培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（三）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

学校：________ 姓名：________ 学号：________

装　订　线

（参考答案）

题一：

1、一个静止在飞船上的时钟测定，这个时间为本征时间τ_0，而观察者从地球上测量，飞船飞行所需时间为

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{60\text{min}}{\sqrt{1-0.6^2}}=75\text{min}$$ 5 分

2、宇航站相对地球静止，飞船在飞行时间内所走的距离即为宇航员距离地球的距离

$$l=v\tau=0.6\times3\times10^8\times75\times60\text{m}=8.1\times10^{11}m$$ 5 分

3、对于地球上的观察者来说，无线电信号发自相对静止的宇航站所在处，故传达地球所需要的时间为

$$t=\frac{l}{c}=\frac{8.1\times10^{11}}{3\times10^8}s=2700s$$ 5 分

因此飞船飞行时间加信号传播时间总共可以算得为 75+45=120min 5 分

4、在地球系中，地球在 120min 之后接收到飞船返回的信号，因此此时飞船距离地球的距离为 120×0.6 光分 5 分

因此可以视为光线和飞船的追击运动，在地球系中看来，还需要

$$t=\frac{120\times0.6}{1-0.6}\text{min}=180\text{min}$$ 5 分

这个事件在地面系中发生时间为 180+120=300min 发生地点距离地球为 180 光分，可以在此处运用洛伦兹变换

$$t'=\frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}}(300\times60-0.6\times180\times60)s=14400s$$ 10 分

题二：

1、其只在一个隧道中运动

易证其受力满足

$$F=-\frac{GM}{R^3}mx$$ 4 分

其是简谐振动，周期 T 满足

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$ 4 分

其中当初速度为 v 时，x 的最大值为 A 满足能量表达式

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kA^2$$ 4 分

因此为了使得其在内部做周期运动应该满足

$$A\le\sqrt{R^2-h^2}$$

$$h=\frac{\sqrt{2}}{2}R$$ 4 分

即

$$v\le\sqrt{\frac{GM}{2R}}$$ 4 分

2、其不止在隧道中运动，只有一种情况，如图所示在外部的轨迹为椭圆的一部分，因为在 BC 处的速度平衡，所以可以轻松的解出这个椭圆的参数 4 分

$$a=R\ ,\quad b=h=\frac{\sqrt{2}}{2}R$$

其在外部用的时间$t_1 = T_{椭圆} \times \frac{\frac{\pi}{2}ab+bc}{\pi ab}$ 3 分

根据开普勒第三定律解得椭圆轨道的周期

$$T_{椭圆} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$ 3 分

在 B 处的速度满足

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2a}$$ 3 分

可以解得在 B 处的速度

$$v_B = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$ 3 分

在 A 点的速度又是可以简单地解出的，因此可以简单的得到最终的总时间

$$T = \left(2\pi + 2\sqrt{2} + 4\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$ 4 分

题三：

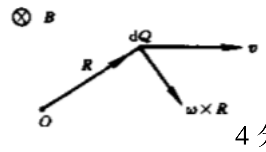
【解】 1. 设圆环在尔后的运动中始终不离开地面，则圆环对地面的正压力 N 应满足

$$N \geqslant 0$$ 2 分

于是圆环将受到向西的地面摩擦力 f，为

$$f = \mu N \geqslant 0$$ 2 分

摩擦力 f 使圆环的平动减速，开始顺时针转动并不断加速，直到进入纯滚动状态，此后摩擦力消失.（当然，若开始时 $N=0$，$f=0$，则圆环始终平动，不转动，也不会达到纯滚动.）设在任意时刻 t，圆环的平动速度为 v，转动角速度为 ω，设 $\omega \geqslant 0$.



综试(二)图 6－2

如综试(二)图 6－2 所示，在圆环中任取一弧元，带电量为 dQ，环心 O 到弧元的矢径为 $\boldsymbol{R}$. 在任意时刻 t，因圆环既有平动又有转动，该弧元相应的两个分速度为 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}$，由此弧元 dQ 所受洛伦兹力为 4 分

$$d\boldsymbol{F} = dQ[(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}] = dQ(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) + dQ(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}$$

其中 $dQ(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 的方向竖直向上，$dQ(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}$ 的方向沿径向，背离环心向外（注意，$dQ>0$）. 因圆环上电荷均匀分布，故各 $dQ(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}$ 的矢量和为零，于是圆环所受总洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$ 为各 $dQ(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 之和. $\boldsymbol{F}$ 的方向竖直向上，大小为 3 分

$$F = QvB$$

地面所受正压力 N 为

$$N = mg - F = mg - QvB$$

要求圆环不离开地面，即要求 $N \geqslant 0$，亦即要求 2 分

$$v \leqslant \frac{mg}{QB}$$

v 的最大值为 v_0，故 v_0 的取值范围是 4 分

$$v_0 \leqslant \frac{mg}{QB}$$

2. 因洛伦兹力 $\boldsymbol{F}$ 竖直向上，对圆环的平动无影响，只有摩擦力 f 使圆环的平动减速，故有

$$-m\frac{dv}{dt} = f = \mu N = \mu(mg - QvB)$$

从开始到任意时刻 t 作积分，得

· 1260 ·

$$\int_0^t \mu \mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v} \frac{m}{QvB - mg}\mathrm{d}v$$

即

$$\mu t = \frac{m}{QB}\ln\frac{QvB - mg}{Qv_0B - mg} = \frac{m}{QB}\ln\frac{mg - QvB}{mg - Qv_0B}$$ 3 分

故圆环在达到纯滚动之前任意时刻 t 的平动速度 v 为

$$v = \frac{mg}{QB} - \left(\frac{mg}{QB} - v_0\right)e^{\frac{QB}{m}\mu t}$$ 2 分

3. 如第 1 问所述，带电 $\mathrm{d}Q$ 的弧元所受洛伦兹力有两项，其中 $\mathrm{d}Q(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})$ 项相对环心 O 的力矩不为零，但各弧元此项的力矩之和为零，另一 $\mathrm{d}Q(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}$ 项相对环心 O 的力矩为零，各弧元此项的力矩之和当然也是零. 因此，圆环所受洛伦兹力相对环心 O 的力矩为零. 这样，只有摩擦力 f 相对环心 O 点有非零力矩，正是此力矩使圆环转动起来.

设任意时刻圆环转动的角加速度为 β，则有

$$fR = I\beta$$ 3 分

式中转动惯量 I 为

$$I = mR^2$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{fR}{I} = \frac{f}{mR}$$ 3 分

又因

$$f = -m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$ 3 分

由以上两式，得

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$ 2 分

积分，得

$$\int_0^{\omega}\mathrm{d}\omega = -\frac{1}{R}\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v$$

即

$$\omega R = v_0 - v$$

圆环达到纯滚状态时，有

$$\omega R = v$$

由以上两式，达到纯滚时的速度 v_T 为

$$v_T = \frac{v_0}{2}$$ 2 分

设圆环在 T 时刻达到纯滚状态，由第 2 问的结果，有

$$v_T = \frac{v_0}{2} = \frac{mg}{QB} - \left(\frac{mg}{QB} - v_0\right)e^{\frac{QB}{m}\mu T}$$

由题设

$$v_0 = \frac{mg}{2QB}$$

由以上两式，得

$$e^{\frac{QB}{m}\mu T} = \frac{3}{2}$$

解出

$$T = \frac{m}{QB\mu}\ln\frac{3}{2}$$ 5 分

题四：

1、当角度为 θ 时的转动惯量为

$$I(\theta)=\frac{1}{2}MR^2+2mR^2\sin^2\theta$$ 4 分

在任意 θ 处的角动量守恒和机械能守恒方程为

$$I(\theta)\omega(\theta)=\frac{1}{2}MR^2\omega_0$$ 4 分

$$\frac{1}{4}MR^2\omega_0^2+4mgR=2mg(1+\cos\theta)R+\frac{1}{2}I(\theta)\omega^2+mv_1^2+\frac{1}{2}k(2R\sin\theta)^2$$

解得在任意角度处的角速度 ω 和v_1

$$\omega=\frac{M\omega_0}{M+4m\sin^2\theta}$$ 4 分

代入得

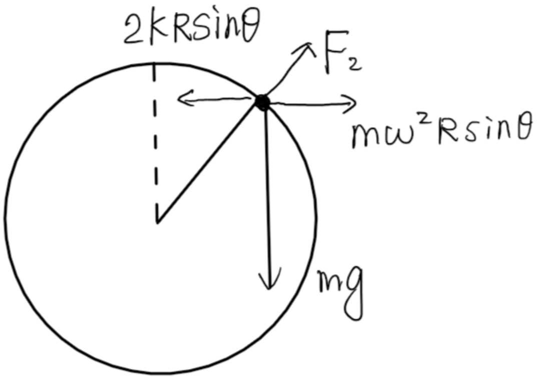
$$v_1=\sqrt{\frac{M^2\omega^2R^2\sin^2\theta}{(M+4m\sin^2\theta)^2}+\frac{MR^2\sin^2\theta\omega_0^2}{M+4m\sin^2\theta}+2gR(1-\cos\theta)-\frac{2kR^2\sin^2\theta}{m}}$$ 5 分

2、由于上一问中已知了

$$\omega=\frac{M\omega_0}{M+4m\sin^2\theta}$$

$$v_1=R\frac{d\theta}{dt}$$

圆环对于质点的作用力由两部分组成，分别是如图的F_2和垂直于这个平面的F_1



先来求解F_2，在非惯性系中列出牛顿动力学方程可以得到

$$F_2+m\omega^2R\sin^2\theta+m\frac{v_1^2}{R}=mg\cos\theta+2kR\sin^2\theta$$ 4 分

由此解得F_2，以图示方向为正

$$F_2=mg\cos\theta+2kR\sin^2\theta-mR\sin^2\theta\frac{M\omega_0^2}{(M+4m\sin^2\theta)^2}-m\frac{v_1^2}{R}$$ 5 分

为了求解这个垂直于图示平面的力F_1，应该先求解这个圆环转动的角加速度 β

$$\beta=-\frac{M\omega_0 8m\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dt}}{(M+4m\sin^2\theta)^2}$$ 5 分

根据牛顿定律可以解得,F1 要考虑科里奥利力

$$F_1=\frac{Mm^2\omega_0 8m\sin^2\theta\cos\theta}{(M+4m\sin^2\theta)^2}\sqrt{\frac{M\sin^2\theta\omega_0^2}{M+4m\sin^2\theta}+2\frac{g}{R}(1-\cos\theta)-\frac{2k\sin^2\theta}{m}}+2mv_1\frac{M\omega_0}{M+4m\sin^2\theta}$$

代入得

$$F_1=\frac{2Mmv_1\omega_0[M+4m\sin^2(\cos\theta+1)]}{(M+4m\sin^2\theta)^2}$$ 5 分 4 分

题五：

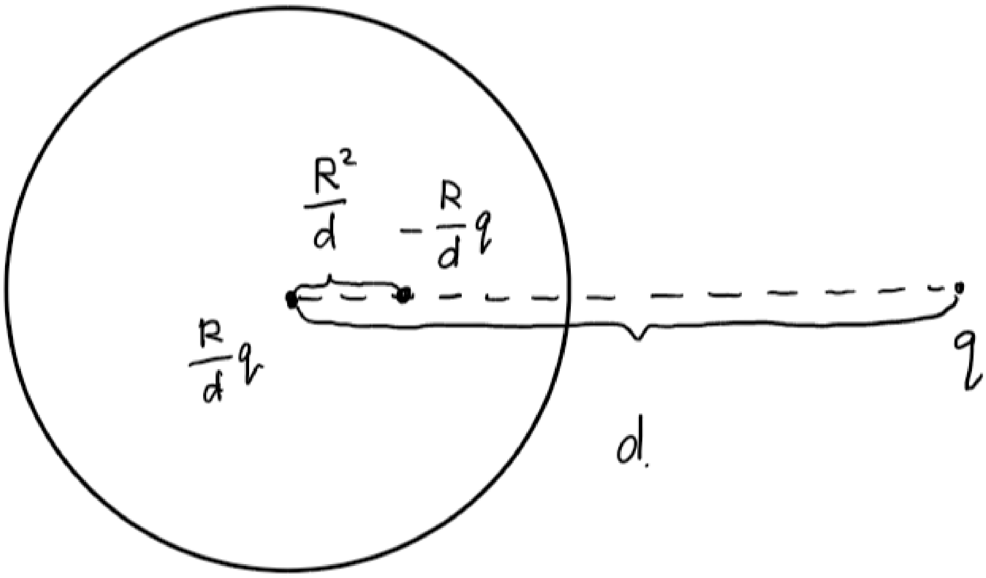
1、因为绳子是柔软的，整个系统机械能并不守恒，但是自由端下落时，在没有伸直之前，是可

以看作自由落体的。
第一阶段：绳子伸直之前
在任意 t 时刻，自由端的速度为 gt
因此总的向下的动量为
$$p = mv = \lambda\frac{l-x}{2}gt$$ 4 分
此时的 x 长度为$x = \frac{1}{2}gt^2$ 2 分
代入得
$$p = \lambda\frac{l-\frac{1}{2}gt^2}{2}gt = \frac{\lambda lgt}{2} - \frac{\lambda g^2t^3}{4}$$ 4 分
利用总的动量定理
$$\lambda lg - T = \frac{dp}{dt}$$ 4 分
代入求导解得
$$T = \frac{\lambda lg}{2} + \frac{3\lambda g^2t^2}{4}$$ 2 分
这种情况要求绳子未完全伸直，这意味着
$$\frac{gt^2}{2} \le l$$
即
$$t \le \sqrt{\frac{2l}{g}}$$
第二阶段：绳子伸直之后
易知此时的拉力与重力相等
$$T = \lambda lg$$
这个阶段对于时间的要求是
$$t \ge \sqrt{\frac{2l}{g}}$$ 4 分
2、桌子下的体重秤的示数可以看作是桌子的重力和绳子对于桌面的压力的总和，因此关键在于求出正确的绳子对于桌面的压力
与上一题一样，因为绳子柔软，绳子的运动的部分可以看作自由落体运动。因为绳子的长度有一定的限制，因此整体的运动可以分为两部分，全部绳子都已经落到地上和仍有部分绳子在空中，因此就应该对于这两个状态进行分类讨论。
设最终体重计的示数为 G
$$G = mg + N$$ 2 分
其中 N 为绳子和桌面之间的压力，应该根据分类讨论得出
第一阶段：仍有部分的绳子在空中
在任意 t 时刻绳子的速度为$v = gt$，此时绳子的总长度为$x = l - \frac{1}{2}gt^2$
因此可以写出整个系统的动量，取向下为正方向
$$p = \lambda xv = \lambda\left(l - \frac{1}{2}gt^2\right)gt$$ 4 分
接下来对于所有的绳子列出动量定理
$$\lambda lg - N = \frac{dp}{dt}$$ 3 分
将 p(t)的关系代入求导得
$$N = \lambda lg - \frac{dp}{dt} = \lambda lg - \lambda gl + \frac{3\lambda g^2t^2}{2} = \frac{3\lambda g^2t^2}{2}$$ 4 分
这要求绳子未全部落到桌子上
$$\frac{1}{2}gt^2 \le l$$

即
$$t \le \sqrt{\frac{2l}{g}}$$
因此，此状态下的体重秤的示数为
$$G = mg + N = mg + \frac{3\lambda g^2 t^2}{2}$$ 2 分
第二阶段：
当时间 t 满足以下条件时
$$t \ge \sqrt{\frac{2l}{g}}$$
此时的体重秤示数为
$$G = mg + \lambda lg$$ 5 分

可以发现一个有趣的现象，在绳子完全落在桌面和完全伸直的前后，拉力或者压力的数值并不连续，这个原因可能是模型的不完备，实际情况下难以做到真正的软绳或者完全弹性绳，因此难以得到真正符合实际情况的解。
有兴趣的同学可以想一想 32 届复赛中的那一道蹦极的题目，这个题目仔细想来可能存在模型的问题。

题六：
1、对于此系统，可以简单的设出一个电像，大小为 q，电性相反，处于对称位置
因此可以简单的求出其受力
$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 4d^2}$$ 4 分
利用$E = \sum \frac{1}{2} Uq$
可以解得总的电势能
$$E = -\frac{1}{2} \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 2d} \times q = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}$$
在无穷远处，总的静电势能为 0，因此总共做的功为
$$W = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}$$ 3 分
2、此种情况下，可以如图画出镜像电荷



先来求 q 的电势

$$U=\frac{\frac{R}{d}q}{4\pi\epsilon_0 d}+\frac{\frac{-Rq}{d}}{4\pi\epsilon_0\left(d-\frac{R^2}{d}\right)}=-\frac{R^3q}{4\pi\epsilon_0(d^2-R^2)d^2}$$ 4 分

因此将其移动到无穷远处所做的功可以用此时的电势能得出

$$W=\frac{R^3q^2}{8\pi\epsilon_0(d^2-R^2)d^2}$$ 3 分

3、

先求出外部的电荷的电势，这个电势由两部分构成

$$U_2=\frac{q_1+\frac{R}{x_2}q_2+Q}{4\pi\epsilon_0 x_2}-\frac{\frac{R}{x_2}q_2}{4\pi\epsilon_0\frac{x_2^2-R^2}{x_2}}$$ 9 分

再来考虑内部电荷的电势

$$U_1=\frac{q_1+\frac{R}{x_2}q_2+Q}{4\pi\epsilon_0 R}-\frac{\frac{r}{x_1}q_1}{4\pi\epsilon_0\frac{r^2-x_1^2}{x_1}}$$ 9 分

因此可以轻松解得系统总的静电势能

$$E=\frac{1}{2}\left(\frac{q_1+\frac{R}{x_2}q_2+Q}{4\pi\epsilon_0 R}-\frac{\frac{r}{x_1}q_1}{4\pi\epsilon_0\frac{r^2-x_1^2}{x_1}}\right)q_1+\frac{1}{2}\left(\frac{q_1+\frac{R}{x_2}q_2+Q}{4\pi\epsilon_0 x_2}-\frac{\frac{R}{x_2}q_2}{4\pi\epsilon_0\frac{x_2^2-R^2}{x_2}}\right)q_2$$ 8 分

题七：

六、设金属盘上、下表面的温度分别为 T_t，T_b，空气的温度为 T_0．根据题意，金属盘上、下表面单位时间内向空气散失的能量分别为

4 分

4 分

4 分

4 分

$$cA(T_t - T_0),\quad cA(T_b - T_0),\tag{1}$$

其中 c 为常量，A 为金属盘表面的面积. 设上表面单位时间内吸收的太阳光的能量为 P_s. 根据能量守恒有

$$P_s = cA(T_t - T_0) + cA(T_b - T_0).\tag{2}$$

因此

$$T_t + T_b = \frac{P_s + 2cAT_0}{cA} = \frac{P_s}{cA} + 2T_0.\tag{3}$$

可见金属盘上、下表面温度之和为常量. 由题给数据，有

$$T_t + T_b = 360.0\text{K} + 340.0\text{K} = 700.0\text{K}.\tag{4}$$

当金属盘的厚度为 t 时，根据热传导定律，单位时间内从金属盘的上表面传导到下表面的热量为

$$P_c = kA\frac{T_t - T_b}{t},\tag{5}$$

其中 k 为热传导系数. 从金属盘的上表面传导到下表面的热量通过下表面散失到空气中，故

$$kA\frac{T_t - T_b}{t} = cA(T_b - T_0).\tag{6}$$

当金属盘的厚度为 $2t$ 时，设其上、下表面的温度分别为 T'_t，T'_b，同理有

$$kA\frac{T'_t - T'_b}{2t} = cA(T'_b - T_0).\tag{7}$$

用(6)式去除(7)式，并利用(4)式以及

$$T'_t + T'_b = 700.0\text{K},\tag{8}$$

有

$$\frac{700.0\text{K} - 2T'_b}{2\times(700.0\text{K} - 2T_b)} = \frac{T'_b - T_0}{T_b - T_0}.\tag{9}$$

由上式，得

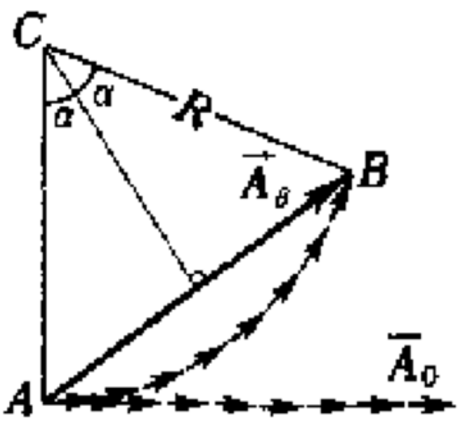
$$T'_b = \frac{700.0\text{K}(T_b + T_0) - 4T_bT_0}{1400.0\text{K} - 2T_b - 2T_0} \approx 333.3\text{K}.\tag{10}$$

由(8)式，有

$$T'_t = 700\text{K} - T'_b \approx 366.7\text{K}.\tag{11}$$

题八：

对于这样的多缝夫琅禾费衍射的情况，可以先分析一条缝的单缝衍射



设从每一个狭缝入射的光线的振幅为A_0，从 A 点作一系列的等长的小矢量首尾相接，每个小矢量相对于上一个都转过一个小角度，当小矢量足够小时，可以将其视为一个圆弧，弧长即为总的振幅A_0，且总共转过的角度为(注意此处 α 和a的区别)

$$2\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta$$

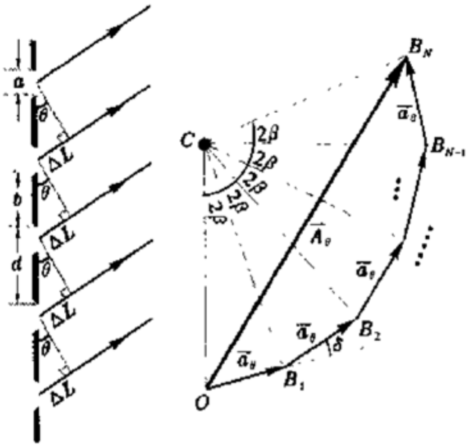
4 分

最终合成的线段就是最终矢量叠加之后的 AB 段，其长度就是新的振幅

6 分

$A_\theta=A_0\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

在之后考虑多孔之间的影响时，可以借鉴之前只考虑一个孔的时候的解法和结论，即把一个通光缝看作一个整体，使用同样的振幅矢量方法求得最终的叠加的总振幅



相邻的不同狭缝之间，在偏向角度为θ时，光程差$\delta=d\sin\theta$，那么可以得到相位差

$2\beta=\dfrac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$ 4 分

同理，此处每一个狭缝所代表的振幅都为之前的$A_\theta=A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ 6 分

一共转过 2Nβ 的角度，可以求得等腰三角形的腰长为$A_\theta/(2\sin\beta)$

可以将其相干叠加之后得到最终的振幅 4 分

$A=2\sin(N\beta)\dfrac{A_\theta}{2\sin\beta}$ 6 分

将上一问中的结果$A_\theta=A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$代入可以得到

$A=A_0\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}$ 5 分

将其平方可以得到光强的相对强度表达式

$I\propto\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$ 5 分

在此式中，

$\alpha=\dfrac{\pi}{\lambda}a\sin\theta$

$\beta=\dfrac{\pi}{\lambda}d\sin\theta$

N 为该光栅的总缝数

其实并不只振幅矢量法，还可以使用复振幅求和积分法进行运算，看起来更有说服力
从这个光强分布式可以看到很多现象，比如极大值极小值，缺级等
这是该光栅完美的情况，如果这个光栅并非完美应该怎么做
这是理想单色平行光入射的情况，如果光的相干性有一定的限制该怎么考虑
这样计算并未考虑到光的时间相干长度的问题