

## 2020秋 冯旭&李强 计算物理期末

### 一、简答题 (20分)

1. 请设计一个算法, 可以以  $\mathcal{O}(n^3)$  的计算量计算出矩阵  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  的行列式  $\det(A)$ 。
2. 利用矩阵模与矢量模的兼容性  $\|A\vec{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|$ , 推导方程组问题  $A\vec{x} = \vec{b}$  的条件数, 其中  $A$  是非奇异厄米矩阵。
3. 接(2), 若已知一个矩阵的  $|\lambda| < |\lambda_0|$  的所有本征值和本征矢量, 可以如何优化解法?

### 二、Thomas算法 (30分)

1. 在三对角矩阵  $A$  的LU分解中, 给出  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  的递推关系,  $\alpha_1 = a_1$ 。
2. 如何用LU分解解三对角矩阵方程组  $A\vec{x} = \vec{g}$ , 并给出  $x_i$  的递推关系。
3. 如何求解三对角矩阵的变种  $B\vec{x} = \vec{f}$ , 其中

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & b_1 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_n & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

### 三、一阶对流方程 (18分)

一阶对流方程

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0$$

给出至少一种差分形式 (迎风、中心等均可), 并推导其数值稳定性。

### 四、概率分布函数 (30分)

1. 计算  $[0, 1]$  上满足均匀分布的随机变量的均值和方差。
2. 计算泊松分布的均值和方差。

$$f(n; \nu) = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu}, \quad n \geq 0$$

3. 简述如何对  $[0, +\infty)$  上的概率分布函数  $f(x) = \exp(-x)$  取样。
4. 利用舍选法和(3)的结果, 简述如何对下面的分布取样。

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x > 0$$