

2019-2020 学年春季学期《理论力学 A》期末考试考题

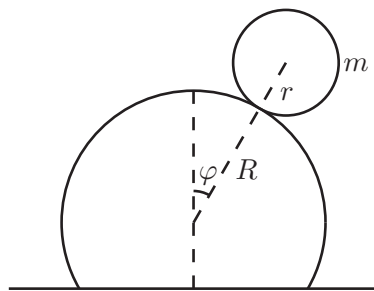
【说明】：

- 请在进入腾讯会议的时候把名称设为“学号 + 姓名”
- 考虑到考试以开卷方式进行，解题过程需给出解题步骤。没有步骤会扣分；有步骤，即使最后答案错误，也会酌情给分。
- 考试时间为 2 小时。上传答题纸的时间为考试结束之后 10 分钟之内。如遇特殊情况，超过 10 分钟，请向助教说明情况。但最晚不可超过考试结束半个小时，否则成绩无效。

1. 简单题【24 分】

- (a) 一个边长为 $2a$ 的均匀刚体立方体，质量为 m ，中间挖空一个半径为 a 的球形部分，求剩下部分的刚体绕着质心转动时的主转动惯量。(8 分)
- (b) 从小振动的拉格朗日函数 $L = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$ 出发，求出相应的哈密顿函数，并给出系统的哈密顿-雅可比方程。(8 分)
- (c) 假设一组小行星构成均匀的、平行射束从远处以初速度以速度 v 向地球袭来，小行星大小相对地球可忽略。求能击中地球的碰撞总截面。请用地球半径 r ，地球的逃逸速度 u 和 v 表示。(8 分)

2. 纯滚动【16 分】一个质量为 m 半径为 r 的圆铁环从半径为 R 的固定圆柱上纯滚下。这里唯一需要考虑的外力就是重力。



- (a) 以 φ 为广义坐标，给出圆环运动的拉格朗日函数 (6 分)
- (b) 圆环从静止开始从圆柱的正上方滚下，求圆环脱离圆柱的点的位置 (10 分)

3. 小振动【20 分】

一个质量为 m_1 的小球受重力影响在 $y = \kappa x^2$ ($\kappa > 0$) 的抛物线上自由无摩擦地运动。该小球与 x - y 平面内另一个质量为 m_2 的小球通过长度为 l 的无质量细线连接。第二个小球悬挂于第一个小球下方。现在选取第一个小球的横坐标 x 以及细线相对于垂直方向的角度 ϕ 为系统的广义坐标。

- (a) 写出体系的动能和势能并给出它的拉格朗日量表达式。(5 分)

(b) 考虑体系在平衡位置附近做小振动，给出简化的拉格朗日量和运动方程。(5 分)

(c) 令 $m_1 = m_2 = m$, $\kappa = \frac{1}{2l}$, 请确定体系小振动的本征频率, 以及对应的本征矢量。(10 分)

4. 洛伦兹不变量 【20 分】

一个质量为 m 的粒子的 4 动量 (E, \vec{p}) 由能量 E 和动量 \vec{p} 构成, 其中能动量满足关系 $E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ 。请证明 $2E \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$ 构成了一个洛伦兹不变量。(提示: 可以利用 delta 函数的公式 $\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0)$ 。)

5. 变分法 【20 分】

考虑质量密度均匀的星球表面有 A 、 B 两点, 星球半径为 R 。在球坐标系 (r, θ, ϕ) 下, A 点坐标为 $(R, 0, 0)$, B 点坐标为 $(R, \theta_0, 0)$ 。从地底打通一条隧道连接 A 、 B 两点, 使得静止的列车从 A 点开始自由运动到 B 点所花时间最少。

- 请给出时间作为隧道路径的泛函表达式。(8 分)
- 请用变分法, 推导出相应的欧拉-拉格朗日方程。(5 分)
- 给出时间最短的隧道所满足的条件。(给出 r, θ, ϕ 的参数化表达式即可。)(7 分)