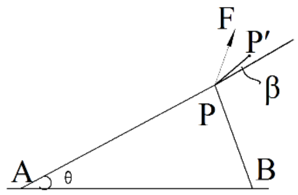
模拟卷（二）解答

1.（40 分）

（1）在 F 的作用下，P 点移至 P′，设 PP′ 与$\overrightarrow{AP}$的夹角为β，PP′ =r，（注：由 k 极大，故γ极小）。



$$\begin{cases} AP\text{的拉伸量为}\Delta x_1 = r\cos\beta \quad \sim ① \\ BP\text{的拉伸量为}\Delta x_2 = r\sin\beta \quad \sim ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} AP\text{的受力为}F_1 = F\cos\alpha \quad \sim ③ \\ BP\text{的受力为}F_2 = F\sin\alpha \quad \sim ④ \end{cases}$$

由于同种材质粗细，k_{AP}=ktanθ ～ ⑤

$$\begin{cases} F_1 = k_{AP}\cdot\Delta x_1 \quad \sim ⑥ \\ F_2 = k\cdot\Delta 2 \quad \sim ⑦ \end{cases}$$

结合以上式可得：tanβ=tanθ • tanα ～ ⑧

故$\sin\beta=\frac{\tan\theta\cdot\tan\alpha}{\sqrt{1+（\tan\theta\cdot\tan\alpha）^2}}$ ～ ⑨

由⑨：Fsinα=krsinβ

等效 k′ =$\frac{F}{r}$ ～ ⑩

均 k′ =k • $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ ～ ⑪

代入⑨：$k'=\frac{\tan\theta\cdot k}{\cos\alpha\cdot\sqrt{1+（\tan\theta\cdot\tan\alpha）^2}}$ ～ ⑫

（2）两题意需α = β ～⑬

由⑧式： tanα=tanθ • tanα ～⑭

或tanθ=1 ～⑮

1° 若θ=45°，不管α为何值都能满足 ～⑯

2° 若θ≠45°，则需tanα=0

故：α=0 ～⑰

3° 若θ≠45°，α可取$\frac{\pi}{2}$,

分析得 ～⑱

① ～④每式 2 分 ⑤式 4 分 ⑩式 3 分 ⑬式 3 分 其余各 2 分

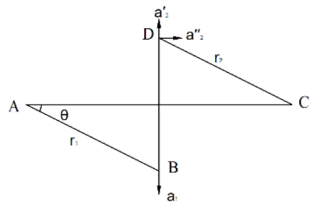
2、（40 分）

各假设的量如图

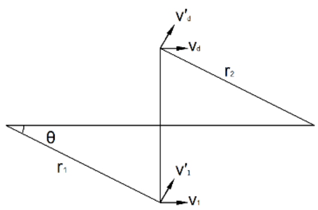
再设 DB=L

由几何关系得 $V_0=V_1=\omega y$ ～① 2″

V_1、V_0 为 V_1 和 V_0 在 r_1r_2 的垂直分量



图二



图一

假设 AC 绳分别与 A、C 轮固定（这样不影响解题结果）

对 AB：$\ddot{r}_1-\frac{V_1{'}^2}{r_1}=a_1\sin\theta$ ~② 5″

由 $a_1=\omega^2 y$　$V_1'=\omega y\sin\theta$代入：$\ddot{r}_1-\frac{(\omega y\sin\theta)^2}{r}=\omega^2 y\sin\theta$ ~③ 4″

对 DC：$\ddot{r}_2-\frac{V_0'}{r_2}=a_2'\sin\theta-a_2''\cos\theta$ ~④ 5″

由 $a_2'=\frac{V^2}{2y}=\frac{1}{2}\omega^2 y$，$V_0'=\omega y\sin\theta$代入：$\ddot{r}_2-\frac{(\omega y\sin\theta)^2}{r}=\frac{1}{2}\omega^2 y\sin\theta-a_2''\cos\theta$ ~⑤ 4″

$\ddot{L}=-(\ddot{r}_1+\ddot{r}_2)$ ~⑥ 5″

对 BD：　$a_1+a_2'=\ddot{L}$ ~⑦ 5″（注：因为 BD 没有角速度）

联合③⑤⑥⑦：$a_2''=\frac{\omega^2 y}{\cos\theta}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sin\theta+2sin^3\theta\right)$ ~⑧ 3″

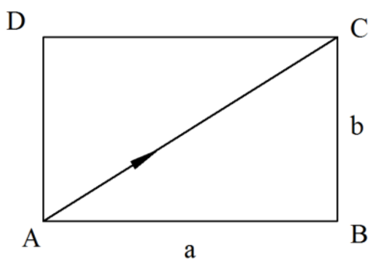
或 $a_2''=\dfrac{\omega^2 y\left[\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]}{x/\sqrt{x^2+y^2}}$ ~⑧ 2″

由$a_D=\sqrt{a_{2'}+a_{2''^2}}$

得：$a_D=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\omega^2 y\right)^2+\left(\dfrac{\omega^2 y\left[\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]}{x/\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}$ ~⑨ 5″

3、（30 分）设绕 A 轴得转量为 I=kmab

分析略



可得 $I=\frac{1}{3}m(a^2+b^2)$ ~① 8″

设 $T=\eta I^{\alpha}\cdot(mg)^2\cdot\gamma_c{}^{\gamma}$ ~ ② 3″

分析略

得 $\alpha=\frac{1}{2}$　8″

加上 m 在中心时，$I'=\frac{1}{3}m(a^2+b^2)+m\cdot\frac{1}{\varphi}(a^2+b^2)$ ~③ 4″

故 $I'=\frac{7}{12}m(a^2+b^2)$ ~④ 2″

$\frac{T'}{T}=\frac{I'^{\alpha}}{I^{\alpha}}$ ~⑤ 8″

注：可证明与 mg、r_c无关

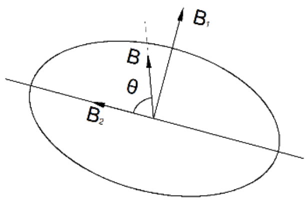
故$\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{T}{4}}$ ~⑥　5″

4、（40 分）分解如图

$B_1=B\sin\theta\sin(\omega t)$ ~① 2″

$B_2=B\cos\theta\sin(\omega t)$ ~② 2″

B_1 对盘面有感应电场 E（r）（绕 B_1 旋转方向）



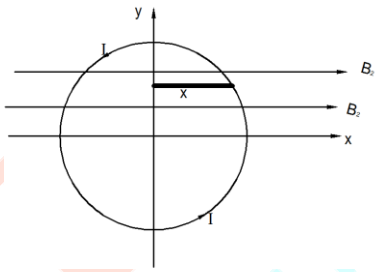
$E\cdot 2\pi r=\pi r^{2}\frac{dB_1}{dt}$ ~③ 5″

得 $E=\frac{1}{2}\omega B\sin\theta\cos(\omega t)\cdot\gamma$ ~④ 2″

有定义得面电流密度为 $j=\sigma E$ ~⑤ 5″

$j=\frac{1}{2}\sigma\omega B\sin\theta\cos(\omega t)\cdot\gamma$ ~⑥ 5″

设一个电流为 I 的环形电流在 B_2 作用下力矩为 M
如右图， $dM=(B_2 I dy)\cdot x$ ~⑦ 4″
故 $M=B_2 IS$ ~⑧ 5″ (注：S 为环形面积)
回到题中，由⑧式：

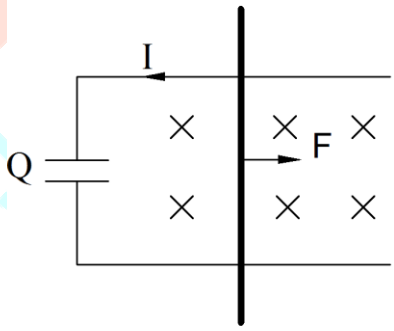


$\int dM=\int_0^R B_2\pi r^2 j 2\pi r\,dr$ ~⑨ 4″

故 $M=\frac{1}{5}\Pi R^5\omega B^2\sigma\sin\theta\cos\theta\sin(\omega t)\cos(\omega t)$ ~⑩ 4″

$(M)_{mac}=\frac{1}{10}\Pi R^5\omega B^2\sigma\sin\theta\cos\theta$ ~⑪ 2″

5、(50 分) 下滑为 $F=mg\sin\theta$
设在无磁场中加速度为 $a_2=g\sin\theta$ ~① 2″
设在磁场中加速度为 a_1，电流为 I,电容电荷为 Q.



$\frac{Q}{C}=BLV$ ~② 2″

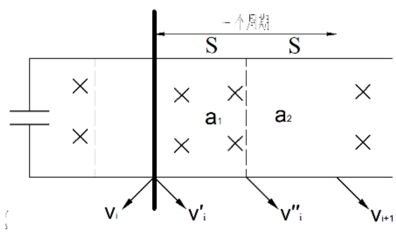
两边同时对时间求导：$I=BLa_1$ ~③ 1″
$F-BLI=ma_1$ ~④ 3″

代入③： $a_1=\frac{mg\sin\theta}{m+CB^2L^2}$ ~⑤ 2″

分析整个过程，在某个周期中，设刚过 x 时速度为 v_i，此时电荷 Q=0，经过极短时间速度为 v_i'，离开磁场时速度为 v_i''，到达下一个磁场边界为 v_{i+1}
1° 分析 $v_i\sim v_i'$过程，设受磁力为 F′ (由于 F′ »F，可忽略 F)
$F'=BLI$ ~⑥ 2″

$$\begin{cases}F'\Delta t=m\Delta v & \sim⑦\ 2''\\ F'\Delta t=BL\Delta Q & \sim⑧\ 2''\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta v=v_i-v_i' & \sim⑨\ 2''\\ \Delta Q=cBLv_i' & \sim⑩\ 3''\end{cases}$$



故 $v_i'=\frac{m}{m+cB^2L^2}\cdot v_i$ ~⑪ 4″

2° $v_i'\sim v_i''$过程：
$v_i''^2=v_i'^2+2a_1S$ ~⑫ 3″
3° $v_i''\sim v_{i+1}$过程：
$v_{i+1}^2=v_i'^2+2a_1S+2a_2S$ ~⑬ 3″

整理⑬式：$v_{i+1}^2=\left(\frac{m}{m+cB^2L^2}\right)^2\cdot v_i^2+2s(a_1+a_2)$

设上式为 $v_{i+1}^2=\alpha v_i^2+\beta$ ~⑭ 4″

上式可写成 $\left(v_{i+1}^2+\frac{\beta}{\alpha-1}\right)=\alpha\left(v_i^2+\frac{\beta}{\alpha-1}\right)$ ~⑮ 4″

对⑮式从 i=1→i=i:

$\left(v_2{}^2+\frac{\beta}{\alpha-1}\right)=\alpha\left(v_1{}^2+\frac{\beta}{\alpha-1}\right)$

$\left(v_3{}^2+\cdots\right)=\alpha\left(v_2{}^2+\cdots\right)$

故$v_i^2=\alpha^{i-1}\left(v_1{}^2+\frac{\beta}{\alpha-1}\right)$ ~⑯ 5″

由于$v_1=0$

$v_i^2=\alpha^{i-1}\cdot\frac{\beta}{\alpha-1}$ ~⑰ 3″

故$v_i=\left(\frac{m}{m+cB^2L^2}\right)^{i-1}\cdot\left(g\sin\theta+\frac{mg\sin\theta}{m+cB^2L^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{2s(m+cB^2L^2)}{cB^2L^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ ~⑱ 2″

附：可知 i→∞时趋于稳定周期

6、(30 分)

(1) 设等效电阻为 R

$R=\int_{r_1}^{r_2}\rho\frac{dn}{4\pi r^2}$ ~① 3″

故：$R=\frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$ ~② 2″

故：$I=\frac{4\pi U}{\uparrow\rho}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^{-1}$ ~③ 2″

(2) $P=\frac{U^2}{R}=\frac{4\pi U^2}{\rho}\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^{-1}$ ~④ 5″

(3)r_1至任意 r 的热功率由④得：

$P(r)=\frac{4\pi U^2}{\rho}\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)^{-1}=\frac{4\pi U^2}{\rho}\cdot\frac{r\cdot r_1}{r-r_1}$ ~⑤ 4″

设吸热功率为 η

$-k4\pi r^2\frac{dT}{dr}=\eta+P(r)$ ~⑥ 5″

$-4\pi k dT=\left[\frac{1}{r^2}\eta+\frac{4\pi U^2}{\rho}\frac{r_1}{r(r-r_1)}\right]dr$ ~⑦ 3″

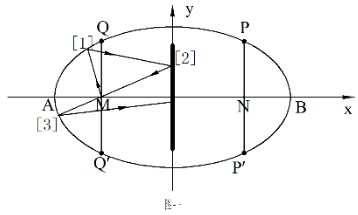
由$\frac{r_1}{r(r-r_1)}=\frac{1}{r-r_1}-\frac{1}{r}$ 代入上式并积分

$-4\pi k(T_2-T_1)=-\eta\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)+\frac{4\pi U^2}{\rho}\Big/n\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)$ ~⑧ 3″

故 $\eta=\left[\frac{4\pi U^2}{\rho}\Big/n\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)+4\pi k(T_2-T_1)\right]\cdot\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)^{-1}$ ~⑨ 3″

7、(50 分)

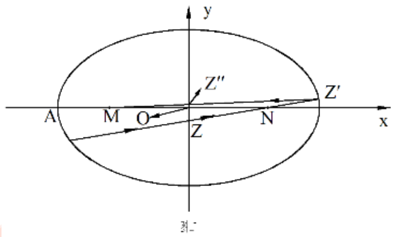
（1）作曲线QMQ′ ⊥X轴PNP′ ⊥y轴



可得：MQ=NP=$\frac{b^2}{a}$ ~① 2″

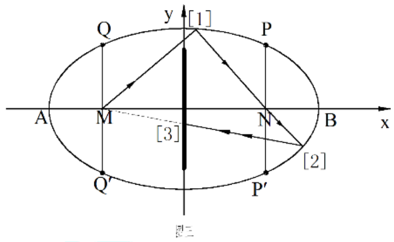
由R=$\frac{b^2}{a}$得:M发出向$\widehat{QAQ'}$的光经反射一定到达镜左侧 ~② 3″

1° 现在研究M发出至$\widehat{QAQ'}$的某条光线（如上图）
M发出到达[1]后的像点为N ~③ 2″
到达镜左侧[2]后会经过M点 ~④ 3″
重复上述后，光线与x轴走向会越来越小~⑤ 3″
故 M 发出至$\widehat{QAQ'}$ 的光要么从 A 发出要么进入镜的孔 ~⑥ 2″



若进入镜孔OZ⟹一定会经过N点，到达Z′ 点，其反射光会经过M点，可发现$\overline{OZ}>OZ''$
~⑦ 4″
故光线不会被镜右侧吸收 ~⑧ 2″

故：M发出至$\widehat{QAQ'}$ 的光会全从A出去，功率为$\frac{1}{2}$P ~⑨

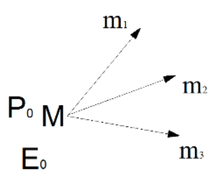


2° 研究角PMQ范围的光线，M发出至[1]，反射经过N ~
到达[2]后反射一定经过M ~⑪ 2″
故此范围光会被镜右侧吸收 ~⑫ 3″
3° 研究PMN范围的光反向延长线过N点 ~⑬ 2″
到达[2]后反射光会过M点 ~⑭ 3″
到达[3]后，又回到2° 位置
故 PMN范围的光会被镜吸收 ~⑮ 3″

总结：M发出的光，有$\frac{1}{2}$P功率会从A发出 ~⑯ 2″

（2）根上问， $\widehat{QAQ'}$的光一定能发出去，$\widehat{QP}$与PMN的情况相同，故只需研究2°
研究图（三）
光到达[2]后与1° 呈对称的光路 ~⑰ 3″
故光线与x轴的夹角会越来越小，至到达孔出去为止 ~⑱ 4″
故：所有光线都从A出去，功率为P ~⑲ 3″

8.（40分）



m_1， $\vec{p}_1$(动量)， P_1(四维动量)， E_1（能量）， E_{10}（静能量）

m_2， $\vec{p}_2$， P_2, E_2, E_{20}

m_3， $\vec{p}_3$， P_3, E_3, E_{30}

$P_0=P_1+P_2+P_3$ ~ ① 3″
$(P_0-P_1)^2=(P_2+P_3)$ ~② 5″
展开： $P_0^2+P_1^2-2P_0P_1=P_2^2+P_3^2+2P_2P_3$ ~③ 2″

$-M^2C^2-M_1^2C^2+\frac{E_1E_0}{C^2}=-M_2^2C^2-M_3^2C^2+2(P_2P_3\cos\alpha-\frac{E_2E_3}{C^2})$ ~④ 5″

整理：$E_0E_1=M^2C^4+m_1^2c^4-m_2^2c^4-m_3^2c^4+2(P_2P_3C^2\cos\alpha-E_2E_3)$ ~⑤ 2″
只需分析右边括号α的取值

显然$\cos\alpha=1$ 能使 E_1 极大

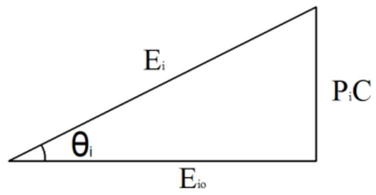
右边括号=$P_2C\cdot P_3C-E_2E_3$~⑥ 5″

右图中$\begin{cases} P_{IC}=E_{i0}\tan\theta\sim⑦\ 3'' \\ E_{i0}\cdot\frac{1}{\cos\theta_i}\sim⑧\ 3'' \end{cases}$

故括号=$E_{20}\tan\theta_2\cdot E_{30}\tan\theta_3-E_{20}E_{30}\cdot\frac{1}{\cos\theta_2}\cdot\frac{1}{\cos\theta_3}$~⑨ 2″

$=E_{20}E_{30}\ (\frac{\sin\theta_2\sin\theta_3-1+\cos\theta_2\cos\theta_3}{\cos\theta_2\cos\theta_3})$~⑩ 3″

$=E_{20}E_{30}\ (\frac{\cos(\theta_2-\theta_1)}{\cos\theta_2\cos\theta_3}-1)$ ~⑪ 3″



$\theta_2=\theta_1$时括号取极大值： $-E_{20}E_{30}$

均（E_1）$_{max}$=$\frac{1}{E_0}\cdot(M^2C^4-m_1^2c^4-m_2^2c^4-m_3^2c^4-2m_2c^2\cdot m_3c^2$~⑫ 4″