力学小振动例题解答

一、将质量为m的薄圆形纸片沿其一条直径对折，而后使得两个半圆部分相互夹角为60°.然后将半圆弧的部分向下，放置在足够粗糙的桌面上使其立起.

(1)这种站立的形态对于沿对折直径方向的微扰是稳定平衡吗？若是，请说明理由.

(2)求上述微扰下纸片往复运动的周期.

(1)是稳定平衡. ………………………

半圆斜放后与地面接触的曲面中线是椭圆，受到微扰后重力作用在质心，而与地面接触点因摩擦力足够大而纯滚动，重力力矩起到了回复的作用，因此是稳定平衡.(论证出回复力矩或质心升高均可) ……………………………………

(2)偏离平衡位置后，从圆心到触地点的距离为: …………………

这时系统可以等效为整个物体以椭圆的曲率圆圆心为瞬时轴旋转，该轴到地面的距离为

…………………………………………

半圆重心到圆心的距离为: …………………………………

于是整体重心到瞬时轴的距离为

………………………

当系统绕瞬时轴转过角时，重力对于地面支点的力矩为

 ………………………………………

下面求系统对于地面支点的转动惯量，系统是由两个对称斜放的半圆形组成的，单个半圆对于垂直于圆面，通过圆心的轴的转动惯量为

 ………………………………………………………………

对于通过圆面内对称轴的转动惯量为

 ………………………………

设对于摆放好之后，沿水平方向通过圆心，于圆面法线呈30°角的轴的惯量为，假定有一角速度沿该轴，根据角动量的表达式有



 …………

由此，我们可以进一步利用平行轴定理计算与上述轴平行，通过重心的转动惯量和通过地面支点的转动惯量：

 ……………………………

…

于是整体对于通过地面支点轴的转动惯量为上述值的两倍（两个半圆），由此可以得到整体对于该轴的运动方程

 ……………………………………………………………………

由此得到振动周期

 …………………

二、用一导电弹簧连接两极板，极板面积S，电荷均匀分布，弹簧原长，可视为半径为a的螺线管，匝密度为n，内阻不计，截面半径r，切变模量为G，初态极板相距，现固定B板且在两极板带上十分微弱正负电荷，整个体系无质量，S>>,>>a>>r,求A的运动方程。

弹簧劲度系数 …………………①

  ……………………②

 ………….③

 …………………④

 …………………⑤

 …………………⑥

由⑥式得： …………………⑦

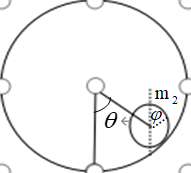
 …………………⑧

三、一球壳质量为，内置一圆环质量为，球壳半径为R，圆半径为r，（以下问题均只考虑纯滚）(40分)

（1）球壳固定时，求圆环在处微振动周期。

（2）若球壳可绕垂直于纸面中心轴自由转动，重解（1）问。

（3）现将一质量为物体固定于圆环最高点（此对圆环处于处），求当球壳固定时，圆环在稳定平衡位置微振动周期（本问中令R=3r）。



（1） …………………①

（2）设球心与环心连线和竖直线夹角为，环与球摩擦力为f,

对球壳： ……………………②

对环： ………………③

 …………………④

 …………………⑤

 …………………⑥

所以由②③④⑥式解得： …………………⑦

又因为  …………………⑧

所以由⑦⑧解得： …………………⑨

又因为sin …………………⑩

所以由⑨⑩式可得：  …………………

 …………………

（3）能量解法，如图：此球壳中心为势能零点： …………………

由几何关系:

….…

 …………………

由几何关系： ……..…………

代入R=3r可得：

…………………………………………………



………………………………………………………

又因为:

 …………………….

易证明时，稳定，时， 稳定。

 时，以代入式，略去高阶小量后可解：

 ………………………..

 ……………………….

 时 同上可解得：

 ………………………..

 （） …………………………