汇智起航 2021 年（寒假）高中物理竞赛复赛-热学

模拟测试卷答案

【题 1】（复赛难度，光子气体、小孔泄流、斯特藩定律）考虑一个密闭的黑体腔，在腔内会产生均匀的辐射场，辐射场由不同波长的电磁场叠加而成。如果在黑体腔上开一个小口，根据斯特藩-玻尔兹曼定理，单位时间内辐射出的能量和黑体腔的温度四次方成正比，即 $E=\sigma T^4$，黑体腔内充满了光子气体，了解其性质需要用到量子力学和电动力学的知识，但是斯特藩-玻尔兹曼定理的证明却只需要基本的热力学知识，本题旨在利用热力学和分子运动论的方法证明斯特藩-玻尔兹曼定理。

（1）利用热力学第二定理证明黑体腔内的能量密度（即单位体积内的光子的能量 u）为常数（10 分）；

（2）证明小孔处的辐射通量密度（单位面积，单位时间单位面积辐射出的能量）$J_u=\frac{1}{4}cu$（10 分）；

（3）证明黑体腔内表面受到的光子产生的压强 $p=\frac{1}{3}u$（10 分）；

（4）热力学可以证明$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V-p$, 利用此式，结合前两问，证明$J_u=AT^4$, 其中 A 为某常数（10 分）。

【解 1】

（1）假设辐射能量在两空腔中不等，可以在两个不等的区域构造隔开，只留下一个小窗口，能量将通过小窗，从能量密度高的空腔辐射到低的空腔，从而使前者温度降低，后者温度升高。这样，就在温度相同的两个空腔中自发的产生温度差，因此可以让某一热机利用这一温度差吸收热量做功，从总体上来看，从一个空腔这一单一热源对外做功，这违背了热力学第二定律。（构造热机得 5 分，说明单一热源做功 5 分）

（2）在 dt 时间内，来自面积 dA，投向θ方向单位立体角的电磁辐射能量为：

$$u\cdot\frac{d\Omega}{4\pi}\cdot c\cdot dt\cdot dA\cdot cos\theta \quad （4 分）$$

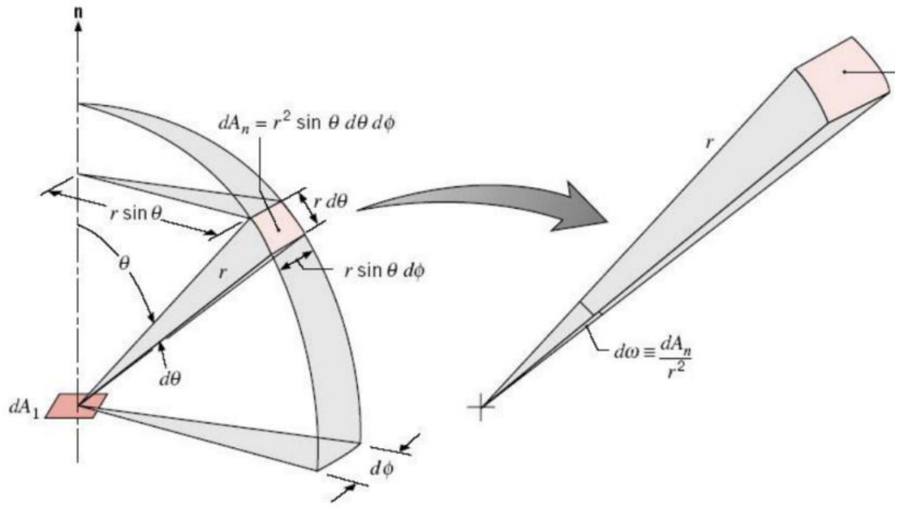
投射到 dA 一侧的总辐射能为：（如图）

$J_u dtdA=\int cdt\cdot\frac{u}{4\pi}d\Omega\cdot dAcos\theta$　　（3 分）

$=\frac{cu}{4\pi}dtdA\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos\theta sin\theta d\theta$

$=\frac{1}{4}cudtdA$　　（3 分）

$$d\Omega = \frac{dA_n}{r^2} = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$



（3）与第二问相类似，但是需要注意，光子所携带的能量是所携带动量的 c 倍，同时根据对称性，将光子的冲量向小面元的法向方向投影，小面元在接受光子的同时也在辐射光子，因此产生系数 2：

$pdtdA = 2\int cdt \cdot \frac{u}{4\pi} d\Omega \cdot dAcos\theta \cdot \frac{cos\theta}{c}$　　（5 分）

$= 2\frac{u}{4\pi} dtdA \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta)^2 sin\theta d\theta$

$= \frac{1}{3} udtdA$　　（5 分）

（4）显然 $u = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$　（2 分）

将上式和 $p = \frac{1}{3}u$ 代入热力学关系得

$$u = T \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{du}{dT} - \frac{1}{3}u$$

$$\frac{du}{u} = 4 \cdot \frac{dT}{T} \quad （3 分）$$

得：$u = aT^4$（2 分）

$J_u = \frac{1}{4}cu = AT^4$　　（3 分）

【题 2】（预赛难度，绝热过程和热力学第一定律）一个氧气瓶的容量为 $0.04m^3$, 内盛 $p_1 = 147.1 \times 10^5 Pa$ 的氧气，其温度与室温相同，即 $t_1 = t_0 = 20°C$.

（1）如开启阀门，使压力迅速下降到 $P_2 = 73.55 \times 10^5 Pa$, 求此时氧的温度 T_2 和所放出的氧的量 Δn;（15 分）

（2）阀门关闭后，瓶内氧气经历怎样的变化过程？足够长时间后其温度与压力为多少？（10 分）

（3）如放气极为缓慢，以致瓶内气体与外界随时处于热平衡，当压力下降到相同程度时，

所放出的氧气量是多少，和（1）相比是更多还是更少？（15 分）

【解 2】

（1）快速放气时可以认为气体经历绝热膨胀过程：

$$PV^{\gamma}=C\ \text{（5 分）}$$

可得$T_2=T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=293\times\left(\frac{73.55}{147.1}\right)^{\frac{0.4}{1.4}}=240K$（5 分）

$$\Delta n=n_1-n_2=\frac{P_1V_1}{RT_1}-\frac{P_2V_1}{RT_2}=94.4mol\ \text{（5 分）}$$

（2）阀门关闭后氧气经历等容过程，且终态

$$T_3=T_0=293K\ \text{（5 分）}$$

$$P_3=P_2\frac{T_3}{T_2}=89.79\times10^5Pa\ \text{（5 分）}$$

（3）过程中温度与环境相同，即$T_2=T_1=T_0=293K$（5 分）

$$\Delta n=n_1-n_2=\frac{P_1V_1}{RT_1}-\frac{P_2V_1}{RT_1}=120.9mol\ \text{（5 分）}$$

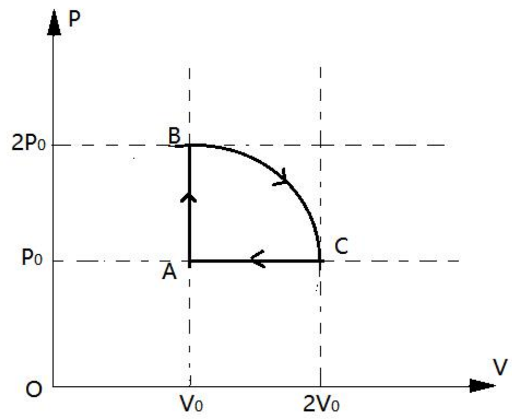
放出的氧气更多（5 分）

【题 3】（复赛简单题难度，热容的定义）

如图所示是 1mol 单原子理想气体经历的循环过程示意图，循环沿 A→B→C→A 方向进行。BC 段为圆弧：

(1) 求 BC 段气体热容与 P，V 的关系；（25 分）

(2)求循环的效率。（15 分）



【解 3】

（1）BC 过程（令$\frac{V}{V_0}=x$，$\frac{P}{P_0}=y$）

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1\ \text{（5 分）}$$

$$2(x-1)dx+2(y-1)dy=0$$

$$\text{又}\because dQ=du+pdv=\frac{3}{2}vdp+\frac{5}{2}pdv=p_0v_0(\frac{3}{2}xdy+\frac{5}{2}ydx)\ \text{（5 分）}$$

$$\text{而}pv=RT\Rightarrow dT=\frac{1}{R}(pdv+vdp)=\frac{p_0v_0}{R}(ydx+xdy)\ \text{（5 分）}$$

$$\Rightarrow C=\frac{dQ}{dT}=R\frac{\frac{3}{2}xdy+\frac{5}{2}ydx}{ydx+xdy}=R\frac{\frac{3}{2}(x-x^2)+\frac{5}{2}(y^2-y)}{y^2-y+x-x^2}$$ （10 分）

（2）循环的做功 W=$\frac{p_0v_0\pi}{4}$ （5 分）

在 BC 上存在吸、放热的转折点

设

x=1+cos θ， y=1+sin θ

$$C=R\frac{\frac{5}{2}\sin\theta+\frac{5}{2}\sin^2\theta-\frac{3}{2}\cos\theta-\frac{3}{2}\cos^2\theta}{y^2-y+x-x^2}$$

令 C=0 θ=34.82^0 故 A（1.821，1.571）

$$\Rightarrow Q_{吸}=\frac{3}{2}p_0v_0+\frac{3}{2}p_0v_0(1.821\times1.571-2)+W$$ （5 分）

$$W=\left[\frac{1}{2}(1+1.571)\times0.821+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{55.18}{90}\right]p_0v_0=1.537\,p_0v_0$$

$$\Rightarrow Q_{吸}=4.328p_0v_0$$

$$\Rightarrow \eta=W/Q_{吸}=18.1\%$$ （5 分）

【题 4】（40 分）（预赛难度，理想气体的多方过程）过程方程为 $PV^n=C$ 的过程叫做多方过程，计算：

（1）理想气体经历非等温多方过程温度从T_1到T_2时，气体的膨胀功和吸热量（定压热容为 C_v ）；（20 分）

（2）请在 P-V 图上经过同一点 A 画出经过这点的等温线、等压线、等容线和绝热线，这些线将 PV 图分成了若干部分，假设有一过程工质从 A 点升压升温放热至 B，请画出 B 可能的区域。（20 分）

【解 4】

（1）膨胀功 $W=\int pdv$（5 分）

考虑到

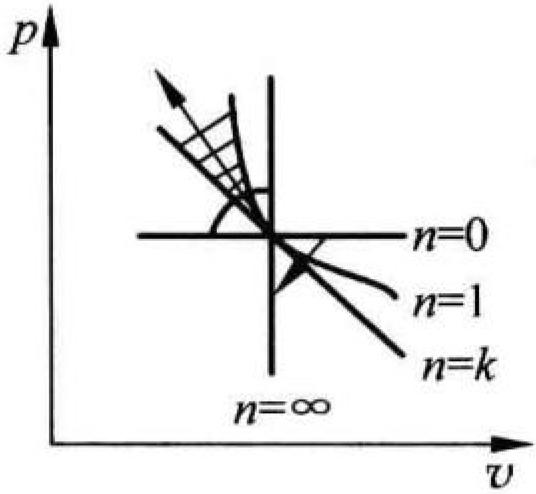
$$PV^n=C$$

将 P 用 V 代换并积分可得：

$W=\frac{R}{n-1}(T_1-T_2)$（10 分）

有热力学第一定律 $q=\Delta U+W=(C_v-\frac{R}{n-1})(T_2-T_1)$（5 分）

（2）



正确画出等温线、等压线、等容线和绝热线给 10 分，由于工质升温升压放热，因此 B 应该夹在等温线和绝热线之间的阴影区域，正确画出给 10 分。

【题 5】（预赛难度，绝热方程和热力学第一定律）如图所示的两室，由活塞隔开。开始时两室的体积均为 $0.1m^3$, 分别储存有空气和氢气，压力均为 0.9807×10^5Pa, 温度均为 $15°C$, 若对空气侧壁加热，直到两室内气体压力升高到 1.9614×10^5Pa 为止，求空气终温及外界加入的 Q，已知空气的比热为$C_v=715.94J/(Kg\cdot K)$, 氢气的绝热多方系数为$\gamma=1.41$, 活塞不导热，且与气缸间无摩擦。

【解 5】

氢气被绝热压缩，故有

$$PV^\gamma=P_0V_0^\gamma \quad（5 分）$$

$$V_{H_2}=V_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=0.1\times\left(\frac{0.9807\times10^5}{1.9614\times10^5}\right)^{\frac{1}{1.41}}=0.0612\,m^3 \quad（5 分）$$

对绝热关系式积分可得

$$W=\int pdv=\frac{1}{\gamma-1}(p_!V_1-p_2V_2) \quad（5 分）$$

$$=\frac{1}{0.41}(0.9807\times0.1-1.9614\times0.0612)\times10^5$$

$$=-5.358KJ \quad（5 分）$$

对于空气，此时体积为

$$V=0.1+0.1-0.0612=0.1388\,m^3 \quad（5 分）$$

温度为：

$$T_2=T_1\frac{P_2V_2}{P_1V_1}=(273+15)\times\frac{1.96\times10^5\times0.1388}{0.9807\times10^5\times0.1}=799.5K \quad（5 分）$$

对空气使用热力学第一定律

$Q = \Delta U + W$（5 分）

$= mC_v(T_2 - T_1) + W$

$= \dfrac{715.94}{8.314} \times 29 \times 10^{-3}\left(1.9614 \times 10^5 \times 0.1388 - 0.9807 \times 10^5 \times 0.1\right) + 5.358$

$= 48.8KJ$ （5 分）

【题 6】(复赛简单题，表面张力)

半径为 a 的球静止地放在平板上，接触点周围有一滴液体形成一块凹镜，其直径远小于 a 液体同球面和平板面的接触角均为零度，计算作用在球上的吸附力（提示：结果为 $A\gamma a$)，其中γ为液体-空气表面张力系数, A 为待定常数。

【解 6】

液体吸附力的计算方法为液体内部压强和没有液体时空气压强的差值，由于表面张力的作用会导致水内的压强较空气较小，宏观表现为对球造成了吸附力（10 分）

压力差的计算：

$$\Delta P = \gamma\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) \text{（5 分）}$$

其中 R 为液体小环的半径，由于角度很小因此 $R >> r$, 所以

$$\Delta P = \frac{\gamma}{r} \text{（5 分）}$$

理论上来讲，需要将压力差在 z 方向投影，积分，但是由于本身液体很少，角度θ很小，因此可以直接用压强差乘以面积得到吸附力。

$$F = \Delta P \times \pi R^2 \quad \text{（5 分）}$$

考虑到

$$2r = a \times \frac{\theta^2}{2} \quad R = a\theta \text{（5 分）}$$

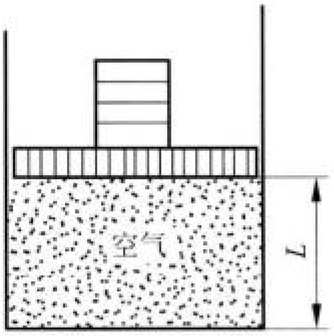
代入得

$$F = 4\pi\gamma a \quad \text{（10 分）}$$

【题 7】(理想气体状态方程、热力学第一定律)

（1）如图所示的气缸内充以空气，气缸截面积为 $100cm^2$, 活塞距底面高度为 10 cm，活塞及其上负载的总质量为 195 kg，当地大气压为 771 $mmHg$，环境温度$t_0 = 27^oC$，气缸内气体恰与外界处于热平衡。倘若把活塞上的负载取去 100 kg，活塞将突然上升，最后重新达到热力平衡, 设活塞与气缸壁之间无摩擦，气体可通过气缸壁充分和外界换热，求活塞上升的距离和气体的换热量；（15 分）

（2）若气缸壁和活塞都是绝热的，但两者之间不存在摩擦，此时活塞上升的距离如何？气体的最终状态又如何？取空气的定压摩尔热容为 2.5R（25 分）



【解 7】

（1）大气压强

$$P_b = \frac{771}{760} \times 1.013 \times 10^5 = 1.028 \times 10^5 Pa \text{（1 分）}$$

初态压强

$$P_1 = \frac{195 \times 9.8}{0.01} + P_b = 2.94 \times 10^5 Pa \text{（2 分）}$$

末态压强

$$P_2 = \frac{95 \times 9.8}{0.01} + P_b = 1.96 \times 10^5 Pa \text{（2 分）}$$

空气为理想气体，且与外界充分换热，则温度不变

$$V_2 = \frac{P_1}{P_2} V_1$$

有$L_2 - L_1 = \left(\frac{P_1}{P_2} - 1\right) L_1 = 5cm$ （5 分）

（2）假设活塞上升 $x\ cm$,

由理想气体状态方程

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 = 20(10 + x) \text{（5 分）}$$

另外，由题意得$\Delta U = nC_v \Delta T = p_1 V_1 \frac{C_v}{R}\left(\frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} - 1\right)$ （5 分）

而 $W = P_2 A x$ （5 分）

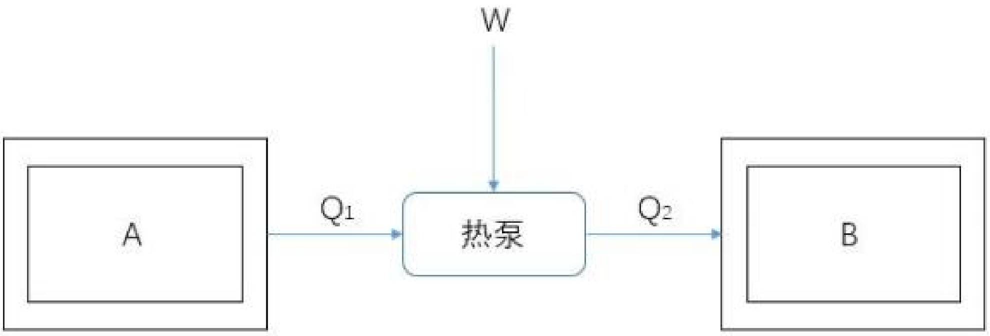
由热力学第一定律：$\Delta U + W = 0$

将ΔU 代入，可解得：

$$x = \frac{\frac{p_1}{p_2} - 1}{1 + R/C_v} = 3.6cm \text{（5 分）}$$

$$T_2 = 271K \text{（5 分）}$$

【题 8】（卡诺热机、制冷循环）两个刚性容器 A、B 内各自均装有 10kg、1000 K、500 kPa 的氮气，容器与环境介质无热交换。现有热泵在 A、B 间工作，使 A 升温、B 降温，直至 A 升高到 1500 K。则求此可逆过程后 A、B 内的温度压力以及输入热泵的功。氮气 $C_v = 2.5R$.



【解 8】热泵循环式卡诺循环的逆循环，因此有：

$\frac{dQ_A}{T_A}+\frac{dQ_B}{T_B}=0$（5 分）

又有$dQ_A=nC_v dT_A$
$dQ_B=nC_v dT_B$（5 分）

即$\frac{dT_A}{T_A}+\frac{dT_B}{T_B}=0$

积分得 $ln\frac{T_B}{T_0}\frac{T_A}{T_0}=0$（5 分）

得$T_A=666.7K$ (5 分)
等容过程：
$P_A=333.3kPa$（5 分）
$P_B=750kPa$（5 分）
输入热泵的功为
$W=nC_v(T_A+T_B-2T_0)=1237kJ$（10 分）

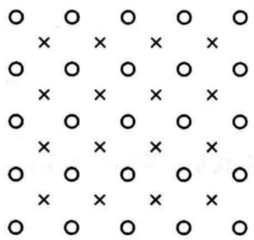
【题 9】(复赛简单题难度，熵的微观解释）晶体含有 N 个原子，原子在晶体中的正常位置如图中的○所示，当原子离开正常位置而占据图中×位置时，晶体中就出现空位和间隙原子，晶体的这种缺陷称为 Frenkel 缺陷。我们可以利用玻尔兹曼关系式 $S=kln\Omega$，来计算晶体的熵，其中Ω为系统对应的微观状态数，例如一个分子位于一个有两个小房间的空间中，它可能出现在房间 1 或者 2，则$\Omega=2$，当然在进行多个粒子的计算时，我们需要考虑不同分子是无法区分的。
（1）假设正常位置和间隙位置都是 N，试证明由于在晶体中形成 n 个空位和间隙原子而具有的熵等于：

$S=2kln(\frac{N!}{n!(N-n)!})$ （15 分）

（2）设原子在间隙位置和正常位置的能量差为 u，试由自由能 $F=nu-Ts$ 为极小证明，温度为 T 时，空位和间隙原子数为；

$n\approx Ne^{-\frac{u}{2kT}}$ （设 $n\ll N$） （25 分）

附：可能会用到的公式：斯特灵公式 $ln\mathrm{N}!\approx NlnN-N\ (N\gg 1)$



【解 9】

（1）考虑存在的微观状态，从 N 个原子中选出 n 个填补到 n 个空位中，根据数学上组合数的知识，

$\Omega = C_N^n \cdot C_N^n = \left(\frac{N!}{n!(N-n)!}\right)^2$ （10 分）

代入玻尔兹曼关系式 $S = kln\left(\frac{N!}{n!(N-n)!}\right)^2 = 2kln(\frac{N!}{n!(N-n)!})$ （5 分）

（2）

$$F = nu - Ts$$

$dF = dn \cdot u - T \times 2kd\left(ln\left(\frac{N!}{n!(N-n)!}\right)\right) = 0$ （5 分）

利用斯特灵公式：

$d\left(ln\left(\frac{N!}{n!(N-n)!}\right)\right) = (\ln(N-n) - lnn) \times dn$ （10 分）

代入可得

$\left(\frac{N-n}{n}\right) = e^{\frac{u}{2kT}}$ （5 分）

考虑到 $n \ll N$

$n \approx Ne^{-\frac{u}{2kT}}$ （5 分）

【题 10】（预赛难度，玻尔兹曼分布）考虑等温大气模型，温度为 T, 由于重力的存在会导致不同高度的分子数密度和压强不同。假设大气分子为理想气体，单个分子质量为 m，地表处的数密度为 n_0,

（1）求距离地表 h 处的分子数密度 n。由于我们考虑的高度变化范围比较小，因此可以认为重力系数 g 为恒值。（20 分）

（2）考虑一段放在地球表面的高度为 H 的气体柱，存在重力的气体分子总势能和不存在分子时的总势能的比值为多少。（20 分）

【解 10】

（1）考虑单位面积高度为 dh 的一小段气体的受力平衡$-P\ \Big|_{h+dh} + P\ \Big|_h = \rho g dh$(5 分)

考虑到

$$P = nkT(5\text{ 分})$$

即

$$KTdn = \rho gdh =- mngdh(5\text{ 分})$$

积分可得：

$$n=n_0e^{-mgh/KT}\,(5\text{ 分})$$

（2）单位面积气体柱的在重力存在的情况下：

$$n=n_0e^{-mgh/KT}$$

高度为 H 的气体柱内的总的分子数为：

$$N=\int_0^H n_0e^{-\frac{mgh}{KT}}dh=\frac{n_0KT}{mg}\left(1-e^{-\frac{mgH}{KT}}\right)(5\text{ 分})$$

在没有重力场的情况下这些粒子会均匀分布，总的势能为：

$$\frac{NmgH}{2}=\frac{n_0KTH}{2}\left(1-e^{-\frac{mgH}{KT}}\right)(5\text{ 分})$$

在有重力场存在的情况下的总势能为：

$$\int_0^H n_0e^{-\frac{mgh}{KT}}mghdh=n_0\frac{(KT)^2}{mg}\left[1-\left(\frac{mgH}{KT}+1\right)e^{-\frac{mgH}{KT}}\right](5\text{ 分})$$

两者之比为：

$$\frac{n_0\frac{(KT)^2}{mg}\left[1-\left(\frac{mgH}{KT}+1\right)e^{-\frac{mgH}{KT}}\right]}{\frac{n_0KTH}{2}\left(1-e^{-\frac{mgH}{KT}}\right)}=\frac{2KT}{mgH}\left[1-\left(\frac{mgH}{KT}+1\right)e^{-\frac{mgH}{KT}}\right]\left(1-e^{-\frac{mgH}{KT}}\right)^{-1}\ (5\text{ 分})$$

【题 11】（复赛难度，热力学第一定律和第二定律）

（1）考虑质量为 m 的水，其比热容为常数 c，考虑温度由T_1上升到T_2时的水的熵的变化ΔS.（10 分）

（2）假设有一个商家声称自己生产了一种这样的装置，无需提供电力，输入温度为 $1Kg$ 的 $50°C$ 的水即可获得 $0.5Kg$ 的温度为 $80°C$ 的热水和 $0.5Kg$ 温度为 $15°C$ 的冷水，机器工作的环境温度为 $20°C$。从热力学角度判断这样的机器是否可能存在并说明理由。（30 分）

【解 11】

（1）

$$dS=\frac{dQ}{T}=\frac{cmdT}{T}$$

积分可得：

$$\Delta S=cm\cdot ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\ (10\text{ 分})$$

（2）若这样的机器存在，根据热力学第一定律：

机器中的水向环境放热为：

$$Q=0.5c\cdot(50-15)-0.5c\cdot(80-50)=2.5c\ (5\text{ 分})$$

机器中的水熵变为

$$\Delta S_1=0.5\cdot cln\left(\frac{273+80}{273+50}\right)+0.5\cdot cln\left(\frac{273+15}{273+50}\right)=-0.013c\quad(5\text{ 分})$$

环境熵变为：

$$\Delta S_2=\frac{Q}{T}=\frac{2.5c}{20+273}=8.53\times10^{-3}c\ (5\text{ 分})$$

总熵变为

$$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2<0\quad(5\text{ 分})$$

孤立体系的总的熵减小了，违背了热力学第二定律，因此这样的机器是不可能造成的。（10

分）

【题 12】（复赛简单题难度，开口系和闭口系的热力学第一定律）
（1）有一储气罐，设其内部为真空，现连接于输气管道进行充气。已知输气管内气体状态始终保持稳定，单位质量的焓为 h （$h = u + pv$，v 为单位质量体积）。若经过 t 时间充气后，储气罐内气体的质量为 m，求罐内气体的单位质量内能为 u'。如忽略充气过程中宏观动能即重力势能的影响，而且认为管路和储气罐是绝热的。（20 分）
（2）若储气罐中原有的气体质量为m_0, 单位质量内能为u_0。经 t 时间充气后储气罐内气体质量为 m, 求现在单位质量内能 u'。（20 分）
【解 12】
（1）取 t 时间内进入储气罐内的气体为系统，对其使用热力学第一定律：
$\Delta U = Q + W$（5 分）
由管道和储气罐绝热可知进入储气罐的气体不会和外接换热，同时管道内部气体均匀因此不会换热，因此 $Q = 0$ 外界对系统做功为 mpv（5 分）
系统内原有的内能为 mu（5 分）
代入热力学第一定律得：

$$mu' = mu + mpv = mh$$

即

$$u' = h \text{（5 分）}$$

（2）取 t 时间内进入储气罐内的气体和储气罐内原有的气体为系统，对其使用热力学第一定律：
$\Delta U = Q + W$（5 分）
由管道和储气罐绝热可知进入储气罐的气体不会和外接换热，同时管道内部气体均匀因此不会换热，因此 $Q = 0$ 外界对系统做功为$(m - m_0)pv$（5 分）
系统内原有的内能为$(m - m_0)u + m_0u_0$（5 分）
代入热力学第一定律得：

$$mu' = (m - m_0)u + m_0u_0 + (m - m_0)pv = (m - m_0)h + m_0u_0$$

即

$$u' = \frac{(m-m_0)h + m_0u_0}{m} \text{（5 分）}$$