培尖教育2018年学科竞赛夏令营物理模拟卷（十三）

考试时间：150分钟　总分320分

（参考答案）

题一.

1、设BC杆有个朝右的加速度a_0, $\alpha=(\pi-\angle AOC)$

AB杆长不变：$\ddot{\alpha}l=a_0\cos\frac{\pi}{4}$...(1), m的加速度：$a_m=\frac{1}{2}\ddot{\alpha}l=\frac{\sqrt{2}}{4}a_0$...(2)

以O为转轴对杆OA：$mg\cdot\frac{l}{2}\cdot\cos45°-T_0l=-ma_m\cdot\frac{l}{2}$...(3)

∴：$T_0=\frac{\sqrt{2}}{4}m(g+\frac{1}{2}a_0)$...(4), T是AB杆对外界的拉力

对BC水平方向：$F_0-T_0\cos45°=2ma_0$...(5)

连解(4)、(5)得：$F_0-\frac{1}{4}mg-\frac{1}{8}ma_0=2ma_0$...(6), ∴：$a_0=\frac{1}{17}(8\frac{F_0}{m}-2g)$...(7)

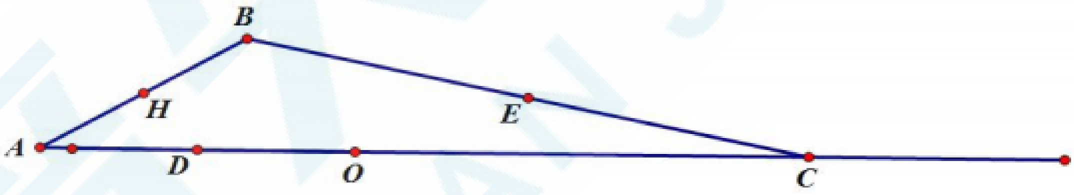
$T_0=\frac{\sqrt{2}}{17}(F_0+4mg)$...(8)

以C所在位置为转轴：$2mgl\cos45°+T_0\cdot2l-F_0\cdot2l\cos45°=-2ma_0l\cos45°$...(9)

代入(8)得：$mg+\frac{1}{17}(2F_0+8mg)-F_0=-\frac{1}{17}(8F_0-2mg)$...(10)

∴: $17mg+2F_0+8mg-17F_0=-8F_0+2mg$...(11)

解得：$F_0=\frac{23}{7}mg$...(12)



2、矢量解法：

$$\because: AC=(1+\sqrt{2})l, \therefore: \begin{cases} \cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2} \\ \cos C=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2} \end{cases} \quad ...(13)$$

$$\therefore: \begin{cases} \sin A=\sqrt{4\sqrt{2}-5} \\ \sin C=\dfrac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{2}-5} \end{cases} ...(14)$$

$$\therefore: \begin{cases} \sin(\pi-A-C)=\dfrac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{2}-5}(\sqrt{2}+1) \\ \cos(\pi-A-C)=\dfrac{3}{2}\sqrt{4\sqrt{2}-5}(1-\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\therefore: \begin{cases} \sin\beta=\sin[(\pi-A-C)-\dfrac{\pi}{2}]=\dfrac{3}{2}\sqrt{4\sqrt{2}-5}(\sqrt{2}-1) \\ \cos\beta=\dfrac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{2}-5}(\sqrt{2}+1) \end{cases} \quad ...(15)$$

设D、E分别有个速度v_D、v_E

AB长不变:$2v_D\sin A=2v_E\cos\beta ...(16), \therefore: v_D=\dfrac{3(1-\sqrt{2})}{2}v_E ...(17)$

机械能守恒：$mg\cdot\dfrac{l}{2}\sin 45°+2mgl(\sin 45°-\sin C)=\dfrac{1}{2}mv_D^{\ 2}+\dfrac{1}{2}(2m)v_E^{\ 2} ...(18)$

$$\therefore: gl(\frac{5}{4}\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-5})=\frac{9(1-\sqrt{2})^2+2}{8}v_E^{\ 2} ...(19)$$

$$\therefore: v_E=\sqrt{\frac{10\sqrt{2}-8\sqrt{4\sqrt{2}-5}}{9(1-\sqrt{2})^2+2}gl} ...(20), \therefore: v_D=\frac{3(1-\sqrt{2})}{2}\sqrt{\frac{10\sqrt{2}-8\sqrt{4\sqrt{2}-5}}{9(1-\sqrt{2})^2+2}gl} ...(21)$$

$$\therefore: v_{H沿杆}=2v_E\cos\beta=\sqrt{4\sqrt{2}-5}(\sqrt{2}+1)\sqrt{\frac{10\sqrt{2}-8\sqrt{4\sqrt{2}-5}}{9(1-\sqrt{2})^2+2}gl} ...(22)$$

$$v_{H垂直}=\frac{2v_D\cos A+2v_E\sin\beta}{2}=\frac{3}{2}[3\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-5}(\sqrt{2}-1)]\sqrt{\frac{10\sqrt{2}-8\sqrt{4\sqrt{2}-5}}{9(1-\sqrt{2})^2+2}gl} ...(23)$$

设：D有$a_{D切}$、$a_{D法}$, E有$a_{E切}$、$a_{E法}$, a都是>0的

$$AB两端加速度关联: 2a_{D切}\sin A-2a_{D法}\cos A=2a_{E切}\cos\beta-2a_{E法}\sin\beta+\frac{(v_B\sin\beta-v_A\cos A)^2}{l}\ldots(24)$$

$$\therefore\ a_{E切}=\frac{a_{D切}\sin A-a_{D法}\cos A+a_{E法}\sin\beta+\dfrac{(v_B\sin\beta-v_A\cos A)^2}{l}}{\cos\beta}\ldots(25)$$

$$以O为转轴对OA:\ mg\bullet\frac{l}{2}-Tl\sin A=ma_{D切}\bullet\frac{l}{2}\ldots(26)$$

$$以C为转轴对BC: 2mgl\cos C+T\bullet 2l\cos\beta=2ma_{E切}l\ldots(27)$$

$$\therefore\ a_{E切}=\frac{g\cos C+(g-a_{D切})\dfrac{\cos\beta}{\sin A}}{2}\ldots(28)$$

$$\therefore\ g\cos C\cos\beta+g\frac{\cos^2\beta}{\sin A}-a_{D切}\frac{\cos^2\beta}{\sin A}$$

$$=2a_{D切}\sin A-2a_{D法}\cos A+2a_{E法}\sin\beta+\frac{2(v_B\sin\beta-v_A\cos A)^2}{l}\ldots(29)$$

$$\therefore\ a_{D切}$$

$$=\frac{g\sin A\cos C\cos\beta+g\cos^2\beta+2a_{D法}\sin A\cos A-2a_{E法}\sin A\sin\beta-\dfrac{2(v_B\sin\beta-v_A\cos A)^2}{l}}{2\sin^2 A+\cos^2\beta}\ldots(30)$$

$$\therefore\ a_{H沿杆}=2a_{D切}\sin A-2a_{D法}\cos A+\frac{(v_{E切}-v_D\cos A)^2}{\dfrac{l}{2}}\ldots(31)$$

题二.

对第一个骨牌机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2=mgl(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\ldots(12),\ \therefore\ v_0=\sqrt{gl(2-\sqrt{2})}\ldots(13)$$

$$假设:\begin{cases}第一个骨牌碰后角速度为\omega\\ 第二个骨牌碰后速度为v\end{cases}$$

$$速度关联：\omega l\cos 45°=(\frac{v}{l})\bullet(\frac{\sqrt{2}}{2}l)\ldots(14),\ \therefore\ \omega=\frac{v}{l}\ldots(15)$$

设：相碰时水平冲量为I

以A_1为转轴, 对第一个骨牌：

$$I\cos 45°\bullet l=mv_0l-m\omega l^2=mv_0l-mvl\ldots(16)$$

$$以A_2为转轴, 对第二个骨牌：\ I\bullet(\frac{\sqrt{2}}{2}l)=mvl\ldots(17)$$

$$连解(16)、(17)得：\ v=\frac{v_0}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{gl(2-\sqrt{2})}\ldots(18)$$

(2)分析：此题如果按照时间顺序算,计算量纯凭运气。

因为第二个骨牌就飞了,所以计算量小。但是上面的方法并不那么好用。

下面介绍一个普适的做法。

我们先假设每个骨牌都铰接了,即A_i是不能动的。

由于约束力不作功。用这个体系算能量是等价的。

设:$\begin{cases}\text{在第}i-1\text{个骨牌与第}i\text{个骨牌碰撞后瞬间,第}i\text{个骨牌速度}v_i^{'}\\ \text{在第}i\text{个骨牌与第}i+1\text{个骨牌碰撞前瞬间,第}i\text{个骨牌速度}v_i\end{cases}$

能量守恒:$\frac{1}{2}mv_i^2-\frac{1}{2}mv_i^{'2}=mgl(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$...(19)

类比上一小问：$v_i^{'}=\frac{v_{i-1}}{2}$...(20)

∴：$v_i^2-\frac{1}{4}v_{i-1}^2=gl(2-\sqrt{2})$...(21)

设：$a_i=v_i^2,\lambda=gl(2-\sqrt{2})$,∴：$a_i=\frac{1}{4}a_{i-1}+\lambda$...(22)

根据数学必修五:$(a_i+\delta)=\frac{1}{4}(a_{i-1}+\delta)$...(23),与(22)是等价的

∴：$\delta=-\frac{4}{3}\lambda$,∴:$(a_i-\frac{4}{3}\lambda)=\frac{1}{4}(a_{i-1}-\frac{4}{3}\lambda)=\frac{1}{4^{i-1}}(a_1-\frac{4}{3}\lambda)$...(24)

∴：$v_i^2=\frac{1}{4^{i-1}}[v_1^2-\frac{4}{3}gl(2-\sqrt{2})]+\frac{4}{3}gl(2-\sqrt{2})$...(25)

而$v_1^2=gl(2-\sqrt{2})$,∴:$\frac{v_i^2}{l}=\frac{g(2-\sqrt{2})}{3}(4-\frac{1}{4^{i-1}})$...(26)

当$m\cdot\frac{v_i^2}{l}\geqslant mg\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}mg$时：$A_i$需要铰链给它向下的约束力

即:$\frac{(2-\sqrt{2})}{3}(4-\frac{1}{4^{i-1}})\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$...(27),∵:$\begin{cases}\frac{(2-\sqrt{2})}{3}\approx 0.195\\ \frac{4(2-\sqrt{2})}{3}\approx 0.781\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707\end{cases}$...(28)

∴:$0.074\geqslant\frac{0.195}{4^{i-1}}$,∴:$4^{i-1}\geqslant\frac{0.195}{0.074}\approx 2.635$...(29),∴：$i=2$就会飞

题三.

设：某时刻粒子的速度为$\dot{x}$、$\dot{y}$

$$牛二:\begin{cases}水平方向:-q\dot{y}B=m\dfrac{d}{dt}\dot{x}\ldots(1)\\ 竖直方向:q\dot{x}B-qE=m\dfrac{d}{dt}\dot{y}\ldots(2)\end{cases}$$

根据(2)得：$\dot{x}=\dfrac{m}{qB}\dfrac{d}{dt}\dot{y}+\dfrac{E}{B}\ldots(3)$

(3)代入(1)得：$-q\dot{y}B=m\dfrac{d}{dt}(\dfrac{m}{qB}\dfrac{d}{dt}\dot{y}+\dfrac{E}{B})=m\dfrac{d}{dt}(\dfrac{m}{qB}\dfrac{d}{dt}\dot{y}+\dfrac{E_0-ky}{B})$

$=\dfrac{m^2}{qB}\dfrac{d}{dt}\bullet\dfrac{d}{dt}\dot{y}-\dfrac{mk\dot{y}}{B}\ldots(4)$

整理得：$\dfrac{d}{dt}\bullet\dfrac{d}{dt}\dot{y}=-\dfrac{(q^2B^2-qmk)}{m^2}\dot{y}\ldots(5)$

当$\dfrac{(q^2B^2-qmk)}{m^2}>0$时：$\dot{y}=A\sin\dfrac{\sqrt{q^2B^2-qmk}}{m}t\ldots(6)$, A是一个常数

$$\therefore:\begin{cases}y=\dfrac{mA}{\sqrt{q^2B^2-qmk}}(\cos\dfrac{\sqrt{q^2B^2-qmk}}{m}t-1)\\ \dfrac{d}{dt}\dot{y}=\dfrac{\sqrt{q^2B^2-qmk}}{m}A\cos\dfrac{\sqrt{q^2B^2-qmk}}{m}t\end{cases}\ldots(7)$$

代入(3)得：$\dot{x}=\dfrac{\sqrt{q^2B^2-qmk}}{qB}A\cos\dfrac{\sqrt{q^2B^2-qmk}}{m}t+\dfrac{E_0-ky}{B}\ldots(8)$

$\therefore:\ v=\dfrac{\sqrt{q^2B^2-qmk}}{qB}A+\dfrac{E_0}{B}\ldots(9)$

$\therefore:\ A=\dfrac{qBv-qE_0}{\sqrt{q^2B^2-qmk}}\ldots(10)$

$\therefore:\ y=\dfrac{m(qBv-qE_0)}{q^2B^2-qmk}(\cos\dfrac{\sqrt{q^2B^2-qmk}}{m}t-1)\ldots(11)$

当$\dfrac{(q^2B^2-qmk)}{m^2}=0$时：$\dfrac{d}{dt}\bullet\dfrac{d}{dt}\dot{y}=0\ldots(12)$, 所以粒子不在$y$方向运动

当$\frac{(q^2B^2-qmk)}{m^2}<0$时：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{y}=\frac{(qmk-q^2B^2)}{m^2}\dot{y}$...(5)

可设：$\dot{y}=Ce^{Dt}+Ee^{Ft}$...(13)，C、D、E、F是常数

∴：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{y}=CD^2e^{Dt}+EF^2e^{Ft}$...(14)

∴：$D^2=F^2=\frac{(qmk-q^2B^2)}{m^2}$...(15)

$$\dot{y}\text{有三种情况：}\begin{cases}(a)\ \dot{y}=Ce^{\frac{\sqrt{qmk-q^2B^2}}{m}t}+Ee^{-\frac{\sqrt{qmk-q^2B^2}}{m}t}\\(b)\ \dot{y}=(C+E)e^{\frac{\sqrt{qmk-q^2B^2}}{m}t}\\(c)\ \dot{y}=(C+E)e^{-\frac{\sqrt{qmk-q^2B^2}}{m}t}\end{cases}\ldots(17)$$

把$t=0$代入(17)：$C+E=0$...(18)

所以最后留下的是$\dot{y}=Ce^{\frac{\sqrt{qmk-q^2B^2}}{m}t}-Ce^{-\frac{\sqrt{qmk-q^2B^2}}{m}t}$...(19)

代入(3)：$\dot{x}=\frac{2\sqrt{qmk-q^2B^2}}{qB}Ce^{\frac{\sqrt{qmk-q^2B^2}}{m}t}+\frac{E_0+ky}{B}$...(20)

∴：$C=\frac{qBv-qE_0}{2\sqrt{qmk-q^2B^2}}$...(21)

∴：$\dot{y}=\frac{qBv-qE_0}{2\sqrt{qmk-q^2B^2}}e^{\frac{\sqrt{qmk-q^2B^2}}{m}t}-\frac{qBv-qE_0}{2\sqrt{qmk-q^2B^2}}e^{-\frac{\sqrt{qmk-q^2B^2}}{m}t}$...(22)

∴：$y=\frac{(qBv-qE_0)m}{2(qmk-q^2B^2)}(e^{\frac{\sqrt{qmk-q^2B^2}}{m}t}-2+e^{-\frac{\sqrt{qmk-q^2B^2}}{m}t})$

$=;\frac{(qBv-qE_0)m}{2(qmk-q^2B^2)}(e^{\frac{\sqrt{qmk-q^2B^2}}{2m}t}-e^{-\frac{\sqrt{qmk-q^2B^2}}{2m}t})^2$...(23)

题四.

（1）电偶极子的等效电流元大小

$$Idl=\frac{dQ}{dt}dl=\frac{dp}{dt}=\omega p_0\cos\omega t$$

（2）(r,θ,φ)处的磁场为

$$\vec{B}_{wave}=\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{-\omega^2 p_0\sin(\omega t-kr)\sin\theta}{r}\vec{e}_\varphi\text{，其中}k\equiv\frac{\omega}{c}$$

（3）当r足够大时，电场只有θ方向分量是显著的。由法拉第电磁感应定律得

$$(E_\theta+dE_\theta)(r+dr)d\theta-E_\theta rd\theta=-\frac{\partial B_{wave}}{\partial t}\cdot dr\cdot rd\theta$$

略去高阶小量得

$$\frac{dE_\theta}{dr}+\frac{E_\theta}{r}=-\frac{\partial B_{wave}}{\partial t}$$

猜解，令

$$E_\theta=\frac{A}{r}\sin(\omega t-kr)$$

代入上式求得

$$A=-\frac{\mu_0}{4\pi}\omega^2 p_0\sin\theta$$

所以

$$E_\theta=-\frac{\mu_0}{4\pi r}\omega^2 p_0\sin\theta\sin(\omega t-kr)=-E_0\sin\theta\cdot\sin(\omega t-kr)$$

（4）在此处给一微扰后，小环的位置可以写为

$$\theta=\theta_1+\tilde{\theta}$$

其中，θ_1为平稳项，$\tilde{\theta}$为快速振动项。

写下小环的动力学方程

$$mr\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\tilde{\theta}}\right)=qE_\theta+mg\left(\theta_1+\tilde{\theta}\right)$$

代入E_θ的表达式后，对上式进行长时间尺度、短时间尺度分离，得

$$mr\ddot{\tilde{\theta}}=-qE_0\sin(\omega t-kr)\cdot(\theta_1)$$

$$mr\ddot{\theta}_1=-qE_0\sin(\omega t-kr)\tilde{\theta}+(mg)\cdot\theta_1$$

第一式积分两次后代入第二式，并对时间取$\sin^2(\omega t-kr)$的平均值得$\frac{1}{2}$，得

$$mr\ddot{\theta}_1=\left(mg-\frac{q^2E_0^2}{2m\omega^2 r}\right)\theta_1$$

为使此处为稳定平衡，需要满足

$$mg-\frac{q^2E_0^2}{2m\omega^2 r}<0$$

题五.

薄透镜成像公式:$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}$...(1), $\begin{cases} s\text{是匀质细杆}AB\text{上一点到薄透镜的距离} \\ s'\text{是像}AB\text{上一点到薄透镜的距离} \end{cases}$

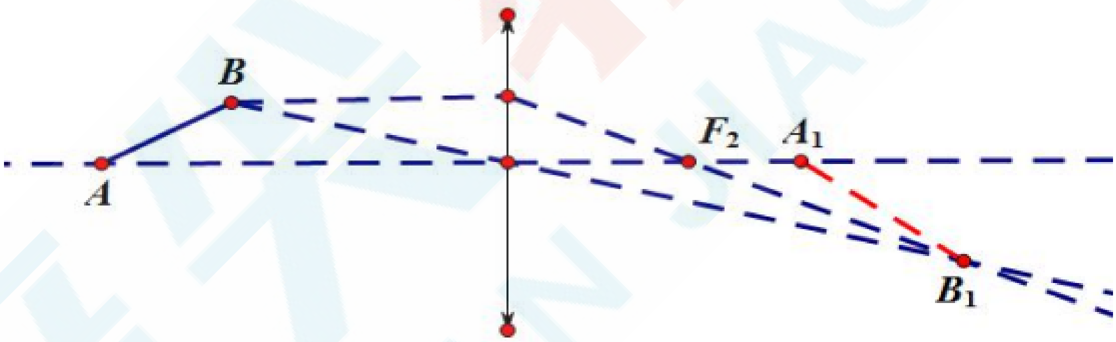
∴: $s'=\frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{s}}=\frac{fs}{s-f}$...(2)

∴: $\frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}s}=\frac{f(s-f)-fs}{(s-f)^2}=-\frac{f^2}{(s-f)^2}$...(3)

即：s越小s'越大,如图,问题一已秒杀

问题二：质量守恒$\lambda'|\mathrm{d}s'|=\lambda|\mathrm{d}s|$...(4)

∴: $\lambda'=\frac{f^2}{(s-f)^2}\lambda=\frac{f^2}{(\frac{fs'}{s'-f}-f)^2}\lambda=(s'-f)^2\lambda$...(5)



问题三：相似三角形:$\frac{y'}{s'}=\frac{y}{s}$...(6)

∴: $y'=\frac{s'}{s}y$...(7), 对(7)以微分:$\mathrm{d}y'=\frac{s\,\mathrm{d}s'-s'\,\mathrm{d}s}{s^2}y+\frac{s'}{s}\mathrm{d}y$

$$=\frac{-\frac{f^2s}{(s-f)^2}\mathrm{d}s-\frac{fs}{s-f}\mathrm{d}s}{s^2}y+\frac{\frac{fs}{s-f}}{s}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{fy}{(s-f)^2}\mathrm{d}s+\frac{f}{s-f}\mathrm{d}y\text{...(8)}$$

∴: $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}t}=-\frac{f^2}{(s-f)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}=\frac{f}{s-f}(-\frac{y}{s-f}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}) \end{cases}$...(9)

∴: $v'=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t})^2}=\frac{f}{s-f}\sqrt{(-\frac{f}{s-f}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^2+(-\frac{y}{s-f}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}$...(10)

上式就是像AB上任意一点的速度表达

把$\begin{cases}\dfrac{ds}{dt}=v\\ \dfrac{dy}{dt}=0\end{cases}$代入(10)：$v'=\dfrac{f\sqrt{f^2+y^2}}{(s-f)^2}v$...(11)

几何关系：$y=(u-s)\tan\theta$，∴：$v'=\dfrac{f\sqrt{f^2+(u-s)^2\tan^2\theta}}{(s-f)^2}v$...(12)

$$\therefore\frac{dv'}{ds}=\frac{\dfrac{f\cdot(-2\tan^2\theta\cdot s\,ds)}{\sqrt{f^2+(u-s)^2\tan^2\theta}}-f\sqrt{f^2+(u-s)^2\tan^2\theta}\cdot(2s\,ds)}{(s-f)^4}<0\text{...(13)}$$

当$s=u-L\cos\theta$时v'最大，得：$v'_{\max}=\dfrac{f\sqrt{f^2+L^2\sin^2\theta}}{(u-L\cos\theta-f)^2}v$...(14)

题六.

（1）由组合数学的知识$\Omega(N,x)=\dfrac{N!}{\left(\dfrac{N-x}{2}\right)!\left(\dfrac{N+x}{2}\right)!}$

（2）利用$n!\approx\sqrt{2\pi n}e^{n\ln n-n}$以及$\ln(1+x)\approx x-\dfrac{x^2}{2}$得$\Omega(N,x)\backsim\dfrac{2^N}{\sqrt{2\pi N}}e^{\frac{-x^2}{2N}}$

（3）三维分子链的情形$\Omega(x,y,z)\backsim\left(\dfrac{2^N}{\sqrt{2\pi N}}\right)^3e^{\frac{-(x^2+y^2+z^2)}{2NL^2}}$

系统的玻尔兹曼熵$S=3k\ln\dfrac{2^N}{\sqrt{2\pi N}}-\dfrac{kr^2}{2NL^2}$

（4）分子链上的拉力$\vec{f}=-\nabla F=-\dfrac{kT}{NL^2}\vec{r}$

题七.

（1）由能量守恒$r^2+t^2=1$，可令$t=\cos\gamma$，$r=\sin\gamma$

取散射波的相位差为δ，光经过原子后，新的波为散射波与透射波的叠加，复振幅可以表达为

$t+re^{i\delta}=\cos\gamma+\sin\gamma\cos\delta+i\sin\gamma\sin\delta$

介质中的光为平面波，经过原子前后振幅不变，有$1+\sin2\gamma\cos\delta=1$

考虑到散射振幅比由原子本身的性质决定，因此可得$\delta=\dfrac{\pi}{2}$

（2）分析可得$\dfrac{2\pi}{\lambda}=\dfrac{2\pi}{\lambda_0}+\dfrac{\gamma}{d}$，由此得到$n=1+\dfrac{\lambda_0\gamma}{2\pi d}$

（3）散射光向反方向传播由于叠加会抵消为零。