

《天体物理学》

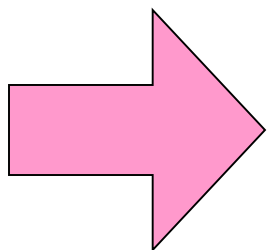
第四章 主序恒星

讲授：徐仁新

北京大学物理学院天文学系

什么是恒星？

- 是重元素核合成的熔炉
- 是构成星系的基本单元
- “恒星结构与演化”理论是天体物理领域内成熟体系之一（另：宇宙学）



“恒星”在天体物理学中占有极其重要的地位！

1, 恒星演化概貌

分子云

引力塌缩

原恒星

点燃 ^1H 聚变($4p \rightarrow \alpha$)

主序星

热脉动

行星状星云

电子简并
物质核心

超新星

黑洞

中子星

白矮星

致密残骸
“舍利子”

- 位于恒星际空间
- 温度 $\sim 10^1 \text{ K} \Rightarrow$ 分子
- 密度 $\sim 300\text{--}200$ 个 H_2 分子/ cm^3
- 尺度 $\sim 40\text{pc}$
- 主要成分： H_2 ，混有 CO 、 H_2O 、 NH_3 、 CS 、 CH_3OH （甲醇）、 H_2CO （甲醛）等其它百余种无机或有机分子；此外，还含有约1%的由碳、硅、脏冰等构成的尘埃（ $\sim \mu\text{m}$ 大小，含几万个原子）

“原子云”
(HI, 10^2K)

“离子云”
(HII, 10^4K)

恒星演化概貌

恒星如何演化很大程度上依赖于初始质量

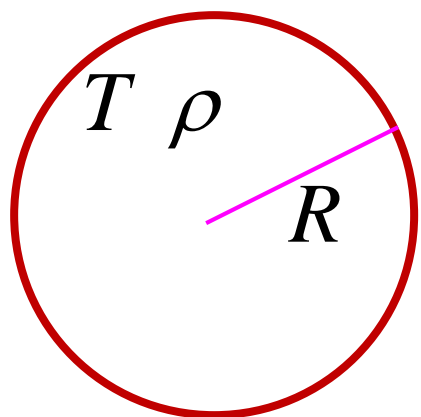
初始质量	氦核心质量	演化结局	
		单星	双星
$< 2.3 M_{\odot}$	$< 0.45 M_{\odot}$	CO 白矮星	氦白矮星
$2.3 M_{\odot} - 6 M_{\odot}$	$0.5 M_{\odot} - 1.9 M_{\odot}$	CO 白矮星	CO 白矮星
$6 M_{\odot} - 8 M_{\odot}$	$1.9 M_{\odot} - 2.1 M_{\odot}$	O-Ne-Mg 白矮星 或碳爆燃超新星爆发?	O-Ne-Mg 白矮星
$8 M_{\odot} - 12 M_{\odot}$	$2.1 M_{\odot} - 2.8 M_{\odot}$	中子星	O-Ne-Mg 白矮星
$12 M_{\odot} - 25 M_{\odot}$	$2.8 M_{\odot} - 8 M_{\odot}$	中子星	中子星
$> 25 M_{\odot}$	$> 8 M_{\odot}$	黑洞	黑洞

恒星初始质量及其演化结局

2, Jeans不稳定与恒星形成

Jeans不稳定：热压不足对抗引力导致的**塌缩**

- 若只有引力，任何微小的密度涨落必将被引力无限放大而塌缩
- 因存在热压力，较小密度涨落产生的引力被热压所克服
- **只有当密度涨落足够高**以致于热压相对于涨落产生的引力而言可被忽略，引力塌缩（即引力不稳定性）才能够发生



考虑尺度 R 介质

- 引力 $\sim GM^2/R^2$ （质量 $M \sim R^3 \rho$ ）
- 热压力 $\sim PR^2$ 为（理想气体 $P = \rho kT/m$ ）
- 引力 $>$ 压力 $\Rightarrow R > \lambda \sim \sqrt{\frac{kT}{G\rho m}}$

\therefore 当介质尺度大于 λ 时，将导致引力不稳定

Jeans不穩定与恒星形成

Jeans不穩定：热压不足对抗引力导致的**塌缩**

- 对于均匀无穷大介质，通过线性小扰动计算“自引力介质”得到引力不穩定发生的临界长度为 λ_J ，只是多个因子 $(\pi)^{1/2}$ ，

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi k T}{G \rho m}} \quad \leftarrow \quad \boxed{\text{Jeans长度}}$$

- 当密度扰动区域大于 λ_J 时，引力将导致塌缩
- 扰动最大长度为分子云尺度 L ，故定义Jeans密度和Jeans质量

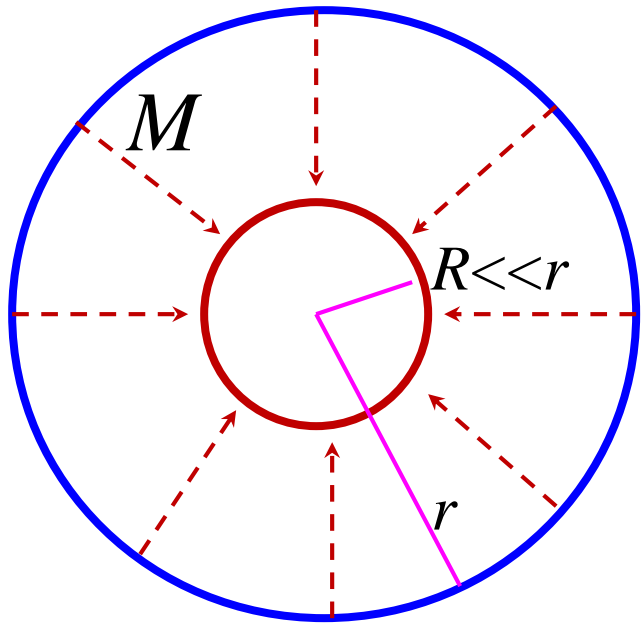
$$\rho_J = \frac{\pi k T}{G m L^2} \quad M_J \sim L^3 \rho_J$$

当 $\rho > \rho_J$ 或 $M > M_J$ 时，分子云必将引力塌缩

Jeans不稳定与恒星形成

塌缩时标：~自由落体时标

- 塌缩时引力主导，介质的径向粘性可忽略 \Rightarrow 自由落体



密度均匀球形介质塌缩过程

- NR: 典型动能 $mv^2 \sim GMm/r$
 $\Rightarrow v \sim (GM/r)^{1/2}$
- 塌缩时标（自由落体时标）

$$\tau_{\text{ff}} \sim \frac{r}{v} \sim \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \sim 87 \left(\frac{M}{M_{\text{sun}}} \right)^{-1/2} \left(\frac{r}{10^{10} \text{ cm}} \right)^{3/2} \text{ s}$$

- 质量越大塌缩越快
(大质量恒星形成, 铁核塌缩)

Jeans不稳定与恒星形成

恒星形成：小质量情形

a, 形成缓慢旋转的分子云核。云核在收缩过程中也可能会分裂

Shu et al. (1987)

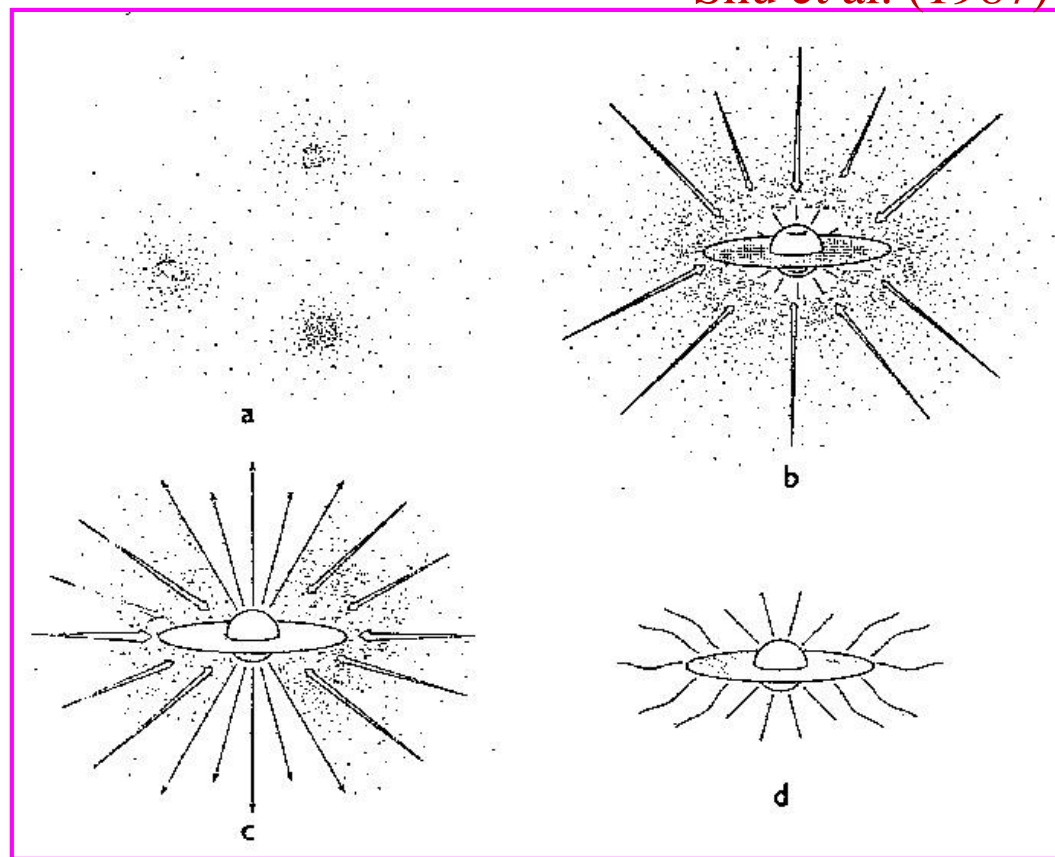
b, 原恒星的形成

c, 氦点火 \Rightarrow 对流和较差自转 \Rightarrow 磁场放大 \Rightarrow 强烈星风

d, 稳定氢核燃烧的主序星
+ 盘（行星）

大质量恒星形成研究的困难：

塌缩时标短 \Rightarrow 观测困难 \Rightarrow
观测对理论模型筛选不够



2, 周光关系

恒星处于平衡态附近的**振荡行为**:

- 假设震荡过程是绝热的, 满足 $P \propto \rho^\gamma$; 绝热指数 $\gamma = 5/3$

压力: $f_p \sim R^2 P \sim M^{5/3}/R^3$ (密度 $\rho \sim M/R^3$), 或 $f_p = \kappa_1 M^{5/3}/R^3$

引力: $f_g = \kappa_2 M^2/R^2$

\Rightarrow 半定量地描述恒星半径变化的动力学方程:

$$M \frac{d^2 R}{dt^2} = f_p - f_g = \frac{\kappa_1 M^{5/3}}{R^3} - \frac{\kappa_2 M^2}{R^2}$$

- 平衡态: $R = R_0 = \kappa_1/(\kappa_2 M^{1/3})$
- 以 $\delta \equiv R - R_0$ 做小量展开, 且略去 δ^2 及更高项 \Rightarrow 振子方程

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{\kappa_2 M}{R_0^3} \cdot \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad T_p = 2\pi \sqrt{\frac{R_0^3}{\kappa_2 M}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\kappa_2}} \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

“周密”关系

周光关系

恒星处于平衡态附近的**振荡行为**：

- 对观测数据的统计发现：

$$\bar{\rho} \equiv \frac{3M}{4\pi R^3} \approx 1.4 \left(\frac{M_{\text{sun}}}{M} \right) \propto M^{-1}$$

$$\text{又, } T_p = 2\pi \sqrt{\frac{R_0^3}{\kappa_2 M}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\kappa_2}} \frac{1}{\sqrt{\bar{\rho}}}$$

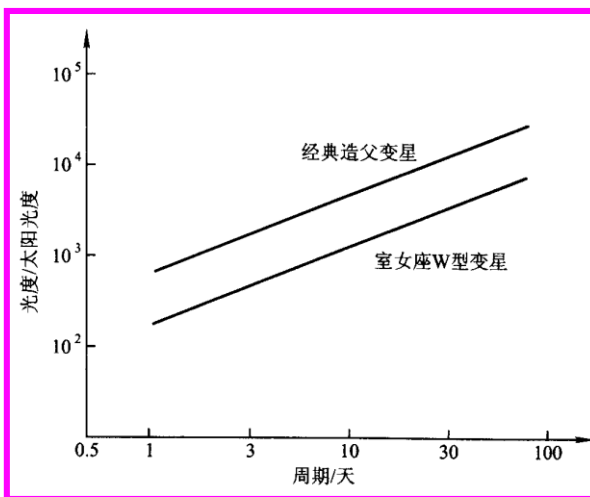
“周质”关系

$$T_p \propto M^{1/2}$$

- 质量越大则发光越强

“**量天尺**”

周光关系



■ 1920: Shapley-Curtis大辩论

■ 1924: Hubble分辨出M31（仙女座大星云）中的造父变星，并根据“周光”关系测定距离，支持了Curtis的“宇宙岛”概念

4, Lane-Emden方程与 “标准模型”

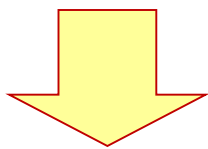
恒星的**流体静力学平衡**方程:

- 假设恒星具有球对称性 \Rightarrow 所有物理量 $Q = Q(r) \Rightarrow$ 一维问题

引力: $Gm(r) \cdot \Delta M / r^2$ (质量 $\Delta M = \rho \Delta A dr$)

压力: $\Delta A [P - (P + dP)] = -\Delta A \cdot dP$

- 引力 = 压力

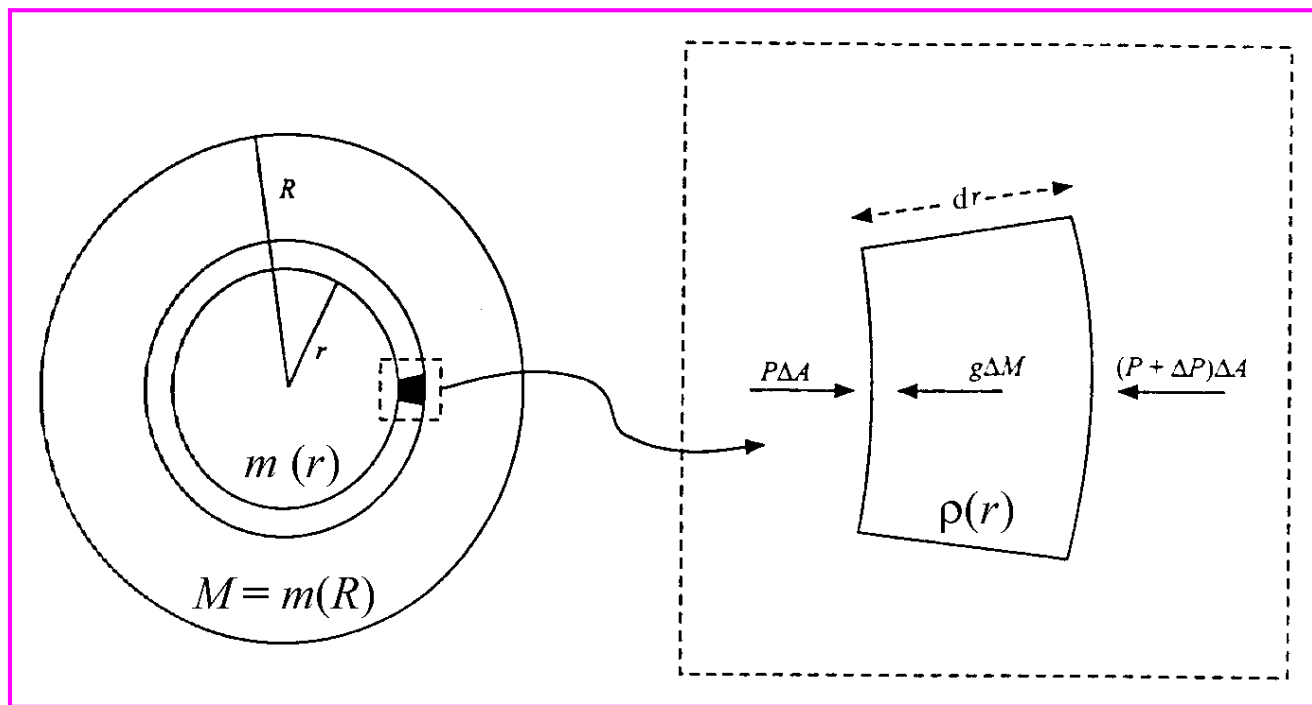


$$\frac{dP}{dr} = - \frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

Newton引力流体静力平衡

对比: Einstein引力

(理想流体**TOV**方程)



Lane-Emden方程与“标准模型”

流体静力平衡方程: $\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$
(未知数: ρ 、 P)

其中 $m(r) = \int_0^r 4\pi\rho(x)x^2 dx$

状态方程: $P=P(\rho)$; 多方形式 $P=K\rho^\gamma$

Lane-Emden方程:

$$\theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' + \theta^n = 0$$

$$\gamma = 1 + 1/n$$

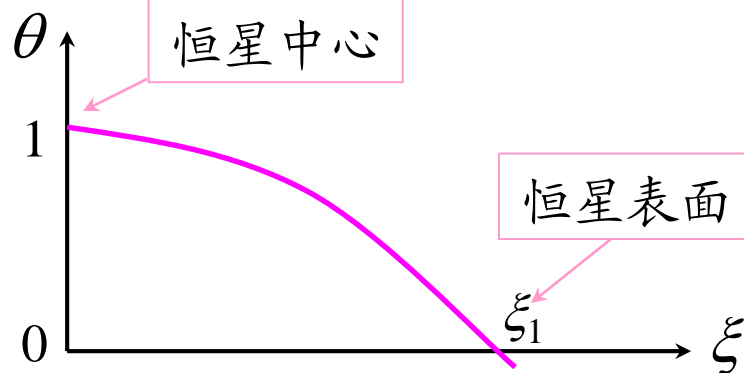
这里定义了新标度的密度变量 θ 和矢径坐标 ξ :

$$\rho = \rho_0 \theta^n; \quad r = a\xi, \quad a = \sqrt{\frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_0^{\frac{1}{n}-1}}$$

边条件:

$$\begin{cases} \theta(0) = 1 \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

$\gamma > 6/5$ 时
解的示意



Lane-Emden方程与“标准模型”

数值求得 ξ_1 和 $\theta'(\xi_1)$ 后就可以得到**质量**和**半径**:

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_0^{(1-n)/2n} \xi_1$$

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_0^{(3-n)/2n} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|$$

或消去 ρ_0 得**质量-半径关系**:

$$M = 4\pi R^{(3-n)/(1-n)} \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{n/(n-1)} \xi_1^{(3-n)/(n-1)} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|$$

数值解**示例**: $\gamma=5/3$ 、 $4/3$ 情形

$$\gamma = 5/3, \quad n = 3/2, \quad \xi_1 = 3.65375, \quad \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2.71406$$

$$\gamma = 4/3, \quad n = 3, \quad \xi_1 = 6.89685, \quad \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2.01824$$

Lane-Emden方程与“标准模型”

恒星可以近似为由辐射压不可忽略、非简并理想气体组成的，其**状态方程**为：

$$P = \left[\left(\frac{N_A k}{\mu} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1-\beta}{\beta^4} \right]^{1/3} \rho^{4/3} \quad (\text{习题1})$$

N_A : Avogadro常数, μ : 平均分子量, β : 气体压与总压强之比, a : 辐射密度常数

标准模型即此状态方程多方球 ($n = 3$) 而描述的主序星

$$\longrightarrow T_0 = 2.923 \times 10^{-16} \mu \beta M^{2/3} \rho_0^{1/3} = 1.106 \times 10^{-15} \mu \beta M^{2/3} \bar{\rho}^{1/3}$$

统计关系: $\bar{\rho} \equiv \frac{3M}{4\pi R^3} \approx 1.4 \left(\frac{M_{\text{sun}}}{M} \right)$

1 K ~ 10⁻⁴ eV

$\mu = 0.7, \beta \sim 1$

$$T_0 \approx 1.4 \times 10^7 \left(\frac{M}{M_{\text{sun}}} \right)^{1/3} \text{ K}$$

恒星质量越小中心
温度越低但密度却
越高 (习题2) !

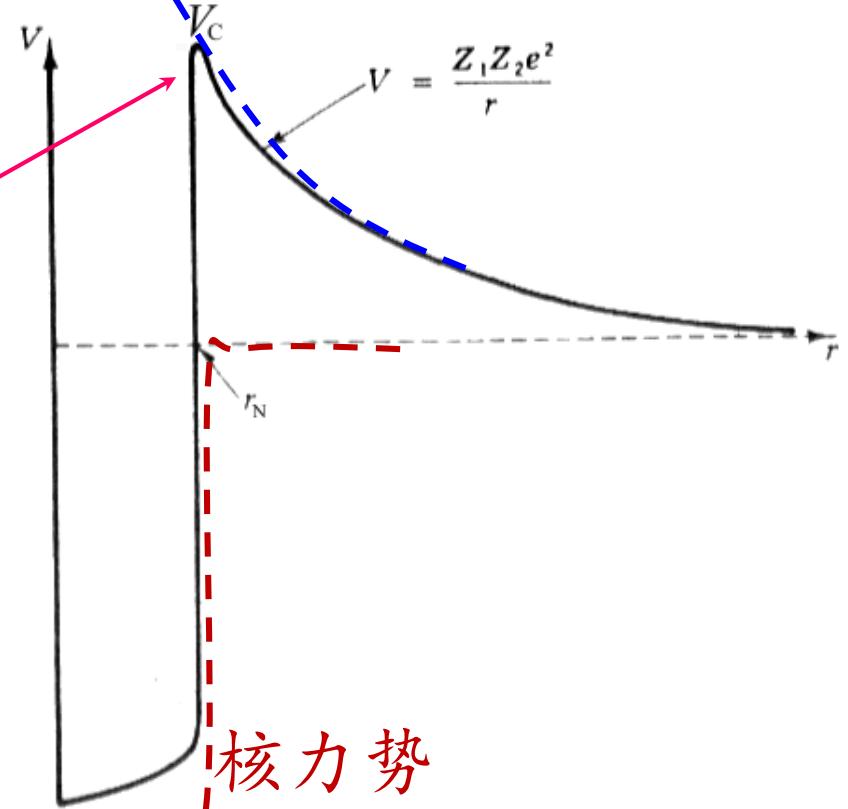
5, 核燃烧条件

恒星内部能进行核反应吗?

电磁势

核Coulomb势垒

$$V_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_{N1} + r_{N2}} \approx 1.2 \frac{Z_1 Z_2}{A_1^{1/3} + A_2^{1/3}} \text{ MeV} \gg T_0$$



核力势

核燃烧条件

恒星为何发光？

引力能？（除“小黑洞”、“大原子核”极端思想）以太阳为例：

$$E_g \sim GM^2/R \sim 4 \times 10^{48} \text{ erg}, \text{ K-H时标: } t_k \sim E_g/L \sim 3 \times 10^7 \text{ 年}$$

核能？

$4^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He} + 2\text{e}^+ + 2\nu_e$ 平均每核子释放 $\varepsilon \sim 7\text{MeV}$ 能量

太阳每秒有 $\mathcal{N} \sim L/\varepsilon \sim 3.6 \times 10^{38}$ 个氢核发生聚变

太阳氢核聚变产能的时标为 $\sim M/(m_p \mathcal{N}) \sim 10^{11}$ 年

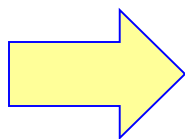
核燃烧条件

解决之道：量子隧穿效应！

（如果不知道量子效应，我们甚至不能理会太阳为什么发光）

粒子热运动动能为Coulomb势垒的 η 倍时，这类核的燃烧过程就能在恒星内部大规模地出现：

$$kT_0 \sim \eta V_c, \quad \eta \in (10^{-4}, 2 \times 10^{-4})$$



主序星质量下限：
 $(0.07 \sim 0.08) M_{\odot}$

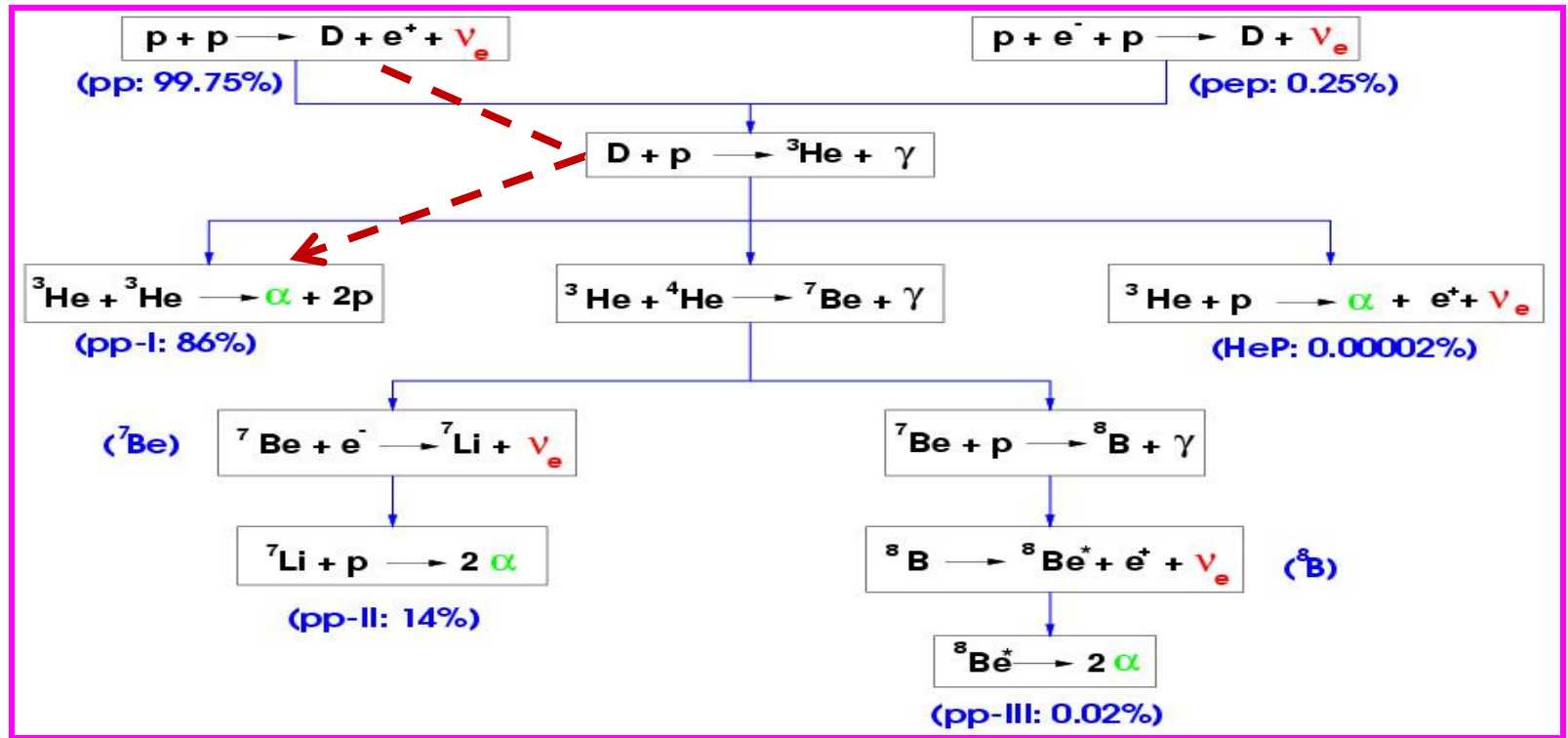
褐矮星： $M < M_{\min}$ ； 耀星： $M \sim 0.08 M_{\odot}$ 或略大 氢闪?

核合成过程

比铁轻元素的核合成过程

氢燃烧：pp链（和CNO循环）

例：太阳内部核聚变与太阳中微子问题

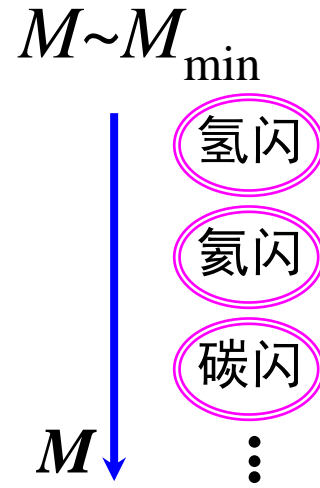
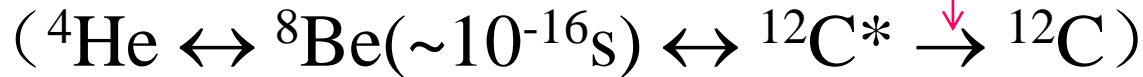


核合成过程

氢燃烧: 3α 反应

创造有机体真不容易...
爱惜生命, 人人有责!

$\sim 3 \times 10^{-4}!!!$



更高级的核反应: 质量越大核燃烧越充分

例子: $25 M_{\odot}$

	H	He	C	N	O	Si
时标	7×10^6 年	5×10^5 年	600年	1年	6月	1天
温度 (10^9K)	0.06	0.23	0.93	1.7	2.3	4.1
释能	$\sim 90\%$	$\sim 10\%$				

核合成过程

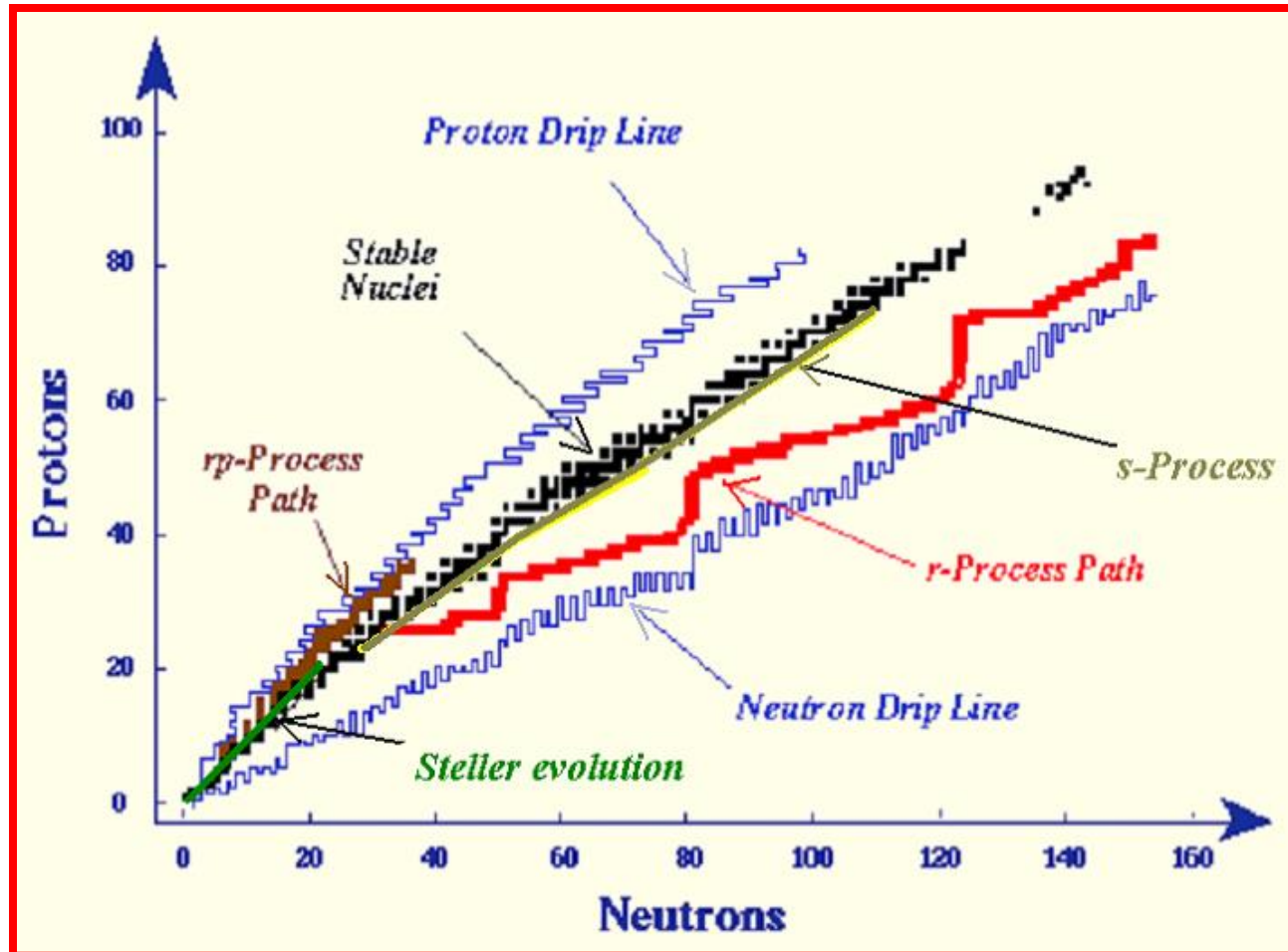
比铁重元素的核合成过程

中子俘获:

s、r过程

质子俘获:

p过程



7, 恒星结构方程组

描述恒星温度、密度等随半径变化:

- 物态一般是温度的函数: $P = P(\rho, T)$, 而 T 依赖产热和传热
⇒ 主序星结构的求解要比多方球问题复杂的多
- 这组控制方程包括:

产能方程: $\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon$

传能方程: $\frac{dT}{dr} = f(T, \kappa, \nabla P)$

状态方程: $P = P(T, \rho, \{X_i\})$

产能率: $\varepsilon = \varepsilon(T, \rho, \{X_i\})$

不透明度: $\kappa = \kappa(T, \rho, \{X_i\})$

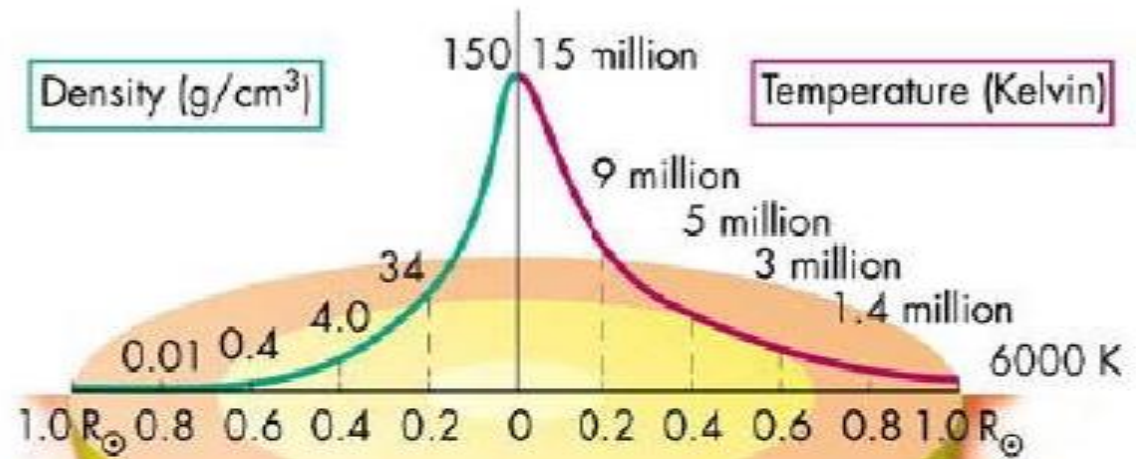
引力平衡: $\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$

描述 P 、 ρ 、 T 、 L 、 ε 、 κ 一组完备方程

恒星结构方程组

标准太阳模型 (Standard solar model, SSM)

- 输入最好的物理和天体物理参数
- 是目前研究最精确的恒星模型
- **历史上的**“太阳中微子问题”



8, 主序星及主序后演化

零龄主序星 (ZAMS) : H燃烧开始进行...

- 主序带: 核心H燃烧从开始到结束

- 主序阶段的演化:

核心区H数目逐渐减少, $P \downarrow$

抗衡引力 \Rightarrow 核心收缩, T 、 $P \uparrow$

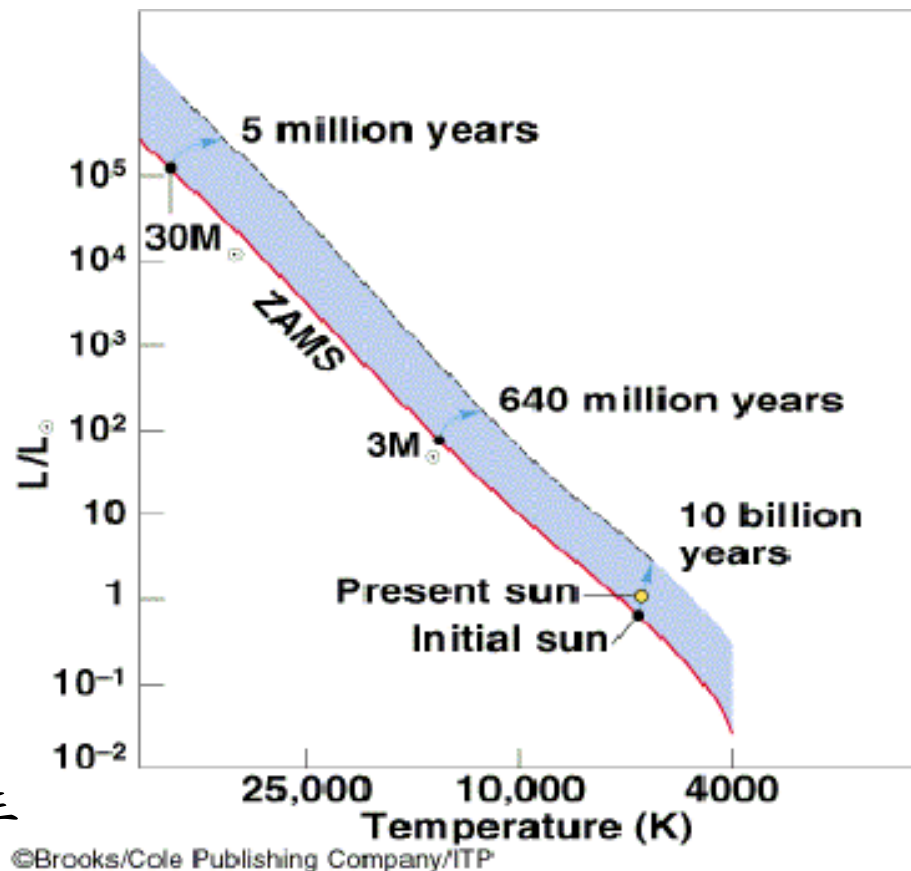
H燃烧速率增加 \Rightarrow 光度增加

核心区外包层 P 增加

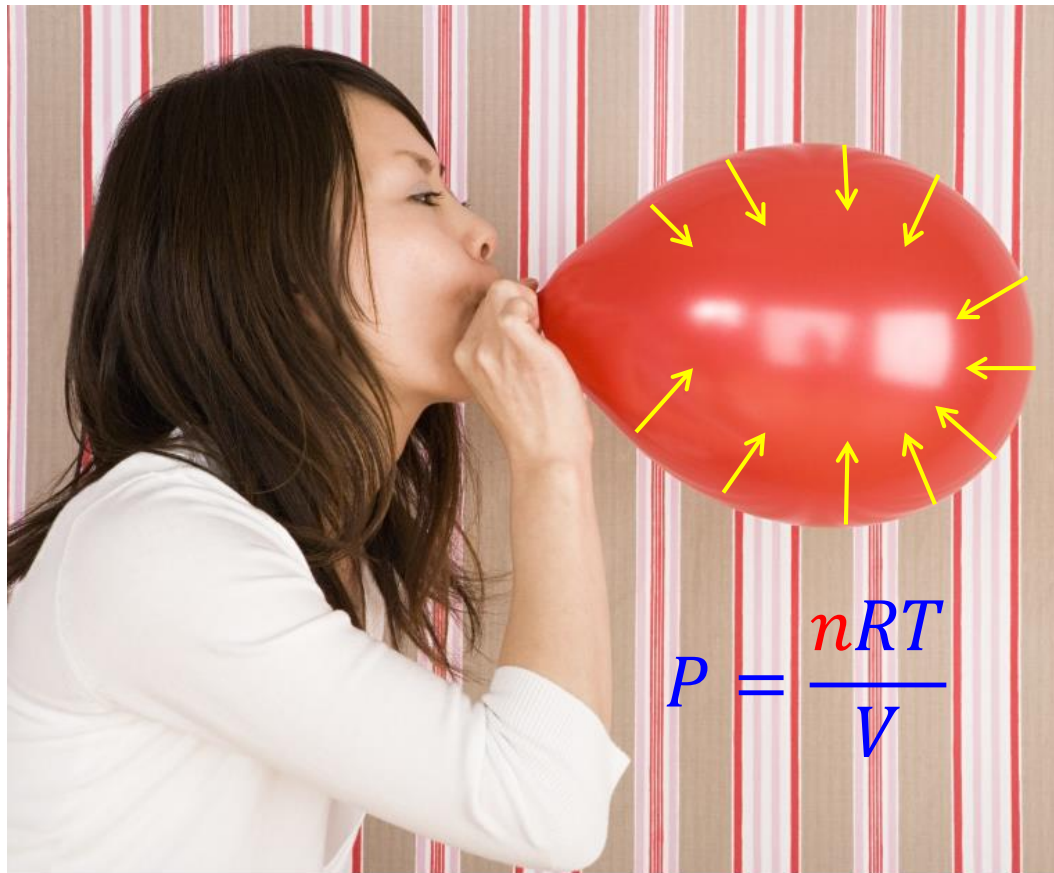
恒星半径增加

- HR图上的演化路径 \longrightarrow

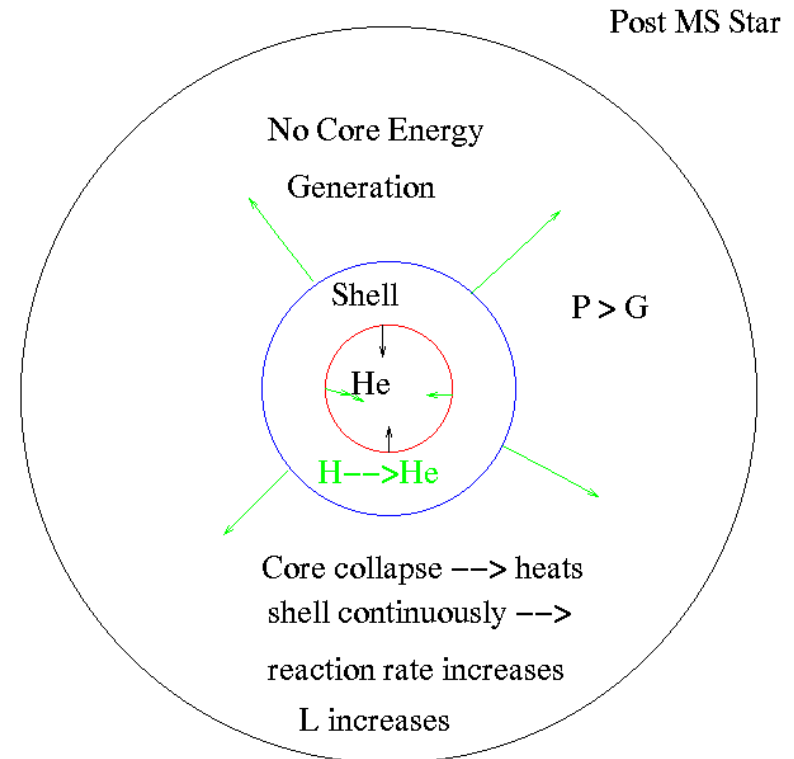
主序阶段持续: $10^{10}(M/M_{\text{sun}})^{-3}$ 年



主序后 (post MS) 恒星的结构示意



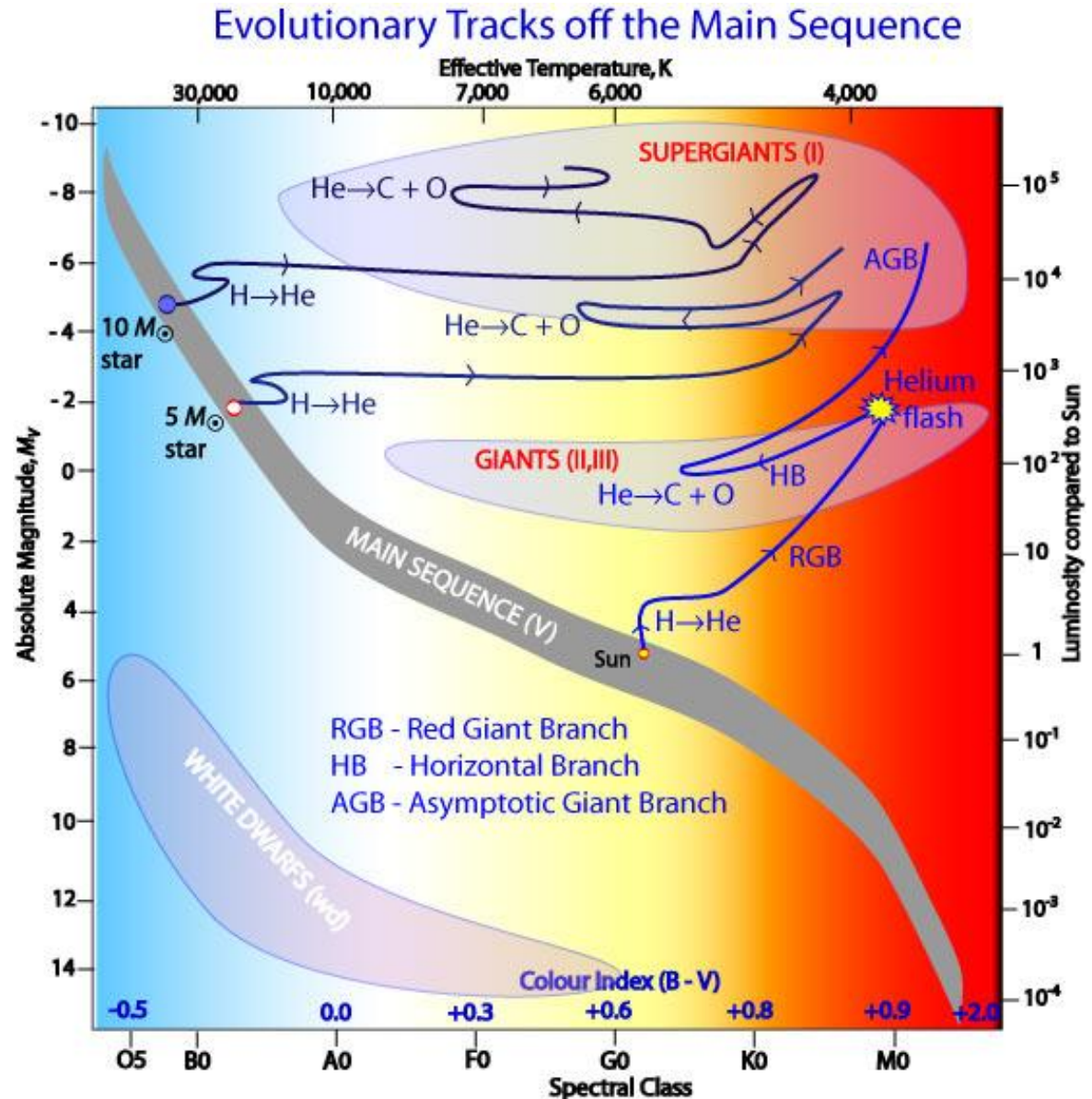
$$P = \frac{nRT}{V}$$



$$P \sim \frac{nRT}{V}$$

不同质量恒星 的主序后演化

AGB: 渐近巨星分支

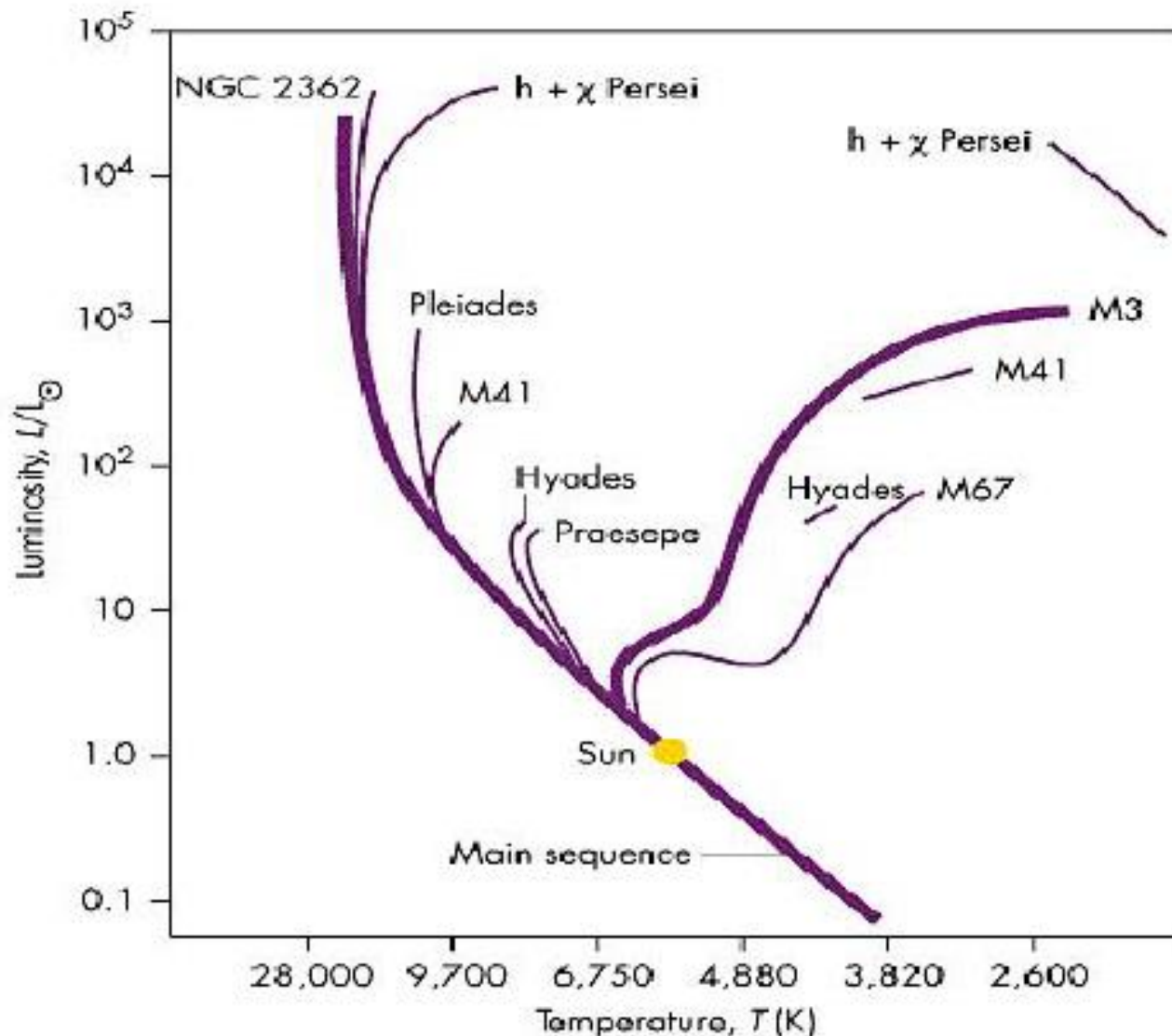


脱离主序点 (turn-off point)

星团中恒星
在HR图上
的分布：

脱离主序点
(MSTO)的位置跟星团的
年龄有关

质光关系： $L \propto M^{3.5}$
 \Rightarrow 主序星寿命：
 $\tau \propto M/L \sim M^{-2.5}$



9, 旋转恒星的平衡位形

总能量 = 转动动能 + 引力势能 + 弹性能:

$$E = E_0 + L^2/[2I(\varepsilon)] + A\varepsilon^2 + B(\varepsilon - \varepsilon_0)^2$$

(其中 $A = 3GM^2/(25R)$, $B = \mu V/2$)

- 对于流体, $B = 0$; $dE/d\varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon$ 为小量 ($\varepsilon \sim e^2$) 时:

$$\Omega = 2e\sqrt{\frac{2\pi\rho G}{15}}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= (I - I_0)/I_0 \\ e &\equiv (1 - c^2/a^2)^{1/2}\end{aligned}$$

- 一般情况下: **Maclaurin** 椭球

$$\Omega^2 = 2\pi G\rho \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} (3-2e^2) \sin^{-1} e - \frac{3(1-e^2)}{e^2} \right]$$

当 $T/|W| > 0.1375$ 时:
Jacobi 椭球 ($c < a \neq b$)

10, 恒星质量的测定

考虑质量 M_1 、 M_2 两星体因引力而互相圆轨道绕转 \Rightarrow Kepler第三定律修正式：

$$\frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{r_1^3}{G} \left(\frac{2\pi}{P_{\text{orb}}} \right)^2$$

• 推广至一般的椭圆轨道：

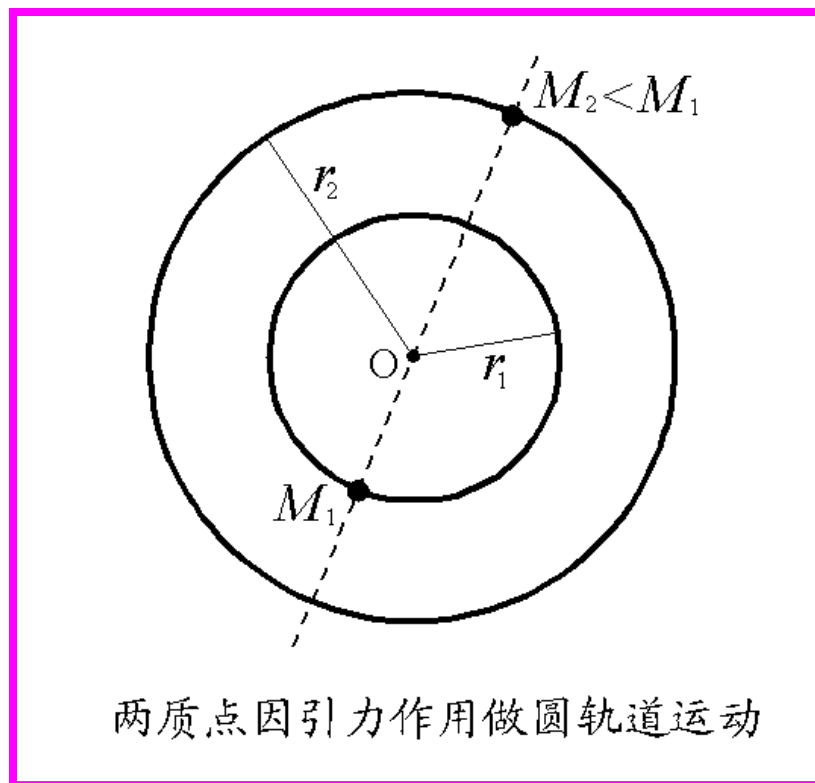
a_1

质量函数

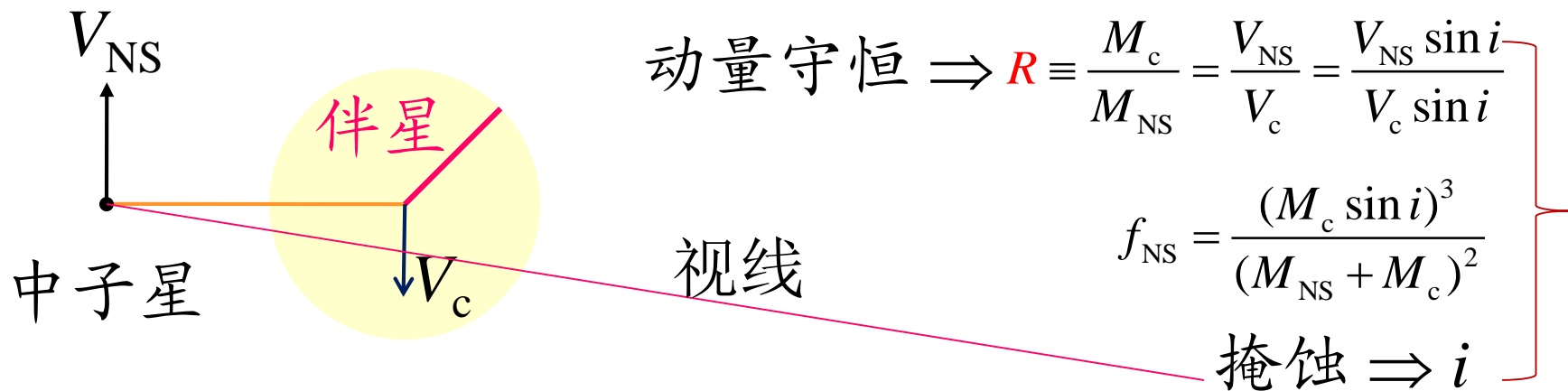
$$\frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{(a_1 \sin i)^3}{G} \left(\frac{2\pi}{P_{\text{orb}}} \right)^2 \equiv f_1 < M_2$$

$$\frac{(M_1 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{(a_2 \sin i)^3}{G} \left(\frac{2\pi}{P_{\text{orb}}} \right)^2 \equiv f_2 < M_1$$

• 一颗子星的质量函数是另一颗子星质量值的下限



10, 恒星质量的测定

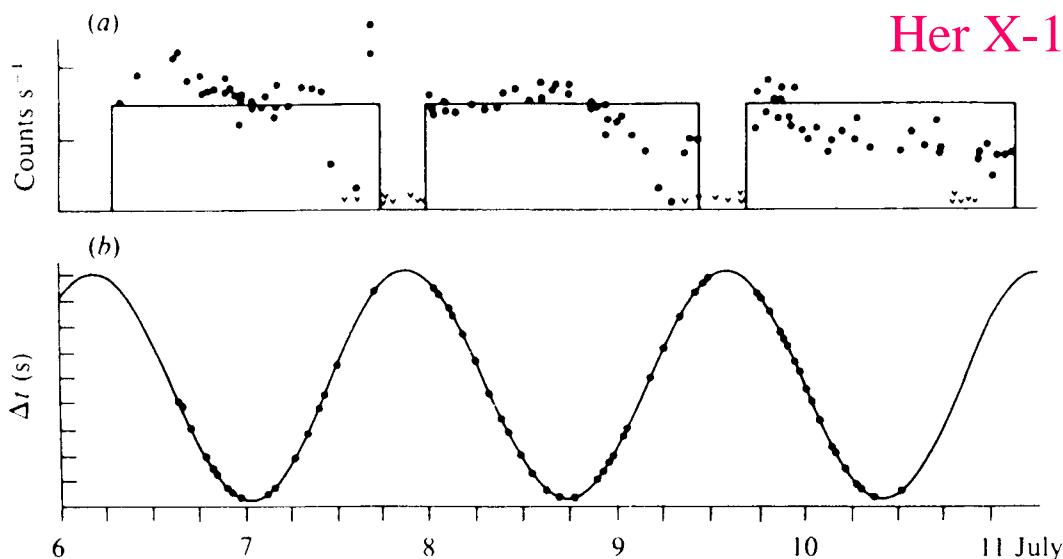


例如: 4U0900-40

$$M_{NS} = 1.9 M_{\text{sun}}$$

$$M_c = 24 M_{\text{sun}} \Rightarrow \text{HMXB}$$

若: $M_c < \sim M_{\text{sun}}$
 $\Rightarrow \text{LMXB}$



◆ 通过光被自身“吸引”的程度而度量其质量的方法 \rightarrow 引力透镜

总 结

- 0, 什么是恒星?
- 1, 恒星演化概貌
- 2, Jeans不稳定与恒星形成
- 3, 周光关系
- 4, Lane-Emden方程与“标准模型”
- 5, 核燃烧条件
- 6, 核合成过程
- 7, 恒星结构方程组
- 8, 主序星及主序后演化
- 9, 旋转恒星的平衡位形
- 10, 恒星质量的测定

作业

习题： 3、2、6