高校应用数学学报
2023, 38(3): 339-346

关于无磁阻抗和无热耗散的MHD-Boussinesq系统的Prodi-Serrin型爆破准则

纪梓汉， 潘星宏

(南京航空航天大学 数学学院, 江苏南京 211106)

摘　要: 由速度的Prodi-Serrin条件推导出无磁阻抗, 无热耗散的MHD-Boussinesq系统解的正则性. 对磁场或温度变化没有作出先验假设.

关键词: 不可压缩; MHD-Boussinesq系统; 正则性准则; 无磁阻抗; 无热耗散
中图分类号: O175.2
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2023)03-0339-08

§1　引　言

本文讨论三维的无磁阻抗, 无热扩散的MHD-Boussinesq系统解的全局正则性问题, 方程为

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u + \nabla p - \Delta u = h\cdot\nabla h + \rho e_3, \\ \partial_t h + u\cdot\nabla h - h\cdot\nabla u - \Delta h = 0, \\ \partial_t \rho + u\cdot\nabla\rho = 0, \\ \nabla\cdot u = \nabla\cdot h = 0, \end{cases} \quad \text{在三维空间}\mathbf{R}^3\text{中}. \tag{1}$$

这里u是速度域, h是磁场, p是压力, ρ是温度变化. 向量$e_3=(0,0,1)$是垂直方向的单位向量. 物理上$(1)_1$是温度变化影响下的动量守恒定律. 而第二个方程是描述法拉第感应定律的"麦克斯韦-法拉第"方程. 第三个方程则代表了温度的变化. 系统(1)模拟了由洛伦兹力和热场浮力影响和驱动下的不可压缩导电流的流动效应, 在大气科学和地球物理应用中具有重要作用, 详见文献[1-4].

最近有一些研究集中于MHD-Boussniseq系统弱解和强解的全局适定性. 二维情况见[5-6]和其中的参考文献. 而三维情况下, Larios-Pei[7]证明了Sobolev空间中解的局部适定性结果. 他们还导出了系统(1)的一个亚临界Prodi-Serrin正则性判别准则, 其条件取决于u和b的部分分量. Liu-Bian-Pu[8]证明了动量方程中具有非线性阻尼项的系统(1)强解的全局适定性. 最近, Bian-Pu[9]在假设初始温度变化ρ_0的支集远离z轴且在z轴上的投影是紧集的条件下, 证明

收稿日期: 2022-05-07　　修回日期: 2022-12-05
基金项目: 国家自然科学基金青年基金(11801268); 国家自然科学基金重点项目(12031006); 南京航空航天大学青年科技创新基金(NS2023039)

了MHD-Boussinesq系统在没有磁阻抗和热耗散的情况时, 一类轴对称大解的全局正则性. 后来, Pan[10]取消了对温度变化ρ初值支集的假设, 从而改进了此结果.

本文中, $C_{a,b,c,\cdots}$代表依赖于a, b, $c,\cdots$的正常数, 不同行之间可能会不同. 采用$A \lesssim B$表示$A \leq CB$. 同时, $A \sim B$ 既表示$A \lesssim B$也表示$B \lesssim A$. $[\mathcal{A},\mathcal{B}]=\mathcal{AB}-\mathcal{BA}$表示算子$\mathcal{A}$和算子$\mathcal{B}$的交换子. 对于$1 \leq p \leq \infty$和$k \in \mathbf{N}$, L^p 表示通常的Lebesgue空间, 其范数定义为

$$\|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbf{R}^3} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \underset{x\in\mathbf{R}^3}{esssup}\,|f(x)|, & p=\infty. \end{cases}$$

用$W^{k,p}=W^{k,p}(\mathbf{R}^3)$表示通常的Sobolev空间, $\dot{W}^{k,p}=\dot{W}^{k,p}(\mathbf{R}^3)$表示齐次的Sobolev空间, 他们的范数和半范相应的为

$$\|f\|_{W^{k,p}} := \sum_{0\leq|L|\leq k} \|\nabla^L f\|_{L^p}, \quad |f|_{\dot{W}^{k,p}} := \sum_{|L|=k} \|\nabla^L f\|_{L^p}.$$

这里$L=(\ell_1,\ell_2,\ell_3)$是多重指标. 其中$\ell_i \in \mathbf{N}$ $(i=1,2,3)$, $\nabla^L := \partial_{x_1}^{\ell_1}\partial_{x_2}^{\ell_2}\partial_{x_3}^{\ell_3}$. 如果$p=2$, 也简单用$H^k$和$\dot{H}^k$去表示$W^{k,p}$和$\dot{W}^{k,p}$. 对于任意的Banach空间$X$, 如果

$$\|v(t,\cdot)\|_X \in L^p(0,T),$$

就说$v:\ [0,T]\times\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$属于Bochner空间$L^p(0,T;X)$.同样为简便起见, 用$L_T^pX$表示$L^p(0,T;X)$.

现在陈述本文的主要结果: MHD-Boussinesq系统(1)的速度上的Prodi-Serrin类型爆破准则.

定理1.1 假设$m \geq 3$是一个整数. 初值$(u_0,h_0,\rho_0) \in H^m$满足$\nabla\cdot u_0 = \nabla\cdot h_0 = 0$. 如果$(u,h,\rho) \in C([0,T);H^m)$是系统(1)的一个解. 则在下面两者假设之一满足的条件下, 此解按H^m范数可以延拓到T.

$$\nabla u \in L^p\left(0,T;L^q\right), \quad \text{with} \quad \frac{2}{p}+\frac{3}{q} \leq 2, \quad 3/2 < q \leq \infty; \tag{2}$$

或者

$$u \in L^p\left(0,T;L^q\right), \quad \text{with} \quad \frac{2}{p}+\frac{3}{q} \leq 1, \quad 3 < q \leq \infty. \tag{3}$$

注1.2 据作者所知, 爆破准则(2)和(3)对于如下的三维无耗散效应的Boussinesq系统都是新的结果.

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u + \nabla p - \Delta u = \rho e_3, \\ \partial_t \rho + u\cdot\nabla\rho = 0, \\ \nabla\cdot u = 0. \end{cases}$$

对于系统(1), 如果$h=\rho\equiv 0$, 则得到经典的不可压缩Navier-Stokes 方程. 关于不可压NS方程类型(2) 和(3) 的爆破准则最早是在Prodi [13]和Serrin [14]分别得到的. (3)的极端情形$p=\infty, q=3$是在文献[15]得到了证明. 但是这个爆破准则是关于速度的三个分量的, 减少速度分量个数的Prodi-Serrin类型的爆破准则成了一个公开的数学难题. 这里罗列一些, 基于作者兴趣的, 单个分量在临界空间的爆破准则. 参看[16-18]以及那里的参考文献. 对于本篇文章中考虑的MHD-Boussinesq系统, 这里提到文献[19-20]. 这两篇论文对一类轴对称的MHD-Boussinesq系统给出了一个分量的临界爆破准则.

这篇文章安排如下. §2给出证明定理1.1需要的几个常用引理. §3给出了系统(1)的Prodi-Serrin型爆破准则.

§2 预备知识

本节给出一些有用的引理, 包括Gagliardo-Nirenberg不等式, 插值不等式, 三项乘积积分的一个估计, 以及热流在$L_T^rL^p$类型空间的极大正则性估计.

首先, 不加证明的给出下面的Gagliardo-Nirenberg不等式.

引理2.1(Gagliardo-Nirenberg) 固定$q,r\in[1,\infty]$和$j,m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, 其中$j\le m$. 假定$f\in L^q(\mathbf{R}^d)\cap\dot W^{m,r}(\mathbf{R}^d)$以及存在实数$\alpha\in[j/m,1]$ 使得

$$\frac{1}{p}=\frac{j}{d}+\alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{d}\right)+\frac{1-\alpha}{q}.$$

则有$f\in\dot W^{j,p}(\mathbf{R}^d)$. 同时存在一个常数$C>0$使得

$$\|\nabla^j f\|_{L^p(\mathbf{R}^d)}\le C\|\nabla^m f\|^{\alpha}_{L^r(\mathbf{R}^d)}\|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\mathbf{R}^d)},$$

但如下两种情况除外.

(i) $j=0$, $mr<d$和$q=\infty$; (在这种情况下有必要假设要么在空间无穷远处$|u|\to 0$ 或者存在$s<\infty$使得$u\in L^s(\mathbf{R}^d)$.)

(ii) $1<r<\infty$和$m-j-d/r\in\mathbf{N}$. (在这种情况下有必要假设$\alpha<1$)

接下来, 回顾一下下面的时空插值, 这是Hölder不等式和Sobolev嵌入定理的直接结论.

引理2.2 如果$u\in L^\infty\left(0,T;L^2(\mathbf{R}^3)\cap L^2\left(0,T;\dot H^1(\mathbf{R}^3)\right)\right)$, 则

$$u\in L^q\left(0,T;L^p(\mathbf{R}^3)\right).$$

其中

$$\frac{2}{q}+\frac{3}{p}\ge\frac{3}{2},\quad 2\le p\le 6.$$

证 由Sobolev不等式可以推出$u\in L^2\left(0,T;L^6(\mathbf{R}^3)\right)$. 然后在$L^2$和$L^6$之间插值得到对于任意的$p\in[2,6]$,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^p}\le\|u(t,\cdot)\|^{(6-p)/2p}_{L^2}\|u(t,\cdot)\|^{(3p-6)/2p}_{L^6}.$$

对t进行积分得到

$$\int_0^T\|u(t,\cdot)\|^q_{L^p}\mathrm{d}t\le\int_0^T\|u(t,\cdot)\|^{(6-q)q/2p}_{L^2}\|u(t,\cdot)\|^{(3p-6)q/2p}_{L^6}\mathrm{d}t.$$

由于$u\in L^\infty\left(0,T;L^2\right)\cap L^2\left(0,T;L^6\right)$, 如果$(3p-6)q/2p\le 2$, 那么上式右端就是有限的. 而$(3p-6)q/2p\le 2$等价于

$$\frac{2}{q}+\frac{3}{p}\ge\frac{3}{2}.$$

这就完成了引理的证明.

接下来, 关注一个三项乘积积分的估计.

引理2.3 让$m\in\mathbf{N}$, $m\ge 2$以及$f,g,k\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$. 则下面的估计成立:

$$\left|\int_{\mathbf{R}^3}[\nabla^m,\, f\cdot\nabla]g\nabla^m k\mathrm{d}x\right|\le C\,\|\nabla^m(f,g,k)\|^2_{L^2}\,\|\nabla(f,\,g)\|_{L^\infty}.\tag{4}$$

证 对于(4), 通过Hölder不等式, 能够得到

$$\left|\int_{\mathbf{R}^3}[\nabla^m,\, f\cdot\nabla]g\nabla^m k\mathrm{d}x\right|\le\|[\nabla^m,\, f\cdot\nabla]g\|_{L^2}\|\nabla^m k\|_{L^2}.\tag{5}$$

利用Kato-Ponce[11]中的交换子估计, 如下成立

$$\|[\nabla^m,\, f\cdot\nabla]g\|_{L^2}\le C\left(\|\nabla f\|_{L^\infty}\|\nabla^m g\|_{L^2}+\|\nabla g\|_{L^\infty}\|\nabla^m f\|_{L^2}\right).\tag{6}$$

然后(4)可以由(6)插入(5)得到.

最后, 下面的引理揭示了热方程在$L_T^r L^p$空间下的的标准的极大正则性估计. 粗略地说, 非齐次线性热方程的二阶偏导数与非齐次外力项f具有相同的正则性. 相应的证明可以在[12]中的定理7.3找到.

引理2.4(热方程的$L_T^q L^p$极大正则性) 定义算子

$$\mathcal{A}: \quad f \longmapsto \int_0^t \nabla^2 e^{(t-s)\Delta} f(s,\cdot)\mathrm{d}s.$$

则$\forall T\in(0,\infty]$以及$1<p,q<\infty$, $\mathcal{A}$是从$L^q\left(0,T;L^p(\mathbf{R}^d)\right)$到其自身的映射. 更进一步有

$$\|\mathcal{A}f\|_{L^q(0,T;L^p(\mathbf{R}^d))} \le C\|f\|_{L^q(0,T;L^p(\mathbf{R}^d))}.$$

§3 解的Prodi-Serrin类型的爆破准则

首先, 给出如下的描述系统(1)基本估计的引理.

引理3.1(基本能量估计) 让$(u,h,\rho)\in H^m$是系统(1)的解, 则下面估计成立.

(i) 对于$p\in[1,\infty]$以及$t\in\mathbf{R}_+$,

$$\|\rho(t)\|_{L^p} \le \|\rho_0\|_{L^p}, \tag{7}$$

(ii) 对于$u_0,h_0,\rho_0\in L^2$以及$t\in\mathbf{R}_+$,

$$\|(u,h)(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla(u,h)(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s \le C_0(1+t)^2, \tag{8}$$

其中C_0只依赖于$\|(u_0,h_0,\rho_0)\|_{L^2}$.

证 当$p<\infty$, (7)中的估计是经典的传输方程的估计. $p=\infty$时的估计来自于极值原理. 同时估计(8)来自于系统(1)的标准的L^2能量估计以及估计(7). 读者可以参看[10, Proposition 2.1]得到更详细的证明.

3.1 解的$L_T^\infty \dot{H}^1 \cap L_T^2 \dot{H}^2$ 估计

首先对(1)的前两个方程作用∇, 然后对得到的方程分别与∇u, ∇h进行空间L^2内积运算, 可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla(u,h)\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2(u,h)\|_{L^2}^2 \\
&= -\underbrace{\int_{\mathbf{R}^3} \nabla u[\nabla, u\cdot\nabla]u\mathrm{d}x}_{K_1} + \underbrace{\int_{\mathbf{R}^3} \nabla u[\nabla, h\cdot\nabla]h\mathrm{d}x}_{K_2} - \underbrace{\int_{\mathbf{R}^3} \nabla h[\nabla, u\cdot\nabla]h\mathrm{d}x}_{K_3} \\
&\quad + \underbrace{\int_{\mathbf{R}^3} \nabla h[\nabla, h\cdot\nabla]u\mathrm{d}x}_{K_4} + \underbrace{\int_{\mathbf{R}^3} \nabla\rho\cdot\nabla u^3\mathrm{d}x}_{K_5}.
\end{aligned}$$

3.1.1 ∇u上的准则

在这种情况下, 如下估计K_i项.

$$|K_1| \le \|\nabla u\|_{L^q}\|\nabla u\|_{L^{\frac{2q}{q-1}}}^2 \le C\|\nabla u\|_{L^q}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{2q-3}{q}}\|\nabla^2 u\|_{L^2}^{\frac{3}{q}} \le \frac{1}{4}\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^q}^{\frac{2q}{2q-3}}.$$

上面的计算用到了Hölder不等式, Gagliardo-Nirenberg不等式, Young不等式. 同样地, 项K_i $(i=2,3,4,5)$能够像项K_1类似估计. 因此可以得到

$$|K_2|+|K_3|+|K_4|\le\frac{1}{4}\|\nabla^2h\|_{L^2}^2+C\|\nabla h\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^q}^{\frac{2q}{2q-3}},$$

以及

$$|K_5|=\left|\int_{\mathbf{R}^3}\rho\Delta u^3\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{4}\|\nabla^2u\|_{L^2}^2+C\|\rho\|_{L^2}^2. \tag{9}$$

结合以上的对项K_i的估计并且注意到(7), 可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla(u,h)\|_{L^2}^2+\|\nabla^2(u,h)\|_{L^2}^2\le C\|\nabla u\|_{L^q}^{\frac{2q}{2q-3}}\|\nabla(u,h)\|_{L^2}^2+C\|\rho_0\|_{L^2}^2.$$

然后Grönwall不等式表明

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}\|\nabla(u,h)\|_{L^2}^2+&\int_0^T\|\nabla^2(u,h)(t)\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\\&\le\left(\|\nabla(u_0,h_0)\|_{L^2}^2+\|\rho_0\|_{L^2}^2T\right)\exp\left(C\|\nabla u\|_{L_t^pL_x^q}^{\frac{2q}{2q-3}}T^{\frac{q}{2q-3}(2-\frac{2}{p}-\frac{3}{q})}\right)\\&<\infty.\end{aligned}\tag{10}$$

3.1.2 u上的准则

在这种情况下, 按如下方式对项K_i $(i=1,2,3,4)$进行估计, 而对于K_5, 可以像(9)一样进行估计. 采用分部积分, Hölder不等式, Gagliardo-Nirenberg不等式以及Young不等式, 可以得到

$$\begin{aligned}|K_1|=\left|\int_{\mathbf{R}^3}u\nabla u\nabla^2u\mathrm{d}x\right|&\le\|u\|_{L^q}\|\nabla u\|_{L^{\frac{2q}{q-2}}}\|\nabla^2u\|_{L^2}\\&\le C\|u\|_{L^q}\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{q-3}{q}}\|\nabla^2u\|_{L^2}^{1+\frac{3}{q}}\le\frac{1}{4}\|\nabla^2u\|_{L^2}^2+C\|\nabla u\|_{L^2}^2\|u\|_{L^q}^{\frac{2q}{q-3}}.\end{aligned}$$

对于$j=2,3,4$, 有

$$\begin{aligned}|K_j|\lesssim\left|\int_{\mathbf{R}^3}u\nabla h\nabla^2h\mathrm{d}x\right|&\le\|u\|_{L^q}\|\nabla h\|_{L^{\frac{2q}{q-2}}}\|\nabla^2h\|_{L^2}\\&\le C\|u\|_{L^q}\|\nabla h\|_{L^2}^{\frac{q-3}{q}}\|\nabla^2h\|_{L^2}^{1+\frac{3}{q}}\le\frac{1}{4}\|\nabla^2h\|_{L^2}^2+C\|\nabla h\|_{L^2}^2\|u\|_{L^q}^{\frac{2q}{q-3}}.\end{aligned}$$

以上估计表明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla(u,h)\|_{L^2}^2+\|\nabla^2(u,h)\|_{L^2}^2\le C\|u\|_{L^q}^{\frac{2q}{q-3}}\|\nabla(u,h)\|_{L^2}^2+C\|\rho_0\|_{L^2}^2.$$

然后Grönwall不等式表明

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}\|\nabla(u,h)\|_{L^2}^2+&\int_0^T\|\nabla^2(u,h)(t)\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\\&\le\left(\|\nabla(u_0,h_0)\|_{L^2}^2+\|\rho_0\|_{L^2}^2T\right)\exp\left(C\|u\|_{L_t^pL_x^q}^{\frac{2q}{q-3}}T^{\frac{q}{q-3}(1-\frac{2}{p}-\frac{3}{q})}\right)<\infty.\end{aligned}\tag{11}$$

从(10)以及(11), 在定理1.1的假设下, 可以得到$(u,h)\in L^\infty(0,T;H^1)\cap L^2(0,T;H^2)$.

3.2 ∇u, ∇h以及$\nabla\rho$的$L_T^1L^\infty$估计

一旦(10)或者(11)顺利得到, 由引理2.2, 可以得到∇u和∇h属于$L^{8/3}\left(0,T;L^4(\mathbf{R}^3)\right)$. 利用引

理2.1中的插值不等式, 再联合基本能量估计(8), 可以推得

$$\begin{aligned}\int_0^T \|(u,h)(t)\|_{L^\infty}^{8/3}\mathrm{d}t &\lesssim \int_0^T \left(\|(u,h)(t)\|_{L^2}^{1/7}\|\nabla(u,h)(t)\|_{L^4}^{6/7}\right)^{8/3}\mathrm{d}t\\ &\lesssim \|(u,h)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^{8/21}\int_0^T \|\nabla(u,h)(t)\|_{L^4}^{16/7}\mathrm{d}t\\ &\lesssim \|(u,h)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^{8/21}\left(\int_0^T \|\nabla(u,h)(t)\|_{L^4}^{8/3}\mathrm{d}t\right)^{6/7}\left(\int_0^T \mathrm{d}t\right)^{1/7}\\ &\lesssim T^{1/7}\|(u,h)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^{8/21}\|\nabla(u,h)\|_{L^{8/3}(0,T;L^4)}^{16/7}<\infty.\end{aligned}$$

通过结合上述事实$u,h\in L_T^{8/3}L^\infty$以及$\nabla u,\nabla h\in L_T^{8/3}L^4$, 再利用Höder不等式, 可以有

$$u\cdot\nabla u-h\cdot\nabla h\in L^{4/3}(0,T;L^4(\mathbf{R}^3)).$$

同时由(7), 明显可以看到$\rho\in L^\infty(0,T;L^4(\mathbf{R}^3))\subset L^{4/3}(0,T;L^4(\mathbf{R}^3))$. 注意到$w=\nabla\times u$满足

$$\partial_t w-\Delta w=-\nabla\times(u\cdot\nabla u-h\cdot\nabla h-\rho e_3), \tag{12}$$

然后通过利用引理2.4, 有

$$\|\nabla w\|_{L^{4/3}(0,T;L^4)}\le C\|u\cdot\nabla u-h\cdot\nabla h-\rho e_3\|_{L^{4/3}(0,T;L^4)}<\infty.$$

现在回忆到Biot-Savart定律以及u的散度自由的条件, 能够得到

$$-\Delta u=\nabla\times\nabla\times u=\nabla\times w.$$

然后通过使用Reisz变换对空间的L^p $(1<p<+\infty)$有界性, 下面结果可以被推导出来

$$\|\nabla^2 u\|_{L^{4/3}(0,T;L^4)}=\|\nabla^2(-\Delta)^{-1}\nabla\times w\|_{L^{4/3}(0,T;L^4)}\le C\|\nabla w\|_{L^{4/3}(0,T;L^4)}<+\infty. \tag{13}$$

通过结合(10), (11)以及(13), 同时利用插值不等式和Hölder不等式, 下面的推导成立

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^\infty}\mathrm{d}t &\lesssim \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^2}^{1/7}\|\nabla^2 u(t)\|_{L^4}^{6/7}\mathrm{d}t\\ &\lesssim \|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^{1/7}\left(\int_0^T \|\nabla w(t)\|_{L^4}^{4/3}\mathrm{d}t\right)^{9/14}T^{5/14}<\infty.\end{aligned} \tag{14}$$

相似地, 通过采用从(12)到(14)的推断, 并注意到

$$\partial_t\nabla\times h-\Delta\nabla\times h=-\nabla\times(u\cdot\nabla h-h\cdot\nabla u),$$

能够推得

$$\nabla h\in L^1(0,T;L^\infty(\mathbf{R}^3)). \tag{15}$$

现在还剩下对$\nabla\rho$的估计. 作用∇到方程$(1)_3$, 得到$\partial_t\nabla\rho+u\cdot\nabla\nabla\rho=-\nabla u\cdot\nabla\rho$. 常规的$L^\infty$估计表明

$$\|\nabla\rho(t)\|_{L^\infty}\le\|\nabla\rho_0\|_{L^\infty}+\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^\infty}\|\nabla\rho(s)\|_{L^\infty}\mathrm{d}s.$$

通过Grönwall不等式和应用(14), 得到

$$\sup_{0\le t\le T}\|\nabla\rho(t)\|_{L^\infty}\le\|\nabla\rho_0\|_{L^\infty}\exp\left(\int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^\infty}\mathrm{d}t\right)<\infty. \tag{16}$$

因此通过结合(14), (15)以及(16), 最后能够得到

$$\int_0^T \|\nabla(u,h,\rho)(t)\|_{L^\infty}\mathrm{d}t<\infty.$$

3.3 高阶范数的估计

对于任意的整数$m \geq 2$, 作用∇^m到系统$(1)_{1,2,3}$, 能够推导得到如下的方程

$$\begin{cases} \partial_t \nabla^m u + u \cdot \nabla \nabla^m u + \nabla \nabla^m p - \Delta \nabla^m u = h \cdot \nabla \nabla^m h + \nabla^m (\rho e_3) - [\nabla^m, u \cdot \nabla] u + [\nabla^m, h \cdot \nabla] h, \\ \partial_t \nabla^m h + u \cdot \nabla \nabla^m h - h \cdot \nabla \nabla^m u - \Delta \nabla^m h = -[\nabla^m, u \cdot \nabla] h + [\nabla^m, h \cdot \nabla] u, \\ \partial_t \nabla^m \rho + u \cdot \nabla \nabla^m \rho = -[\nabla^m, u \cdot \nabla] \rho. \end{cases}$$

对上述方程组逐一进行L^2能量估计能够得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\nabla^m (u,h,\rho)(t)\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^{m+1}(u,h)(t)\right\|_{L^2}^2 \\ = &- \underbrace{\int_{\mathbf{R}^3} [\nabla^m, u \cdot \nabla] u \nabla^m u \mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathbf{R}^3} [\nabla^m, h \cdot \nabla] h \nabla^m u \mathrm{d}x}_{I_2} - \underbrace{\int_{\mathbf{R}^3} [\nabla^m, u \cdot \nabla] h \nabla^m h \mathrm{d}x}_{I_3} \\ &+ \underbrace{\int_{\mathbf{R}^3} [\nabla^m, h \cdot \nabla] u \nabla^m h \mathrm{d}x}_{I_4} - \underbrace{\int_{\mathbf{R}^3} [\nabla^m, u \cdot \nabla] \rho \nabla^m \rho \mathrm{d}x}_{I_5} + \underbrace{\int_{\mathbf{R}^3} \nabla^m (\rho e_3) \nabla^m u \mathrm{d}x}_{I_6}. \end{aligned} \tag{17}$$

应用引理2.3中的(4), 对于I_1–I_5, 满足如下估计

$$I_j \lesssim \|\nabla^m (u,h,\rho)\|_{L^2}^2 \|\nabla (u,h,\rho)\|_{L^\infty}, \quad \forall j = 1,2,3,4,5. \tag{18}$$

同时项I_6满足

$$I_6 \leq \|\nabla^m \rho\|_{L^2} \|\nabla^m u\|_{L^2} \leq \left\|\nabla^k (u,h,\rho)\right\|_{L^2}^2. \tag{19}$$

将(18)和(19)插入(17), 可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\nabla^m (u,h,\rho)(t)\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla^{m+1}(u,h)(t)\right\|_{L^2}^2 \lesssim \|\nabla^m (u,h,\rho)\|_{L^2}^2 \left(\|\nabla (u,h,\rho)\|_{L^\infty} + 1\right).$$

从上述估计, 然后利用Grönwall不等式, 有

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\nabla^m (u,h,\rho)(t)\|_{L^2} < \infty, \quad \forall m \in \mathbf{N}.$$

从而在Prodi-Serrin类型假设条件(2)或者(3)下, (u,h,ρ)的H^m范数能够延拓到T时刻. 这就完成了定理1.1的证明.

参考文献:

[1] Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics[M]. New York: Springer-Verlag, 1987.

[2] Marchioro C, Pulvirenti M. Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids[M]. New York: Springer-Verlag, 1994.

[3] Majda A. Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean[M]. New York: AMS/CIMS, 2003.

[4] Mulone G, Rionero S. Necessary and sufficient conditions for nonlinear stability in the magnetic Bénard problem[J]. Arch Ration Mech Anal, 2003, 166(3): 197-218.

[5] Bian Dongfen, Gui Guilong. On 2-D Boussinesq equations for MHD convection with stratification effects[J]. J Differ Equation, 2016, 261(3): 1669-1711.

[6] Bian Dongfen, Liu Jitao. Initial-boundary value problem to 2D Boussinesq equations for MHD convection with stratification effects[J]. J Differ Equation, 2017, 263(12): 8074-8101.

[7] Larios A, Pei Yuan. On the local well-posedness and a Prodi-Serrin-type regularity criterion of the three-dimensional MHD-Boussinesq system without thermal diffusion[J]. J Differ Equation, 2017, 263(2): 1419-1450.

[8] Liu Huimin, Bian Dongfen, Pu Xueke. Global well-posedness of the 3D Boussinesq-MHD system without heat diffusion[J]. Z Angew Math Phys, 2019, 70(3): Art. 81, 19 pp.

[9] Bian Dongfen, Pu Xueke. Global smooth axisymmetic solutions of the Boussinesq equations for magnetohydrodynamics convection[J]. J Math Fluid Mech, 2020, 22(1): Paper No. 12, 13 pp.

[10] Pan Xinghong. Global regularity for the 3D non-diffusive MHD-Boussinesq system with axisymmetric data[J]. Acta Appl Math, 2022, 180: Paper No. 6, 18 pp.

[11] Kato T, Ponce G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations[J]. Comm Pure Appl Math, 1988, 41(7): 891-907.

[12] Lemarié P G. Recent developments in the Navier-Stokes problem[M]. London: Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, 431, 2002.

[13] Prodi, G. Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes[J]. Ann Mat Pura Appl, 1959, 48(4): 173-182.

[14] Serrin J. On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations[J]. Arch Rational Mech Anal, 1962, 9: 187-195.

[15] Iskauriaza L, Seregin G, Shverak V. $L_{3,\infty}$-solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness[J]. Russian Math Surveys, 2003, 58(2): 211-250.

[16] Chemin J, Zhang Ping. On the critical one component regularity for 3-D Navier-Stokes systems[J]. Ann Sci Éc Norm Supér, 2016, 49(1): 131-167.

[17] Chemin J, Zhang Ping, Zhang Zhifei. On the critical one component regularity for 3-D Navier-Stokes system: general case[J]. Arch Ration Mech Anal, 2017, 224(3): 871-905.

[18] Han Bin, Lei Zhen, Li Dong, et al. Sharp one component regularity for Navier-Stokes[J]. Arch Ration Mech Anal, 2019, 231(2): 939-970.

[19] Li Zijin. Critical conditions on ω^θ imply the regularity of axially symmetric MHD-Boussinesq systems[J]. J Math Anal Appl, 2022, 505, no. 1, Paper No. 125451, 18 pp.

[20] Li Zijin, Pan Xinghong. One component regularity criteria for the axially symmetric MHD-Boussinesq system[J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2022, 42(5): 2333-2353.

Prodi-Serrin regularity criterion for the 3D MHD-Boussinesq system with zero resistivity and zero thermal diffusivity

JI Zi-han, PAN Xing-hong

(School of Mathematics and Key Laboratory of MIIT, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China)

Abstract: In this paper, the following result is shown: Prodi-Serrin condition on the velocity implies regularity of the MHD-Boussinesq system with zero resistivity and zero thermal diffusivity. No assumptions on the magnetic field or the temperature fluctuation are imposed.

Keywords: incompressible, MHD-Boussinesq system; regularity criterion; zero resistivity; zero thermal diffusivity

MR Subject Classification: 35Q35; 76D03