周五数学小测试（正余弦定理）

1、在△ABC中，已知$B=45°$，$c=2\sqrt{2}$，$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则A的值是(　　)

A．15°　　　　B．75°

C．105°　　　　D．75°或15°

[答案]　D

[解析]　∵$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

∴$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{2\sqrt{2}\sin 45°}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∵$0°<C<180°$．∴$C=60°$或$120°$，

∴$A=75°$或$15°$．

2、 在锐角三角形ABC中，$b=1$，$c=2$，则a的取值范围是(　　)

A．$1<a<3$　　　　B．$1<a<\sqrt{5}$

C．$\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$　　　　D．不确定

[答案]　C

[解析]　∵$b<c$，△ABC为锐角三角形，

∴边c与边a所对的角的余弦值大于0，

即$b^2+a^2-c^2>0$且$b^2+c^2-a^2>0$，

∴$\begin{cases}1+a^2-4>0\\1+4-a^2>0\end{cases}$．

∴$3<a^2<5$，∴$\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$.

3、在△ABC中，a，b，c分别是∠A，∠B，∠C的对边，且$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b+c}{2c}$，则△$ABC$是(　　)

A．等边三角形　　　　B．直角三角形

C．钝角三角形　　　　D．等腰三角形

解析　$\frac{1+\cos A}{2}=\frac{\sin B+\sin C}{2\sin C}$，∴$\sin C\cos A=\sin B$.

∴$\sin A\cos C=0$，∴$\cos C=0$，∴$\angle C=\frac{\pi}{2}$.

答案　B

4、△ABC中，a，b，c分别是$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边，如果$2b=a+c$，$\angle B=30°$，△ABC的面积为$\frac{3}{2}$，那么b等于(　　)

A. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　B. $1+\sqrt{3}$

C. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$　　D. $2+\sqrt{3}$

解析　∵$2b=a+c$，∴$a^2+c^2=4b^2-2ac$.

∵$S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}$，$\angle B=30°$，

∴$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3}{2}$，即$\frac{1}{4}ac=\frac{3}{2}$.

∴$ac=6$，∴$a^2+c^2=4b^2-12$.

∴$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{4b^2-12-b^2}{2\times 6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴$b^2=4+2\sqrt{3}$，∴$b=1+\sqrt{3}$.

答案　B

5、在△ABC中，关于x的方程$(1+x^2)\sin A+2x\sin B+(1-x^2)\sin C=0$有两个不等的实数根，则$A$为(　　)

A．锐角　　B．直角

C．钝角　　D．不存在

[答案]　A

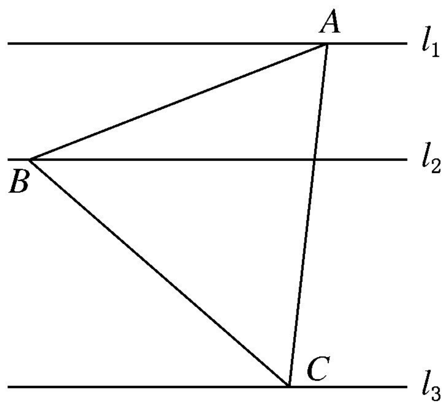
[解析]　把已知方程整理得$(\sin A-\sin C)x^2+2\sin B\cdot x+(\sin A+\sin C)=0$，

$\Delta=4\sin^2B-4(\sin A-\sin C)(\sin A+\sin C)>0$，

即 $\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A>0$.

$\therefore b^2+c^2-a^2>0$，$\therefore \cos A>0$，可知 A 为锐角.

6、如图，l_1，l_2，l_3 是同一平面内的三条平行直线，l_1 与 l_2 间的距离是 1，l_2 与 l_3 间的距离是 2，正三角形 ABC 的三顶点分别在 l_1，l_2，l_3 上，则△ABC 的边长是(　　)



A. $2\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

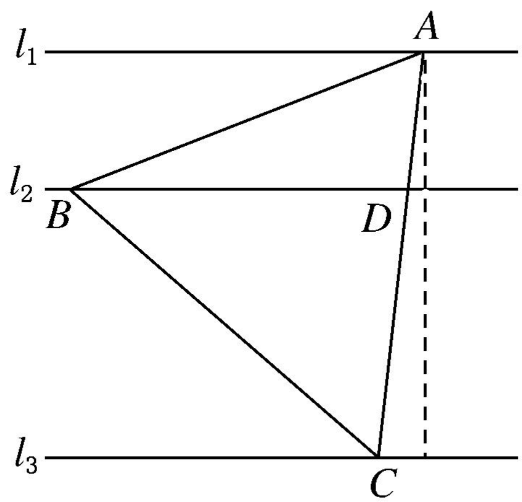
C. $\dfrac{3\sqrt{17}}{4}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

解析　如图，设 $AB=a$，则由已知 $AD=\frac{1}{3}a$.

在△ABD 中，由余弦定理，知 $\cos A=\frac{1}{2}=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}$.①

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BD\cdot 3=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，得 $BD=\frac{\sqrt{3}a^2}{6}$，

代入①式，得 $a=\frac{2}{3}\sqrt{21}$.



答案　D

7、$\triangle ABC$中，$A=\dfrac{\pi}{3}$，$BC=3$，则$\triangle ABC$的周长为(　　)

A. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)+3$　　　　B. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$

C. $6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)+3$　　　　D. $6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$

答案　D

解析　$A=\dfrac{\pi}{3}$，$BC=3$，设周长为x，由正弦定理知$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}=2R$，

由合分比定理知$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB+BC+AC}{\sin A+\sin B+\sin C}$，

即$\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin B+\sin C}$.

$\therefore 2\sqrt{3}\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin B+\sin\ \ A+B\ \ \right]=x$,

即 $x=3+2\sqrt{3}\left[\sin B+\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

$=3+2\sqrt{3}\left(\sin B+\sin B\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos B\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=3+2\sqrt{3}\left(\sin B+\dfrac{1}{2}\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)$

$=3+2\sqrt{3}\left(\dfrac{3}{2}\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)$

$=3+6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B\right)$

$=3+6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$.

8、

函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是________.

9、在△*ABC*中，若 *A*>*B*，则下列关系中不一定正确的是________.

①sin *A*>sin *B*　　②cos *A*<cos *B*

③sin 2*A*>sin 2*B*　④cos 2*A*<cos 2*B*

③

解析　在△ABC 中，A>B，*sin* A>*sin* B，*cos* A<*cos* B.

∴$1-2\sin^2 A<1-2\sin^2 B$,

∴*cos* 2A<*cos* 2B.

10、在 Rt△*ABC*中，*C*=90°，且 *A*，*B*，*C*所对的边 *a*，*b*，*c*满足 *a*+*b*=*cx*，则实数 *x*的取值范围是_________.

$(1,\sqrt{2}]$　点拨：$x=\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$. 又$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴$\frac{\pi}{4}<A+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$. ∴$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$. 即$x\in(1,\sqrt{2}]$.

17、ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$

(1)求COSB;

（2）若a+c=6,ΔABC的面积为2，求b.

12、在△*ABC*中，已知$\angle A=\frac{\pi}{3}$，边 $BC=2\sqrt{3}$，设∠*B*=*x*，周长为 *y*.

(1)求函数 *y*=*f*(*x*)的解析式和定义域;

(2)求 *y* 的最大值及取得最大值时△*ABC*的形状.

解　(1)△*ABC*的内角和为∠*A*+∠*B*+∠*C*=π，

由$\angle A=\frac{\pi}{3}$，∠*B*>0，∠*C*>0，得 $0<\angle B<\frac{2\pi}{3}$.

由正弦定理，知 $AC=\frac{BC}{\sin A}\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\sin x=4\sin x$，

$AB=\frac{BC}{\sin A}\sin C=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$.

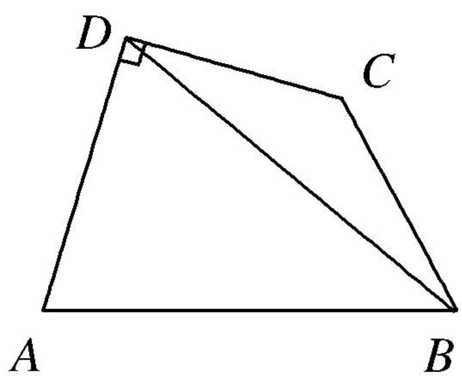
$\therefore y=4\sin x+4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+2\sqrt{3}\left(0<x<\frac{2\pi}{3}\right)$.

(2) $\because y=4\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)+2\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}\right)$,

$\therefore$ 当 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，y 取得最大值 $6\sqrt{3}$，此时△ABC 为等边三角形.

13、如图所示，已知在四边形 $ABCD$ 中，$AD\perp CD$，$AD=10$，$AB=14$，$\angle BDA=60°$，$\angle BCD=135°$，求 BC 的长.



解　在△ADB 中，$\angle BDA=60°$，$AB=14$，$AD=10$，

由余弦定理得：$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos 60°$，

即 $14^2=100+BD^2-2\times 10\times\frac{1}{2}\times BD$.

$\therefore BD^2-10BD-96=0$，$BD=16$ 或 $BD=-6$(舍).

在△DCB 中，$\angle BDC=90°-\angle BDA=90°-60°=30°$，$\angle DCB=135°$，

∴由正弦定理得：$\frac{DB}{\sin 135^\circ}=\frac{BC}{\sin 30^\circ}$，

∴$BC=\frac{16\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=8\sqrt{2}$.

14、在△ABC中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、C. 已知 $\cos C+(\cos A-\sqrt{3}\sin A)\cos B=0$.

(1)求角 B 的大小；

(2)若 $a+c=1$，求 b 的取值范围.

[解析]　(1)由已知得 $-\cos(A+B)+\cos A\cos B-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$，

即有 $\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$.

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin B-\sqrt{3}\cos B=0$.

又 $\cos B\neq 0$，所以 $\tan B=\sqrt{3}$.

又 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由余弦定理，有 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.

因为 $a+c=1$，$\cos B=\frac{1}{2}$，有 $b^2=3(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$.

又 $0<a<1$，于是有 $\frac{1}{4}\leqslant b^2<1$，即有 $\frac{1}{2}\leqslant b<1$.