培尖教育2018年学科竞赛夏令营物理模拟卷（十二）

考试时间：150分钟　总分320分

（参考答案）

1、解：（1）转动惯量为

$$J=\frac{2}{3}mr^2$$

摩擦力　$f=\mu mg$，平行于底线向左

因而　$v_x=\frac{I}{m}-\mu gt$

$$J\beta=fr$$

可得　$\beta=\frac{3\mu g}{2r}$

开始纯滚时

$$v_x=\beta r\Delta t$$

解得　$\Delta t=\frac{2I}{5\mu g}$

球到达底线时，用时为

$$t_1=\frac{d}{v_0}$$

（i）若此时球还未达到纯滚动，则有

$$t_1\le\Delta t$$

可得　$I\ge\frac{5\mu mgd}{2v_0}$

又要求　$\frac{Id}{mv_0}-\frac{1}{2}\mu g\left(\frac{d}{v_0}\right)^2\le L$

解得　$I\le\frac{mv_0L}{d}+\frac{\mu mgd}{2v_0}$

因而　$\frac{5\mu mgd}{2v_0}\le I\le\frac{mv_0L}{d}+\frac{\mu mgd}{2v_0}$

此情况要求

$$v_0^2\ge2\mu gd$$

（ii）若此时球已经达到了纯滚动，则有

$$t_1\ge\Delta t$$

可得　$I\le\frac{5\mu mgd}{2v_0}$

又要求
$$\frac{I}{m}\Delta t-\frac{1}{2}\mu g\Delta t^2+(\frac{I}{m}-\mu g\Delta t)(t_1-\Delta t)$$
$$=\frac{3Id}{5mv_0}+\frac{2I_0}{25m^2\mu g}\le L$$

解得 $I\le\frac{15\mu mgd}{4v_0}\left[\sqrt{1+\frac{8v_0^2L}{9\mu gd^2}}-1\right]$

此种情况要求

$$I\le\min\left\{\frac{15\mu mgd}{4v_0}\left[\sqrt{1+\frac{8v_0^2L}{9\mu gd^2}}-1\right],\frac{5\mu mgd}{2v_0}\right\}$$

综上，若 $v_0^2\ge2\mu gd$ ，则

$$I\le\frac{mv_0L}{d}+\frac{\mu mgd}{2v_0}$$

若 $v_0^2<2\mu gd$ ，则

$$I\le\frac{15\mu mgd}{4v_0}\left[\sqrt{1+\frac{8v_0^2L}{9\mu gd^2}}-1\right]$$

（2）（i） $I=\frac{mLv_0}{d}$

（ii）达到纯滚动时， $\Delta t=\frac{2v_0L}{5\mu gd}$

若 $\frac{d}{v_0}\le\Delta t$ ，即 $v_0^2\ge\frac{5\mu gd^2}{2L}$

有 $a=\frac{1}{2}\mu g\frac{d^2}{v_0^2}=\frac{\mu gd^2}{2v_0^2}$

若 $\frac{d}{v_0}>\Delta t$ ，即 $v_0^2<\frac{5\mu gd^2}{2L}$

有 $a=\frac{2}{5}L-\frac{2v_0^2L^2}{25\mu gd^2}$

2、解：（1）碰前，有

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgl$$

对 C 点，角动量守恒，满足

$$mv_0\frac{l}{4}=\left[\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]\omega_0$$

解得 $\omega_0=\frac{12}{7}\sqrt{\frac{2g}{l}}$

又有能量关系

$$mg\frac{l}{4}\sin\theta+\frac{1}{2}\frac{7}{48}ml^2\omega_0^2=\frac{1}{2}\frac{7}{48}ml^2\omega^2$$

$$\omega^2=\frac{288}{49}\frac{g}{l}+\frac{24}{7}\frac{g}{l}\sin\theta$$

求导可得出

$$\beta=\frac{12g}{7l}\cos\theta$$

质心运动定理

$$f-2mg\sin\theta=m\omega^2\frac{l}{4}$$

$$2mg\cos\theta-N=m\beta\frac{l}{4}$$

解得

$$f=mg\left(\frac{72}{49}+\frac{20}{7}\sin\theta\right)$$

$$N=\frac{11}{7}mg\cos\theta$$

发生滑动时，满足

$$\frac{f}{N}=\frac{72+14\sin\theta_0}{77\cos\theta_0}=2$$

解得 $\theta_0=27.49^\circ$

用时为 $\Delta t=\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{288}{49}\frac{g}{l}+\frac{24}{7}\frac{g}{l}\sin\theta}}=0.186\sqrt{\frac{l}{g}}$

（2）设跳跃瞬间，虫子的速度为 v_x,v_y

则角动量关系满足

$$mv_0\frac{l}{4}=\frac{1}{12}ml^2\omega-mv_y\frac{l}{4}$$

得到 $\omega=3\sqrt{\frac{2g}{l}}+\frac{3v_y}{l}$ 而又有 $\frac{2v_xv_y}{g}=\frac{L}{4}$

因而

$$W=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)+\frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\omega^2-\frac{1}{2}\frac{7}{48}ml^2\omega_0^2$$

$$=\frac{mg^2l^2}{128v_y^2}+\frac{7}{8}mv_y^2+\frac{3}{4}m\sqrt{2gl}v_y+\frac{9}{28}mgl$$

不难得到 $v_y=0.221\sqrt{gl}$ 时，有

$$W_{\min}=0.7585mgl$$

3、解：由题可知

$$M = m_1 + m_2 \qquad ①$$

由动量守恒

$$(M+m)v_0 = m_1v_1 - m_2v_2 \qquad ②$$

再由题目对卫星两部分的描述，有

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{GM_Em_1}{R} = 0$$

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{GM_Em_2}{R} = \frac{1}{2}m_2v_3^2 - \frac{GM_Em_2}{R_0}$$

$$m_2v_2R = m_2v_3R_0$$

由于传递出的能量与炸弹质量成正比

$$\frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = km \qquad ③$$

而

$$\frac{GM_E(M+m)}{R^2} = \frac{(M+m)v_0^2}{R}$$

可得

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_E}{R}} \qquad ④$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM_E}{R}} \qquad ⑤$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_ER_0}{R(R+R_0)}} \qquad ⑥$$

将①分别代入②，③得

$$M+m)v_0 = m_1(v_1+v_2) - Mv_2 \qquad ⑦$$

$$\frac{1}{2}(M-m_1)v_2^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 = km \qquad ⑧$$

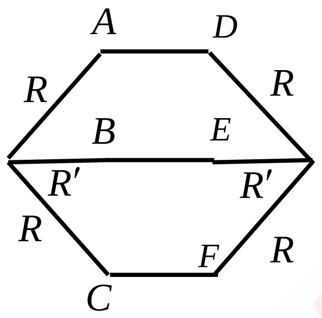
联立⑦⑧消去 m_1 得

$$m = \frac{v_0(v_1-v_2)+v_1v_2-v_0^2}{2k-v_0(v_1-v_2)}M$$

将④⑤⑥及 $k = t\frac{GM_E}{R_0}$ 代入得

$$m=\frac{(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{\frac{2R}{R+R_0}})}{2t+\sqrt{\frac{2R}{R+R_0}}-\sqrt{2}}M$$

4、解：电路可做如图等效



易得其中R'， R满足

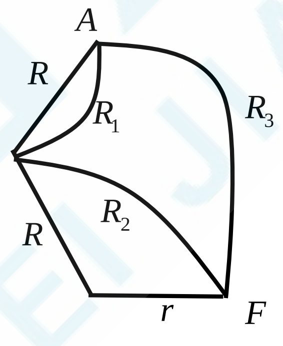
$$\frac{(2R+2r)2r}{2R+4r}=2R$$

$$\frac{\left(\frac{(R+2r)(R'+r)}{R+3r+R'}+R+r\right)r}{\frac{(R+2r)(R'+r)}{R+3r+R'}+R+2r}=R'+R、$$

解得 $R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$

$R'=0.08663r$

对电路进行星角变换，可得

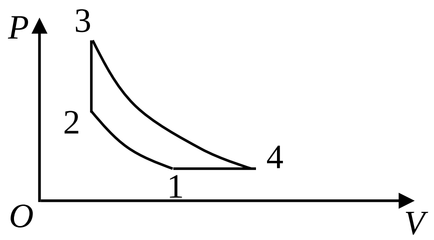


其中
$R_1=5.863r$
$R_2=2.240r$
$R_3=3.088r$

因而可得

$$R_{AF}=\left[R\parallel R_1+(R+r)\parallel R_2\right]\parallel R_3=1.008925r$$

5、解：由题目描述可画出 P-V 关系如图



1→2，绝热　2→3 等容　3→4 绝热 4→1 等压

$$Q = n_0 C_V (T_3 - T_2)$$

$$Q_1 = n_0 C_P (T_4 - T_1)$$

$$\eta = \frac{Q - Q_1}{Q}$$

由题可知 $T_1 = T_0$　$P_1 = P_0$　$V_1 = 3V_2$

对于 1→2，绝热 过程

$$T_0 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

即

$$T_2 = 3^{\gamma-1} T_0$$

$$\therefore T_3 = \frac{Q}{n_0 C_V} + 3^{\gamma-1} T_0$$

$$P_2 V_2^{\gamma} = P_3 V_3^{\gamma}$$

$$\therefore P_2 = 3^{\gamma} P_1$$

又 2→3 等容

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3}$$

$$P_3 = 3^{\gamma} P_1 \bullet \frac{\frac{Q}{n_0 C_V} + 3^{\gamma-1} T_0}{3^{\gamma-1} T_0}$$

由于 3→4 绝热

$$\frac{P_3^{\gamma-1}}{T_3^{\gamma}} = \frac{P_4^{\gamma-1}}{T_4^{\gamma}}$$

$$T_4 = (3T_0)^{1-\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{Q}{n_0 C_V} + 3^{\gamma-1} T_0\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

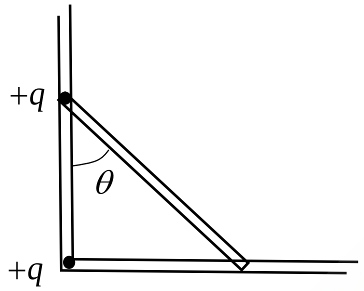
将之代入

$$\eta=\frac{Q-Q_1}{Q}=1-\frac{n_0C_P(T_4-T_1)}{n_0C_V(T_3-T_2)}$$

得

$$\eta=1-\frac{n_0C_P\left[(3T_0)^{1-\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{Q}{n_0C_V}+3^{\gamma-1}T_0\right)^{\frac{1}{\gamma}}-T_0\right]}{Q}$$

6、解：（1）设如图所示θ



力矩上，满足

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta=\frac{kq^2}{l^2\cos^2\theta}l\sin\theta$$

解得 $\theta=\arccos\sqrt{\frac{2kq^2}{mgl^2}}$

（2）能量表达式为

$$E_p=mg\frac{l}{2}\cos\theta+\frac{kq^2}{l\cos\theta}$$

$$E_k=\frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2=\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$$

总能量 $E=mg\frac{l}{2}\cos\theta+\frac{kq^2}{l\cos\theta}+\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$

能量不随时间变化，有

$$\frac{dE}{dt}=0\Rightarrow-\frac{mgl\sin\theta}{2}\dot{\theta}+\frac{kq^2\sin\theta}{l\cos^2\theta}\dot{\theta}+\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta}=0$$

$$\dot{\theta}\text{不恒为零}\Rightarrow-\frac{mgl\sin\theta}{2}+\frac{kq^2\sin\theta}{l\cos^2\theta}+\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}=0$$

$$\text{令}\,\theta=\theta_0+\vartriangle\theta,\quad\theta_0=\arccos\sqrt{\frac{2kq^2}{mgl^2}}$$

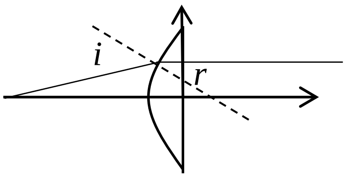
$$\text{可得}\cos\theta=\sqrt{\frac{2kq^2}{mgl^2}}-\sqrt{1-\frac{2kq^2}{mgl^2}}\vartriangle\theta;\sin\theta=\sqrt{1-\frac{2kq^2}{mgl^2}}+\sqrt{\frac{2kq^2}{mgl^2}}\vartriangle\theta$$

$$\Rightarrow\vartriangle\ddot{\theta}+\frac{3g}{l}\sqrt{\frac{mgl^2}{2kq^2}-1}\vartriangle\theta=0$$

因而杆做小振动的周期为

$$T=2\pi\left[\frac{3g}{l}\sqrt{\frac{mgl^2}{2kq^2}}-1\right]^{-\frac{1}{2}}$$

7、解：（1）折射定律，如图所示



易得 $$\sin r=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$\sin i=\frac{y}{\sqrt{(x+\sqrt{3}R)^2+y^2}}\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+\sqrt{3}R)^2+y^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

折射定律

$$\sin i=2\sin r$$

$$y\frac{dy}{dx}+(x+\sqrt{3}R)=2\sqrt{(x+\sqrt{3}R)^2+y^2}$$

$$\sqrt{y^2+(x+\sqrt{3}R)^2}=2x+C$$

$x=0,y=R$，可得 C=2R

因而 $$\sqrt{y^2+(x+\sqrt{3}R)^2}-2x=2R$$

费马原理，有

$$L=\sqrt{y^2+(x+\sqrt{3}R)^2}-2x=Const$$

结合 $x=0,y=R$，可得

$$\sqrt{y^2+(x+\sqrt{3}R)^2}-2x=2R$$

（2）令 $y=0$，可得

$$\sqrt{3}R+x-2x=2R$$

得到 $$x=-(2-\sqrt{3})R$$

因而透镜厚度为

$$d=(2-\sqrt{3})R$$

（3）易得右侧的波矢分别为

$$\vec{k}_1=\frac{2\pi}{\lambda}\hat{i},\vec{k}_2=\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{1}{2}\hat{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j})$$

因而 $\varphi_1=\varphi_{10}-\frac{2\pi}{\lambda}x$

$$\varphi_2=\varphi_{20}-\frac{\pi}{\lambda}x-\frac{\sqrt{3}\pi}{\lambda}y$$

因而 $\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}+\frac{\pi}{\lambda}x-\frac{\sqrt{3}\pi}{\lambda}y$

由于光屏上 x 坐标相等，因而有

$$\frac{\sqrt{3}\pi}{\lambda}\Delta y=2\pi\Rightarrow\Delta y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\lambda$$

8、解：（1）1.以地面系为 S 系，以沿 x 轴以 v 运动的参考系为 S' 系

在 S' 系中，2 处仅有 y 方向电场

$$E_y'=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}$$

由变化式

$$E_y=\gamma E_y'$$

$$B_z=\frac{\gamma v}{c^2}E_y'$$

由于 q_2 在 S 系中静止

$$F_1=q_2E_y=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2\sqrt{1-\beta^2}}$$

2.电磁场状况与 1.中相同

$$F_2=q_2(E_y-v\times B_z)$$

即 $F_2=\frac{q_1q_2\sqrt{1-\beta^2}}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}$

(2)在(1) 2.中的 S' 系内，显然可以得到

$$F_2'=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}$$

在 S' 系中，仅在 2 处存在电场，即

$$F_1'=F_2'=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}$$

而 $F_1 = q_2 E_y = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 {y_0}^2 \sqrt{1-\beta^2}}$

$$F_2 = \frac{q_1 q_2 \sqrt{1-\beta^2}}{4\pi\varepsilon_0 {y_0}^2}$$

得到

$$F_2' = \frac{F_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad F_1' = F\sqrt{1-\beta^2}$$

而观察二者不同，在 1 中其速度为 0，在 2 中，其速度为βc

可猜想力的变换与物体速度有关，可猜想 $F_y' = F_y \bullet \dfrac{\sqrt{1-{v/c}^2}}{1-{vu/c^2}}$ 或 $F_y' = F_y \bullet \dfrac{\sqrt{1-{v/c}^2}}{1-{u^2/c^2}}$

由于当 q_2 速度接近 c 时，其在 S' 系中受力为 $\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 {y_0}^2}$，在 S 系中受力 $\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 {y_0}^2} \bullet \dfrac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

满足 $F_y' = F_y \bullet \dfrac{\sqrt{1-{v/c}^2}}{1-{vu/c^2}}$

即猜想 $F_y' = F_y \bullet \dfrac{\sqrt{1-{v/c}^2}}{1-{vu/c^2}}$