培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（十八）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

学校：________ 姓名：________ 学号：________ 装 订 线

题一.

ωr 远小于 c，取最低阶近似。原系中看，每一块面元都只受磁场洛伦兹力的作用，故由 Lorentz 力变换式得 S' 系中受力

$$F' = F_z' = \iint_{\text{球面}} \frac{\omega\sigma r^3 B\sqrt{1-\beta^2}\sin^2\theta\sin\varphi d\theta d\varphi}{\left(1-\frac{\beta\omega r}{c}\sin\theta\sin\varphi\right)} \approx \frac{4\pi\omega^2 r^4\sigma\beta B\sqrt{1-\beta^2}}{3c}$$

题二.

（1）设圆盘圆心向右的平动速度为 v，圆盘转动角速度为 ω，因为地面足够粗糙，故圆盘作纯滚动，有

$v=\omega r$ ①　　3'

滑轮固连在圆盘上，它合速度的水平向右分量即为 v，竖直向下分量即为 ωr ③'

滑轮速度沿上方绳向里的分速度造成上方绳长度的缩短、沿下方绳向里的分速度造成下方绳长度的缩短，这两部分绳总的缩短速度应为人的收绳速度 v_0，即有

$$v\frac{\sqrt{3}}{2}-\omega r\frac{1}{2}+v\frac{\sqrt{3}}{2}+\omega r\frac{1}{2}=v_0 \text{ ③} \qquad 4'$$

联立解得

$$\omega=\frac{\sqrt{3}v_0}{3r} \text{ ④} \qquad 3'$$

（2）设圆盘圆心向右的平动加速度为 a，圆盘转动角加速度为 β，由纯滚动条件有

$$a=\beta r \text{ ⑤} \qquad 3'$$

滑轮合加速度的水平向右分量即为 $a-\omega^2 r$，竖直向下分量即为 βr ⑥　3'

滑轮加速度沿上方绳向里的分量扣除掉绕墙顶转动的向心加速度造成上方绳长度的加速缩短、沿下方绳向里的分量扣除掉绕墙底转动的向心加速度造成下方绳长度的加速缩短，这两部分绳总的缩短加速度应为人的收绳加速度 a_0，即有（下式为⑦式）

$$a\frac{\sqrt{3}}{2}-\omega^2 r\frac{\sqrt{3}}{2}-\beta r\frac{1}{2}-\frac{\left(v\frac{1}{2}+\omega r\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2r}+a\frac{\sqrt{3}}{2}-\omega^2 r\frac{\sqrt{3}}{2}+\beta r\frac{1}{2}-\frac{\left(\omega r\frac{\sqrt{3}}{2}-v\frac{1}{2}\right)^2}{2r}=a_0 \qquad 4'$$

联立解得

$$a=\frac{\sqrt{3}}{3}a_0+\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)v_0^2}{9r}\text{、}\ \beta=\frac{\sqrt{3}a_0}{3r}+\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)v_0^2}{9r^2} \quad ⑧$$ 4’

设圆盘与地面之间的摩擦力大小为 f，对圆盘由角动量定理得

$$fr=\frac{1}{2}mr^2\beta \quad ⑨$$ 3’

解得

$$f=\frac{\sqrt{3}}{6}ma_0+\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)mv_0^2}{18r} \quad ⑩$$ 3’

（3）设绳子上的张力大小为T，对圆盘由牛顿第二定律得

$$\sqrt{3}T-f=ma \quad ⑪$$ 3’

解得

$$T=\frac{1}{2}ma_0+\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)v_0^2}{6r} \quad ⑫$$ 3’

题三.

能量守恒

$$\frac{1}{2}\lambda u_i^2+\frac{1}{2}v_i^2=\frac{1}{2}\lambda u_{i+1}+\frac{1}{2}v_{i+1}^2 \qquad (5')$$

因此$u_i^2+\frac{v_i^2}{\lambda}$为一个定值$C$。适当选取初始的$A$的速度大小使$C=1$，这样不会改变碰撞的次数. i

$$u_i=\cos\alpha_i \qquad (3')$$
$$v_i=\sin\alpha_i\sqrt{\lambda} \qquad (3')$$

由动量守恒，

$$\lambda u_i-v_i=\lambda u_{i+1}+v_{i+1} \qquad (5')$$

得到

$$\sqrt{\lambda}=\frac{\sin\alpha_i+\sin\alpha_{i+1}}{\cos\alpha_i-\cos\alpha_{i+1}}=\cot\left(\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right) \qquad (5')$$

故每次α的变化量是一定的，且$\sqrt{\lambda}$越大，α越接近于连续变化。 当某次碰撞后，A的速度反向且B的速度与墙的方向反向，那么不会有新的碰撞.即

$$\alpha>\pi \qquad (5')$$

在λ足够大时，

$$\Delta\alpha=2\arctan\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\approx\frac{2}{\sqrt{\lambda}} \qquad (5')$$

球与球之间的碰撞次数

$$n=\frac{\pi}{\Delta\theta}=\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2} \qquad (3')$$

由于每次球与球相碰时会有一次球碰墙，故总次数为

$$N=2n=\pi\sqrt{\lambda} \qquad (6')$$

题四.

由题意:

$$\varepsilon_{Ar}=n_A^2,\varepsilon_{or}=n_o^2 \quad (1)\ 2'$$

设晶体体积为V，对于 z 方向的极化:

$$P_{Az}=(\varepsilon_{Ar}-1)\varepsilon_0E_z \quad (2)\ 1'$$

$$P_{oz}=(\varepsilon_{or}-1)\varepsilon_0E_z \quad (3)1'$$

$$V_A=(1-p)V,V_o=pV \quad (4)2'$$

$$p_z=P_{Az}V_A+P_{oz}V_o \quad (5)\ 2'$$

为总的电偶极矩. 又有

$$p_z=(\varepsilon_z-1)\varepsilon_0E_zV \quad (6)1'$$

故

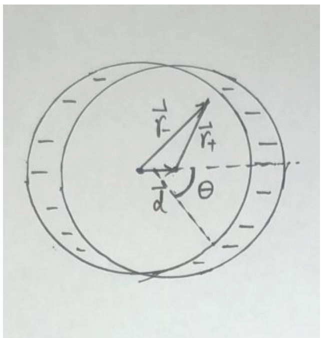
$$\varepsilon_z=1+\frac{p_z}{\varepsilon_0E_zV}=\varepsilon_{Ar}(1-p)+\varepsilon_{or}p \quad (7)\ 2'$$

由(1)(7)

$$n_z=\sqrt{\varepsilon_z}=\sqrt{(1-p)n_A^2+pn_o^2} \quad (8)2'$$

对于 x 方向的极化:

先考虑右图模型，两个半径为 a 的无限长圆柱，一个带电荷密度$+\rho$，另一个带电荷密度$-\rho$，圆心相距$d(d<<a)$.



$$\vec{E}_+=\frac{\pi r_+^2\rho}{2\pi\varepsilon_0r_+}\hat{r}_+=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}_+ \quad (9)2'$$

$$\vec{E}_-=-\frac{\pi r_-^2\rho}{2\pi\varepsilon_0r_-}\hat{r}_-=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}_- \quad (10)2'$$

$$\vec{E}=\vec{E}_++\vec{E}_-=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{d} \quad (11)1'$$

令$\sigma_0=\rho d$:

$$E=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \quad (12)1'$$

假定水-介质界面上的极化电荷面密度分布为$\sigma(\theta)=\sigma_0\cos\theta$，以外电场方向(x 方向)为极轴方向.

设介质中电场强度大小为E_x. 由于 p 很小,E_x可以认为是均匀的.

$$E_{in}=E_x-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \tag{13}$$ 1’

E_{in} 的法向分量

$$E_{in}(n)=(E_x-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0})\cos\theta \tag{14}$$ 1’

由高斯定理:

$$E_{out}(n)-E_{in}(n)=\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_0\cos\theta}{\varepsilon_0} \tag{15}$$ 2’

故

$$E_{out}(n)=(E_x+\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0})\cos\theta \tag{16}$$ 2’

$$D_{out}(n)=\varepsilon_{Ar}\varepsilon_0E_{out}(n),D_{in}(n)=\varepsilon_o\varepsilon_0E_{in}(n) \tag{17}$$ 2’

$$D_{out}(n)=D_{in}(n) \tag{18}$$ 1’

由(13)(16)(17)(18):

$$\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}=\frac{\varepsilon_{or}-\varepsilon_{Ar}}{\varepsilon_{or}+\varepsilon_{Ar}}E_x \tag{19}$$ 2’

故

$$E_{in}=\frac{2\varepsilon_{Ar}}{\varepsilon_{or}+\varepsilon_{Ar}}E_x \tag{20}$$ 2’

$$p_{in}=(\varepsilon_{or}-1)\varepsilon_0E_{in} \tag{21}$$ 1’

$$p_{out}=(\varepsilon_{Ar}-1)\varepsilon_0E_x \tag{22}$$ 1’

$$p_x=p_{in}V_o+p_{out}V_A=(\varepsilon_x-1)\varepsilon_0E_xV \tag{23}$$ 2’

由(20)(21)(22)(23):

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=n_A^2-p\frac{(n_A^2-n_o^2)(1+n_A^2)}{n_A^2+n_o^2} \tag{24}$$ 2’

$$n_x=n_y=\sqrt{\varepsilon_x}=\sqrt{n_A^2-p\frac{(n_A^2-n_o^2)(1+n_A^2)}{n_A^2+n_o^2}} \tag{25}$$ 2’

题五.

贮存量不变,流入-流出=侧面/

$dt = \frac{dx}{u_0}$ 8'

$dm = \rho\pi r^2 dx$ 8'

$$-C_p dmdT = 2\pi r dx k(T - T_0)dt$$ 8'

整理得:

$\frac{\mathrm{dT}}{(T-T_0)} = -\frac{2k}{u_0 C_p \rho r}dx$ 8'

解得:

$T = T_0(1 + e^{-\frac{2k}{u_0 C_p \rho r}x})$ 8'

题六.

1 逐次成像计算

2 逐次成像计算,得到 s'与 s 的函数关系,计算$\frac{ds'}{ds}$即可

3 计算$\frac{d(\frac{ds'}{ds})}{d\,d}$即可

每空 10 分

（1）-12；7.2

（2）0.442

（3）4

题七.

（1） 观察两个回路，绕行一圈，是两个绕行方向不同的圆

于是由$\Delta q = \frac{\Delta\Phi}{R}$，得 3'

$$q = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4R}$$ 3'

（2） 我们容易证一个结论，在一个匀强磁场中一段弯曲的导线所受安培力等效于连接首尾两点流经电流大小相等的直线段所受的安培力，于是我们设磁场边界割圆的长度为l，于是

① 小圆进入磁场时

$$m\frac{dv}{dt} = -Bl(x)\frac{Bl(x)}{R}\frac{dx}{dt}$$ 4'

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{B^2 l^2(x)dx}{mR}$$ 4'

而又有

$$l(x) = 2\sqrt{\frac{d^2}{4} - (\frac{d}{2} - x)^2}$$

$$= 2\sqrt{dx - x^2}$$ 4'

得到

$$v=-\int_0^x \frac{4B^2(dx-x^2)}{mR}dx$$
（x<d）
$$=v_0-\frac{4B^2}{mR}(\frac{dx^2}{2}-\frac{x^3}{3})$$ 4′

② 大圆进入磁场时，同理，改换一下 x 的原点，可以得到下面的式子

$$v=\int_0^{x-d} -\frac{4B^2(D(x-d)-(x-d)^2)}{mR}dx$$ 4′
（d<x<d+D）
$$=v_0-\frac{2}{3}\frac{B^2d^3}{mR}-\frac{4B^2}{mR}(\frac{D(x-d)^2}{2}-\frac{(x-d)^3}{3})$$

综上

$$v_x=\begin{cases} v_0-\frac{4B^2}{mR}(\frac{dx^2}{2}-\frac{x^3}{3})【0<x<d】 & 3' \\ v_0-\frac{2}{3}\frac{B^2d^3}{mR}-\frac{4B^2}{mR}(\frac{D(x-d)^2}{2}-\frac{(x-d)^3}{3})【d<x<d+D】 & 3' \\ v_0-\frac{2}{3}\frac{B^2d^3}{mR}-\frac{2}{3}\frac{B^2D^3}{mR}【x>D+d】 & 3' \end{cases}$$

（3） 要求在全部进入之前速度一直大于零，即

$$v_0-\frac{2}{3}\frac{B^2d^3}{mR}-\frac{2}{3}\frac{B^2D^3}{mR}>0$$ 5′
$$v_0>\frac{2}{3}\frac{B^2(d^3+D^3)}{mR}$$

题八

因为所有的动力学方程的非齐次项都正比于g，最终的答案一定正比于g（6′） 而考虑到等效原理，如果这个系统整体向上作加速度为a的运动，在系统的参考系里，相当于重力加速度变为$g'=g+a$,则所有的力和加速度都正比于$g+a$.因此绳上拉力

$$T=M(g+a)$$

这意味着整个系统可以看作一个质量为M的物体(6′) 现考虑第一个物块以及跟其挂在同一个滑轮上的系统.

$$F=2T \quad (3') \tag{1}$$
$$T-mg=ma \quad (3') \tag{2}$$
$$Mg=Ma+T \quad (3') \tag{3}$$
$$F=Mg \quad (3') \tag{4}$$

由前三式解得

$$a=\frac{M-m}{M+m}g \quad (4')$$

因此

$$M=3m \quad (4')$$

拉力

$$F=3mg \quad (4')$$

第一个物体的加速度为

$$a=\frac{g}{2} \quad (4')$$