第三章 导波光学

3.1 导波光学基础

3.1.1 平面波导中的光线

平面波导的结构如图 3.1 所示，中心区域为芯层，折射率为 n_1，厚度为 2a，两边为包层，折射率为 n_2。定义光的传播方向为纵向，通常选为 z 方向。

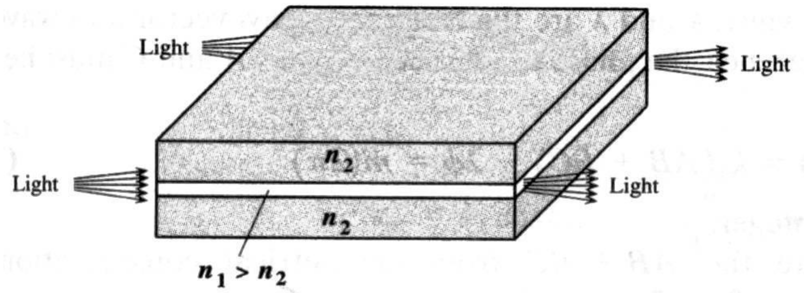

图 3.1 光波导的结构示意图

入射角超过临界角的光线能够在波导中发生全反射，但并不是所有这样的光线都能稳定地传播，由于干涉，只有相干相长的光线形成稳定的传播模式。下面我们按照几何光学原理来分析一下波导中稳定光线的条件，即波导条件。

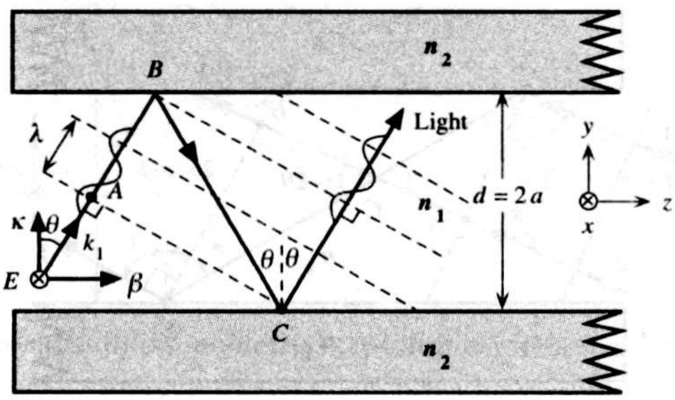

图 3.2 波导中的光线

如图 3.2 中所示，光在波导中从 A 点到 B、C 等点传播，C 点的波前和 A 点的波前重合，光波与它自身干涉。为了稳定传播，A 点和 C 点必须同相，发生相干相长，也就是说两点的相位差必须是 2π的整数倍。A 点和 C 点间的光程差为 AB + BC，光波发生全反射时还将引入相移ϕ，ϕ依赖于入射角θ和偏振。设 k 和λ分别为真空中的波数和波长，芯层中波数为 $k_1 = kn_1 = 2\pi n_1 / \lambda$，对于相长干涉，A 点和 C 点间的相差

$$\Delta\phi(AC) = k_1(AB + BC) - 2\phi = m(2\pi) \qquad (3.1)$$

这里整数 m = 0, 1, 2, …。$BC = d / \cos\theta$，$AB = BC\cos(2\theta)$，则

$$AB + BC = BC\cos(2\theta) + BC = BC[(2\cos^2\theta - 1) + 1] = 2d\cos\theta$$

波导中传播的光波需要满足

$$k_1[2d\cos\theta] - 2\phi = m(2\pi) \qquad (3.2)$$

由于ϕ依赖于入射角θ和偏振，对于给定的整数 m，只有一个确定的入射角θ_m和相移ϕ_m满足方程 3.2。方程两边同除以 2 得到波导条件

$$\left[\frac{2\pi n_1(2a)}{\lambda}\right]\cos\theta_m-\phi_m=m\pi \tag{3.3}$$

这里ϕ_m表示ϕ是入射角θ_m的函数。

上面的推导并没有限制入射角θ的大小，也可以用两条平行的入射光推出相同的结果，如图 3.3 所示。入射光 1 和 2 最初是同相的，入射光 1 经过两次全反射后再次与 2 平行，B 点和 B′点的相差为$k_1(AB-A'B')-2\phi$，为了稳定传播，相差必须为 m(2π)，同样可以得到波导条件式(3.3)。

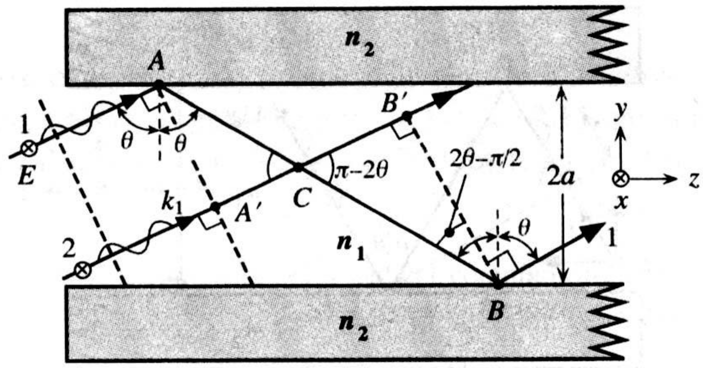

图 3.3 两条最初同相的平行光在波导中的光路

我们可以将波矢 k_1 分解成沿 z 轴方向和垂直于 z 轴方向的两个传播常数β和κ，如图 3.2 所示，θ_m满足波导条件，我们定义

$$\beta_m=k_1\sin\theta_m=\left(\frac{2\pi n_1}{\lambda}\right)\sin\theta_m \tag{3.4}$$

和

$$\kappa_m=k_1\cos\theta_m=\left(\frac{2\pi n_1}{\lambda}\right)\cos\theta_m \tag{3.5}$$

由波导条件可知，不同的 m 值对应不同的入射角θ_m，同时也导致不同的传播常数。

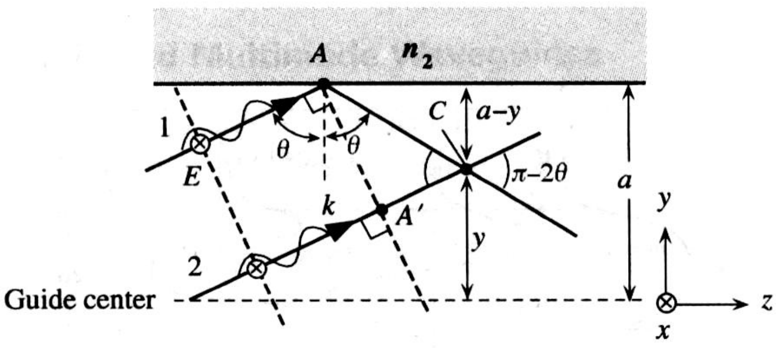

图 3.4 光束间的干涉导致沿 y 方向稳定的模式并沿 z 方向传播。

如果我们考虑很多光束相干的情况（如图 3.3），我们会发现沿 y 方向电场的模式是稳定的，并且这个模式沿 z 轴方向以传播常数β_m传播。这一点可以利用图 3.4 来说明，光束 1 经全反射后向下传播，光束 2 向上传播并和 1 在 C 点重合，C 点与波导中心的距离为 y。两光束相差为

$$\Phi_m=(k_1AC-\phi_m)-k_1A'C=2k_1(a-y)\cos\theta_m-\phi_m$$

代入波导条件并简化，我们发现对于给定的 m，Φ_m是 y 的函数

$$\Phi_m = \Phi_m(y) = m\pi - \frac{y}{a}(m\pi + \phi_m) \qquad (3.6)$$

光束 1 和 2 的电场为

$$E_1(y,z,t) = E_0 \cos(\omega t - \beta_m z + \kappa_m y + \Phi_m)$$

和

$$E_2(y,z,t) = E_0 \cos(\omega t - \beta_m z - \kappa_m y)$$

相加后电场为

$$E(y,z,t) = 2E_0 \cos(\kappa_m y + \frac{1}{2}\Phi_m)\cos(\omega t - \beta_m z + \frac{1}{2}\Phi_m) \qquad (3.7)$$

由于有 $\cos(\omega t - \beta_m z)$ 项，式(3.7)是沿 z 方向传播的行波，其振幅沿 y 方向被 $\cos(\kappa_m y + \Phi_m/2)$ 项调制。后一项和时间无关，代表沿 y 方向稳定的模式。于是，光波沿波导传播具有形式

$$E(y,z,t) = 2E_m(y)\cos(\omega t - \beta_m z) \qquad (3.8)$$

$E_m(y)$是给定 m 的沿 y 方向的场分布，场分布 $E_m(y)$横穿波导并沿 z 方向传播。

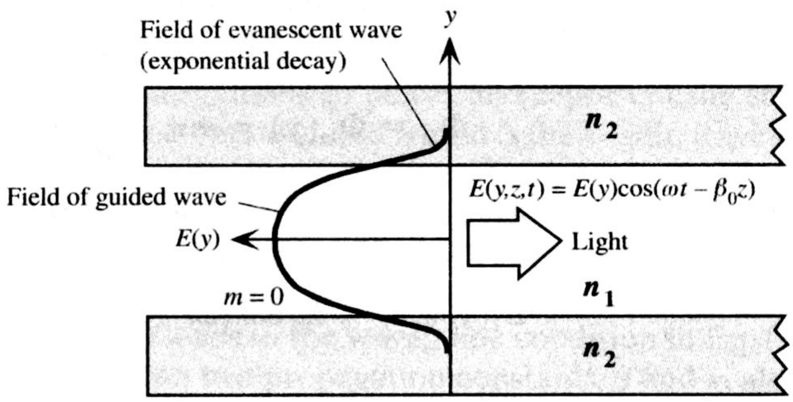

图 3.5 最低模的行波的电场分布

图 3.5 为最低阶模 m = 0 的电场分布，其中心强度最大。整个分布以波矢β_0沿 z 轴传播，由于边界处隐逝波的存在，电场渗透到包层并以指数衰减。图 3.6 给出 m = 0, 1, 2 的三个模式的电场分布。

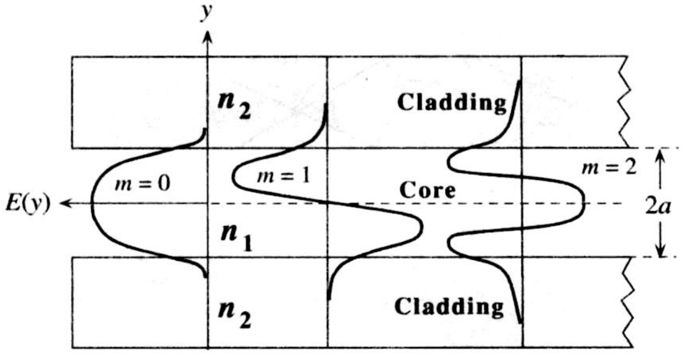

图 3.6 m = 0, 1, 2 的三个模式的电场分布

我们看到，每一个 m 值导致一个允许的入射角θ_m，它对应于一个由式(3.8)描述的沿 z 轴方向的行波，其波矢β_m由式(3.4)给出。每个这样的行波拥有不同的模式 $E_m(y)$，组成一个传播模。决定模式的整数 m 称为模数。光能只能以一个或多个模式在波导中传播，如图 3.7 所示。大的 m 会导致小的入射角θ_m，高阶模会有更多的全反射次数，其隐逝波也将透

入包层中更深。最低阶模 m = 0 对应的入射角θ_m接近 90°，我们说它沿轴传播。由于耦合到波导中的光只能以特殊的模式传播，这些模式将给出不同的群速度。如果输入的是一个短脉冲，由于不同的群速，输出脉冲将被展宽，如图 3.7 所示。

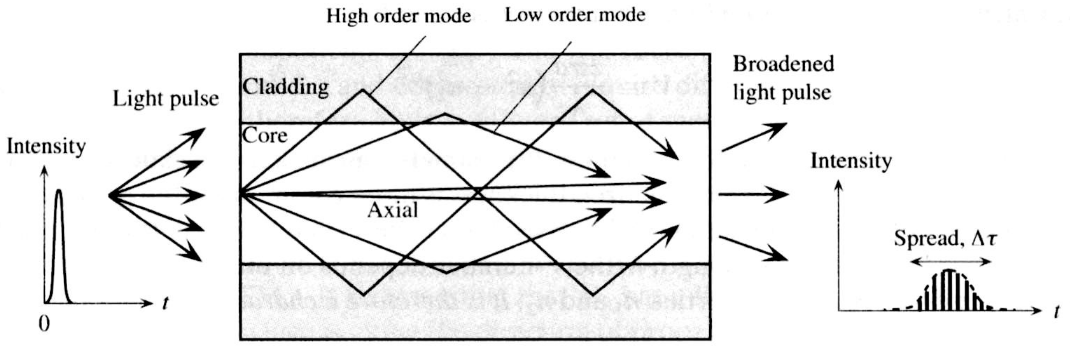

图 3.7 光在平面波导中传播示意图

光纤中发生全反射的条件是入射角θ_m必须大于等于临界角θ_C，即

$$\sin\theta_C = \frac{n_2}{n_1}，\ \sin\theta_m \ge \sin\theta_C$$

使得 m 只能取某些值，利用波导条件得到 m 必须满足

$$m \le (2V - \phi)/\pi \qquad (3.9)$$

参数 V 称为归一化频率或波导参量，定义为

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda}(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$$

这里的问题是是否存在这样的 V 值，使得 m = 0 是唯一的可能，即只有一个模式传播。假设对于基模$\theta_m \to 90°$，这时$\phi \to \pi$，由式(3.9)得$V = (m\pi + \phi)/2$或$V = \pi/2$，当$V < \pi/2$时，只有 m = 0 的基模在平面波导中传播。由 V 和ϕ的表达式我们可得$\phi \le 2V$，保证式(3.9)不会给出负值。当$V < \pi/2$时，m = 0 是唯一的可能，这时的波导就是单模平面波导。满足$V = \pi/2$的自由空间的波长λ_c叫做截止波长，波长大于λ_c的光只有基模存在。

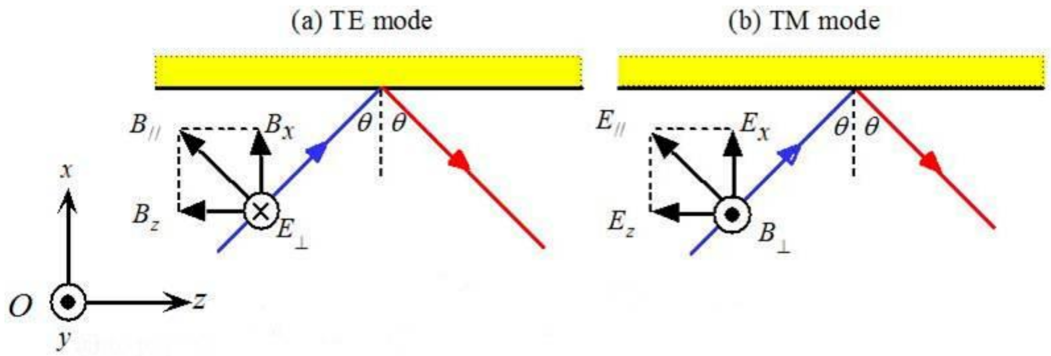

图 TE 模和 TM 模示意图

对于一束入射到芯层和包层界面上的光，其偏振有两个本征的方向，如上图所示，一种是电场垂直于入射面（光波矢和界面法线组成的面）；另一种是电场在入射面内，其磁场垂直于入射面，其它情况可以分解为这两种情况之和。这两种模式在界面上发生全反射后其相移不同，相同模数对应的入射角也不一样，相应的模式分别称为横电模(transverse electric field mode, 用 TE_m 表示)和横磁模(transverse magnetic field mode, 用 TM_m 表示)。对于折射率相差很小的两种介质来说，两种模式的波导条件和截止条件的差别可以忽略。

根据光波导折射率的空间分布的均匀性，我们进行如下分类：

- 线性光波导
  - 纵向均匀的（正规光波导）
    - 横向分层均匀的（均匀光波导）
    - 横向非均匀的（非均匀光波导）
  - 纵向非均匀的（非正规光波导）
    - 缓变光波导
    - 迅变光波导
    - 突变光波导

3.1.2 光纤

在光通信中用到更多的是光纤，其结构如图 3.8 和图 3.9 所示。

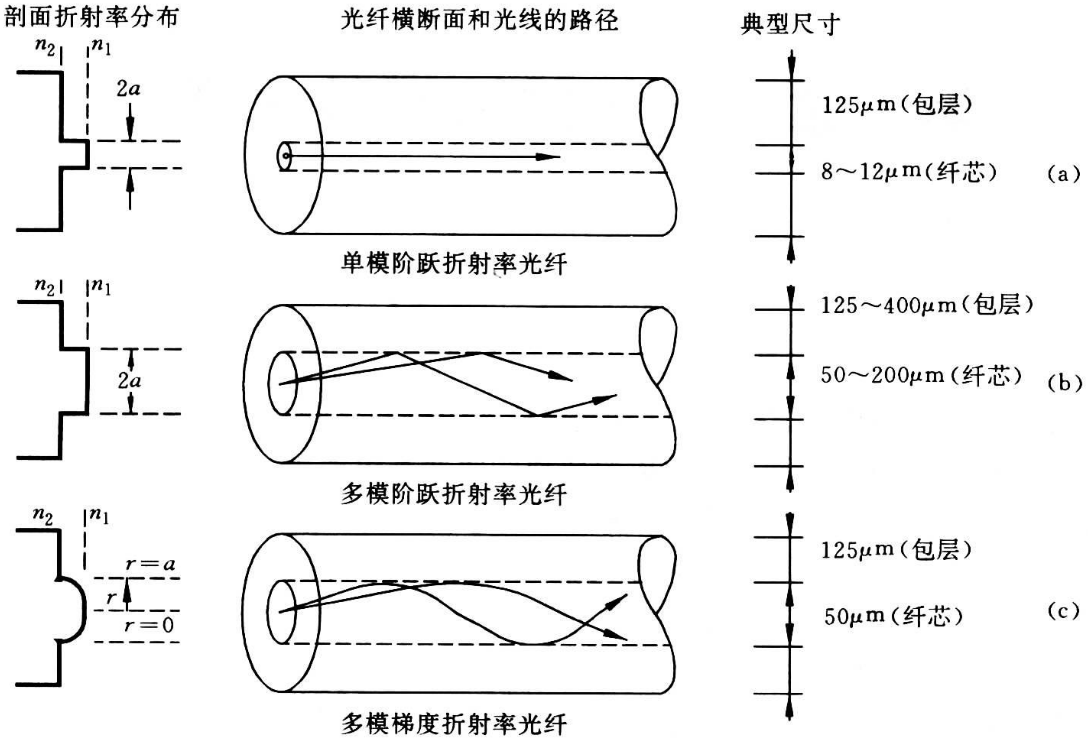

图 3.8 单模和多模光纤结构示意图

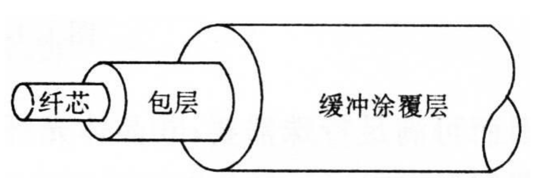

图 3.9 单根光纤结构简图

光纤中发生全反射的条件是入射角θ必须大于等于临界角θ_C，即

$$\sin\theta_C = \frac{n_2}{n_1}，\ \theta \ge \theta_C = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \qquad (3.9)$$

如图 3.10 中所示。为了使光束能够在光纤中传播，外部耦合到光纤中的光线最大的入射角α_m为

$$n_0 \sin\alpha_{\max} = n_1 \sin(90° - \theta_C) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \qquad (3.10)$$

可见，相应于临界角θ_C 的最大的入射角α_m 反映了光纤集光能力的大小，通称为孔径角，$n_0 \sin\alpha_{\max}$ 定义为光纤的数值孔径，用 *NA* 表示，即

$$NA = n_0 \sin\alpha_{\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \qquad (3.11)$$

和平面波导中一样，光纤中也存在特殊的模式，图 3.11 中给出了光纤中基模的电场分布和几个模式的光强分布。

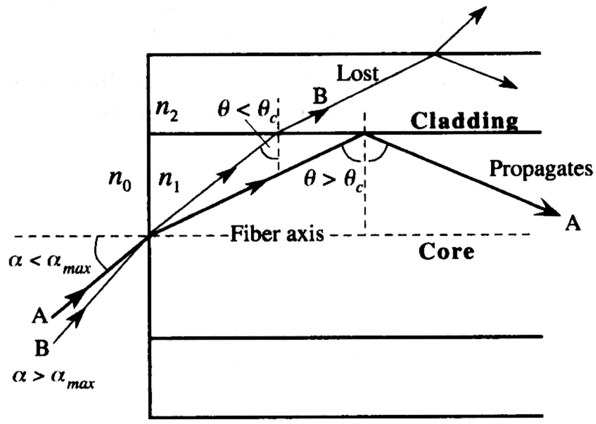

图 3.10 光纤数值孔径示意图

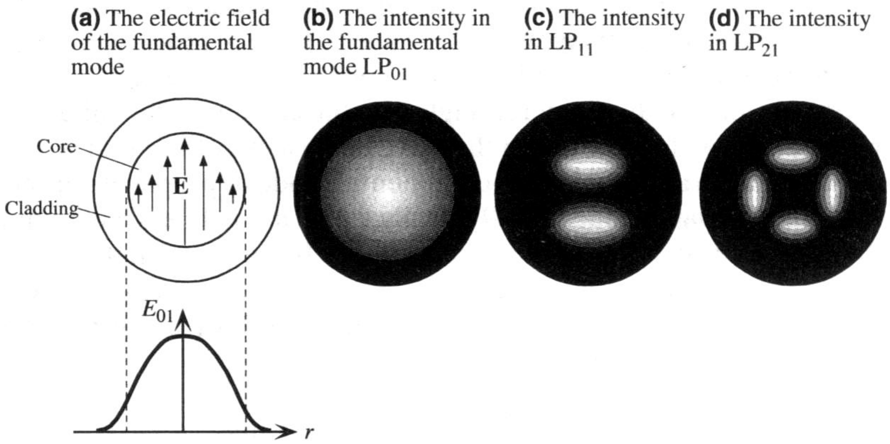

图 3.11 光纤中基模的电场分布和几个模式的光强分布

3.2 光波导的一般理论和波导模式

3.2.1 亥姆霍兹方程

为了便于分析，我们考虑单一光频的情况，此时光场可表示为

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}(x,y,z)e^{-i\omega t} + c.c. \qquad (3.12)$$

考虑到光波导中 $\boldsymbol{J} = 0$ 且$\rho = 0$，可得一组方程

$$\nabla\times\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H} \qquad (3.13a)$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = 0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$$

这里ε在空间是非均匀的，将 $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ 代入(3.13c)式得$\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E}) = \nabla\varepsilon\cdot\mathbf{E} + \varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$，于是

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{-\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\mathbf{E} \qquad (3.14)$$

式(3.14)式表明尽管$\rho = 0$，ε的空间非均匀性导致 $\mathbf{E}$ 成为有源场。其物理解释为：介质分布

的不均匀性，导致极化电荷分布的不均匀，出现微观剩余电荷，表现为有源场。式(3.13)变为

$$\nabla\times\mathbf{E}=i\omega\mu_0\mathbf{H} \quad (3.15a)$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=-i\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=-\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H}=0$$

由式(3.15)可得亥姆霍兹方程

$$\nabla^2\mathbf{E}+k^2n^2\mathbf{E}+\nabla\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\right)=0 \quad (3.16a)$$

$$\nabla^2\mathbf{H}+k^2n^2\mathbf{H}+\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\times(\nabla\times\mathbf{H})=0$$

方程左边包括其次部分和非齐次部分。如果所考虑的那一部分波导中，介质为均匀分布($\nabla\varepsilon = 0$)，或近似均匀分布($\nabla\varepsilon/\varepsilon \to 0$)，该方程就转化为齐次方程

$$(\nabla^2+k^2n^2)\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{pmatrix}=0 \quad (3.17)$$

3.2.2 光波导中模式的概念

若光波导的折射率分布沿纵向不变，则这种光波导称为正规光波导，它的数学描述为

$$\varepsilon(x,y,z)=\varepsilon(x,y)$$

可以证明，在正规光波导中，光场可表示为如下形式：

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{pmatrix}(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\\mathbf{h}\end{pmatrix}(x,y)e^{i(\beta z-\omega t)} \quad (3.20)$$

光场沿空间的分布可表示为

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{pmatrix}(x,y,z)=\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\\mathbf{h}\end{pmatrix}(x,y)e^{i\beta z} \quad (3.21)$$

式中β为相移常数，表示光场具有波动性；***e***(x, y)与 ***h***(x, y)为模式场，它表示光场(***E***, ***H***)沿横截面的分布，模式场是复矢量，具有方向（三维）、幅度和相位。模式场并不只存在于横截面中，只不过它是由横向坐标所决定。

模式是光波导中的一个基本概念，其含义可以从几个方面去理解：

1. 数学含义。模式是满足亥姆霍兹方程的一个特解，并满足在波导中心有界、在边界趋于无穷时为零等边界条件。光波导中总的光场分布则是这些模式的线性组合：

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{pmatrix}=\sum_i\begin{pmatrix}a_i\mathbf{e}_i\\b_i\mathbf{h}_i\end{pmatrix}(x,y)e^{i\beta_i z} \quad (3.25)$$

式中 a_i,b_i 是分解系数，表示该模式的相对大小。一系列模式可以看成一个光波导的场分布的空间谱。

2. 稳定性。一个模式沿纵向传输时，其场分布形式不变，即沿 z 方向有稳定的分布。

3. 有序性。模式是波动方程的一系列特征解，是离散的、可以排序的。排序方法有两种，一种是以传播常数β的大小排序，β越大序号越小；另一种是以(x, y)两个自变量排序，所以有两个序列号。

4. 叠加性。光波导中总的场分布是这些模式的线性叠加。

5. 正交性。一个正规光波导的不同模式之间满足正交关系。设(***E***, ***H***)是第 i 次模，(***E’***, ***H’***)为第 k 次模，即

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_i\\\mathbf{h}_i\end{pmatrix}(x,y)e^{i\beta_i z} \quad \begin{pmatrix}\mathbf{E}'\\\mathbf{H}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}_k\\\mathbf{h}_k\end{pmatrix}(x,y)e^{i\beta_k z} \quad (3.26)$$

则可以证明下式成立

$$\int_{A\to\infty}(\mathbf{e}_i\times\mathbf{h}_k^*)\cdot dA=\int_{A\to\infty}(\mathbf{e}_k^*\times\mathbf{h}_i)\cdot dA=0 \quad (i\neq k) \tag{3.27}$$

式中 A 为考虑的横截面；角标*表示取共轭。这是模式正交的数学表达式。

3.2.3 模式的分类

根据模式场在空间的方向特性，或者说包含纵向分量的情况，通常把模式分为三类：

1. TEM 模：模式只有横向分量，而无纵向分量，即 $\boldsymbol{e}_z = 0$ 且 $\boldsymbol{h}_z = 0$。我们可以证明，在光波导中不可能存在 TEM 模（或者说，TEM 模只存在于无限大均匀介质中）。尽管如此，又是为了方便，在$|e_z|<<|e_t|$，$|h_z|<<|h_t|$情况下（在很多情况下是满足的），仍把某些模式当 TEM 模处理。

2. TE 模或 TM 模：模式只有一个纵向分量。对于 TE 模有 $\boldsymbol{e}_z = 0$ 但 $\boldsymbol{h}_z \neq 0$；对于 TM 模有 $\boldsymbol{h}_z = 0$ 但 $\boldsymbol{e}_z \neq 0$。

3. HE 模或 EH 模：模式的两个纵向分量均不为零，即 $\boldsymbol{e}_z \neq 0$ 且 $\boldsymbol{h}_z \neq 0$。

3.3 平面光波导

3.3.1 基本概念

均匀光波导是正规光波导（即折射率纵向均匀分布的光波导）中最简单的一种。它的折射率分布不仅沿纵向是均匀的，而且沿横截面分布也是区域均匀的；或者说，它只是在某些平行于纵向的柱状域边界上有折射率的突变。这种域的形式可以是不封闭的（如图 3.12(a)），亦可以是封闭的（如图 3.12(b) ~ (d)）。

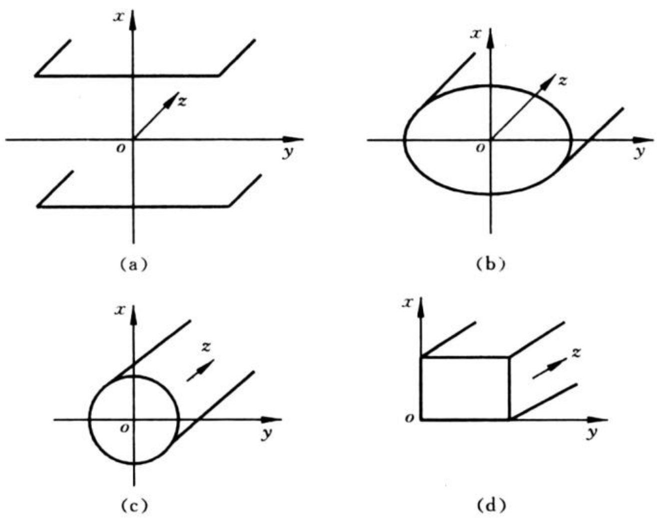

图 3.12 均匀光波导

均匀光波导折射率分布的数学描述为

$$\varepsilon(x,y,z)=\varepsilon_i \qquad (x,y,z)\in\Omega_i$$

Ω_i 是一个柱状域。此时有

$$\nabla\varepsilon=0 \qquad (x,y,z)\in\Omega_i$$

平面光波导是均匀光波导的一个最简单的例子，指光波导的折射率分布的横向分界面是一些平面。两个无限大平面将光波导空间分为三个部分，这样就构成了最简单的平面光波导。假定其折射率具有对称分布，只取两个值 n_1, n_2 (如图 3.13)，且 $n_1 > n_2$，并可表示为

$$n(x)=\begin{cases} n_1 & |x|<a \\ n_2 & |x|>a \end{cases}$$

通常称|x| < a 的部分为芯层，|x| > a 的两边部分为包层。这种三层光波导称为阶跃平面光波导。我们只限于讨论这种光波导。

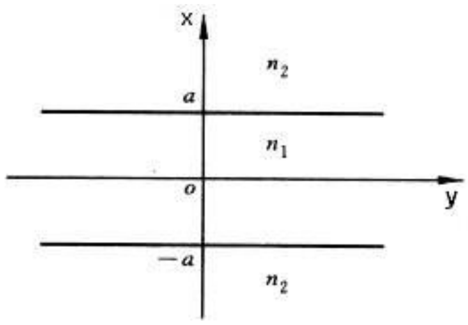

图 3.13 平面光波导

3.3.2 模式场

阶跃平面光波导中，y 方向与 z 方向并无区别，故可将 y 向也看作纵向，于是

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\ \mathbf{h}\end{pmatrix}(x)e^{i(\beta_z z+\beta_y y)} \tag{3.41}$$

这表明，沿光波导传输的光波可以分解成沿 y 向和沿 z 向的两列，我们可只取其中一列研究，不妨设

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\ \mathbf{h}\end{pmatrix}(x)e^{i\beta_z z} \tag{3.42}$$

这样，所有关于模式场的微分方程都只有一个变量 x，由齐次亥姆霍兹方程(3.17)得

$$\frac{d^2\mathbf{e}}{dx^2}+(k^2n^2-\beta^2)\mathbf{e}=0 \tag{3.43a}$$

$$\frac{d^2\mathbf{h}}{dx^2}+(k^2n^2-\beta^2)\mathbf{h}=0$$

模式场可以分解为纵向分量与横向分量之和，即有

$$\begin{cases}\mathbf{e}=\mathbf{e}_t+\mathbf{e}_z\\ \mathbf{h}=\mathbf{h}_t+\mathbf{h}_z\end{cases}$$

矢量微分算子∇也可表示为纵向和横向两个部分，即 $\nabla=\nabla_t+\hat{z}\dfrac{\partial}{\partial z}$，代入(3.15)式，使左右两边纵向和横向分量各自相等，可得

$$\begin{cases}\hat{\mathbf{x}}\times\dfrac{d\mathbf{e}_t}{dx}=i\omega\mu_0\mathbf{h}_z\\ \hat{\mathbf{x}}\times\dfrac{d\mathbf{h}_t}{dx}=-i\omega\varepsilon\mathbf{e}_z\\ \hat{\mathbf{x}}\times\dfrac{d\mathbf{e}_z}{dx}+i\beta\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{e}_t=i\omega\mu_0\mathbf{h}_t\\ \hat{\mathbf{x}}\times\dfrac{d\mathbf{h}_z}{dx}+i\beta\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{h}_t=-i\omega\varepsilon\mathbf{e}_t\end{cases} \tag{3.44}$$

我们的任务是：1. 分析可能存在哪些模式和具体的模式分布形式；2. 求出该模式的传输常数的表达式。

通常将波动方程(3.43)中的纵向分量和横向分量分解，化为标量常微分方程，代入边界条件，即可求出模式场。这里我们从概念出发，直接得出一些结果。

由于 TE 模中 $\boldsymbol{e}_z=0$，所以由(3.44b)式可得

$$\hat{\mathbf{x}} \times \frac{d\mathbf{h}_t}{dx} = 0 \qquad (3.45)$$

可知 $\boldsymbol{h}_t$ 只有 $\hat{\mathbf{x}}$ 分量，即 $\boldsymbol{h}_t = \boldsymbol{h}_x$。由(3.44c)式可得 $\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{h}_t = \boldsymbol{h}_x$, 可知 $\boldsymbol{e}_t$ 与 $\boldsymbol{h}_t$ 互相垂直，且

$$e_y = \frac{-\omega\mu_0}{\beta} h_x \qquad (3.46a)$$

$$h_z = \frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{de_y}{dx}$$

由此可知，这种模式只有三种非零分量 $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{h}_x$, $\boldsymbol{h}_z$, 其它均为零。且只需求出 e_y，即可求出其它分量。e_y 满足标量方程

$$\frac{d^2 e_y}{dx^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) e_y = 0 \qquad (3.47)$$

其解取正弦、余弦或指数函数形式。在芯层内，e_y 只能取有限值，在包层 $x\to\infty$ 时 $e_y\to 0$。在这两个条件下，可得出 e_y 在芯层取正弦或余弦形式，分别称为 TE 奇模和 TE 偶模，如图 3.14 所示；在包层内只能取 e^{-x} 形式。

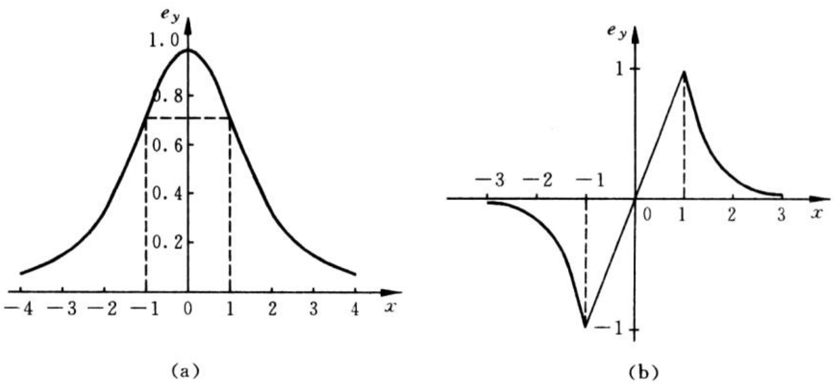

图 3.14 TE 模的模式场。(a)偶模；(b)奇模。

TE 偶模的表达式为

$$e_y = \begin{cases} b_1 \cos\left(\sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}\, x\right) & |x| < a \\ b_2 \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}\, x\right) & |x| > a \end{cases} \qquad (3.48)$$

$$h_z = \begin{cases} \dfrac{b_1\sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}}{\omega\mu_0} \sin\left(\sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}\, x\right) & |x| < a \\ \dfrac{b_2\sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}}{\omega\mu_0} \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}\, x\right) & |x| > a \end{cases} \qquad (3.49)$$

式中 b_1，b_2 是积分常数，TE 模的模式场参见表 3.1(a)。同样可以求出，TM 模的模式场只有 $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{h}_y$ 三个分量，也可分为奇次模和偶次模，见表 3.1(b)。

我们将证明，除 TE，TM 模之外不存在 HE，EH 模。事实上，我们把方程(3.44)中的 $\boldsymbol{e}_t$, $\boldsymbol{h}_t$ 分解成 $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{h}_x$, $\boldsymbol{h}_y$ 之后，可以得到六个标量方程

$$\begin{cases}\dfrac{de_y}{dx}=i\omega\mu_0 h_z\\ \dfrac{dh_y}{dx}=-i\omega\varepsilon e_z\\ -\dfrac{de_z}{dx}+i\beta e_x=i\omega\mu_0 h_y\\ i\beta e_y=-i\omega\mu_0 h_x\\ -\dfrac{dh_z}{dx}+i\beta h_x=-i\omega\varepsilon e_y\\ i\beta h_y=-i\omega\varepsilon e_x\end{cases}\tag{3.50}$$

可以看到，上式(a), (d), (e)三个方程中只含有 h_z, e_y, h_x，而(b), (c), (f)三个方程中只含 e_z, h_y, e_x，故原方程化为两组独立的方程。e_z, h_z 分别出现在两组方程中，互不关联，可知不存在 HE 或 EH 模。

表 3.1 模式场

(a) $e_x=e_z=h_y=0$

	TE 偶模		TE 奇模	
	芯层	包层	芯层	包层
e_y	$\dfrac{\cos(U\rho)}{\cos U}$	$\dfrac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$	$\dfrac{\sin(U\rho)}{\sin U}$	$\dfrac{\rho}{\lvert\rho\rvert}\dfrac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$
h_x	$-\dfrac{\beta}{k}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{\cos(U\rho)}{\cos U}$	$-\dfrac{\beta}{k}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$	$-\dfrac{\beta}{k}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{\sin(U\rho)}{\sin U}$	$-\dfrac{\beta}{k}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{\rho}{\lvert\rho\rvert}\dfrac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$
h_z	$\dfrac{iW}{ka}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{\sin(U\rho)}{\sin U}$	$\dfrac{iW}{ka}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{\rho}{\lvert\rho\rvert}\dfrac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$	$\dfrac{iW}{ka}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{\cos(U\rho)}{\cos U}$	$\dfrac{iW}{ka}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$

(b) $h_x=h_z=e_y=0$

	TM 偶模		TM 奇模	
	芯层	包层	芯层	包层
e_x	$\dfrac{\cos(U\rho)}{\cos U}$	$\dfrac{n_1^2}{n_2^2}\dfrac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$	$\dfrac{\sin(U\rho)}{\sin U}$	$\dfrac{n_1^2}{n_2^2}\dfrac{\rho}{\lvert\rho\rvert}\dfrac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$
h_y	$\dfrac{kn_1^2}{\beta}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{\cos(U\rho)}{\cos U}$	$\dfrac{kn_1^2}{\beta}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$	$\dfrac{kn_1^2}{\beta}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{\sin(U\rho)}{\sin U}$	$\dfrac{kn_1^2}{\beta}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{\rho}{\lvert\rho\rvert}\dfrac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$
e_z	$-\dfrac{iW}{a\beta}\dfrac{n_1^2}{n_2^2}\dfrac{\sin(U\rho)}{\sin U}$	$-\dfrac{iW}{a\beta}\dfrac{n_1^2}{n_2^2}\dfrac{\rho}{\lvert\rho\rvert}\dfrac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$	$-\dfrac{iW}{a\beta}\dfrac{n_1^2}{n_2^2}\dfrac{\cos(U\rho)}{\cos U}$	$-\dfrac{iW}{a\beta}\dfrac{n_1^2}{n_2^2}\dfrac{\exp(-W\lvert\rho\rvert)}{\exp(-W)}$

注：表中 $\rho = x/a$，U 和 W 的定义见 3.3.3 节。

3.3.3 特征方程

模式场中含有传播常数β，β的大小由边界条件所确定的方程来决定，这个方程称为特征方程。下面以 TE 偶模为例，分析如何导出特征方程。由模式场的两个表达式(3.48)和(3.49)，可以求出芯层和包层边界上的场。当 x 由芯层趋向边界时

$$e_y=b_1\cos\left(\sqrt{k^2n_1^2-\beta^2}\,a\right)\tag{3.51}$$

当 x 由包层趋向边界时

$$e_y = b_2 \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}\, a\right) \qquad (3.52)$$

因为 e_y 在边界上连续，可得

$$b_1 \cos\left(\sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}\, a\right) = b_2 \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}\, a\right) \qquad (3.53)$$

同理，由 h_z 在边界上连续得

$$b_1 \sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2} \sin\left(\sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}\, a\right) = b_2 \sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2} \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}\, a\right) \qquad (3.54)$$

记

$$U^2 = (k^2 n_1^2 - \beta^2) a^2 \qquad (3.55a)$$

$$W^2 = (\beta^2 - k^2 n_2^2) a^2$$

则有

$$V^2 = U^2 + W^2 = k^2 (n_1^2 - n_2^2) a^2 \qquad (3.56)$$

将(3.53)式与(3.54)式相除，可得

$$\begin{aligned} &U \tan U = W \\ &U^2 + W^2 = V^2 \end{aligned} \qquad (3.57)$$

方程(3.57a)和(3.57b)联立就是 TE 模的特征方程。特征方程的作用，是在已知 k，n_1，n_2，a 的条件下，即在光波导结构和使用的波长已知的情况下求出β。显然，该方程可能有无穷多个解，从而得到一个β解的序列，并由此确定模式的序号。导出特征方程和解特征方程是分析光波导的重要工作之一。

量 U，V，W 的物理意义如下：

1. 由 $V^2 = k^2 (n_1^2 - n_2^2) a^2$ 可知，当光波导结构参数(n_1，n_2，a)已知时，V 正比于真空中的波数 k，故 V 是一个表征频率的量，称为归一化频率，或称为该光波导的波导参量。
2. 若另ρ = x/a，将几何尺寸归一化以后，波动方程(3.47)化为

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 e_y}{d\rho^2} + U^2 e_y = 0 & |\rho| < 1 \\ \dfrac{d^2 e_y}{d\rho^2} - W^2 e_y = 0 & |\rho| > 1 \end{cases} \qquad (3.58)$$

由此可解出 e_y 为

$$e_y = \begin{cases} b_1 \cos(U\rho) & |\rho| < 1 \\ b_2 \exp(-W|\rho|) & |\rho| > 1 \end{cases} \qquad (3.59)$$

可知，U，W 是在光波导结构(n_1，n_2，a)确定的情况下，是芯层和包层归一化的横向参数，故分别称为这个模式在芯层和包层的模式参量。模式参量隐含有β，故通常以 $U = f(V)$ 来代替 $\beta = f(\omega)$。

除 TE 偶模外，还有 TE 奇模，其特征方程为

$$-U \cot U = W \qquad (3.60)$$

TM 模也有类似的公式，解的结果见表 3.2（其中 j 为模式序号）。

表 3.2 平面光波导特征方程的解

模　式	TE 模		TM 模	
	偶　模	奇　模	偶　模	奇　模
特征方程	$W=U\tan U$	$W=-U\cot U$	$n_1^2W=n_2^2U\tan U$	$n_1^2W=-n_2^2U\cot U$
截止条件	$U=V=j\pi/2$			
接近截止 $U\approx V$ $W\approx 0$	$U\approx V-V^3/2\quad(j=0)$		$U\approx V-(n_2^4/n_1^4)V^3/2\quad(j=0)$	
	$U\approx V-j\dfrac{\pi}{4}\left(V-j\dfrac{\pi}{2}\right)^2\quad(j>0)$		$U\approx V-j\dfrac{\pi}{4}\left(V-j\dfrac{\pi}{2}\right)^2\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)^4\quad(j>0)$	
$V=\infty$	$U=(j+1)\pi/2$			
远离截止 $V\approx W$	$U\approx(j+1)\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{V+1}\right)$		$U\approx(j+1)\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{n_2^2}{n_1^2V+n_2^2}\right)$	
单模范围	$0<V<\pi/2$			

3.3.4 截止条件、单模传输及远离截止频率的情况

求解特征方程一般需要利用计算机，但我们关心的几种特殊形式的解可以通过理论分析得到。

1. 截止条件

随着 V 值的减小，U 和 W 都随之减小。当 W→0 时，意味着模式的场不断地向包层扩展，最后能量分散于广大的空间，不能传输，这是称为该模截止。使该模截止时 V 值所满足的条件，称为这个模的截止条件。对于阶跃平面光波导的 TE 模，截止时有 W→0，U = V，因而特征方程可简化。

对 TE 偶模有

$$V\tan V=0 \qquad (3.61)$$

对 TE 奇模有

$$V\cot V=0 \qquad (3.62)$$

方程(3.61)和(3.62)的解为$V=\dfrac{k}{2}\pi\ (k=0,1,2,\cdots)$，我们以式中的 k 作为模式的序号。k = 0 的模式是最低的模式，称为基模，它的截止频率 V = 0，这意味着这个模不会截止。其它 k 较大的模称为高阶模，它们在 V→0 的过程中均会截止，并称截止时的频率为截止频率 V_{cut}。

2. 单模传输

由于基模的截止频率 $V_{cut}=0$，不会截止，故在 0 < V < π/2 时，只有基模在光波导中传输，这时称为光波导处于单模传输状态（实际上，在这个条件下，除 TE 模外尚有 TM 模在传输，所以通常所说的单模传输实际为多模传输）。这一概念可以扩展到任意光波导，如光纤。

3. 远离截止频率的情形

随着 V 值的增加，W 也增加，但 U 不可能无限增大。例如对于 TE 偶模，由特征方程(3.57)可得出

$$\frac{U}{\cos U}=V \qquad (3.63)$$

要使 V→∞，只需 cosU→0，从而$U\rightarrow\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\pi$ (k = 0, 2, 4, …)。这表明当远离截止频率时，U 趋于一个定值。同样，对于 TE 奇模，在 V → ∞时，$U\rightarrow\left(\dfrac{k+1}{2}\right)\pi$ (k = 1, 3, 5,…) 。

根据以上的分析，我们可以粗略地绘出 $U = f(V)$，见图 3.15。对某些形状规则的光波导，模式场有解析表达式（特征函数），并由此可导出传输常数β的代数方程－－特征方程，进而引出有关截止频率、单模传输、远离截止频率时 U 的趋势等新概念。

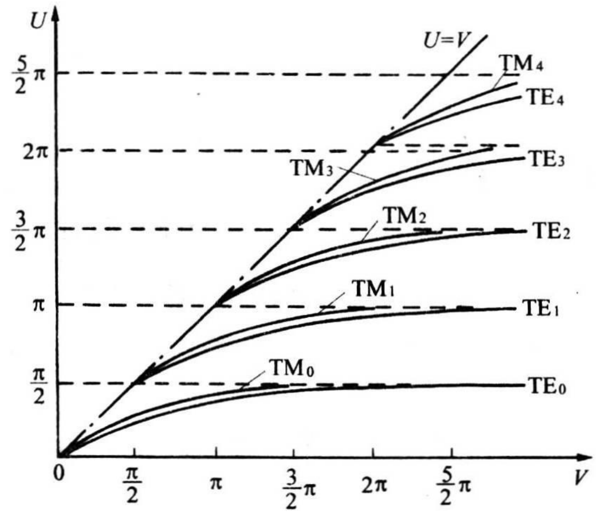

图 3.15 平面光波导 $U = f(V)$图

参考文献：
1. Optoelectronics and Photonics, S. O. Kasap.
2.《光波导理论》吴重庆 编著。
3.《光纤光学》廖延彪 编著。