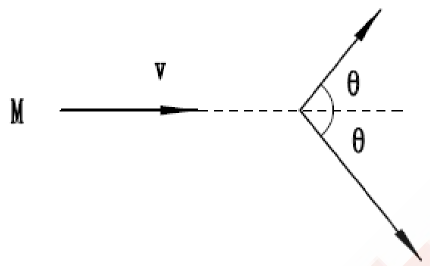
培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（九）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

1 设一个质量为 αM，则另一个质量为（1−α）M

取质心系（向右以速度v_0运动的参考系），设在质心系中，αM 物体速度v_1，则另一个质量为（1−



α）M 的物体速度为$\frac{\alpha v_1}{1-\alpha}$（质心系动量为 0）

ΔE=$\frac{1}{2}\mu u^2$，$\mu=\frac{\alpha M\cdot(1-\alpha)M}{M}=\alpha(1-\alpha)M$（2 分）

u=$v_1+\frac{\alpha}{1-\alpha}v_1=\frac{1}{1-\alpha}v_1$（1 分）

$\Delta E=\frac{1}{2}Mv_1^2\frac{\alpha}{1-\alpha}$　（1 分）

由正弦定理$\frac{v_0}{\sin\theta_1}=\frac{v_1}{\sin\theta}$（1 分）

$\frac{\alpha v_1}{(1-\alpha)\sin\theta}=\frac{v_0}{\sin\theta_2}=\frac{v_0}{\sin(\theta_1+2\theta)}$　（2 分）

得到v_1的两个表达式$v_1=\frac{v_0\sin\theta}{\sin\theta_1}$（1 分）

和$v_1=\frac{v_0(1-\alpha)\sin\theta}{\alpha\sin(\theta_1+2\theta)}$

有$v_1\frac{\alpha}{1-\alpha}=\frac{v_0\sin\theta}{\sin(\theta_1+2\theta)}$（1 分）

$\Delta E=\frac{1}{2}Mv_1\frac{\alpha}{1-\alpha}\ v_1$（1 分）

$\Delta E=\frac{1}{2}M\frac{v_0\sin\theta}{\sin\theta_1}\bullet\frac{v_0\sin\theta}{\sin(\theta_1+2\theta)}$（2 分）

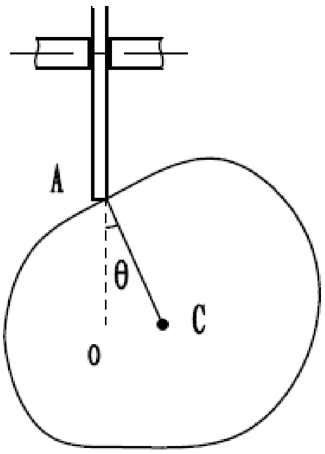
$\theta_1+\theta=\frac{1}{2}\pi$时对应最小放出能量（1 分）

$\sin\theta_1\sin(\theta_1+2\theta)=\cos^2\theta$　（1 分）

$\Delta E=\frac{I}{2}Mv_0^2\tan^2\theta$　（1 分）

2（1）$wL\sin\theta = v\cos\theta$（2 分）

$v = \omega L\tan\theta$ （2 分）



（2）$a = \dot{v} = w\dot{L}\tan\theta + \frac{\omega L}{\cos^2\theta}\dot{\theta}$（2 分）

$\dot{L} = v$ （2 分）

由余弦定理$L^2 + \rho^2 - 2L\rho\cos\theta = \overline{OO'}^2$ （2 分）

对时间求导 AO 间距不变，对时间导数为 0（1 分）

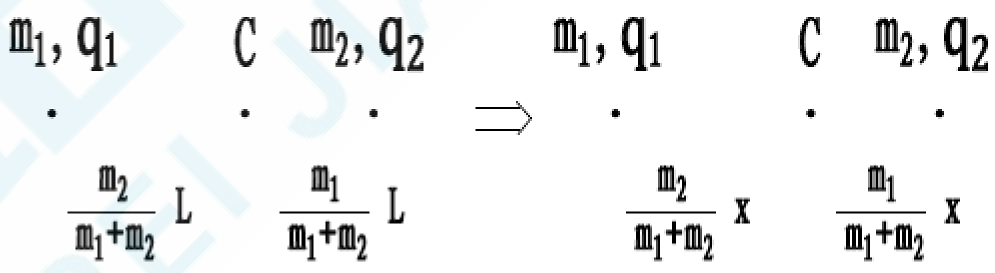
ρ 瞬时不变，对时间导数为 0（1 分）

余弦定理表达式对时间求导$2L\dot{L} - 2\dot{L}\rho\cos\theta + 2L\rho\sin\theta\cdot\dot{\theta} = 0$（2 分）

$\dot{\theta} = \frac{-L\dot{L}+\rho\dot{L}\cos\theta}{L\rho\sin\theta}$（2 分）

代入$\dot{L} = v$ 得到$\dot{\theta} = \frac{(-L+\rho\cos\theta)v}{L\rho\sin\theta} = \frac{(-L+\rho\cos\theta)\omega}{\rho\cos\theta}$（2 分）

所以 a=$\omega^2 L\tan^2\theta + \frac{(-L+\rho\cos\theta)\omega^2 L}{\rho\cos^3\theta}$（2 分）



3 设

再次相对速度为 0 时，相距为 x

取质心系则惯性力不做功

电荷 1 运动了距离$\frac{m_2}{m_1+m_2}(L - x)$（2 分）

电荷 2 运动了距离$\frac{m_1}{m_1+m_2}(L - x)$（2 分）

$\frac{kq_1q_2}{x}+Eq_1\frac{m_2}{m_1+m_2}(L-x)-Eq_2\frac{m_1}{m_1+m_2}(L-x)=\frac{kq_1q_2}{L}$（3 分）

$\frac{kq_1q_2}{xL}(L-x)=E\frac{m_1q_2-m_2q_1}{m_1+m_2}(L-x)$（2 分）

X=$\frac{kq_1q_2(m_1+m_2)}{EL(m_1q_2-m_2q_1)}$（2 分）

X<L 时，即$\frac{kq_1q_2(m_1+m_2)}{E(m_1q_2-m_2q_1)}<L^2时$，最近为 X=$\frac{kq_1q_2(m_1+m_2)}{EL(m_1q_2-m_2q_1)}$（2 分）

X>L 时，即$\frac{kq_1q_2(m_1+m_2)}{E(m_1q_2-m_2q_1)}>L^2时$，最近为 L（2 分）

4(1)在外部放一电荷 Q，等效电荷为

① 电荷 Q，在距 O 为 a 处（1 分）

② 电荷$-\frac{R}{a}Q$，在 OQ 连线上距 O 为$\frac{R^2}{a}$（1 分）

③ 电荷$\frac{R}{a}Q$，在 O 点（1 分）

在内部放一电荷 Q，在外部等效电荷为放在中心 O 的 Q（1 分）

在内部放一电荷 Q，在内部等效电荷为

① 电荷 Q，在距 O 为 b 处（1 分）

② 电荷$-\frac{R}{b}Q$，在 OQ 连线延长线上距 O 为$\frac{R^2}{b}$（1 分）

（2）计算电能时要还原电荷原本位置$E=\sum\frac{1}{2}\varphi_iq_i$

球壳上净电荷为 0 且等势，造成静电能为 0（1 分）

计算点电荷电势时不考虑自己造成的$\varphi=\frac{K\frac{R}{a}Q}{a}-\frac{k\frac{R}{a}Q}{a-\frac{R^2}{a}}$（1 分）

$\varphi=kRQ\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2-R^2}\right)$（2 分）

$E=\frac{1}{2}kRQ^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2-R^2}\right)$（1 分）

（3）计算电能时要还原电荷原本位置$E=\sum\frac{1}{2}\varphi_iq_i$

球壳上净电荷为 0 且等势，造成静电能为 0（1 分）

计算点电荷电势时不考虑自己造成的，不考虑 Q 的影响

球壳上净电荷为 0，则在球心 O 造成电势为 0，$\varphi_O=0$（1 分）

在内部仅考虑电荷$-\frac{R}{b}Q$，在 OQ 连线延长，线上距 O 为$\frac{R^2}{b}$

从 O 到电荷 Q 处电势变化$\varphi=-K\frac{R}{b}Q$（$\frac{1}{\frac{R^2}{b}-b}-\frac{1}{\frac{R^2}{b}}$）（1 分）

$\varphi=-kRQ$（$\frac{1}{R^2-b^2}-\frac{1}{R^2}$）（1 分）

$E=-\frac{1}{2}kRQ^2\left(\frac{1}{R^2-b^2}-\frac{1}{R^2}\right)$（1 分）

(4)此时壳上净电荷不为 0，但壳电势为 0，故壳上电荷静电能仍为 0

此时壳内壁有电荷−Q，造成 O 点电势为$\varphi_O=-k\frac{Q}{R}$（1 分）

造成额外电势能ΔE=$-\frac{1}{2}k\frac{Q^2}{R}$（1 分）

$\mathrm{E}=-\frac{1}{2}kRQ^2\left(\frac{1}{\mathrm{R}^2-\mathrm{b}^2}-\frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)-\frac{1}{2}k\frac{Q^2}{R}$（1 分）

$\mathrm{E}=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{kRQ}^2}{\mathrm{R}^2-\mathrm{b}^2}$（2 分）

（5）球壳上净电荷为 0 且等势，造成静电能为 0

内壳有电荷−Q，外壳有电荷+Q

O 点电势为$\varphi_O=-k\frac{Q}{r_1}+k\frac{Q}{r_2}$（1 分）

点电荷 Q 处电势

$\varphi=-kr_1Q\left(\frac{1}{{r_1}^2-\mathrm{b}^2}-\frac{1}{{r_1}^2}\right)-k\frac{Q}{r_1}+k\frac{Q}{r_2}$（1 分）

$\varphi=-kr_1Q\left(\frac{1}{{r_1}^2-\mathrm{b}^2}-\frac{1}{r_1r_2}\right)$（2 分）

$\mathrm{E}=-\frac{1}{2}kr_1Q^2\left(\frac{1}{{r_1}^2-\mathrm{b}^2}-\frac{1}{r_1r_2}\right)$（1 分）

(6)电荷分布的本质为外壳+Q 均匀分布，内壳包含均匀分布的部分和非均匀分布的部分，总量−Q

外壳电荷对球内任意一点造成电势

$\varphi=k\frac{Q}{r_2}$（1 分）

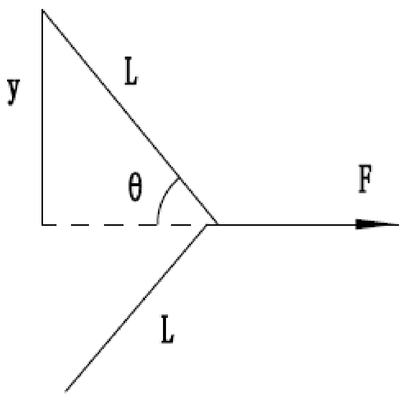
对空腔球心o_1，电势为$\varphi_{o_1}=k\frac{Q}{r_2}-k\frac{Q}{r_1}$（1 分）

故结果与上问相同

$\mathrm{E}=-\frac{1}{2}kr_1Q^2\left(\frac{1}{{r_1}^2-\mathrm{b}^2}-\frac{1}{r_1r_2}\right)$（2 分）

5（1）$v_x=a_ct$（1 分）

$F=2ma_c$，$a_c=\frac{F}{2m}$（1 分）



仅需求 t 即可，取质心系，由动能定理（惯性力不做功）

FLcos θ $=\frac{1}{2}mv_y^2\times 2$（1 分）

$v_y=\sqrt{\frac{FL\cos\theta}{m}}$ （1 分）

$\cos\theta=\frac{\sqrt{L^2-y^2}}{L}$ （1 分）

$v_y=\sqrt{\frac{F\sqrt{L^2-y^2}}{m}}$ （1 分）

$y=L\sin\theta$ （1 分）

$\mathrm{dt}=\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{v_y}}$（此处未关注符号，默认各物理量为正）

$\mathrm{dt}=\sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{F}}}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{L}}\right)}{\left(1-\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{L}^2}\right)^{\frac{1}{4}}}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}}$ （1 分）

$\mathrm{t}=\sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{F}}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{L}}\right)}{\left(1-\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{L}^2}\right)^{\frac{1}{4}}}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}}=1.197\sqrt{\frac{mL}{F}}$（1 分）

$v_x=0.60\sqrt{\frac{FL}{m}}$ （1 分）

（2）由$F_x=-ax^2$，积分得势能

$Ep=\int_0^x ax^2\,dx=\frac{1}{3}ax^3$ （1 分）

$\mathrm{E}=\frac{1}{3}\alpha A^3$（1 分）

$E_k=\frac{1}{2}mv^2$ （1 分）

$E_k=\frac{1}{3}\alpha(A^3-x^3)$ （1 分）

故 $\mathrm{v}=\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\alpha}{m}(A^3-x^3)}$（1 分）

$\mathrm{dt}=\frac{dx}{v}=\frac{A\,d\left(\frac{x}{A}\right)}{\sqrt{\frac{2\alpha}{3m}(A^3-x^3)}}=\frac{A\,d\left(\frac{x}{A}\right)}{\sqrt{\frac{2\alpha}{3m}A^3\left(1-\left(\frac{x}{A}\right)^3\right)}}$（2 分）

$\mathrm{T}=4\sqrt{\frac{3\mathrm{m}}{2\alpha\mathrm{A}}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{A}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{A}}\right)^3}}$（2 分）

由于计算器的限制，1 不能取到

$$\mathrm{T}=4\sqrt{\frac{3\mathrm{m}}{2\alpha\mathrm{A}}}\int_0^{0.99999}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{A}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{A}}\right)^3}}$$

得 $\mathrm{T}=6.85\sqrt{\frac{m}{\alpha A}}$（1 分）

6 由对称性，易知光路对称

经凹透镜L_3时$u_3=v_3$（2 分）

① 由$\frac{1}{u_3}+\frac{1}{v_3}=\frac{1}{-f}$（1 分）

得$u_3=v_3$=−2f（1 分）

经凸透镜时$\frac{1}{x}+\frac{1}{2f+d}=\frac{1}{f}$（2 分）

得 x=$\frac{f(2f+d)}{f+d}$（1 分）

② $u_3=v_3$=0（1 分）

即光线在凹透镜中心汇聚，此时仍满足对称光路

$\frac{1}{x}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f}$（2 分）

得 $x=\frac{fd}{d-f}$（1 分）

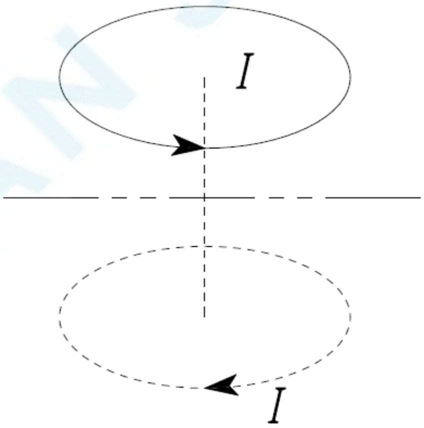
讨论当 d>f 时，x=$\frac{f(2f+d)}{f+d}$或$x=\frac{fd}{d-f}$（2 分）

讨论当 d<f 时，x=$\frac{f(2f+d)}{f+d}$（2 分）

7、(1) 通电圆环悬浮在 z=h 处，超导体的内部磁感应强度为零而表面外侧磁感应强度与表面平行，这可等效为通电圆环与它的像电流——在 z=-h 虚设一个相同的通以反向电流的环——共同产生的结果，如图所示，通电圆环必须有其所受重力与像电流施予的磁场力相平衡，由 r<<h 这个条件，将两环形电流近似为反向平行电流：

mg= F （F 为安培力）（1 分）

$F=\frac{\mu_0}{2\pi}*\frac{I}{2h}*I*2\pi r$（2 分）

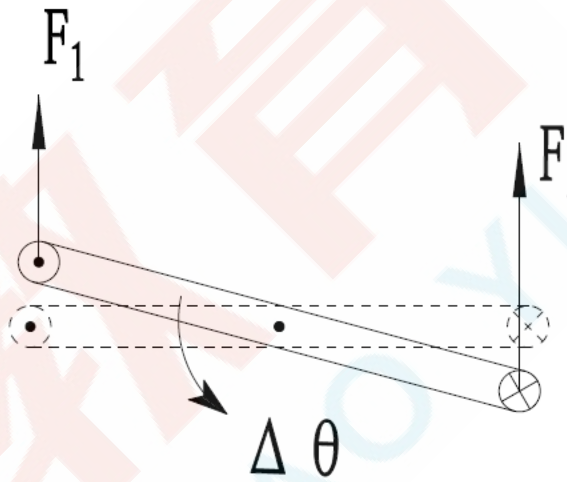


$I=\sqrt{\frac{2mgh}{\mu_0 r}}$（2 分）

（2）若令圆环水平地上下振动，当与平衡位置有任一位移（如向下 x）时，$\sum F = mg - \frac{\mu_0 r I^2}{2(h-x)} \approx mg - \frac{\mu_0 r I^2}{2h}\left(1+\frac{x}{h}\right) = -\frac{\mu_0 r I^2}{2h^2}x$ （3 分），可见为一简谐运动，回复力常数$\frac{\mu_0 r I^2}{2h^2} = \frac{mg}{h}$ （2 分）

则 $T_1=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$（2 分）

（3）当以 P_1P_2 为轴作小幅摆动时，圆环转动惯量 $J=\frac{1}{2}mr^2$（1 分），当有一小量角位移 Δθ 时，如图所示，有合力矩：



$\sum M=(F_1-F_2)r$（1 分）

$$= \frac{\mu_0 I^2 r^2}{2}\left(\frac{1}{2h+r*\Delta\theta}-\frac{1}{2h-r*\Delta\theta}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 r^2}{4h}\left[\left(1-\frac{r}{2h}*\Delta\theta\right)-\left(1+\frac{r}{2h}*\Delta\theta\right)\right]$$

$$= -\frac{\mu_0 I^2 r^2}{4h^2}\Delta\theta = -\frac{mgr^2}{2h}\Delta\theta$$，（4 分）

则 $T_2= 2\pi\sqrt{\frac{J}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mr^2}{\frac{mgr^2}{2h}}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$（2 分）

8（1），$qv_0B=\frac{mv_0^2}{r_0}$ （2 分） $r_0 = \frac{mv_0}{qB} = 3.41\text{x}10^{-3}m$(3 分)

（2）设$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c^3}=k$，近似有$a=\omega^2 r$（1 分）

则辐射功率 $P=k(\omega^2 r)^2$（1 分）

磁场中$\omega=\frac{v}{r}=\frac{qB}{m}$为一常量（1 分）

$dE=k(\omega^2 r)^2 dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$（1 分）

$v=\omega r$ （1 分）

$dE=k(\omega^2 r)^2 dt = d\left(\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right)$（2 分）

dE= $k\omega^4 r^2 dt = m\omega^2 r dr$

$\frac{k\omega^2}{m}dt = \frac{dr}{r}$（1 分）

$r = r_0 e^{-\frac{q^4B^2t}{6\pi\varepsilon_0 C^3 m_e{}^3}}$（2 分）

检验$\frac{d(\omega r)}{dt}$ / $\omega^2 r$=$\frac{q^3B^1}{6\pi\varepsilon_0 C^3 m_e{}^2} = 1.1x10^{-14}$（1 分）

故忽视切向加速度的近似有效（1 分）

(3)代入 r=0.5r_0

t=3.59x10$^4 s$（3 分）