# 一、装水水瓶的回振现象（60分）

在一绝对粗糙桌面上，有一装水水瓶。限制其只能在桌面上作纯滚动运动。想象突然推动水瓶使其向前滚动，若水瓶内无水，不难想象它会匀速向前滚动。但若在水瓶内装水，由于水瓶内部水的运动，可能会导致水瓶向前滚动时快时慢，甚至出现瞬间停止或反方向滚动的“怪异”现象。本题旨在定量分析这一物理现象。为简化计算，将水瓶视作长度为，半径为，质量为的匀质圆柱面（只有侧面），桌面视为绝对粗糙平面，圆柱在上纯滚动。

## 复摆（8分）

复摆是指摆球质量不完全分布在一个点的摆，如右图所示。此模型的关键是如何处理水的运动。由于水在瓶内的摆动正是一种有质量分布的摆，我们希望通过复摆的知识帮助我们对水的运动进行进一步建模。

（1.1）假设复摆总质量为，绕悬点O转动惯量为，复摆质心到悬点距离为。我们把它等效为一个摆长、质量集中在一个点的单摆，请求出与该复摆周期相同、势能相同的等效单摆的摆长和等效摆球质量。

## 流体运动的复摆简化（27分）

本题我们采取最简单的模型，即将水视为如同冰一般的匀质固体，密度为，上表面水平，与圆柱的接触面光滑，并假设水面的高度角，即上表面对轴的半张角，如图所示为。试求：

（2.1）水的总质量。

（2.2）水相对圆柱轴的总转动惯量。

（2.3）水的质心与轴心的距离。

（2.4）利用第一部分的铺垫，求水相对水瓶轴线的等效摆长和等效摆球质量。

## 3. 水与水瓶的耦合运动（25分）

由前一小题的铺垫，该模型可以简化为纯滚圆柱的轴线上悬挂一个可以无摩擦自由转动的单摆，下面来计算他们的耦合运动。记水瓶的水平位移为，单摆朝正方向的角位移为。初始条件。

（3.1）求平衡位置附近单摆（或系统）的振动圆频率。（可暂时用等效摆长和等效摆球质量代入计算）

（3.2）求与随时间的变化，。（可暂时用等效摆长和等效摆球质量代入计算）

（3.3）求能发生水瓶回振现象的水面初始偏移满足的条件。

# 一、装水水瓶的回振现象（60分）

## 1. 复摆（8分）

（1.1，8**分**） 水的整体转角为 水的运动方程**（2分）**为

由

则振动圆频率为**（2分）**

类比单摆，则等效摆长为**（2分）**

等效摆球质量**（2分）**

## 2. 流体运动的复摆简化（27分）

（2.1，6**分**） 面积**（4分）**

总质量**（2分）**

（2.2，8**分**） 转动惯量微元**（3分）**

转动惯量**（5分）**

（2.3，8**分**） 由于匀质，则**（2分）**

面积微元**（2分）**

带入计算积分**（4分）**

（2.4，5**分**） 代入得**（2+3分）**

## 3. 复摆与水瓶的耦合运动（25分）

（3.1，13**分**）设水瓶向右位移为，等效单摆从竖直方向向右转角为，单摆张力为T。则可列受力方程

摆球**（2分）**：

设摩擦力为向左，水瓶受力**（2分）**：

相对水瓶轴的角动量定理**（2分）**：

综合，得**（3分）**

则**（2分）**

振动圆频率**（2分）**

（3.2，7**分**）由（2.1）以及初条件有**（2分）**

由

得**（2分）**

则**（1分）**

综上**（2分）**

（3.3，5**分**）观察。出现回转则**（2分）**

则**（5分）**