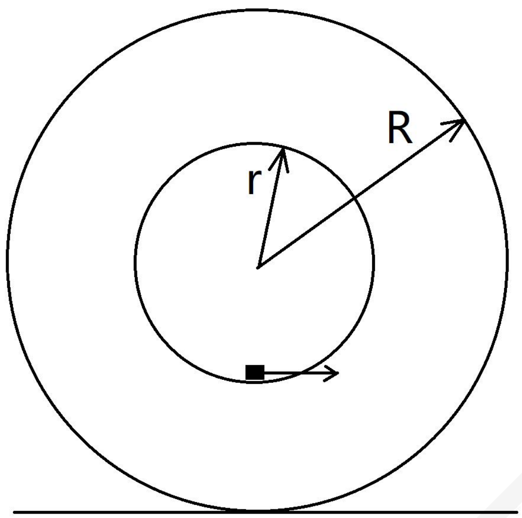
金石为开 2021 年高考期间物理刷题班

复赛模拟题（四）

一、磁场中的圆筒中的机器人（40 分）

如图所示，有一个内径为r，外径为R的圆筒平放在粗糙的水平地面上，其质量为M，密度均匀。其内壁有一小型机器人（可视为质点），质量为m，带有正电荷q。同时，空间中存在着垂直纸面向上的匀强磁场，磁感应强度为B。已知本题所有过程中圆筒和地面保持接触，它们之间没有相对滑动。已知重力加速度是g。

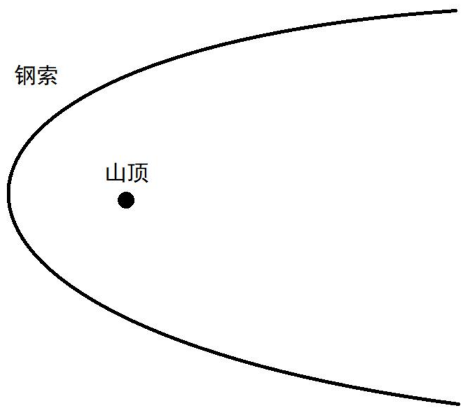


1. 这时机器人突然启动，沿着圆筒的内壁，相对圆筒以切向速度u逆时针爬动。求启动瞬间机器人的速度和圆筒的角速度。（9 分）
2. 设圆筒已经顺时针转动了φ，而机器人和圆心的连线已经在地面参考系里逆时针转动了θ，试求θ和φ的关系以及它们满足的微分方程。（19 分）
   提示：设地面摩擦力为中间参量会很有用。
3. 求机器人相对地面的最大高度。（12 分）
   提示：对于函数$x(t)$，如果用$\dot{x}$表示求导，那么
   $$\left(a-2b\cos(x)\right)\ddot{x}+b\sin(x)\dot{x}^2=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(a-2b\cos(x)\right)\dot{x}^2\right)$$

二、移山（40分）

有一座旋转对称的山，其轴线竖直。除了山顶附近的一小部分（本题中我们不讨论这一部分），其外表面的方程是$z=\frac{a}{\sqrt{r}}$，其中r是表面上一点到山轴线的距离，z是这点相对于地面的高度，a是一个正的常量。我们看这座山很不爽，于是希望用一个绝对刚性的钢索切割这座山峰并把它运走。

钢索是近乎无限长的，线质量密度为λ，其直径远小于本题中的任意其他尺度。我们把它绕在这座山峰上，使得钢索紧贴山峰，其两端延伸到无限远处。如果坐直升机俯视这座山峰，那么钢索差不多是这个形状：



显然钢索中会有张力。理论计算表明，这个张力可以使钢索切割进山体，但是不幸的是我们在最后才发现这座山的表面是绝对光滑的。既然这样，工程就不能继续下去了，工程组转而加紧研发增大粗糙程度的涂料。不过，我们可以先研究这段钢索。已知在钢索的位置，永远成立$ar^{-3/2}\ll 1$，钢索距离山的轴线的最近距离是r_0，重力加速度是g。

1. 我们希望知道钢索的形状。建立极坐标，设钢索上距离轴线最近的那点的坐标是$(r,\theta)=(r_0,0)$，而且这点的钢索内部的张力等于T_0。请你求出$r(\theta)$满足的微分方程，可以用到的参量是λ,g,a,T_0,r_0。（16分）
2. 然后我们设T_0未知。如果已知在无限远处，无需有人或机械来拉钢索（也就是说绳上的张力趋于0），求T_0。（4分）
3. 根据上一问的结果，求出钢索的形状，用极坐标方程表示。（8分）
提示：换元$u=\frac{r_0}{r}$。有用的积分公式：
$$\int\frac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\arccos\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C,a>0,b^2+4ac>0$$
4. 这个时候突然爆发了洪水，水淹到了$z=h$的位置（已知$h<\frac{a}{\sqrt{r_0}}$）。工程组虽然已经全部逃到了山峰上，但是仍然非常着急。水下的钢索已经无所谓了，后续会更换；但是未被浸泡的钢索的形状已经达到了理想的位置，工程队不希望它再产生任何的移动。为了实现这个目的，工程组兵分两路前往钢索与水面的两个接触点，并且分别以拔河的姿势紧拉绳索。请问他们应该向哪个方向拉，用多大的力拉？已知钢索的截面积是A，水的密度是ρ。（12分）

三、电磁阻尼（40 分）

有一个半径为R的无限长的薄壁铜管，其轴线竖直。它的面电导率为σ（在强度为E的电场中，单位宽度上流过的电流强度是σE）。将一个条形磁铁在轴线的位置扔下去，它的北极竖直向下，南极竖直向上。这个条形磁铁可以等效为一个磁偶极子（忽略其线度），其磁偶极矩为m。如果建立球坐标来描述磁偶极子的磁场，北极方向为极轴，θ为极角，r为空间中一点到磁偶极子的距离，那么磁感应强度可以写成这样的形式：

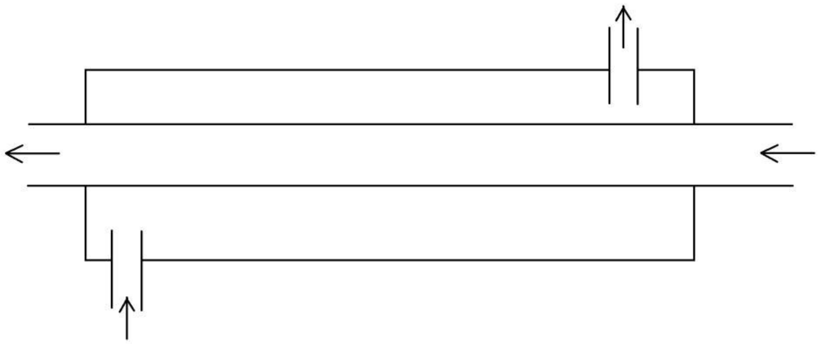
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

其中$\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$分别是径向和切向的单位矢量。

1. 在条形磁铁下方x处的一个铜管圆截面的磁通量$\Phi(x)$是多少？（6 分）
2. 如果条形磁铁正在以速度v下落，那么条形磁铁下方x处和$x + \mathrm{d}x$处的两个铜管圆截面所截取的铜环的发热功率 $\mathrm{d}P(x)$是多少？（6 分）
3. 如果条形磁铁下落速度为匀速是v，求铜管的发热功率P。（6 分）
   可能需要用到的积分公式：
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^5}\mathrm{d}x = \frac{5\pi}{128}$$
4. 假定电磁阻尼可以被等效成一个作用在条形磁铁上的力，这个力除了与材料、几何参数等有关，只和速度有关。请求出电磁阻尼力f的形式。（4 分）
5. 沿用上一问的结果。我们把一根劲度系数为k的弹簧的一端用支架固定在铜管的中心，另一端固定在条形磁铁上，然后给条形磁铁一个扰动使其开始振动。假定这个电磁阻尼是弱阻尼，也就是说每个周期的振幅改变量远小于其振幅。设一个周期内这个振子损失的能量是δE，谐振子的总能量是E，那么定义品质因数为$Q = 2\pi\frac{E}{\delta E}$，求$Q$。已知条形磁铁的质量是$M$。（18 分）

四、换热器（60 分）

换热器是一种能够将热量从热流体转移到冷流体的装置。如图所示。



图中展示了一个长为L的换热器。热流体从下方入口流入换热器，初始温度为T_{10}，在换热器内部向右流动，最后在上方出口流出换热器。冷流体从右方入口流入换热器，初始温度为T_{20}，在换热器内部向左流动，最后在左方出口流出换热器。建立轴向的坐标x（向右为正），其原点选在换热器中点处。当两种流体达到稳定的流动时，其温度分布不再随时间改变，所以可以设

$$T_1(x), -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$$
$$T_2(x), -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$$

分别为热流体和冷流体在换热器中的温度的空间分布。此处已经假设了同一截面上，同种流体内部没有温度梯度。已知换热器外壁绝热；单位时间内，dx的长度的两种流体间的换热管壁可以从热流体向冷流体传递的热量是

$$k\big(T_1(x) - T_2(x)\big)\mathrm{d}x$$

其中k是常数。我们进一步假设由于换热器的传热速率很快，所以可以忽略同种流体沿着x方向的热传递。已知换热器的一个截面上，热、冷流体的截面积分别是A_1, A_2，两种流体的速度、密度、比热容分别是$v_1, v_2, \rho_1, \rho_2, c_1, c_2$。

1. 仔细考虑流体的流动和传热。写出$T_1(x), T_2(x)$满足的微分方程组。（14 分）
2. 设

$$\lambda_i = \frac{k}{c_i \rho_i A_i v_i}, i = 1,2$$

3. 在$\lambda_1 = \lambda_2$和$\lambda_1 \neq \lambda_2$的两种情况下分别求解两种流体在空间的温度分布$T_1(x), T_2(x)$。（以下的所有小题都只需考虑$\lambda_1 \neq \lambda_2$的情况，因为可以对答案取$\lambda_1 \to \lambda_2$的极限来获得相等的情况）（22 分）
4. 通过换热器，热流体的温度降低了ΔT_1，求ΔT_1。冷流体的温度升高了ΔT_2，求ΔT_2。如果把两个液体进口的管子拔下来，转而接入一个大的绝热储藏罐（忽略其灌满的可能性），两种液体不发生化学反应且能混合，那么其稳定时的温度为T_{eq}，求T_{eq}。换热器中热液体的末态温度有可能比T_{eq}低吗？冷液体的末态温度有可能比T_{eq}高吗？如果可以，请在一张图上定性画出这种情况下$T_1(x), T_2(x)$的图像，标出T_{eq}的位置；如果不可以，请求出两种液体末态温差的最小值。（14 分）

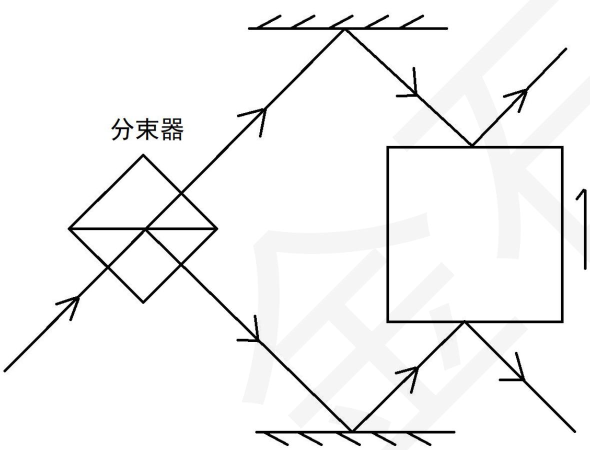
5. 熵是一个热力学系统的状态量（也就是说只和温度、压强、体积等参数有关），如果热力学系统经历了一个可逆过程，那么其熵S的改变量可以用吸热 $\mathrm{d}Q_{\mathrm{rev}}$

$$\Delta S=\int_{\mathrm{initial}}^{\mathrm{final}}\frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{rev}}}{T}$$

6. 来表示。对于不可逆的过程，我们可以先算出熵的表达式，再代入状态参量计算它。另外，熵是广延量，也就是说一个大系统的熵等于其子系统的熵相加。求换热器系统（包括流体）的熵的变化率$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$。它是正还是负的？（10 分）

五、光学阻尼器（40 分）

如图所示。不考虑重力的光学平台上有分束镜和两块平面镜，它们都是平行的。已知分束镜可以产生等光强的两束光。另有一理想金属滑块（光可以没有损耗地反射），只能按照图中箭头所示方向上下无摩擦地滑动。已知其上下表面都和平面镜平行。令激光入射分束镜，其功率为P。设入射的激光与分束镜法线的夹角为θ。可以发现滑块上下振动的时候，仿佛受到了阻尼。我们来研究这个现象。

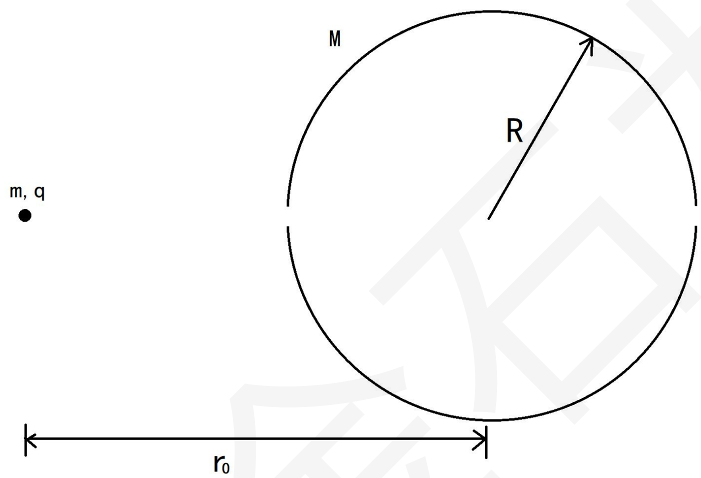


1. 我们非常熟悉实验室参考系中的四维坐标(ct,x,y,z)到沿着x方向匀速v运动的参考系的四维坐标$\left(ct',x',y',z'\right)$的洛伦兹变换。有趣的是，一个粒子的能量和动量组成的四维矢量$\left(E/c,p_x,p_y,p_z\right)$也满足同样的变换关系，它称作四维动量。先考虑上表面的入射光。以下默认在实验室参考系中。如果滑块向上以βc（c是光速）的速度运动，考虑一个角频率为ω光子以θ角入射，求反射前光子的动量和反射后光子的（三维）动量。（12 分）
2. 还是只考虑上表面的入射光。设空间中分布着的正处于从上平面镜飞往金属块上表面的路程中的光子共有N个，单位时间被上平面镜反射的光子有n_1个，单位时间被金属块上表面反射的光子有n_2个，求出这三个量的关系。（3 分）

3. 用金属块的速度βc表示上一问中N的变化率。设激光圆频率是ω。（10 分）
4. 考虑上下表面的入射光。已知金属块的速度是βc，求出金属块因为被光照射而受到的力。（11 分）
5. 如果金属块突然获得一个小速度v_0（$v_0 \ll c$），那么运动多少路程之后金属块会停下来？已知金属块的质量是m。（4 分）

六、被吸引的小球（40 分）

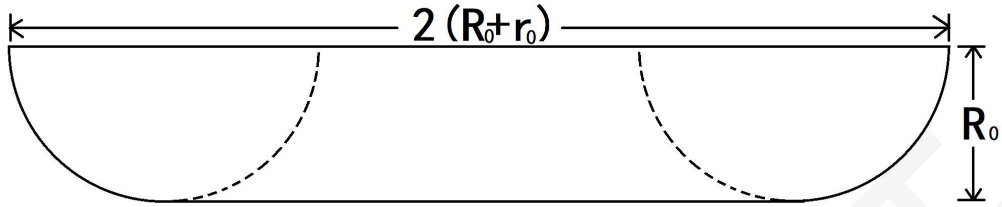
如图所示，自由空间中有一大导体球壳，质量M，半径R，一条直径上开了两个对电荷分布没有影响的小孔，在这条直径的延长线上，距离球心为r_0的位置有一带电q的小球，可被视为质点，质量为m。初始时球壳静止，小球速度向右为v_0。只考虑静电效应。



1. 作为小球到导体球壳球心的距离r的函数，求小球的速度v和球壳的速度V。（26 分）
2. 求小球相对球壳的最大位移的大小。（14 分）

七、甜甜圈（40 分）

有一块甜甜圈形状的玻璃，它的形状是这样的：一个半径为R_0的圆盘的圆心在一个半径为r_0（$r_0 > R_0$）的圆周上运动，运动过程中圆盘的法线始终平行于圆周的切向，这样扫过的区域就是这个甜甜圈。现在我们把甜甜圈对半切（沿着r_0圆周所在的平面），取其中一块，将它平放在平面镜上，使得平面朝上，凸面朝下。侧视图如下。



令波长为λ的光从上方垂直于平面入射。从上方观察，发现甜甜圈与地面的接触点附近产生了一些条纹。

1. 请你建立合适的坐标，写出亮条纹的形状和位置。（12 分）
2. 设玻璃比较硬，平面镜比较软。如果用力按压半甜甜圈，那么平面镜表面会凹陷。如果半甜甜圈竖直向下位移了x，那么平面镜提供的弹性回复力$f = -f_0\frac{(x+x_0)^2-x_0^2}{a^2}$。如果用大小为$F$的力均匀地向下按压半甜甜圈，那么亮条纹会被吞入还是被吐出？设条纹移动了Δn条，求F。忽略重力。已知形变在宏观上是很小的。（6 分）
3. 接上问的题设，如果大小为F的力集中在甜甜圈上表面距离轴线r_c一点竖直向下按压，求亮条纹的方程。（22 分）

八、n维超立方体电阻网络（20 分）

我们这么来定义n维超立方体电阻网络。有2^n个顶点，每个顶点用一组坐标

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

来表示，其中每一个分量x_i只能取 0 或 1。如果两个顶点的坐标只有 1 个坐标分量不同，那么就在这两个顶点间连一条电阻为r的导线，否则不连。请求出n维超立方体电阻网络从$(0,0,\cdots,0)$点到$(1,1,\cdots,1)$点的电阻$R(n)$，并求出$R(6)$。你可能需要用到的函数：

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!\,(n-k)!}{n!}$$