

《天体物理学》

第七章 白矮星

讲授：徐仁新

北京大学物理学院天文学系

白矮星：原子核浸泡在量子 e 气中

- 主序星：核能释放所致热压抵抗引力
- 白矮星：电子量子简并压抵抗引力塌缩
- 什么是简并压？

|| Boson: BE } \Rightarrow MB (经典统计) ||
|| Fermion: FD } ||
|| (粒子波包长度 $> \sim$ 平均距离) (粒子波包长度 \ll 平均距离) ||

简并压：Fermion量子效应不可忽略时表现的纯统计行为

热波长： $h/p \sim h/T^{1/q}$ (NR: $q = 2$, ER: $q = 1$), 平均距离： $\sim n^{-1/3}$

$h/T^{1/q} > \sim n^{-1/3} \Rightarrow T^{1/q}/n^{1/3}$ 足够小, 即：低温高密态！

- Fermi子星：Fermi子简并压支撑引力

1, Fermi子星的研究历史

天文观测提出问题：白矮星之谜

- 1862年：据Kepler定律推测天狼B星质量为 $(0.75 \sim 0.95)M_{\odot}$ ，然而其光度只有 $\sim 1/360 L_{\odot}$ ！
- 1914年：Adams测量光谱，得天狼B星半径 $\sim 0.03 R_{\odot}$ 。
- 1925年：Adams测量天狼B星光谱红移，得非常大的 M/R 比！
- 1926年：Eddington出版 “*The Internal Constitution of the Stars*”

理论物理研究的进展：量子统计

- Fermi, E. 1926, Rend. Acc. Lincei, 3, 145
- Dirac, P. 1926, Proc. Roy. Soc., 112, 661
- Fowler, R. H. 1926, MNRAS, 87, 114
- Chandrasekhar, S. 1931, ApJ, 74, 81: 相对论EoS、WD结构

当天文学家发现 10^6g/cm^3 物质后...

On Dense Matter. By R. H. Fowler, F.R.S. **MN 926,87:114**

S. Chandrasekhar

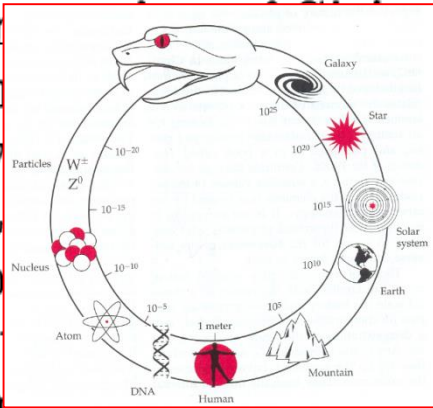
Paul Dirac

Douglas R. Hartree

John Lennard-Jones

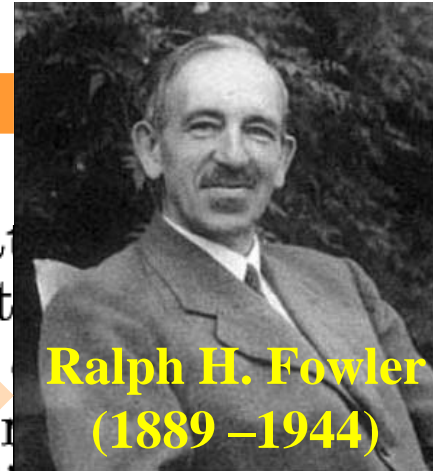
§ 1. *Introductory.*—The accepted

the cor
has al
largely
such a
not bo
are in



is of the ord
to most in

on. We recognise now that ma
t has sufficient *energy*, so that t
linary atomic orbits of atomic
with sufficient energy to escape fr



they may be near. The density of such “energetic” matter is then
only limited *a priori* by the “sizes” of electrons and atomic nuclei.
The “volumes” of these are perhaps 10^{-14} of the volume of the corre-
sponding atoms, so that densities up to 10^{14} times that of terrestrial
materials may not be impossible. Since

are of an altogether lower order of mag
by the “sizes” of the nuclei and electro
of stellar densities, and the structural
be treated as massive charged points.

Eddington has recently * pointed o
such matter. Assuming it to behave r



1, Fermi子星的研究历史

故事并未结束：超过Chandrasekhar质量？

- 1932年：Landau推测一种主要由中子构成的星体
- 1932年：Chadwick发现确实存在“中子”的迹象
- 1934年：Baade和Zwicky指出中子星可能在超新星爆发时产生
- 1939年：Oppenheimer和Volkoff计算发现： $M_{\max} \sim M_{\odot}$, $R \sim 10\text{km}$
- 1968年：Bell和Hewish等发现“脉冲星”
- 1968年：Gold提出“脉冲星 = 旋转磁化中子星”

1, Fermi子星的研究历史

另类Fermi子星：中子星还是夸克星？

- 1969年：Ivanenko和Kurdgelaidze猜测中子星内部有夸克物质
- 1970年：Itoh计算了由自由{u, d, s}组成天体的流体静力学平衡
- 1971年：Bodmer探讨奇异夸克物质于中子星内部的可能性
- 1973年：Gross、Wilczek、Politzer证明渐近自由
- 1984年：Witten猜想奇异物质可能是强子的真正基态
- 1986年：Haensel等和Alcock等：脉冲星是奇异星而非中子星？

结语：一个富含历史与现实意义的课题！

- 历史是光荣的：微观与宇观的完美结合！
- 现实是严峻的：有（天体）夸克物质吗？恒星到底如何演化？

2, 零温理想电子气状态方程

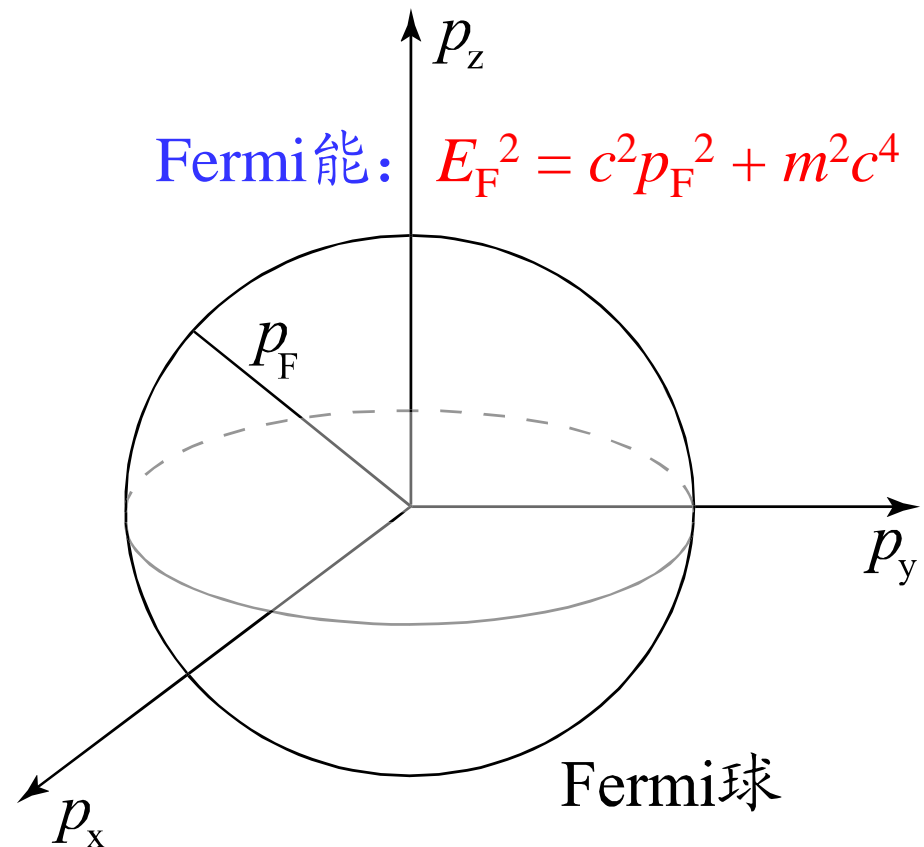
Fermi球

- 零温理想电子尽量占据能量较低的能级
- 能量与动量正相关
- 动量 \mathbf{p} 空间中存在最大 $p = p_F$
- 单个量子态占相空间体积 h^3
- 体积 V 内电子数目:

$$N = \frac{4\pi}{3} \frac{p_F^3 V}{h^3} \times 2$$

⇒ Fermi动量

$$p_F = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \cdot n^{1/3}$$



2, 零温理想电子气状态方程

非相对论极限情形 (NR) : $cp \ll mc^2$

- $E = (c^2p^2 + m^2c^4)^{1/2} = mc^2 + p^2/(2m) + \dots$

- $E_{\text{kF}} := E_{\text{F}} - mc^2$

$$E_{\text{kF}} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} \cdot n^{2/3} = 3.65 \times 10^{-15} \left(\frac{m_{\text{e}}}{m} \right) \left(\frac{n}{1\text{cm}^{-3}} \right)^{2/3} \text{ eV}$$

- 平均每个电子具有的动能:

$$\bar{E} = \frac{1}{n} \int_0^{p_{\text{kF}}} \frac{p^2}{2m} \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp = \frac{3}{5} E_{\text{kF}}$$

核子/电子

- 简并压:

$$P_{\text{e}}^{\text{NR}} = -\frac{dU}{dV} = -\frac{3}{5} N \frac{dE_{\text{kF}}}{dV} = \frac{\hbar^2}{5m} (3\pi^2)^{2/3} \cdot n^{5/3} = 1 \times 10^{13} \left(\frac{\rho}{\mu_{\text{e}}} \right)^{5/3} \text{ dyn/cm}^2$$

2, 零温理想电子气状态方程

极端相对论极限情形 (ER) : $cp \gg mc^2$

- $E = (c^2p^2 + m^2c^4)^{1/2} \approx cp$
- $E_F \approx cp_F$

$$E_F = (3\pi^2)^{1/3} \hbar c \cdot n^{1/3} = 6.11 \times 10^{-5} \left(\frac{n}{1\text{cm}^{-3}} \right)^{1/3} \text{ eV}$$

- 平均每个电子具有的动能:

$$\bar{E} = \frac{1}{n} \int_0^{p_F} cp \cdot \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp = \frac{3}{4} E_F$$

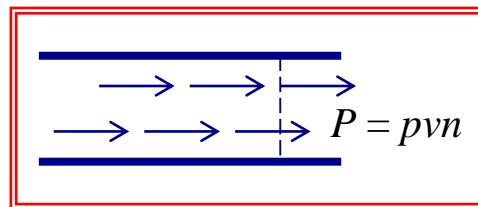
- 简并压:

$$P_e^{\text{ER}} = -\frac{3}{4} N \frac{dE_F}{dV} = \frac{1}{4} (3\pi^2)^{1/3} \cdot n^{4/3} = 1 \times 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \text{ dyn/cm}^2$$

2, 零温理想电子气状态方程

一般情形:

- 若电子动量各向同性分布, 其内部简并压为



$$p_e = \frac{1}{3} \int p v d n = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} v p^3 d p = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} \frac{c^2 p^4}{\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}} d p$$

这里单位体积内、动量在 p 到 $p+dp$ 范围内电子数目 $dn = 2 \times \frac{1}{h^3} \cdot 4\pi p^2 dp = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp$

提示: $p = \gamma m v$, $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{3}{8} \{ x \sqrt{1+x^2} (\frac{2}{3} x^2 - 1) + \ln[x + \sqrt{1+x^2}] \} \equiv 3\pi^2 \phi(x)$

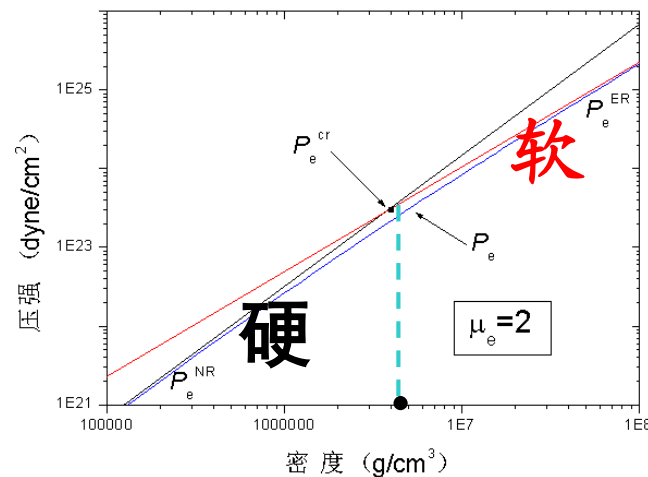
⇒ 一般情形下零温理想电子气状态方程的参数形式:

$$x \equiv p_F / (mc)$$

$$\lambda_e \equiv \hbar / (mc)$$

$$\begin{cases} p_e = \frac{mc^2}{\lambda_e^3} \phi(x) \\ n = \frac{x^3}{3\pi^2 \lambda_e^3} \end{cases}$$

- 数值结果:



3, Chandrasekhar质量

半定量考虑：

- NR: 引力能 $E_g = -k_1 GM^2/R$, 动能 $E_k \sim E_F N \sim N^{5/3}/V^{2/3} \sim M^{5/3}/R^2$

⇒总能量:

$$E(R) = k_2 \frac{M^{5/3}}{R^2} - k_1 \frac{GM^2}{R}$$

- ER: $E_k \sim E_F N \sim N^{4/3}/V^{1/3} \sim M^{4/3}/R$

⇒总能量:

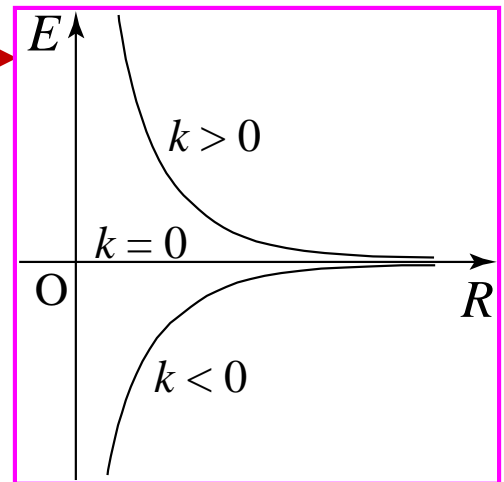
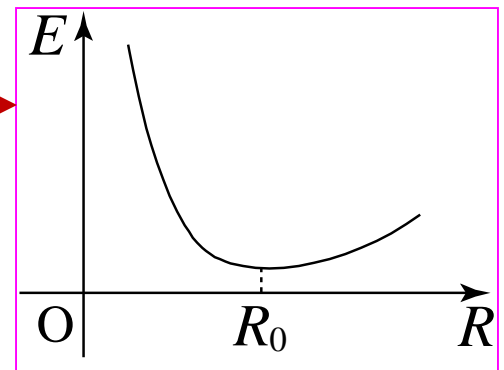
$$E(R) = k_3 \frac{M^{4/3}}{R} - k_1 \frac{GM^2}{R} = \frac{k(M)}{R}$$

$k = 0$: Fermion星随遇平衡

$k > 0$: 膨胀使Fermi子ER→NR

$k < 0$: 为使 E 减小不得不塌缩

- 结论: ER (或 $\gamma = 4/3$) 情形是不稳定的!



3, Chandrasekhar质量

半定量考虑：

- k 与哪些量相关？是质量 M 的函数！

$$k(M) = k_3 M^{4/3} - k_1 G M^2 = M^{4/3} (k_3 - k_1 G M^{2/3})$$

- 存在极限质量： $M_{\max} = [k_3/(k_1 G)]^{3/2} \Leftrightarrow k(M_{\max}) = 0$

$M = M_{\max} \Leftrightarrow k = 0$: Fermion星达到极限质量

$M < M_{\max} \Leftrightarrow k > 0$: Fermion星存在稳定状态

$M > M_{\max} \Leftrightarrow k < 0$: Fermion星引力塌缩

- **Chandrasekhar质量**：Fermion星所可能拥有的最大质量
它反应了Fermion简并压抵抗引力的**局限性**！

3, Chandrasekhar质量

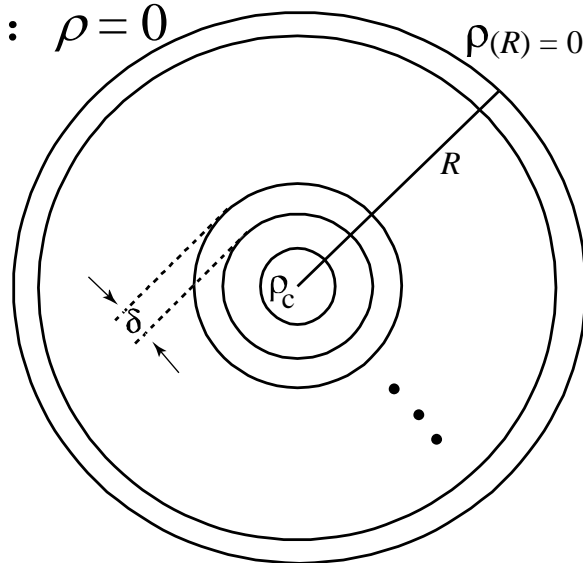
模型计算:

• 计算方法

$$\begin{cases} \frac{dp}{dr} = -\frac{G \cdot \int_0^r (4\pi r'^2 \rho) dr' \cdot \rho(r)}{r^2} \\ p = K \rho^\gamma \text{ (NR : } \gamma = \frac{5}{3}; \text{ ER : } \gamma = \frac{4}{3}) \end{cases}$$

定 ρ_c , 选 δ , 数值求解, 直到 $\rho=0$

星表面: $\rho=0$

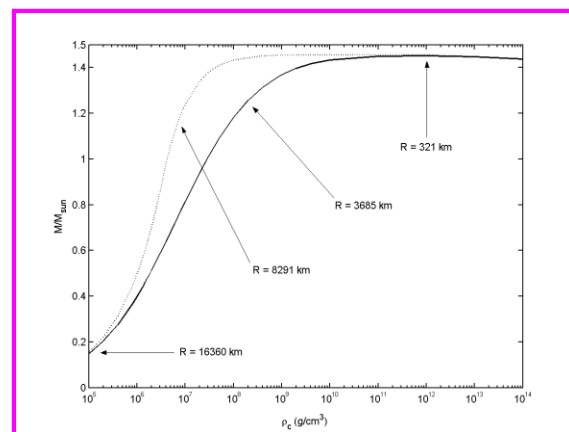
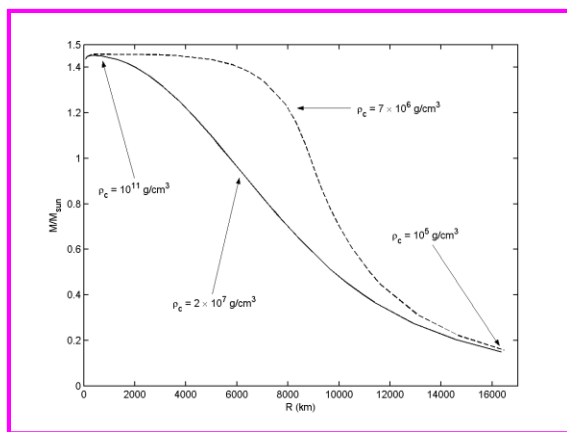


• 计算结果

M 较小时:

$$M \propto R^{-3}$$

(与多方球结论一致)



总 结

0, 什么是白矮星?

1, Fermi子星的研究历史

2, 零温理想电子气状态方程

3, Chandrasekhar质量

作业

习题： 3

补充：

证明纯粹由极端相对论Fermi气组成物质的态方程为 $P = \rho/3$ ，其中 P 压强， ρ 质量（能量）密度。此态方程与2.1节相关结论一致。