培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（十四）

考试时间：150 分钟　　总分 320 分

（参考答案）

题一.

1. $\arcsin\dfrac{9}{13}$

2. $\dfrac{5}{6}I$、$\dfrac{1}{6}I$、$\dfrac{1}{6}I$、$\dfrac{1}{6}I$

3. $\dfrac{\mu_0 I}{2p}$

4. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\dfrac{3}{4}kT$

题二.

（1）第一个多方过程的摩尔热容量为定值$2R$，故有

$$\frac{dQ}{ndT}=\frac{PdV+dU}{ndT}=C_V+\frac{PdV}{PdV+VdP}\cdot R=2R$$

单原子分子理想气体的定体摩尔热容量$C_V=\dfrac{3}{2}R$，代入上式可得

$$\frac{dP}{P}=\frac{dV}{V}$$

解此微分方程得

$$PV^{-1}=P_0V_0^{-1}$$

故经历第一个多方过程后，气体的体积加倍，压强也加倍。第二个过程为准静态可逆绝热膨胀，第三个过程为准静态可逆等温压缩，设经历第二个过程后气体的体积为V_x、压强为P_x，则有

$$2P_0(2V_0)^{\gamma}=P_xV_x^{\gamma}$$
$$P_xV_x=P_0V_0$$

其中$\gamma=\dfrac{C_P}{C_V}=\dfrac{C_V+R}{C_V}=\dfrac{5}{3}$，为绝热指数。联立以上两式解得

$$P_x=\frac{1}{16}P_0,V_x=16V_0$$

计算循环过程中气体的对外做功量W_0，有

$$W_0=\frac{(P_0+2P_0)V_0}{2}+\frac{2P_0\cdot 2V_0-\frac{1}{16}P_0\cdot 16V_0}{\gamma-1}-P_0V_0\ln 16=(6-4\ln 2)P_0V_0$$

由热力学第一定律计算循环过程中气体的吸热量Q_0，有

$$Q_0=\frac{3}{2}P_0V_0+\frac{3}{2}\cdot(2P_0\cdot 2V_0-P_0V_0)=6P_0V_0$$

计算循环效率η，有

$$\eta=\frac{W_0}{Q_0}=1-\frac{2}{3}\ln 2\approx 53.79\%$$

（2）气体的熵在气体吸热的过程中增大，在气体放热的过程中减小。所以在第一个多方过程结束时，气体的熵增量最大，记为ΔS_0。由克劳修斯熵的定义式计算ΔS_0，有

$$\Delta S_0=\int_{s_0}^{s_1}\frac{dQ}{T}=\int_{T_0}^{4T_0}\frac{P_0V_0}{RT_0}\cdot 2R\cdot\frac{dT}{T}=\frac{4P_0V_0\ln 2}{T_0}$$

题三.

（1）由巴普斯定理求半圆柱的质心位置与半圆柱平面之间的距离h_c，有（也可积分求得）

$$h_c=\frac{4R}{3\pi}$$

圆筒被锁定，则半圆柱做刚体定轴转动，转动惯量$I_1=\frac{1}{2}MR^2$，由角动量定理得

$$I_1\frac{d^2\theta}{dt^2}=-Mgh_c\sin\theta\approx -Mgh_c\theta$$

由上式可知半圆柱做简谐转动，转动频率记为f_1，则

$$f_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mgh_c}{I_1}}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{3\pi R}}$$

（2）圆筒自由，因为地面足够粗糙，故圆筒与地面间永不发生相对滑动，圆筒做纯滚动。

设某时刻圆筒与地面之间的静摩擦力为f，半圆柱平面相对于水平面偏转了角度θ，半圆柱质心水平方向加速度为a_2，圆筒质心水平方向加速度为a_1，圆筒角速度为ω

对系统整体由牛顿第二定律得

$$-f=ma_1+Ma_2$$

由于圆筒与半圆柱间光滑接触，故对于圆筒来说，半圆柱对它的作用力相对圆心的力矩为零，

由角动量定理得

$$fR = I_2 \frac{d\omega}{dt}$$

其中 I_2 为圆筒对圆心的转动惯量

$$I_2 = mR^2$$

在圆筒质心的参考系（这是一个非惯性系）中，要为半圆柱质心施加惯性力，将此惯性力大小设为 F，则

$$F = Ma_1$$

在上述参考系中，半圆柱以圆心为轴做定轴转动，由角动量定理得

$$-Mgh_c\theta + Fh_c = I_1 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

将运动学关联取一阶近似得

$$a_2 = a_1 - h_c \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

联立得

$$-Mgh_c\theta = \left(\frac{1}{2}MR^2 - \frac{M^2h_c^2}{2m+M}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

由上式可判断半圆柱做简谐转动，转动频率记为 f_2，则

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(48\pi m + 24\pi M)g}{(18\pi^2 m + (9\pi^2 - 32)M)R}}$$

题四.

由于 k 很小，在一个周期内看不出轨道的变化，因此在一个周期尺度内人造卫星的运动等价于没有宇宙尘埃的影响情形下的运动。设在 dt 时间内人造卫星的总机械能变化了 dE

即看出轨道发生了变化（dE 所导致的），显然 dt 应该是包含了很多个周期，再设一个周期内等效阻力对人造卫星做功量为 W_0，由能量守恒得

$$W_0 \frac{dt}{T} = dE$$

设在一个周期内某时刻人造卫星的速度大小为 v，相对地球的位矢长度为 r，极角为 φ，人造卫星的总机械能为 E，轨道半通径为 p、离心率为 e，经过很小一段时间人造卫星走过长度为 ds 的路程，则

$$v=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{GMm}{r}\right)}$$

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

$$W_0=-\int_0^{2\pi}kv\cdot ds$$

由勾股定理得

$$ds=\sqrt{(dr)^2+(rd\varphi)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{e\sin\varphi}{1+e\cos\varphi}\right)^2}\frac{p}{1+e\cos\varphi}\cdot d\varphi$$

设轨道半长轴为a，利用题给信息$e=e_0=\frac{1}{2}$，联立以上各式得

$$W_0=-k\sqrt{GMa}\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\cos\varphi\right)\left(1+\left(\frac{\sin\varphi}{2+\cos\varphi}\right)^2\right)}\frac{3}{4+2\cos\varphi}\cdot d\varphi$$

利用卡西欧 991 计算器计算上式中的数值积分得

$$W_0=-6.28k\sqrt{GMa}$$

即得

$$-6.28k\sqrt{GMa}\frac{dt}{T}=dE$$

利用$T=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}}$以及$E=-\frac{GMm}{2a}$化简上式得

$$dt=-\frac{\pi m}{6.28ka}da$$

设人造卫星轨道半长轴缩小为初态的一半所需要的时间为τ，上式两边积分得

$$\tau=\frac{\pi\ln 2}{6.28}\cdot\frac{m}{k}$$

代入数据得

$$\tau\approx 3.3\text{年}$$

题五.

（1）电子在此匀强磁场中做匀速率圆周运动，由牛顿第二定律可求得半径 R

$$R=\frac{\gamma m_0v_0}{eB_0}$$

所以电子的轨迹方程为

$$x^2+\left(y-\frac{\gamma m_0v_0}{eB_0}\right)^2=\frac{\gamma^2m_0^2v_0^2}{e^2B_0^2}$$

（2）对电子列 y 方向动力学方程得

$$\gamma m_0\frac{\Delta v_y}{\Delta t}=e\frac{\Delta x}{\Delta t}\beta x$$

积分得

$$v_y=\frac{e\beta x^2}{2\gamma m_0}$$

由能量守恒得

$$v_x^2+v_y^2=v_0^2$$

利用 x 方向速度 v_x 求从电子开始运动到电子 x 坐标为 $x_0=\sqrt{\frac{\gamma m_0 v_0}{2e\beta}}$ 经过的时间 τ，有

$$t_0=\int\frac{dx}{v_x}=\int_0^{x_0}\frac{1}{\sqrt{v_0^2-\frac{e^2\beta^2x^4}{4\gamma^2m_0^2}}}dx=0.503\sqrt{\frac{2\gamma m_0}{e\beta v_0}}$$

题六.

（1）将宽段导轨上的导体棒标号 1、窄段导轨上的导体棒标号 2，记宽段导轨上的导体棒的最终速度为 v_{f1}、窄段导轨上的导体棒的最终速度为 v_{f2}。最终两根棒均做匀速直线运动，无电流通过，两根棒上的动生电动势均等于最终电容器上的剩余电压，由此可得

$$v_{f2}=2v_{f1}$$

对两根棒由动量定理得

$$mv_{f1}=2BLq_{f1}$$

$$mv_{f2}=BLq_{f2}$$

由电荷守恒得

$$q_{f1}+q_{f2}+2CBLv_{f1}=CE$$

联立解得

$$v_{f1}=\frac{2CEBL}{5m+4CB^2L^2}$$

$$v_{f2}=\frac{4CEBL}{5m+4CB^2L^2}$$

（2）按照题给定义求效率 η，有

$$\eta=\frac{\frac{1}{2}m\left(v_{f1}^2+v_{f2}^2\right)}{CE^2}=\frac{10mCB^2L^2}{\left(5m+4CB^2L^2\right)^2}$$

由均值定理得

$$\eta=\frac{10CB^2L^2}{\left(5\sqrt{m}+\frac{4CB^2L^2}{\sqrt{m}}\right)^2}\le\frac{1}{8}$$

当且仅当 $m=\frac{4CB^2L^2}{5}$ 时上式等号成立。所以效率的最大值为12.5%

（3）对两根棒构成的回路应用基尔霍夫电压方程得

$$2BLv_1-BLv_2+I_1R-I_2R=0$$

将上式乘以时间微分 dt 并作积分以求磁通量变化量 $\Delta\phi_f$，有

$$\Delta\phi_f=\left(q_{f1}-q_{f2}\right)R=\frac{-3mCER}{5m+4CB^2L^2}$$

（4）将两根棒的动量定理再乘以时间微分 dt 并作积分得

$$mx_{f1}=2BL\int q_1dt=2BLA_1$$

$$mx_{f2}=BL\int q_2dt=BLA_2$$

设某时刻电容器上的剩余电量为 Q，将基尔霍夫电压方程乘以时间微分 dt 并作积分得

$$\frac{CE\tau-A_1-A_2}{C}-2BLx_{f1}-q_{f1}R=0$$

$$\frac{CE\tau-A_1-A_2}{C}-BLx_{f2}-q_{f2}R=0$$

联立解得

$$x_{f2}=\frac{\left(6m-2CB^2L^2\right)CEmR+\left(10m+8CB^2L^2\right)CEB^2L^2\tau}{\left(3m+2CB^2L^2\right)\left(5m+4CB^2L^2\right)BL}-\frac{3mCER}{\left(5m+4CB^2L^2\right)BL}$$

题七.

（1）光线 2 在 AD 段的光程为

$$L_1=2d\tan\gamma\sin i$$

光线 3 在 ABC 段的光程为

$$L_2=\frac{2nd}{\cos\gamma}$$

所求的相位差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(L_2-L_1)+\pi=\frac{4\pi d}{\lambda}\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}+\pi$$

（2）由几何关系得

$$\sin i=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+H^2}}$$

利用（1）中的结论并代入$n_1=1,n_2=n$得所求的方程为

$$2\alpha y\sqrt{n^2-\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+H^2}}=k\lambda$$

容易发现，当发生题中所述情况时，有

$$2n\alpha y=(k+1)\lambda$$

代入得

$$x=\sqrt{\frac{4n^4\alpha^2(2k+1)H^2+\left[n^2(2k+1)-(k+1)^2\right](k+1)^2\lambda^2}{4n^2\alpha^2\left[(k+1)^2-n^2(2k+1)\right]}}$$

（3）(i)代入数字，得x的近似值为 0.03631m

(ii)此时解得

y'=0.03108m，x'=0.04867m

一般而言，光劈放在读数显微镜下观察干涉条纹，由于光源是通过显微镜物镜上装上去的平面镜反射照向光劈，所以也只有显微镜的目镜下才能观察到干涉条纹，而显微镜所观察到的视野宽度最宽处也不过在 5-10mm 这个范围，(ii)中的结果（$2x'$接近 100mm)表明无法观察到明显的弯曲，而条纹又往往较粗，因此这个观察结果是不科学的。

题八.

（1）由电势叠加原理求电势φ_x，有

$$\varphi_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{x}-\frac{q}{x+l}-\frac{q}{x-l}\right)\approx\frac{-ql^2}{2\pi\varepsilon_0x^3}$$

（2）由场强叠加原理求电场强度E_x，有

$$E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{x^2}-\frac{q}{(x+l)^2}-\frac{q}{(x-l)^2}\right)\approx\frac{-3ql^2}{2\pi\varepsilon_0x^4}$$

（3）利用（2）的结论求相互作用力F_x，有

$$F_x=\frac{-3ql^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{x^4}-\frac{q}{(x+l)^4}-\frac{q}{(x-l)^4}\right)\approx\frac{30q^2l^4}{\pi\varepsilon_0x^6}$$

（4）极化达到稳定时，有

$$2qE-2k\delta=0$$

求得

$$\delta=\frac{qE}{k}$$

由极化定律得

$$P=\frac{2q\delta}{a}=\varepsilon_0\left(\varepsilon_r-1\right)E$$

求得

$$\varepsilon_r=1+\frac{2q^2}{a\varepsilon_0 k}$$