1，解：（1）内部压强为（3分）

理想气体状态方程为 （4分）

其中

结合初态

联立可求得 （4分）

（2）初态，满足

（5分）

而

代入可解得

（5分）

（3）（i）肥皂泡带点后，由于带电产生的又一项附加压强为

（3分）

因而内部压强表达式为

  
（4分）

结合

可得 （4分）

（ii）由傅里叶热传导定律，可得

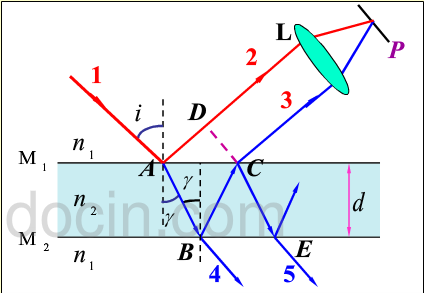
（4分）

其中 （4分）

联立可得

（4分）

2.解答：



1. 光线2在AD段的光程为

（4分）

光线3在ABC段的光程为

（4分）

所求的相位差为

（4分）

1. 由几何关系得

（4分）

利用（1）中的结论并代入得所求的方程为

（4分）

容易发现，当发生题中所述情况时， 相邻条纹应取级，有

（4分）

代入得

（4分）

1. (i)代入数字，得的近似值为0.03631m（2分）

(ii)此时解得

=0.03108m，=0.04867m

一般而言，光劈放在读数显微镜下观察干涉条纹，由于光源是通过显微镜物镜上装上去的平面镜反射照向光劈，所以也只有显微镜的目镜下才能观察到干涉条纹，而显微镜所观察到的视野宽度最宽处也不过在5-10mm这个范围，(ii)中的结果（接近100mm)表明无法观察到明显的弯曲，而条纹又往往较粗，因此这个观察结果是不科学的。（10分）

3，解：如图所示



如图设出作用力等

由质心运动定理，可得

（4分）

转动定理有

（4分）

（4分）

联立消去摩擦力可得

（3分）

进而可得守恒量

（3分）

末态，有 （3分）

由于是纯滚动，满足

（4分）

（4分）

能量上，满足

（4分）

其中由于初态纯滚动可得，于是可得上式的守恒量

（3分）

结合以上各式最终可得

（4分）

# 四、高能物理的弱相互作用与粒子衰变（40分）

粒子物理的前沿研究方向之一是高能粒子的弱相互作用和粒子衰变。例如，可在实验室中令介子束和介子束在飞行过程中进行弱相互作用，使得介子发生衰变

衰变产生子和中微子。已知介子在其固有参考系种寿命为，介子和子静止质量分别为,，中微子视为无静质量。现有一动量为的介子束，试求：

(i)介子在衰变前在实验室中行走的平均距离；**（8分）**

解： 已知介子的动量：**（2分）**

其中

则**（2分）**

由钟慢效应，介子在实验室中寿命为**（2分）**

则介子在衰变前在实验室中行走的平均距离为**（2分）**

(ii)子在实验室中的最大角度（相对介子的运动方向）；**（22分）**

解： 设为介子静止系，在此参考系中，由动量守恒，则子和中微子动量之和为0，即**（2分）**

从而**（1分）**

能量守恒，衰变前在系中介子静止，则**（3分）**

解得**（2分）**

取系（实验室系）和系的与方向重合，且为介子运动方向，再令为子在系和系中运动方向与与方向的夹角，利用能量动量变换公式**（4分）**

两式相除得**（2分）**

极值条件为或，则**（2分）**

解得**（2分）**

再由**（1分）**

可知对应。代入得**（3分）**

(iii)计算中微子在实验室参考系中动量的取值范围。**（10分）**

解：系和系中的中微子能动量变换关系为**（3分）**

从而**（2分）**

极值条件**（1分）**

得**（1分）**

对应**（3分）**

# 五、相对论题：因果律（40分）

先给出各事件在不同参考系中的时空坐标列表：[]中是步骤序号，()中是时空坐标

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| (x,ct) | | S系——地面 | S’系——AB | S’’系——A'B' |
| Event 0 | t=0，B到达xB=1 | [2] (1, 0) | [3](5/4, -3/4) |  |
| Event 1 | t=0，原点对齐 | [1] (0, 0) | [1] (0, 0) | [1] (0, 0) |
| Event 2 | B收信 | [4] (5/2, 5/2) | [5] (5/4, 5/4) |  |
| Event 3 | A发信 | [7] (15/4, 13/4) | [6] (9/4, 5/4) | [8] (23/12, 5/12) |
| Event 4 | B'收信 | [10] (25/9, 38/9) | [11] (11/36, 115/36) | [9] (-1, 10/3) |
| Event a | A'撞B | [0] (4,5) | [0] (5/4, 13/4) | [0] (0, 3) |

建立3个坐标系，与地面系固连的S系、与AB飞船固连的S’系、与A'B'飞船固连的S’’系，为保证能使用一般情况的洛伦兹变换：

（3分）

需先确定时刻，S,S’,S’’系有共同原点。不妨设A’初始位置为公共原点，

则A’端发射信号事件(记为“事件1”)在S系中表述为(x，ct单位均使用，之后不再赘述)

原点在A’，易得在S’’系中有

（1分）

再确定A、B在S‘系中的固定坐标，利用初始状态B定位事件（记为“事件0”）

利用洛伦兹变换，可获得事件0在S’系中的表述

（1分）

故

（2分）

（2分）

S系中，A’与B相撞为追及问题，则A’与B相撞事件（记为“事件a”）在S系中表述为

（2分）

利用洛伦兹变换，可获得事件a在S’系、S’’系中的表述

（3分）

（2分）

S系中，B收信为追及问题，则B收信事件（记为“事件2”）在S系中表述为

（2分）

利用洛伦兹变换，可获得事件2在S’系中的表述

（2分）

S‘系中，A发信与B收信同时，A发信事件（记为“事件3”）在S’系中表述为

（2分）

利用洛伦兹变换，可获得事件3在S系中的表述

（2分）

再利用洛伦兹变换，可获得事件3在S‘’系中的表述

（2分）

信号到达B’，B’收信事件（记为“事件4”），由于各系光速不变，易得为

（2分）

利用洛伦兹变换，可获得事件4在S系中的表述

（2分）

再利用洛伦兹变换，可获得事件4在S‘系中的表述

（2分）

只需对比事件4、事件a在各系中的时间即可

S系：=，故A'B'飞船的B'端收到“无法加速信号”在先（1分）

S’系：=’，故A'B'飞船的B'端收到“无法加速信号”在先（1分）

S‘’系：‘’=，故飞船A'B'、AB头尾相撞在先（1分）

分析矛盾原因：在AB飞船中收到信号和发出信号两事件同时，则“信号速度”相当于无穷大，故事实上AB收到信号与发出信号两个事件无因果关系，这是矛盾的根源。若收信到发信之间也用无线电信号传输，则将符合因果律。**（5分）**

# 六、晶体与双折射（60分）

晶体的特殊空间对称性将对晶体介质的介电性质、光学性质带来一些限制，双折射现象便是这一限制带来的物理现象的典例。

## 1.介电张量与波片制备（20分）

光的本质是电磁波，研究介质的光学性质可从其电磁学性质入手。

对于各向同性的介质，我们有。但对于一般的晶体，其介电性质满足更复杂的线性关系

其中1、2、3分别代表为x,y,z三个方向的分量，代表了分量对分量的响应上式可写为矩阵形式

此的矩阵反映了全部的介电性质，称此矩阵为介电张量。原先一个数的标量相当于的对角矩阵特例。

(i)我们现将模型简化，设介电张量是对角的，即只有不为0，则相当于x,y,z方向有不同的介电常数。对于这样的晶体，我们令线偏振光从x,y,z方向射入，电场振幅方向分别为y,z,x方向，假设介质的相对磁导率，求这三束光在此晶体中的速度、等效折射率。不同方向传播速度不同正是导致双折射现象产生的原因。**（8分）**

解： 沿x方向传播的光，电场沿y方向，则有**（2分）**

从而沿x方向传播的速度为**（2分）**

同理有**（4分）**

(ii)双折射晶体常用于制备波片，改变光的偏振特性。现在我们将令线偏振光沿z方向射入，其电场振幅在+x,+y方向的分量相同。介电张量仍为对角的，求该晶体在z方向的厚度分别为多少时，出射光为右旋圆偏振光、线偏振光、左旋圆偏振光？ 解：迎着光的方向，若电矢量顺时针旋转，则称为右旋光，否则称为左旋光。**（12分）**

解：出射后，y方向电矢量与x方向电矢量的相位差为**（3分）**

当相位差为**（1分）**

此时出射光为右旋光。

当相位差为**（1分）**

此时出射光为线偏振光。

当相位差为**（1分）**

此时出射光为左旋光。

对应的，当波片厚度**（2分）**

此时出射光为右旋光。

对应的，当波片厚度**（2分）**

此时出射光为线偏振光。

对应的，当波片厚度**（2分）**

此时出射光为左旋光。

## 2.不同晶系的对称性（10分）

晶体可以视为由可重复的平行六面体堆砌而成，晶体原子位于六面体的顶点上，形成3维点阵（称为晶系）。

平行六面体的对称性将影响点阵的对称性。此处我们仅考虑点阵的旋转对称性并将晶体原子视为点粒子。

对于立方晶系，我们发现将整体绕x,y,z轴顺时针转后，整个点阵与自身重合，则一根旋转轴和一个旋转角度（此处取最小者）确定一种旋转对称性。

(i)请写出立方晶系（）绕x,y,z轴表征其旋转对称性的特征角度；**（3分）**

解：

(ii)请写出更一般的四方晶系（），正交晶系（a,b,c互不相等）相应的特征角度；**（4分）**

解： 四方晶系：

正交晶系：

(iii)请写出六角晶系（）相应的特征角度；**（3分）**

解：

## 3.不同晶系的介电张量与双折射性质（30分）

上节中我们讨论的旋转对称性将对晶系的介电张量产生一定限制。以立方晶系为例，绕x轴顺时针旋转，这相当于坐标变换

一方面由原先的介电性质，即，可得在新的坐标系下应有

又由于旋转后，晶体本身与自身重合，介电性质完全相同，应有

便得到了。

（i）仿照上述操作，试简化立方晶体的介电张量的形式，并说明最多有几个独立分量。**（16分）**

解：类似题干操作，绕y、z轴旋转得到：**（4分）**

从而有**（4分）**

即**（2分）**

绕x轴顺时针旋转有**（1分）**

则**（2分）**

则绕x轴顺时针旋转得到**（1分）**

同理，绕y轴顺时针旋转，最终可得**（1分）**

即**（1分）**

介电张量中仅有一个独立的量，且退化为标量。

（ii）试简化更一般的四方晶系、正交晶系的介电张量的形式，并说明最多有几个独立分量。**（6分）**

解：首先这两组晶系绕x,y,z轴旋转均复原，则介电张量必是对角的（在相应的坐标系下），即**（3分）**

正交晶系对称性到此为止，则其介电张量为对角形式，有三个独立分量。**（1分）**

四方晶系还可绕z轴旋转复原，得到，则四方晶系的介电张量有两个独立分量。**（2分）**

（iii）试简化六角晶系的介电张量的形式，并说明最多有几个独立分量。**（8分）**

解：六角晶系绕x,y,z轴旋转均复原，则介电张量必是对角的（在相应的坐标系下），即

绕z轴顺时针旋转有**（3分）**

则**（2分）**

即**（1分）**

从而有**（1分）**

则六角晶系的介电张量有两个独立分量。**（1分）**

# 七、惰性气体晶体（70分）

## 1.范德瓦尔斯作用（30分）

惰性气体原子的电子壳层已达饱和，这导致惰性气体间的结合不像离子晶体有点电荷间的静电力，因此需讨论偶极子层面的静电作用。

将两个惰性原子简化为1维的两个偶极子，单个原子正负电荷的作用用弹性势能表示，为第个原子中负电荷相对正电荷的位移。已知正电荷固定，负电荷质量为，两正电荷相距。

(i)试求两原子的相互作用能；**（4分）**

解：

(ii)假设，将电势能保留至最低阶非零项，并给出系统总能量；**（8分）**

解： 利用小量近似，**（2分）**

从而有**（2分）**

则总能量**（4分）**

(iii)求系统的所有本征圆频率。（提示：把总能量化为的形式，其中为的线性组合）并给出展开至的非零第二阶的形式，说明时本征频率的渐进行为及其物理意义。**（10分）**

解： 引入线性变换**（4分）**

则总能量可写为**（2分）**

可以看出，经过线性变换后，总能量包含两个相互独立的，不含交叉项的两个谐振子，本征频率分别为**（2分）**

当时，，即相当于趋近于两个完全独立的谐振子。**（2分）**

(iv)在量子力学中，一种本征振动模式对应一个振动自由度，一个振动自由度对应的基态能为。试证明相距为的孤立原子的相互作用能在时有的形式，并给出的值。**（8分）**

解： 与完全孤立的状态相比，相距为的两个上述偶极子，基态能变化**（2分）**

利用小量近似公式**（2分）**

将展开**（2分）**

从而**（1分）**

从而题目命题得证，同时**（1分）**

## 2.惰性气体晶体内聚能（40分）

上一节中给出的两惰性原子相互作用能是一种吸引相互作用，为保证平衡，在两原子相距较近时应显现更强烈的排斥效应，这种二原子相互作用能可写为

这种相互作用被称为势。其中均为正的常数，为特征晶格常数，在本题第一部分中给出，由实验观测取经验数值。

(i)请给出2个惰性气体原子的平衡间距；**（4分）**

解： 对二体相互作用势求导为0的点为平衡点。**（2分）**

从而有**（2分）**

(ii)惰性气体中不止含有2个原子，假设惰性气体晶体为立方体的堆砌，最近邻原子间距为，现有若干可能的分布：

(1)惰性气体原子分布在这些立方体的顶点上；

(2)惰性气体原子分布在立方体的顶点和中心；

(3)惰性气体原子分布在立方体的顶点和侧面的中心上；

试给出在以上三种情况下，一个原子在此惰性气体原子点阵（可视为无限大）中的势能，并将其化为类似的幂律形式，说明这种求和相当于改变系数、。结果可包含对全空间原子求和的求和号，本题暂不必给出求和的具体形式。**（10分）**

解： 令为最近邻原子间距为时，按照第种晶体结构分布，、原子之间的间距，由于将晶体视为规则的立方体堆砌，则应该为仅与结构有关的常数。 则**（4分）**

从而**（4分）**

式中，表示对所有除i原子外的原子的积分。从上式可以看出，从二体相互作用到整个晶体内的相互作用，幂律不变而常数（强度）与晶体结构有关**（2分）**

(iii)已知对(ii)中的三种情况，等效的系数变化分别为：

(1)

(2)

(3)

试求平衡时最近邻原子间距，并比较哪一种晶体最为稳定。**（12分）**

解： 由（2.i）部分，有平衡时的近邻原子间距为**（2分）**

代入得**（2分）**

式中代表变化比例，将三种结构的数据代入得**（6分）**

比较得，同样对于一个原子，第三种结构（面心立方）结构的能量更低，则更稳定。**（2分）**

(iv)试给出最稳定晶体形成模式中求和的具体形式，即不遗漏的遍历空间中除自身外的所有原子的求和方式。**（8分）**

解： 对于面心立方，取**（4分）**

以某一个原子为原点，按照正方体构建坐标轴，则任意原子的位置总可以表示为**（2分）**

从而**（2分）**

(v)实验发现，对于越重的惰性气体原子，上述结论更准确，而对于最轻的惰性元素，甚至只能在超高压的状态下观察到晶体的形成。部分理论学家认为，由于量子力学中的位置-动量不确定性，使得原子最低能量并非0，且这种量子基态能量越高，越偏离上述结果。试从这个角度解释实验相对理论的偏离与元素质量的关系。**（6分）**

解： 在原子间距相同的情况下，原子的位置不确定度大致相当于近邻原子距离。

从而由不确定性关系**（2分）**

同时由于平衡状态下动量应为0，原子的动量可近似视为其不确定度**（1分）**

则在原子间距相同的情况下，动量相同。 动能**（1分）**

则原子质量越小，动能越大，越容易偏离上述平衡的基态，特别是当这种能量比此模型中的结合能（平衡位置能量的相反数）更大时，则无法平衡，也就无法形成晶体。这边解释更轻的元素比起其他惰性元素更难以形成晶体这一现象。**（12分）**