方向为极轴）

(2) 问无论取何种瞄准距离而粒子均不能到达的区域，求表面形状

三、为了成为老司机，Z 同学被迫了解了一大堆工科知识，并决定将它出成题——

在很久以前，人们刚造出汽车的时候，两个后轮通过一根轴直接与发动机相连，这意味着两个后轮转速保持为相等。

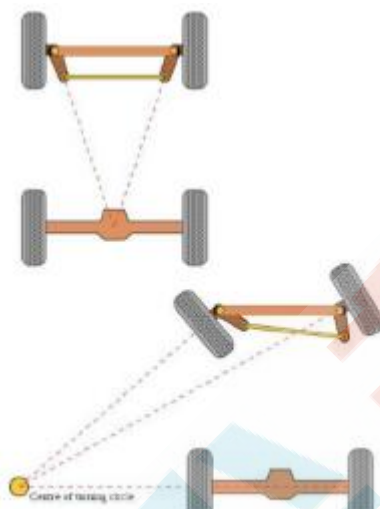
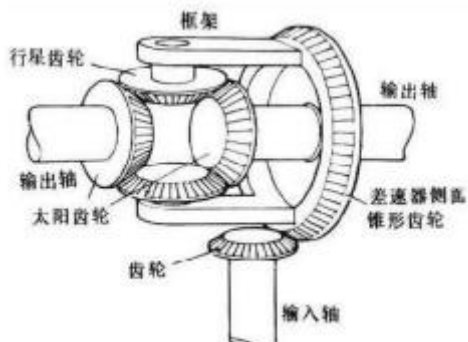
(1) 请你运用刚体的知识论证：汽车想要轻松地转弯，即四轮均恒作纯滚动，两个后轮转速必然不同，且两个前轮（无动力）的转角也一般不可能相等。

(2) 为了能方便地转弯，最早的工程师们把后轮设计成一个和发动机相连，另一个自由转动，这样有什么缺点？

(3) 1937 年，牛逼的工程师们做出了现在称之为“差速器”的东西，解决了这个难题，并激动地联合好莱坞做了一个短小精悍的科普视频，从此转弯时两后轮可以因摩擦力的作用自行调整转速达到完美转弯。最简单差速器的原理图如下，行星齿轮与太阳齿轮相同，框架与侧面锥形齿轮固连，与太阳齿轮共轴转动。定义其中几个关键的角速度——左输出轴转速度 ω_1 ，右输出轴转速 ω_2 ，框架转速 ω_3 ，行星齿轮相对于框架的转速 ω （在与框架相对静止的转动系中看），请你写出它们之间的关系：

(4) 假设四个车轮转轴形成矩形的参数为，写出为了达到完美转弯，两前车轮转角 θ_1 与 θ_2 之间应当满足的关系：

(5) 为了满足 (3) 中的关系，采用了现在称为“阿克曼原理”的解决方案——使用方向盘带动一个如图所示的梯形框架来完成前轮的转向，请计算这个框架的大致参数（矩形每个边长度）



四、布雷顿循环发动机是用于动力的第一个内燃机，一个理想状态下的布雷顿周期有以下四个过程：

- (i) 环境空气被吸入压缩机，加压，为等熵过程；
- (ii) 压缩空气通过燃烧室，与燃料混合，燃烧室流入与流出均开放，故为等压过程；
- (iii) 加热的压缩空气通过一些列涡轮机对外做功，功中的一部分用来推动压缩机，为等熵过程（涡轮机可以看成气体推动的扇叶）；
- (iv) 通过一些列涡轮机的气体排入大气，在大气中放热，为等压过程，将空气看作理想气体，

设其比热容为 $C_v = \frac{5}{2}R$ 。

(1) 按照 $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$ ，任意一个体系只要不吸热就不会熵增，故等熵过程应该等于绝热过程，这种理解对吗？

(2) 画出过程的 $P-V$ 图

(3) 设进入压缩机前气体温度为 T_1 ，压强为 P_1 ，压缩后为 T_2, P_2 ，证明效率可以表示成

$$\eta = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

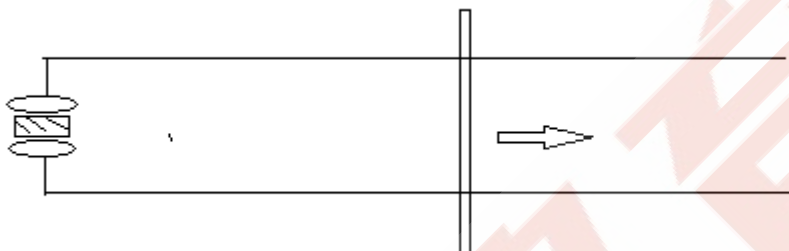
五.

两根平行的长直金属导轨固定放置，间距为 L ，一端用导线连接平行板电容器，平行板形状是半径为 r 的圆，两板间距离为 h ，充满绝对介电常数为 ϵ 、电导率为 σ 的电介质。存在垂直于纸面

向内的匀强磁场，磁感应强度大小为 B 。一根质量为 m 的导体棒垂直跨放在导轨上，与导轨接触良好。时间 $t=0$ 时给予导体棒大小为 v_0 的初速度，导体棒在运动过程中受到的摩擦力大小正比于速度大小，比例系数为 k 。不计电容器的边缘效应，不计导线、导轨、金属棒的电阻。

(1) 求导体棒的位移量大小为 x_0 时的速度大小；

(2) 求 $t=t_0$ 时导体棒的速度大小。

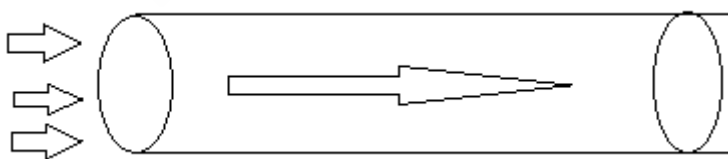


六、 π_0 介子一种可能的衰变方式为 $\pi_0 \rightarrow e^+ + e^- + \gamma$ 。某个 π_0 介子在以 $0.2c$ 的速度运动中发生上述衰变。在和 π_0 介子前进方向夹角为 $\theta = 30^\circ$ 方向上接收到一个电子。求这个电子速度大小的可能的范围。已知 $m_{\pi_0} = 135 \text{ MeV}$ ， $m_e = 0.511 \text{ MeV}$ ，普朗克常数 $h = 6.64 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。

七.2017 年我国磁聚焦霍尔电推进系统首次实现空间在轨验证。如下所述为应用的一种磁聚焦装置简化模型。一半径为 R 、长为 L 的圆柱区域，沿轴向通有电流密度为 j 的均匀电流，大量带电粒子以大小为 p 、方向平行于电流流向的动量从圆柱一端底面均匀注入，每个粒子的质量均为 m 、电量均为 q 。设 $L \gg R$ ，使得边缘效应可忽略。带电粒子会发生聚焦现象，试在以下两种不同条件下求该聚焦系统的焦距 f （聚焦点到入射端底面圆心的距离），计算结果保留至首阶非零项。已知真空磁导率 μ_0 。

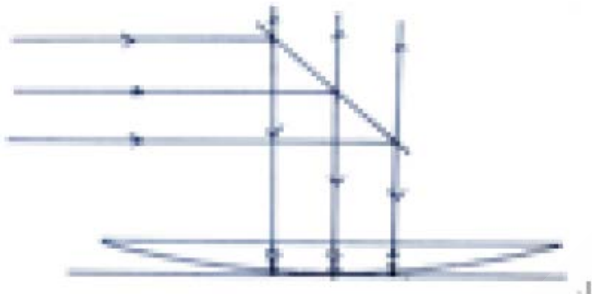
$$(1) \frac{\mu_0 q j R L}{p} \ll 1;$$

$$(2) \frac{\mu_0 q j R^2}{p} \ll 1 < \frac{\mu_0 q j R L}{p}.$$



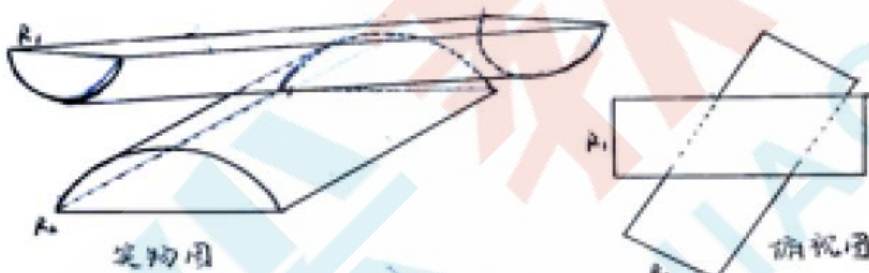
八、我们看以下几个问题

(1) 如图所示，球面半径为 R 的平凸透镜放在平板玻璃上，透镜球面与玻璃板上表面之间形成了非等厚空气膜，波长为 λ 的单色光，从透镜平面正入射。经过透镜球面反射的光和平板玻璃上表面反射光之间会形成相干叠加，在透镜上方可以观察到明暗相间的圆环，称为牛顿环，请推导出牛顿环的半径公式。（即第几级条纹的半径具体是多少。）



(2) 我们看以下形成的牛顿环

①将两半径为 R_1 、 R_2 的玻璃煮面如图所示叠放，两柱面的中轴线夹角为 θ ，试求两柱体接触点附近牛顿环的形状（要求求出出环的方程）



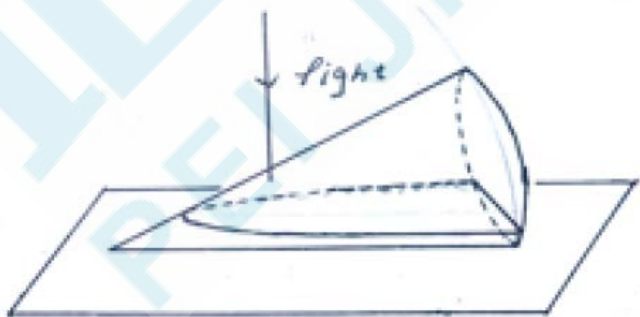
实物图

俯视图

实

②将一个玻璃圆锥倾倒在，放在一块玻璃平板上，试计算说明接触处附近牛顿环的形状（不必求出具体参数但环的方程得有）

（提示：二元函数的 Taylor 展开： $\Delta F = \sum_n \frac{1}{n!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n F$ ）



注：当然实际做时可以用一个比平面略高的平行于平面的切面，把该切面以上的圆锥体切掉，才能观察。