培尖教育 2018 年物理高端 VIP 班模拟测试卷（二）

考试时间 180 分钟，试卷满分 320 分

题一.（40 分）

孤立空间中有一对固定的等量异号点电荷+q、-q，二者相距 2a。以二者连线中点为原点，由+q 指向-q 为 x 轴正方向建立平面直角坐标系 xoy。已知真空介电常数。

（1）求从+q 沿 y 轴正方向出发的电场线打到 y 轴上的坐标。

（2）将库仑定律由平方反比改写为一次方反比（真空介电常数自动调整量纲，$4\pi\varepsilon_0 \to 2\pi\varepsilon_0$），重新求解从+q 沿 y 轴正方向出发的电场线打到 y 轴上的坐标。

（3）将库仑定律由平方反比改写为三次方反比（真空介电常数自动调整量纲，$4\pi\varepsilon_0 \to 2\pi^2\varepsilon_0$），重新求解从+q 沿 y 轴正方向出发的电场线打到 y 轴上的坐标。

要求在求解（3）时用到该积分公式：

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\left(\arctan x - \frac{x}{1+x^2}\right) + const$$

题二.（40 分）

一根半径为 R、长度为 L、质量为 m、电荷体密度处处为 ρ 的匀质绝缘圆柱。L 远大于 R 以至于可忽略磁场边缘效应。不计电磁辐射，只考虑服从 Maxwell 方程组的感生电场造成的阻尼。将此圆柱横置于倾角为 θ 的固定粗糙斜面上，发现圆柱做纯滚动，某时刻角速度为 ω。已知重力加速度 g，求摩擦系数的最小值。

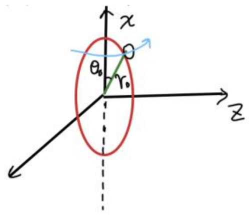
题三.（40 分）

已知真空中的光速 c，考虑狭义相对论。惯性参考系 S' 中有一只以速度 $v=\beta c$ 向 y' 轴正方向匀速平动的半径为 r 的圆盘型猪。另一惯性参考系 S 相对 S' 以速度 $v=\beta c$ 向 x 轴负方向匀速移动。时间 $t=t'=0$ 刻，两参考系坐标架严格对齐，观察者眼中猪的中心恰好位于坐标原点处。观察者静止于 S 系 y 轴负半轴上非常远处，考虑视觉效应（Terell 旋进），求 $t=0$ 刻观察者眼中（或者说大脑认为的）猪的形状（求出边界曲线的方程即可）。

题四.（40 分）

自由无重力空间中，有一个质量为 m 的匀质刚性椭球，其中心被锁定。以椭球中心为坐标原点建立直角坐标系，则椭球表面方程写为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$。一只质量也为 m 的薛定谔的猫（视为质点）位于椭球表面到中心距离为 r_0 处。若猫相对椭球保持几何位形不变地缓慢跑动一圈后椭球恢复到初始状态，求 a、b、r_0 应满足的关系条件。

提示：$\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$



题五.（40 分）

（1） 试从微观角度简单地导出理想气体的压强公式。并依此证明极端相对论性理想气体（即粒子$v=c$，$m_{静}=0$）的压强可表示为$p_R=\frac{1}{3}n\varepsilon_k=\frac{1}{3}\bar{u}$。$\bar{u}$为能量密度。

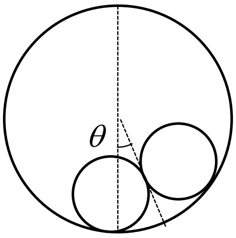
（2） 考虑理想光子气，已知辐射体内的能量密度$\bar{u}=\frac{4\sigma}{c}T^4$。将$\frac{4\sigma}{c}$记为 a。现使其经历一循环如图。

i.求 A 到 B 的熵变ΔS;（用 a，p_0，V_0表示）

ii.求该过程的效率η。

题六.（40 分）

一个半径为$3r$的固定圆柱里面有两个质量分别为m和$1.5m$的均匀圆柱（轻的在左，重的在右），半径均为r，小圆柱之间，大小圆柱之间的摩擦系数均为0.6。求两个圆柱的交点和大圆柱之间的连线和竖直的夹角θ，向左向右分别最大能偏转多少。左右最大偏角的绝对值分别记为θ_L和θ_R



题七.（40 分）

虽然太阳的热辐射是沿径向呈球对称分布的，但由于狭义相对论效应导致的光行差，太空颗粒在其自身参考系中接收到的光压并不沿径向，而是存在切向（与运动方向相反）分量，造成阻力，使轨道下降，此即所谓的“坡印亭-罗伯森效应”。

（1）试从宇宙参考系的角度解释“坡印亭-罗伯森效应”。

（2）设颗粒材料为银、半径为r、质量为m，太阳光度恒定为L，真空中的光速为c，万有引力常量为G，太阳质量为M。颗粒初态绕太阳做半径为R_0的匀速圆周运动，阻力极弱以至于在一个周期内几乎观察不出轨道的变化，求轨道半径降至初态的一半所经过时间。

题八.（40 分）

塞曼发现钠光 D 线在磁场中分裂为 3 条，洛伦兹对此做出了解释，他们因此荣获 1902 年诺贝尔物理学奖。假定原子中的价电子（质量为m、电量为$-e$）受到一指向原子中心的等效线性回复力

$$\vec{f}=-m\omega_0^2\vec{r}$$

现再加一垂直于纸面（电子运动平面）向外的匀强磁场

$$\vec{B}=\frac{2m}{e}\vec{\omega}_L$$

（1）以原子中心为坐标原点建立平面直角坐标架，写下电子x,y方向的动力学方程。

（2）引入复数坐标$\tilde{z}=x+iy$，导出$\tilde{z}$的阻尼振动微分方程。

（3）求出分裂光谱线的波长，并对弱场近似（$\frac{\omega_L}{\omega_0}$远小于 1）求相对谱展宽。