作业2（截止日期：2020年11月2日）

1、$A^{\mu}{}_{\lambda\nu}$ 和 $B^{\mu}{}_{\lambda\nu}$ 为 $(1,2)$-阶张量，k^{μ} 为矢量。证明（1）$A^{\mu}{}_{\lambda\nu}+5B^{\mu}{}_{\lambda\nu}$ 为 $(1,2)$-阶张量；（2）$A^{\mu}{}_{\lambda\mu}k^{\lambda}$ 为标量；（3）$\Gamma_{\nu\lambda\mu}\equiv g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu}$ 不是张量。

2、测地线方程 $x^{\mu}(\lambda)$ 满足

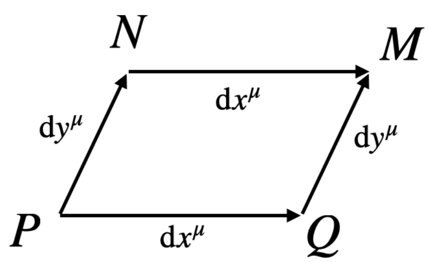
$$\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\lambda}=f(\lambda)\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}$$

证明存在仿射参量 $\sigma=\sigma(\lambda)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}\sigma^2}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\sigma}=0\,.$$

3、一阶张量 A^{λ} 按照如下路径平移，证明：

$$A^{\lambda}(P\to Q\to M)-A^{\lambda}(P\to N\to M)=\frac{1}{2}R^{\lambda}{}_{\rho\nu\mu}A^{\rho}\left(\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}y^{\nu}-\mathrm{d}x^{\nu}\mathrm{d}y^{\mu}\right)$$



4、证明：在黎曼空间，局域地来说，总能找到合适的坐标，使时空中 P 点处的 Christoffel 联络的所有分量都为零，即 $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(P)=0$。

5、试证黎曼张量的独立成分数目为20。

6、求二维球面的联络 $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ 和黎曼张量 $R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}$，以及 $R_{\mu\nu}$、R 和爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu}$。

7、证明：如果把下面 Lie 微商公式中的普通导数换成协变导数，该式仍旧成立。

$$\mathcal{L}_{\xi}T^{\lambda}{}_{\mu\nu}=T^{\lambda}{}_{\mu\nu,\rho}\xi^{\rho}-T^{\rho}{}_{\mu\nu}\xi^{\lambda}{}_{,\rho}+T^{\lambda}{}_{\mu\rho}\xi^{\rho}{}_{,\nu}+T^{\lambda}{}_{\rho\nu}\xi^{\rho}{}_{,\mu}$$