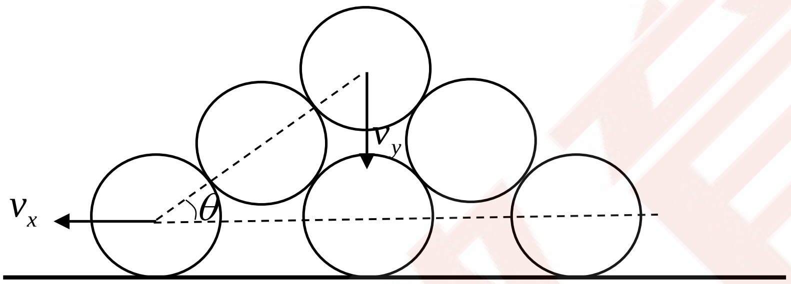
培尖教育2018年学科竞赛夏令营物理模拟卷（九）

考试时间：150分钟　总分320分

（参考答案）

1、解：设如图所示θ



易得　$v_x=-4R\sin\theta\dot{\theta}$

$v_y=-4R\cos\theta\dot{\theta}$

因而能量上有

$$8mgR\sin\frac{\pi}{3}=8mgR\sin\theta+\frac{1}{2}mv_y^2+2\times\frac{1}{2}mv_x^2+2\times\frac{1}{2}m\left[(\frac{1}{2}v_x)^2+(\frac{1}{2}v_y)^2\right]$$

可解得　$\dot{\theta}=-\sqrt{\frac{\sqrt{3}-2\sin\theta}{3+2\sin^2\theta}\frac{g}{R}}$

因而　$v_y=4\cos\theta\sqrt{\frac{\sqrt{3}-2\sin\theta}{3+2\sin^2\theta}gR}$

竖直方向加速度为

$$a=\frac{dv_y}{dt}=\frac{dv_y}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}\frac{dv_y}{d\theta}$$
$$=\left(\frac{4\cos^2\theta(3-2\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta)}{(3+2\sin^2\theta)^2}+4\sin\theta\frac{\sqrt{3}-2\sin\theta}{3+2\sin^2\theta}\right)g$$

令$a=g$，可解出分离时的角度

$$\theta=40.12^\circ$$

用时满足

$$t=\int_{\theta_1}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{\sqrt{3}-2\sin\theta}{3+2\sin^2\theta}\frac{g}{R}}}$$

此时，代入可得

$$v_y = 1.04\sqrt{gR}$$

$$v_x = 0.8768\sqrt{gR}$$

假设最上面的球不与下面的系统相碰，下面五个球的总能量为

$$E_0 = 4mgR\sin\theta + m{v_x}^2 + m\left[\left(\frac{1}{2}v_x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}v_y\right)^2\right]$$

因而可得

$$\frac{1}{2}v_y = 2\cos\theta\sqrt{\frac{E_0 - 4mgR\sin\theta}{4R^2 + 16R^2\sin^2\theta}}$$

注意到$\theta = 30^\circ$时，加速度小于g，说明还没有分离，而考虑到最上面的那个球加速度表达式在小于分离角度时是要大于g的，就算是受一个向下的力也仅仅保持接触而不会相碰，因而最上面的球不会和中间层两个球相碰，而是会和最下面中间的球相碰

相碰时速度为$v^2 = {v_{y1}}^2 + 2g\times 4R\sin\theta$

又有时间满足 $\vartriangle t = \dfrac{v - v_{y1}}{g}$

因而要在经过时间$\vartriangle t = 1.457\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

2、解：（1）受力上，有

$$m\ddot{y} = -kl\dot{y} + qE$$

因而速度满足

$$m\frac{d\dot{y}}{dt} = -kl(\dot{y} - \frac{qE}{kl})$$

因而有

$$\frac{d(\dot{y} - \frac{qE}{kl})}{\dot{y} - \frac{qE}{kl}} = -\frac{kl}{m}dt$$

积分，结合初态可得

$$\dot{y} = \frac{qE}{kl}(1 - e^{-\frac{kl}{m}t})$$

（2）当角速度为ω时，力矩为

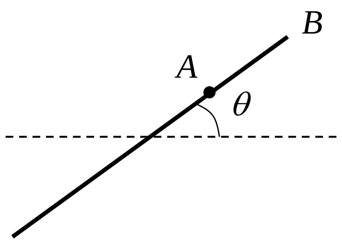
$$M = 2\int_0^{\frac{l}{2}} -k\omega r^2 dr = -\frac{k\omega l^3}{12}$$

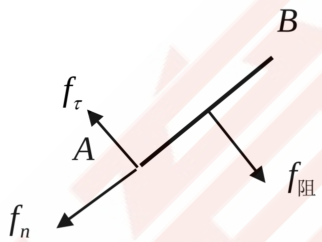
因而有 $M=I\dfrac{d\omega}{dt}=-\dfrac{k\omega l^3}{12}$

分离变量，积分得

$$\omega(t)=\omega_0 e^{-\frac{kl}{m}t}$$

（3）在t时刻，在质心参考系中观察，质心系的惯性力与电场力和因为平动产生的阻力相平衡





角度满足

$$\theta=\int_0^t \omega_0 e^{-\frac{kl}{m}t}dt=\frac{m\omega_0}{kl}(1-e^{-\frac{kl}{m}t})$$

受力上，有

$$f_n=\int_{\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}}\frac{m}{l}\omega^2 r dr=\frac{3}{32}m\omega^2 re^{-\frac{2k}{m}t}$$

角加速度为

$$\beta=\frac{d\omega}{dt}=-\frac{kl\omega_0}{m}e^{-\frac{kl}{m}t}$$

因而有

$$f_\tau-f_{阻}=\int_{\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}}\frac{m}{l}\beta r dr=-\frac{3}{32}k\omega_0 l^2 e^{-\frac{kl}{m}t}$$

其中 $f_{阻}=\int_{\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}}k\omega r dr=\frac{3}{32}k\omega_0 l^2 e^{-\frac{kl}{m}t}$

解得 $f_\tau=0$

即有 $f_n=\dfrac{3}{32}m\omega^2 re^{-\frac{2k}{m}t}$

$f_\tau=0$

3、解：（1）$\vec{M}=I\vec{S}=I\pi a^2\hat{e}_n$

因而可得

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}M=\frac{\mu_0 a^2 I}{4r^3}$$

（2）对该电荷，有

$$M=-qBr\dot{r}$$

而有 $$dL=Mdt=-qBr\dot{r}dt=-qBrdr=-\frac{q\mu_0 a^2 I}{4r^2}dr$$

可得 $$d(L-\frac{q\mu_0 a^2 I}{4r})=0$$

可推出

$$L-\frac{q\mu_0 a^2 I}{4r}=const=0$$

因而有

$$mr^2\dot{\theta}-\frac{q\mu_0 a^2 I}{4r}=0$$

$$\dot{\theta}=\frac{q\mu_0 a^2 I}{4mr^3}$$

最近时，有

$$\left|\dot{\theta}r\right|=v_0$$

可算得 $$r=\sqrt{\frac{q\mu_0 a^2 I}{4mv_0}}$$

（3）$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dr}\frac{dr}{dt}=\dot{r}\frac{d\theta}{dr}$，因而可得

$$\frac{d\theta}{dr}=\frac{\dot{\theta}}{\dot{r}}=-\frac{q\mu_0 a^2 I}{4mr^3}/\sqrt{v_0^{\ 2}-\frac{q^2\mu_0^{\ 2}a^4 I^2}{16m^2r^4}}$$

因而 $$d\theta=-\frac{\frac{q\mu_0 a^2 I}{4mr^3}}{\sqrt{v_0^{\ 2}-\frac{q^2\mu_0^{\ 2}a^4 I^2}{16m^2r^4}}}dr$$

因而 $$\vartriangle\theta=2\int_{\infty}^{r_{\min}}-\frac{\frac{q\mu_0 a^2 I}{4mr^3}}{\sqrt{v_0^{\ 2}-\frac{q^2\mu_0^{\ 2}a^4 I^2}{16m^2r^4}}}dr=\frac{\pi}{2}$$

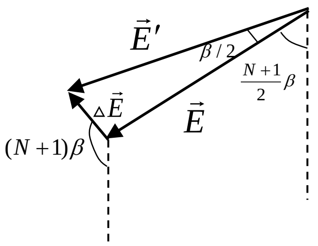
4、解：（1）有

$$E_x=-\frac{kq}{r^2}\sin\beta-\frac{kq}{r^2}\sin 2\beta-\cdots-\frac{kq}{r^2}\sin N\beta=-\frac{kq}{r^2}S_{n2}$$

$$E_x=-\frac{kq}{r^2}-\frac{kq}{r^2}\cos\beta-\frac{kq}{r^2}\cos 2\beta-\cdots-\frac{kq}{r^2}\cos N\beta=-\frac{kq}{r^2}S_{n1}$$

在 $N+2$ 处放一个点电荷 q，则根据对称性，末态的电场要顺时针转过一个角度 $\beta/2$，而电场的改变量的大小为

$\vartriangle E=\frac{kq}{r^2}$，方向如图



根据正弦定理，可得

$$E=\frac{\vartriangle E}{\sin\beta/2}\sin\frac{N+1}{2}\beta=\frac{\sin\frac{N+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\frac{kq}{r^2}$$

因而
$$E_x=-E\sin\frac{N\beta}{2}=-\frac{\sin\frac{N+1}{2}\beta\sin\frac{N}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\frac{kq}{r^2}$$

$$E_y=-E\cos\frac{N\beta}{2}=-\frac{\sin\frac{N+1}{2}\beta\cos\frac{N}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\frac{kq}{r^2}$$

因而可得

$$S_{n1}=\frac{\sin\frac{N+1}{2}\beta\cos\frac{N\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

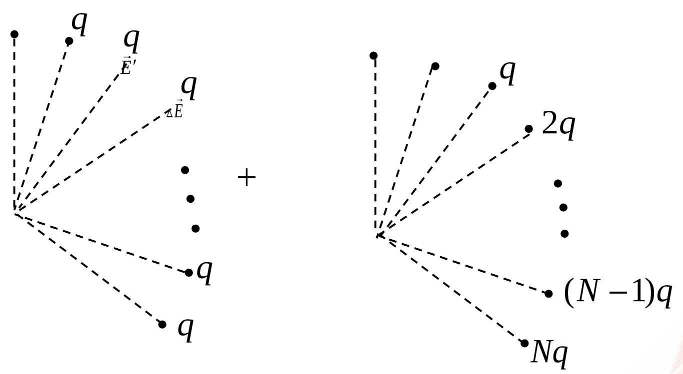
$$S_{n2}=\frac{\sin\frac{N+1}{2}\beta\sin\frac{N\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

(2)
$$E_x=-\frac{kq}{r^2}(\sin\beta+2\sin\beta+\cdots+N\sin N\beta)=-\frac{kq}{r^2}S_{n2}$$

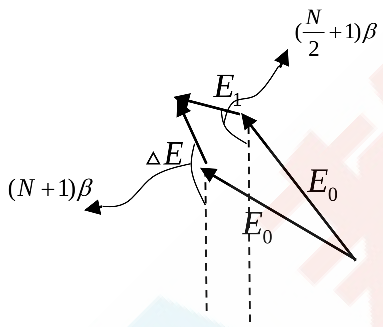
$$E_y=-\frac{kq}{r^2}(\cos\beta+2\cos\beta+\cdots+N\cos N\beta)=-\frac{kq}{r^2}S_{n1}$$

因而
$$E_0{}^2=E_x{}^2+E_y{}^2=A(\frac{kq}{r^2})^2$$

在 N+2 加一个$(N+1)q$，且第i个位置的点电荷看成是q和$(i-2)q$分别计算电场，则有最后的电场为



最终电场如图



其中

$$E_1=\frac{\sin\frac{N+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\frac{kq}{r^2}$$

$$\Delta E=(N+1)\frac{kq}{r^2}$$

因而有关系

$$2E_0\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\Delta E^2+E_1^2-2\Delta EE_1\cos\frac{N}{2}\beta}$$

因而 $$E_0=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\sqrt{(N+1)^2+\left(\frac{\sin\frac{N+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)^2-2(N+1)\frac{\sin\frac{N+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\cos\frac{N}{2}\beta}\,\frac{kq}{r^2}$$

而 $$E_0^2=A\left(\frac{kq}{r^2}\right)^2$$

因而可以算得

$$A=\frac{1}{4\sin^2\frac{\beta}{2}}\left[(N+1)^2+\left(\frac{\sin\frac{N+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)^2-2(N+1)\frac{\sin\frac{N+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\cos\frac{N}{2}\beta\right]$$

代入数据可得 $A=185.75$

5、解：（1）由于有一个定容热容的改变临界点，为方便讨论，不妨设$C_V = kR$

那一段斜线对应方程

$$p = (6-\frac{V}{V_0})p_0$$

因而这一段满足

$$pV = nRT$$

而 $dQ = nC_V dT + pdV$

其中

$$nC_V dT = kd(pV) = k(6-2\frac{V}{V_0})p_0 dV$$

$$pdV = (6-\frac{V}{V_0})p_0 dV$$

因而 $dQ = (6-\frac{V}{V_0}+6k-2k\frac{V}{V_0})p_0 dV$

吸放热临界点满足

$$V = \frac{6+6k}{1+2k}V_0$$

若 $k=\frac{3}{2}$，则$V=\frac{15}{4}V_0$，此时温度不满足题意，舍去

若 $k=2$，则$V=\frac{18}{5}V_0$，符合题意

因而吸放热临界点有两个，一个是(p_0,V_0)，一个是$(\frac{12}{5}p_0,\frac{18}{5}V_0)$

（2）吸热量为

$$Q_{吸}=\Delta U+W=2\times\frac{12}{5}p_0\times\frac{18}{5}V_0-\frac{3}{2}p_0V_0+\frac{1}{2}\times\frac{13}{5}V_0\times\left(\frac{7}{5}p_0+4p_0\right)$$

$$=\frac{114}{5}p_0V_0$$

做功为$W=8p_0V_0$

因而循环效率为

$$\eta=\frac{W}{Q_{吸}}=35.1\%$$

（3）循环过程中最高温度为$9T_0$，最低温度为T_0

因而卡诺循环的效率为

$$\eta'=1-\frac{T_0}{9T_0}=88.9\%$$

两个循环的效率比为

$$\frac{\eta'}{\eta}=\frac{15}{38}=0.395$$

6、解：（1）由玻尔兹曼分布，可得

$$n(r)=n(0)e^{\frac{m\omega^2r^2}{2kT}}$$

总的粒子数目守恒，因而有

$$\pi R^2 n_0=\int_0^R n(0)e^{\frac{m\omega^2r^2}{2kT}}\cdot 2\pi r dr$$

解得 $n(0)=\dfrac{n_0\dfrac{m\omega^2R}{2kT}}{e^{\frac{m\omega^2R}{2kT}}-1}$

因而 $n(r)=\dfrac{n_0\dfrac{m\omega^2R^2}{2kT}}{e^{\frac{m\omega^2R^2}{2kT}}-1}e^{\frac{m\omega^2r^2}{2kT}}$

（2）（i）易得

$$p(r)=p_0e^{\alpha r^2}$$

其中 $p_0=\dfrac{n_0\dfrac{m\omega^2R^2}{2}}{e^{\frac{m\omega^2R^2}{2kT}}-1}$， $\alpha=\dfrac{m\omega^2}{2kT}$

因而其受力为（除去科氏力）

$$F=m\omega^2r-2p_0V\alpha re^{\alpha r^2}$$

可据此定义势能为

$$U=p_0Ve^{\alpha r^2}-\frac{1}{2}m\omega^2r^2$$

因而有关系

$$U(0)+\frac{1}{2}Mv_0^2=U(R)+\frac{1}{2}Mv^2$$

解得 $v=\sqrt{\dfrac{1}{M}\left[2p_0V(1-e^{\alpha R^2})+m\omega^2R^2\right]+v_0^2}$

（ii）有关系

$$M=2m\omega\dot{r}r=\frac{dL}{dt}$$

因而 $dL=2m\omega\dot{r}rdt=d(m\omega r^2)$

可得 $L-m\omega r^2=0$

因而末态 $v_\tau=\omega R$

因而径向速度为 $v_r=\sqrt{\dfrac{1}{M}\left[2p_0V(1-e^{\alpha R^2})+m\omega^2R^2\right]+v_0^2-\omega^2R^2}$

（iii）用时为

$$t=\int_0^R \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{M}\left[2p_0V(1-e^{\alpha r^2})+m\omega^2r^2\right]+v_0{}^2-\omega^2r^2}}$$

7、解：（1）由于尺缩效应，x 轴上的长度缩短，其余方向长度不变，因而有表面方程

$$\frac{(x+h)^2}{1-\beta^2}+y^2+z^2=R^2$$

是一个绕短轴旋转一周的旋转椭球体。

（2）（i）对于观察者，若同处与左端时，即 $0\le t_1\le\dfrac{h-\sqrt{1-\beta^2}R}{v}$ 时，设此时接收到的白豚鼠左侧发出的光是 t_{1l} 时刻发出的，右侧的光是 t_{1r} 时刻发出的，则有

$$h+\sqrt{1-\beta^2}R-vt_{1l}=c(t_1-t_{1l})$$

$$h-\sqrt{1-\beta^2}R-vt_{1r}=c(t_1-t_{1r})$$

可得 $$t_{1l}=\frac{ct_1-h-\sqrt{1-\beta^2}R}{c-v}$$

$$t_{1r}=\frac{ct_1-h+\sqrt{1-\beta^2}R}{c-v}$$

发光时刻它们的坐标分别为

$$x_{1l}=-h-\sqrt{1-\beta^2}R+\frac{ct_1-h-\sqrt{1-\beta^2}R}{1-\beta}\beta$$

$$x_{1r}=-h+\sqrt{1-\beta^2}R+\frac{ct_1-h+\sqrt{1-\beta^2}R}{1-\beta}\beta$$

因而这一阶段长为

$$l=x_{1r}-x_{1l}=2R\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

在 $\dfrac{h-\sqrt{1-\beta^2}R}{v}<t_1<\dfrac{h+\sqrt{1-\beta^2}R}{v}$ 这一阶段，有关系

$$h+\sqrt{1-\beta^2}R-vt_{1l}=c(t_1-t_{1l})$$

$$vt_{1r}-h+\sqrt{1-\beta^2}R=c(t_1-t_{1r})$$

解得 $$t_{1l}=\frac{ct_1-h-\sqrt{1-\beta^2}R}{c-v}$$

$$t_{1r}=\frac{ct_1+h-\sqrt{1-\beta^2}R}{c+v}$$

因而左右两端的坐标分别为

$$x_{1l}=-h-\sqrt{1-\beta^2}R+\frac{ct_1-h-\sqrt{1-\beta^2}R}{1-\beta}\beta$$

$$x_{1r}=-h+\sqrt{1-\beta^2}R+\frac{ct_1+h-\sqrt{1-\beta^2}R}{1+\beta}\beta$$

视觉长度为

$$l=x_{1r}-x_{1l}=2\frac{\sqrt{1-\beta^2}R+\beta h-\beta^2ct_1}{1-\beta^2}$$

当 $t_1>\dfrac{h+\sqrt{1-\beta^2}R}{v}$ 时，则有

$$vt_{1l}-h-\sqrt{1-\beta^2}R=c(t_1-t_{1r})$$

$$vt_{1r}-h+\sqrt{1-\beta^2}R=c(t_1-t_{1r})$$

解得 $$t_{1l}=\frac{ct_1+h+\sqrt{1-\beta^2}R}{c+v}$$

$$t_{1r}=\frac{ct_1+h-\sqrt{1-\beta^2}R}{c+v}$$

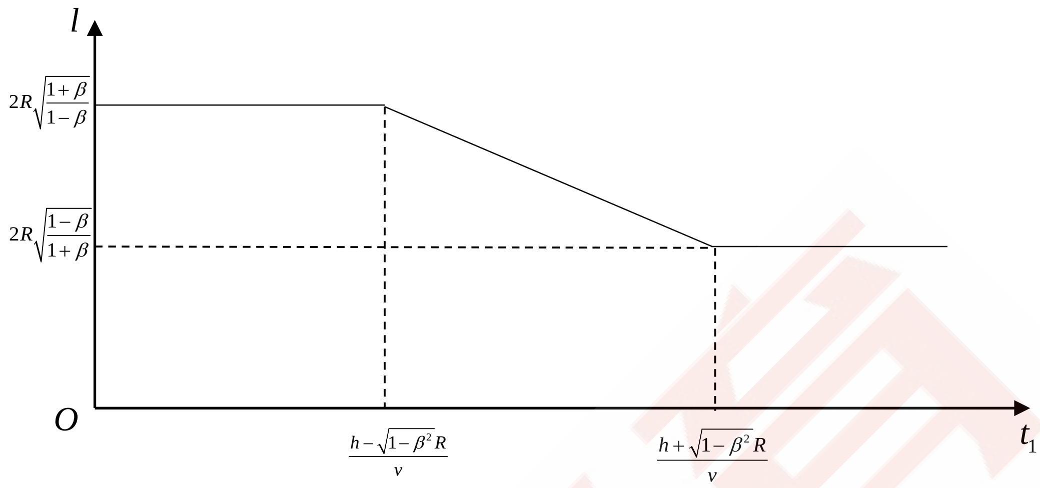
因而有 $$x_{1l}=-h-\sqrt{1-\beta^2}R+\frac{ct_1+h+\sqrt{1-\beta^2}R}{1+\beta}\beta$$

$$x_{1r}=-h+\sqrt{1-\beta^2}R+\frac{ct_1+h-\sqrt{1-\beta^2}R}{1+\beta}\beta$$

因而视觉长度为

$$l=x_{1r}-x_{1l}=2R\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

因而作图如下



（ii）根据多普勒效应，易得

$0\le t_1\le\frac{h}{v}$ 时，波长满足 $l=d\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

$t_1>\frac{h}{v}$ 时，波长满足 $l=d\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

图略

（iii）因子类似，光有突变，而视觉长度没有。

8、解：（1）显然为悬链线，方程为

$$y=A\left[ch\left(\frac{x}{A}\right)-1\right]$$

由于绳长为 L，因而有

$$dl=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx=ch(\frac{x}{A})dx$$

$$L=\int_{-R}^{R}ch(\frac{x}{A})dx=2Ash\left(\frac{R}{A}\right)$$

即其中的参量 A 满足 $2Ash\left(\frac{R}{A}\right)=L$

因而 $$h=A\left[sh\left(\frac{R}{A}\right)-1\right]$$

（2）由于 C 处无摩擦，因而左右两侧绳子末端张力的水平分量必须相同，因而要求两段绳子底部的张力必须相同，各自建系使得在各自参考系恰好为双曲余弦函数

则有

$$y_a=A_a ch\left(\frac{x_a}{A_a}\right)\qquad L_1=2A_a sh\left(\frac{a}{2A_a}\right)$$

设 λg，则有关系

$$\frac{\lambda g L_1/2}{T_a}=\left.\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}\right|_{x_a=\frac{a}{2}}=sh\left(\frac{a}{2A}\right)/ch\left(\frac{a}{2A_a}\right)$$

可推出 $T_{xa}=\lambda g A_a ch\left(\frac{a}{2A_a}\right)$

由 $T_a=T_b, L_1+L_2=L$ 可得

$$A_a sh\left(\frac{a}{2A_a}\right)+2A_b sh\left(\frac{b}{2A_b}\right)=L$$

$$A_a ch\left(\frac{a}{2A_a}\right)=A_b ch\left(\frac{b}{2A_b}\right)$$

此即 A_a, A_b 所满足的方程

因而易得

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{A_a sh\left(\frac{a}{2A_a}\right)}{A_b sh\left(\frac{b}{2A_b}\right)}$$

$$\frac{H_1}{H_2}=\frac{A_a\left[sh\left(\frac{a}{2A_a}\right)-1\right]}{A_b\left[sh\left(\frac{b}{2A_b}\right)-1\right]}$$