第三十七届全国中学生物理竞赛（复赛）模拟试卷

本卷共七题，考试时长三小时，满分320分。

第一题（40分）

定义一维运动的作用量，其中是广义坐标，是对应的广义动量（例如对于广义坐标，我们可以它对应的广义动量就是角动量）。

对于二维运动，使用极坐标描述，我们有广义坐标以及其对应的广义动量、。每个广义坐标对应一个作用量

1. 对于平方反比力的势场下的有心运动，给定角动量能量。求作用量。（35分）
2. 证明当轨道参数缓慢变化时离心率不变。（5分）

假设你已经知道了天体作椭圆轨道运动的方程

提示：面临三角函数的分式对0到2pi积分时可以作代换

第一题

解答

（1）由角向运动方程：（4分）

由链式法则： （4分）

考虑由定义

;（4分）

进行积分：

令则 （4分）

则可以将原积分式中的 改写成z的形式

最终得出 （8分）

又因为 （4分）

带入有 （2分）

又因为角动量守恒，从而角作用量在运动过程中为定值。（5分）

(2) 由（1）问可用反解出

结果是：

（5分）

从而因为不变，也不变。

第二题（40分）

我们来考虑黑体辐射平衡场中的仍然成立的叠加原理。

众所周知，任何物体的热辐射功率为，其中是发射本领，为吸收本领。

我们有：.

1. 我们考虑有两块无限大靠近放置的平板，分别由发射本领和的材料制成。可以忽略边缘效应。

我们设法让两块板分别保持温度和，这时两板间的辐射场是很多个辐射场与其反射场反反复复的叠加后的收敛值，我们的目标是求出平衡时的辐射能流。小提示：这里的叠加形式跟光学中的法布里珀罗板类似。（25分）

1. 在两块板中间插入一个发射本领为的板，求出平衡时的温度。（15分）

第二题

解答：

我们首先列出A板对应的辐射能流：

板A 板B

首次辐射 B反射 B吸收

再次反射 B反射 B吸收

再次反射 B反射 B吸收

…… …… ……

以上列出的所有反射波模式同时存在于两个金属板之间。

(分析正确板间的能流得10分)

-

（5分）

代入前述所得，给出

最后 （5分）

由B板为起源的另外一族辐射场所给出的结果同理为：

（2分）

所求的辐射能流为以上二者叠加：。 （叠加定理，3分）

1. 插入外来板之后最终外来板会在其本身没有直接与外界热源接触的条件下通过两边的辐射场最终达到平衡态，稳态条件为向两边辐射的净能流为零。

直接写出

（两个能流共8分）

平衡条件 （2分）

最终解出

（给出最后结果得最后5分）

第三题（40分）

我们考虑有一个质量为的质点以的初速度对着另一个质量为且初态静止的质点猪突。初态二者相距。同时沿着远离二者连线的方向喷出粒子流逃离（因此m的质量会减小），二者的运动始终在该连线上。已知喷射粒子流的相对速度为，单位时间喷射的质量。设所有喷出的气体都在喷气瞬时打在上使其减速，同时我们在本题中不考虑的情况（也就是说在时要么已经被追上，要么已经加速到一定速率逃离）。求出的临界使得可以不被追上。

第三题

解答：

考虑二者最近时具有相同的速度，由动量守恒

（5分）

对由变质量物体动力学给出时有 （4分）

可知时， （6分）

为了不被吃掉，要求此时不相碰，即 （5分）

此时考虑质心的运动

（考虑质心运动5分）

由得到代求(5分)

将以上两式联立可得

（6分）

最终得到 （4分）

第四题（70分）

有一球形电容，内径为，外径为，设内球壳为正电极，两球壳间充满了相对介电常数为，电导率为的电介质，介质质量为，球壳质量不计。初态充有电荷且静止，放入一匀强磁场中（沿着z轴向上），此时电容器两极之间形成电流。

（1）请求出电容绕转轴的转动惯量（15分）

（2）试求末态电容器旋转的角速度。（35分）

（3）如果认为这个角动量是电磁场给它的，并已知电磁场的动量密度（单位体积内的动量）为（其中为poi坡印亭矢量，为介质中光速），请你推断出电磁场的角动量密度的具体形式并在这个例子中验证你的猜想。（20分）

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

第四题

解答：（1） (5分)

(5分)

联立以上两式，可以给出：

（5分）

（2）介质中不积累电荷，由高斯定理可知，离球心r处，有



解出：  （4分）

由欧姆定律的微分形式  （3分）

由电荷守恒：  （4分）

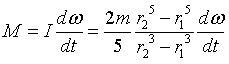
联立以上两式结合初始条件可以得到：

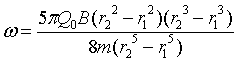
 （4分）

力矩的计算：由洛伦兹力公式

 （5分）

显然M沿着z方向，那么计算出力矩大小： （6分）

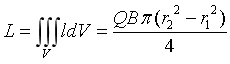
由角动量定理  （4分）

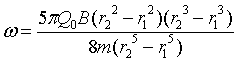
积分可得：  （5分）

1. 不难推断角动量密度：  （5分）



 （5分）

积分可知初态电磁场角动量为：  （5分）

由角动量守恒可知  （5分）

第五题(40分)

在竖直平面内坐标原点以初速度沿着水平方向向右抛出一个质量为，电量为的小球，在垂直于纸平面向内的方向上加有均匀磁场，磁感应强度为。同时电荷受一个方向与运动方向相反的阻力，其大小与其运动速度大小成正比:.

1. 求足够长时间后小球稳定时的速度；（15分）
2. 若初态小球静止，求在以运动的参考系中，小球的最终位移。（25分）

第五题

解答：

(1)

取x方向为小球初速度方向，y方向为竖直向上

由牛顿运动定律：

（2分）

（2分）

设末态

（2分）

应满足条件

（2分）

联立以上几式可以解出

（3分）

（3分）

也即稳定时的速度大小为

（1分）

(2) 当时，可以利用运动方程的线性将运动方程拆分得

（5分）

由问（1）我们有

（3分）

观察上式，我们令

（2分）

即得到在所求参考系中的相对运动速度对应的运动方程

（3分）  
 写成分量形式，并且对两边同时积分，得

（写出两个式子共6分）

这里正是我们在上问解出来得的分量，联立可以解得

（4分）

待求的距离为

（2分）

第六题（40分）

我们来考虑介子的光致反应：,质子和介子的静能分别成为938mev以及135mev.我们考虑在真空中各向同性的3K宇宙背景黑体辐射的光子平均能量为,若一个质子与一个能量为的光子发生正碰，请按照以下步骤，求出此介子光致反应对应的质子能量最小值。

1. 求出假设质子静止时为了使反应发生，光子所应该具有的能量最小值（阈值）;

（9分）

（2）我们可以找出S‘系，使得实验室参考系（S系）中具有的光子在S’系中具有的能量，求出相对于的相对速度；（也可以用表示）；（12分）

（3）由此可以给出质子的最小能量。（8分）

（4）在限定不能换参考系的条件下重求所求能量最小值。（11分）

第六题

解答：

1. 设光子阈能为,对应动量为,

由能动量守恒： （3分）

对于光子 （3分）

得出 (3分)

最终代入数据，得到

(2)

此处可以利用能量变换关系：

首先由多普勒关系，有频率变化关系： (3分)

由于 (3分)

可以得到变换关系

或者进一步写成 (3分)

带入相关数据 可得

系对应的即为所求。 （3分）

(3)

由于实验室参考系（S系）中具有的光子在S’系中具有的能量，那么在S’系中质子可以处于静止状态便可使得反应发生，此时其在地面系下的能量即为所求：

（适当分析4分，得出所求能量的大小得4分）

（4）

显然迎头正碰对应着更小的质子能量

利用相对论能量动量变换式，写出4-动量模方守恒对应的方程

(6分)

利用此处光子能量极小，得出：

（3分）

（2分）

第七题（40分）

光纤陀螺仪

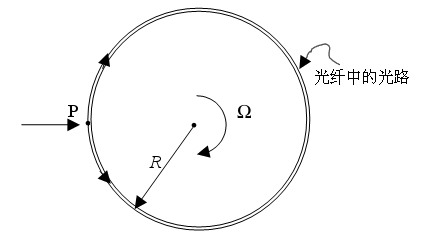
1913年乔治·沙克那利用—环状共振仪，寻找相对于转动坐标系的以太漂移。他所获得的结果，一如历史上所常发生的，演变成沙克那所未曾想到的一些用途。其中的一种应用就是光纤陀螺仪(FOG)，它是基于沙克那首先发现的简单物理现象。与沙克那效应有关的主要物理原理如下：令两束同频率光绕着旋转的环状光纤反向行进，它们会有相差(相移)。此相差也可用来测定环的角速度。

如图所示，一束光自P点进入一半径为R的圆环形光纤，此光纤置于一沿顺时针方向做等角速度转动的平台上。光波在P点分成两束，在圆环中反向行进，其中一束沿顺时针(CW)方向，另—束沿逆时针(CCW)方向。光纤材料的折射率为μ。

（1）已知环转动的线速度比光速小很多，试求时间差Δt=t+-t-，式中t+和t-分别代表CW和CCW光束在环状光纤中绕行一圈(由P点回到P点)的时间。将你的答案以圆环所包围的面积表示。（26分）

（2）求CW和CCW二光束在转动中的光纤环内绕行一圈的光程差ΔL。（6分）

（3）对于半径R=1.0m的圆环形光纤，μ＝1.5，求其随地球转动(地球自转)时的最大光程差ΔL。(4分)

（4）在(b)题中的测量值，我们可利用增加光纤的匝数N的方式，加以放大。试求光绕行全部圈数的相位差Δθ。（4分）

第七题

解答：

（1） 当环状光纤绕其圆心以等速率分别沿着CW、CCW方向转动时，实验室观察者所见光在介质中的速率是

(4分)

（4分）

其中，c’是介质中的光速 (2分)

考虑某一时刻从分光镜入射的两束光，分别沿着CW和CCW两个方向环绕运动。就实验室的静止观察者而言，由于P点随着光纤转动，故CCW光束将行较少于圆周长的路程，同时CW光束将行较多于圆周长的路程。

由几何关系，CW光束从进入到离开光纤，绕行的时间为

(6分)

由几何关系，CCW光束从进入到离开光纤，绕行的时间为

（6分）

两者的差值 其中为光路的面积。 （4分）

(2)CW和CCW光束在转动中的光纤环内，绕行一周的光程差为

(4分)

(3)

当圆环形光纤放在极点时，可得随着地球转动时的最大光程差为

（4）

光线绕行N匝的相位差为 （4分）