培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（七）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

一、　1.设小球、大球的加速度分别为a_1,a_2，细杆的角加速度为β

列出动力学方程

$$mg-N_1\sin 30=ma_1$$

$$N_1\cos 30-N_2\sin 30=4ma_2$$

$$N_2\cdot 2\sqrt{3}r-3mg\cdot 2r\sin 30=\frac{1}{3}\cdot 3m(4r)^2\beta$$

列出加速度关系：法向加速度相同

$$a_1\sin 30=a_2\cos 30$$

$$2\sqrt{3}r\beta=a_2\cos 30$$

联立以上五式，解得

$$a_1=\frac{9\sqrt{3}g}{4(7\sqrt{3}+1)}\qquad a_2=\frac{9g}{4(7\sqrt{3}+1)}\qquad \beta=\frac{9g}{16(7\sqrt{3}+1)r}$$

2.据法向速度相同

$$v_2\cos 30=v_0\sin 30\qquad v_2=v_0\tan 30$$

取小球为系，则大球以$v'=v_0/\cos 30$绕小球旋转，故

$$a_n=\frac{v^2}{3r}=\frac{4v_0^{\ 2}}{9r}$$

a_n为a_2在法向的投影，$\therefore a_2=a_n/\cos 30=\dfrac{8\sqrt{3}v^2}{27r}$

杆的角速度　$2\sqrt{3}\omega r=v_2\cos 30\qquad \omega=\dfrac{\sqrt{3}v_0}{12r}$

据加速度关联可得$a_c=-a_2\cos 30-\dfrac{v_3^{\ 2}}{2r}$，其中$v_3=\dfrac{1}{2}v_2$为杆相对球的切向速度

以 A 点为原点写出 C 点加速度的极坐标表达式$a_c=2\dot{l}\dot{\theta}+l\ddot{\theta}$

AC=AB，故$\dot{l}=-v_2$

联立⑽⑾两式可得$\beta=-\dfrac{23\sqrt{3}v^2}{432r^2}$

改写⑴式为$F+N_1\sin 30=mg$

联立⑵⑶⒀式可得

$$F=\frac{3}{4}mg+\left(\frac{32}{27}+\frac{23\sqrt{3}}{324}\right)\frac{mv_0^{\ 2}}{r}$$

二、　显然$kv_0^{\ 2}=0.44mg$

运用动能定理，上升过程中

$$-kv^2dy-mgdy=d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$-(kv^2+mg)dy = mvdv$

$-dy = \dfrac{mvdv}{kv^2+mg}$

积分得 $\ln\dfrac{mg}{kv^2+mg} = -\dfrac{2k}{m}H$

代入数据得 $H = \dfrac{m}{k}\ln\dfrac{6}{5}$

下落过程中

$-kv^2dy + mgdy = mvdv$（两次 y 的方向取得相反）

$dy = \dfrac{mvdv}{mg-kv^2}$

积分，得 $-\dfrac{2k}{m}H = \ln\dfrac{mg-kv^2}{mg}$

得 $v = \sqrt{\dfrac{11mg}{36k}}$

三、　　1.设下滑 x 时，对整体分析，列出 $F = \dfrac{dp}{dt}$

$$(m+\lambda x)g\sin\theta = \frac{d(m+\lambda x)v}{dt} = \frac{d(m+\lambda x)v}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$(m+\lambda x)^2 g\sin\theta dx = \dfrac{1}{2}d\left[(m+\lambda x)v\right]^2$

积分得 $\dfrac{g\sin\theta}{3\lambda}\left[(m+\lambda x)^3 - m^3\right] = \dfrac{1}{2}\left[(m+\lambda x)v\right]^2$

$v = \sqrt{\dfrac{2g\sin\theta\left[(m+\lambda x)^3-m^3\right]}{3\lambda(m+\lambda x)^2}}$

2.设绳子长为 l，则下降 x 时的质心位置为 $x_c = \dfrac{mx+\frac{1}{2}\lambda x^2}{m+\lambda l}$

对其求导，可得 $dx_c = \dfrac{m+\lambda x}{m+\lambda l}dx$

据质心运动定理，可得

$\int_0^x (m+\lambda x)g\sin\theta dx_c = \dfrac{1}{2}(m+\lambda l)(\dfrac{m+\lambda x}{m+\lambda l}v)^2$

代入式，得

$\int_0^x (m+\lambda x)^2 g\sin\theta dx = \dfrac{1}{2}(m+\lambda l)^2(\dfrac{m+\lambda x}{m+\lambda l}v)^2$

得 $v = \sqrt{\dfrac{2g\sin\theta\left[(m+\lambda x)^3-m^3\right]}{3\lambda(m+\lambda x)^2}}$

四、　　取管系研究，设 P_0 不变可得

$\dfrac{T}{V} = Const$　　$\dfrac{T_0+\Delta T}{V_0+\Delta V} = \dfrac{T_0}{V_0}$ 得 $T_0\Delta V = V_0\Delta T$ ………(1)

理想气体状态方程 $P_0V = \nu RT_0$ 其中 $V = vS\Delta t$ ………(2)

据功能原理 $\frac{5}{2}\nu R\Delta T=q\Delta t-P_0\Delta V$ ………(3)

(1)(3)联立得 $\frac{7}{2}P_0\Delta V=q\Delta t$ $\quad \frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{2q}{7P_0}$ $\quad \Delta v\cdot S=\frac{2q}{7P_0}$………(4)

代入(2)式得 $\Delta v=\dfrac{2qv\Delta t}{7\nu RT_0}$

$$\therefore m\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{2qv}{7\nu RT_0}\cdot\nu\mu=\frac{2qv\mu}{7RT_0}=\frac{\Delta P}{\Delta t}=M\frac{dv}{dt}$$

积分可得 $v=v_0e^{\frac{2q\mu}{7MRT_0}t}$

$$x=\frac{7MRT_0v_0}{2q\mu}\left(e^{\frac{2q\mu}{7MRT_0}t}-1\right)$$

五、　　1.旋转时，体电流密度为

六、　　$j=\rho v=\rho r(\omega_0+\beta t)$

在 r 处 B(r)可积分为为（运用无限长直螺线管公式）

$$B=\int_r^a\mu_0 ni=\int_r^a\mu_0 jrdr=\frac{1}{2}\rho\mu_0(\omega_0+\beta t)(a^2-r^2)$$

或直接运用

$$\nabla \times \xrightarrow[B]{} = \mu_0 \xrightarrow[j]{} \qquad -\frac{\partial B}{\partial r} = \mu_0 \rho(\omega_0 + \beta t) r$$

利用边界条件　　$r=a, B=0$

得 $B=\frac{1}{2}\rho\mu_0(\omega_0+\beta t)(a^2-r^2)$

综上 r<a 时 $B=\frac{1}{2}\rho\mu_0(\omega_0+\beta t)(a^2-r^2)$

r>a 时 $B=0$

2.据高斯定理　r<a 时

$$E_r=\frac{\rho\pi r^2 l}{\varepsilon_0 2\pi rl}=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

磁通量 $\varphi=\int_0^r B(r)2\pi rdr$

$$=\pi\rho\mu_0(\omega_0+\beta t)(\frac{1}{2}a^2r^2-\frac{r^4}{4})$$

$$E_\theta=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\div 2\pi r=-\frac{\rho\mu_0\beta}{8}(2a^2r-r^3)$$

r>a 时

$$E_r=\frac{\rho a^2}{2r}$$

$$E_\theta=\frac{\rho\mu_0\beta a^4}{8r}$$

3.外力矩为电磁力矩与使其加速的力矩之和

$$M_1=\frac{1}{2}Ma^2\beta$$

$$M_2=\int r\times F=\int_0^a r\cdot\frac{\rho\mu_0\beta}{8}(2a^2r-r^3)\rho 2\pi rldr$$

$$=\frac{\mu_0\rho^2\beta l\pi a^6}{12}$$

$$M=M_1+M_2=\frac{1}{2}Ma^2\beta+\frac{\mu_0\rho^2\beta l\pi a^6}{12}$$

六、 1.火星的运行速度为 $v_0=\sqrt{\frac{GM}{R}}$ ....(1)

无限远罗向太阳的彗星可视为能量为零，且垂直进入火星轨道

故 $v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$，相对速度为 $\sqrt{\frac{3GM}{R}}=\sqrt{3}v_0$ ....(2)

据引力弹弓效应，转换到原参考系可得

$v'=(\sqrt{3}-1)v_0$ ....(3)

据能量关系

$\frac{1}{2}mv'^2-\frac{GMm}{R}=-\frac{GMm}{2a}$ ....(4)

得 $a=\frac{\sqrt{3}+1}{4}R$ ....(5)

$\therefore r_1=2a-R=\frac{\sqrt{3}-1}{2}R$ ....(6)

2.角动量守恒

$v_1 r_1=(\sqrt{3}-1)v_0 R \qquad v_1=2v_0$ ....(7)

恰好圆周运动时 $v_2=\sqrt{\dfrac{GM}{r_1}}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)}v_0$ ....(8)

分裂过程中动量守恒

$m\cdot 2v_0=\dfrac{m}{2}v_2+\dfrac{m}{2}v_3 \qquad v_3=(4-\sqrt{\sqrt{3}+1})v_0$ ....(9)

据(4)式可得

$a=\dfrac{R}{8\sqrt{\sqrt{3}+1}+\sqrt{3}-15}$ ....(10)

七、　　先推导余弦型电荷分布在球内产生的场强，取球心分析

$\sigma_{(\theta)}=\sigma_0\cos\theta$

$dE=\dfrac{2\pi R\sin\theta R d\theta\cdot\sigma_{(\theta)}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta$ ....(1)

$E=\int_0^{\pi}dE=\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$ ....(2)

设内表面 $\sigma_{(\theta)}=\sigma_1\cos\theta$，外表面 $\sigma_{(\theta)}=\sigma_2\cos\theta$

则内表面电荷等效电偶极子为

$p=\dfrac{4}{3}\pi b^3\sigma_1 \qquad E_{(\theta)}=\dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ ....(3)

在外表面处研究

$E_{外}=\dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^3}+\dfrac{2\sigma_2}{3\varepsilon_0}\cos\theta+E_0\cos\theta$ ....(4)

$E_{内}=\dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^3}-\dfrac{\sigma_2}{3\varepsilon_0}\cos\theta+E_0\cos\theta$ ....(5)

据电位移连续，有 $\varepsilon_r E_{内}=\varepsilon_0 E_{外}$.........(6)

得 ε_r（$\dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^3}-\dfrac{\sigma_2}{3\varepsilon_0}\cos\theta+E_0\cos\theta$）$=\varepsilon_0$（$\dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^3}+\dfrac{2\sigma_2}{3\varepsilon_0}\cos\theta+E_0\cos\theta$）.........
(7)

在内表面处研究

$E'_{外}=\dfrac{2\sigma_2\cos\theta}{3\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_1\cos\theta}{3\varepsilon_0}+E_0\cos\theta$ ....(8)

$E'_{内}=-\dfrac{\sigma_2\cos\theta}{3\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_1\cos\theta}{3\varepsilon_0}+E_0\cos\theta$ ....(9)

据电位移连续，有 $\varepsilon_0 E_{内}=\varepsilon_r E_{外}$.........(10)

得 ε_0（$-\dfrac{\sigma_2\cos\theta}{3\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_1\cos\theta}{3\varepsilon_0}+E_0\cos\theta$）$=\varepsilon_r$（$\dfrac{2\sigma_2\cos\theta}{3\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma_1\cos\theta}{3\varepsilon_0}+E_0\cos\theta$）.........
(11)

(3)(7)(11)联立，解得

$$\sigma_1=-\frac{9\varepsilon_0 E_0 a^3(\varepsilon_r-1)}{a^3(\varepsilon_r+2)(2\varepsilon_r+1)-2b^3(\varepsilon_r-1)^2}$$

$$\sigma_2=\frac{3\varepsilon_0E_0(\varepsilon_r-1)\left[a^3(2\varepsilon_r+1)-2b^3(\varepsilon_r-1)\right]}{a^3(\varepsilon_r+2)(2\varepsilon_r+1)-2b^3(\varepsilon_r-1)^2}$$

题八：

$v_0=\sqrt{\dfrac{2E_0}{M}}$；因水平面方向受合外力为 0，所以分裂过程动量守恒。有

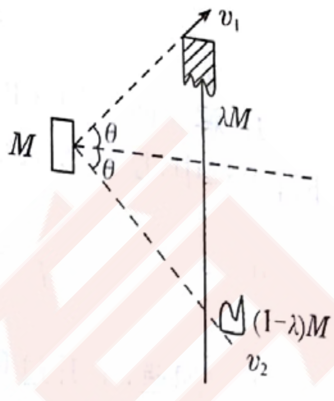

图 5-35

$$\begin{cases}Mv_0=\lambda Mv_1\cos\theta+(1-\lambda)Mv_2\cos\theta,\\ \lambda Mv_1\sin\theta=(1-\lambda)Mv_2\sin\theta.\end{cases}$$

得 $\begin{cases}v_0=[\lambda v_1+(1-\lambda)v_2]\cos\theta,\\ \lambda v_1=(1-\lambda)v_2.\end{cases}$

得 $v_1=\dfrac{v_0}{2\lambda\cos\theta}=\dfrac{\sec\theta}{2\lambda}\sqrt{\dfrac{2E_0}{M}}$，

$v_2=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}v_1=\dfrac{\sec\theta}{1-\lambda}\sqrt{\dfrac{E_0}{2M}}$.

(2) 分裂后两裂块的总能量

$$E=\frac{1}{2}\lambda Mv_1^2+\frac{1}{2}(1-\lambda)Mv_2^2=\frac{E_0}{4\lambda(1-\lambda)}\sec^2\theta.$$

内部机构提供的能量 $E'=E-E_0=E_0\left(\dfrac{\sec^2\theta}{4\lambda(1-\lambda)}-1\right)$.

求 E' 的极小值即求 $\lambda(1-\lambda)$ 的极大值，$\dfrac{d\lambda(1-\lambda)}{d\lambda}=0$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，因 $\left.\dfrac{d^2[\lambda(1-\lambda)]}{d\lambda^2}\right|_{1/2}=-2<0$.

表明 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，E' 有极小值，$E'_{\min}=E_0(\sec^2\theta-1)=E_0\tan^2\theta$.