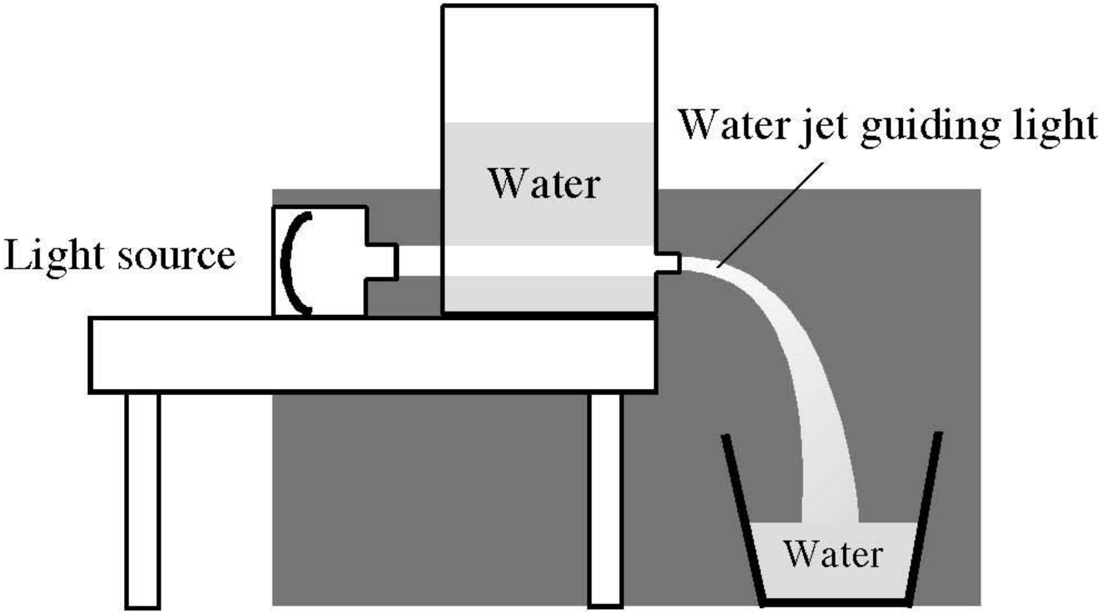
第三章　导波光学

3.1　导波光学基础

3.2　光波导的一般理论和波导模式

3.3　平面光波导

3.4　波导模的耦合方法

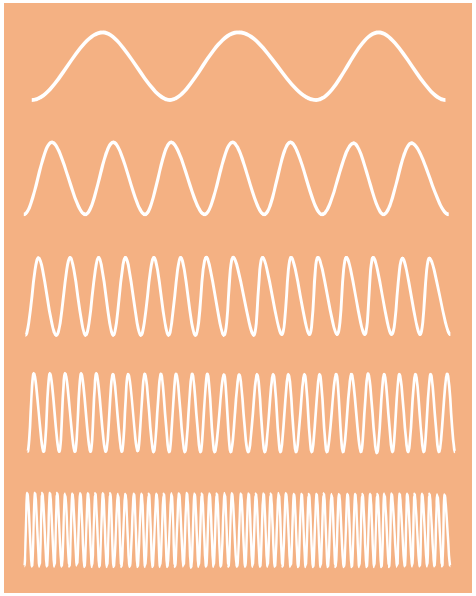


John Tyndall in 1854 demonstrated to the Royal Institution that a water jet can act as a light guide

1966年，高锟(Charles Kao，2018年9月23日去世)和霍克哈姆(George Hockham)预言了用基于光学全反射原理的光导纤维来传输光的可能性。

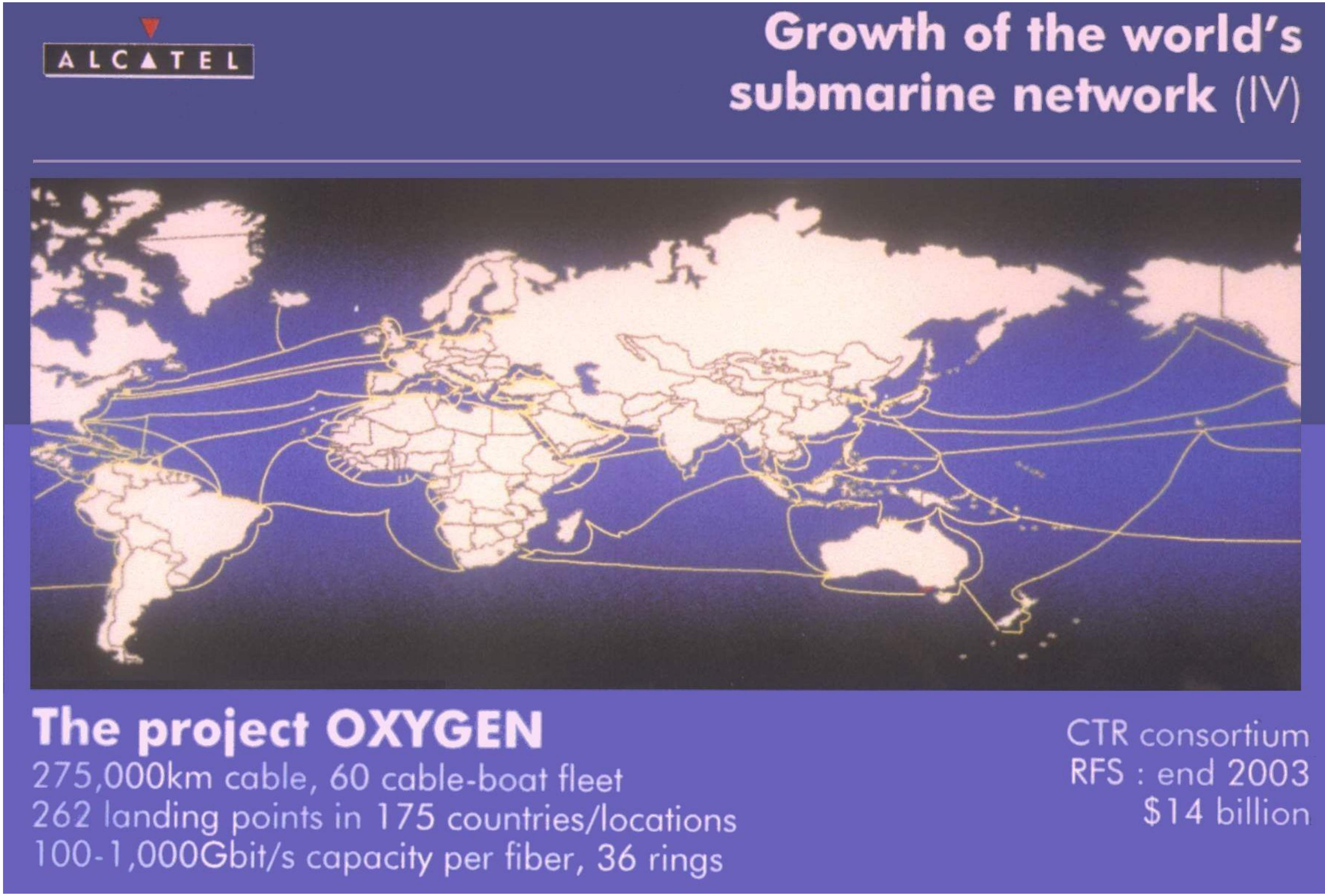
为什么要用光? —— 带宽!

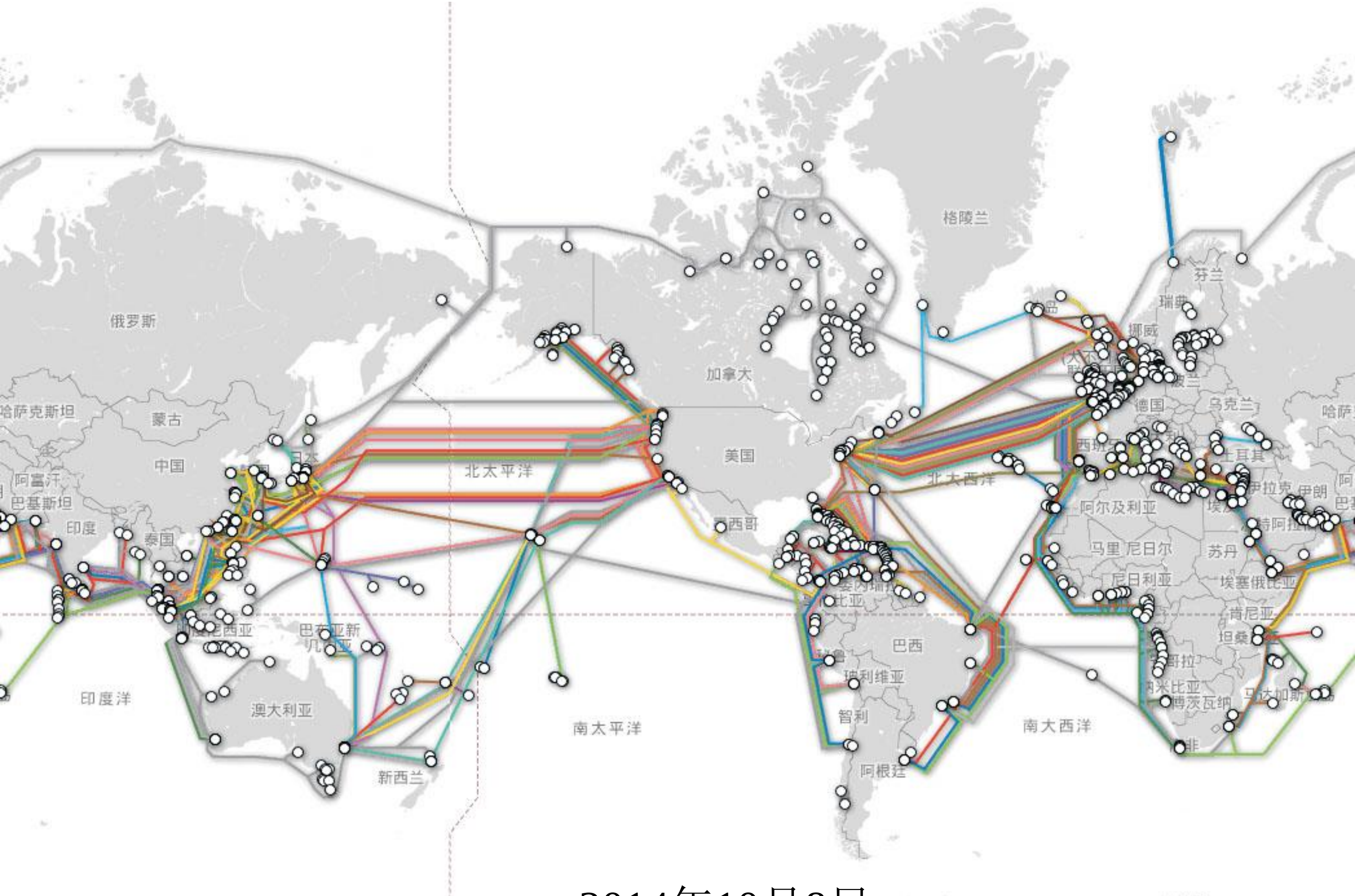
传输信息的速率受“载波”频率的限制

Wave	Called	Carrier
	MF Radio	1MHz,
	HF Radio	10MHz,
	VHF Radio	100MHz
	Microwaves	10GHz
	Infrared Light	200THz

- 几个GHz以上的数据流必须用光来传输!

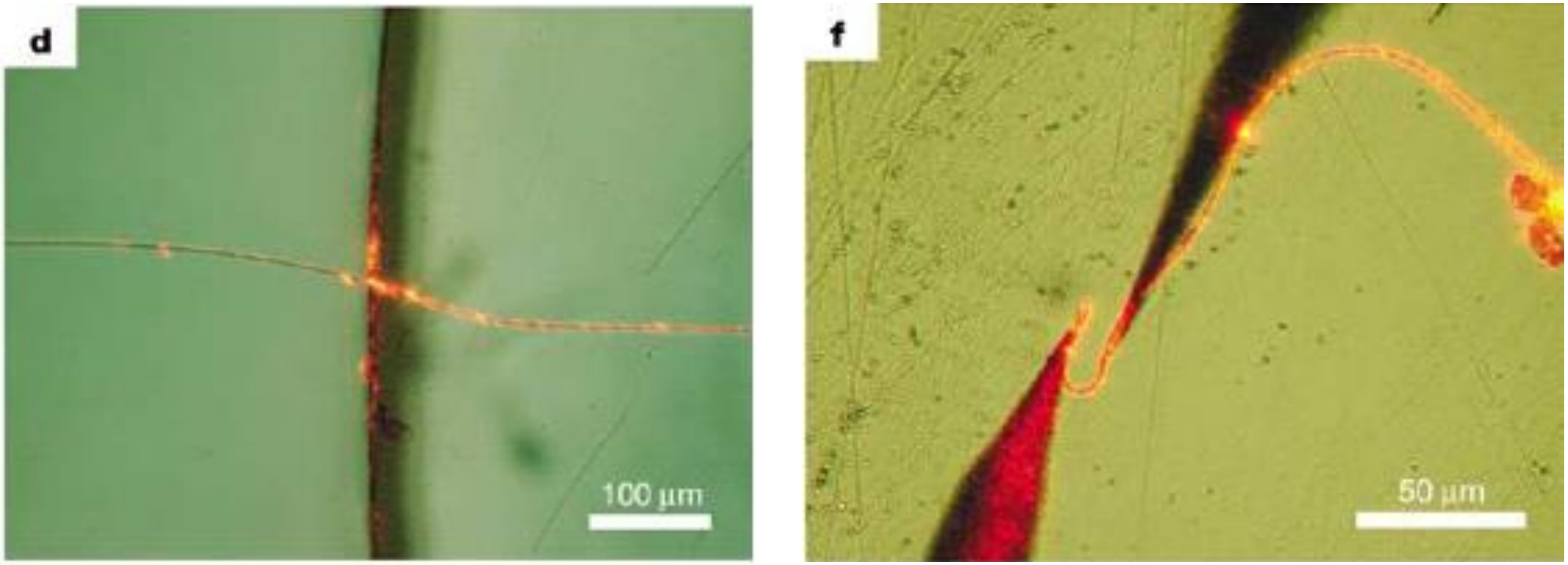
Fibre circles the globe.





俄罗斯
哈萨克斯坦
蒙古
中国
阿富汗
巴基斯坦
印度
泰国
日本
北太平洋
加拿大
格陵兰
美国
墨西哥
北大西洋
芬兰
瑞典
挪威
波兰
德国
乌克兰
土耳其
阿尔及利亚
马里
尼日尔
苏丹
尼日利亚
埃塞俄比亚
肯尼亚
坦桑尼亚
博茨瓦纳
巴西
玻利维亚
智利
阿根廷
印度洋
澳大利亚
新西兰
南太平洋
南大西洋

2014年10月8日

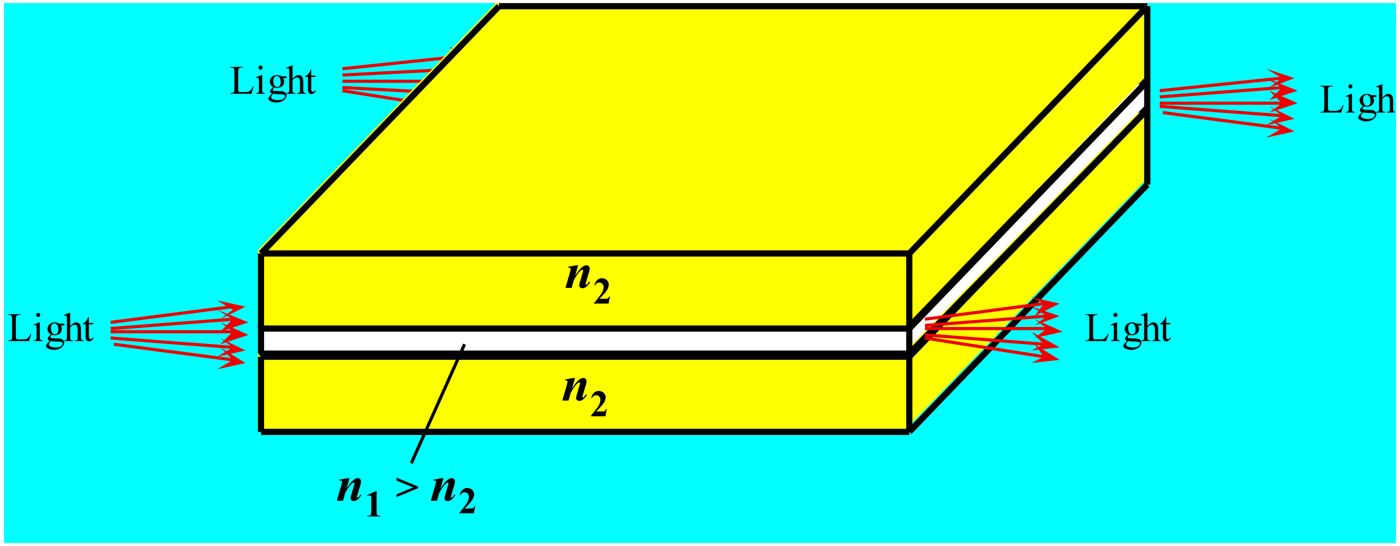


纳米光纤

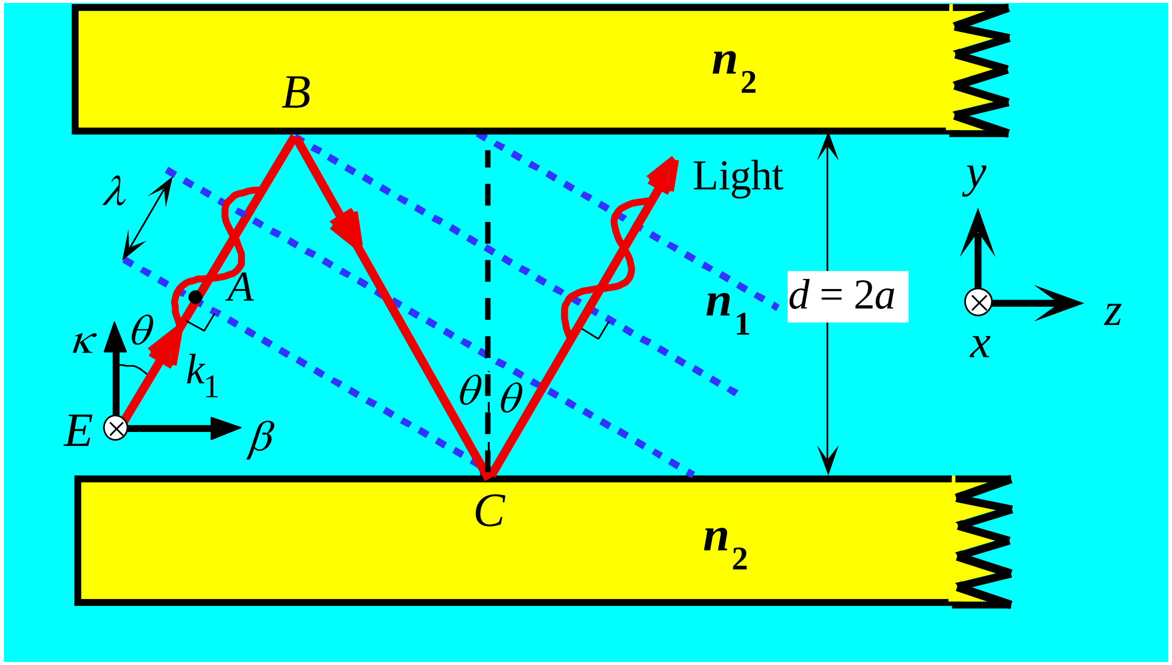
Nature 2003

3. 1　导波光学基础

3.1.1 平面波导中的光线



平面光波导的结构示意图



$$\Delta\phi(AC) = k_1(AB + BC) - 2\phi = m(2\pi) \qquad \text{m} = 0, 1, 2, \ldots$$

$$BC = d / \cos\theta \qquad AB = BC\cos(2\theta)$$

$$AB + BC = BC\cos(2\theta) + BC = BC[(2\cos^2\theta - 1) + 1] = 2d\cos\theta$$

$$k_1[2d\cos\theta] - 2\phi = m(2\pi)$$

波导条件：

$$k_1 d cos\theta_m - \phi_m = m\pi$$

$$\left[\frac{2\pi n_1(2a)}{\lambda}\right]\cos\theta_m - \phi_m = m\pi$$

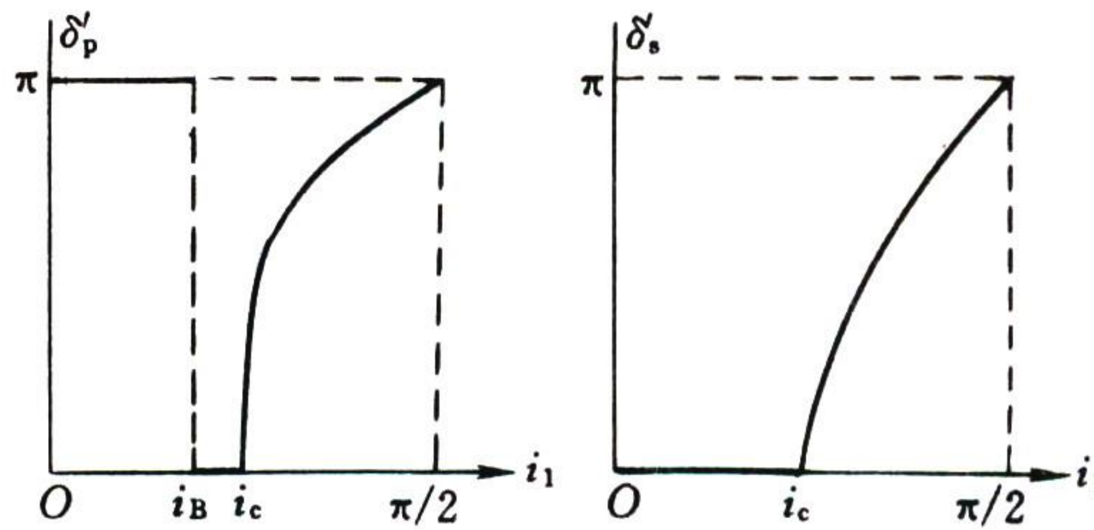
发生全反射时的相移

《现代光学基础》p129

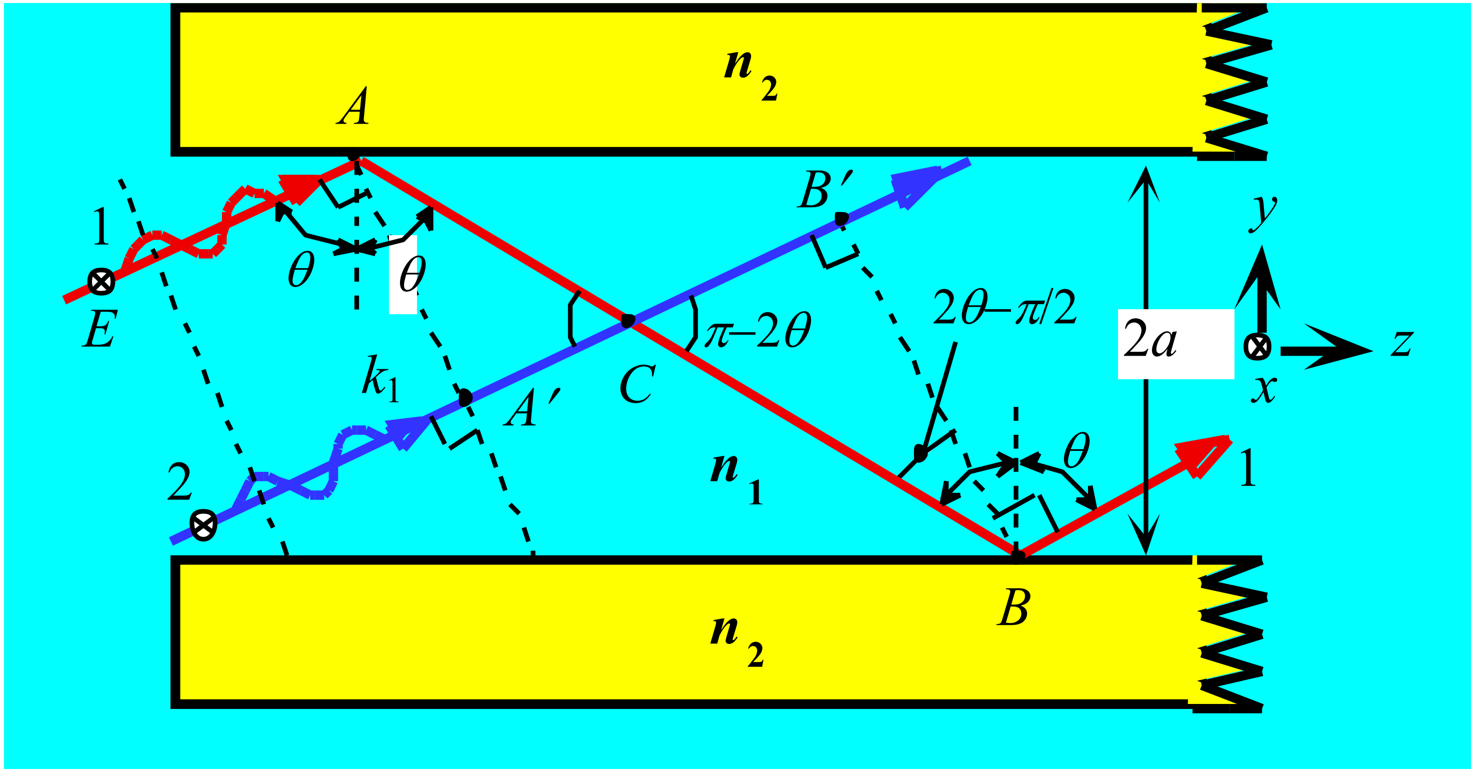
$$\tan\frac{\delta_p'}{2}=\frac{n_1}{n_2}\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)^2-1}}{\cos i_1}, \tag{3.30}$$

$$\tan\frac{\delta_s'}{2}=\frac{n_2}{n_1}\frac{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)^2-1}}{\cos i_1}, \tag{3.31}$$

相移随入射角的变化

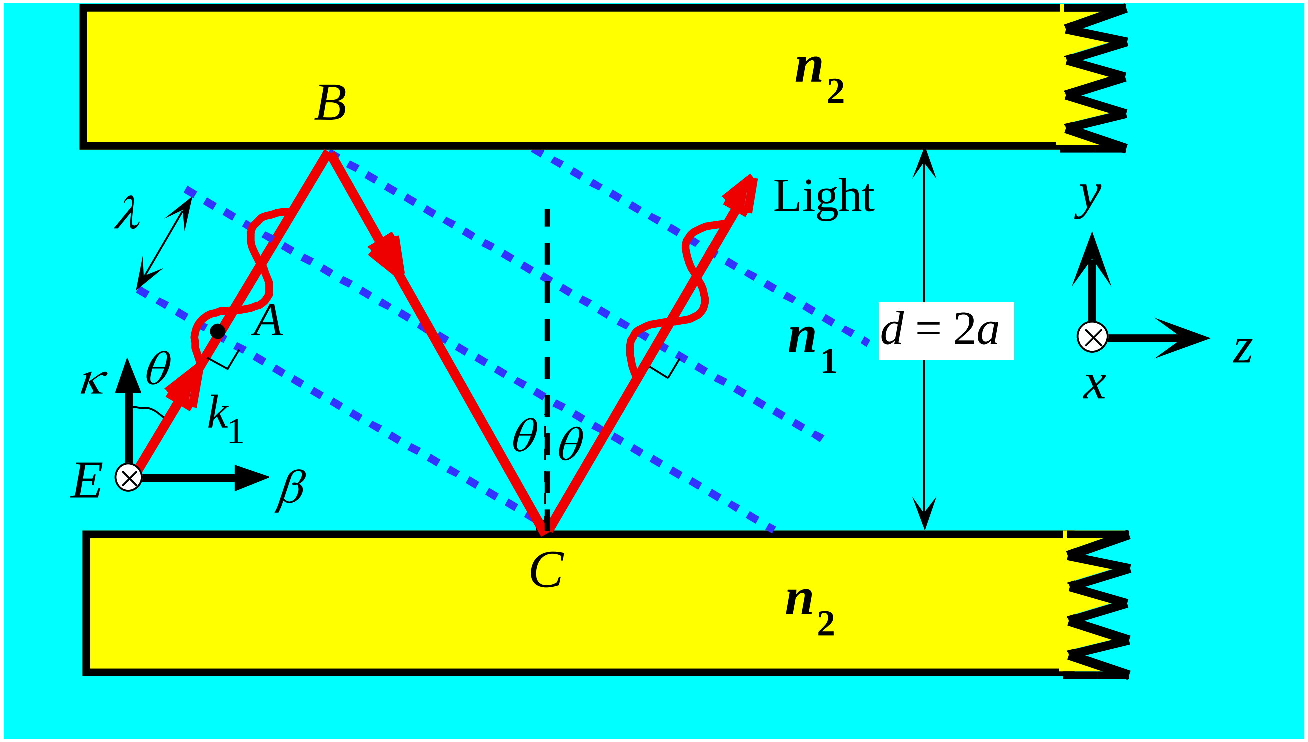


(b) $n_1>n_2, n_1=1.5, n_2=1.0$



两条最初同相的平行光在波导中的光路

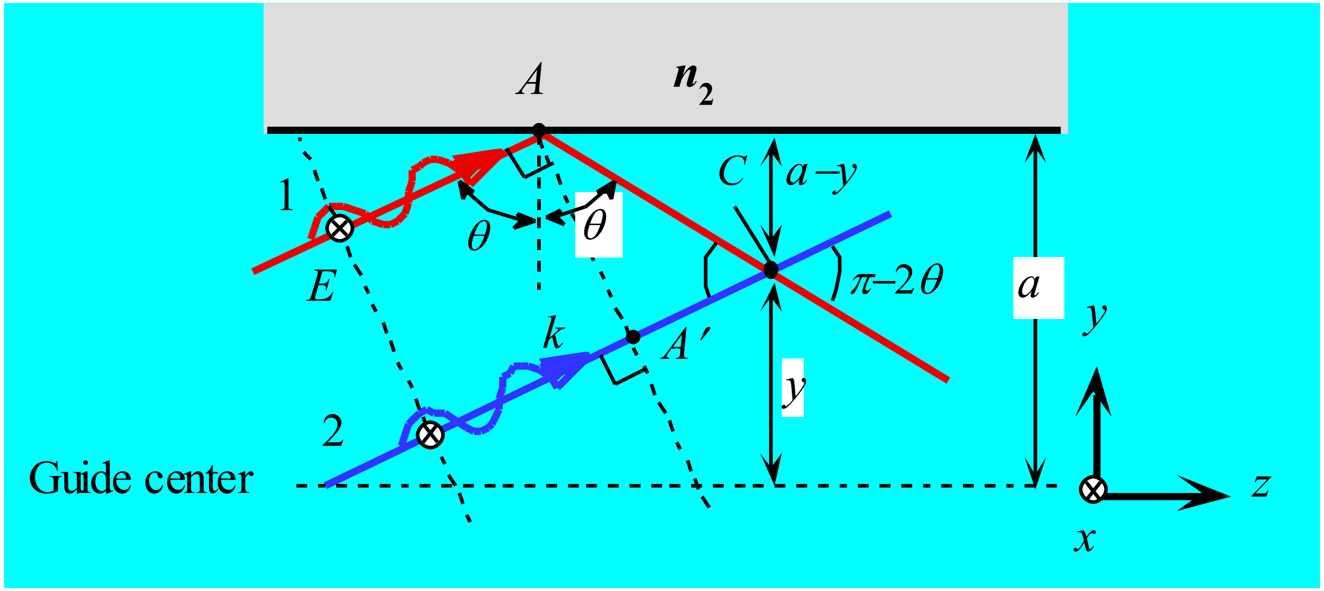
$$k_1(AB - A'B') - 2\phi = \mathrm{m}(2\pi)$$



$$\beta_m = k_1 \sin\theta_m = \left(\frac{2\pi n_1}{\lambda}\right)\sin\theta_m$$

$$\kappa_m = k_1 \cos\theta_m = \left(\frac{2\pi n_1}{\lambda}\right)\cos\theta_m$$

平面波导中的场分布



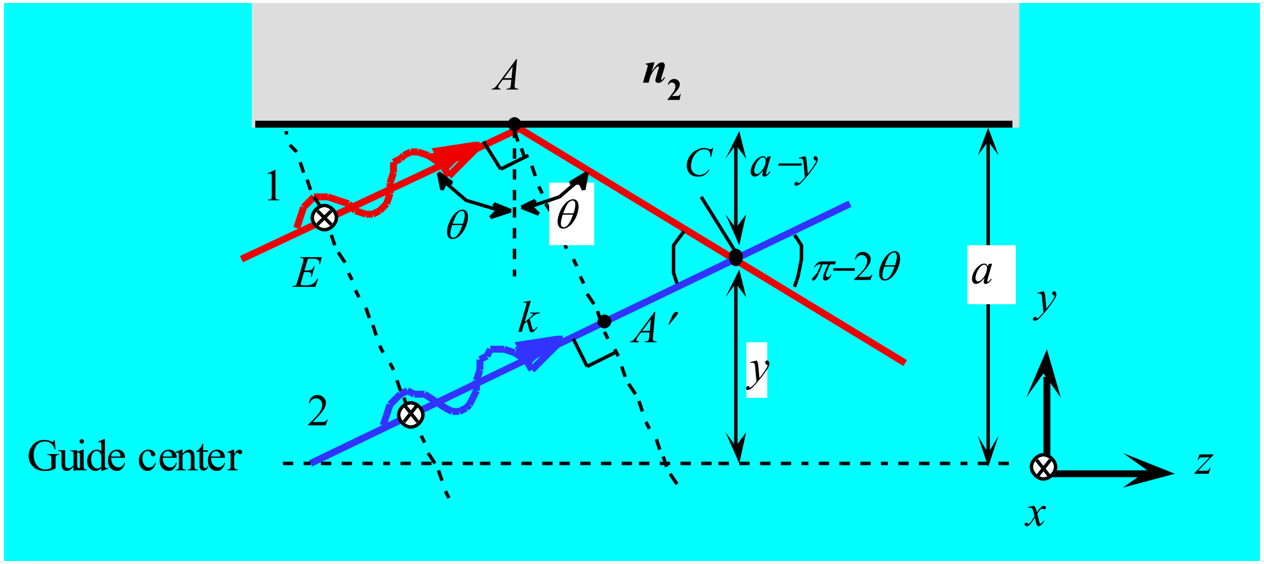
$$AC - A'C = AC - ACcos(\pi - 2\theta_m) = AC(1 + cos2\theta_m)$$

$$= 2ACcos^2\theta_m = 2(a - y)cos\theta_m$$

$$\Phi_m = (k_1 AC - \phi_m) - k_1 A'C = 2k_1(a-y)\cos\theta_m - \phi_m$$

$$k_1(2a)cos\,\theta_m - \phi_m = m\pi \qquad 2k_1 cos\,\theta_m = \frac{1}{a}(m\pi + \phi_m)$$

$$\Phi_m = \Phi_m(y) = m\pi - \frac{y}{a}(m\pi + \phi_m)$$ 相位差是y的函数

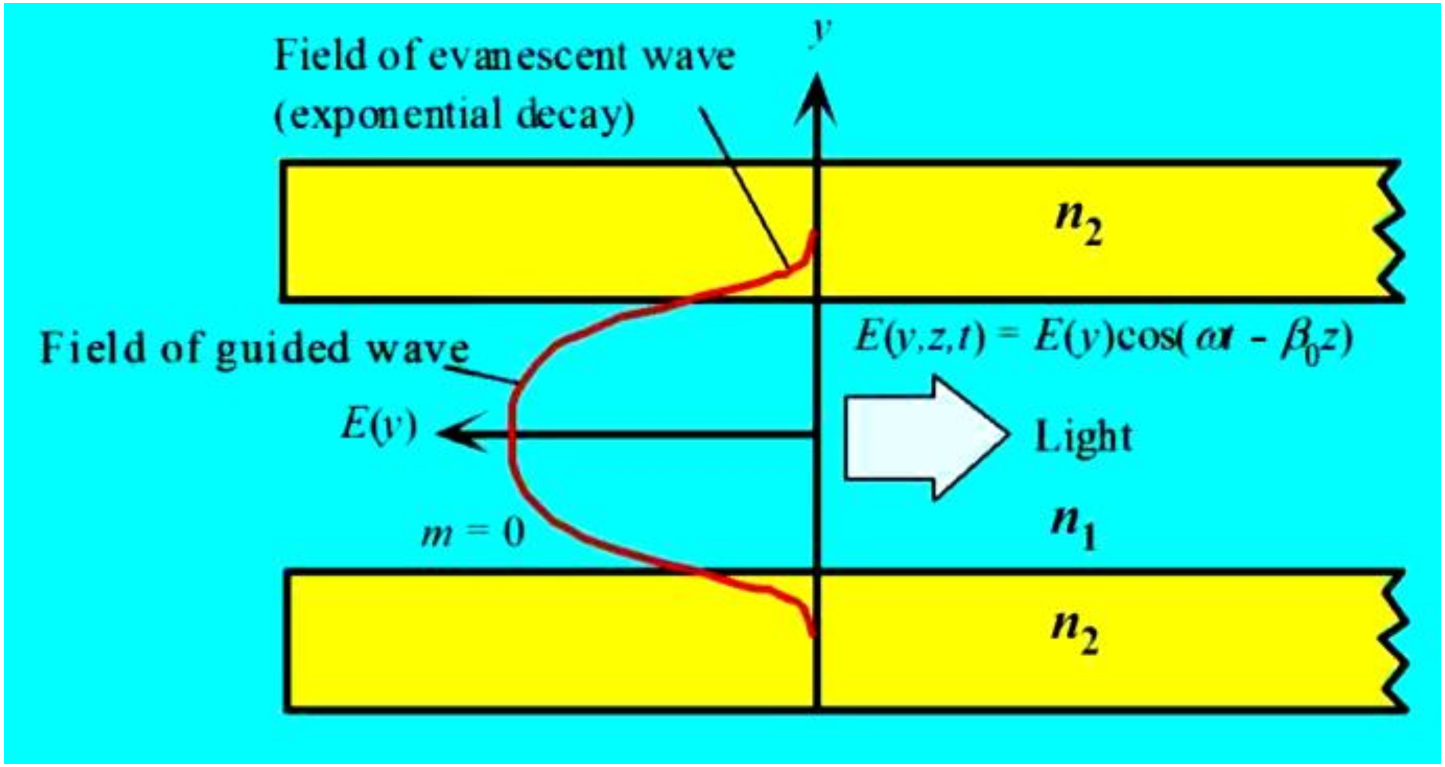


$$E_1(y,z,t) = E_0\cos(\omega t - \beta_m z + \kappa_m y - \Phi_m)$$

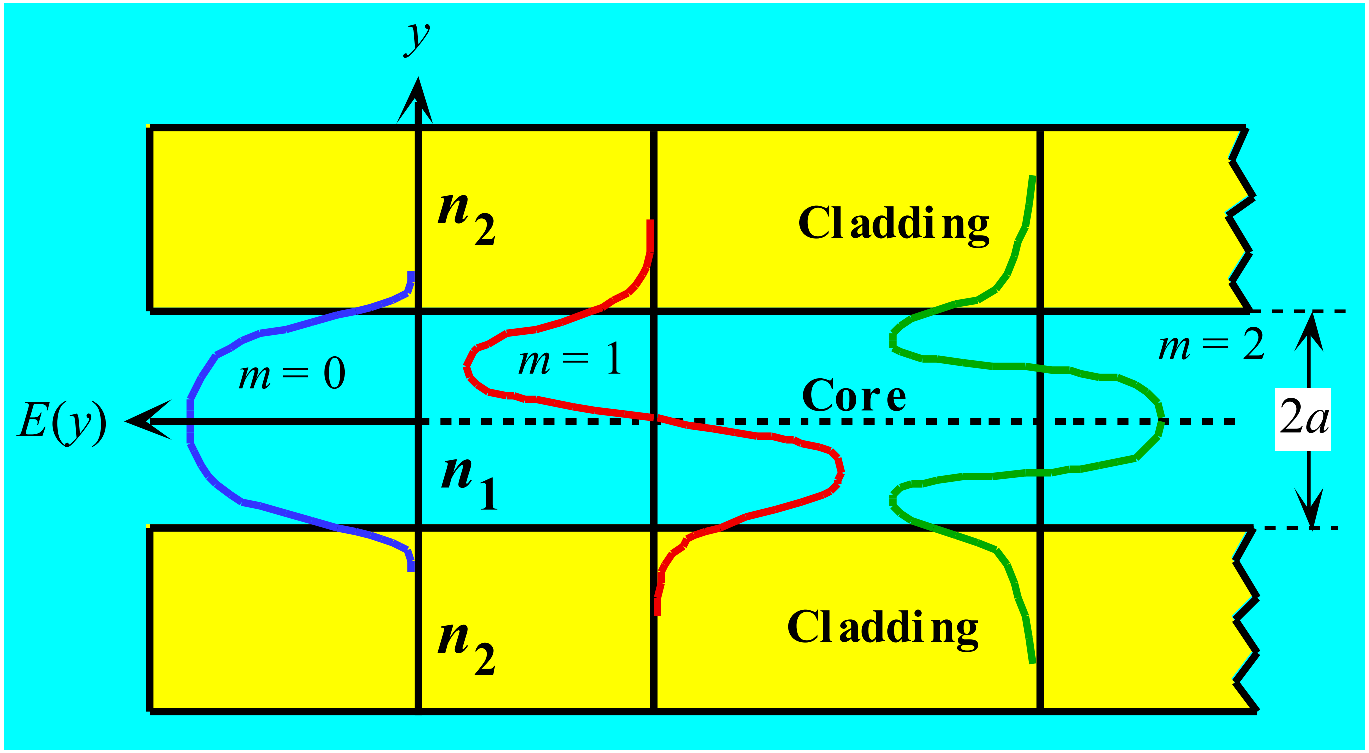
$$E_2(y,z,t) = E_0\cos(\omega t - \beta_m z - \kappa_m y)$$

$$E(y,z,t) = 2E_0\cos(\kappa_m y - \frac{1}{2}\Phi_m)\cos(\omega t - \beta_m z - \frac{1}{2}\Phi_m)$$

$$E(y,z,t) = 2E_m(y)\cos(\omega t - \beta_m z)$$



最低模的行波的电场分布

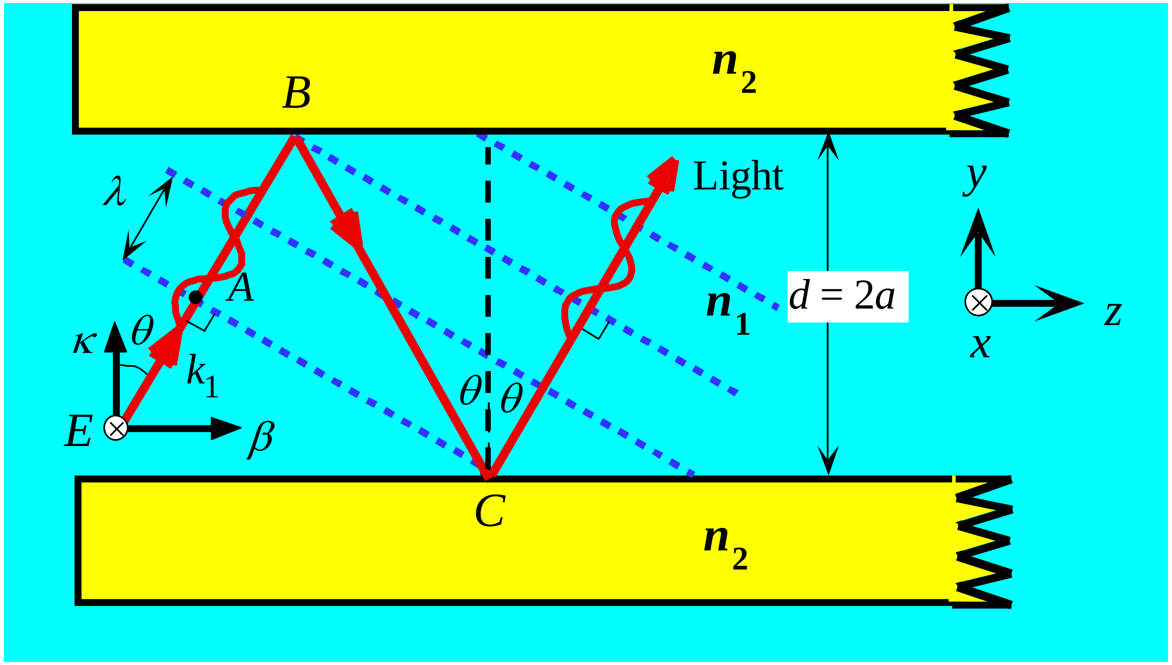


m = 0, 1, 2的三个模式的电场分布

m：模数

m越大，κ_m越大

穿透深度随m的变化

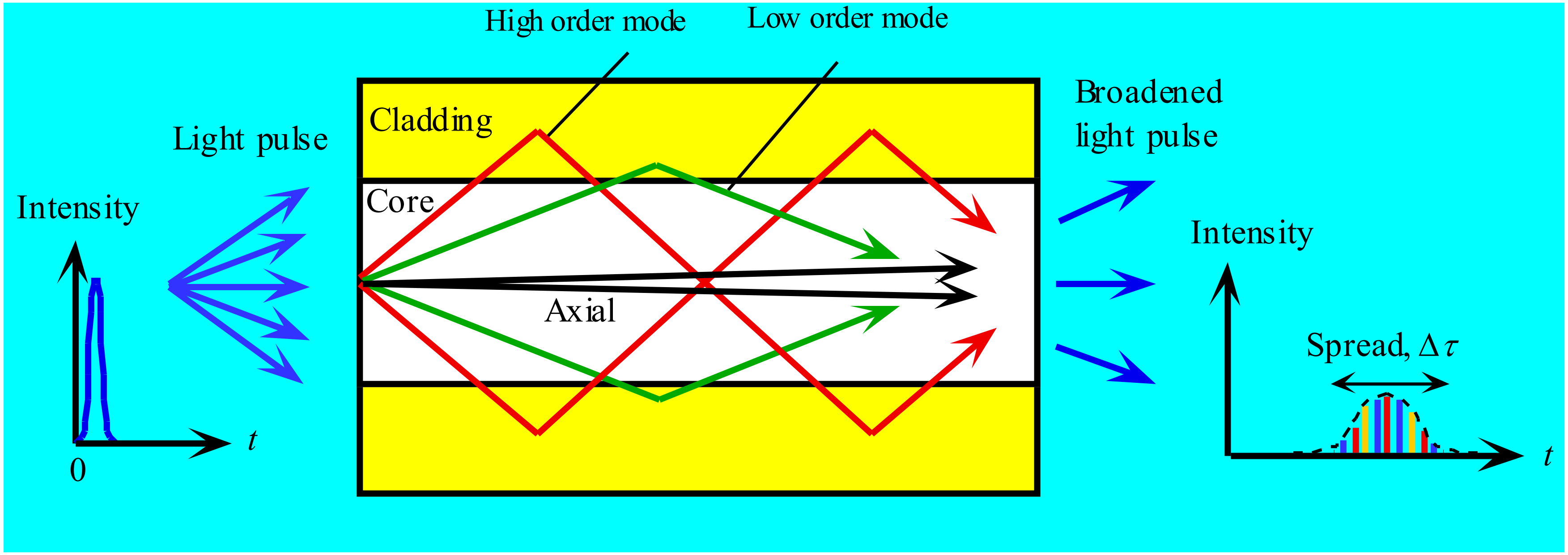


n_2中的横向波数： $k_{2y} = i\sqrt{\beta_m^2 - k_2^2} = i\sqrt{(n_1 sin\theta_m)^2 - n_2^2}\, k_0$

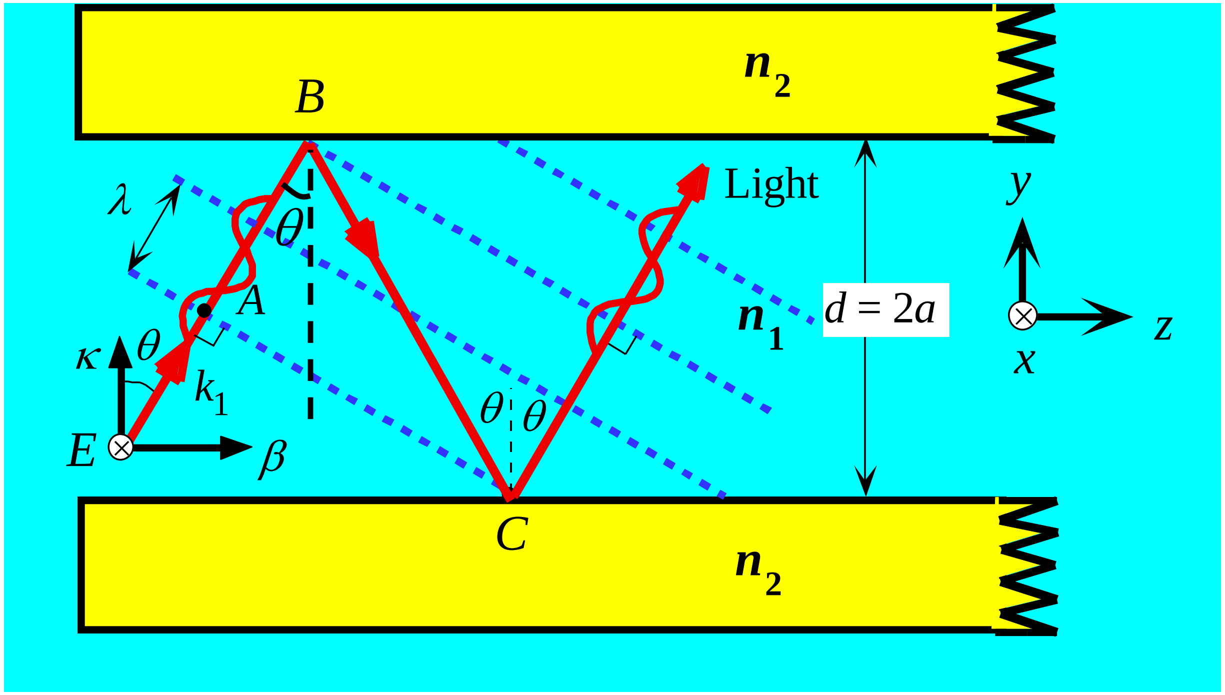
穿透深度：$d = \dfrac{1}{|k_{2y}|}$

m越大，入射角θ_m越小，$|k_{2y}|$越小，包层穿透深度越大

光在平面波导中传播示意图



1. 波导色散；2. 材料色散。



波导中的光线

临界角θC：　$\sin\theta_C = \dfrac{n_2}{n_1}$　$\sin\theta_m \geq \sin\theta_C$

m的取值范围？

波导条件： $k_1 2a \cdot cos\theta_m - \Phi_m = m\pi$

$$cos\theta_m = \frac{m\pi + \Phi_m}{2k_1 a} \quad \le cos\theta_C$$

$$cos\theta_C = \sqrt{1 - sin^2\theta_C} = \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \frac{1}{n_1}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$m \le \frac{1}{\pi}\left(\frac{4\pi a}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} - \Phi_m\right) = \frac{1}{\pi}(2V - \Phi)$$

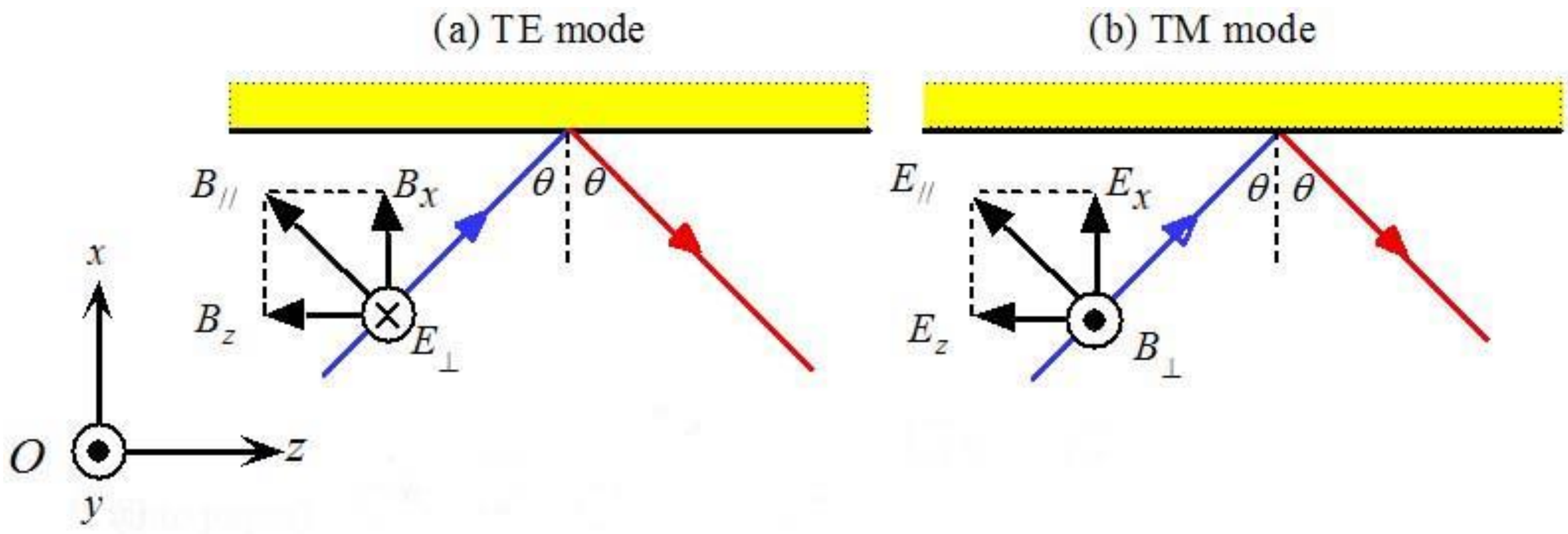
$$V = \frac{2\pi a}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

归一化频率或
波导参量

$V < \frac{\pi}{2}$ 时，m < 1,即 m = 0

TE模：Transverse electric field mode

TM模：Transverse magnetic field mode

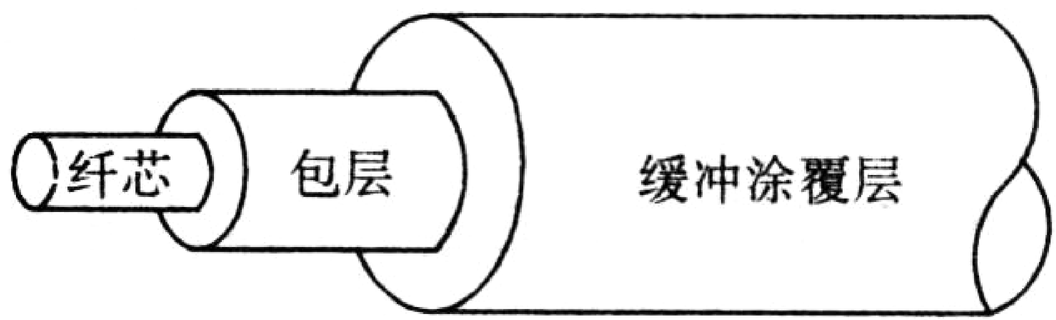


TE模和TM模示意图（入射面为屏幕面）

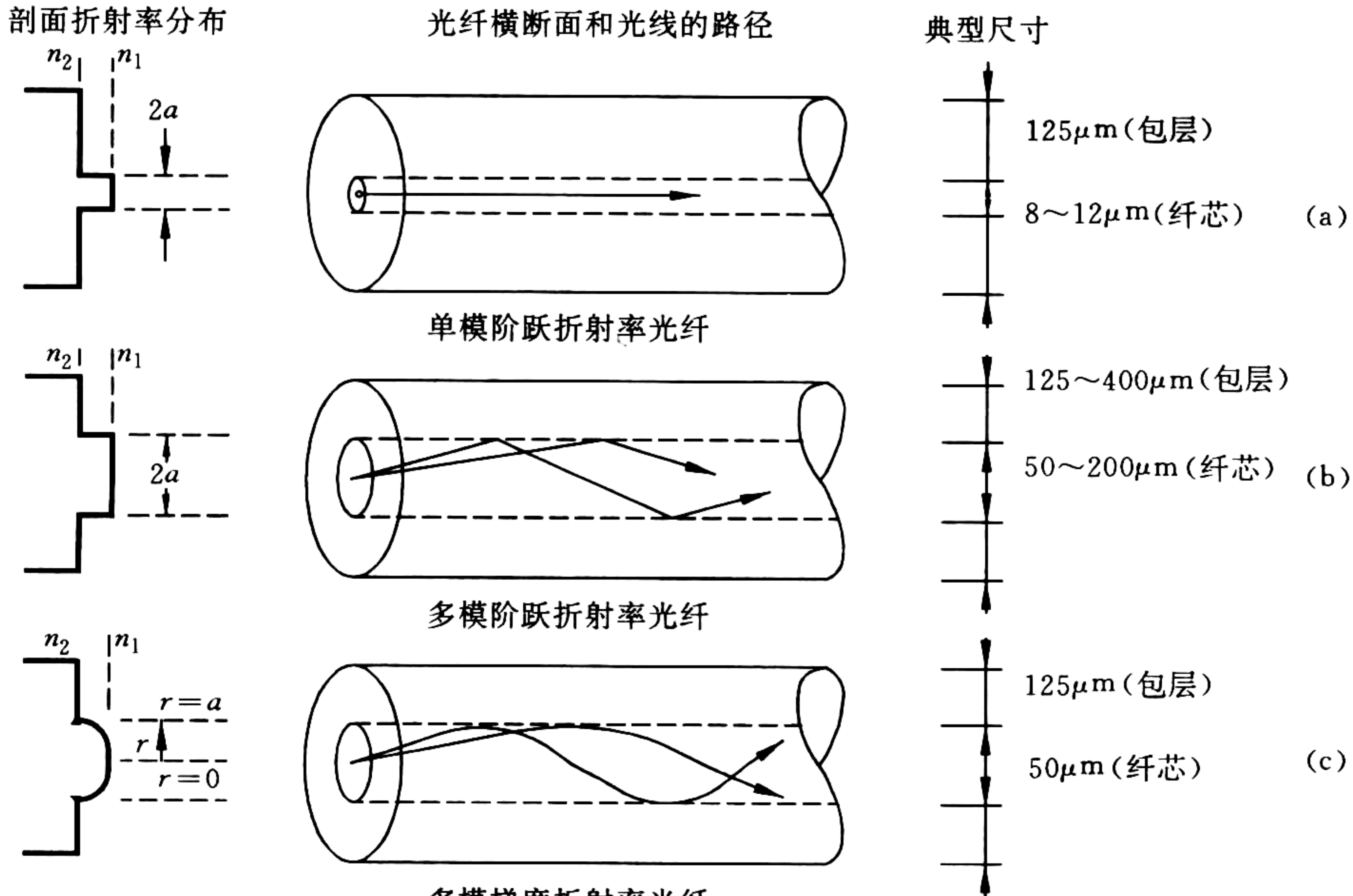
光波导的分类：

- 线性光波导
  - 纵向均匀的（正规光波导）
    - 横向分层均匀的（均匀光波导）
    - 横向非均匀的（非均匀光波导）
  - 纵向非均匀的（非正规光波导）
    - 缓变光波导
    - 迅变光波导
    - 突变光波导

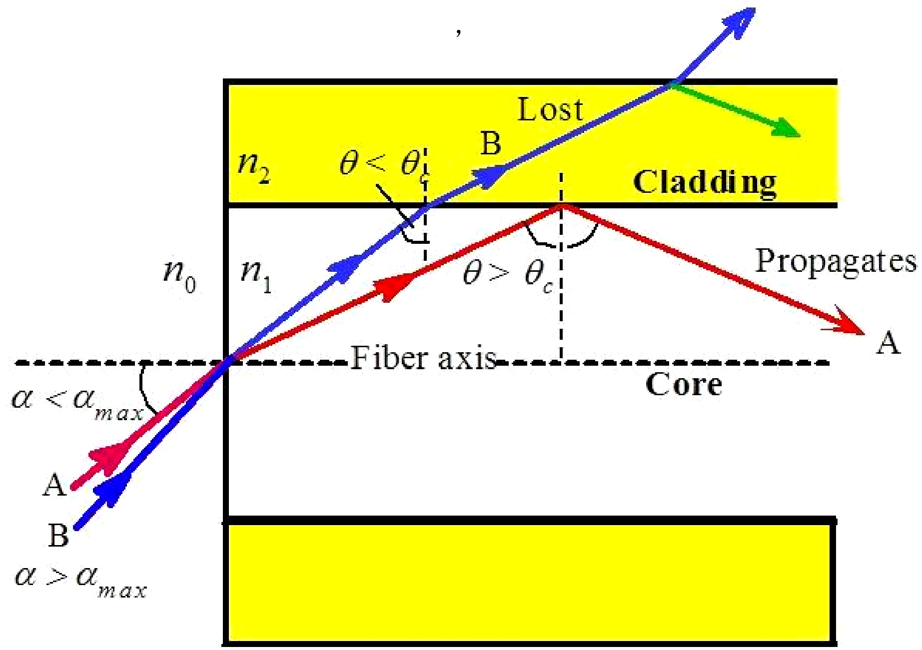
3.1.2 光纤



单根光纤结构简图



单模和多模光纤结构示意图

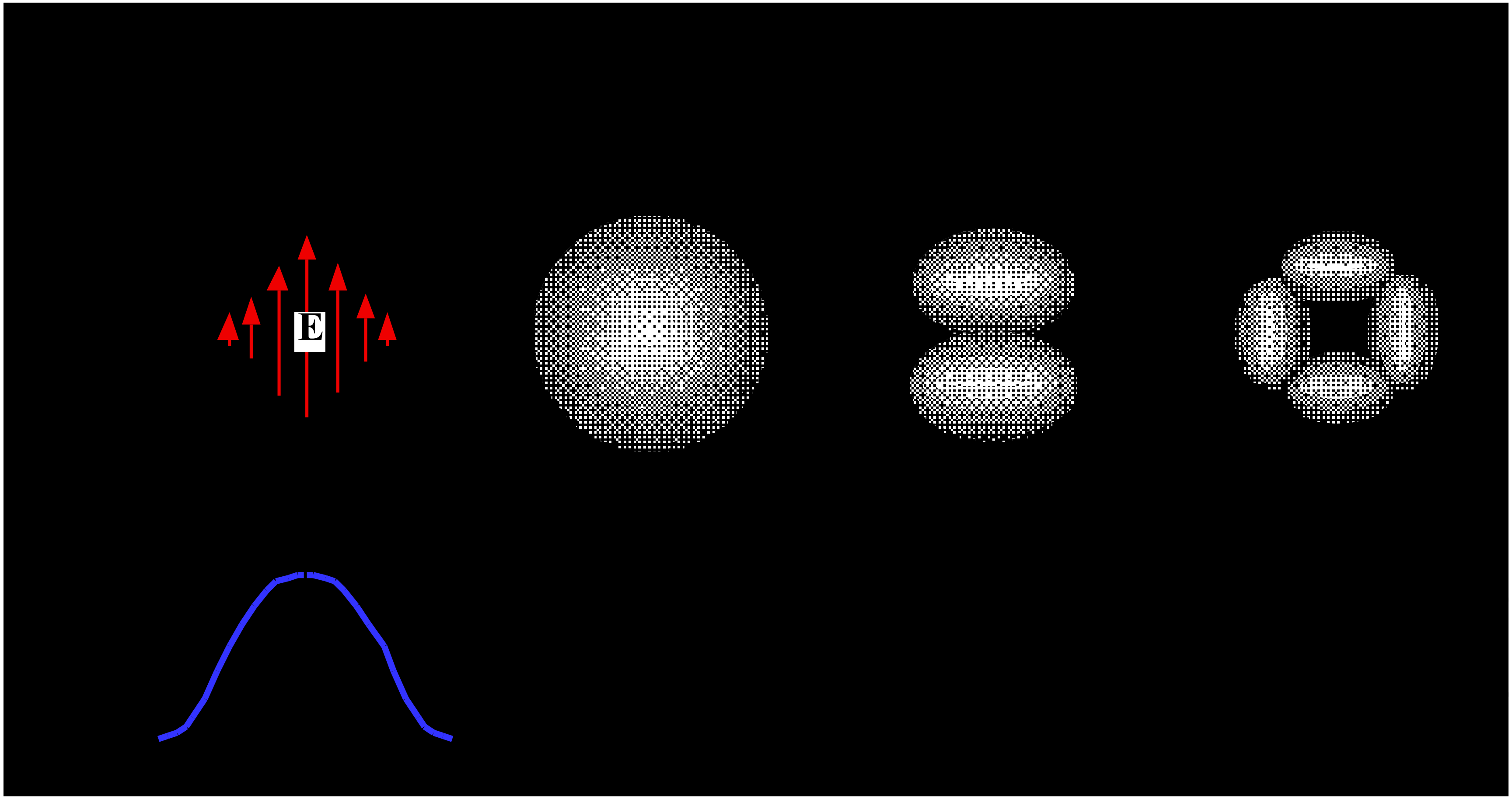


光纤数值孔径示意图

$$\sin\theta_C = \frac{n_2}{n_1} \qquad \theta \geq \theta_C = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

$$n_0 \sin\alpha_{\max} = n_1 \sin(90° - \theta_C) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$ $\alpha_{\max}$：孔径角

$$NA = n_0 \sin\alpha_{\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$ 数值孔径

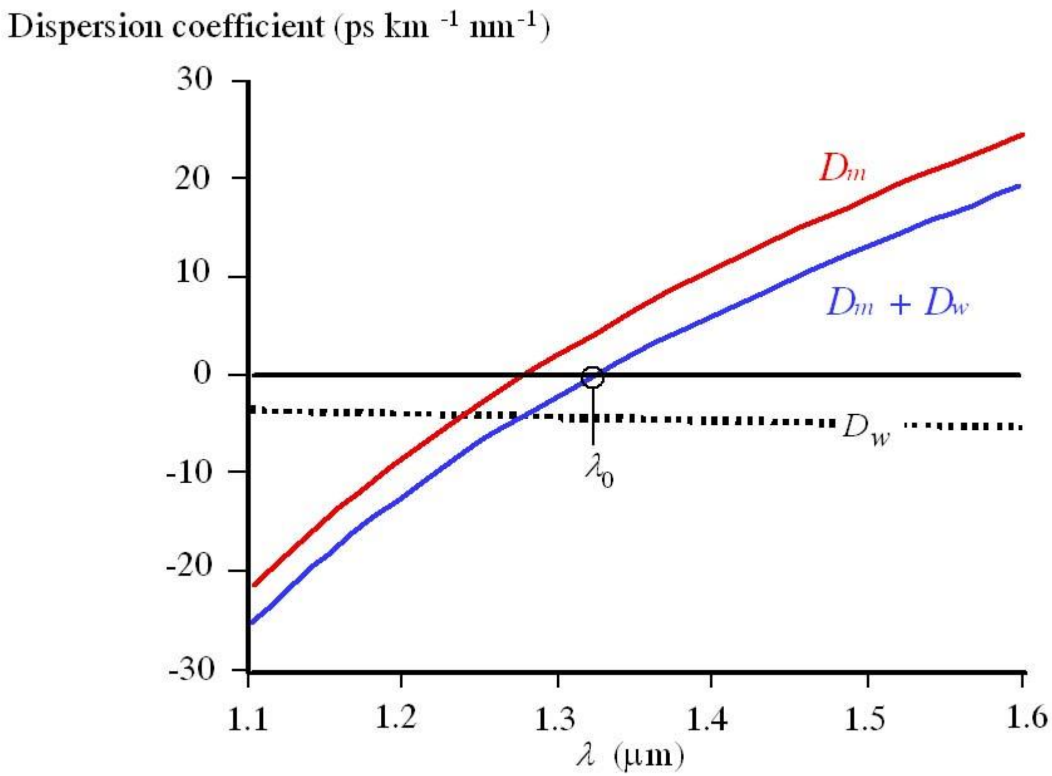


光纤中基模的电场分布和几个模式的光强分布

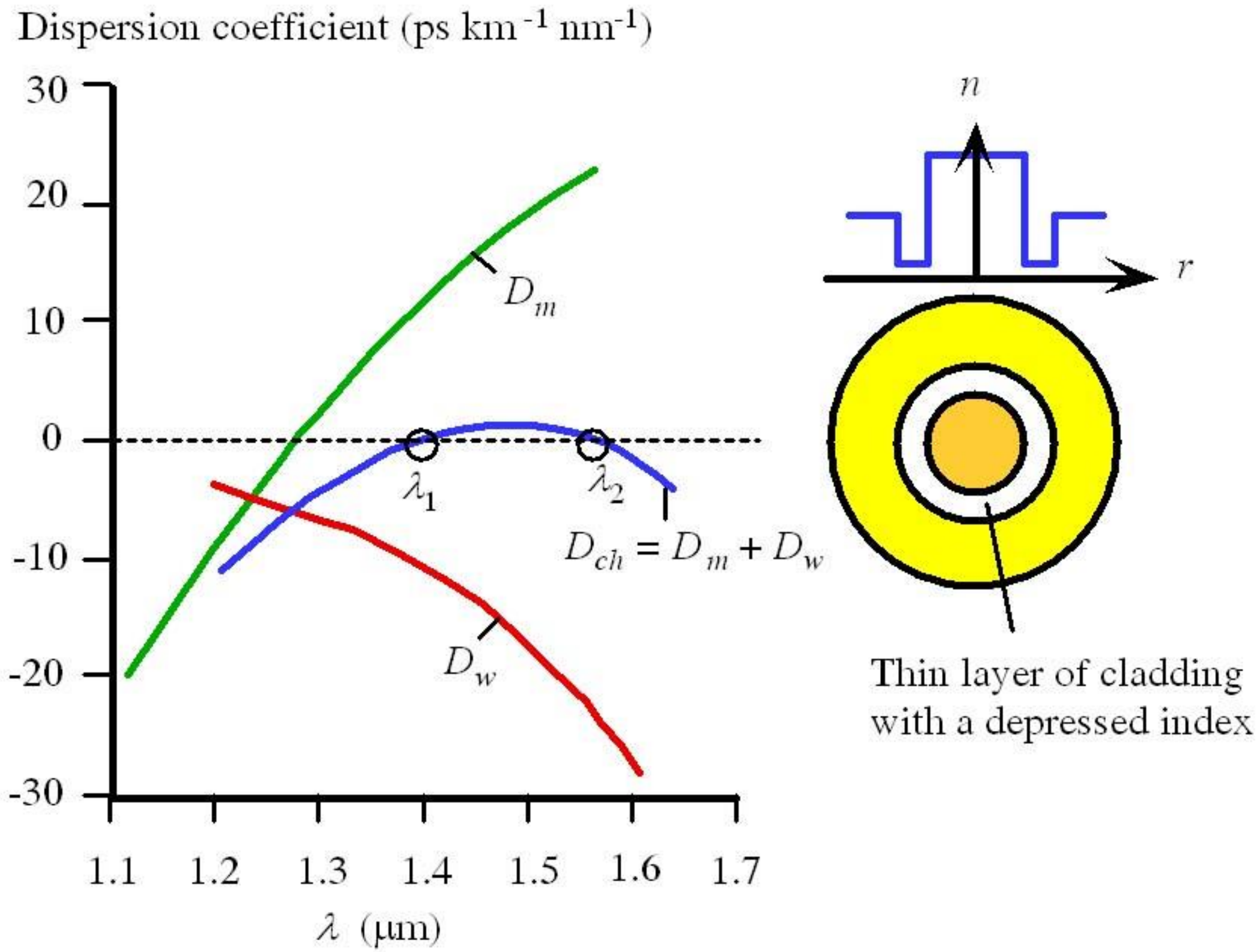
单模光纤中的色散

色散参数D：每公里的光纤由于单位谱宽所引起的脉冲展宽值
单位：ps/km·nm

$$\Delta T = DL\Delta\lambda$$



D_m：材料色散；D_W：波导色散


Dispersion coefficient (ps km^{-1} nm^{-1})
30
20
10
0
-10
-20
-30
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
1.7
λ (μm)
D_m
λ_1
λ_2
$D_{ch} = D_m + D_w$
D_w
n
r
Thin layer of cladding
with a depressed index

色散平坦光纤的色散

3.2 光波导的一般理论和波导模式

3.2.1 亥姆霍兹方程

3.2.2 光波导中的模式的概念

3.2.3 模式的分类

3.2.1　亥姆霍兹方程

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\qquad\qquad \nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=0\qquad\qquad \nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

考虑单色场　$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}(x,y,z)e^{-i\omega t}+c.c.$$

条件:

$\boldsymbol{J}=0$，$\rho=0$

$$\nabla\times\mathbf{E}=i\omega\mu_0\mathbf{H}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=-i\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H}=0$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\quad\Longrightarrow\quad\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E})=\nabla\varepsilon\cdot\mathbf{E}+\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E}=0$$

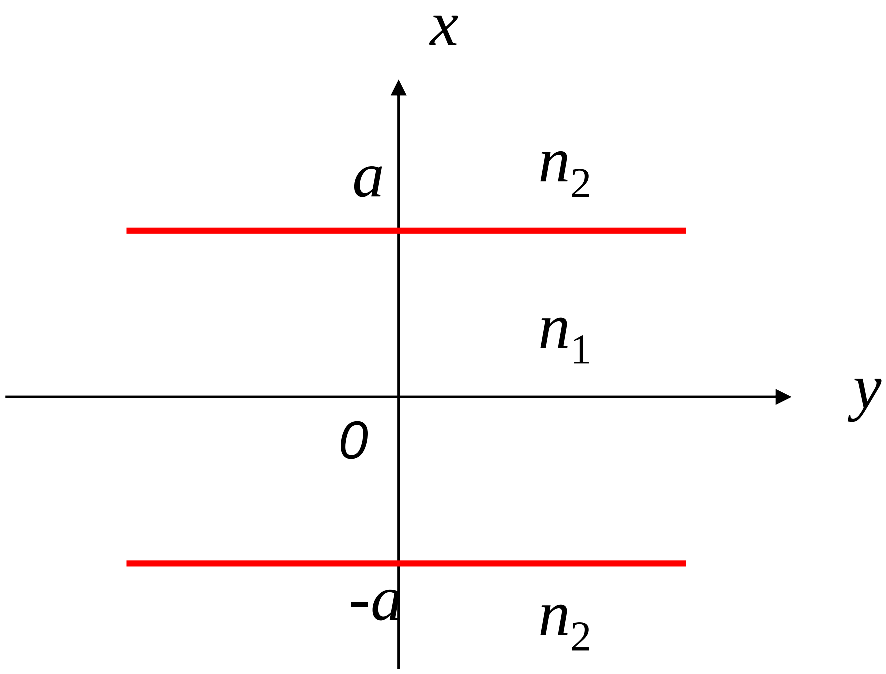
$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{-\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}$$

$$\nabla^2\mathbf{E}+k^2n^2\mathbf{E}+\nabla\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\right)=0$$

亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\mathbf{H}+k^2n^2\mathbf{H}+\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\times(\nabla\times\mathbf{H})=0$$

$$\nabla\varepsilon=0\text{ or }\nabla\varepsilon/\varepsilon\to0\quad\Longrightarrow\quad(\nabla^2+k^2n^2)\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{pmatrix}=0$$



平面光波导

3.2.2　光波导中模式的概念

正规光波导中：$$\varepsilon(x,y,z)=\varepsilon(x,y)$$

在正规光波导中，光场可表示为如下形式：

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\ \mathbf{h}\end{pmatrix}(x,y)e^{i(\beta z-\omega t)}$$

空间的分布：$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}(x,y,z)=\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\ \mathbf{h}\end{pmatrix}(x,y)e^{i\beta z}$$

模式的含义：

1. 数学含义。模式是满足亥姆霍兹方程的一个特解，并满足在波导中心有界、在边界趋于无穷时为零等边界条件。光波导中总的光场分布则是这些模式的线性组合：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix} a_i \mathbf{e}_i \\ b_i \mathbf{h}_i \end{pmatrix} (x, y) e^{i\beta_i z}$$

式中a_i,b_i是分解系数，表示该模式的相对大小。一系列模式可以看成一个光波导的场分布的空间谱。

2. 稳定性。一个模式沿纵向传输时，其场分布形式不变，即沿z方向有稳定的分布。

3. 有序性。模式是波动方程的一系列特征解，是离散的、可以排序的。

4. 叠加性。光波导中总的场分布是这些模式的线性叠加。

5. 正交性。一个正规光波导的不同模式之间满足正交关系。设$(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$是第i次模，$(\boldsymbol{E}', \boldsymbol{H}')$为第k次模，即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{h}_i \end{pmatrix}(x,y)e^{i\beta_i z} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{H}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_k \\ \mathbf{h}_k \end{pmatrix}(x,y)e^{i\beta_k z}$$

则可以证明下式成立

$$\int_{A\to\infty} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{h}_k^*) \cdot dA = \int_{A\to\infty} (\mathbf{e}_k^* \times \mathbf{h}_i) \cdot dA = 0 \quad (i \neq k)$$

式中A为考虑的横截面

3.2.3　模式的分类

根据纵向分量的情况，通常把模式分为三类：

1. TEM模：模式只有横向分量，而无纵向分量，即 $\boldsymbol{e}_z = 0$且$\boldsymbol{h}_z = 0$。

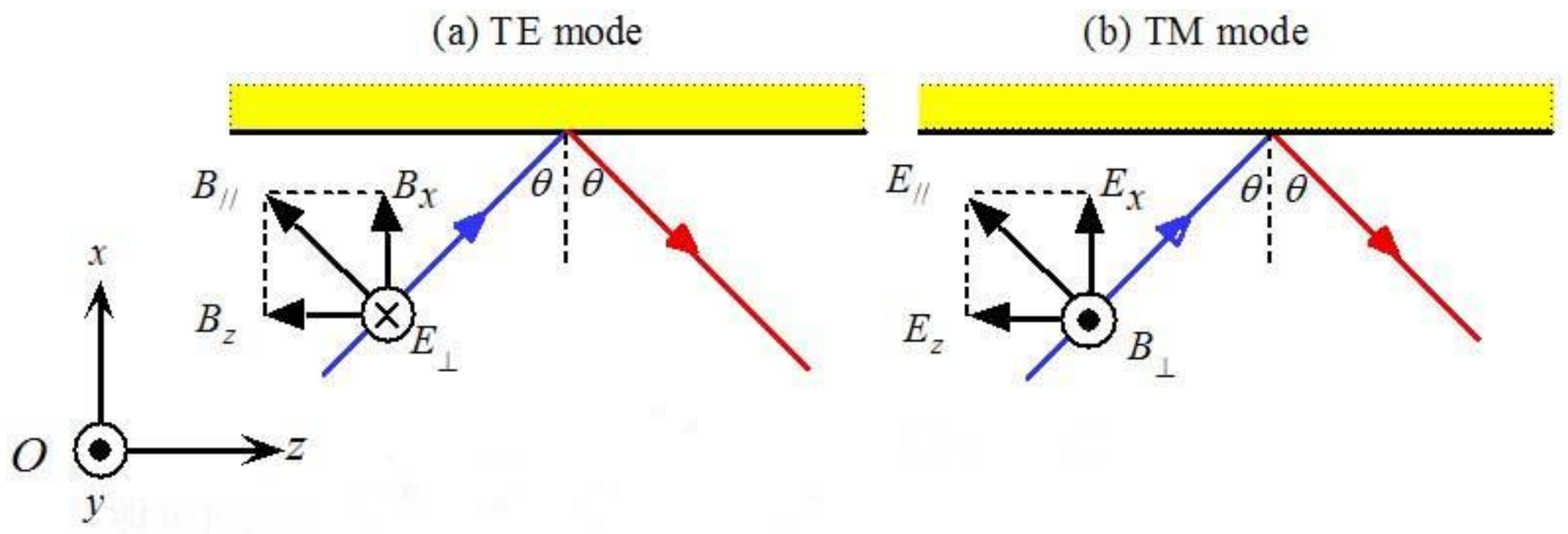
   可以证明，在光波导中不可能存在TEM模

2. TE模或TM模：模式只有一个纵向分量。对于TE模有$\boldsymbol{e}_z = 0$但$\boldsymbol{h}_z \neq 0$；对于TM模有$\boldsymbol{h}_z = 0$但$\boldsymbol{e}_z \neq 0$。

3. HE模或EH模：模式的两个纵向分量均不为零，即 $\boldsymbol{e}_z \neq 0$且$\boldsymbol{h}_z \neq 0$。

TE模：Transverse electric field mode

TM模：Transverse magnetic field mode



TE模和TM模示意图（入射面为屏幕面）

3. 3　平面光波导

3.3.1 基本概念

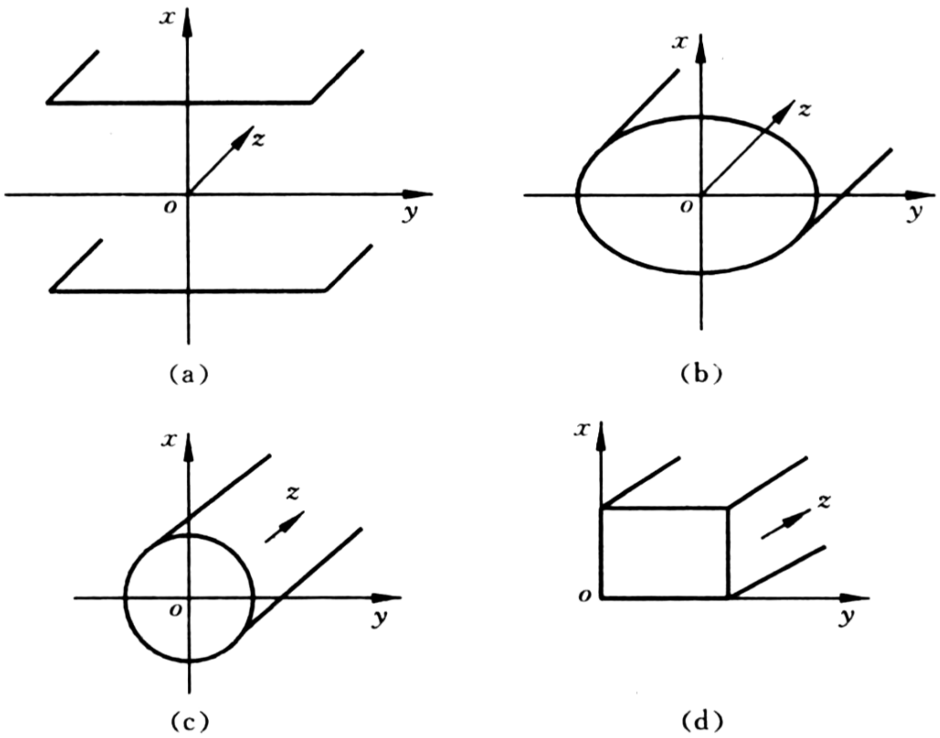
3.3.2 模式场

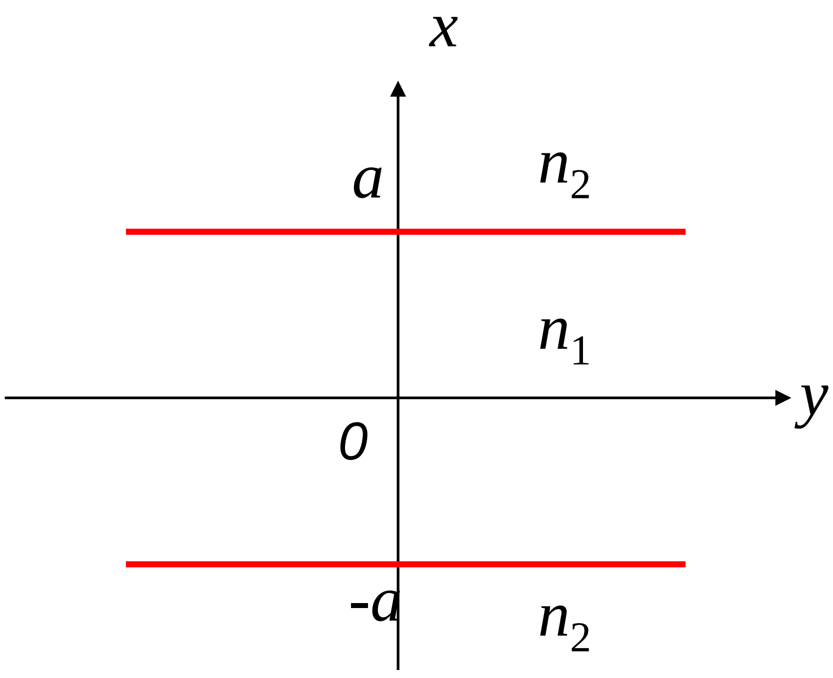
3.3.3 特征方程

3.3.4 截止条件、单模传输及远离截止频率的情况

3.3　平面光波导

3.3.1 基本概念





均匀光波导：沿横截面分布区域均匀

平面光波导

3.3.2 模式场

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\ \mathbf{h}\end{pmatrix}(x)e^{i(\beta_z z+\beta_y y)}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\ \mathbf{h}\end{pmatrix}(x)e^{i\beta_z z} \qquad (\nabla^2+k^2n^2)\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}=0$$

$$\frac{d^2\mathbf{e}}{dx^2}+(k^2n^2-\beta^2)\mathbf{e}=0$$

$$\frac{d^2\mathbf{h}}{dx^2}+(k^2n^2-\beta^2)\mathbf{h}=0$$

模式场可以分解为纵向分量与横向分量之和:

$$\begin{cases}\mathbf{e}=\mathbf{e}_t+\mathbf{e}_z\\ \mathbf{h}=\mathbf{h}_t+\mathbf{h}_z\end{cases}$$

$$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e}_t(x) + \boldsymbol{e}_z(x)]e^{i\beta_z z} \qquad \boldsymbol{H} = [\boldsymbol{h}_t(x) + \boldsymbol{h}_z(x)]e^{i\beta_z z}$$

$$\nabla = \nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \nabla_t = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}$$ (x,y平面内矢量)

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = i\omega\mu_0\boldsymbol{H}$$

$$\left(\nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times [\boldsymbol{e}_t(x) + \boldsymbol{e}_z(x)]e^{i\beta_z z} = i\omega\mu_0[\boldsymbol{h}_t(x) + \boldsymbol{h}_z(x)]e^{i\beta_z z}$$

$\nabla_t \times \boldsymbol{e}_t(x) \rightarrow$ z分量 $\quad \nabla_t \times \boldsymbol{e}_z(x) \rightarrow$ t分量 $\quad \hat{z} \times \boldsymbol{e}_t(x) \rightarrow$ t分量

方程两边z分量: $\nabla_t \times \boldsymbol{e}_t(x)e^{i\beta_z z} = i\omega\mu_0\boldsymbol{h}_z(x)e^{i\beta_z z}$

$$\hat{x} \times \frac{d\boldsymbol{e}_t}{dx} = i\omega\mu_0\boldsymbol{h}_z$$

纵向分量和横向分量的关系：

$$
\begin{cases}
\mathbf{x}\times\dfrac{d\mathbf{e}_t}{dx}=i\omega\mu_0\mathbf{h}_z \\
\mathbf{x}\times\dfrac{d\mathbf{h}_t}{dx}=-i\omega\varepsilon\mathbf{e}_z \\
\mathbf{x}\times\dfrac{d\mathbf{e}_z}{dx}+i\beta\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{e}_t=i\omega\mu_0\mathbf{h}_t \\
\mathbf{x}\times\dfrac{d\mathbf{h}_z}{dx}+i\beta\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{h}_t=-i\omega\varepsilon\mathbf{e}_t
\end{cases}
$$

我们的任务：

1. 分析可能存在哪些模式和具体的模式分布形式；
2. 求出该模式的传输常数的表达式。

通常的解法：

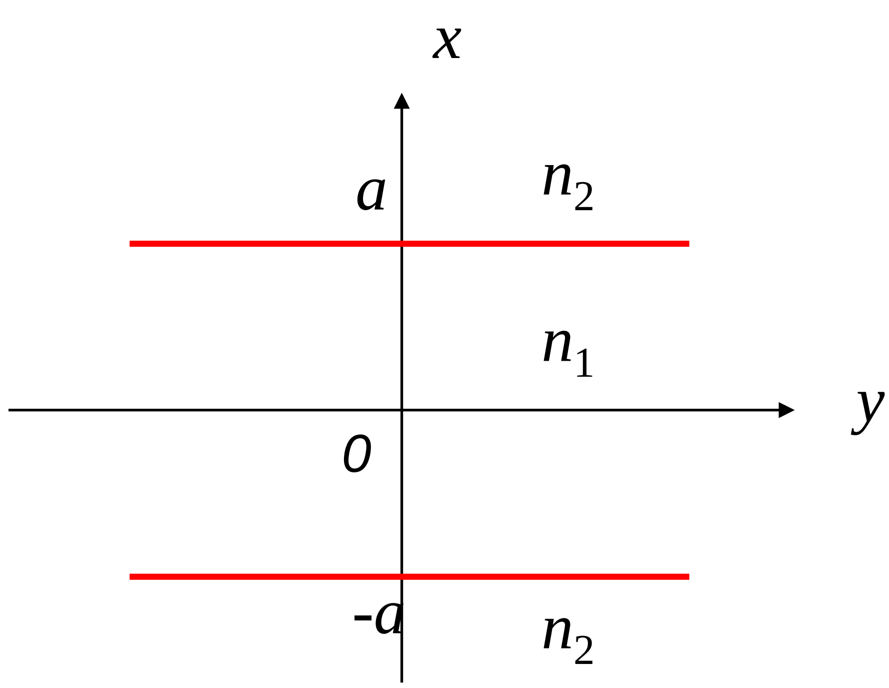
1. 将波动方程中的纵向分量和横向分量分解，
2. 化为标量常微分方程，
3. 代入边界条件，即可求出模式场。

纵向分量和横向分量的关系：

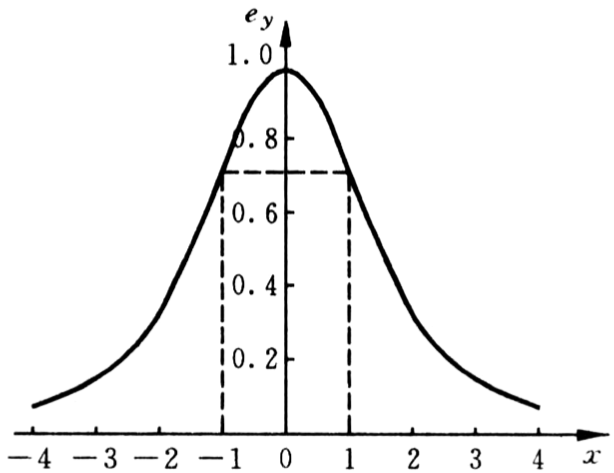
$$
\begin{cases}
\mathbf{x}\times\dfrac{d\mathbf{e}_t}{dx}=i\omega\mu_0\mathbf{h}_z & (a)\\[2ex]
\mathbf{x}\times\dfrac{d\mathbf{h}_t}{dx}=-i\omega\varepsilon\mathbf{e}_z & (b)\\[2ex]
\mathbf{x}\times\dfrac{d\mathbf{e}_z}{dx}+i\beta\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{e}_t=i\omega\mu_0\mathbf{h}_t & (c)\\[2ex]
\mathbf{x}\times\dfrac{d\mathbf{h}_z}{dx}+i\beta\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{h}_t=-i\omega\varepsilon\mathbf{e}_t & (d)
\end{cases}
$$

e_y满足标量方程：$$\frac{d^2 e_y}{dx^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) e_y = 0$$

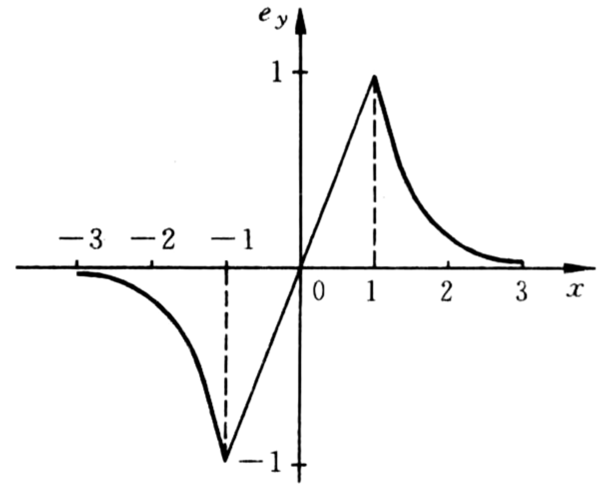
其解取正弦、余弦或指数函数形式



包层$x \to \infty$时$e_y \to 0$



(a)



(b)

偶模　　　　奇模

芯层：（余弦形式）　　　　（正弦形式）

包层：只能取e^{-x}形式

设TE偶模芯层：$e_y = b_1 cos c_1 x$

$$\frac{d^2 e_y}{dx^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) e_y = 0$$

TE偶模的表达式：

$$e_y=\begin{cases} b_1\cos\left(\sqrt{k^2n_1^2-\beta^2}\,x\right) & |x|<a \\ b_2\exp\left(-\sqrt{\beta^2-k^2n_2^2}\,x\right) & |x|>a \end{cases}$$

$$h_z=\begin{cases} \dfrac{b_1\sqrt{k^2n_1^2-\beta^2}}{\omega\mu_0}\sin\left(\sqrt{k^2n_1^2-\beta^2}\,x\right) & |x|<a \\ \dfrac{b_2\sqrt{\beta^2-k^2n_2^2}}{\omega\mu_0}\exp\left(-\sqrt{\beta^2-k^2n_2^2}\,x\right) & |x|>a \end{cases}$$

定义： $U=\sqrt{k^2n_1^2-\beta^2}\,a$ $\quad W=\sqrt{\beta^2-k^2n_2^2}\,a$

$\rho=x/a$

模式场

(a) $e_x=e_z=h_y=0$

	TE 偶模		TE 奇模	
	芯层	包层	芯层	包层
e_y	$\frac{\cos(U\rho)}{\cos U}$	$\frac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$	$\frac{\sin(U\rho)}{\sin U}$	$\frac{\rho}{\lvert\rho\rvert}\frac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$
h_x	$-\frac{\beta}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\cos(U\rho)}{\cos U}$	$-\frac{\beta}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$	$-\frac{\beta}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\sin(U\rho)}{\sin U}$	$-\frac{\beta}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\rho}{\lvert\rho\rvert}\frac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$
h_z	$\frac{\mathrm{i}W}{ka}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\sin(U\rho)}{\sin U}$	$\frac{\mathrm{i}W}{ka}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\rho}{\lvert\rho\rvert}\frac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$	$\frac{\mathrm{i}W}{ka}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\cos(U\rho)}{\cos U}$	$\frac{\mathrm{i}W}{ka}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$

(b) $h_x=h_z=e_y=0$

	TM 偶模		TM 奇模	
	芯层	包层	芯层	包层
e_x	$\frac{\cos(U\rho)}{\cos U}$	$\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$	$\frac{\sin(U\rho)}{\sin U}$	$\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{\rho}{\lvert\rho\rvert}\frac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$
h_y	$\frac{kn_1^2}{\beta}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\cos(U\rho)}{\cos U}$	$\frac{kn_1^2}{\beta}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$	$\frac{kn_1^2}{\beta}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\sin(U\rho)}{\sin U}$	$\frac{kn_1^2}{\beta}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\rho}{\lvert\rho\rvert}\frac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$
e_z	$-\frac{\mathrm{i}W}{a\beta}\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{\sin(U\rho)}{\sin U}$	$-\frac{\mathrm{i}W}{a\beta}\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{\rho}{\lvert\rho\rvert}\frac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$	$-\frac{\mathrm{i}W}{a\beta}\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{\cos(U\rho)}{\cos U}$	$-\frac{\mathrm{i}W}{a\beta}\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$

平面光波导中不存在HE，EH模的证明：

$h_z,\ e_y,\ h_x$

$$
\begin{cases}
\dfrac{de_y}{dx} = i\omega\mu_0 h_z \\
\dfrac{dh_y}{dx} = -i\omega\varepsilon e_z \\
-\dfrac{de_z}{dx} + i\beta e_x = i\omega\mu_0 h_y \\
i\beta e_y = -i\omega\mu_0 h_x \\
-\dfrac{dh_z}{dx} + i\beta h_x = -i\omega\varepsilon e_y \\
i\beta h_y = -i\omega\varepsilon e_x
\end{cases}
$$

$e_z,\ h_y,\ e_x$

3.3.3　特征方程

$$U = \sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}\, a \qquad W = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}\, a$$

β 的大小由边界条件所确定的方程来决定，这个方程称为特征方程。

TE偶模：

$$e_y = \begin{cases} b_1 \cos\left(\sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}\, x\right) & |x| < a \\ b_2 \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}\, x\right) & |x| > a \end{cases}$$

$x \rightarrow a$

$$e_y = b_1 \cos\left(\sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}\, a\right)$$

$$e_y = b_2 \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}\, a\right)$$

e_y连续：

$$b_1 \cos\left(\sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}\, a\right) = b_2 \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}\, a\right)$$

h_z连续：

$$b_1 \sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2} \sin\left(\sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}\, a\right) = b_2 \sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2} \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}\, a\right)$$

$$\sqrt{k^2n_1^2-\beta^2}\tan\left(\sqrt{k^2n_1^2-\beta^2}a\right)=\sqrt{\beta^2-k^2n_2^2}$$

两端乘a： $$\sqrt{k^2n_1^2-\beta^2}a\tan\left(\sqrt{k^2n_1^2-\beta^2}a\right)=\sqrt{\beta^2-k^2n_2^2}a$$

定义： $$U^2=(k^2n_1^2-\beta^2)a^2$$

$$W^2=(\beta^2-k^2n_2^2)a^2$$

TE模的特征方程： $$U\tan U=W$$

$$V^2 = U^2 + W^2 = k^2(n_1^2 - n_2^2)a^2$$

V的物理意义：

$$V^2 = k^2(n_1^2 - n_2^2)a^2$$ V正比于真空中的波数

V是一个表征频率的量，称为归一化频率，或称为该光波导的波导参量。

U，W的物理意义：

$$\frac{d^2e_y}{dx^2}+(k^2n^2-\beta^2)e_y=0 \xrightarrow{\rho = x/a} \begin{cases} \dfrac{d^2e_y}{d\rho^2}+U^2e_y=0 & |\rho|<1 \\ \dfrac{d^2e_y}{d\rho^2}-W^2e_y=0 & |\rho|>1 \end{cases}$$

$$e_y=\begin{cases} b_1\cos(U\rho) & |\rho|<1 \\ b_2\exp(-W|\rho|) & |\rho|>1 \end{cases}$$

U，W是芯层和包层归一化的横向参数，故分别称为这个模式在芯层和包层的模式参量。

1/W为包层的归一化透入深度

平面光波导特征方程

模　式	TE 模		TM 模	
	偶　模	奇　模	偶　模	奇　模
特征方程	$W=U\tan U$	$W=-U\cot U$	$n_1^2W=n_2^2U\tan U$	$n_1^2W=-n_2^2U\cot U$

3.3.4 截止条件和单模传输

截止：当W→0时，意味着模式的场不断地向包层扩展，最后能量分散于广大的空间，不能传输。

截止条件：使得W→0的V值。

$$V = ka\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

V值小于等于某个模式截止条件时，该模式截止。

对TE偶模 $$U\tan U = W$$

$$\downarrow$$

$$V\tan V = 0$$

$$V = m\pi \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

对TE奇模 $$V\cot V = 0$$

$$V = (m + \frac{1}{2})\pi \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

截止条件 $$V = \frac{k}{2}\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

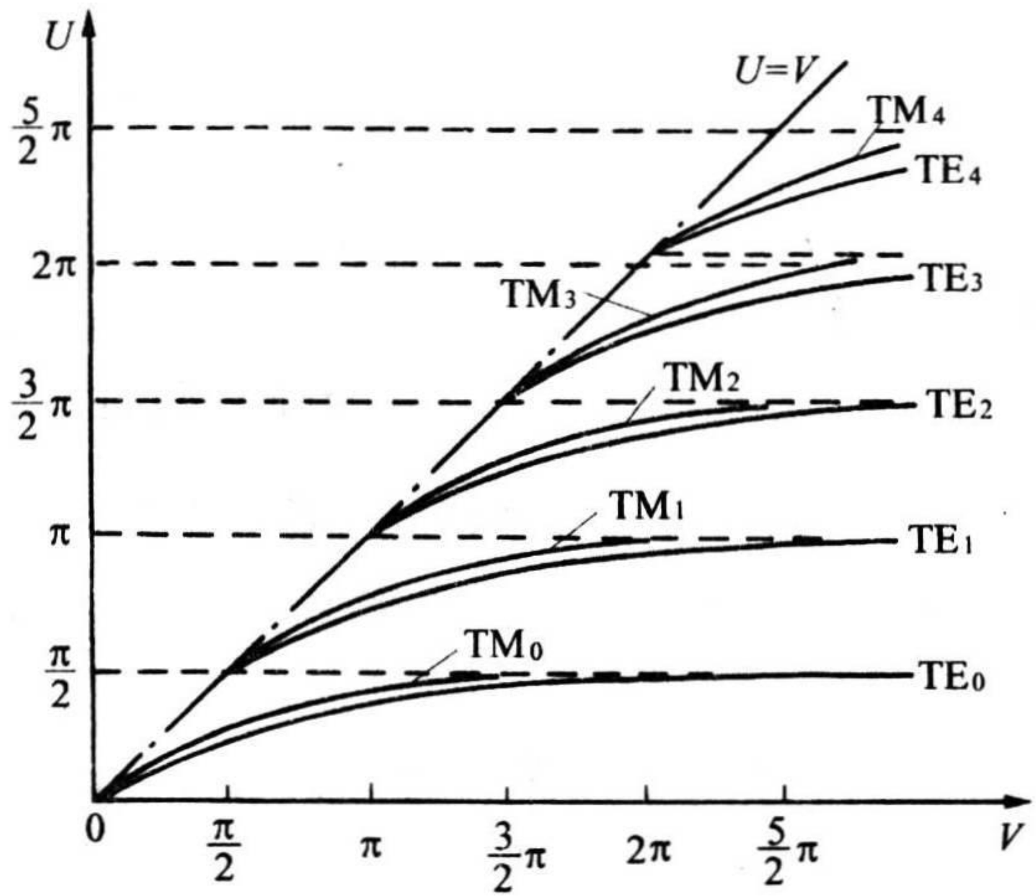
k作为序号，偶模：k为偶数；奇模：k为奇数。

k = 0：基模，截止频率V = 0，只要V > 0，基模就不会截止

$$V = ka\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

在0 < V < π/2时，只有基模在光波导中传输，这时称为光波导处于单模传输状态。

可以有TE基模和TM基模。


U
U=V
$\frac{5}{2}\pi$
2π
$\frac{3}{2}\pi$
π
$\frac{\pi}{2}$
TM$_4$
TE$_4$
TM$_3$
TE$_3$
TM$_2$
TE$_2$
TM$_1$
TE$_1$
TM$_0$
TE$_0$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π
$\frac{5}{2}\pi$
V

平面光波导$U = f(V)$图

3.4　波导模的耦合方法

3.4.1　端面耦合法

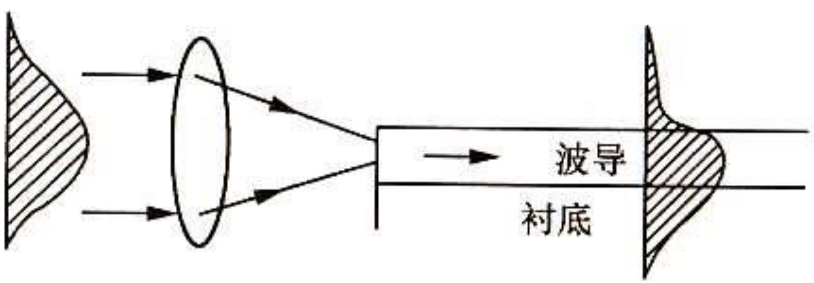
3.4.2　棱镜耦合法

3.4.3　光栅耦合法

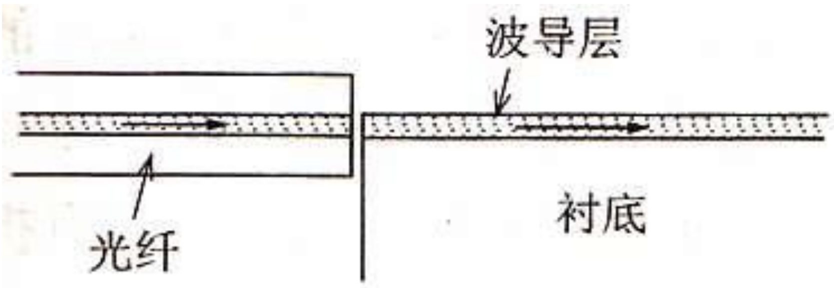
3.4.4　其它方法

3.4.1 端面耦合法（end coupling method）

在与波导光行进方向垂直的波导端面上，入射场分布接近波导模场分布的光波，又称为end-fire或head-on。



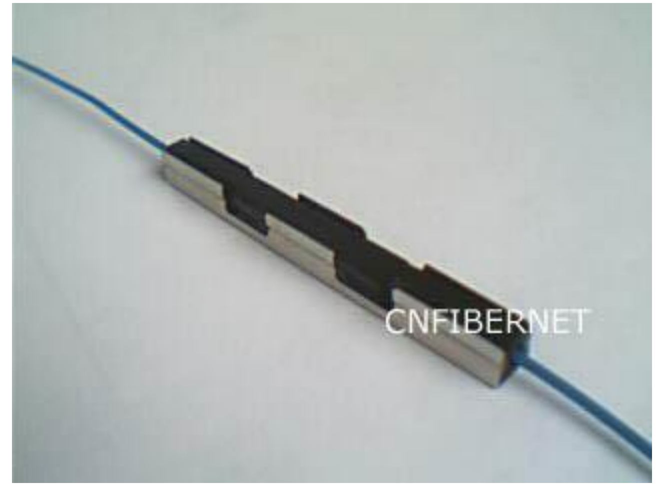
远场光



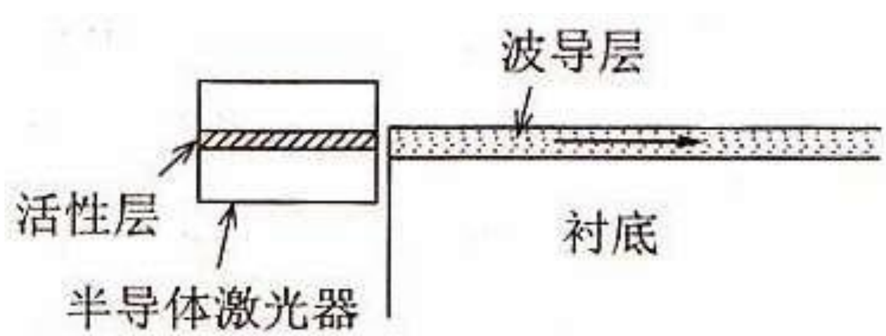
波导间耦合

耦合效率影响因素：1.端面质量，2.模式匹配。

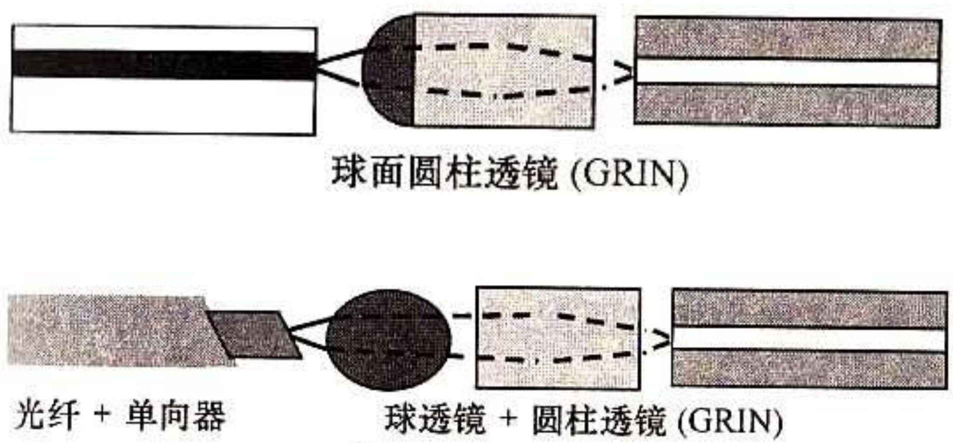
光纤连接器



光纤接续子



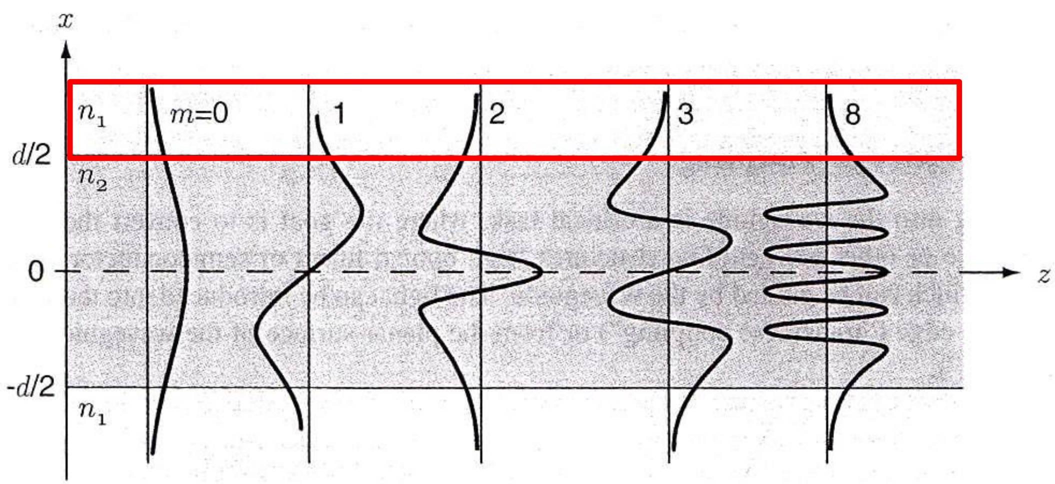
半导体激光器与光波导直接耦合

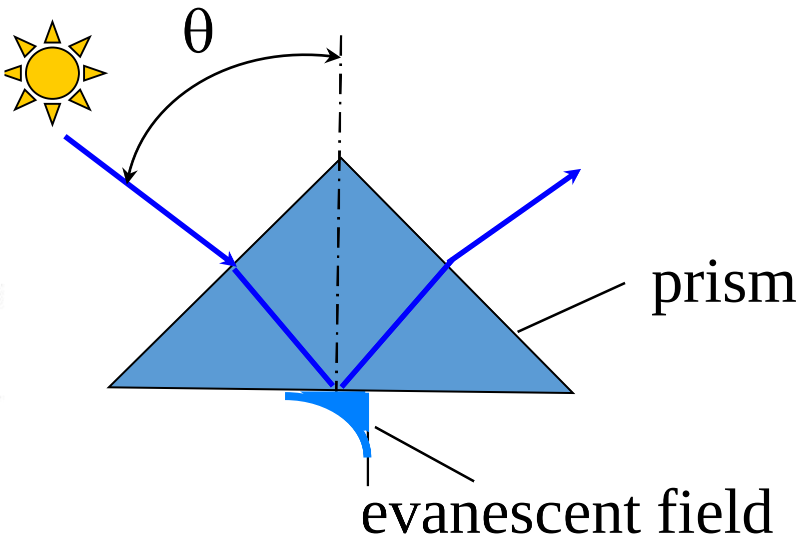


模式间通过透镜耦合

3.4.2 棱镜耦合法

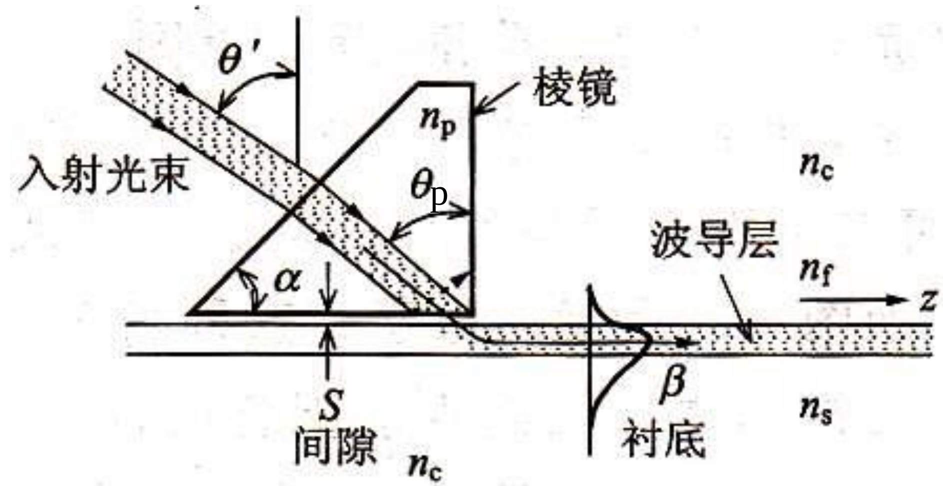
利用高折射率的棱镜，将入射光与导波模之间实现相位匹配，以实现波导光激励的方法。





包层中只有位于隐失场范围内的光波才有可能耦合到波导中

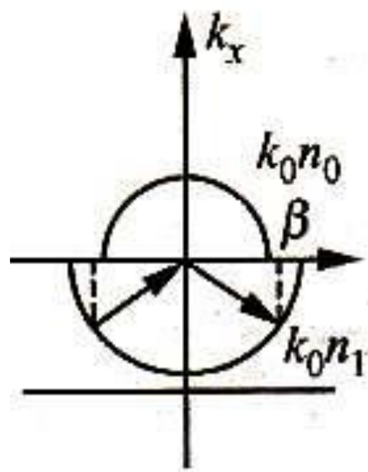
棱镜耦合:

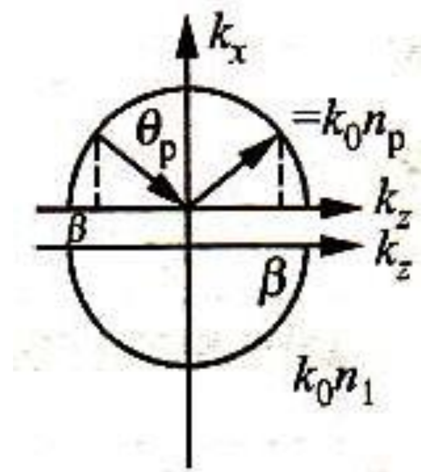


无棱镜:

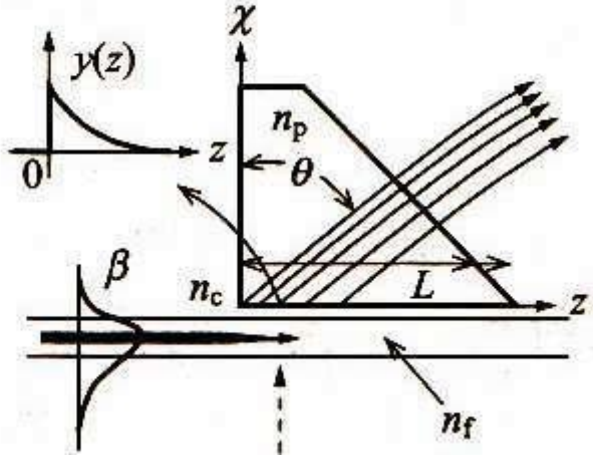
有棱镜:

n$_1$:芯层
n$_0$:包层

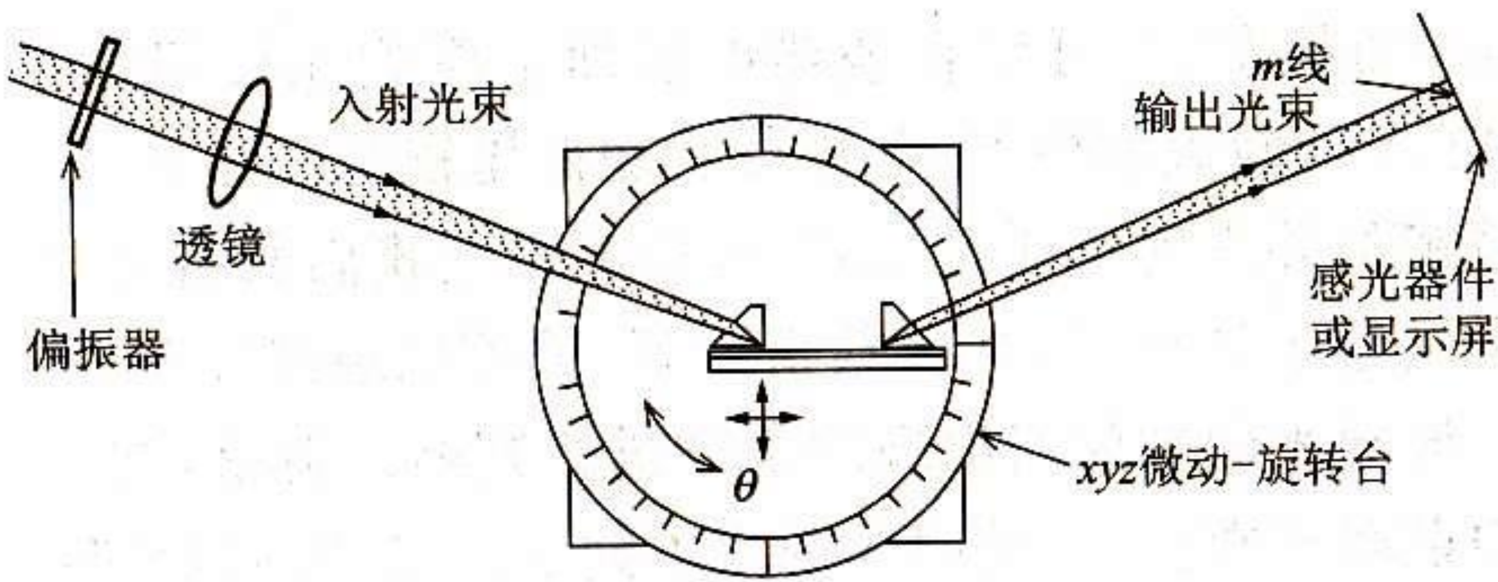




相位匹配

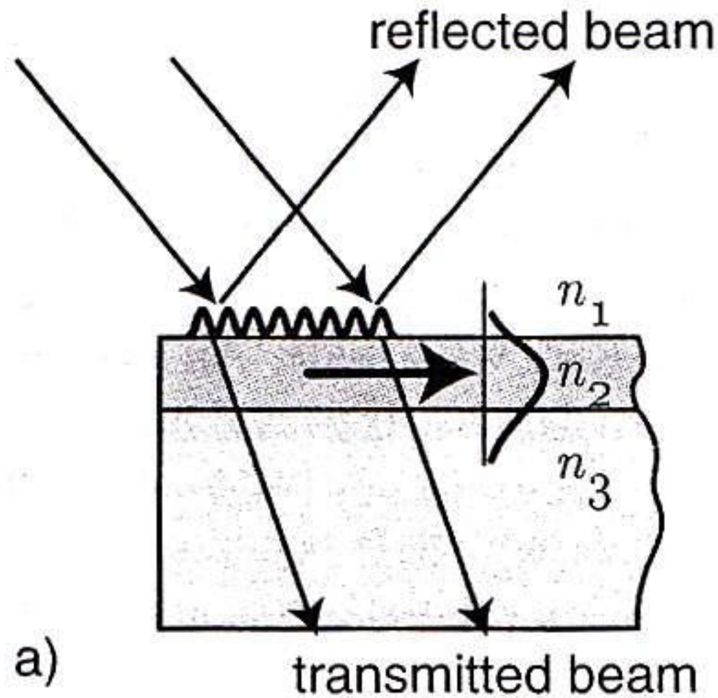


棱镜耦合输出



用棱镜耦合法激励光波导的实验装置

3.4.3　光栅耦合法

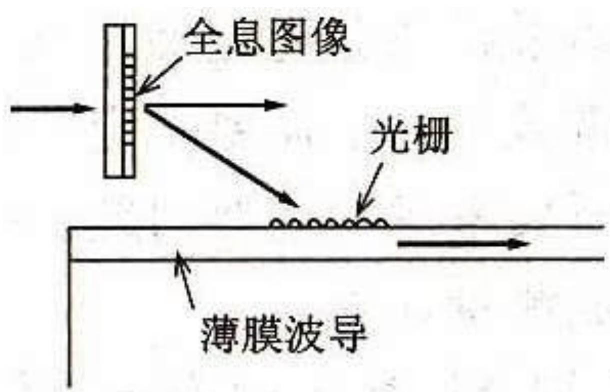


光栅耦合器

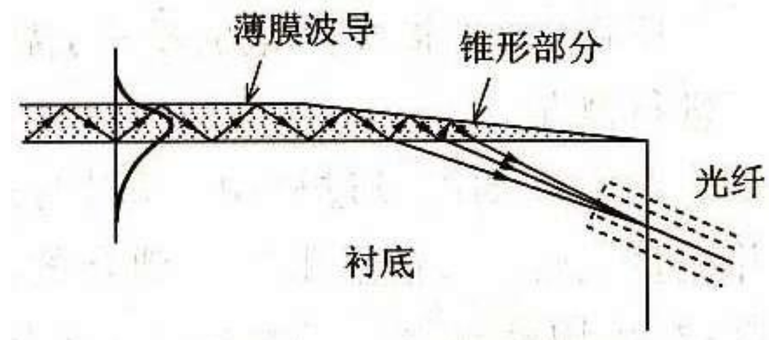
两种等价的理解：

1. 入射光被光栅衍射，衍射光满足光波导的相位匹配条件。
2. 光栅对波导模式产生微扰，使入射光满足相位匹配条件。

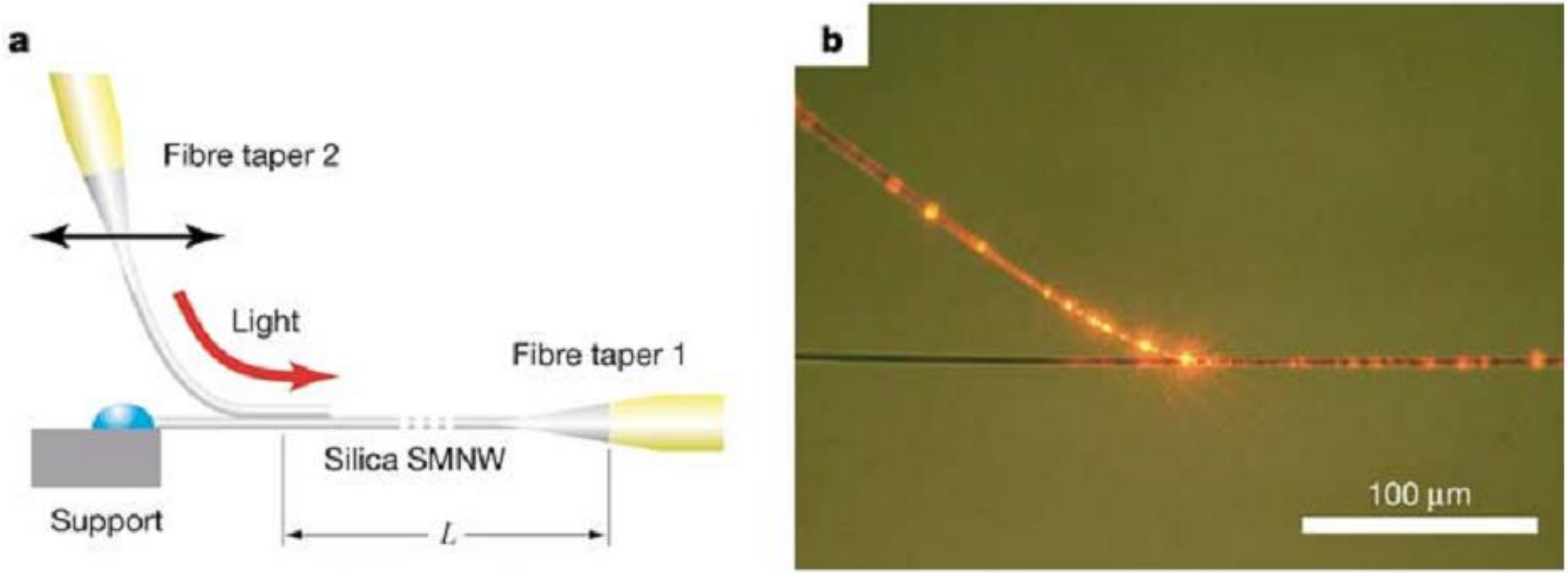
3.4.4 其它方法



全息耦合器



锥形耦合器


a
Fibre taper 2
Light
Fibre taper 1
Silica SMNW
Support
L
b
100 µm

纳米光纤的光耦合

补充

基本的集成光子学元件