

《天体物理学》

第十二章 宇宙 (a)

讲授：徐仁新

北京大学物理学院天文学系

什么是宇宙？

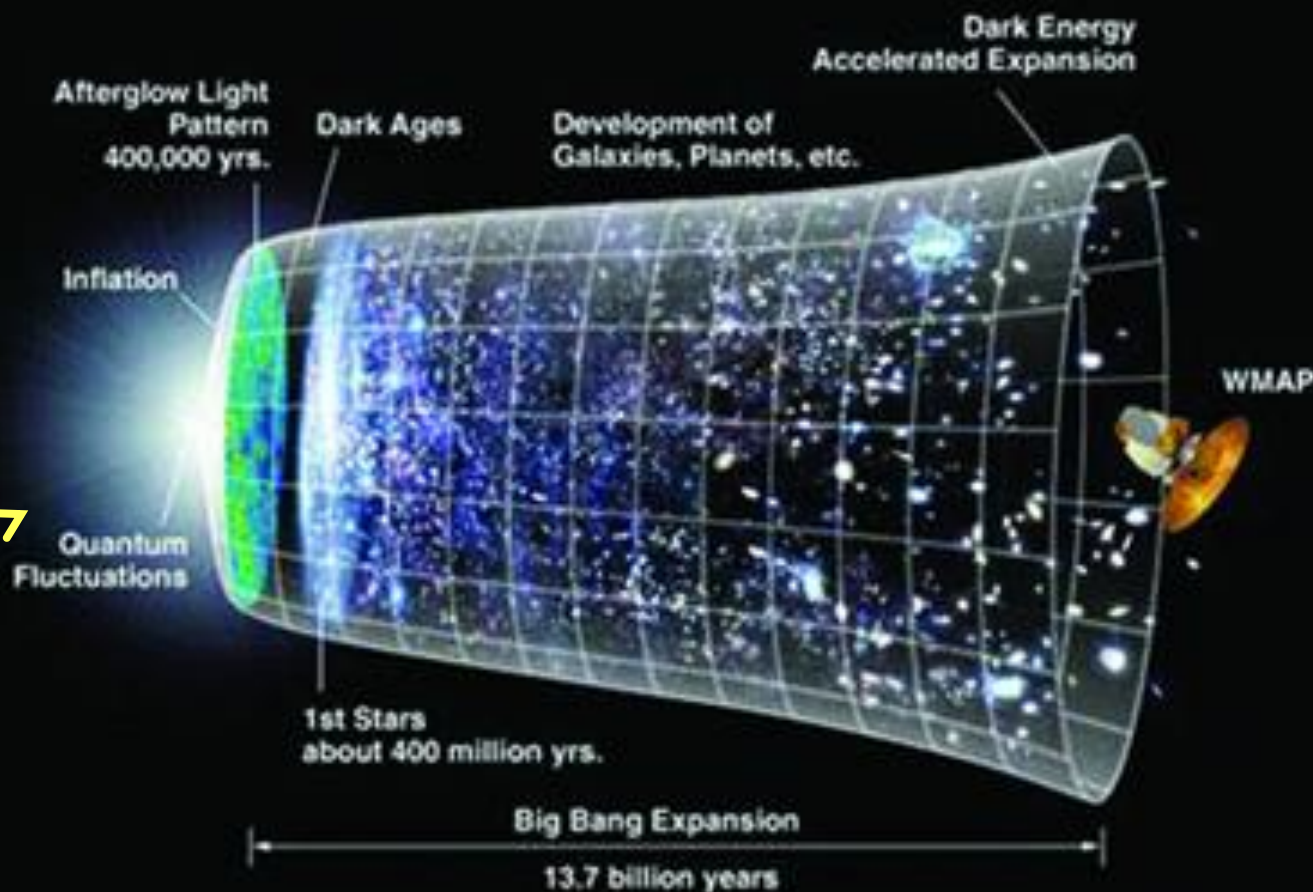
“太上有立德，其次有立功，其次有立言”
——《左传·襄公二十四年》

“三不朽”：言 → 功 → 德



古老的静态宇宙观

现代的演化宇宙观



什么是宇宙？

在特殊的时空中呈现极端的物态

类似于中子星，宇宙是 $G=8\pi T$ 描述的时空中发生若干极端粒子物理过程的另一“实验室”。

• 所有的时间与空间

“四方上下曰宇，古往今来曰宙” —— 淮南子·原道训

• 现代宇宙学发展历史：

1915: Einstein建立广义相对论

1922: Friedmann得到Einstein场方程宇宙学解

1929: Hubble发现宇宙是膨胀的

1946: Gamow等分析早期宇宙的热密状态

1965: Penzias和Wilson发现微波背景辐射

1981: Guth提出宇宙极早期暴胀思想

1998: Ia超新星观测发现宇宙正在加速膨胀

1, 基本观测事实

大尺度上的均匀性

$$>100\text{Mpc}: \rho_v \approx 10^{-31} \text{ g cm}^{-3}, \quad n_{\text{Bv}} \equiv \rho_v/m_p \approx 10^{-7} \text{ cm}^{-3}!$$

Hubble膨胀

$$\dot{R}(t) = H(t)R(t), \quad h \equiv H/(100\text{km/s/Mpc})$$

轻元素丰度

$$Y(^1\text{H}) \approx 3/4, \quad Y(^4\text{He}) \approx 1/4$$

微波背景辐射

几乎各向同性辐射场: $2.7277 \pm 0.002\text{K} \rightarrow n_\gamma \sim aT^4/(kT) \sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$

- SZ效应: 星系团中热电子对CMB散射导致谱在该方向略变硬
- GZK截断: 宇宙线与CMB碰撞导致存在一个高能截断 $\sim 10^{19}\text{eV}$

A dashed red oval containing the equation $\eta_v \equiv n_{\text{Bv}}/n_\gamma \sim 10^{-10}$. A dashed red arrow points from the n_{Bv} term in the equation above to this oval. Another dashed red arrow points from the oval down to the n_γ term in the text below.

$$\eta_v \equiv n_{\text{Bv}}/n_\gamma \sim 10^{-10}$$

2, Robertson-Walker度规

宇宙空间均匀各向同性假设

正确吗? “奶酪”宇宙?

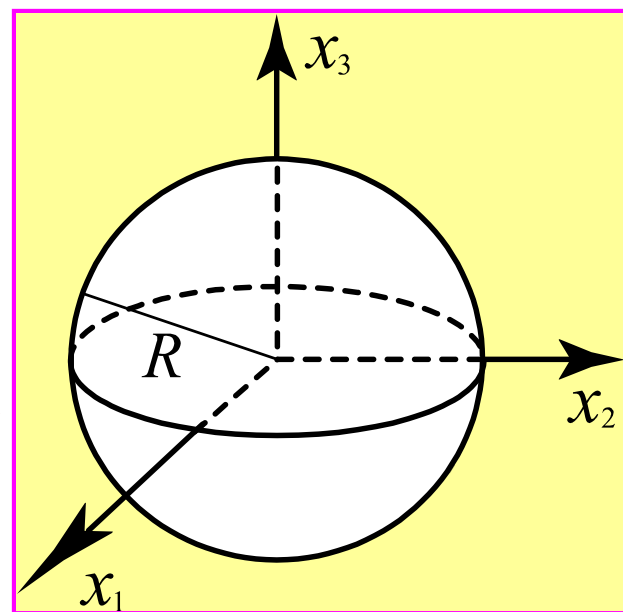
- 宇宙三维空间部分任何一点没有特殊性! —— “哥白尼原理”
- 观测支持: 大尺度均匀性; CBM偏离均匀的程度 $\sim 10^{-3}$
- 满足这一对称性时空的线元(度规)如何表达? **RW度规!**
空间无特殊性 \rightarrow 空间的曲率处处相等 \rightarrow 空间是常曲率的!

球面: 二维常曲率空间

满足 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ 约束的线元:

$$dl^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 \right)$$

- $k = 1$: 二维球面 \rightarrow
- $k = 0$: 二维平面
- $k = -1$: 二维伪球面 (曲率为负)



2, Robertson-Walker度规

RW度规:

- 三维常空间线元 dl^2 为

$$dl^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1: \text{ 三维球面} \\ k = 0: \text{ 三维平面} \\ k = -1: \text{ 三维伪球面} \end{array} \right.$$

当 k 值非1、0、-1时，相当于量度空间距离尺子作放大或缩小

- 相应宇宙的四维时空线元为

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2 = -dt^2 + R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right)$$

该线元所描述时空的度规称为**RW度规**

由一个反映曲率的常量 **k** 和一个反映尺度的函数 **$R(t)$** 完全确定！

3, 宇宙膨胀动力学

Friedmann方程

• {Einstein场方程 + RW度规 + 理想流体} \Rightarrow **Friedmann方程**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \rightarrow \text{宇宙膨胀速度, } H = \dot{R}/R \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \rightarrow \text{加速度; 若 } p \geq 0 \text{ 必减速膨胀!} \end{array} \right.$$

方程含有3个未知函数: $R(t)$ 、 $\rho(t)$ 、 $p(t)$ (设确定的 k 值)

当给定物质的状态方程 $p = p(\rho)$, 方程组才能被完备地求解

• 无量纲化宇宙密度: $\Omega \equiv \rho/\rho_c$

$$\rightarrow \rho = \rho_c + \frac{3k}{8\pi G R^2}, \quad \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$$

三维空间 $\left\{ \begin{array}{l} \Omega > 1: \text{有限无边} \\ \Omega = 1: \text{平直无限} \\ \Omega < 1: \text{弯曲无限} \end{array} \right.$

3, 宇宙膨胀动力学

宇宙两种物态的膨胀行为

- Friedmann方程消去 R 二阶导数 $\Rightarrow \dot{\rho}R + 3\rho\dot{R} = -3p\dot{R}$

当 ρ 为常数时有:
 $p = -\rho$; 再代入
 Friedman方程 \Rightarrow
 $\ddot{R}/R = (8\pi G/3)\rho > 0$

或者:

$$d(\rho R^3) = -p d(R^3)$$

- 宇宙物质早期: 辐射主导, $p = \rho/3$

$$d(\rho R^3 \cdot R) = R[d(\rho R^3) + (\rho/3)d(R^3)] = 0, \Rightarrow \rho R^4 = \text{常数}$$

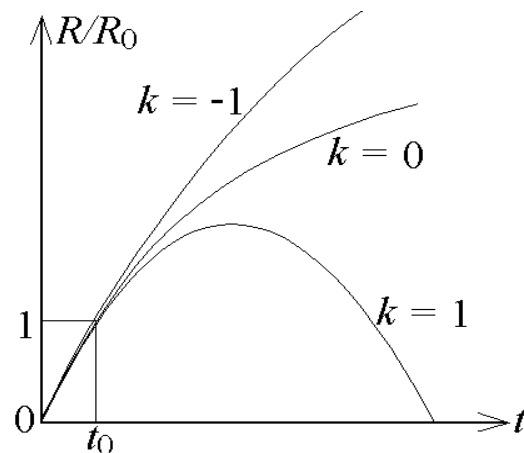
- 宇宙物质晚期: 尘埃物质主导, $p = 0 \Rightarrow \rho R^3 = \text{常数}$

尘埃宇宙期 \gg 辐射宇宙期

$\rho R^3 = \text{常数}$ 代入并积分Friedmann方程(\dot{R})

\Rightarrow

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} \sqrt{\frac{x}{1 + (1-x)k / (R_0^2 H_0^2)}} dx$$



总 结

- 0, 什么是宇宙?
- 1, 基本观测事实
- 2, Robertson-Walker度规
- 3, 宇宙膨胀动力学
- 4, 极早期宇宙真空相变
- 5, 暴胀
- 6, 辐射与物质间的脱耦
- 7, 宇宙早期核合成
- 8, 暗物质与暗能量
- 9, 可观测宇宙之外?

作业

习题： 1