Quantum Hall Effect

Shubnikov – de Haas Oscillation

吴熙楠

北京大学物理学院

2021 年 9 月 17 日

1. 背景
2. 朗道能级
3. *SdH* 振荡
4. 参考文献
   参考文献

1. 背景
   - 经典霍尔效应
   - 整数霍尔效应
2. 朗道能级
3. SdH 振荡
4. 参考文献
   - 参考文献

1. 背景
   - 经典霍尔效应
   - 整数霍尔效应
2. 朗道能级
3. *SdH* 振荡
4. 参考文献
   - 参考文献

背景

Drude 模型

- 电子被限制在 (x, y) 平面上移动，而恒定磁场指向 z 方向。施加恒定电场 E，会产生恒定的电流密度 J
- $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B} - \dfrac{m\vec{v}}{\tau}, \vec{J} = -ne\vec{v}$
- $\begin{pmatrix} 1 & \omega_B\tau \\ -\omega_B\tau & 1 \end{pmatrix} \vec{J} = \dfrac{e^2 n\tau}{m}\vec{E}$
- $\rho_{xx} = \dfrac{m}{ne^2\tau}, \rho_{xy} = \dfrac{B}{ne}$

背景

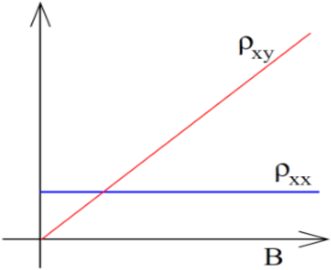


图 1: 经典霍尔效应横向纵向电阻率[1]

1 背景
  经典霍尔效应
  整数霍尔效应

2 朗道能级

3 *SdH* 振荡

4 参考文献
  参考文献

背景

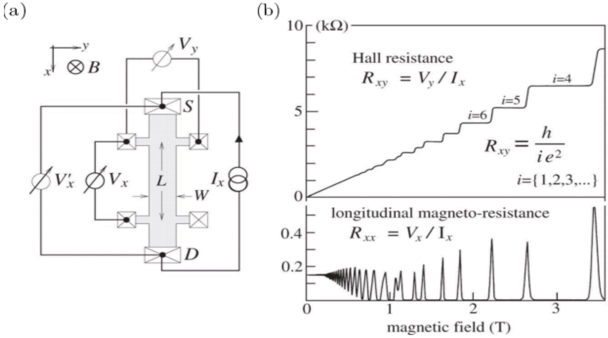


图 2: (a) 霍尔效应装置图 $(b)R_{xx}$ 和 R_{xy} 随 B 大小变化图[2]

背景

Why?

1. 背景
2. 朗道能级
3. *SdH* 振荡
4. 参考文献
   参考文献

朗道能级

带电粒子在磁场下的运动

- $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = B\hat{z}$
- $\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p} + e\hat{A})^2$
  - $Landau \quad gauge : \vec{A} = xB\hat{y}(Why?)$
  - $\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p_x}^2 + (\hat{p_y} + eB\hat{x})^2)$
- $\psi_{k_y} = e^{ik_y y} f_{k_y}(x)$
- $\hat{H}\psi_{k_y} = (\frac{\hat{p_x}^2}{2m} + \frac{m\omega_B^2}{2}(\hat{x} + k_y l_B^2)^2)\psi_{k_y}$
  - $\omega_B = \frac{eB}{m}, \quad l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$
- $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_B$

朗道能级

约束

- 首先让我们把霍尔样品限制在一个有限的矩形区域 $L_x \times L_y$。在 y 方向上我们有平面波，所以这等价于这个方向上盒子系统中的粒子。
- 动量量子化 $k_y = \dfrac{2\pi N}{L_y}$
- 本征函数中心应该在样品内，逻辑约束：
  $x_0 = -k_y l_B^2 \leq L_x \Rightarrow -L_x/l_B^2 \leq k_y \leq 0$
- $N = \dfrac{L_y}{2\pi} \int_{-L_x/l_B^2}^{0} dk_y = \dfrac{eBL_xL_y}{2\pi\hbar} = \dfrac{\Phi}{\Phi_0}$

1. 背景
2. 朗道能级
3. SdH 振荡
   - 边缘态
   - 霍尔电导量子化简单理解
   - 样品中的缺陷
4. 参考文献
   - 参考文献

1 背景

2 朗道能级

3 *SdH* 振荡
- 边缘态
- 霍尔电导量子化简单理解
- 样品中的缺陷

4 参考文献
- 参考文献

SdH 振荡

- 边缘态对于存在势能项的粒子而言不可忽略，因此我们用下图在临近边缘处突然上升的势场模拟边缘势场。

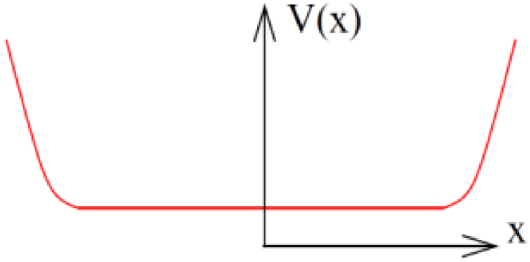


图 3: 样品势场分布[1]

SdH 振荡

边缘态下的 $Hamilton$ 量

- $$H_{k_y} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_B^2}{2}(k_y l_B^2 + x)^2 + x\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_B^2}{2}((k_y l_B^2 + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{1}{m\omega_B^2}) + x)^2 - \frac{1}{2m\omega_B^2}(\frac{\partial V}{\partial x})^2 - k_y l_B^2 \frac{\partial V}{\partial x}$$
- $E_n = \hbar\omega_B(n+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2m\omega_B^2}(\frac{\partial V}{\partial x})^2 - k_y l_B^2 \frac{\partial V}{\partial x}$
- 群速度 $v_y = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k_y} = -\frac{1}{eB}\frac{\partial V}{\partial x}$
- $I_y = -\frac{e}{L_y}\int dk_y \frac{L_y}{2\pi} v_y = \frac{e}{h}\Delta\mu$
- $V_H = \frac{\Delta\mu}{e} \Rightarrow \sigma_{xy} = \frac{I_y}{V_H} = \frac{e^2}{h}$
- 当我们将其扩展到多个朗道能级的填充的时候，可以得到：
$\sigma_{xy} = \frac{ie^2}{h}$

1 背景

2 朗道能级

3 *SdH* 振荡
- 边缘态
- 霍尔电导量子化简单理解
- 样品中的缺陷

4 参考文献
- 参考文献

SdH 振荡

二维平面能量密度

- 考虑无磁场二维电子气：$\kappa = \frac{2\pi}{L_x}\vec{i} + \frac{2\pi}{L_y}\vec{j}, \quad E = \frac{\hbar\kappa^2}{2m}$
- 能量密度：$G(\kappa)d\kappa = \frac{2\pi\kappa d\kappa}{2\pi/L_x \times 2\pi/L_y}$
- 单位面积态密度：$g(E) = \frac{G(E)}{L_x L_y} = \frac{m}{2\pi\hbar^2}$

SdH 振荡

霍尔电导量子化

- 电子朗道能级差为:$\hbar\omega_B$, 能级简并度为：$g(E)\times\hbar\omega_B=\dfrac{Be}{h}$
  - 电子只能处于分立的能级，每个能级的电子数为 $\dfrac{Be}{h}$
- 假设电子填满了 i 个能级，$N=i\times\dfrac{Be}{h}$, $\sigma_{xy}=\dfrac{Ne}{B}=\dfrac{ie^2}{h}$

SdH 振荡

$TKNN$ 方程

$$\sigma_{xy} = i\hbar \sum_{n\neq m} \frac{\langle m|J_y|n\rangle\langle n|J_x|m\rangle - \langle m|J_x|n\rangle\langle n|J_y|m\rangle}{(E_n-E_m)^2} \,. \tag{21}$$

for the conductivity in the energy eigenstate $|m\rangle$ of a quantum mechanical system was derived, where $|n\rangle$ are eigenstates of the Hamiltonian with energy eigenvalues E_n. This formula must be somewhat modified to describe the conductivity in the many-body ground state; using the current defined in equation (20), the appropriate reformulation for our purposes is

$$\sigma_{xy} = \frac{ie^2}{\hbar}\sum_{E_\alpha<E_F<E_\beta}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2}\,\mathcal{S}(u^\alpha_{\mathbf{k}},u^\beta_{\mathbf{k}'}) \,, \tag{22}$$

where

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(u^\alpha_{\mathbf{k}},u^\beta_{\mathbf{k}'}) = &\frac{\langle u^\alpha_{\mathbf{k}}|\frac{\partial H_{\mathbf{k}}}{\partial k^y}|u^\beta_{\mathbf{k}'}\rangle\langle u^\beta_{\mathbf{k}'}|\frac{\partial H_{\mathbf{k}}}{\partial k^x}|u^\alpha_{\mathbf{k}}\rangle}{(E_\beta(\mathbf{k}')-E_\alpha(\mathbf{k}))^2} \\ &- \frac{\langle u^\alpha_{\mathbf{k}}|\frac{\partial H_{\mathbf{k}}}{\partial k^x}|u^\beta_{\mathbf{k}'}\rangle\langle u^\beta_{\mathbf{k}'}|\frac{\partial H_{\mathbf{k}}}{\partial k^y}|u^\alpha_{\mathbf{k}}\rangle}{(E_\beta(\mathbf{k}')-E_\alpha(\mathbf{k}))^2} \,.\end{aligned} \tag{23}$$

Here, the integrals are over the Brillouin zone, while the sum is over pairs of states $u^\beta_{\mathbf{k}'}, u^\alpha_{\mathbf{k}}$ above and below the Fermi energy respectively. A simple manipulation employing the completeness relation

$$\sum_\beta \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2}|u^\beta_{\mathbf{k}'}\rangle\langle u^\beta_{\mathbf{k}'}| = 1 - \sum_\alpha \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}|u^\alpha_{\mathbf{k}}\rangle\langle u^\alpha_{\mathbf{k}}| \tag{24}$$

then yields

$$\sigma_{xy} = \frac{ie^2}{\hbar}\sum_{E_\alpha<E_F}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\langle \frac{\partial u^\alpha_{\mathbf{k}}}{\partial k^y}|\frac{\partial u^\alpha_{\mathbf{k}}}{\partial k^x}\rangle - \langle \frac{\partial u^\alpha_{\mathbf{k}}}{\partial k^x}|\frac{\partial u^\alpha_{\mathbf{k}}}{\partial k^y}\rangle\right] . \tag{25}$$

We would like to use the Kubo formula to relate the Hall conductivity to a fundamental topological invariant of the system. To this end, we define the quantity

$$\mathcal{A}_j(\alpha,\mathbf{k}) = -i\langle u^\alpha_{\mathbf{k}}|\frac{\partial}{\partial k^j}|u^\alpha_{\mathbf{k}}\rangle \,; \tag{26}$$

it can be seen that this is nothing other than an Abelian connection over the Brillouin zone for the band α, a so-called *Berry connection*, analogous to the gauge field of classical electromagnetism. In particular, we see that under a local phase shift of the Bloch states $u_{\mathbf{k}} \to e^{i\omega(\mathbf{k})}u_{\mathbf{k}}$ with $\omega(\mathbf{k})$ a generic smooth function, one has

$$\mathcal{A}_j(\alpha,\mathbf{k}) \to \mathcal{A}_j(\alpha,\mathbf{k}) + \frac{\partial\omega}{\partial k^j} \,, \tag{27}$$

the expected behaviour for a connection under a $U(1)$ gauge transformations. The curvature tensor corresponding to this connection is

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{ij}(\alpha) &= \frac{\partial\mathcal{A}_j(\alpha,\mathbf{k})}{\partial k^i} - \frac{\partial\mathcal{A}_i(\alpha,\mathbf{k})}{\partial k^j} \\ &= -i\langle \frac{\partial u^\alpha_{\mathbf{k}}}{\partial k^i}|\frac{\partial u^\alpha_{\mathbf{k}}}{\partial k^j}\rangle + i\langle \frac{\partial u^\alpha_{\mathbf{k}}}{\partial k^j}|\frac{\partial u^\alpha_{\mathbf{k}}}{\partial k^i}\rangle \,,\end{aligned} \tag{28}$$

so we see instantly that

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{\hbar}\sum_\alpha \int \frac{dk^x dk^y}{(2\pi)^2}\mathcal{F}_{xy}(\alpha) \,. \tag{29}$$

By an extension of the Gauss-Bonnet theorem, the integral of the Berry curvature $\mathcal{F}_{xy}(\alpha)$ over the Brillouin zone is $2\pi C_\alpha$, with C_α an exact integer, referred to as the *Chern number*. We thus recover Hall quantization

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\sum_\alpha C_\alpha \in \frac{e^2}{2\pi\hbar}\mathbb{Z} \,. \tag{30}$$

This argument reveals something deep about the importance of *topological order* in determining the properties of a material.

1. 背景
2. 朗道能级
3. *SdH* 振荡
   - 边缘态
   - 霍尔电导量子化简单理解
   - 样品中的缺陷
4. 参考文献
   - 参考文献

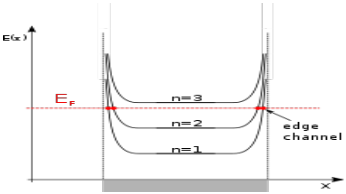
SdH 振荡

- 稳定情况 $(\tau \to \infty)$:$\rho_{xx} = 0, \rho_{xy} = \dfrac{B}{ne}$
- 为什么 ρ_{xx} 会出现振荡形式?

SdH 振荡物理机制

在每个朗道能级中，电子状态数 $(\frac{Be}{h})$ 随磁场的增加而线性增加。因此，随着磁场的增大，朗道能级会向能量更高的方向移动。当每一个能级通过费米面时，电导就会减小随着能带里面的电子变为自由电子流动起来，这导致材料的电导率呈周期性地振荡。

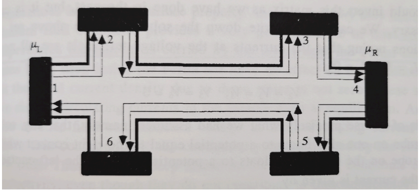
SdH 振荡



- 费米面 E_F 位于两个朗道能级之间。当能带穿过费米面 E_F 时，它们中的电子就会变得可移动。由于费米面 E_F 位于两个朗道能级之间，电子的散射只发生在向上弯曲的样品边缘 $(Why?)$，相对应的电子态通常被称为边缘通道。
- $Landauer$ 公式:$G = \frac{2e^2}{h} T(Why?)$
- $Buttiker$ 公式：$I_p = \sum_q G_{pq}(V_p - V_q)$
  - 其中 I_p 为 p 端口的电流，G_{pq} 为从端口 q 到端口 p 的电导,V_p, V_q 为 p, q 的电压

SdH 振荡

六端口通道 ($T = 2$)



- $$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_c & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_c \\ -G_c & G_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_c & G_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_c & G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_c & G_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -G_c & G_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix}$$

SdH 振荡

- $I_2 = I_3 = I_5 = I_6 = 0$
- $R_x = \dfrac{V_2 - V_3}{I} = \dfrac{V_6 - V_5}{I} = 0$
- $R_H = \dfrac{V_2 - V_6}{I} = \dfrac{V_3 - V_5}{I} = G_c^{-1} = \dfrac{h}{2e^2}$

SdH 振荡

引入杂质

- 我们使用一个在朗道能级附近的随机势模拟杂质的影响

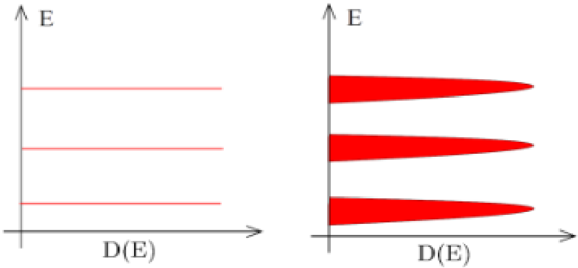
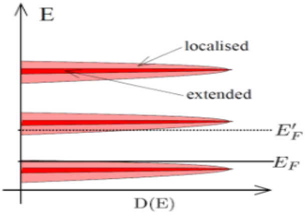
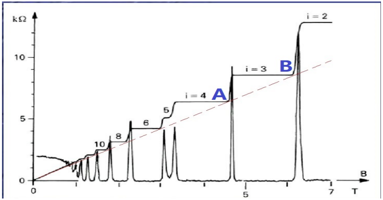


图 4: 纯净样品与有杂质样品的能态分布[1]

SdH 振荡





SdH 振荡

为何 R_{xy} 会有平台或者突变出现

- 假设此时磁场加在 A 的位置，这时电子占满了四个能级，总的电子面密度和不考虑量子效应时相等 (A 点也在红色虚线上)，这时加大磁场，能级简并增大，总电子数占满了前三个能级后，占不满第四个能级，这些“多余”的电子被挤向了“局域态”，它是由缺陷导致的，好像电子被束缚在原子核周围，这些电子不参与导电，这样参与导电的电子突然减少，就会导致图中霍尔电阻的徒然上升
- 杂质使得朗道能级展宽，但是杂质态是局域的，局域态不导电，因此费米能级在展宽的朗道能级内移动时，电导不发生改变，行程电导平台，平台的宽度和杂质态展宽的朗道能级宽度有关

SdH 振荡

为何 R_{xx} 会变为 0

- 因为基态和激发态之间存在能隙，在极低温度下，电子既不能获得足够能量跃迁，又不能前往已经占满的低能态，无处可去的电子只能挤在一起，形成所谓的超流，不会受到散射，故不需要额外的电场驱动就能维持电流，类似于光滑平面的匀速运动，所以水平电阻 $R_{xx}=0$
- 当磁场继续增大至图中 B 点，局域态中的电子已经完全进入前三个能级上，此时的霍尔电阻又和经典情况一样，继续增加磁场，超流态破坏，部分电子又变成局域态，会有强烈散射，水平方向的电阻又不为 0，出现一个峰值

SdH 振荡

Question:

量子霍尔效应中平台在朗道能级吗？

SdH 振荡

Question:

量子霍尔效应杂质越少越好吗?

1 背景

2 朗道能级

3 *SdH* 振荡

4 参考文献

参考文献

参考文献

[1] MENG S. Integer Quantum Hall Effect, 2018.

[2] ABOUZAID A, DAI J, FEILER S, The Integer Quantum Hall Effect, 2018.

Thanks!