内 容 提 要

本书是刘辽同志根据本人多年来在北京师范大学物理系讲授“广义相对论”课程的经验，在《广义相对论》讲义的基础上整理、撰写而成的。

本书是广义相对论的入门书，内容叙述深入浅出，详尽全面，材料的选择比较恰当，不少篇幅吸收了广义相对论若干经典著作的某些精华，也有不少吸收了近年来有关领域的新鲜成果。内容包括：广义相对论的物理基础、黎曼空间的张量运算、爱因斯坦重力场方程和重力场的能量表述、重力辐射、Kruskal度规、致密物质和致密星、黑洞物理、宇宙学。

本书可作为我国高等学校理工科高年级大学生、研究生的广义相对论课程的教学用书，也可供有关的科学研究人员、教师参考使用。

深切缅怀刘辽先生！

1928年腊月生2016年4月27日逝世

高等学校教学用书

广义相对论

刘 辽 著

*

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海市印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 16 字数 382,000

1987年11月第1版 1987年11月第1次印刷

印数 00,001—3,250

ISBN 7-04-000063-6/O·28

书号 13010·01445 定价 3.60元

谨以此书献给那些

在科学高峰的攀登中

持之以恒，不畏险阻的勇士们！

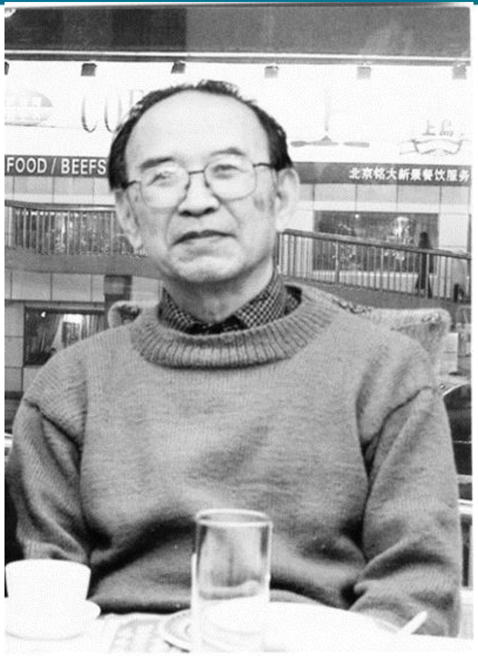
九九〇年二月四日購于学院路

徐仁新

北京师范大学引力与相对论研究中心

Center for Relativity and Gravitation, Beijing Normal University

首 页　研究人员　客座教授　研究生　学术活动　相关链接　　中文 | English



刘辽　　教授

地址：　北京师范大学物理学系
北京市海淀区新街口外大街19号

邮编：　100875

电话：

传真：

E-mail：

刘辽，年已八十，1952年毕业于北京大学物理系。1956年调到北京师范大学物理系，1957年因参与鸣放擅自发表有关民主治校和政治民主化等言论被划为右派，开除公职，劳动改造，受够欺凌侮辱。然而生性冥顽，不低头认罪，仍利用闲暇自学理论物理聊以自慰。经过多年苦读，初步掌握广义相对论，量子场论和李群李代数，并于1978年在各大学和我校物理系开讲上述课程，对提高国内和北师大相对论天体物理水平有一定帮助。我于1977年独自发表了第一篇论文（“一个强子质量的经验公式”），接着我转向黑洞物理带领天文系和本系研究生开始展开黑洞物理与宇宙学方面的学习与研究，直到1994年退休为止。目前，退休后仍在自己的健康允许下从事黑洞量子化，引力波等方面的研究。

《天体物理学》

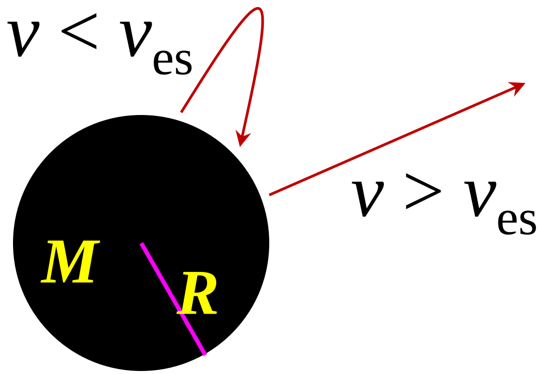
第九章　黑 洞 (a)

讲授：徐仁新

北京大学物理学院天文学系

什么是黑洞？

- Laplace的“黑洞”（dark star）：



逃逸速度：$mv_{es}^2/2=GMm/R$

$\Rightarrow v_{es} = (2GM/R)^{1/2}$

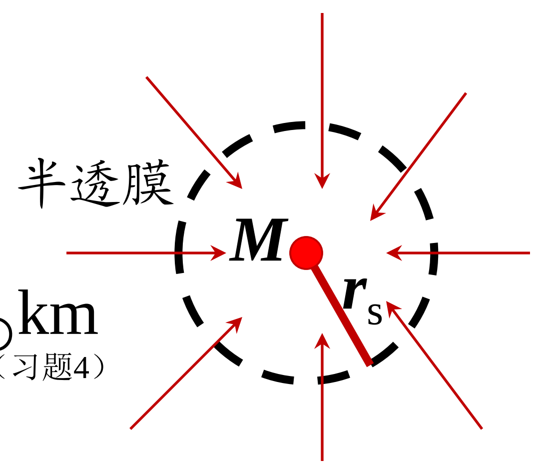
$v_{es} = c$：不能在遥远处看见光！

电磁波而非有质量点粒子

足够近的这类“黑洞”是可见的

- 广义相对论预言的黑洞：

带有奇性的时空区域！



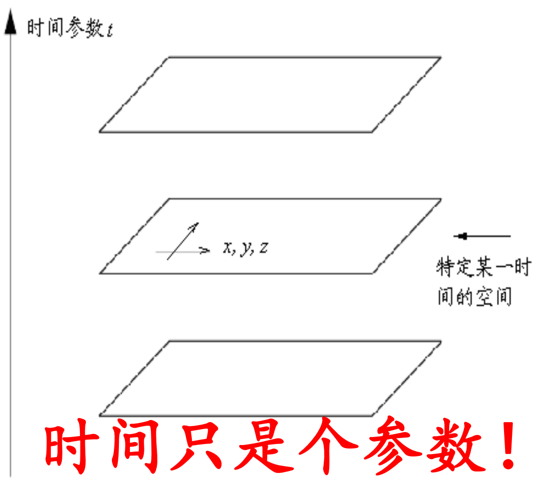
Schwarzschild半径：$r_s=2GM/c^2 \approx 3M/M_\odot$km

GR => 最小圆轨道半径（习题4）

什么是时空？

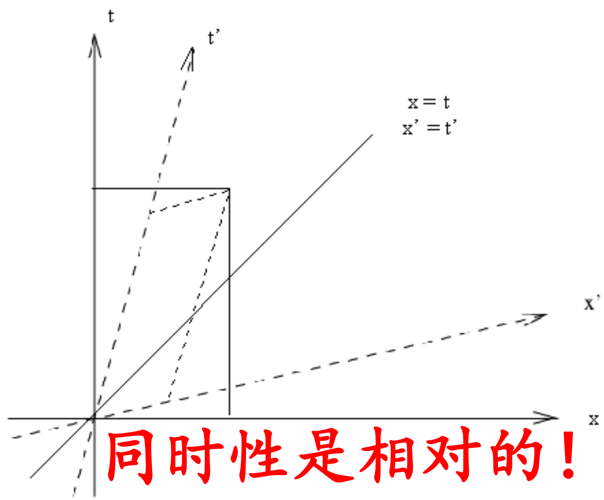
1，相对论的概念

什么是相对论？（三种时空观）



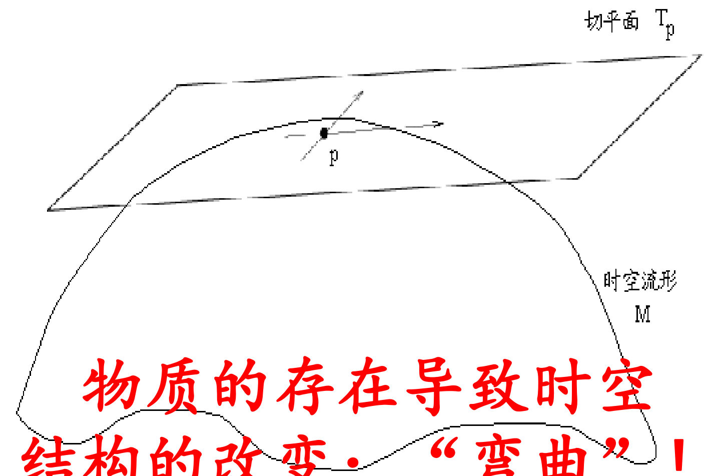
时间只是个参数！

Newton时空观



同时性是相对的！

狭义相对论时空观



物质的存在导致时空结构的改变：“弯曲”！

广义相对论时空观

“地平面”

- 相对论：将时空统一起来，并研究时空几何结构的理论！

狭义相对论——平直时空，Minkowski时空
广义相对论——弯曲时空，伪Riemann空间

爱因斯坦的科学成就

"当失明的甲虫在一个球体表面爬过时，它没有注意到它走过的轨迹是弯弯曲曲的。我很有幸地发现了这一点。"

当问及他是如何得到如雷贯耳的名声时，爱因斯坦这样回答记者。

左边是《**永远的瞬间幻觉——阿尔伯特·爱因斯坦**》一书54页。

该书根据希伯来大学爱因斯坦档案馆资料，形象、生动地展现了爱因斯坦的一生。全书共分9章；其中第2章标题为"爱因斯坦的科学成就"，始于54页终于111页。

此书已被翻译成中文，由中国科学技术出版社2010年出版。

什么是原始的科学创新？

怎样才能做划时代的科学？

或许从爱因斯坦此言中能够有所领悟...

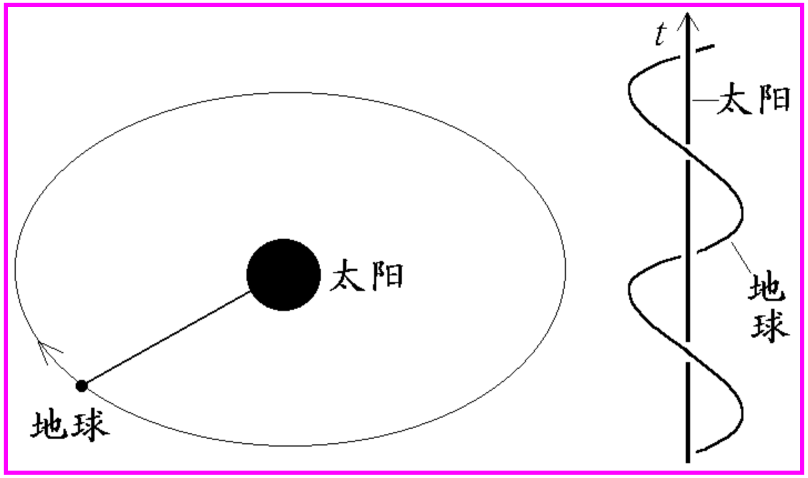
1，相对论的概念

狭义相对论：

- **时空图：** 在时空中刻画物质的运动

  例： 日地运动

  时空图上一点称一**事件**



- **世界线：** 运动状态在时空图上表现
- **Euclid空间的线元与（微分）结构**

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

一般地，
$$\boxed{ds^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} dx^i dx^j \xrightarrow{\text{求和约定}} g_{ij} dx^i dx^j}$$

二阶张量g_{ij}为**度规**，$g_{ij} = g_{ji}$。给定度规就确定空间结构，反之？

1，相对论的概念

狭义相对论：

- **Euclid空间**度规

直角坐标：$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$；其它 $g_{ij} = 0$

球 坐 标 ：$g_{11} = 1$，$g_{22} = r^2$，$g_{33} = r^2 \sin^2\theta$；其它 $g_{ij} = 0$

- **三维非Euclid空间**

如果g_{ij}的六个分量取成坐标的任意函数，这时描述的空间就不一定是Euclid空间，而一般是弯曲空间——(伪)Riemann空间

例：二维弯曲面——单位球面，$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$

- **时空是一种特殊的非Euclid空间，时空线元ds^2，**

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \text{。} \quad \mu,\nu = 0(\boldsymbol{t}), 1(\boldsymbol{x}), 2(\boldsymbol{y}), 3(\boldsymbol{z})}$$

- **狭义相对论时空观：** Minkowski时空

“平直”的时空

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1，相对论的概念

狭义相对论：

- **光锥**：为刻画时空的因果特性而将**时空分区**

  类时，可能存在因果关系的区域

  绝对的过去，绝对的未来

  类空，不可能有因果联系的区域

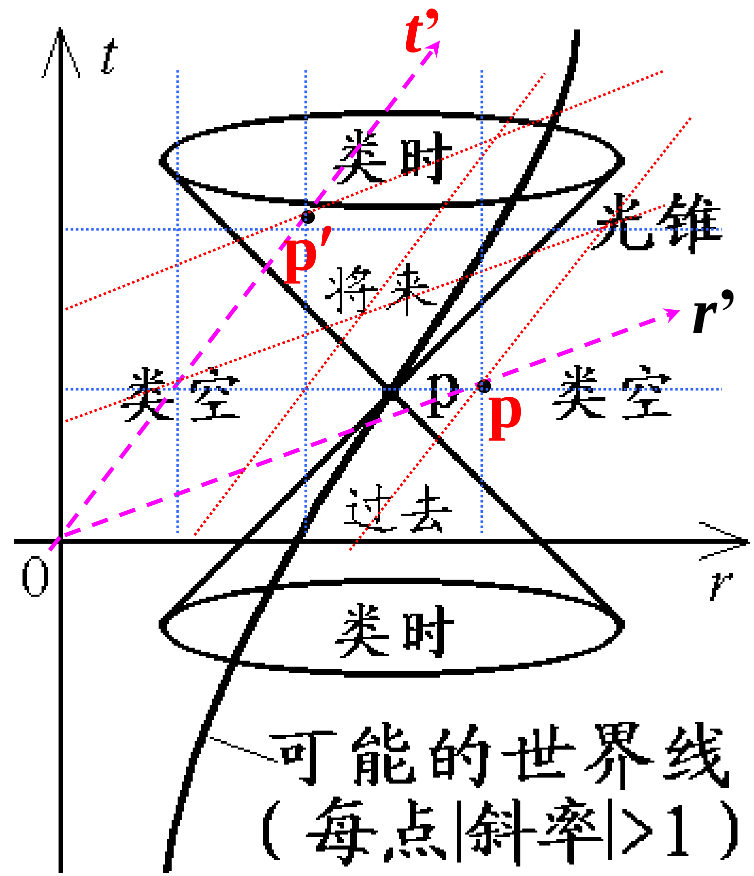
  类光，以光速产生因果联系的集合

- **测地线**：为连接两时空点的短程线

  即，两时空点间隔$\int \mathrm{d}s^2$最小

  类空测地线：选择p与p同时的参考系中观测到的最短空间路径

  类时测地线：选择p与p′同地的参考系中观测到的时间流逝最长路径



双生子佯谬

1，相对论的概念

广义相对论：

请阅读：俞允强《物理宇宙学讲义》“4.2 相对论性的引力”小节

- **等效原理**

弱等效原理(WEP): $m_G = m_I \Leftrightarrow$ **Einstein电梯中力学规律等效…**

Einstein等效原理(EEP): **Einstein电梯中物理规律都等效…**

- **“引力”难道等效于“非惯性系”？**

  → 时空任意点存在局部自由下落观者，其时空由Minkowski度规描述。而整体时空可看作无穷多Minkowski时空拼凑而成（**任一点Minkowski时空实际上是流形该点切空间**）

- **广义相对论对“引力”的理解：**

物质的存在导致时空弯曲，自由粒子(只受引力)沿测地线运动

- **广义相对论的经典检验：**

光在太阳引力场中弯曲，水星近日点进动，地球引力场中红移

1，相对论的概念

广义相对论：

- 如何描述时空弯曲？**Riemann张量！**

$$\boxed{R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma,\mu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}}$$

其中$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu,\sigma} = \partial\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} / \partial x^{\sigma}$，$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$称为Christoffel符号，是度规张量的函数，$\boxed{\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = g^{\sigma\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho})/2}$，$g_{\rho\mu,\nu} = \partial g_{\rho\mu} / \partial x^{\nu}$。

- 怎么还区分上下指标？

> n阶**张量**可以看作n个矢量的线性函数. 在欧氏空间中采用直角坐标系描述张量时, 区分上下指标描述张量意义不大; 但若采用非直角坐标系或非欧空间中描述张量时,区分上下指标是必要的

选定坐标给定度规后Riemann张量$R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho}$就确定了！

- **弯曲空间：Riemann张量$R_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho}$存在非零分量**

可以验证Minkowski时空是平直时空（所有分量为零）

1，相对论的概念

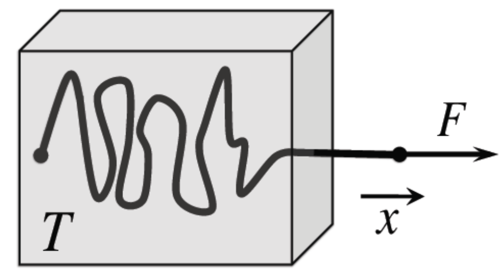
广义相对论：

- Ricci张量：缩并一次，$\boldsymbol{R}_{\mu\nu} = \boldsymbol{R}_{\mu\sigma\nu}{}^{\sigma}$
- 曲率标量：缩并Ricci张量，$\boldsymbol{R} = g^{\mu\nu}\boldsymbol{R}_{\mu\nu}$
- Einstein张量：定义为

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}}$$

引力真是基本力吗?

引力是熵力?



- 物质分布如何决定时空结构？**Einstein场方程！** $\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}}$

时空曲率由Riemann张量描述，物质场由能动张量$T_{\mu\nu}$描述！

静止理想流体： $T_{\mu}^{\nu} = g^{\nu\sigma} T_{\mu\sigma} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$

Einstein场方程是一组高度非线性偏微分方程！（一般难解）

2，Schwarzschild时空

Schwarzschild时空线元:

- 历史：Einstein方程的第一个解

  1915年12月在Einstein场方程刚发表一个月，德国军队中一位志愿入伍的学者Schwarzschild在与俄军作战的前线得出了Einstein场方程的第一个精确解。Schwarzschild在次年5月病逝于军中…

- 真空Einstein场方程$G_{\mu\nu}=0$的稳态球对称解：

$$\boxed{\mathrm{d}s^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)}$$

M：中心天体质量；$\{t, r, \theta, \varphi\}$：Schwarzschild坐标。

- 奇点：

  $r=2M$（坐标奇点）；$r=0$（内禀奇点）

2，Schwarzschild时空

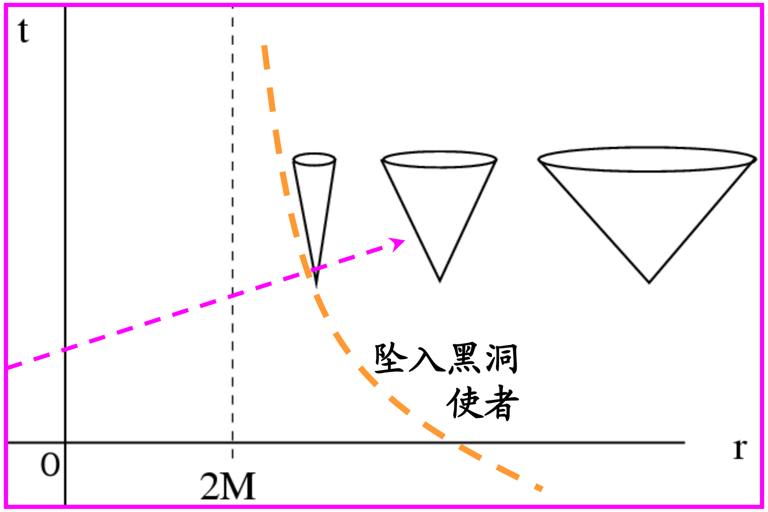
Schwarzschild时空结构:

- **Schwarzschild坐标下的光锥**

$r>2M$区域：r方向光子$ds^2=0$ ⇒

$$ds^2=0=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2$$

$$\boxed{\frac{dt}{dr}=\pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}}$$



对于大r区斜率接近±1（平直时空）。而当$r\to 2M$时，斜率趋于无穷

- **Eddington坐标：坐标变换** $t'=t+2M\ln\left|\frac{r}{2M}-1\right|$

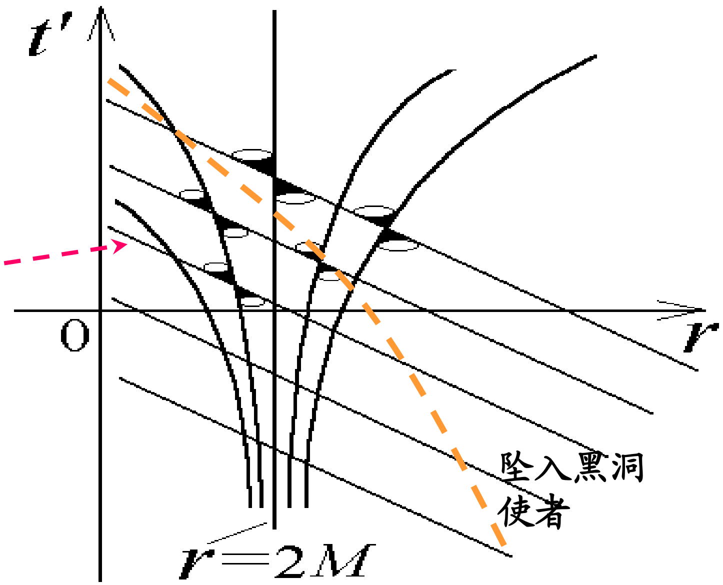
⇒ 时空线元

$r=2M$处的奇异性消除！

$$\boxed{ds'^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt'^2+\left(1+\frac{2M}{r}\right)dr^2+\frac{4M}{r}dt'dr+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)}$$

2，Schwarzschild时空

Schwarzschild时空结构:



- **Eddington坐标下的光锥**

  r方向光子$ds'^2 = 0 \;\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}r} = -1 \quad \text{或} \quad \left(1+\frac{2M}{r}\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}}$$

- **$r < 2M$区：“时空互换”**

  r是“类时”的而t'是“类空”的！

  正如**Minkowski**时空中时间不能倒流，在**$r = 2M$**面以内不可能向外发射光或粒子

- **事件视界：$r = 2M$面，简称视界；其半径又称为Schwarzschild半径（或黑洞半径）**

$$\boxed{r_s = \frac{2GM}{c^2} \approx (3\mathrm{km})\frac{M}{M_{\mathrm{sun}}}}$$

2，Schwarzschild时空

奇点（Singularity）

- **内禀奇点：**

  当某测地线接近内禀奇点时，时空曲率（Riemann曲率张量刻画）趋于发散。

- **奇点定理：（Penrose，Hawking；1965-1970）**

  不依赖于时空的对称性，**大质量恒星晚期的塌缩**和**宇宙原初的奇性**在一定条件下都是不可避免的！

- **宇宙监督假设（Cosmic censor hypothesis）：**

  奇点一定被视界面所包围。Schwarzschild黑洞的时空奇点位于黑洞视界内部，满足这一要求。违背该要求的时空的因果律是严重病态的。

  简单地讲就是：**奇点不能裸露**

2，Schwarzschild时空

Schwarzschild时空的其它特性：（$r > r_s$）

- **最小圆轨道半径**

Newton引力：点粒子圆轨道半径可以任意小

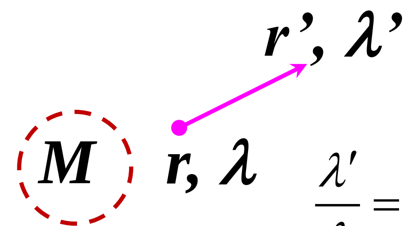
Schwarzschild时空：只有在$r > r_{ms} = 3r_s$的区域才可能存在圆轨道

→ 吸积盘内半径，在 $r < r_{ms}$ 区就不可能存在作**Kepler**运动！

- **引力红移**（无限红移面：$r = r_s$）

红移量z = (λ’-λ)/λ，r’→ ∞ 时：

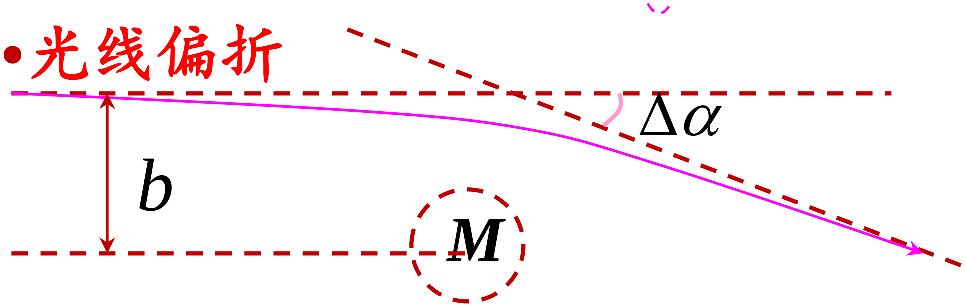
$$z = \left(1 - \frac{r_s}{R}\right)^{-1/2} - 1 \xrightarrow{R>>r_s} \frac{GM}{c^2 R} + \frac{3}{2}\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)^2 + \ldots$$



$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 - r_s / r'}{1 - r_s / r}}$$

事件视界面 = 无限红移面

- **光线偏折**



Δα 较小时：

$$\Delta\alpha \approx \frac{2r_s}{b} = \frac{4GM}{c^2 b}$$

2，Schwarzschild时空

GR引力与Newton引力的比较:

- Einstein场方程描述了物质的存在如何导致时空的弯曲；粒子在弯曲时空中的运动表现为“引力”，其弱场、低速情形的近似即为Newton的“万有引力”。
- 相对于Newton引力而言，广义相对论修正定性上是使得引力场在强场时**增强**了!
  - ✓最小圆轨道半径
  - ✓光线弯曲
  - ✓$\gamma \le 4/3$多方球模型不稳定

伪Newton势:

$$\phi = -\frac{GM}{r - 2M}$$

总　结

0，什么是黑洞？

1，相对论的概念

2，Schwarzschild时空

3，Kerr时空

4，黑洞的量子效应

5，黑洞可能存在与观测证认

作　业

习题：4