培尖教育 2018 年学科竞赛夏令营物理模拟卷（十七）

考试时间：150 分钟　总分 320 分

（参考答案）

学校：________ 姓名：________ 学号：________

装 订 线

题一.

对绳子上一小段微元作受力分析，得

$$dT=\mu dN \qquad 6'$$

$$dN=Td\alpha=T\frac{dl}{\rho} \qquad 6'$$

设椭圆上一点对两焦点的张角为2β，将曲率半径取一阶近似得

$$\rho=\frac{p}{\cos^3\beta}\approx p \qquad 7'$$

将几何关系取一阶近似得

$$dl=\sqrt{(dr)^2+(rd\theta)^2}=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon p\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\right)^2+\left(\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}\right)^2}d\theta\approx\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}d\theta \qquad 7'$$

联立得微分方程并取一阶近似得

$$\frac{dT}{T}=\frac{\mu d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\approx\mu(1-\varepsilon\cos\theta)d\theta \qquad 7'$$

积分得

$$F\approx mg\frac{e^{\mu\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)}}{e^{\mu\varepsilon\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)}}\approx mge^{\frac{\mu\pi}{2}}(1+\mu\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)\approx mge^{\frac{\mu\pi}{2}} \qquad 7'$$

题二.假设经历 2k 次碰撞后速度为v_{2k}，则：

质量

$$M_{2k}=(3\mathrm{k}+1)\mathrm{m} \qquad 5'$$

与 2m 木块的碰撞：

$$\frac{1}{2}M_{2k}v_{2k}^2+(F-\mu M_{2k}g)L=\frac{1}{2}M_{2k}u_1^2 \qquad 5'$$

$$M_{2k}u_1=(M_{2k}+2m)u_2 \qquad 5'$$

与 m 木块的碰撞

$$\frac{1}{2}(M_{2k}+2m)u_2^2+[F-\mu(M_{2k}+2m)g]L=\frac{1}{2}(M_{2k}+2m)u_3^2 \qquad 5'$$

$$(M_{2k}+2m)u_3=M_{2(k+1)}v_{2(k+1)} \qquad 5'$$

由以上各式，得到递推式

$$E_{k+1}=\frac{3k+1}{3k+4}E_k+\frac{6k+4}{3k+4}FL-\frac{(3k+1)^2+(3k+3)^2}{3k+4}\mu mgL \qquad 5'$$

其中，E_k是第 2k 次碰撞后整体的动能

$E_k = \frac{1}{2} M_{2k} v_{2k}^2$ 5’

由此解得：

$v_{2n} = \frac{1}{3n+1}\sqrt{(14+6n)n\frac{FL}{m} - (12n^3+42n^2+50n)\mu gL}$ 5’

题三.

$2mR^2\omega_0 + 2m(\frac{R}{2})^2\omega_0 = (2mR^2+mr^2)\omega_2 + m(\frac{R}{2})^2\omega_2 + m(R^2+\frac{1}{4}R^2 - 2R\cdot\frac{1}{2}R\cos(\alpha))\omega_2 - \frac{1}{2}qBr^2$ 7’

$\frac{1}{2}(2mR^2\omega_0 + 2m(\frac{R}{2})^2)\omega_0 = \frac{1}{2}((2mR^2+mr^2)+m(\frac{R}{2})^2 + m(R^2+\frac{1}{4}R^2-2R\cdot\frac{1}{2}R\cos(\alpha)))\omega_2^2$ 7’

分析几何关系可得 $r = R - 2\cdot\frac{1}{2}R\cos(\alpha) = R(1-\cos(\alpha))$ 7’

带入 r 并联立两式消去 ω_2，有

$(1+\frac{qB}{5m\omega_0}(1-\cos(\alpha))^2)^2 = \frac{2}{5}(\cos^2(\alpha) - 3\cos(\alpha) + \frac{9}{2})$ 7’

代入数据，打表得 $\cos(\alpha) = 0.1335$

$\alpha = 82.33^\circ$ $\omega_2 = 0.413\frac{qB}{m}$ 6’*2=12’

题四.

（1）电偶极子的等效电流元大小

$Idl = \frac{dQ}{dt}dl = \frac{dp}{dt} = \omega p_0 \cos\omega t$① 7’

（2）

$I\left(t-\frac{r}{c}\right)dl = \omega p_0 \cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$ 4’

$\frac{d\vec{l}\times\vec{e_r}}{r} = \frac{dl}{r}sin\theta$ 4’

(r,θ,φ)处的磁场

$\vec{B}_{wave} = \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{-\omega^2 p_0 \sin(\omega t - kr)\sin\theta}{r}\vec{e}_\varphi$②，其中 $k \equiv \frac{\omega}{c}$ 5’

（3）当 r 足够大时，电场只有 θ 方向分量是显著的。由法拉第电磁感应定律得

$(E_\theta + dE_\theta)(r+dr)d\theta - E_\theta r d\theta = -\frac{\partial B_{wave}}{\partial t}\cdot dr\cdot rd\theta$③ 4’

略去高阶小量得

$\frac{dE_\theta}{dr} + \frac{E_\theta}{r} = -\frac{\partial B_{wave}}{\partial t}$④ 4’

猜解，令

$$E_\theta=\frac{A}{r}\sin(\omega t-kr)$$ 4′

代入上式求得

$$A=-\frac{\mu_0}{4\pi}\omega^2 p_0\sin\theta ⑤$$ 4′

所以

$$E_\theta=-\frac{\mu_0}{4\pi r}\omega^2 p_0\sin\theta\sin(\omega t-kr)=-E_0\sin\theta\cdot\sin(\omega t-kr)$$ 4′

题五.根据轻微形变造成的能量变化来判断稳定性。设椭圆半长轴 a，半短轴 b

写下表面张力势能的表达式

$$E_s=2\pi\sigma b^2\left(1+\frac{a^2}{b\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$$ 8′

写下静电势能的表达式

$$E_e=\frac{kQ^2}{4\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$$ 8′

记离心率 e<<1，取最低阶近似得

$$E_s\approx 4\pi\sigma R^2\left(1+\frac{2}{45}e^4\right)$$ 8′

$$E_e\approx\frac{kQ^2}{2R}\left(1-\frac{1}{45}e^4\right)$$ 8′

若变化之后总势能升高，则稳定不解体，有

$$\sigma>\frac{kQ^2}{16\pi R^3}$$ 8′

反之，则失稳解体。

题六.

由 2.2K，3.9K 时的数据解得

$$p_0=1.6\times10^4 mmHg$$ 8′

$$L=108J\cdot mol^{-1}$$ 8′

稳恒条件，即单位时间内液氦蒸发吸热与物体冷却放热相等：

$$\frac{\Delta Q_{in}}{\Delta t}=\frac{\Delta Q_{out}}{\Delta t}=\frac{Lp_1}{RT_0}\cdot\frac{\Delta V}{\Delta t}$$ 8′

解得

$$p_1=0.173mmHg$$ 8′

由饱和蒸汽压函数得

$$T_1=\frac{L}{R\ln\frac{p_0}{p_1}}=1.14K$$ 8′

、

题七.

1 经过凸透镜成像：

$$\frac{1}{1.5f}+\frac{1}{v_1}=\frac{1}{f}$$ 3′

$$u_2=f-v_1$$ 3′

经过凹透镜成像：

$$\frac{1}{u_2}+\frac{1}{v_2}=\frac{1}{-f}$$ 3′

计算得像在凹透镜左侧 $2f$ 处，为虚像。 3′

2 由逐次成像法

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{v_1}=\frac{1}{f}$$ 3′

$$u_2=f-v_1$$ 3′

$$\frac{1}{u_2}+\frac{1}{x}=\frac{1}{-f}$$ 4′

4′

计算得 $x=\left(\sqrt{2}+1\right)f$ 。

3 对于任意位置的平面镜都会自准直，所以经过凹透镜的出射光必为平行光线，由此得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{v_1}=\frac{1}{f}$$ 3′

$$u_2=f-v_1$$ 3′

由于出射光为平行光，故

$$u_2=-f$$ 4′

得 $y=2f$ 。 4′

题八.

根据玻尔的假设，有方程组

$$mvr=\frac{nh}{2\pi} \qquad 2'$$

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=m\frac{v^2}{r} \qquad 2'$$

解出

$$r_n=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}n^2 \qquad 2'$$

$$v_n=\frac{e^2}{4n\pi\varepsilon_0 h} \qquad 2'$$

量子数为 n 时的总能量

$$E_n=\frac{mv^2}{2}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2} \qquad 2'$$

跃迁时光子能量来自原子能量的变化

$$\frac{hc}{\lambda}=E_m-E_n=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}\times\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right) \qquad 2'$$

故

$$R_H=\frac{me^4}{8\varepsilon_0^{\ 2}h^3 c}=1.097373\times10^7 m^{-1} \qquad 3'$$

原子理论中假定氢核是静止的，而氢核只比电子重约 1800 倍，这样的处理显然不够精确。实际情况是核与电子绕它们共同的质心运动，因此会有偏差和修正 7′

将以上方程组中的 m 换为折合质量 $\mu=\frac{Mm}{M+m}$，得到 $R=R_H\frac{M}{M+m}$，偏 8′

对于同一条谱线，由里德伯公式，有

$$\frac{\lambda_D}{\lambda_H}=\frac{R_H}{R_D} \qquad 5'$$

得

$$\frac{R_H}{R_D}=1-\frac{\lambda_H-\lambda_D}{\lambda_H}=0.999727 \qquad 5'$$