第二章 光的吸收和色散

2.1 光的吸收

2.1.1 光在线性介质中的传播

许多光学现象（线性的和非线性的过程）可以用宏观的电磁理论来加以描述和分析，Maxwell 方程则是理论的基础。光学介质和导电介质中的电荷密度$\rho = 0$，麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

和三个描述介质性质的方程：

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

全面描述电磁场的规律，其中σ是电导率、ε是介电常数、μ是磁导率。可以得到波动方程：

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

方程解可以表达为简谐平面波之和：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

代入得

$$-k^2 + i\sigma\mu\omega + \varepsilon\mu\omega^2 = 0$$

$$k^2 = \omega^2 \mu (\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}) = \omega^2 \mu \varepsilon_\omega$$

式中

$$\varepsilon_\omega = (\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega})$$

是复介电常数，反映了介质极化和传导的情况。波矢也分为实部 k_{r} 和虚部 k_{i}，

$$k = k_r + ik_i$$

其中

$$k_r = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$k_i = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

设平面波沿 x 方向传播，电场的振幅可表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ik_r x} e^{-k_i x} \qquad (2.1)$$

k_r表示波动性质，而 k_i表示光场的吸收或增益。一般情况下，光学介质是绝缘的，电荷密度$\rho = 0$, 传导电流密度 $\boldsymbol{j} = 0$，仍保留σ的目的就是用来描述光在传播过程的损耗。

折射率和波矢的关系为 $k = \omega n/c$，波矢的虚部描述介质的吸收，同样可以定义复折射率

$$\tilde{n} = n + i\eta = \frac{c}{\omega}(k_r + ik_i)$$

复折射率的实部 n 为通常的折射率，其虚部描述介质的吸收本领。

2.1.2 吸收的线性规律

光的强度随进入介质的深度而减少，光子的能量传递给介质转化为介质的热能或内能的现象叫光吸收。通常利用吸收系数来描述光的吸收。设单色平行光沿 x 方向传播，经过 dx 薄层后，光强由 I 变为 I – dI，吸收系数α定义为：

$$\frac{dI}{I} = -\alpha dx$$

线性情况下，α与光强无关，经过厚度为 l 的介质层后其光强为

$$I = I_0 e^{-\alpha l} \qquad (2.2)$$

此公式叫做朗伯公式。通过厚度为 $1/\alpha$的介质，光强减弱为原来的 $1/e$。光强很强时，会产生非线性效应，此公式不再成立。

比较式 (2.1)和式(2.2)可得吸收系数和波矢虚部的关系$\alpha = 2k_i$，即

$$\alpha = 2\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\right\}^{\frac{1}{2}}。$$

折射率虚部和吸收系数的关系为

$$\eta = \frac{ck_i}{\omega} = \frac{c\alpha}{2\omega}$$。

对于溶液，其吸收和浓度有着密切的关系，浓度不是很大时，其线性吸收由比尔定律给出

$$I = I_0 e^{-ACl}$$

其中 C 是溶液浓度，A 是与浓度无关的新参数，这时吸收系数$\alpha = AC$。比尔定律成立时，可以利用测量吸收的方法来测定溶液中物质的浓度，这就是吸收光谱分析法的原理。

2.1.3 吸收与波长的关系

通常材料的吸收依赖于波长，这对光学元件材料的选取和工作波长的确定非常重要。例如，对于透射元件，要选取在工作波长透明的材料；对于大气中的激光通信，要选取大气的吸收小的工作波段。同时，利用材料的吸收，也可做成各种带通滤光片。下表列出了一些材料的透光范围。

冕玻璃	350nm — 2000nm
火石玻璃	380nm — 2500nm
石英	180nm — 4000nm
氟化锂	110nm — 7000nm
大气	300nm — 760nm

2.2 光的色散和群速色散

2.2.1 色散

光在介质中的传播速度（或折射率 n）随波长变化而改变的现象叫做色散。1672 年 牛顿首先利用玻璃棱镜观察了日光的色散。测量一定材料的三棱镜对不同波长光线的偏转角，可以得到材料 n 与λ的关系曲线，即色散曲线。

实验表明，在可见光范围，无色透明的介质的色散曲线形式上都很相似，基本特征为 n 随λ的增加而单调下降，在短波端下降率更大。有

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0，\text{或}\frac{dn}{d\omega} > 0$$

叫做正常色散。1836 年 Canchy（科希）给出了一个描述正常色散的经验公式

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^3}$$

其中 A、B、C 是由介质决定的常数，由实验数据给出，当λ变化范围不大时，可令 C=0，

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$ 。

在材料的强吸收波段，通常折射率随着波长的增大而增大，即

$$\frac{dn}{d\lambda} > 0，或 \frac{dn}{d\omega} < 0$$

这种现象称为反常色散。

2.2.2 群速色散

对于单色平面波 $E(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$，定义相速度为同相位点移动的速度。相位 $\phi = kx - \omega t$，取微分并考虑相位相同得 $k\Delta x = \omega \Delta t$，相速度为

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$$

现在考虑光脉冲通过介质的情况，光脉冲可以看成多个不同频率的平面波的叠加，在脉冲的峰值各个平面波成分同相相加。为了保持波形不变，各个平面波在所有传播距离 x 应同相相加，包洛最大值对应于各个组分相位相等的点，即相位对圆频率的一阶倒数为零：

$$\phi = \frac{n\omega x}{c} - \omega t$$

$$d\phi / d\omega = 0$$

$$\frac{dn}{d\omega}\frac{\omega x}{c} + \frac{nx}{c} - t = 0$$

群速度为 $v_g = x/t$，得

$$v_g = \frac{c}{n + \omega dn/d\omega} = \frac{d\omega}{dk},$$

最后的等号因为 $k = n\omega / c$。我们定义群折射率 $n_g \equiv c / v_g$，得：

$$n_g = n + \omega \frac{dn}{d\omega}$$ 。

群折射率和折射率的区别是由色散引起的。$dn/d\omega > 0$ 为正常色散，导致群速度小于相速度，色散很大时可以得到“慢”光；$dn/d\omega < 0$ 为反常色散，导致群速大于相速，色散很大时可以得到“快”光。

2.2.3 脉冲畸变

相对于将光变“快”或“慢”的效应的大小来说，我们更关心的是在高色散介质中实现无脉冲畸变的光传输。我们将传播常数写成圆频率的级数形式：

$$k(\omega) = n(\omega)\frac{\omega}{c} = k_0 + k_1(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}k_2(\omega-\omega_0)^2 + \cdots$$

这里 $k_0 = k(\omega_0)$ 是光脉冲平均的波数，

$$k_1 = \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{v_g} = \frac{n_g}{c}$$

是群速的倒数。

$$k_2 = \left.\frac{d^2k}{d\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{d(1/v_g)}{d\omega} = \frac{1}{c}\frac{dn_g}{d\omega}$$

是群速的色散参数(GVD parameter)。脉冲通过长度为 L 的介质的渡越时间为

$T = L/v_g = Lk_1$，由于群速色散造成的渡越时间的扩展为

$$\Delta T \approx Lk_2\Delta\omega$$

这里$\Delta\omega$为脉冲的频谱宽度。

设 T_0 为光强下降到 1/e 时的时间，电场下降到 1/e 时的时间为 $2T_0$，利用高斯脉冲的傅立叶变换得知：

$$2T_0 = \frac{2}{\Delta\omega} \quad 即 \quad T_0 = \frac{1}{\Delta\omega}。$$

定义色散长度 L_D 为$\Delta T = T_0$时介质的长度。则：

$$L_D = \frac{T_0^2}{|k_2|},$$

当介质长度远小于色散长度时，脉冲形状基本保持不变，并以群速传播。

2.3 吸收和色散的经典描述

经典电磁理论：介质中电子和核将发生位移，形成电偶极子，并具有一定的固有振动频率ω_0。外光场作用下，电偶极子将作受迫阻尼振荡。频率与外光场的频率相同。振荡电偶极子形成次级光波，相干叠加的结果保证了光沿折射方向传播。

2.3.1 电介质的洛伦兹模型

洛仑兹的电子论假定：组成介质的原子或分子内的带电粒子（电子、离子）被准弹性力保持在它们的平衡位置附近，并且具有一定的固有振动频率。在入射光的作用下，介质发生极化，带电粒子依入射光频率作强迫振动。由于带正电荷的原子核质量比电子大许多倍，可视正电荷中心不动，而负电荷相对于正电荷作振动，正、负电荷电量的绝对值相同，构成一个电偶极子，其电偶极矩为

$\mathbf{p} = q\mathbf{r}$

电偶极子将辐射次波。利用这种极化和辐射过程，可以描述光的吸收、色散和散射。

设参与作用的电子数密度为 N (1/m^3)，而每个电子提供的原子偶极矩为

$$p = -er$$

单位体积平均电偶极矩（极化强度）为

$$P = Np = -Ner$$

作受迫振动的电子的运动方程为

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -eE - fr - g\frac{dr}{dt}$$

右侧分别为入射光电场强迫力、准弹性力和阻尼力。入射光场为 $E = E_0 e^{-i\omega t}$。引入阻尼

（衰减）系数 $\gamma = g/m$ 和电子的固有振动频率 $\omega_0 = \sqrt{f/m}$

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \gamma\frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = -\frac{eE_0 e^{-i\omega t}}{m}$$

方程的解为

$$r(t) = \frac{(-e)}{m}\frac{E_0 e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}$$

得到极化强度

$$P = N(-e)r = \frac{Ne^2}{m}\cdot\frac{E_0 e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}$$

$$P = \varepsilon_0 \chi E = \varepsilon_0 \chi E_0 e^{-i\omega t}，\ (1+\chi) = \varepsilon = n^2$$

可以得到电极化率χ的表达式，

$$\chi = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} = |\chi| e^{i\theta(\omega)}$$

其中

$$\omega_p^2 \equiv \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$$

是等离子体频率，

$$|\chi| = \frac{\omega_p^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^2}$$

为χ的振幅，χ相对于入射场的相位延时为

$$\theta = tan^{-1}\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

电极化率是复数，可表示为 $\chi = \chi' + i\chi''$，其实部和虚部分别为

$$\chi' = \omega_p^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$\chi'' = \omega_p^2 \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} .$$

复折射率与电极化率的关系

$$\tilde{n}^2 = \varepsilon = 1 + \chi = 1 + \omega_p^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}$$

$$\tilde{n} = n + i\eta$$

$$\tilde{n}^2 = (n + i\eta)^2 = (n^2 - \eta^2) + i2n\eta$$

$$n^2 - \eta^2 = 1 + \omega_p^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$2n\eta = \omega_p^2 \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

当原子数密度 N 不大时，如稀薄气体，$|\chi| << 1$

$$\tilde{n} = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1+\chi} \approx 1 + \frac{1}{2}\chi = 1 + \frac{1}{2}\chi' + \frac{i}{2}\chi'' = n + i\eta$$

$$n = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$\eta = \frac{\omega_p^2}{2} \cdot \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

在分子的跃迁频率ω_0附近，$|\omega - \omega_0| << \omega_0$，上面两式简化为

$$n = 1 + \frac{\omega_p^2}{4\omega} \cdot \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

$$\eta = \frac{\omega_p^2}{8\omega} \cdot \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

则吸收系数

$$\alpha = \frac{2\omega\eta}{c} = \frac{\omega_p^2}{4c} \cdot \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

可见，吸收系数也是频率的函数，并且显洛伦兹线型。图 2.1 是具有单一共振频率的介质的折射率实部和虚部及群折射率示意图。

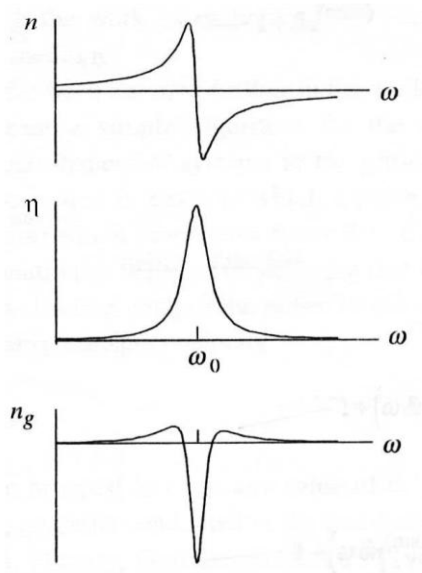

图 2.1 具有单一共振频率的介质的色散关系

上面假定了所有的电子的束缚频率是单一的。如果每个分子中有 f_j 个电子具有束缚频率ω_j和阻尼系数γ_j，分子的密度为 N'，每个分子有 Z 个电子，那么介电常数由下式给出：

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{N'e^2}{m\varepsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{(\omega_j^2 - \omega^2) - i\gamma_j\omega},$$

式中振子强度 f_i 满足下列求和法则：

$$\sum_j f_j = Z$$

对于远离共振的晶体的透明区域，假设阻尼项$\gamma_j\omega$相对于前面的$(\omega_j^2 - \omega^2)$ 项可忽略，则直接得到一个有用的半经验的 Sellmeier 公式

$$n^2 = 1 + \sum_j \frac{A_j\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_j^2}$$

2.3.2 金属的特鲁德(Drude)模型

如果金属的电学和光学性质仅和导带电子有关，则被称为自由电子金属。这些金属包括碱金属、镁、铝，扩展一些的话也可以包括贵金属。金属对电磁场的线型响应由介电常数ε(ω)描述，对于普通金属，对ε(ω)的贡献主要来源于带间跃迁，由低占据带到导带或由导带到更高的未占据能级；而对于像碱金属这样的自由电子金属，ε(ω)主要由导带内的跃迁即带内跃迁决定；而贵金属的ε(ω)由上述两种跃迁决定。

描述自由电子的光学性质的一个简单的模型是特鲁德模型（或称 Drude-Lorentz-Sommerfeld 模型），这个模型假设首先假设只考虑外力对自由的导带电子的影响，而宏观

的响应是单电子效应乘以电子数。这个模型可以看作考虑电子间拥有最强的耦合，即对于微扰所有电子同相相干响应。导带自由电子在单色电磁场作用下的运动方程为

$$m\frac{d^2r}{dt^2}+m\gamma\frac{dr}{dt}=-eE_0e^{-i\omega t}$$

γ是阻尼常数，和洛伦兹模型相比，这里没有共振项。自由电子的密度为 n，介电常数为

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+i\gamma\omega}=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2}+i\frac{\omega_p^2\gamma}{\omega(\omega^2+\gamma^2)}$$

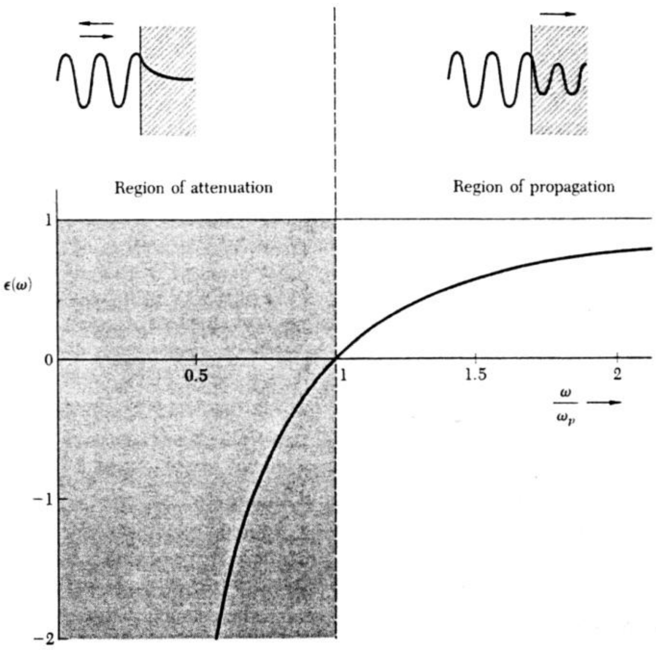

图 2.2 自由电子金属的介电常数的实部随频率的变化

$$\omega_p=\left(\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\right)^{\frac{1}{2}}$$ （特鲁德）等离子体频率

这里的阻尼常数γ和电子的平均自由程 l 有关，$\gamma=v_F/l$，v_F是费米速度。当ω >> γ时，自由电子金属的ε(ω)的实部和虚部分别为

$$\varepsilon_1(\omega)\approx1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}，\ \varepsilon_2(\omega)\approx\frac{\omega_p^2}{\omega^3}\gamma$$

ω等于ω_p时，$\varepsilon_1(\omega)=0$, 也叫体等离激元频率。自由电子金属介电常数的实部随频率的变化绘于图 2.2，当电磁波的频率高于等离子体频率时，可以穿透金属。图 2.3 为垂直入射时 n 型 InSb 光学反射率的实验值和理论值，当入射光能量小于 0.09 eV 时，表现为金属反射性，光不能透过；光子能量大于该能量时，材料变得透明。

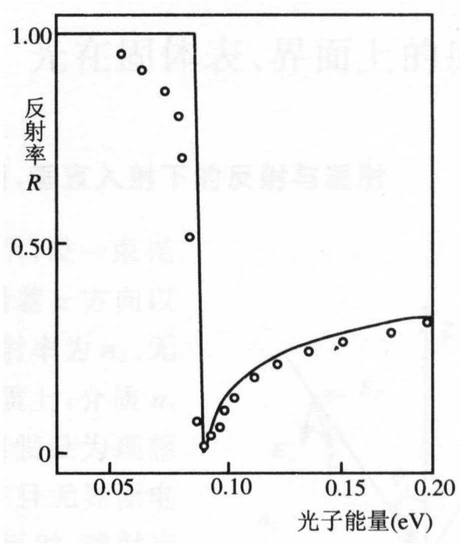

图 2.3 垂直入射时 n 型 InSb 光学反射率的实验值（点）和理论计算（实线）。

2.3.3 D 和 E 的关系中的因果性：克喇末－克朗尼格关系(KK 关系)

介质的光学参数都与微观粒子在光场的作用下的运动有关，那么，光学参数之间有没有一定的内在联系？克喇末和克朗尼格首先独立地研究了这个问题，并得出相同地结论：凡是由因果关系决定地光学响应函数，其实部和虚部之间并不完全独立。这里我们根据因果律来推导介质响应函数如介电常数ε(ω)的实部和虚部的关系，即克喇末－克朗尼格关系或色散关系。它之所以有广泛的应用，是因为在推导它们时只需要用到很少几条物理上有根据的假设。

为了理解一个系统对外场的动力学响应，通常从研究场的单脉冲响应开始。假设系统是线性的，对于更复杂的随时间变化的场的响应，可以由脉冲响应的叠加来构建。假设在短时间间隔 dt 内作用于介质的电场为 E，则场脉冲为 Edt，引起的极化强度为 EX(t)dt。极化是从脉冲作用的时刻开始的，脉冲过后很可能会持续一个比较长的时间并慢慢衰减到零。X(t)叫做脉冲响应，它是随时间变化的极化对施加于 t = 0 时刻的单位脉冲的响应。极化强度（电位移矢量 D）和电场强度 E 间在时间上是非局域的关系，原因就是介电常数ε(ω)对频率的依赖（即色散）。

因果律要求当 t < 0 时 X(t) = 0。对于一个一般的场 E(t)的响应可以通过线性叠加 t′时刻的脉冲 E(t′)dt′的响应得到

$$P(t)=\int_{-\infty}^{t}E(t')X(t-t')dt'$$

由于对于负时间脉冲响应为零，上式积分上限可以扩展到∞，对于单色电场 $E=E_0\exp(i\omega t)$ 的特殊情况，用 t″ ≡ t - t′，上式得

$$P(t)=E_0\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega t)X(t-t')dt'$$

$$=E_0e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t''}X(t'')dt''=E\chi(\omega)$$

其中$\chi(\omega)$是 X(t)的傅立叶变换。由上式可以看出$\chi(\omega)$是极化率，即有下列关系

$$D=\varepsilon_0\varepsilon(\omega)E=\varepsilon_0 E+P$$

$$\varepsilon_0\left[\varepsilon(\omega)-1\right]=\chi(\omega)$$

为了得到克喇末－克朗尼格关系，我们利用一个单位阶跃函数

$$d(t)=\begin{cases}\lim\limits_{s\to 0}\exp(st) \quad (\sim 1), & \text{when } t<0;\\ 0 \quad \text{when } t\geq 0.\end{cases}$$

它的傅立叶变换为

$$D(\omega)=\lim_{s\to 0}(s-i\omega)^{-1}$$

因为 X(t)在 t = 0 时才开始，而此时 d(t)已经变为 0，有下列关系

$$X(t)d(t)=0\,.$$

做上面乘积的傅立叶变换

$$0=\chi(\omega)*D(\omega)=\lim_{s\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi(\omega')}{s-i(\omega-\omega')}d\omega'=\varepsilon_0\lim_{s\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon(\omega')-1}{s-i(\omega-\omega')}d\omega'$$

当 $s\to 0$ 时在$\omega'=\omega$处存在一个奇点，我们将积分分为两部分：$\omega - s$ 到$\omega + s$ 的部分和其余的部分。第一部分可以直接积出，当 s 足够小$\varepsilon(\omega')$在积分范围内为常数，

$$\lim_{s\to 0}\int_{\omega-s}^{\omega+s}\frac{\varepsilon(\omega')-1}{s-i(\omega-\omega')}d\omega'=\left[\varepsilon(\omega)-1\right]\lim_{s\to 0}\int_{\omega-s}^{\omega+s}\frac{d\omega'}{s-i(\omega-\omega')}=\pi\left[\varepsilon(\omega)-1\right]$$

积分的值与 s 无关。积分的第二部分称为主部，用 $\mathcal{P}\int$ 表示

$$\lim_{s\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\omega-s}+\int_{\omega+s}^{\infty}\right)\frac{\varepsilon(\omega')-1}{s-i(\omega-\omega')}d\omega'\equiv\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon(\omega')-1}{-i(\omega-\omega')}d\omega'$$

得

$$\varepsilon(\omega)=1+\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon(\omega')-1}{i(\omega-\omega')}d\omega'$$

将上式的实部和虚部分别相等

$$\varepsilon_1(\omega)=1+\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_2(\omega')}{(\omega-\omega')}d\omega'$$

$$=1+\frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega'\varepsilon_2(\omega')}{(\omega^2-\omega'^2)}d\omega'$$

$$\varepsilon_2(\omega)=-\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_1(\omega')-1}{(\omega-\omega')}d\omega'$$

$$=-\frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty}\frac{\omega[\varepsilon_1(\omega')-1]}{(\omega^2-\omega'^2)}d\omega'$$

这里我们用了性质$\varepsilon(\omega)=\varepsilon^*(-\omega)$，这两个公式即为克喇末－克朗尼格关系。利用克喇末－克朗尼格关系可以验证前面洛伦兹模型和特鲁德模型所得的介电常数的实部与虚部的关系。

**补充：超光速传播*

原子蒸气在无吸收时 $n \approx 1$，为了观察超光速，必须工作在反常色散区，但此时存在强的吸收，实验上难以实现。

2000 年，王力军在 Nature 上报导了铯蒸气中增益协助超光速传播的实验，Gain-assisted superluminal light propagation，Nature 406 (2000, July, 20) 277, L.J. Wang et al。他们利用两束泵浦光在铯蒸气中产生一个具有一定增益的反常色散区，让 3.7 μs 探测脉冲光通过 6cm 铯蒸气，泵浦光 E_1, E_2 存在时与不存在时通过介质的时间差为 $t - t_0 = - 62 \pm 1$ ns，光经过 6cm 的时间 t_0 为 $L/c = 0.2$ ns，$t = L/v_g$，$L/v_g - 0.2 = -62 \pm 1$ ns，$v_g = c/n_g$，$n_g - 1 = (-62 \pm 1)/0.2$，$n_g = -310 \pm 5$。最后获得了 $v_g \approx - 10^6$ m/s 的负群速。

参考文献：

1．《光学－ 原理及发展》 程路编著
2．Nonlinear optics, Robert W. Boyd 著
3．Progress in Optics 43, E. Wolf 编辑，Chapter 6.
4．《光学》 E. 赫克特, A. 赞斯著 秦克诚 等译