《天体物理学》

第三章　磁化等离子体

讲授：徐仁新

北京大学物理学院天文学系

什么是等离子体（plasma）？

- 出现显著自由电子和离子的流体

（整体电中性但局部存在电磁作用。台：电浆）

- 相对一般流体，等离子体有何特性？

中性流体：运动→压力；粒子间碰撞→粘性

等离子体：粒子间额外附加了长程电磁作用

- 等离子体往往具有磁场

长程电磁力 → 电流 I（导电流体）

→ 磁场 B（磁化等离子体）

流体与场间耦合：$I \rightarrow B \rightarrow I' \rightarrow B' \rightarrow \ldots$

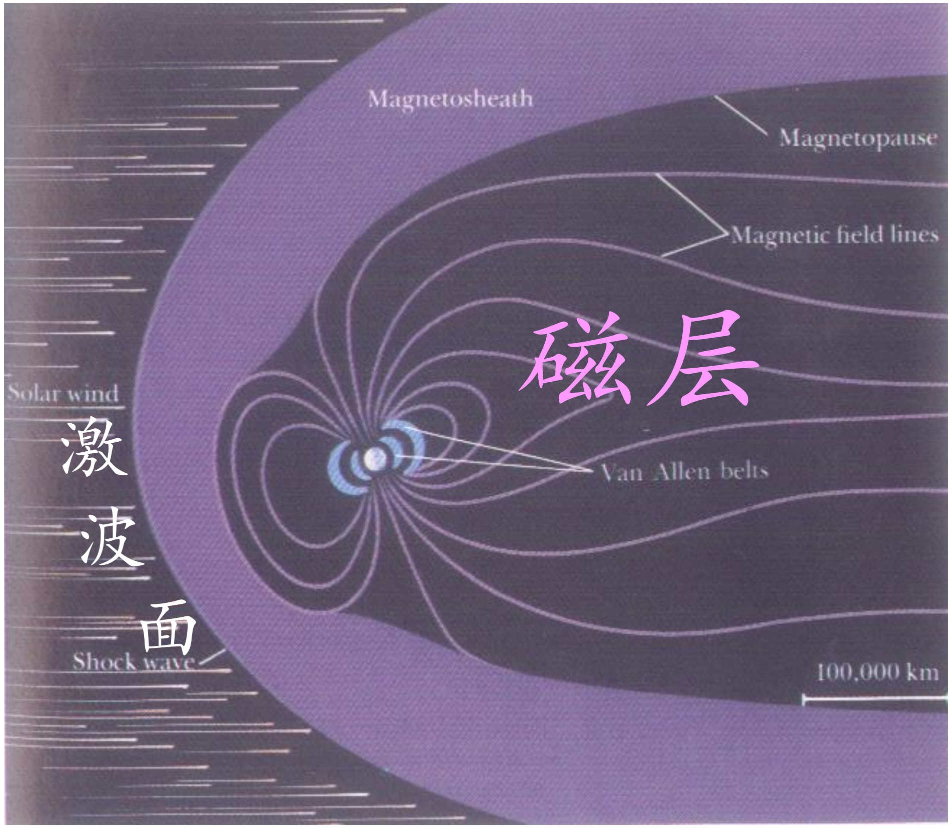
- >99%宇宙**正常物质**为磁化等离子体

1，天体磁场的普遍性

磁场的普遍性 ⇔ 电流的普遍性

地球磁场与地球磁层（magnetosphere）：

太阳风

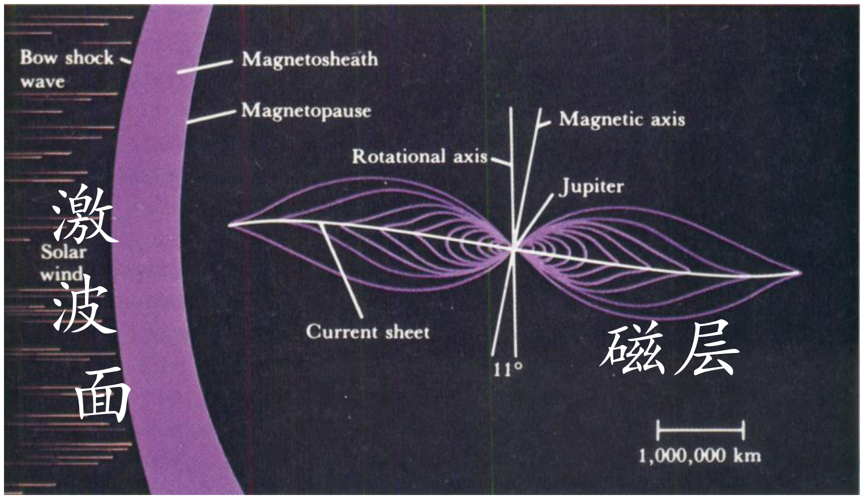


磁尾

天体磁场的普遍性

行星磁层与偶极磁场：

太阳风



木星的磁层

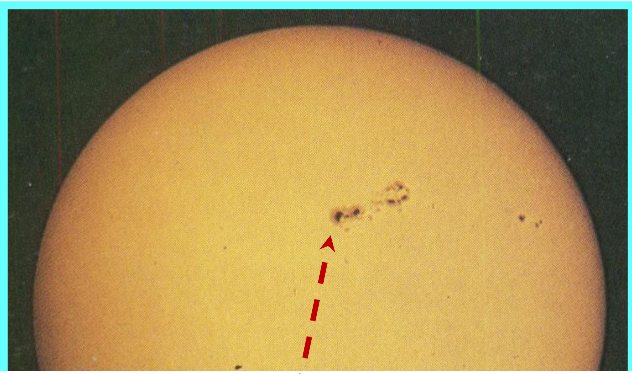
磁倾角

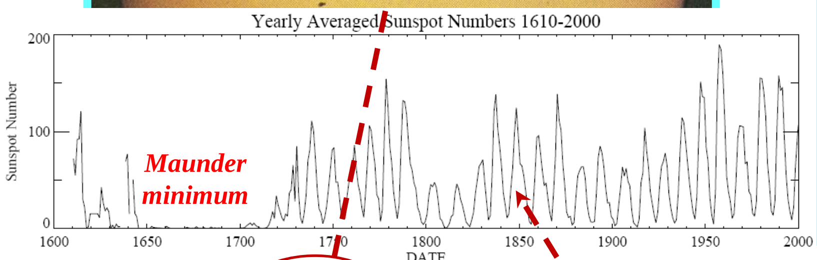
行星偶极磁场

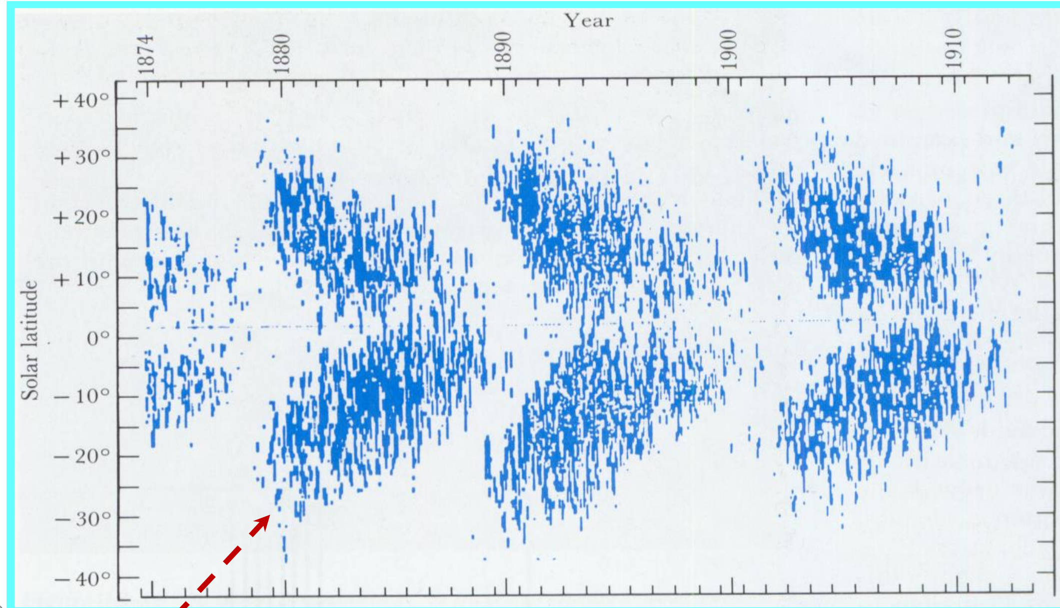
行星名称	极区磁场(G)	磁偏角	总磁矩(G cm^3)
水星	$\sim 7\times10^{-3}$	12°	5.2×10^{22}
地球	0.6	11°	7.94×10^{25}
火星	$\sim 10^{-3}$	15°	2.5×10^{22}
木星	~ 8	10.8°	1.4×10^{30}
土星	~ 1	0.7°	4.6×10^{28}

天体磁场的普遍性

太阳磁场与太阳黑子：



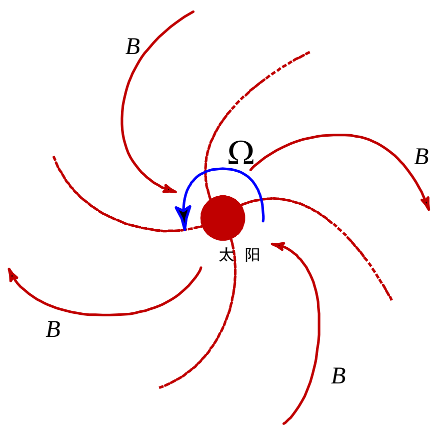




- 太阳黑子是太阳表面磁场较强（~10^3G）区域
- 黑子数随时间周期性（11年）改变，改变极性
- 存在微弱偶极磁场（ 约1~2G ）

天体磁场的普遍性

行星际磁场：



Archimedes螺线$r = a\theta$

- 以太阳为中心，行星际空间可以分成几个扇形磁场区域；每个区域磁场的极性相同，而相邻区磁场极性相反

- 行星际的扇形磁场结构以太阳自转周期（~27天）随太阳一起旋转

恒星磁场： 主序星$10^{3\sim4}$G，白矮星$10^{5\sim7}$G，脉冲星$10^{8\sim12}$G

银河系磁场： 星际空间约10^{-5}G~10^{-6}G（即μG量级）

其他： 星系际磁场，星系团磁场，早期宇宙磁场

2，等离子体中的电磁作用

Debye长度：非电中性的典型力程

假设离子为电荷密度为en_0的均匀本底 $\Leftarrow m_i >> m_e$

r =0处试验电荷：q>0，势$\varphi(r)$

电子数：$n_e = n_0 \times \exp[e\varphi/kT]$

r >>0时，$e\varphi/kT$是小量 $\Rightarrow$

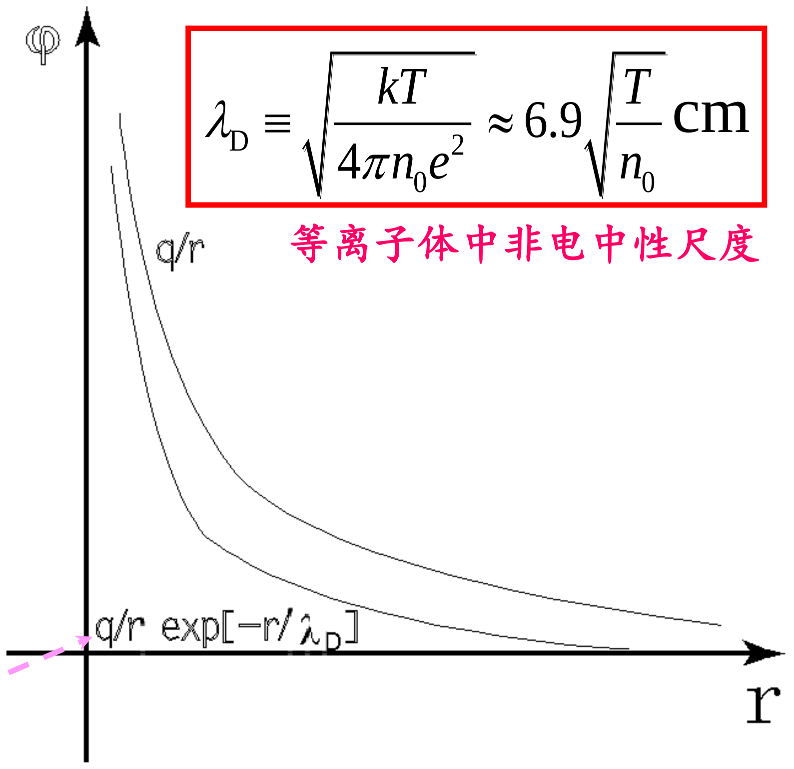
$$n_e(r) \approx n_0 + n_0\,(e\varphi/kT)$$

$$\therefore\ \rho_e = e(n_0 - n_e) + q\delta(r)$$

$$\approx -\,en_0\,(e\varphi/kT) + q\delta(r)$$

由 $\nabla^2\varphi = -\,4\pi\rho_e \ \Rightarrow$

$$\boxed{\nabla^2\varphi - \frac{1}{\lambda_D^2}\varphi = -4\pi q\delta(r)}$$



$$\boxed{\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{kT}{4\pi n_0 e^2}} \approx 6.9\sqrt{\frac{T}{n_0}}\,\mathrm{cm}}$$

等离子体中非电中性尺度

静电荷在等离子体中的电势

等离子体中的电磁作用

等离子体频率：恢复电中性的典型时标

假设有一平面层电子移动了x距离

$\Rightarrow$ 类似于平板电容器的电场E

电子“板”的面电荷密度为en_0x

$\Rightarrow$ $E = 4\pi en_0x$

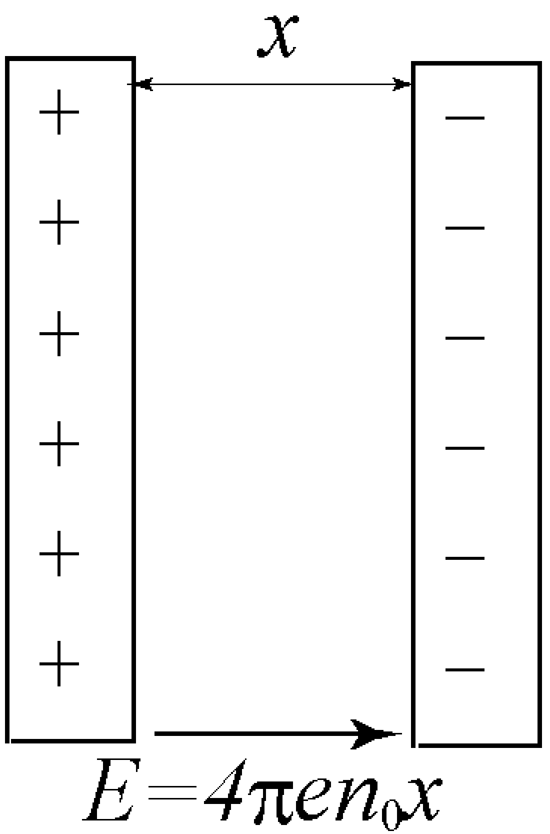
$\Rightarrow$电子运动方程（谐振子）：

$x \sim n^{-1/3}$：粒子间距量级

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -4\pi n_0e^2x$$

频率为

$$\boxed{\omega_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{4\pi e^2n_0}{m}} = 5.6\times10^4\sqrt{n_0}\ \mathrm{s}^{-1}}$$



等离子体振荡频率计算

等离子体中的电磁作用

等离子体频率的意义

若外界电磁扰动的频率比ω_p低，等离子体中自由电荷的分布将迅速调整，使得电磁扰动不能在等离子体中传递 $\Rightarrow$

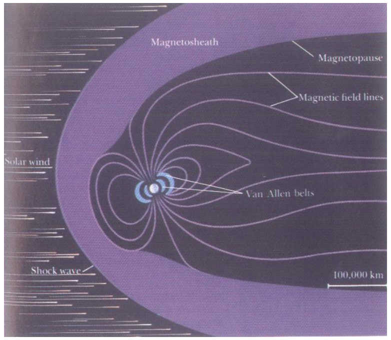
只有$\omega > \omega_p$的电磁波才能在其中传播

例：大气射电窗口低频段被电离层吸收

3，磁流体力学

单粒子轨道理论处理

极光



等离子体方程组：动力论

从统计力学角度考虑带电质点所受电磁力以及之间碰撞

磁流体近似：磁流体力学（MHD）

做流体单元近似：宏观上非常小，但微观粒子非常多

磁流体力学方程组：

= 流体力学方程组 + Maxwell方程组

+ 流场与电磁场的耦合

磁流体力学

方程组具体形式：

- 连续性方程 $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0$$
- 动量方程（NS方程） $$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-\nabla p+\frac{1}{c}(\vec{J}\times\vec{B})+\eta\nabla^2\vec{v}$$
- 感应电流 $$\vec{J}=\sigma(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B})$$
- Faraday定律 $$\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
- Ampère定律 $$\nabla\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$
- 能量方程（理想流体）$P\rho^{-\gamma}=\mathrm{const.}$

Lorentz力

ρ、p、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$共14个未知标量

=

14个标量方程

磁流体力学

Lorentz力（导电流体区别于中性流体的关键）的性质：

Ampère定律 ＋ 矢量关系$\nabla(B^2) = 2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \Rightarrow$

$$\frac{1}{c}\vec{J}\times\vec{B} = \frac{1}{4\pi}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} = \frac{1}{4\pi}(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} - \nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)$$

动量方程： $$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p + \frac{1}{c}(\vec{J}\times\vec{B}) + \eta\nabla^2\vec{v}$$

合并成一项$-\nabla[p+B^2/(8\pi)]$：**等效于**在原压强p的基础上附加了新的各向同性的压强$P_{\mathrm{B}} \equiv B^2/(8\pi) \Rightarrow$ **磁压***

*无序湍动磁流体各向同性$P = B^2/(24\pi)$，是磁能密度$B^2/(8\pi)$的1/3倍。

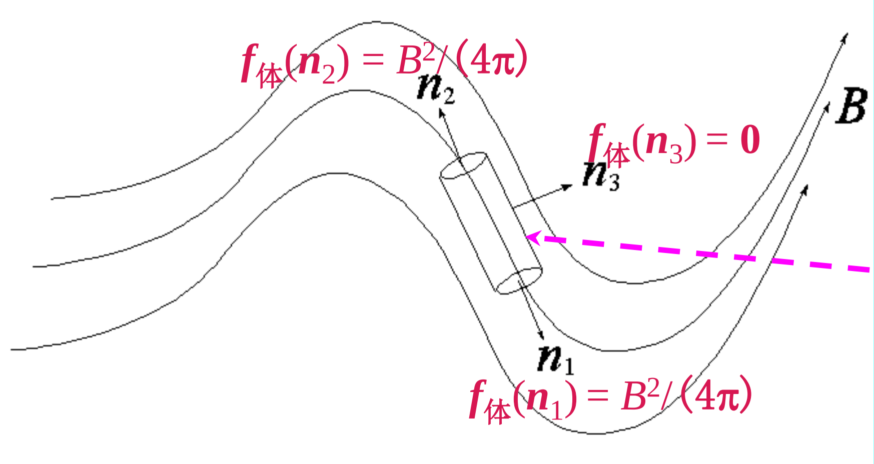
磁流体力学

Lorentz力的性质：

Ampère定律 + 矢量关系$\nabla(B^2) = 2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \Rightarrow$

$$\frac{1}{c}\vec{J}\times\vec{B} = \frac{1}{4\pi}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} = \frac{1}{4\pi}(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} - \nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{4\pi}(\nabla\cdot\vec{B}\vec{B})}$$



磁张力的计算

$$f_{体} = \int_{柱体}\nabla\cdot(\boldsymbol{BB})/(4\pi)\,\mathrm{d}V$$

$$= \int_{柱面}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{BB})/(4\pi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

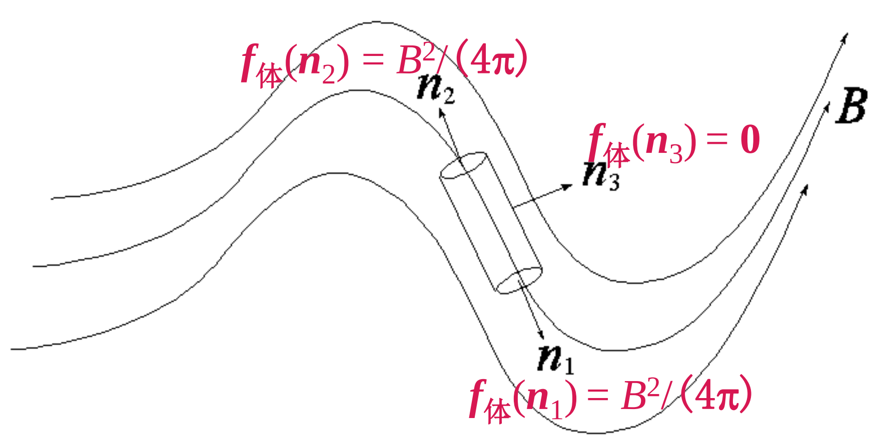
$$= \int_{柱面}B_n\boldsymbol{B}/(4\pi)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

磁流体力学

Lorentz力的性质：

Ampère定律 + 矢量关系$\nabla(B^2) = 2(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \Rightarrow$

$$\frac{1}{c}\vec{J}\times\vec{B} = \frac{1}{4\pi}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} = \frac{1}{4\pi}(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} - \nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)$$



磁张力的计算

沿力线**方向**：$T = \dfrac{B^2}{4\pi}$

可传播**横波**，速度：

Alfvén波

$$v_A = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

1970年Nobel奖

磁流体力学

Lorentz力的性质：总结

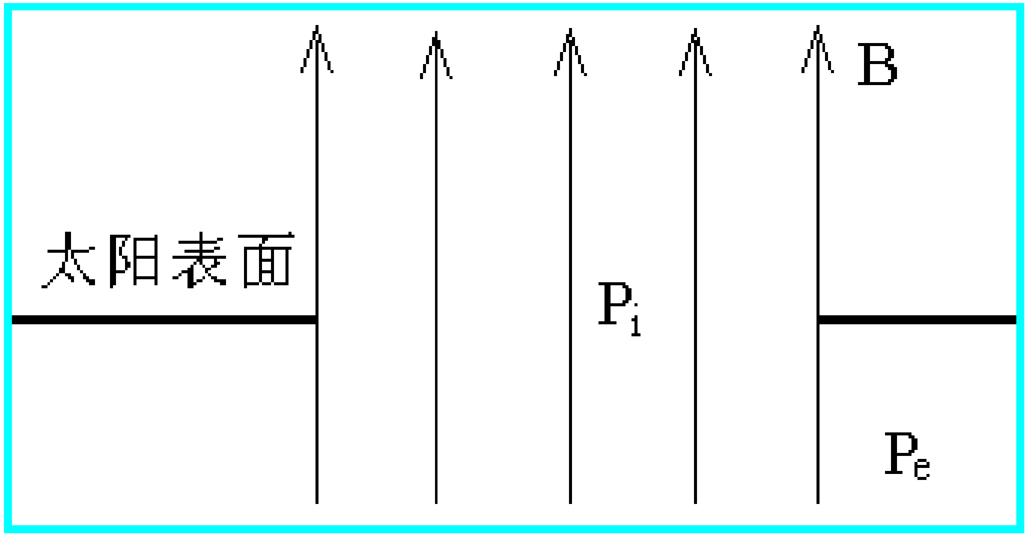
Lorentz力 = 磁压p_B + 张力$\boldsymbol{T}$；$P_B = \dfrac{B^2}{8\pi}$，$T = \dfrac{B^2}{4\pi}$.

Lorentz力应用之一：太阳黑子

- 忽略黑子区外磁场
- 理想气体压强$P_e = n_e k T_e$
- 黑子区：$P_i = n_i k T_i + P_B$
- 力学平衡：$P_i = P_e \Rightarrow$

  $n_i T_i < n_e T_e$
- 太阳表面，$n_i \sim n_e$

  $\Rightarrow T_i < T_e$



磁流体力学

感应方程：

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B})=\nabla(\nabla\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}$$

$\nabla\times$: $\vec{J}=\sigma(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}) \oplus \nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \oplus \nabla\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{J} \Rightarrow$

感应方程： $\boxed{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})+\eta_m\nabla^2\vec{B}}$

其中 $\eta_{\mathrm{m}} = c^2/(4\pi\sigma)$，称为磁粘滞系数

特例1: $\boldsymbol{v} = 0$ $\partial B/\partial t = \eta_{\mathrm{m}}\nabla^2 B \Rightarrow \eta_{\mathrm{m}}\nabla^2 B$磁扩散项

特例2: $\sigma \to \infty$ $\partial B/\partial t = \nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \Rightarrow$ 磁冻结现象

磁Reynolds数:

$$R_{\mathrm{m}} \equiv \frac{LU}{\eta_{\mathrm{m}}} \sim \frac{\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})}{\eta_{\mathrm{m}}\nabla^2\vec{B}} \sim \frac{UB/L}{\eta_{\mathrm{m}}B/L^2}$$

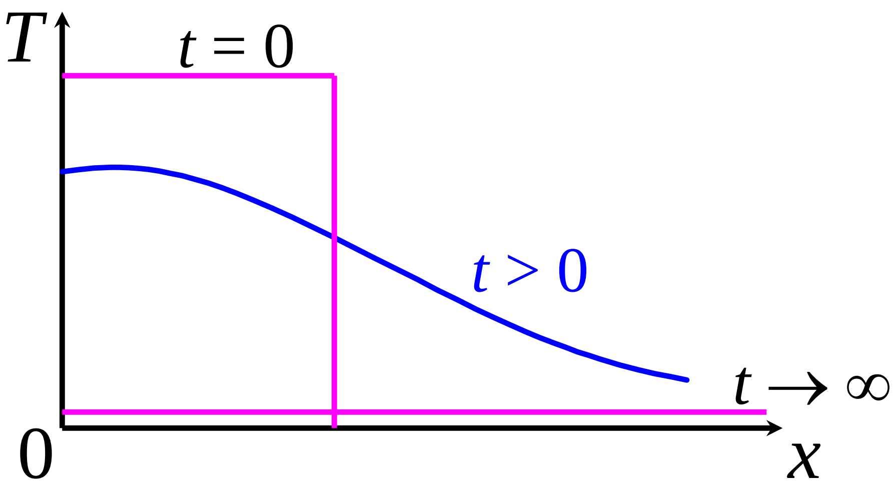
天体环境 $R_{\mathrm{m}} >> 1 \Rightarrow$ **磁冻结**

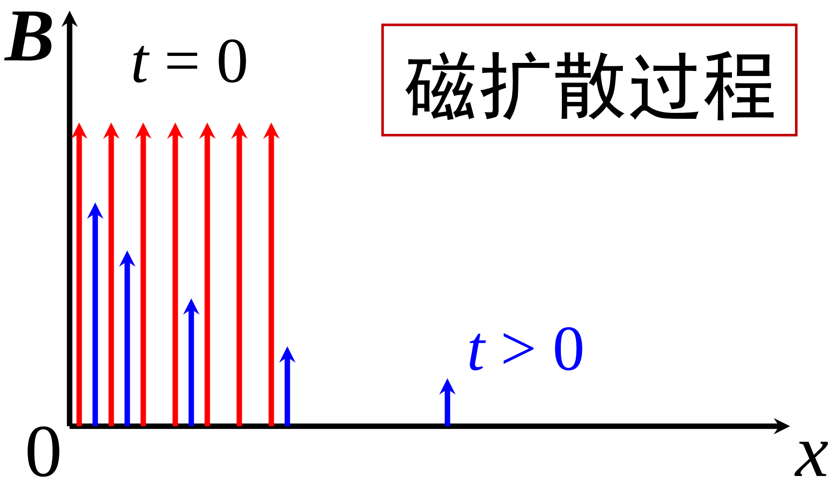
磁流体力学

特例1：$\boldsymbol{v} = 0 \quad \partial B/\partial t = \eta_{\mathrm{m}} \nabla^2 B \Rightarrow \eta_{\mathrm{m}} \nabla^2 B$磁扩散项

热传导方程：$\dfrac{\partial T}{\partial t} = a^2 \nabla^2 T$

磁扩散方程：$\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta_m \nabla^2 \vec{B}$

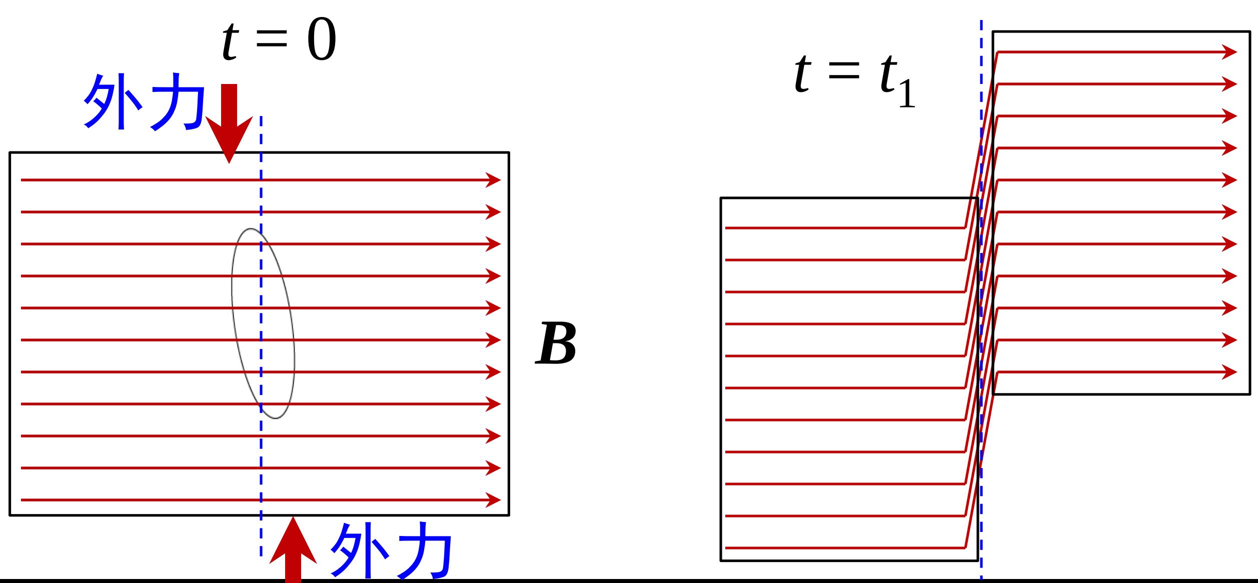




磁流体力学

特例2:　$\sigma \to \infty$　$\boxed{\partial B/\partial t = \nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})}$　磁力线好似“**冻结**”于流体

随磁流体元一起运动的任意闭环内的磁通量不随时间改变！



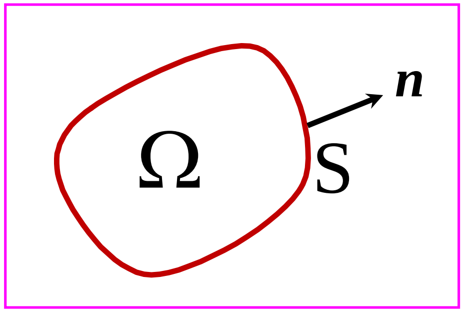
外力克服磁张力做功，使得磁能增加：这是一种**机械能转化为磁能**的过程

4，天体磁场的起源

较小尺度磁场的起源：发电机(dynamo)理论

基本方程为感应方程：（dynamo equation)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta_m \nabla^2 \vec{B}$$



$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{B^2}{8\pi}\mathrm{dV}}_{\text{磁能增加}} = \underbrace{-\frac{c}{4\pi}\oint_S \vec{n}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})\mathrm{ds}}_{\text{Poynting流}} \underbrace{-\frac{1}{\sigma}\int_\Omega J^2\mathrm{dV}}_{\text{Ohm耗散}} \underbrace{-\int_\Omega \left(\frac{1}{c}\vec{J}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}\,\mathrm{dV}}_{\text{Lorentz力作功}}$$

∴发电机作用本质上是将动能转化为磁能的过程

天体磁场的起源

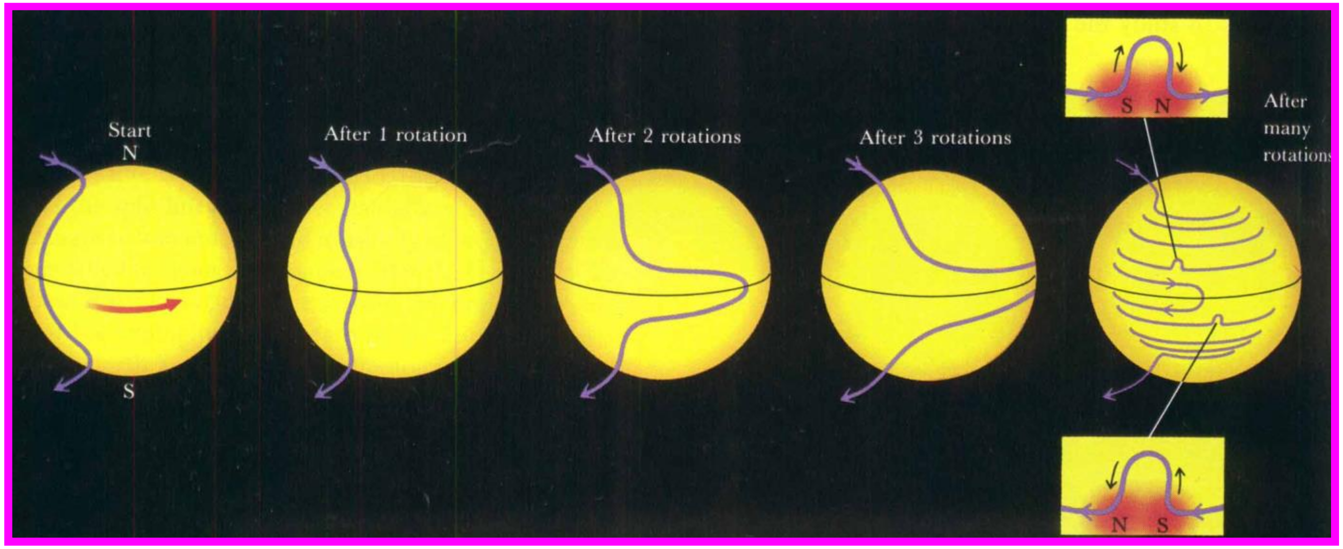
运动学发电机（kinematic dynamo）：

- 场$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{B}$一般不易解析甚至数值求解
- 假设$\boldsymbol{v}$给定 ⇒ 运动学发电机
- 平均场发电机理论：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0+\delta\boldsymbol{v}，\ \langle\delta\boldsymbol{v}\rangle = 0；\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0+\delta\boldsymbol{B}，\ \langle\delta\boldsymbol{B}\rangle = 0$$

- α效应：平均电动势$\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha\boldsymbol{B}_0$
- Ω效应：

较差自转导致磁场放大



总　结

0，什么是等离子体？

1，天体磁场的普遍性

2，等离子体中的电磁作用

3，磁流体力学

4，天体磁场的起源

作　业

习题：2、3