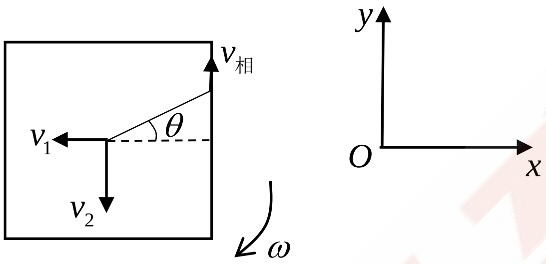
培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（一）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

1、解：（1）中间时刻，如图所示



在地面系中

$$v_{虫x}=-v_1+\omega\times\frac{l}{2}\tan\theta$$

$$v_{虫y}=-v_2-\omega\times\frac{l}{2}+v_{相}$$

角动量守恒，有

$$mv_{虫x}\times\frac{l}{4}\tan\theta+mv_1\times\frac{l}{4}\tan\theta+I\omega$$

$$=mv_{虫y}\frac{l}{4}+mv_2\frac{l}{4}$$

$$I=\frac{1}{6}ml^2$$

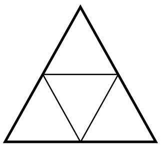
$$-\omega\frac{l^2}{8}+v_{相}\frac{l}{4}=\frac{1}{8}\omega l^2\tan^2\theta+\frac{1}{6}\omega l^2$$

$$\Rightarrow v_{相}=\frac{d(\frac{1}{2}\tan\theta)}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \omega=\frac{\dot{\theta}}{1+\frac{4}{3}\cos^2\theta}$$

因而 $\theta_1=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\frac{4}{3}\cos^2\theta}=3.036rad=173.9^\circ$

（2）（i）设转动惯量为I_0，则如图分割为四个部分，可得



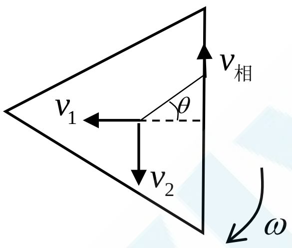
则每部分$I'=I_0(\frac{1}{2})^2\frac{1}{4}=\frac{1}{16}I_0$

因而有关系

$$I_0=I'+3\left[I'+\frac{1}{4}m(\frac{l}{2\sqrt{3}})^2\right]$$

解得　　$I_0=\frac{1}{12}ml^2$

（ii）如图所示



有关系

$$v_{虫x}=-v_1+\omega\times\frac{\sqrt{3}}{6}l\tan\theta$$

$$v_{虫y}=-v_2-\omega\times\frac{\sqrt{3}}{6}l+v_{相}$$

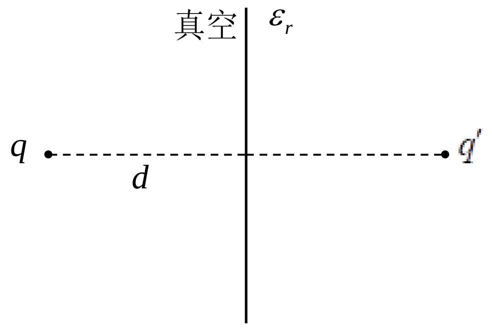
角动量守恒，得

$$mv_{虫x}\times\frac{\sqrt{3}}{12}l\tan\theta+mv_1\times\frac{\sqrt{3}}{12}l\tan\theta+I\omega=mv_{虫y}\times\frac{\sqrt{3}}{12}l+mv_2\times\frac{\sqrt{3}}{12}l$$

可得　　$\omega=\frac{\dot{\theta}}{1+2\cos^2\theta}$

因而　　$\theta_2=6\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{1+2\cos^2\theta}=2.72rad=155.9^\circ$

2、解：（1）作一个点电荷q'，如图有



$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}-\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 d^2}=\varepsilon_r(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 d^2})$$

$$\Rightarrow q'=-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}q'$$

因而 F= $\dfrac{\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}q\times q}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2}=\dfrac{(\varepsilon_r+1)q^2}{16\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r+1)d^2}$

即受力大小为 $F=\dfrac{(\varepsilon_r-1)q^2}{16\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r+1)d^2}$

（2）设$\sigma(r)$，则有

$$\frac{\sigma(r)}{2\varepsilon_0}-\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(d^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(d^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0(d^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow\sigma(r)=-\frac{(\varepsilon_r-1)q}{2\pi(\varepsilon_r+1)(d^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

（3）对左半空间来看

$\vec{E}_{左}=\vec{E_q}+\vec{E_{q'}}$

有 $\dfrac{q}{\varepsilon_0}\dfrac{2\pi(1-\cos\theta)}{4\pi}=\dfrac{q}{\varepsilon_0}\dfrac{2\pi(1-\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}})}{4\pi}-\dfrac{q'}{\varepsilon_0}\dfrac{2\pi(1-\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}})}{4\pi}$

$$r=d\{[\frac{2\varepsilon_r}{(\varepsilon_r+1)(1-\cos\theta)}]^2-1\}^{\frac{1}{2}}$$

3、（1）设摩擦力为 f，则受力上，满足

$F-f=13ma_1$

且力矩关系满足

$$F(3a+2r)-12mg\frac{a}{2}=10m(2r+a)a_1+m(2r+\frac{5}{2}a)a_1+\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{a_1}{r}\right)\times 2+ma_1r$$

转动定理

$$\frac{1}{2}fr=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mr^2\beta$$

关联关系

$$\beta r=a_1$$

解得 $F=\dfrac{162mga}{56a+5r}$

（2）当倾斜一个角度θ后，有

$$F-f=13ma_2$$

$$\frac{1}{2}fr=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mr^2\beta$$

关联关系 $\beta r=a_2$

力矩关系满足

$$F\left[r+(r+3a)\cos\theta\right]-mga\cos\theta+10mg\left[(r+a)\sin\theta-\frac{a}{2}\cos\theta\right]$$

$$+mg(r+\frac{5}{2}a)\sin\theta=\frac{3}{2}ma_2r+ma_2(r+a\sin\theta)+10ma_2\left[r+(r+a)\cos\theta+\frac{a}{2}\sin\theta\right]$$

$$+ma_2\left[r+(r+\frac{5}{2}a)\cos\theta\right]$$

解得

$$F=\frac{27}{2}\frac{12a\cos\theta-22r\sin\theta-25a\sin\theta}{5r\cos\theta+56a\cos\theta-14a\sin\theta}mg$$

4、解：（1）$\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}+qv_0B_0=\dfrac{mv_0^2}{r_0}$

$$\Rightarrow v_0^2-\frac{qB_0r_0}{m}v_0-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0r_0m}=0$$

$$\Rightarrow v_0=\frac{1}{2}\left[\frac{qB_0r_0}{m}+\sqrt{\left(\frac{qB_0r_0}{m}\right)^2+\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0r_0m}}\right]$$

（2）$r_0\rightarrow r_0+\delta$

$$dL=qv_rBdt=qBrdr$$

$$\Delta L=\frac{1}{2}qB（r+\delta)^2-\frac{1}{2}qBr_0^2=qBr_0\delta$$

$$v_\perp=\frac{mv_0r_0+qBr_0\delta}{m(r_0+\delta)}=v_0(1-\frac{\delta}{r_0})+\frac{qB}{m}\delta$$

由径向受力方程得

$$m\ddot{r}-\frac{mv_\perp^2}{r_0+\delta}=-qv_\perp B_0-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_0(r_0+\delta)^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{r}=\frac{v_\perp^2}{r_0+\delta}-\frac{q}{m}v_\perp B_0-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}(1-\frac{2\delta}{r_0})$$

$$\ddot{\delta}=\frac{v_0^2}{r_0}(1-\frac{3\delta}{r_0}+\frac{2qB\delta}{mv_0})-\frac{qBv_0}{m}(1-\frac{\delta}{r_0}+\frac{qB\delta}{mv_0})-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2 m}(1-\frac{2\delta}{r_0})$$

$$=-\left[\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2 m}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{2qB_1}{mv_0}\right)+\frac{qBv_0}{m}\left(\frac{2}{r_0}-\frac{qB}{mv_0}\right)\right]\delta$$

$$T_1=2\pi\left[\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2 m}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{2qB_1}{mv_0}\right)+\frac{qB_1v_0}{m}\left(\frac{2}{r_0}-\frac{qB}{mv_0}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

5、解：（1）由于熵是一个广延量，因而有

$$S(\lambda n)=\lambda S(n)$$

因而可得

$$S_0(\lambda n)+\lambda nR\ln\lambda V=\lambda S_0(n)+\lambda nR\ln V$$

由于λ是任取的，因而可以将λ看成是自变量，两边求导可得

$$n\frac{dS_0(\lambda n)}{d(\lambda n)}+nR\ln\lambda V+nR=S_0(n)+nR\ln V$$

令$\lambda=1$，可得

$$n\frac{dS_0}{dn}+nR=S_0$$

可导出　$S_0=nC-nR\ln n$，其中C是常量

（2）（i）设压强为p，则有

$$pdV=\frac{dn}{N_A}RT(x)$$

$$dn=n(x)dV$$

因而有　$n(x)=\dfrac{p}{kT_0(1+\frac{x}{l})}$

而有　$n_0Sl=\int_0^l n(x)Sdx=\dfrac{pSl}{kT_0}\ln 2$

最终导出 $p=\dfrac{n_0kT_0}{\ln 2}$

（ii）代入压强可得

$$n(x)=\frac{n_0}{(1+\frac{x}{l})\ln 2}$$

在 $x\to x+dx$ 的一段，熵变为

$$C_{V,m}\frac{n(x)}{N_A}Sdx\ln(1+\frac{x}{l})+R\frac{n(x)}{N_A}Sdx\ln\left[\ln 2(1+\frac{x}{l})\right]$$

积分可得到熵变为

$$\Delta S=0.347\frac{n_0SlC_{V,m}}{N_A}-0.020\frac{n_0SlR}{N_A}$$

6、解：（1）T=(2800+273.5)K=3073.15K

有 $\sigma T^4 2\pi rl=P$

且 $\dfrac{U^2}{R}=P$ $\qquad R=\dfrac{\rho l}{\pi r^2}$

解得 $r=2.18\times10^{-5}m$

$l=1.44\times10^{-6}m$

（2）当钨丝的温度达到最高时，有

$\rho=\rho_0(1+600\times0.00482)=1.946\times10^{-5}\Omega\cdot m$

$r=r_0(1+600\times1\times10^{-5})=2.19\times10^{-5}m$

$l=l_0(1+600\times10^{-5})=1.45\times10^{-1}m$

有 $T_{\max}$=(3400+273.15)K=3673.15K

且有 $P=\sigma T_{\max}{}^4 2\pi rl=\dfrac{U_{\max}^2}{R}$

$R=\dfrac{\rho l}{\pi r^2}$

$\Rightarrow U_{\max}$=621.9V

因而此灯可工作的最高电压为 621.9V

7、解：（1）对 z 轴的角动量守恒，角动量数值为

$$L=\frac{1}{3}ml^2(\frac{v_0}{l})\sin\theta_0=\frac{1}{6}ml\sqrt{gl}$$

在角度最大处，应有

$$L=\frac{1}{3}mvl\sin\theta$$

能量上，满足关系

$$mg\frac{l}{2}\cos\theta_0+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\left(\frac{v_0}{l}\right)^2=mg\frac{l}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\left(\frac{v}{l}\right)^2$$

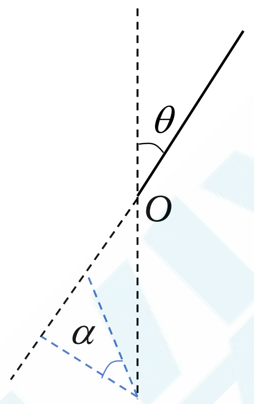
化简可得

$$\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{24\sin^2\theta}$$

解得　$\theta_1=30^\circ$　　$\theta_2=168.7^\circ$

前者即初态，后者对应角度的最大值，因而θ的最大值为168.7°

（2）（i）当呈θ时，如图所示



有关系

$$dq=\lambda d(l\sin\theta\tan\alpha)=\frac{q\sin\theta}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

因而　$$dU=\frac{\dfrac{q^2\sin\theta}{\cos^2\alpha}}{4\pi\varepsilon_0\dfrac{l\sin\theta}{\cos\alpha}}d\alpha=mgl\frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$

可得电势能

$$U=mgl\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=mgl\ln\sqrt{\frac{(1+\cos\theta/2)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta/2)(1+\cos\theta)}}$$

（ii）有对 z 轴的角动量守恒，因而有

$$L=\frac{1}{3}ml^2(\frac{v_0}{l})\sin\theta_0=\frac{1}{6}ml\sqrt{gl}$$

$$L=\frac{1}{3}mvl\sin\theta$$

能量上，满足

$$mg\frac{l}{2}\cos\theta_0+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\left(\frac{v_0}{l}\right)^2+mgl\ln\sqrt{\frac{(1+\cos\theta_0/2)(1-\cos\theta_0)}{(1-\cos\theta_0/2)(1+\cos\theta_0)}}=mg\frac{l}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\left(\frac{v}{l}\right)^2+mgl\ln\sqrt{\frac{(1+\cos\theta/2)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta/2)(1+\cos\theta)}}$$

最终可以解出角度

$$\theta_1=30^\circ \qquad \theta_2=149.8^\circ$$

前者对应初态，因而角度的最大值为149.8°

8、解：（1）$m_pc^2+eU=m_p^{'}c^2$

$$m_p^{'}=\frac{m_p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow v=0.614c$$

（2）临界情形，有

$$m_p^{'}v-h\nu=\frac{(m_{\wedge^\circ}+m_p)v^{'}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$$

$$m_p^{'}c^2+h\nu=\frac{(m_{\wedge^\circ}+m_p)c^2}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow h\nu=446.59\,MeV/c^2$$

$$v^{'}=0.1728c$$

因而 $\nu=1.08\times10^{23}\,Hz$

（3）刚刚发生 K⁺介子反应后，

$$\mathrm{v}^{'}=0.1728\mathrm{c}$$

在Λ°粒子静止参考系中看，满足关系

$$\sqrt{\mathrm{p}^2c^2+m_p^2c^4}+\sqrt{\mathrm{p}^2c^2+m_{\pi^-}\mathrm{c}^4}=m_{\wedge^\circ}\mathrm{c}^2$$

$$p=100.925\,MeV/\mathrm{c}$$

因而 $m'_{\pi^-}=\frac{\sqrt{p^2c^2+m_{\pi^-}c^4}}{c^2}=172.59\,MeV/c$

因而 $v_\pi=0.5848c$

若夹角为直角，则说明 $v_{\pi x}=-v'$

因而 $v_{\pi y}=0.5587c$

因而地面系中 $v_y=\frac{v_{\pi y}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v'^2}{c^2}}$=0.5672c