金石为开 2021 五一物理竞赛力电刷题班

模拟测试九

一、外星人看电荷

对于一组粒子，外星人看到其中第 i 个粒子带有电荷量 q_i' 和磁荷量 g_i'，而地球人由于不具备特殊体质，在地球人眼中只能看到他们带有电荷量 q_i

已知两个磁荷 g_1、g_2 之间的磁库仑力表示为

$$F_m=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{g_1g_2}{r^2}$$

（1） 考虑两个完全相同的静止的粒子，在外星人眼里他们所带的电荷和磁荷量相同，分别为 q_1' 和 g_1'，而在地球人眼里他们所带的电荷量相同均为 q_1，不带磁荷。显然地球人和外星人除了体质不同以外没什么不同的，至少他们可以制造一把弹簧秤，测出相同的拉力。于是他们看到的这两个完全相同的粒子之间的作用力也应该相同。求出 q_1 与 q_1' 和 g_1' 的关系？（8 分）

（2） 现在我们考虑两组粒子。第一组中每个粒子在外星人眼里都带有电荷量 q_1' 和磁荷量 g_1'，第二组中每个粒子在外星人眼里都带有电荷量 q_2' 和磁荷量 g_2'。而在地球人眼里是看不到磁荷的，看到的是电荷量 q_1 和 q_2。同样考察这些粒子之间的作用力相同的条件，求外星人看到的磁荷与电荷满足什么条件？（12 分）

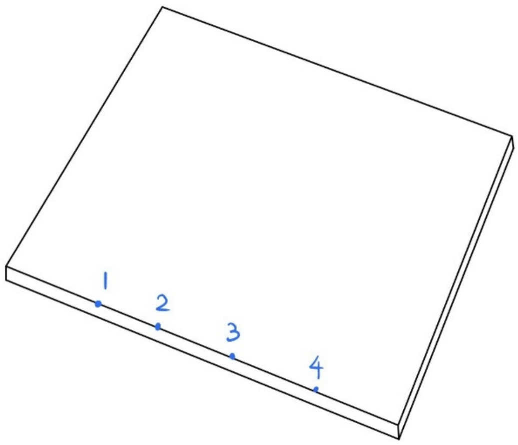
（3） 有许多相同的粒子，还是与前两小问相同，在外星人眼里他们的电荷量都为 q'，磁荷量都为 g'，在地球人眼里他们的带电量都为 q，现在取出一个粒子，并把剩下的粒子排成一条线，均匀地分布在 z 轴上负无穷到正无穷的范围内。单位长度内有 n 个粒子。让被挑出来的那个粒子位于与 z 轴距离为 r 的轴线上，并以速度 v 平行于 z 轴运动。已知 r 远大于 z 轴上排列着的粒子的间距。考虑作用在这个运动的粒子上的作用力。利用外星人和地球人看到作用力相同的条件求出一个磁荷在存在电场与磁场的空间中受到的“洛伦兹力”的表达式？（20 分）

二、范德堡法测电阻率（40 分）

现有一个半无穷大的导体薄片，其边界面是直线，现在我们使用范德堡四探针法测量其电导率。沿边界依次取四个接点 1，2，3，4 在 1，2 之间接入电流 I_{12} 时，测量 3，4 之间的电压绝对值 U_{34}，在 2，3 之间接入电流 I_{23} 时，测量 1，4 之间的电压绝对值 U_{14}。已知导体薄片的厚度为均匀的 t，在实验中测出上述量，即可测出导体薄片的电导率 σ

（1） 已知 $I_{12}=20mA$，$U_{34}=3.3V$，$I_{23}=40mA$，$U_{14}=1.2V$，以及 $t=1.0mm$，求出电导率 σ

（2） 取相同材料、厚度趋于 0 的导体制成的一个无穷大平面，在平面上一个点处注入电流 I ,求平面上的电流单独存在时在空间中激发的磁场分布？



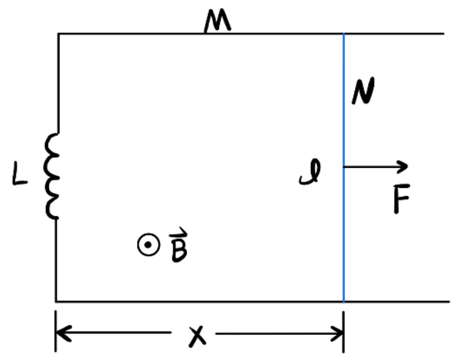
三、导轨上的滑动杆（30 分）

如图所示，自感系数为 L 且没有电阻的电感线圈连接在平行导轨 M 的左端，有一根长为 l 的杆 N 水平放置在与之垂直的平行导轨 M 上，其两端恰好与导轨接触，并可在导轨上无摩擦地运动。在全平面中存在垂直纸面向上的匀强磁场 $\vec{B}$（不需要考虑其对回路磁通的变化）。我们现在对杆子施加向右水平恒力 $\vec{F}$，使得杆子 N 从静止开始向右运动，杆子的初始位置为 $x(0)=0$，求解下列问题：

（1） 求电路中电流 I 与坐标 x 之间的关系式（9 分）

（2） 求解杆的运动方程，并通过初值解出杆的运动表达式 $x(t)$（15 分）

（3） 在何时杆子的动能达到极大值？何时体系中的磁能达到极大值？并分别求出此极大值（6 分）



四、焦耳热从哪里来（40 分）

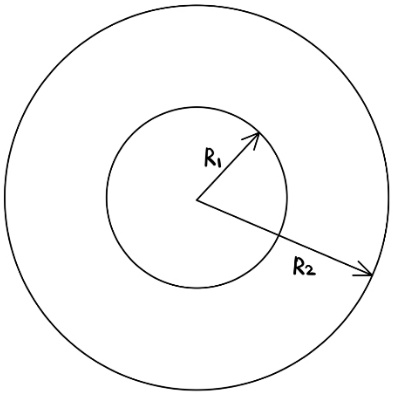
我们考虑下图的电容器，两个同心导体球壳，其半径分别为R_1, R_2，其间均匀填充有介电常数为ε，电导率为σ的介质。$t=0$时电容器充有电荷Q_0。

以下小问可以从具体的场表达式求解，也可以用集总参数模型求解

（1） 求解电容器上存储的电荷量随时间变化的表达式$Q(t)$（10 分）

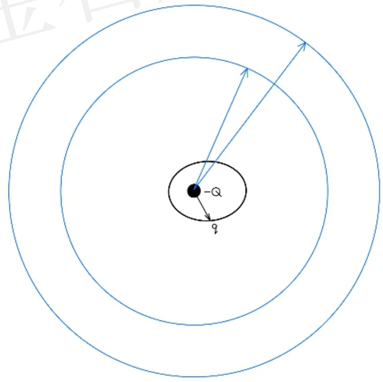
（2） 写出两同心球壳之间电场$\vec{E}$与磁场$\vec{B}$分布的表达式，并求出坡印廷矢量$\vec{S}$（18 分）

（3） 计算两导体球壳之间由电流产生的焦耳热功率密度，并验证其是否与能量的连续性方程一致？（12 分）



五、电荷的进动（50 分）

考虑一个点电荷 q 在另一个固定点电荷 $-Q$ 产生的场中运动，其能量为 E 角动量为 L，点电荷的质量为 m 。



（1） 说明点电荷 q 在一个平面内运动，并求出点电荷轨道的极坐标形式，并给出半正焦弦 p 、离心率 e 和半长轴 a 的数值（12 分）

（2） 现在点电荷运动的平面内与中心点电荷 $-Q$ 同心放置若干个带电量为 Q_i，半径为 a_i 的均匀带电圆环，若点电荷 q 运动的尺度（与 a 同数量级）远小于这些带点圆环的半径 a_i，计算势能微扰 δV 关于场点到中心点电荷 $-Q$ 距离 r 的关系 $\delta V(r)$（10 分）

（3） 计算点电荷 q 在现在的势场中运动时从近日点-远日点-再到近日点的拱心角变化量 $\delta\phi$，即运行一周的进动角度（28 分）

HINT:考虑数学公式

$$\delta\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{Ldr}{r^2\sqrt{2m(E-V(r))-\dfrac{L^2}{r^2}}}=m\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{dr\,\delta V(r)}{\sqrt{2m(E-V_0(r))-\dfrac{L^2}{r^2}}}$$

六、克劳修斯-莫索提方程（30 分）

在线性电介质中，极化强度矢量和电场成正比，有 $\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}$，如果材料由原子组成，每一个原子的感应偶极矩与电场的关系有 $\vec{p}=\alpha\vec{E}$，那么原子极化率 α 与电极化率 χ_e 的关系为什么？

当介质的密度较低时，我们容易得到

$$\chi_e=\frac{N\alpha}{\varepsilon_0}$$

其中 N 为单位体积的原子数目

然而当介质中原子密度较大时，我们需要对这个式子做出修正。考虑两个公式中 $\vec{E}$ 的含义，得到 α 关于 $N,\varepsilon_0,\varepsilon_r$ 的表达式，并说明为什么要加以修正？

七、偏离平方反比的电场（60 分）

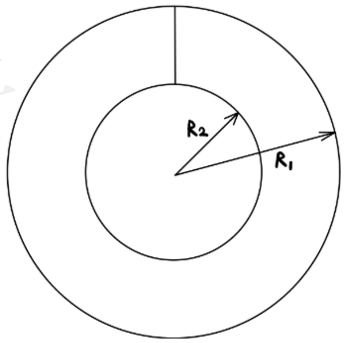
我们考虑这样一种偏离平方反比的电场表达式 $\vec{E}(\vec{r})=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{\mu}{r}+\dfrac{1}{r^2})e^{-\mu r}\dfrac{\vec{r}}{r}$，其中 q 为产生电场的点电荷量，μ 为与光子静质量成正比的一个常数，求解以下问题

（1） 这个场允许一个标量势吗？说明你的理由（5 分）

（2） 以无穷远点为电势零点，求出一个点电荷在距离为 r 处的电势 $V(\vec{r})$（4 分）

（3） 求一个均匀带电量为 Q 的薄球壳内外的电势分布 $V(\vec{r})$（18 分）

（4） 为了验证其对平方反比电场的偏离程度，人们设计了如图同心金属球壳的“法拉第容器”来确定 μ 的上限，其中，外球壳半径为 $R_1=1.0m$，内球壳半径为 $R_2=0.5m$，先将外球壳与内球壳用细导线相连，并向外球壳通电。在达到静电平衡后将细导线剪断，并从外球壳中取出内球壳，将两个球壳分别连接到静电计上测量其带电量。求内球壳带电量 Q_2 与外球壳带电量 Q_1 之比，用 β 表示。（9 分）



（5） 已知 $\mu<<1$，因而（3）问的结果可用 e^x 的泰勒展式化简。在实验误差范围内测得 β 的上限不超过 $\delta=10^{-10}$，求 μ 的上限值（保留一位有效数字）？（9 分）

（6） 求出在这个新的“静电学”体系中的“高斯定理”的积分和微分形式。提示，可以考虑电场的面积分以及电势的体积分的线性组合项（15 分）

八、氢原子的极化率（30 分）

（1） 一个简单的氢原子模型由带$+q$电荷量的原子核和围绕它的均匀带电量为$-q$的，半径为a的球型电子云组成，计算这样的一个原子的极化率，并说明你用来计算的公式的依据（8 分）

（2） 根据量子力学，对于基态，氢原子电子云的电荷密度为$\rho(r)=\dfrac{q}{\pi a^3}e^{-\frac{2r}{a}}$，其中，$q$是电子电荷，$a$为玻尔半径。求出这样一个原子的极化率。（22 分）

提示：计算电子云的电场$E_e(r)$，并在$r<<a$将指数展开，求出其一阶线性近似极化率