



## 2019 级高中毕业班第三次诊断性检测模拟试题

# 数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分, 第 I 卷(选择题)1 至 2 页, 第 II 卷(非选择题)3 至 4 页, 共 4 页, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟。

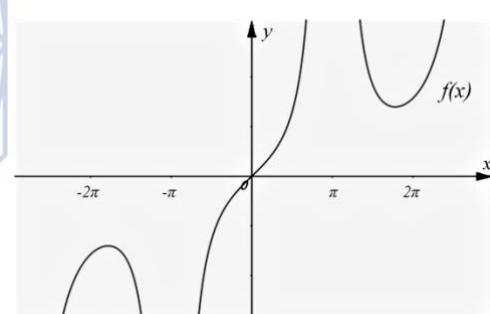
### 注意事项:

- 答题前, 务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡的相应位置上。
- 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。
- 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米黑色签字笔, 将答案书写在答题卡规定的位置上。
- 所有题目必须在答题卡上作答, 在试题卷上答题无效。
- 考试结束后, 只将答题卡交回。

## 第 I 卷(选择题, 共 60 分)

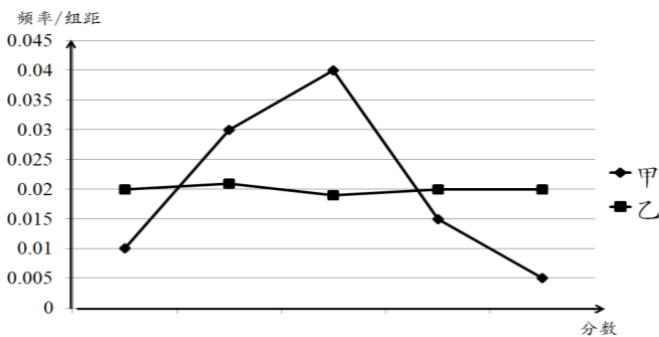
**一、选择题:**本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

- 已知集合  $A = \{x | \ln(1-x) \leq 0\}$ , 集合  $B = \left\{x \mid \frac{1}{x} \leq 1\right\}$ . 则集合  $A \cup B =$   
(A)  $\mathbb{R}$       (B)  $(0, +\infty)$       (C)  $[0, +\infty)$       (D)  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- 已知复数  $z$  满足  $z + i = (z - i)(1 + i)$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$   
(A)  $\sqrt{2}$       (B)  $\sqrt{5}$       (C)  $2\sqrt{2}$       (D)  $2\sqrt{5}$
- 已知向量  $\mathbf{a} = (2, t+2)$ ,  $\mathbf{b} = (t-1, t+1)$ , 则“向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  夹角为钝角”是“ $-5 < t < 0$ ”的  
(A) 充要条件      (B) 充分不必要条件      (C) 必要不充分条件      (D) 既不充分也不必要条件
- 已知  $f(x)$  的图像如右图所示, 则  $f(x)$  的解析式可能是  
(A)  $\frac{x+\sin x}{\cos x}$   
(B)  $\frac{x+\sin x}{\cos x - |x|}$   
(C)  $\frac{\sin x}{\cos x - |x|}$   
(D)  $\frac{x+\sin x}{1+\cos x}$

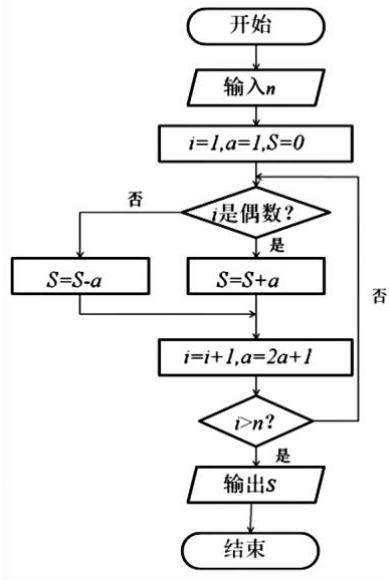


- 学校为了增强学生对体育的重视, 了解学生体能情况, 对甲、乙两班同学进行了体能测试, 汇总得到的两班同学体能测试成绩的频率分布折线图如下图. 已知两班人数相同, 且甲班同学

体能测试成绩的方差为 $D_1$ , 乙班同学体能测试成绩的方差为 $D_2$ , 则由下图可知



- (A)  $D_1 < D_2$       (B)  $D_1 > D_2$       (C)  $D_1 = D_2$       (D)  $D_1$ 和 $D_2$ 的大小无法判断
6. 已知函数 $f(x) = x + \ln ax$  的图像在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y = 3x - 1$ , 则  
 (A)  $x_0 = 1, a = e$       (B)  $x_0 = 1, a = 1$       (C)  $x_0 = e^{-1}, a = e$       (D)  $x_0 = e^{-1}, a = 1$
7. 用数字0,1,2,10组成一个五位数, 每个数字只使用一次, 最多能组成的不同五位数个数为  
 (A) 24      (B) 18      (C) 15      (D) 12
8. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 有且仅有1个零点, 则 $\omega (\omega > 0)$ 的取值范围为  
 (A)  $[\frac{3}{2}, \frac{9}{4}]$       (B)  $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}]$   
 (C)  $[\frac{9}{4}, \frac{15}{2}]$       (D)  $(\frac{9}{4}, \frac{15}{2}]$
9. 执行右图的程序框图, 已知输入的 $n$ 为10, 则输出的结果为  
 (A) 341      (B) 682      (C) 1023      (D) 2036
10. 已知椭圆 $C: x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 1)$ , 点 $A(0,2)$ , 点 $B$ 是 $C$ 上一点, 直线 $l$ 是 $C$ 在点 $B$ 处的切线. 已知有且仅有4个不同的点 $B$ 使得 $AB \perp l$ , 则 $b$ 的取值范围为  
 (A)  $(0, \sqrt{2} - 1)$       (B)  $(0, \sqrt{3} - 1)$   
 (C)  $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - 1)$       (D)  $(\sqrt{3} - 1, 1)$
11. 已知在三棱锥 $P - ABC$ 中,  $PB \perp$ 平面 $APC$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ , 且 $2 \sin \angle PAC = \sin \angle APC$ . 则直线 $AB$ 与平面 $APC$ 所成角度的余弦值的最大值为  
 (A)  $\frac{1}{3}$       (B)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       (C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       (D)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$
12. 已知 $a = 0.99 \ln 0.99$ ,  $b = e^{0.01} - 1.02$ ,  $c = \sin 0.01 - 0.02$ , 则  
 (A)  $c < b < a$       (B)  $c < a < b$       (C)  $a < c < b$       (D)  $b < c < a$



## 第II卷(非选择题, 共 90 分)

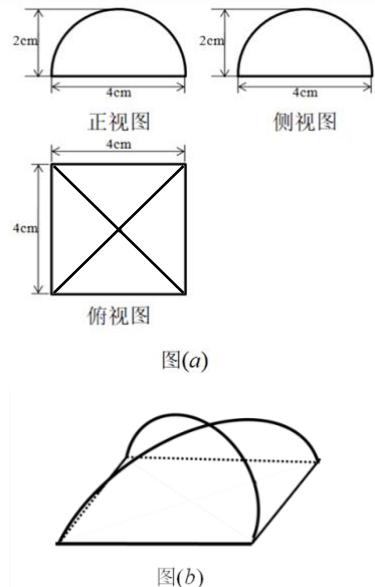
**二、填空题:**本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 已知实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y \leq 2 \\ x + 3y \leq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$ , 则  $2x + y$  的最大值为 \_\_\_\_\_

14. 已知抛物线  $C: y^2 = 4x$ , 直线  $l$  过  $C$  的焦点  $F$  与  $C$  交于点  $A$ , 与  $y$  轴交于点  $B$ , 且  $F$  在线段  $AB$  上. 若  $|AF| = 2|BF|$ , 则  $l$  的倾斜角为 \_\_\_\_\_

15. 已知  $\alpha$  是第四象限角且  $\cos(\alpha + 60^\circ) = \frac{\sin^2 20^\circ}{\tan 10^\circ \sin 50^\circ}$ , 则  $\cos \alpha =$  \_\_\_\_\_

16. 《缀术》是中国南北朝时期的一部算经, 汇集了祖冲之和祖暅父子的数学研究成果, 在唐代被收入《算经十书》, 成为唐代国子监算学课本. 在此书中, 他们提出了著名的“祖暅原理”, 即两个平行平面间的两个几何体, 被任意平行于这两个平面的平面所截, 若两个截面的面积恒相等, 则这两个几何体的体积相等. 利用此原理, 祖氏父子解决了刘徽遗存下来的所谓“方圆相缠, 浓纤诡互, 不可等正”的牟合方盖的问题, 进而推导出了正确的球体体积公式. 如右图, 图(a)所示为半个牟合方盖的三视图, 其中正视图与侧视图均为半圆形, 俯视图为正方形; 图(b)所示为其直观图. 根据以上材料, 可以计算出右图所示几何体的体积为 (单位:  $cm^3$ ) \_\_\_\_\_



**三、解答题:**本题共 7 小题, 共 70 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

$\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $c = \sqrt{5}$ ,  $a^2 = \sqrt{5}b + 5$ ,  $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

- (I) 求  $\cos A$  的值;
- (II) 求  $AC$  边上的中线的长度.

18. (本小题满分 12 分)

甲同学参加了一次社区活动, 其中有一项趣味游戏, 其规则如下:一个幸运转盘被等分为  $A, B, C$  三个区域, 每次转动转盘时指针指向  $A, B, C$  三个区域的概率均相等, 且与转动转盘的次序无关; 每轮游戏包括转动转盘三次, 每次转动若指针指向  $A$  区域则视为此次“成功”; 每轮游戏结束后, 若只有一次“成功”记 1 分, 只有连续两次“成功”记 2 分, 有连续三次“成功”记 3 分, 其余情况不得分. 经过若干轮游戏后统计各参与者的得分并按照排名分发纪念小礼品.

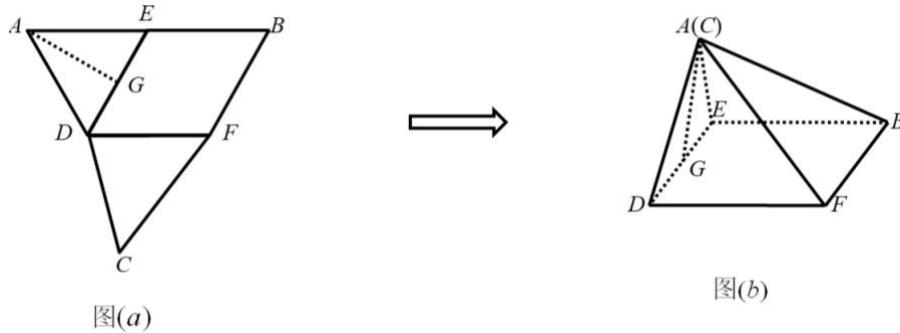
- (I) 已知甲同学进行了两轮游戏总计得 2 分, 求他在这两轮游戏中有一轮未得分的概率;
- (II) 记  $X$  为进行只一轮游戏后的得分, 求随机变量  $X$  的分布列与期望.

19. (本小题满分 12 分)

图(a)是由等边三角形 $ADE$ , 菱形 $BEDF$ 和等腰三角形 $CDF$ 组成的一个平面图形, 其中 $AD = CD = EF = 2$ ,  $CF = \sqrt{6}$ . 将其沿 $DE$ ,  $DF$ 折起使得 $AC$ 与 $AD$ 重合, 连接 $AB$ , 如图(b).

(I) 已知平面 $ABF$ 与平面 $ADE$ 的交线为 $l$ , 证明:  $FG \perp l$ ;

(II) 求二面角 $D - AF - G$ 的正切值.



图(b)

20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 $F$ ,  $A, B$ 为 $C$ 上位于 $x$ 轴异侧的两点, 过 $A, B$ 两点作 $C$ 的切线分别为 $l_1, l_2$ ,  $l_1, l_2$ 又分别与抛物线 $C$ 的准线交于点 $M, N$ . 已知 $A, F, N$ 三点共线.

(I) 证明:  $B, F, M$ 也三点共线;

(II) 求 $\Delta AFB$ 面积的最小值以及当 $\Delta AFB$ 面积取得最小值时直线 $AB$ 的方程.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{2 \ln x}{x+1}$ .

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 已知 $a \in \mathbf{R}$ , 讨论关于 $x$ 的方程 $\frac{a}{2} \ln\left(\frac{ax+1}{e^x}\right) + \frac{ax+2}{e^{x+1}} = 1$ 的解的个数.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 $xOy$ 中, 曲线 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$ 为参数), 曲线 $C_2$ 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 + x + y = 0$ . 已知点 $P$ 为曲线 $C_2$ 一动点, 点 $Q$ 在射线 $OP$ 上且满足 $|OP||OQ| = 4$ .

(I) 求曲线 $C_1$ 与 $Q$ 点轨迹的直角坐标方程;

(II) 已知点 $M$ 为曲线 $C_1$ 上的动点, 求 $|QM|$ 的最小值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知 $a, b, c$ 为正数, 且满足 $a + b + c = 1$ .

(I) 证明:  $ab + ac + bc \leq \frac{1}{3}$ ;

(II) 若 $\lambda > 0$ 且 $\frac{\lambda}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$ 成立, 求 $\lambda$ 的取值范围.