周五数学小测试

1、已知 $\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 β 是第三象限角，则 $\cos\frac{\beta}{2}$ 的值等于(　　)

A. $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　　B. $\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解析：由已知，得 $\sin[(\alpha-\beta)-\alpha]=\sin(-\beta)=\frac{4}{5}$，

得 $\sin\beta=-\frac{4}{5}$.

∵ β 在第三象限，∴$\cos\beta=-\frac{3}{5}$.

∴$\cos\frac{\beta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

答案：A

2、$(1+\tan21°)(1+\tan22°)(1+\tan23°)(1+\tan24°)$ 的值是(　　)

A. 16　　　　B. 8

C. 4　　　　D. 2

解析　$(1+\tan21°)(1+\tan24°)=2$，$(1+\tan22°)(1+\tan23°)=2$，更一般的结论：若 $\alpha+\beta=45°$，则 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$.

答案　C

3、函数 $f(x)=\sin^4x+\cos^2x$ 的最小正周期是(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

3、B　$[f(x)=\sin^4x+1-\sin^2x$

$=\sin^4x-\sin^2x+1=-\sin^2x(1-\sin^2x)+1$

$=1-\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{4}\sin^22x$

$=1-\frac{1}{4}\times\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{7}{8}$

$\therefore T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.]

4、函数 $f(x)=\sin x-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的值域为(　　)

A．$[-2,2]$　　B．$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

C．$[-1,1]$　　D.$\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

解析：因为 $f(x)=\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, 所以函数 $f(x)$的值域为$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

答案：B

5、已知 $f(\tan x)=\sin 2x$，则 $f(-1)$的值是(　　)

A. 1　　B. -1

C. $\frac{1}{2}$　　D. 0

[答案]　B

[解析]　$f(\tan x)=\sin 2x=2\sin x\cos x=\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{2\tan x}{\tan^2 x+1}$，$\therefore f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$，$\therefore f(-1)=\frac{-2}{2}=-1$.

6、若函数 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})+a\sin(x-\frac{\pi}{6})$的一条对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{2}$，则 a 等于(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

7、已知 $\sin 2\alpha=\frac{3}{5}\left(\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi\right)$，$\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，则 $\tan(\alpha+\beta)$的值为(　　)

A. -2　　B. -1

C. $-\frac{2}{11}$　　D. $\frac{2}{11}$

解析：由 $\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$，且$\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi$，可得 $\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$，所以 $\tan 2\alpha=-\frac{3}{4}$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha-\beta)]$

$=\dfrac{\tan 2\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan 2\alpha\tan(\alpha-\beta)}=-2.$

8、已知 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$，且 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，则 $\dfrac{\sin 2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}=$(　　)

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$　　C. $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

解析：$\dfrac{\sin 2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)}=2\sqrt{2}\cos\alpha$.

由 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$，

得 $\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-\dfrac{1}{2}$，$\tan\alpha=-3$，

因为 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，

所以 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$2\sqrt{2}\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

答案：C

9、(2012 江苏高考)设 α 为锐角，若 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$，则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的值为__________.

15．解析：因为 α 为锐角，$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$，

所以 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，

所以 $\sin\left[2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{25}$，

且 $0<\alpha+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{4}$，故 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{12}$，

所以 $2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{7}{25}$，

所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left[\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$

$=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{4}$

$=\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{24}{25}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{7}{25}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{17}{50}\sqrt{2}$.

答案：$\frac{17}{50}\sqrt{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$.

10、已知 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，$\alpha$、$\beta$ 均为锐角，求 $\cos\frac{\beta}{2}$ 的值.

剖析　利用已知角，将 $\cos\beta$ 的三角函数值先求出，然后利用半角公式.

解析　$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{5}{13}$.

$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\therefore 0<\alpha+\beta<\pi$.

若 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，$\because \sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha$，

$\therefore \alpha+\beta<\alpha$ 不可能成立，故 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$.

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$.

$\therefore \cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{33}{65}$.

$\therefore 0<\beta<\frac{\pi}{2}$即 $0<\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$,

故 $\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}=\frac{7\sqrt{65}}{65}$.

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{33}{65}$.

$\therefore 0<\beta<\frac{\pi}{2}$即 $0<\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$,

故 $\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}=\frac{7\sqrt{65}}{65}$.

11、已知函数 $f(x)=4\cos\omega x\cdot\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$的最小正周期为π.

(1)求 ω的值;

(2)讨论 $f(x)$在区间[0,2]上的单调性.

解析　(1) $f(x)=2\left[\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\frac{\pi}{4}\right]=2\cdot\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}$. ∵ $f(x)$的最小正周期为π,

$\therefore \frac{2\pi}{2\omega}=\pi$, 故 $\omega=1$.

(2)由(1),得 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}$. 令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$, 解得 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi<x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi$; 令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi<2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, 解得 $\frac{\pi}{8}+k\pi<x\leqslant\frac{5\pi}{8}+k\pi$, 故 $y=f(x)$在 $\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{8},2\right]$上单调递增;在 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right]$上单调递减.

12、已知函数 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})+2\sin(x-\frac{\pi}{4})\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期和对称轴方程;

(2)求函数 $f(x)$在区间 $[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$上的值域.

[解析]　(1)∵ $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})+2\sin(x-\frac{\pi}{4})\cdot\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)$

$=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\sin^2 x-\cos^2 x$

$=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\cos 2x$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，

∴最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

∵$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

∴$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$，

∴对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z$.

(2)∵$x\in[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$，

∴$2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$.

∴$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$在区间$[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}]$上单调递增，

在区间$[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$上单调递减.

当 $x=\frac{\pi}{3}$时，$f(x)$取最大值 1.

又∵$f(-\frac{\pi}{12})=-\frac{\sqrt{3}}{2}<f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$，

∴当 $x=-\frac{\pi}{12}$时，$f(x)$取最小值$-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以函数 $f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$上的值域为$[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$.