“Black holes are where God divided by zero.”

— Albert Einstein

北京大学
PEKING UNIVERSITY

0. 课程介绍

北京大学物理学院 （2020年秋季学期）

主讲人：邵立晶

General Relativity & Astrophysics

本章内容

1. 引子

引子

- 牛顿引力下，若光子有质量 m，则在某半径 R 内，光子无法逃脱出来

牛顿引力

$$\frac{1}{2}mc^2 = \frac{GMm}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2GM}{c^2}$$

- R 与 Schwarzschild 黑洞视界的数值大小一致，但在含义上却有显著的差别

引子

- 在 Einstein 的 GR 中，黑洞是指这样一片奇特的时空区域：光和粒子只能单向下落至一个密度为无穷的奇点（singularity）
  - 不可能静止，不可能向外运动
- 至于奇点，是现代物理理论至今无法理解的“盲点”，物理学家预估着需要量子引力去描述它
  - 但至今尚无任何可靠的头绪
- 由于课时的限制，我们主要讨论不带自转的黑洞，即 **Schwarzschild 黑洞**
  - 带自转的黑洞称为 **Kerr 黑洞**，描述的是轴对称时空

2. $r = 2M$

在 $r = 2M$ 处

- Schwarzschild 时空是 Einstein 场方程的静态、球对称、真空解

Schwarzschild 线元

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

- 通过它，我们已能很好地描述水星进动、光线偏折、引力红移、Shapiro 延时等现象

在 $r = 2M$ 处

- 度规在 $r \to 2M$ 处，却出现令人注目的现象

$r \to 2M$：g_{tt} 和 g_{rr} 准备变号！

$$g_{tt} \to 0, \quad g_{rr} \to \infty$$
$$g^{tt} \to \infty, \quad g^{rr} \to 0$$

- 下面我们将看到，$r = 2M$ 处的“奇异”行为与坐标选取有关

有质量粒子的径向运动

- 考虑径向运动、从 $r > 2M$ 处下落的粒子
- 限制于径向运动，有 $L = 0$；动力学方程为

Schwarzschild 时空中径向运动的方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = E\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

即，有质量粒子运动方程中，取 $L = r^2\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\tau = 0$

有质量粒子的径向运动

- 当 $r \to 2M$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\Big/\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \to 0$$

这里，t 为坐标时，也是无穷远处观测者的时间

- 所以，对无穷远处的观测者而言，粒子永远不可能到达 $r = 2M$
- 而对粒子而言，它的时间是 τ（即，固有时）；由于 $r \to 2M$ 时，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau$ 是个"正常的速度"（不为零），故它可（在有限时间内）穿越 $r = 2M$

有质量粒子的径向运动

- 若粒子从 r_0 处、从静止开始下落，由初条件得，

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 2M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

- 微分方程可求得参数化的解，为

$$r = \frac{r_0}{2}(1 + \cos\eta)$$

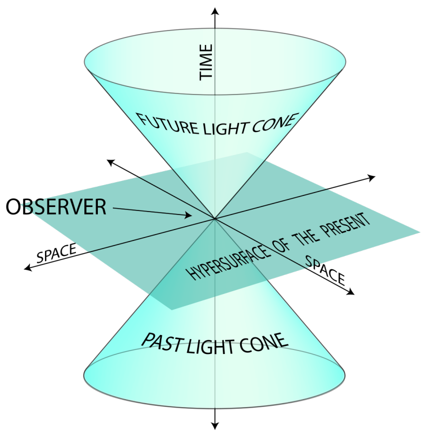
$$\tau = \frac{r_0}{2}\sqrt{\frac{r_0}{2M}}(\eta + \sin\eta)$$

有质量粒子的径向运动

- 当 $\cos\eta = 4M/r_0 - 1$ 时，$r = 2M$；此时，τ 为有限值
  - 故，粒子可在有限时间内到达 $2M$
- 当 $\cos\eta = -1$ 时，$r = 0$；此时，$\tau = \frac{\pi r_0}{2}\sqrt{\frac{r_0}{2M}}$
  - 故，粒子可在有限时间内到达 $r = 0$
- 问题仅出现在，用无穷远处的钟来"标定"坐标时间
  - 这是一个人为的坐标选择，而物理本身在 $2M$ 处无奇异性
- 计算得，曲率张量在 $r = 2M$ 处也"表现正常"，无奇异性

光锥

- 平直时空的光锥



光锥

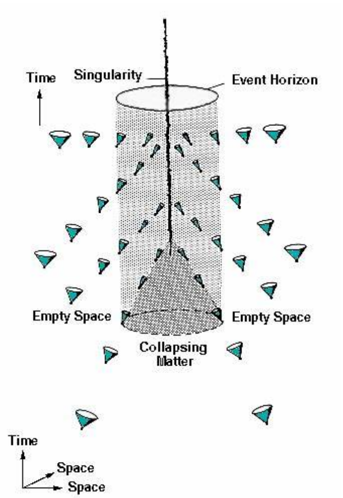
- 在 Schwarzschild 时空中，只考虑径向运动，光锥由 $\mathrm{d}s^2 = 0$ 给出

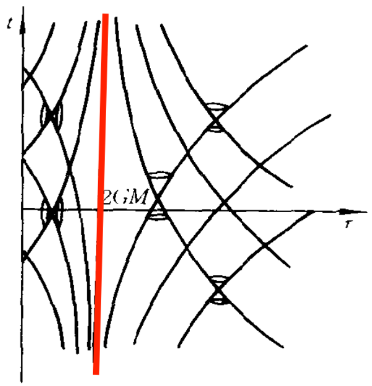
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

- 积分可得，

$$\pm t = r + 2M\ln\left|1 - \frac{r}{2M}\right| + \text{const}$$

Schwarzschild 时空中的光锥





Schwarzschild 时空中的光锥

- 引入

$$r^* = r + 2M\ln\left|1 - \frac{r}{2M}\right|$$

- 则光锥为

$$t + r^* = V$$

$$t - r^* = U$$

其中 U、V 为积分常数

Schwarzschild 时空中的光锥

- $t > 2M$ 时，$t + r^* = V$ 代表径向向内运动，$t - r^* = U$ 代表径向向外运动
- $t > 2M$ 时的光锥线不与 $r = 2M$ 相交（只能无限逼近），这也正是反映了需要 $t \to \infty$ 才能到达 $r = 2M$
- $t < 2M$ 时，有质量的粒子仍旧满足 $\mathrm{d}s^2 < 0$，故有

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 > \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2$$

  - 不存在 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = 0$ 的解，即不可能有静止的粒子
  - t 可增也可减，而 r 只能减

3. 坐标变换

坐标变换

- 广义相对论中存在坐标变换的自由度
  - 数学上称为微分同胚不变性，diffeomorphism
- 现在我们讨论在其它坐标下的黑洞行为

Eddington-Finkelstein 坐标

- 在原来的 Schwarzschild 坐标下，粒子从 $r > 2M$ 落向 $r = 2M$ 时

$$t_{\text{old}} = -r_{\text{old}} - 2M \ln\left(\frac{r_{\text{old}}}{2M} - 1\right) \quad \to \infty$$

- 引入新坐标

Eddington-Finkelstein 坐标

$$t_{\text{new}} = t_{\text{old}} + 2M \ln\left|\frac{r_{\text{old}}}{2M} - 1\right|$$

$$r_{\text{new}} = r_{\text{old}}$$

- 此时，当 $r_{\text{new}} = r_{\text{old}} = 2M$ 时，t_{new} 将是有限的
- 下面，我们仍旧将 t_{new}、r_{new} 记为 t、r

Eddington-Finkelstein 坐标

- 此时，有

Eddington-Finkelstein 坐标下的度规

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1+\frac{2M}{r}\right)dr^2+\frac{4M}{r}drdt+r^2d\Omega^2$$

- 径向运动的光锥方程为

$$\frac{dr}{dt}=\frac{1-\frac{2M}{r}}{1+\frac{2M}{r}}$$
$$\frac{dr}{dt}=-1$$

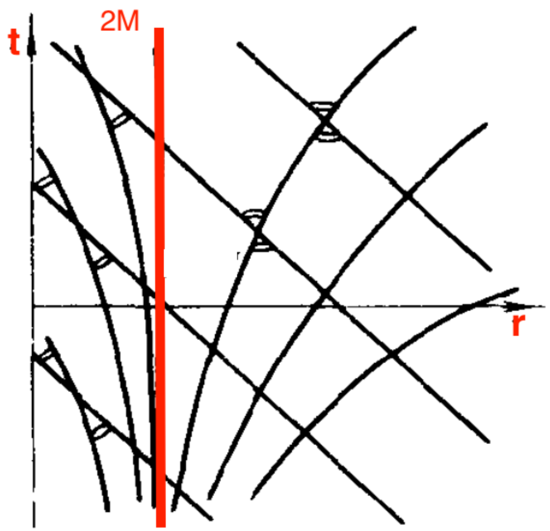
Eddington-Finkelstein 坐标

- 积分得到，

$$t-r-4M\ln\left|1-\frac{r}{2M}\right|=U$$
$$t+r=V$$

- 这套坐标称为“内行”坐标，它明确描述了向内运动的粒子的行为，将在有限时间内穿过 $r=2M$，并落入 $r\to 0$
- 但对于 $r<2M$ 且向外运动的粒子，将会有 $dt<0$，并只有在 $t\to-\infty$ 时才能到达 $r=2M$
- 内行坐标适合描述物体下落而进入视界的运动

Eddington-Finkelstein “内行”坐标的光锥



Eddington-Finkelstein 坐标

- 讨论物体从内部区向外穿过视界的运动，可以引入 Eddington-Finkelstein “外行”坐标

Eddington-Finkelstein “外行”坐标

$$t_{\rm new}=t_{\rm old}-2M\ln\left|\frac{r_{\rm old}}{2M}-1\right|$$
$$r_{\rm new}=r_{\rm old}$$

Eddington-Finkelstein 坐标

- 此时，度规为

Eddington-Finkelstein “外行” 坐标下的度规

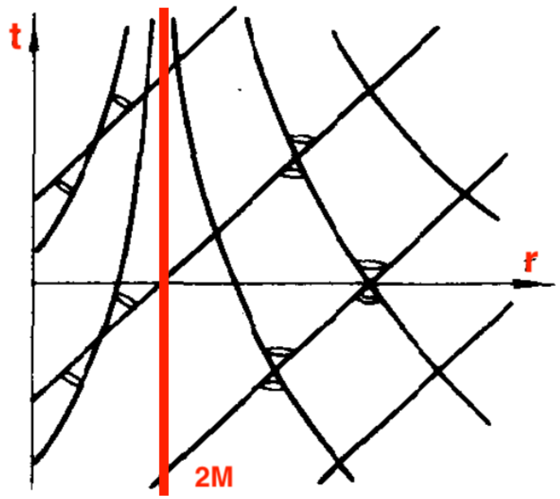
$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1+\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}r^2 - \frac{4M}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}t + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

- 光锥线为

$$t + r + 4M\ln\left|1-\frac{r}{2M}\right| = V$$

$$t - r = U$$

Eddington-Finkelstein “外行” 坐标的光锥



Kruskal-Szekeres 坐标

- Kruskal-Szekeres 坐标（K-S 坐标）是一套能完全消除视界的弊病的坐标系
  - 可用来讨论时空的全局结构
- K-S 坐标为 (v, u, θ, φ)，其中 v 为 K-S 时间，θ 和 φ 与 Schwarzschild 坐标一致
- 度规为（变换关系见下一页）

K-S 坐标下的线元

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{32M^3}{r}\mathrm{e}^{-r/2M}\left(-\mathrm{d}v^2+\mathrm{d}u^2\right) + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

其中 r 由隐函数给出

$$\left(\frac{r}{2M}-1\right)\mathrm{e}^{r/2M} = u^2 - v^2$$

K-S 坐标

K-S 坐标中的 (v, u) 与 Schwarzschild 坐标中的 (t, r) 的变换

$r > 2M$ 时，

$$u = \pm\sqrt{\frac{r}{2M}-1}\,\mathrm{e}^{r/4M}\cosh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{r}{2M}-1}\,\mathrm{e}^{r/4M}\sinh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

$r < 2M$ 时，

$$u = \pm\sqrt{1-\frac{r}{2M}}\,\mathrm{e}^{r/4M}\sinh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

$$v = \pm\sqrt{1-\frac{r}{2M}}\,\mathrm{e}^{r/4M}\cosh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

K-S 坐标的性质

- $ds^2 = 0$ 给出光锥线方程

$$\frac{du}{dv} = \pm 1$$

- r 为常数 $\Rightarrow \quad u^2 - v^2 = \text{const}$
  - 双曲线
  - 特别是 $r = 2M$，化成了一对直线 $u = \pm v$
  - $r = 0$ 为 $v^2 - u^2 = 1$

K-S 坐标的性质

- 根据 (v, u) 与 (t, r) 的变换关系式，得到

$$\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \frac{v}{u}, \quad r > 2M$$

$$\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \frac{u}{v}, \quad r < 2M$$

- 所以，等 t 面是过原点的直线族
  - $t = +\infty$ 时，$u = v$（与视界重合）
  - $t = -\infty$ 时，$u = -v$（与视界重合）
  - $t = 0$ 时，$u = 0$ 或 $v = 0$

K-S 坐标

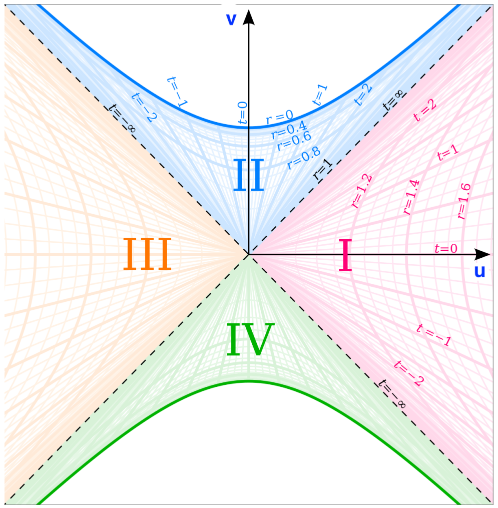
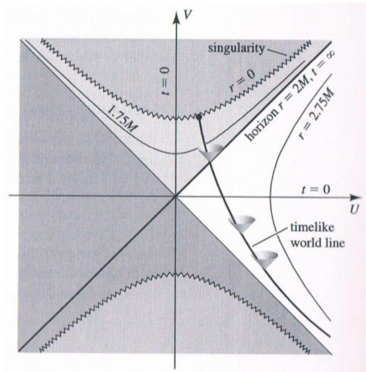
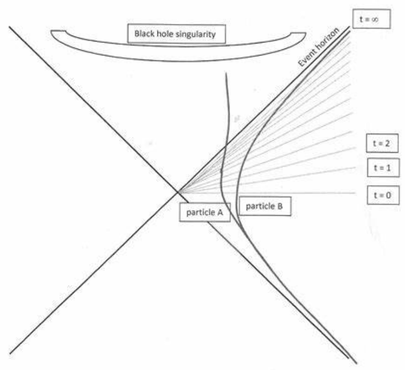


Figure: 该图中 r 以 $2M$ 为单位

Kruskal-Szekeres 坐标中粒子的运动

- K-S 坐标的第 I 区包括了所有 $2M < r < \infty$ 和 $-\infty < t < +\infty$ 的坐标，故它对“现实区域”的“物理描绘”是充分的

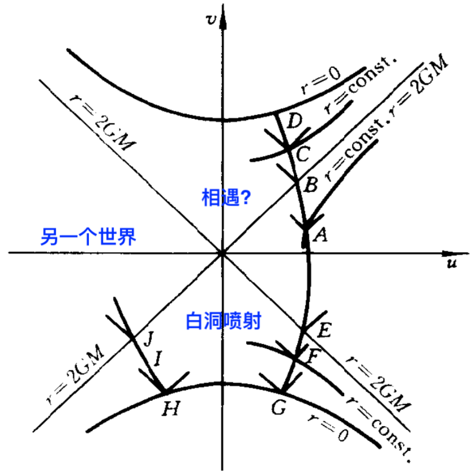




Kruskal-Szekeres 坐标中粒子的运动

- 正如前面所介绍的，第 I 区的粒子能在有限的 K-S 时间 v 内到达 $r = 2M$，此时 Schwarzschild 时间为 $t = \infty$
- 第 II 区对应的是 Schwarzschild 坐标中 $r < 2M$ 部分
- 在第 II 区，由于等 r 线在光锥线外，所以粒子不能保持 r 不变，唯一的可能性是朝 $r = 0$ 运动

时空的全局结构：黑洞、白洞、另一个世界



天体物理中的黑洞

- 黑洞的形成机制
  1. 早期宇宙高密介质中由于密度涨落而造成的原初黑洞
  2. 恒星演化至晚期的终局
  3. 超重星、星团、星系核塌缩形成的巨型黑洞

5. 其它黑洞

一些有意思的定理

在（经典的）广义相对论中，

- 稳定的黑洞必定是轴对称的
- 稳定黑洞的引力场只能包含三个物理参量：质量 M，电荷 Q，角动量 J
  - 黑洞无毛定理（no-hair theorem）
- 黑洞动力学过程中，视界的总面积不能减少
  - 黑洞动力学第二定律，也叫面积不减定理

带电的黑洞

- 球对称的带电黑洞

Reissner-Nordstrom 黑洞

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

- 黑洞的视界仍旧定义为单向运动时空区的边界
- $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$
- 要求：$M > |Q|$

自转的黑洞

Kerr-Newman 黑洞

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta d\varphi\right)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\left(r^2 + a^2\right) d\varphi - a dt\right]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

其中，

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$$
$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta$$

- 视界：$r_+ = GM + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$

- 根据黑洞面积不减定理，定义不可约质量 $m_{\rm ir} = \sqrt{A/16\pi}$
- 对于 Kerr-Newman 黑洞来说，有

$$M^2 = \left(m_{\rm ir} + \frac{Q^2}{4m_{\rm ir}}\right)^2 + \frac{J^2}{4m_{\rm ir}^2}$$

  - Schwarzschild 黑洞是黑洞的“基态”
- Bekenstein 证明了黑洞的熵为

$$S = \frac{k_B}{4\hbar G} A$$

- 据此，可以得到黑洞热力学
  - 如，对 Schwarzschild 黑洞而言，有“温度” $T = \hbar/4kGM$
- 由于黑洞有负的热容，所以黑洞在热力学上是不稳定的
  - Hawking 辐射