

培尖教育 2018 年杭州校区高端物理 VIP 班

模拟测试卷（三）

一、8 个点电荷带电均为 q ，质量 m ，作为一个半径为 R 的球面的内接正方体的顶点分布于球面上。将其中 7 个固定，令剩下 1 个可在球面上自由滑动，问平衡是稳定的吗？如果是，求这一个电荷小振动周期。（没有重力，注意题目没有指定振动方向，所以不能自己作假定）。如果不是，那么正二十面体呢？（只需要回答是或不是，不用计算周期）？

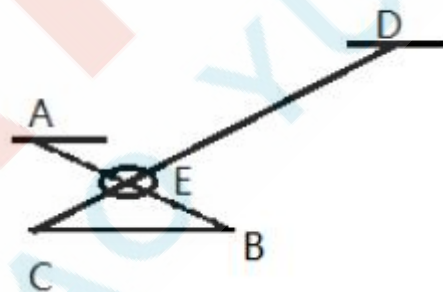
二、当一个系统的约束较多时，牛顿动力学方程并不是最好的选择。现介绍一种方法。将只有一个自由度（因此系统的位形可以用一个变量 q 表示）的保守系统从静止释放，系统将存在能量守恒。在释放后足够短的时间内，可以认为

$$q = q(0) + \dot{q}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{q}(0)t^2.$$
应用能量守恒即可解出 $\ddot{q}(0)$ ，

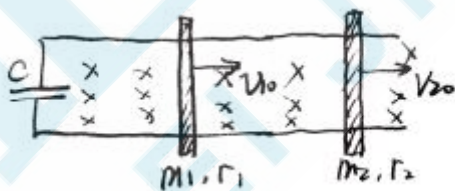
进而求得系统各部分的加速度。现用此方法求解下面的问题：

如图，AB，BC，CD 为 3 根质量线密度 λ 的杆，ABCD 处均为铰链，纸面为竖直面。且 C 在 A 正下方 h 处，

角 $ABC = \text{角} BCD = 30^\circ$ ， $CD = 2AB$ ，在 AB，CD 杆的交叉点处套了一个光滑的小环 E，E 的质量 $m = \lambda h$ ，现将系统从静止释放，求这一瞬间 E 的加速度的大小。



三、如图，导轨平面内有垂直纸面向里的匀强磁场 B ，两根导体棒，质量 m_1 ， m_2 ，电阻为 r_1 ， r_2 ，忽略一切自感、互感、摩擦，电容大小为 C 初始状态电容极板上无净电荷，两根导体棒初始速度为 v_{10} ， v_{20} ，假设二棒在之后的运动中不会发生碰撞，求经过足够长时间后两根棒各自的速度。如果两根棒全过程中相对位移为有限值，请求出这个值，若为无限，请证明。



四、强等效原理给出了物体万有引力质量与其惯性质量的关系。强等效原理认为，在外有引力的公式与牛顿第二定律的数学表达中， m 为同一参量，即：惯性质量=引力质量。

本题考虑能量较小的光子。已知万有引力常量 G ，普朗克常数 h ，真空中的光速 c 。考虑到引力对频率的影响较小，为使答案形式统一，在考虑从引力场中向宇宙空间传播的光的频率的变化时，认为光的质量几乎不变，保持出发时的质量。而对于向引力场内传播的光，计算结果应与前一种情况相容。

(1) 在质量为 M ，半径为 R 的星球上

(1-1) 一束频率为 ν 的光从星球表面向上发射，求这束光在距星球表面高 h 处的频率；

(1-2) 一束频率为 ν 的光从星球表面发射，沿如下两种路径最后回到出射点：

- i. 竖直向上，在距地面高 πR 处被平面反射镜反射，回到出射点
- ii. 沿地平线发射，并经由某一管道沿地表最大圆周回到出射点

大气介质折射率均为 1，求沿两种路径的两束光回到出射点时的相位差。

(2) 太阳的电磁波频谱中有一些列类似于氢原子的谱线，这些谱线相对于地球上的氢原子谱线存在整体上的位移。若地球上的氢原子以速度 v 向太阳运动时，对这些谱线有最大的吸收率，求太阳的质量（结果不要对 $\frac{v}{c}$ 近似）。已知太阳半径 R ，日地距离 s ，太阳的引力势的绝对值远大于地球引力势的绝对值。

五、雷达的工作原理是由发射机发出电磁波信号，然后由接收机接收目标发射的信号，根据信号的时间差来判断目标的距离。由于发射的信号在空间中有一个狭窄的分布形成波束，只有当波束扫描到目标所在的方位时才会有信号被反射回来，据此可判断目标方位（真实的雷达不是这么测向的）。

为了使波束的角分布尽量小，需要使用多根天线干涉（阵列）。如图，定义半功率角宽度 β 为发出的波束功率降为一半时的两个角度的差，主瓣是用于探测目标的波束，旁瓣是由于天线干涉无法完全让功率分布在所需方向而产生的（真实旁瓣的图样不一定相同）。仅考虑二维平面上的观测。

现有 4 根天线排成一行，间距 d ，发出的信号波长 λ ，且振幅、相位均相同。

(1) 在 $d = 1.2\lambda$ 的情况下，以垂直于天线阵列的方向为 $\theta = 0$ ，试定性作出 $P-\theta$ 图（即无需标注各极大极小的具体角位置）。

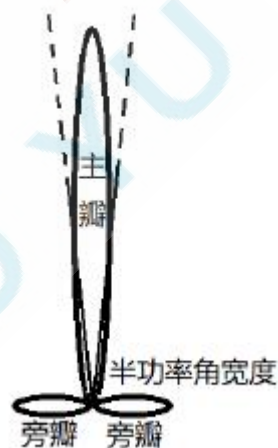
(2) 在某几个角位置处有很大的旁瓣（ $\theta = 0$ 的方向大致面对目标，为主瓣。所指的旁瓣与主瓣大小相近），为使这些旁瓣的强度为 0 而又需要主瓣的半

功率角宽度尽量小， $m = \frac{d}{\lambda}$ 应不能超过 m_0 。求 m_0 （提示： $0.7 < m_0 < 0.8$ ）。

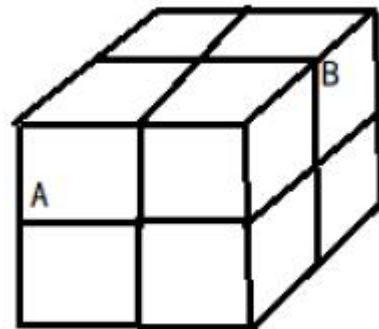
(3) 以 m_0 排列的天线， $\theta = \pi$ 处为后方，可以不需要考虑后方干扰源的影响。求此时的 β （用弧度表示，3 位有效数字）

(4) 真实的雷达是通过测量回波信号的强度（功率）来判断方位的。当往某个方向探测时，转动雷达的天线，则返回的信号达到最大值时天线即指向目标的方向。如果雷达能分辨的最小的信号

（功率）的变化量为 $\delta P_m ax, \delta \ll 1$ ，即如果返回的信号强度大于 $(1-\delta)P_m ax$ ，雷达会认为信号强度为 $P_m ax$ 至 $(1-\delta)P_m ax$ 之间的一个随机值， $P_m ax$ 为返回的信号的最大值，求目标角位置的可能最大误差。

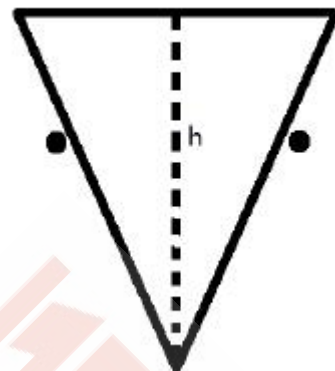


六、如图，一个由电阻丝构成棱边的空心正方体，等长的线电阻均为 r 。求 AB 两点间的等效电阻。



七、空间中有两根光滑细杆，它们被水平地平行放置，相距 d 。

一个截面为等腰三角形的三棱柱，高 h 足够大，半定角 β ，被架在两根细杆之间。



(1) 什么条件下三棱柱能稳定平衡在高保持竖直的位形？

(2) 求三棱柱小振动周期。

八、某种介质的折射率分布为 $n = \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}$ (极坐标). 一束光从 $r = 2a$ 处沿 \vec{e}_θ 方向射出，求

这束光的轨迹。