培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（六）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

1、解：（1）设偏转角为θ，则上板动能写为

$$E_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}ma^2\cdot\dot{\theta}^2$$

由余弦定理得弹簧伸长量x满足

$$x^2=\left(\sqrt{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-2\cdot\sqrt{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\cos\theta$$

取近似$\cos\theta\approx1-\frac{\theta^2}{2}$，则

$$x^2=\frac{1}{2}a^2+a^2\theta^2$$

则系统的势能

$$E_p=4\cdot\left(\frac{1}{2}kx^2\right)=ka^2+2ka^2\theta^2$$

由机械能守恒得

$$\frac{1}{12}ma^2\dot{\theta}^2+2ka^2\theta^2=\text{常量}$$

这是简谐振动的能量方程，因此可得振动周期

$$T_1=\pi\sqrt{\frac{m}{6k}}$$

（2）此种情况下，弹簧伸长量y满足

$$y^2=\left(\sqrt{\frac{1}{2}a^2+a^2\theta^2}-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\approx\frac{1}{2}a^2\theta^4$$

由机械能守恒得

$$\frac{1}{12}ma^2\dot{\theta}^2+ka^2\theta^4=ka^2\theta_0^4$$

解得

$$dt=\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{12k}{m}\left(\theta_0^4-\theta^4\right)}}$$

积分得振动周期

$$T_2 = 4\cdot\int_0^1 \frac{1}{\theta_0\sqrt{\frac{12k}{m}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^4}}d\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)\approx 1.513\sqrt{\frac{m}{k\theta_0^2}}$$

（3）类比资用能，系统的动能可写为

$$E_\mu = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{6}ma^2\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot 4m\cdot(2a)^2\right)}{\frac{1}{6}ma^2+\frac{1}{6}\cdot 4m\cdot(2a)^2}\cdot\dot{\theta}^2$$

（此种情况下的θ表示上板相对下板的偏转角，由角动量定理可推导证明上述类比成立）

而系统的势能表达式不变，对比观察上一问的结论可知只需将动能项分母上的12换为$\frac{17}{8}$即可得到本问的答案

$$T_3 \approx 3.595\sqrt{\frac{m}{k\theta_0^2}}$$

2、解：设在激光炮径向轰击之前轨道机械能为E_1，在激光炮径向轰击之后轨道机械能为E_2，激光炮使航天器获得的径向动量为p_r，由于轰击前后瞬间引力势能几乎没有变化，故由能量守恒定律得

$$E_2 - E_1 = \frac{p_r^2}{2m}$$

承认航天器静能mc^2远大于激光炮能量这一事实，设激光强度为J，由动量定理可得

$$p_r = \frac{2JS\tau}{c}$$

在轰击之后，设轨道半长轴为a、半短轴为b、通径为$2p$，轨道周期为t，则由开普勒第二定律可得轨道面积速率σ

$$\sigma = \frac{\pi ab}{t}$$

由开普勒第三定律可得

$$t = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}}$$

联立以上两式得

$$\sigma = \frac{\sqrt{GM}}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{a}}$$

再设轨道角动量为L（是守恒量），则

$$\sigma=\frac{L}{2m}$$

由以上两式可得

$$\frac{b^2}{a}=p=\frac{L^2}{GMm^2}$$

由角动量定理可知激光炮径向轰击不改变角动量，由上式可知通径保持不变，即

$$p=R+h$$

设航天器从被轰击之后瞬间到下一次与炮台、地球球心三点一线经过的时间为t'，则由数学知识可得

$$t'=\frac{\pi ab-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{(1+e\cos\theta)^2}d\theta}{\pi ab}\cdot t$$

$$e=\frac{1}{2}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

由题意得

$$t'=\frac{T}{2}$$

由天体物理知识可知

$$E_2=-\frac{GMm}{2a}$$

$$E_1=-\frac{GMm}{2(R+h)}$$

联立解得

$$J=\frac{c}{S\tau}\sqrt{\frac{GMm^2}{4(R+h)}-\frac{GMm^2}{4\left(\frac{T\sqrt{GM}}{10.11}\right)^{\frac{2}{3}}}}$$

3、解：（1）设圆盘圆心向右的平动速度为v，圆盘转动角速度为ω，因为地面足够粗糙，故圆盘作纯滚动，有

$$v=\omega r$$

滑轮固连在圆盘上，它合速度的水平向右分量即为v，竖直向下分量即为ωr

滑轮速度沿上方绳向里的分速度造成上方绳长度的缩短、沿下方绳向里的分速度造成下方绳长度的缩短，这两部分绳总的缩短速度应为人的收绳速度v_0，即有

$$v\frac{\sqrt{3}}{2}-\omega r\frac{1}{2}+v\frac{\sqrt{3}}{2}+\omega r\frac{1}{2}=v_0$$

联立解得

$$\omega=\frac{\sqrt{3}v_0}{3r}$$

（2）设圆盘圆心向右的平动加速度为a，圆盘转动角加速度为β，由纯滚动条件有

$$a=\beta r$$

滑轮合加速度的水平向右分量即为$a-\omega^2 r$，竖直向下分量即为βr

滑轮加速度沿上方绳向里的分量扣除掉绕墙顶转动的向心加速度造成上方绳长度的加速缩短、沿下方绳向里的分量扣除掉绕墙底转动的向心加速度造成下方绳长度的加速缩短，这两部分绳总的缩短加速度应为人的收绳加速度a_0，即有

$$a\frac{\sqrt{3}}{2}-\omega^2 r\frac{\sqrt{3}}{2}-\beta r\frac{1}{2}-\frac{\left(v\frac{1}{2}+\omega r\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2r}+a\frac{\sqrt{3}}{2}-\omega^2 r\frac{\sqrt{3}}{2}+\beta r\frac{1}{2}-\frac{\left(\omega r\frac{\sqrt{3}}{2}-v\frac{1}{2}\right)^2}{2r}=a_0$$

联立解得

$$a=\frac{\sqrt{3}}{3}a_0+\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)v_0^2}{9r}、\ \beta=\frac{\sqrt{3}a_0}{3r}+\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)v_0^2}{9r^2}$$

设圆盘与地面之间的摩擦力大小为f，对圆盘由角动量定理得

$$fr=\frac{1}{2}mr^2\beta$$

解得

$$f=\frac{\sqrt{3}}{6}ma_0+\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)mv_0^2}{18r}$$

（3）设绳子上的张力大小为T，对圆盘由牛顿第二定律得

$$\sqrt{3}T-f=ma$$

解得

$$T=\frac{1}{2}ma_0+\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)v_0^2}{6r}$$

4、解：若F为物方焦点，设透镜光心与S_1之间的距离为u_1，由高斯成像公式得

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{a-u_1}=\frac{1}{u_1-b}$$

解得

$u_1=\sqrt{ab}$

可求出透镜焦距 f_1

$f_1=u_1-b=\sqrt{ab}-b$

以下不等式成立，u_1才是可能的

$b<u_1<a$
$u_1>f_1$
$u_1+f_1<a$

经检验可知以上不等式成立，所以透镜光心的一个可能的位置与 S_1 之间的距离为 $\sqrt{ab}$

若 F 为像方焦点，设透镜光心与 S_1 之间的距离为 u_2，由高斯成像公式得

$$\frac{1}{u_2}+\frac{1}{a-u_2}=\frac{1}{b-u_2}$$

解得

$u_2=a-\sqrt{a^2-ab}$

同理需检验 u_2 的可能性，经检验可知 u_2 是可能的，所以透镜光心的另一个可能的位置与 S_1 之间的距离为 $a-\sqrt{a^2-ab}$

5、解：（1）设初态左边腔室的体积为 V_0，气体压强为 P_0，在推动活塞的过程中某一时刻的气体压强为 P，此时左边腔室的体积为 V，因为活塞是重的，故推动活塞过程是准静态可逆的，气体满足绝热方程

$$PV^{\gamma}=P_0V_0^{\gamma}$$

设最终重活塞获得的动能为 E_k，由动能定理可得

$$E_k=\int_{V_0}^{kV_0}PdV$$

由能均分定理知

$$\gamma=\frac{5}{3}$$

活塞撞壁后气体经历定容吸热过程，设热量为 Q、温度为 T，由热力学第一定律得

$$dQ=nC_VdT$$

其中$C_V=\frac{3}{2}R$是定体摩尔热容量

设开始吸热前瞬间气体温度为T_1，吸热完成后瞬间气体温度为T_2，气体熵变为ΔS，则

$$\Delta S=\int_{T_1}^{T_2}\frac{dQ}{T}=\int_{T_1}^{T_2}\frac{nC_V dT}{T}=\frac{3}{2}nR\cdot\ln\frac{T_2}{T_1}$$

由绝热方程可得

$$T_0V_0^{\gamma-1}=T_1\left(kV_0\right)^{\gamma-1}$$

由热力学第一定律可得

$$\eta E_k=nC_V\left(T_2-T_1\right)$$

联立解得

$$\Delta S=nR\left(\ln k+\frac{3}{2}\ln\left(1-\eta+\eta k^{-\frac{2}{3}}\right)\right)$$

6、解：设导体棒速度为v，通过导体棒的电流为i_1，电介质中的传导电流为i_2，电容器极板上的电荷量为q，由牛顿第二定律、基尔霍夫定律、电荷守恒定律、电阻定律、电介质中的高斯定理可得

$$m\frac{dv}{dt}=-kv-Bi_1L$$

$$BLv=i_2\frac{h}{\sigma\pi r^2}$$

$$BLv=\frac{qh}{\varepsilon\pi r^2}$$

$$i_1=i_2+\frac{dq}{dt}$$

第二式解出i_2代入第四式，第三式对时间求导后解出$\frac{dq}{dt}$代入第四式，再将第四式i_1代入第一式得到微分方程

$$\left(m+\frac{B^2L^2\varepsilon\pi r^2}{h}\right)\frac{dv}{dt}=-\left(k+\frac{B^2L^2\sigma\pi r^2}{h}\right)v$$

记

$$\alpha=\left(m+\frac{B^2L^2\varepsilon\pi r^2}{h}\right)$$

$$\beta=\left(k+\frac{B^2L^2\sigma\pi r^2}{h}\right)$$

方程两边同乘以 dt 后积分得

$$v = v_0 - \frac{\beta}{\alpha}x$$

此微分方程表征的运动是线性阻尼运动，解之得

$$v = v_0 e^{-\frac{\beta}{\alpha}t}$$

7、解：以圆柱轴线为 x 轴、垂直于轴线为 y 轴建立直角坐标系，忽略边缘效应，由静磁场的比奥萨法尔定律得圆柱内部的磁场分布式

$$B = \frac{\mu_0 jy}{2} \quad ①$$

研究某个从点 $(0, y_0)$ 处入射的粒子的运动轨迹，由 x 方向动量定理得

$$\frac{dp_x}{dt} = q\cdot\frac{dy}{dt}\cdot B = \frac{q\mu_0 jy}{2}\cdot\frac{dy}{dt} \quad ②$$

积分得

$$p_x - p_0 = \frac{q\mu_0 j}{4}\left(y^2 - y_0^2\right) \quad ③$$

洛伦兹力不做功，由动能守恒得

$$p_x^2 + p_y^2 = p_0^2 \quad ④$$

保留至首阶非零项，得到

$$p_y \approx -\sqrt{\frac{q\mu_0 jp_0}{2}\left(y_0^2 - y^2\right)} \quad ⑤$$

$$p_x \approx p_0 \quad ⑥$$

由此得粒子的运动轨迹满足的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p_y}{p_x} = \frac{-\sqrt{\frac{q\mu_0 jp_0}{2}\left(y_0^2 - y^2\right)}}{p_0} \quad ⑦$$

解此微分方程，得

$$y = y_0\cos\left(\sqrt{\frac{q\mu_0 j}{2p_0}}x\right) \quad ⑧$$

这表明粒子的运动轨迹是一条余弦曲线，不难判断，所有粒子将发生聚焦，焦距为

$$f = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\sqrt{\frac{p_0}{q\mu_0 j}} \quad ⑨$$

8、解：（1）设二者最小距离为 r_1，距离最小时 α 粒子的速度大小为 v_1，由角动量守恒得

$$\frac{mv_0b}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}=\frac{mv_1r_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}$$

由能量守恒得

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r_1}$$

记

$$A=\frac{Q^2q^2\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)}{16\pi^2\varepsilon_0^2v_0^2b^2}+\frac{m^2c^2}{1-\frac{v_0^2}{c^2}}$$

$$B=\frac{mc^2Qq\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}{2\pi\varepsilon_0v_0b}$$

$$C=m^2c^4\left(1-\frac{1}{1-\frac{v_0^2}{c^2}}\right)$$

联立得

$$Av_1^2+Bv_1+C=0$$

解得

$$v_1=\frac{\sqrt{B^2-4AC}-B}{2A}$$

从而解得

$$r_1=\frac{v_0}{v_1}\sqrt{\frac{c^2-v_1^2}{c^2-v_0^2}}\cdot b$$

（1）设在质心系中看二者最小距离为r_2'，在实验室系中看二者最小距离为r_2，则由四维动量模方不变得

$$\left(\frac{E_0+Mc^2}{c}\right)^2-p_0^2=\left(\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r_2'}+(m+M)c^2}{c}\right)-0$$

$$p_0^2=E_0^2-(mc^2)^2$$

由尺缩效应得

$$r_2 = r_2'\sqrt{1-\beta^2}$$

由四维动量的洛伦兹变换得

$$\beta = \frac{p_0 c}{E_0 + Mc^2}$$

解得

$$r_2 = \frac{Qq\sqrt{1-\dfrac{E_0^2 - m^2c^4}{\left(E_0 + Mc^2\right)^2}}}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{2E_0Mc^2 + \left(m^2 + M^2\right)c^4} - (m+M)c^2\right)}$$