电磁学：第二次作业

(本次作业满分 70 分)

檀时钠

关于作业的具体要求，参见作业一的前言。

请同学注意：为了深入广泛掌握一些知识和技能，作业需时较多，但不用担心。期中考试、期末考试的计算题难度更小，考试时你们会有足够时间答题（考试时所需积分公式，我往往会提供，除了简单的积分外）。

第 1 题（10 分）：一个均匀带电的球壳具有半径 R 和电荷面密度 σ。如果把它的从北极点开始的 $0 \leq \theta \leq \theta_0$ 这个区域挖掉（见课本附录 A 里关于球坐标系的定义），剩余部分的电荷面密度不变，计算剩余部分在北极点处产生的电场强度 $\mathbf{E}$。对于以下几种特殊情况，近似计算这个电场强度：

- $\theta_0 \ll 1$（球壳只被挖掉很小一块），并用这个结果来理解为何一个均匀带电薄球壳的内部电场为零、外部靠近球壳的地方场强却近似是 σ/ϵ_0（提示：将球壳的北极所在小圆盘近似视作一个平面）；
- $\theta_0 = \pi/2$（剩下半球壳），结果近似到三位有效数字；
- $\theta_0 = \pi - \alpha$，其中 $\alpha \ll 1$（剩余部分近似是一个小圆盘）。

思考一下这些结果是否合理。提示：你不仅要会做定积分，也要会做小量展开（例如泰勒级数展开）。

第 2 题（10 分）：在 x 轴上有两个点电荷，$+7q$ 位于 $x = 0$，而 $-q$ 位于 $x = a$，其中 $q > 0$ 且 $a > 0$。

- 在 x 轴上找到场强等于零的那一点，它的坐标是多少？并且大致画一些场线。
- 你将发现有些场线从 $+7q$ 电荷出发，抵达 $-q$ 电荷。但别的场线离开 $+7q$ 电荷之后，延伸到了无穷远处。现在考虑一组特殊的场线位于这两类场线的分界面，这组特殊的场线刚离开 $+7q$ 电荷时与 x 轴的夹角大约是多少度？你的数值答案要精确到 0.1 度。提示：画一个适当的高斯曲面，它主要由这些场线组成（但不仅仅是这些）。

第 3 题（10 分）：三维空间中有一个不均匀的电荷密度分布：

$$\rho_e(\mathbf{r}) = \rho_0 \exp\Big(-\frac{r^2}{\lambda^2}\Big),$$

其中 ρ_0 和 λ 都是常数，$\lambda > 0$，$\mathbf{r}$ 是空间任意一点的位置矢量，而 exp 是指数函数。用高斯定律的积分形式（$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{内部}}}{\epsilon_0}$）计算它所产生的电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$，将你的结果用误差函数

$$\operatorname{erf}\xi \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-t^2} dt$$

来表示。再用球坐标系计算电场的散度，见课本附录 B，方程 (B.15)。验证这个散度满足高斯定律的微分形式，$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$。当 $r \gg \lambda$ 时，给出 $\mathbf{E}$ 的近似表达式（提示：结果与 r 平方成反比）。当 $r \ll \lambda$ 时，给出 $\mathbf{E}$ 的另一个近似表达式（提示：结果与 r 成正比）。

延展阅读：误差函数在概率与统计、实验测量中也很有用。例如，如果一个测量结果近似服从正态分布，且无系统误差，那么测量结果与准确值的误差不超过一个标准偏差的概率是 $\operatorname{erf}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx 68.3\%$，误差不超过两个标准偏差的概率是 $\operatorname{erf}(\sqrt{2}) \approx 95.4\%$，误差不超过三个标准偏差的概率是 $\operatorname{erf}(\frac{3}{\sqrt{2}}) \approx 99.73\%$。

第 4 题（10 分）：真空中有两个均匀带电的、彼此平行的平面，两个平面的垂直距离为 d。两个平面被一种不极化的绝缘体隔离。假设其中一个平面的面电荷密度为 $\sigma > 0$，另一个平面的面电荷密度为 $-\sigma$。计算如下物理量：

- 两个平面之间的电场以及它们外面的电场（大小和方向都要得出）。提示：先在课本第 81 页找找单个平面电荷产生的电场，再把两个平面的贡献叠加起来。

- 空间各点的电势 U。以负电荷平面为电势的零点。

- 带正电的平面与带负电的平面的电势差，即电压。

- 其中一个平面对另一个平面的单位面积的吸引力。这是不是与你在作业一的第 3 题中的某个公式一致？提示：要考虑这个受力平面两侧的电场分别是怎样的。

- 如果把其中一个平面固定，把另一个平面向着远离前一个平面的方向拉动，使两个平面的距离从 d 延长为 d'，单位面积的拉力做多大的功？假设这个功被转化为延长的电场线的能量，计算场强为 $\mathbf{E}$ 的电场的能量密度（单位体积里的能量）。

- 如果两个平面之间的电场达到施温格极限的百分之十，但你假设你刚才的结果还近似适用，那么吸引力的强度大约达到几点几乘以十的多少次方帕斯卡？大约相当于多少个标准大气压？（注意：由原子分子组成的绝缘体一般承受不了这么大的电场。比它小得多的电场就能击穿它。例如，空气只要几百万伏特每米的电场就能被击穿并导电。）提示：电场的施温格极限是

  $$E_c = \frac{m_e^2 c^3}{q_e \hbar} \approx 1.32 \times 10^{18} \mathrm{V/m},$$

  其中 m_e 是电子质量，c 是真空中的光速，q_e 是基本电荷，$\hbar$ 是约化普朗克常数（即普朗克常数除以 2π）。延展阅读：关于施温格极限的重要物理知识 `https://en.m.wikipedia.org/wiki/Schwinger_limit`

你刚才得到的拉力强度，和中子星里面的压强相比，哪个的绝对值更大得多呢（助教注意：这个大小比较问题不计入评分）？
参见https://en.m.wikipedia.org/wiki/Neutron_star

第 5 题（10 分）：课本第 42 页的例题 15 讨论了一个均匀带电圆形细环，半径为 R，电荷的线密度为 η（不妨略去下标 e）。请在通过轴线的 xz 平面上任意一点 $(x,y,z)=(x,0,z)$ 计算电势 $U(x,z)$。提示：你要用到数学公式

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-a\cos\phi}}=\frac{4}{\sqrt{1+a}}K\Big(\frac{2a}{1+a}\Big),\quad 0\le a<1,$$

其中 K 是完全椭圆积分：

$$K(m)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}}.$$

请你利用数学手册或 Mathematica 软件里的 $N[\dots,\mathrm{prec}]$ 函数（其中 $\dots$ 是数学表达式，prec 是你想得到的数值精度位数）来计算 $(x,y,z)=(\frac{R}{2},0,\frac{R}{4})$ 点处的电势的值，以 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ 为单位，其中 $Q=2\pi R\eta$ 是圆环的总电荷。我在图 1 画了有关函数的图像。提示：本题的电势具有轴对称性，因此只依赖于 $\sqrt{x^2+y^2}$ 和 z。

再来近似计算点 $(x,y,z)=(R,0,r)$ 处的电势，其中 $0<r\ll R$（这里"$\ll$"表示"远小于"），以展示结果近似服从无限长均匀带电直线的电势公式（见课本第 81 页）：

$$U=\text{常数}-\frac{\eta}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r}{\text{尺度}}.$$

如果这里取"尺度"$=R$，并且以远离圆环的地方为电势零点，那么你得到的上述"常数"是多少？提示：你要用到椭圆积分在自变量非常接近 1 的时候的近似公式：

$$K(1-\epsilon)=2\ln 2-\frac{1}{2}\ln\epsilon+O(\epsilon\ln\epsilon),\quad \epsilon\to 0^+.$$

这里 $\epsilon\to 0^+$ 表示 ϵ 从正实轴的一侧趋于零。

利用数值计算任一光滑函数 $f(x)$ 的二阶导数的方法

$$\frac{f(x-\lambda)-2f(x)+f(x+\lambda)}{\lambda^2}=f''(x)+\frac{1}{12}f''''(x)\lambda^2+O(\lambda^4)$$

来近似计算电势 $U(x,y,z)$ 在 $(x,y,z)=(\frac{R}{2},0,\frac{R}{4})$ 处的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$、$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$，取 $\lambda=10^{-3}R$ 并忽略上面公式右侧的第二项以及更高阶项。这三个二阶偏导数近似值的和是否近似为零？这个问题是为了让你数值验证静电势所满足的泊松方程

$$\nabla^2 U=-\frac{\rho_e}{\epsilon_0},$$

其中 $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$ 是拉普拉斯算符。在直角坐标系里 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。在真空里（不接触圆环的地方）电荷密度为零，泊松方程简化为拉普拉斯方程 $\nabla^2 U=0$.

最后，利用数值计算任一光滑函数一阶导数的方法

$$\frac{f(x+\lambda)-f(x-\lambda)}{2\lambda}=f'(x)+\frac{1}{6}f'''(x)\lambda^2+O(\lambda^4),$$

从电势在场点的邻域的数值来近似计算 $(x,y,z) = (\frac{R}{2}, 0, \frac{R}{4})$ 处的电场矢量（不要把方向弄错了！），可以取 $\lambda = 10^{-3}R$ 并忽略上面公式右边第二项、更高阶项。

第 6 题（10 分）：计算下面两个矢量场的旋度 $\nabla \times \mathbf{A}$ 和 $\nabla \times \mathbf{C}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = a(x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2), \tag{1}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = a(x_2\mathbf{e}_1 - x_1\mathbf{e}_2), \tag{2}$$

其中 a 是正常数，x_1、x_2、x_3 是直角坐标系的坐标，而 $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$ 是沿着这三个坐标轴方向的单位矢量，满足右手法则 $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$。回答一下：其中哪个矢量场可能是某个静电场的局部或局部近似？提示：静电场的旋度为零。计算这个静电场的电势 $U(\mathbf{r})$，并画一些等势面在 x_1x_2 平面里的截线。

第 7 题（10 分）：考虑一个局部近似均匀的电场 $\mathbf{E}$（大小、方向处处相同）。在电场里考虑一个三棱柱，底面为直角三角形，两个直角边的长度分别为 a 和 b，斜边长度为 c（服从勾股定理），三棱柱的高为 h。假设三棱柱的边长为 a 的底边与电场线垂直、边长为 b 的底边与电场线平行、高和电场线垂直。三棱柱的那个高为 h、宽为 c 的侧面，叫做 “S 面”（面积为 $S = ch$），的法线与电场线夹角为 θ，如图 2所示。三棱柱外部的电场对三棱柱内部电场施加了五个力，分别是通过三棱柱的五个面。假设电场处于静力平衡的状态，那么这五个力的矢量和必须为零。由此，请计算外部电场通过 S 面对内部电场施加的力的大小和方向。这个力和 S 面的法线的夹角是多少（请用 θ 来表示这个夹角）？提示：你要用到作业一第 3 题的结果。如果你的计算正确，你将发现这个力的大小只和界面面积 S、电场强度 E 有关，却和电场线与 S 面的法线的夹角 θ 无关。现在你固定 S 面的方向不变，逐渐改变电场的方向，让 θ 从零开始逐渐增加，增加到 15 度、30 度、…、90 度，你看看这个力的方向是如何变化的。由此，你能够把你在作业一第 3 题的两个结果统一起来，得到对电场的**麦克斯韦应力强度**的大小、方向的完整理解！

现在用你得到的结果来理解一个平面两侧的电场，如图 3所示。平面上侧的电场向上偏右方向，与平面法线的夹角为 θ（$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 弧度）。平面下侧的电场向下偏右方向，与平面法线的夹角也是 θ。$\mathbf{E}_{\text{上}}$ 和 $\mathbf{E}_{\text{下}}$ 的大小相等，都等于 E，从而保证电场的水平分量（与平面平行的分量）在平面处是连续的（这是静电场沿着闭合曲线的环量为零的推论，如果薄平面里面的电场不发散）。计算上下两侧的电场对平面施加的总的力的大小、方向。

现在把这整个电场理解为均匀带电平面所产生的电场 $\mathbf{E}_{\text{平面}}$ 和某个外加的电场 $\mathbf{E}_{\text{外加}}$ 的叠加。计算平面的电荷面密度 σ 以及外加电场的大小和方向，把它们都用 E 和 θ 来表示。再计算外加电场对单位面积平面电荷的力。这个力是否与你刚才得到的上下两侧电场对平面的总力大小、方向都一致？如果把上下两侧的电场的方向都逆转、大小不变，电场对平面的力的大小方向有无变化呢？

这道题帮你深化一个认识：电场是力的一种传播媒介，静电力完全是由静电场来传播的。

In[48]:= Integrate$\left[\dfrac{1}{\sqrt{1 - a\,\mathrm{Cos}[\phi]}}, \{\phi, -\pi, \pi\}, \mathrm{Assumptions} \to 0 \le a < 1\right]$

Out[48]= $\dfrac{4\,\mathrm{EllipticK}\left[\frac{2a}{1+a}\right]}{\sqrt{1+a}}$

In[49]:= Plot$\left[\dfrac{4}{\sqrt{1+a}}\,\mathrm{EllipticK}\left[\dfrac{2a}{1+a}\right], \{a, -1, 1\},\right.$

$\left.\mathrm{PlotRange} \to \{0, 15\}, \mathrm{AxesLabel} \to \left\{\text{"a"}, \text{"}\dfrac{4}{\sqrt{1+a}}\mathrm{EllipticK}\left[\dfrac{2a}{1+a}\right]\text{"}\right\}\right]$

Out[49]=

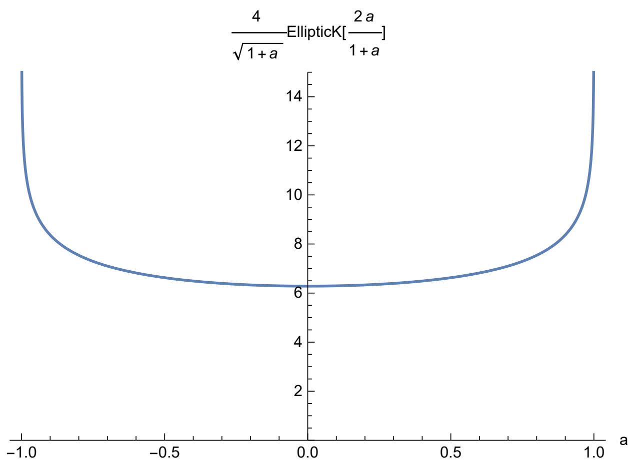

Figure 1: 一个椭圆积分以及它的函数图像。结果是用 Mathematica 软件得到的。

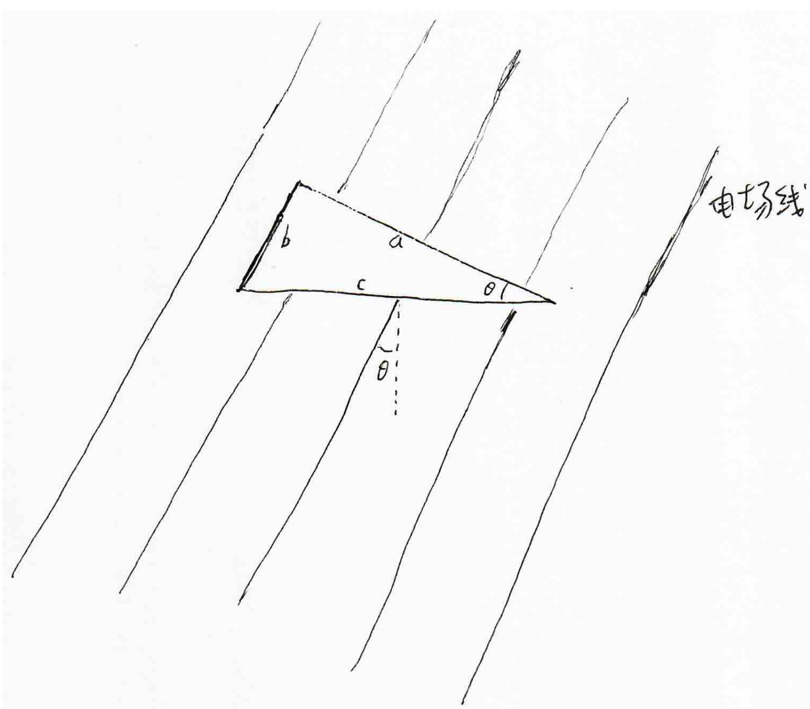

Figure 2: 电场里的一个三棱柱的底面是直角三角形，一个底边和电场线垂直、一个底边和电场线平行、三棱柱的高（在三维空间里，没画出）也和电场线垂直。

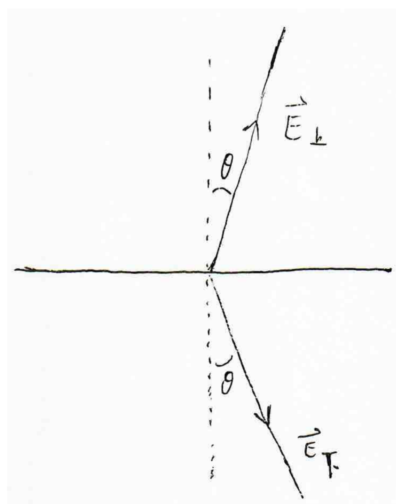

Figure 3: 一个平面的上侧、下侧的电场都是均匀的，大小都是 E。两侧电场都和平面法线夹角 θ。