培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（六）

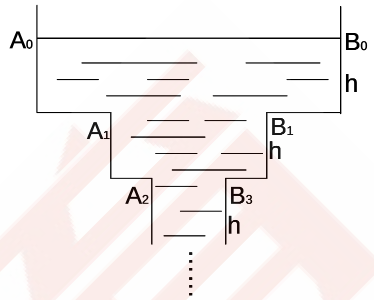
考试时间：150 分钟　 总分 320 分

（请在答题卷上作答）

学校：＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿ 学号：＿＿＿＿

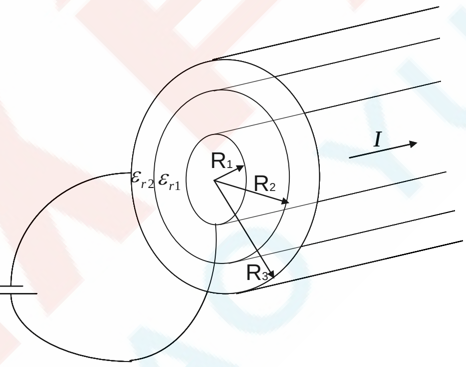
装　订　线

一、多级管道中的流体流动（29 分）



如图所示的容器由 k 个直柱形部分组成，竖立放置，A_0B_0 所在水平面截该容器所得的面积为 S_0，其下方 h 处的 A_1B_1 对应的截面积为 S_0 的一半，依此类推，每段的截面积都为上一段的一半。容器上下两端开口，起始时液面如图所示。已知液体可视为定常流动，重力加速度为 g，求初始时刻容器下端出口处的液体体积流量。

二、直流电缆中的电磁场（35 分）



如图所示，直流电缆很长，其中心为半径为 R_1 的柱形导体，接电源正极；外部为半径为 R_3 的柱面形导体，接电源负极，故在本题所讨论的范围内即可认为内柱体中电流方向如图所示。两导体之间存在两层电介质，交界面为同心柱面，半径为 R_2，内、外层介质的相对介电常数分别为 ε_{r1}，ε_{r2}（$\varepsilon_{r1}>\varepsilon_{r2}$）。已知两导体间电压为 V，电流为 I，真空介电常数为 ε_0，真空磁导率为 μ_0，两层电介质的相对磁导率均可视为 1，求：

（1）介质交界面处单位面积净电荷受到的电场力。

（2）直流电缆单位长度的电容和电感。

（3）电磁场的能流密度（又称坡印廷矢量）**S** 满足公式 $\mathbf{S}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$，其中 **E** 为所研究场点的电场强度，**B** 为该点的磁感应强度。求直流电缆中的能流表达式。

三、有心力场下天体运动的修正（41 分）

根据牛顿运动定律可以导出，星体在万有引力作用下绕认为不动的中心天体作稳定的圆锥曲线运动。可实际情况下由于其它物体的作用，星体的受力情况可能会稍有复杂。本题中不考虑外部天体的作用，认为行星除受到中心天体的万有引力外，还受到一个有心保守力的作用，且力心与万有引力相同。此情况下行星的势能表达式为：

$$V(r)=-\frac{GMm}{r}+\frac{\alpha}{r^k}$$

其中 α，k 均为未知参量且 k 为整数。已知行星的角动量为 L，质量为 m，中心天体的质量为 M，万有引力常量为 G，回答以下问题：

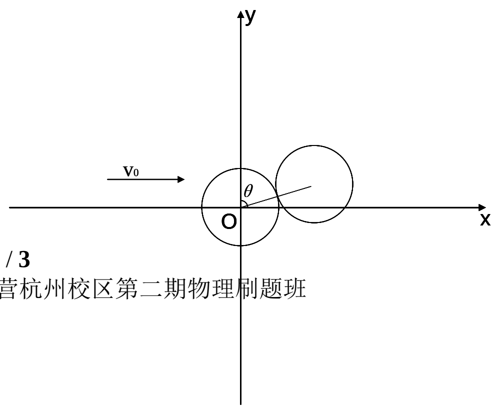
（1）k 取何值时，行星的运动可能为稳定的圆锥曲线运动？求 k 的取值和相应的圆锥曲线的半通径。

（2）k 取何值时，行星的运动可能为进动的椭圆运动？求 k 的取值和相应的一个进动周期内的进动角。

提示：圆锥曲线的半通径 p 在极点位于力心、极轴指向近点的极坐标系中满足 $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$，其中 e 为圆锥曲线的离心率。

四、刚体的二维碰撞（45 分）

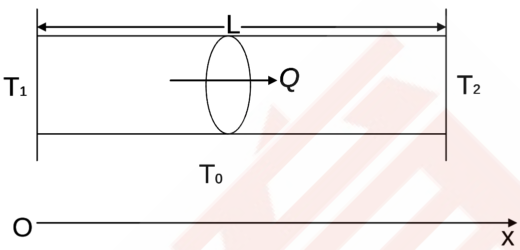
如图所示，有两个相同的质量为 m、半径为



R 的实心均匀球体在一粗糙水平面 xOy 上。球 A 以初速度 v_0 沿 x 轴正向纯滚动到达平面直角坐标系的原点时，恰好与静止的 B 发生碰撞。此时 A、B 连心线与 y 轴所夹锐角为 θ，假设碰撞是完全弹性的，且两球之间没有摩擦。已知水平面的动、静摩擦因数同为 μ，重力加速度为 g，求以 B 球达到纯滚动状态为计时起点，A 球球心的横坐标随时间变化的表达式。

五、固体的热传递问题（50 分）

如图所示，一根长度为 L，横截面半径为 R 的圆柱形热导体水平放置于两个恒温热源之间。两个热源的热力学温度分别为 T_1，T_2。以柱体左侧面上某点为原点，水平向右为正向建立一维坐标系 Ox。已知柱体的热导率 κ 随 x 变化，其函数关系为



$$\kappa(x)=\frac{\kappa_0}{L^2}(x+L)^2$$

其中 κ_0 为已知常量。已知周围环境温度恒为 T_0，且在此过程中柱体通过柱面与环境进行热交换。其导热速率满足以下公式：

$$\frac{\delta Q}{\delta t}=\beta S(T-T_0)$$

其中 $\beta=\frac{\kappa_0 R}{L^2}$，$S$ 为与环境的接触面积，T 为所研究柱体部位的热力学温度。又已知物体的密度为 ρ，比热容为 c，求：（第 2 问答案中不含 T_1）

（1）热传递达稳定态时，柱体的热力学温度随 x 分布的函数。

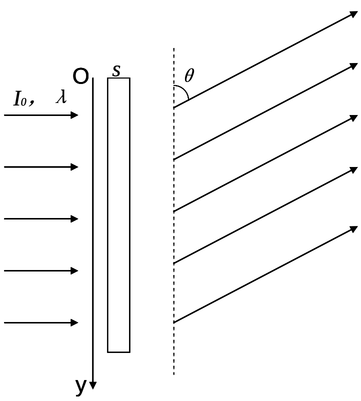
（2）假设 $T_1=\frac{T_0+T_2}{2}$，从初始状态（全柱体温度为 T_0）到稳定状态过程中柱体的熵变。

提示：①形如 $x^n\frac{d^n y}{dx^n}+p_1x^{n-1}\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}x\frac{dy}{dx}+p_n y=f(x)$（其中 p_1，p_2，…，p_n 为常系数）的微分方程叫作欧拉方程，这类方程的解法是令 $x=e^t$，代入原方程，即可得到 y 对 t 的常系数线性微分方程，可利用常规方法求解。

② $\int \ln x dx=x\ln x-x+C$

六、组合光栅（35 分）

如图所示，一光栅共有 N 条缝，缝宽为 a，相邻两条缝中心间距（光栅常数）为 d。在该光栅前平行放置一块薄介质板。介质板两侧面平行且与光栅距离很近，介质板厚度为 s，折射率不均匀。如果取其上端为坐标原点，建立向下的一维坐标系 Oy，则折射率满足



$$n(y)=n_0(1+\chi y)$$

现有一束平行单色光垂直入射介质板左侧面，波长为 λ。已知该光束在不经过任何光学元件前的光强为 I_0，求：

（1）该束光经过该组合元件后光强的角分布函数 $I(\theta)$。

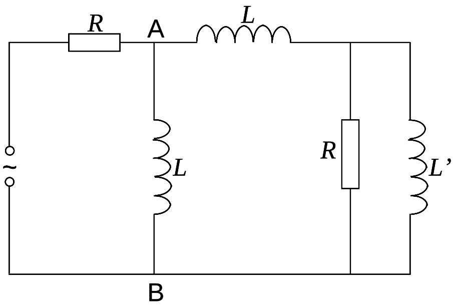
（2）存在一对一级暗条纹的条件及在满足该条件情形下一级暗条纹的角位置。

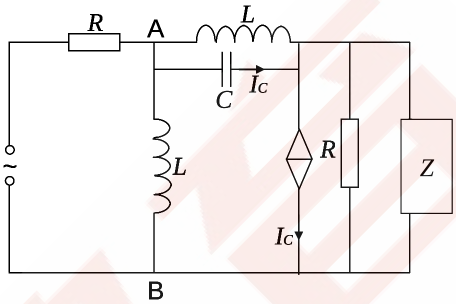
七、交流电路的阻抗设计（40 分）

如左图所示的交流电路中，左侧接入正弦交流电源，其电动势随时间变化的函数为 $E(t)=E_0\cos\omega t$，各元件参量按图中给出，不考虑一切互感效应。

（1）若右端接入一自感系数为 L' 的电感，求流经它的电流随时间变化的表达式。

（2）现将该电路作一调整，如右图所示，其中的菱形元件符号表示受控源。受控源是一种可以根据电路中其它部分的电学量强制输出某种电学量的元件，在电工学中有重要用途。图中的受控源输出的电流等于流经电容的电流，正方向如图所示。已知 $R=100\Omega$，$L=1\text{H}$，$C=100\mu\text{F}$，$E_0=100\text{V}$，$\omega=100\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$，右端接入某些电学元件串联、并联等简单组合后的组合元件。试分析判断：能否利用若干电阻为 R，电容为 C 的元件组合使得组合元件的有功功率最大？





八、辐射的物理分析（50 分）

经典电动力学指出，带电粒子周围存在电磁场，当带电粒子存在加速度时，电磁场会变化，由麦克斯韦电磁学理论可知，此时将向外辐射电磁波，这就是电磁辐射的来源。试讨论以下问题，普朗克常量 h、真空光速 c、真空介电常数 ε_0、电子质量 m、元电荷 e 为已知。

（1）X 射线是由电子流击打靶粒子的过程中释放出的一种电磁波。人们观察到，X 射线波谱（辐射强度——波长或频率曲线）中存在两种成分：一种表现为连续函数图像，称为韧致辐射；另一种表现为尖峰图像，称为特征辐射。下面分别讨论两种辐射的机制：

（a）实验观测到韧致辐射图像中存在某一波长值 λ_0，使得 $\lambda \le \lambda_0$ 时，辐射强度为 0。已知阴极射线管加速电压为 U，且电子静止加速，求 λ_0 的表达式。

（b）特征谱被认为是靶原子核外电子能级跃迁产生的，假设通过某种手段使靶原子核外 K 层（第一层）产生一个电子空穴，那么其它能级就可能有电子跃迁至该能级，从而产生所谓 K-X 射线。考虑到内层剩余电子的屏蔽作用，求原子序数为 Z 的靶原子产生的 K-X 射线频率的量子表达式。

（2）高能带电粒子在折射率为 n 介质中运动时，若其速度大于电磁波在该介质中的速度，则会出现类似于艏波的切伦科夫辐射。设辐射波线与粒子运动速度的夹角为 θ，粒子速度为 v 且很大，对一束动量确定的粒子可通过测 θ 间接测其静质量。求测量中 θ 的微小误差 $\delta\theta$ 造成的粒子静质量测量的相对误差的表达式。（答案用 v，c，$\delta\theta$，n 表达）

（3）电子在一维谐振子势场中运动，即电子与劲度系数为 k 的固定弹簧连接，在光滑轨道上运动，同时因加速运动而产生辐射。根据经典电动力学，带电粒子的辐射功率为

$$P=\frac{q^2a^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}$$

其中 q 表示粒子电量，a 表示粒子加速度。在零级近似下（即可先忽略辐射效应，求得相应解后再代入未经近似的方程求解）求粒子位置坐标 x 随 t 变化的函数关系。设粒子初始时刻位于弹簧最大伸长处，伸长量为 x_0。

提示：分部积分公式 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$