时间和空间复杂度

【本节目标】

1. **算法效率**
2. **时间复杂度**
3. **空间复杂度**

1. 如何衡量一个算法的好坏

下面求斐波那契数列的算法好还是不好，为什么？该如何衡量一个算法的好坏呢？

```
public static long Fib(int N){
    if(N < 3){
        return 1;
    }

    return Fib(N-1) + Fib(N-2);
}
```

2. 算法效率

算法效率分析分为两种：第一种是时间效率，第二种是空间效率。时间效率被称为时间复杂度，而空间效率被称作空间复杂度。 时间复杂度主要衡量的是一个算法的运行速度，而空间复杂度主要衡量一个算法所需要的额外空间，在计算机发展的早期，计算机的存储容量很小。所以对空间复杂度很是在乎。但是经过计算机行业的迅速发展，计算机的存储容量已经达到了很高的程度。所以我们如今已经不需要再特别关注一个算法的空间复杂度。

3. 时间复杂度

3.1 时间复杂度的概念

时间复杂度的定义：在计算机科学中，**算法的时间复杂度是一个数学函数**，它定量描述了该算法的运行时间。一个算法执行所耗费的时间，从理论上说，是不能算出来的，只有你把你的程序放在机器上跑起来，才能知道。但是我们需要每个算法都上机测试吗？是可以都上机测试，但是这很麻烦，所以才有了时间复杂度这个分析方式。一个算法所花费的时间与其中语句的执行次数成正比例，**算法中的基本操作的执行次数，为算法的时间复杂度。**

3.2 大O的渐进表示法

```
// 请计算一下func1基本操作执行了多少次?
void func1(int N){
    int count = 0;
    for (int i = 0; i < N ; i++) {
        for (int j = 0; j < N ; j++) {
            count++;
        }
    }
```

```
    for (int k = 0; k < 2 * N ; k++) {
        count++;
    }

    int M = 10;
    while ((M--) > 0) {
        count++;
    }

    System.out.println(count);
}
```

Func1 执行的基本操作次数：

$$F(N) = N^2 + 2 * N + 10$$

- N = 10   F(N) = 130
- N = 100 F(N) = 10210
- N = 1000 F(N) = 1002010

实际中我们计算时间复杂度时，我们其实并不一定要计算精确的执行次数，而只需要**大概执行次数，那么这里我们使用大O的渐进表示法。**

大O符号（Big O notation）：是用于描述函数渐进行为的数学符号。

3.3 推导大O阶方法

1、用常数1取代运行时间中的所有加法常数。

2、在修改后的运行次数函数中，只保留最高阶项。

3、如果最高阶项存在且不是1，则去除与这个项目相乘的常数。得到的结果就是大O阶。

使用大O的渐进表示法以后，Func1的时间复杂度为：

$$O(N^2)$$

- N = 10   F(N) = 100
- N = 100 F(N) = 10000
- N = 1000 F(N) = 1000000

通过上面我们会发现大O的渐进表示法**去掉了那些对结果影响不大的项**，简洁明了的表示出了执行次数。

另外有些算法的时间复杂度存在最好、平均和最坏情况：

最坏情况：任意输入规模的最大运行次数(上界)

平均情况：任意输入规模的期望运行次数

最好情况：任意输入规模的最小运行次数(下界)

例如：在一个长度为N数组中搜索一个数据x

最好情况：1次找到

最坏情况：N次找到

平均情况：N/2次找到

在实际中一般情况关注的是算法的最坏运行情况，所以数组中搜索数据时间复杂度为O(N)

3.4 常见时间复杂度计算举例

【实例1】

```
// 计算func2的时间复杂度?
void func2(int N) {
    int count = 0;

    for (int k = 0; k < 2 * N ; k++) {
        count++;
    }

    int M = 10;
    while ((M--) > 0) {
        count++;
    }

    System.out.println(count);
}
```

【实例2】

```
// 计算func3的时间复杂度?
void func3(int N, int M) {
    int count = 0;

    for (int k = 0; k < M; k++) {
        count++;
    }

    for (int k = 0; k < N ; k++) {
        count++;
    }

    System.out.println(count);
}
```

【实例3】

```java
// 计算func4的时间复杂度?
void func4(int N) {
    int count = 0;

    for (int k = 0; k < 100; k++) {
        count++;
    }

    System.out.println(count);
}
```

【实例4】

```java
// 计算bubbleSort的时间复杂度?
void bubbleSort(int[] array) {
        for (int end = array.length; end > 0; end--) {
            boolean sorted = true;
            for (int i = 1; i < end; i++) {
                if (array[i - 1] > array[i]) {
                    Swap(array, i - 1, i);
                    sorted = false;
                }
            }

            if (sorted == true) {
                break;
            }
        }
}
```

【实例5】

```java
// 计算binarySearch的时间复杂度?
int binarySearch(int[] array, int value) {
        int begin = 0;
        int end = array.length - 1;
        while (begin <= end) {
            int mid = begin + ((end-begin) / 2);
            if (array[mid] < value)
                begin = mid + 1;
            else if (array[mid] > value)
                end = mid - 1;
            else
                return mid;
        }

        return -1;
}
```

【实例6】

```
// 计算阶乘递归factorial的时间复杂度?
long factorial(int N) {
return N < 2 ? N : factorial(N-1) * N;
}
```

【实例7】

```
// 计算斐波那契递归fibonacci的时间复杂度?
int fibonacci(int N) {
return N < 2 ? N : fibonacci(N-1)+fibonacci(N-2);
}
```

【实例答案及分析】

1. 实例1基本操作执行了2N+10次，通过推导大O阶方法知道，时间复杂度为 O(N)
2. 实例2基本操作执行了M+N次，有两个未知数M和N，时间复杂度为 O(N+M)
3. 实例3基本操作执行了100次，通过推导大O阶方法，时间复杂度为 O(1)
4. 实例4基本操作执行最好N次，最坏执行了(N*(N-1))/2次，通过推导大O阶方法+时间复杂度一般看最坏，时间复杂度为 O(N^2)
5. 实例5基本操作执行最好1次，最坏log_2N次，时间复杂度为 O(log_2N) ps：log_2N**在算法分析中表示是底数为2，对数为N，有些地方会写成lgN。** （建议通过折纸查找的方式讲解logN是怎么计算出来的）(因为二分查找每次排除掉一半的不适合值,一次二分剩下：n/2
   两次二分剩下：n/2/2 = n/4)
6. 实例6通过计算分析发现基本操作递归了N次，时间复杂度为O(N)。
7. 实例7通过计算分析发现基本操作递归了2^N次，时间复杂度为O(2^N)。 （建议画图递归栈帧的二叉树讲解）

3.空间复杂度

空间复杂度是对一个算法在运行过程中**临时占用存储空间大小的量度** 。空间复杂度不是程序占用了多少bytes的空间，因为这个也没太大意义，所以空间复杂度算的是变量的个数。空间复杂度计算规则基本跟实践复杂度类似，也使用**大O渐进表示法。**

【实例1】

```
// 计算bubbleSort的空间复杂度?
void bubbleSort(int[] array) {
    for (int end = array.length; end > 0; end--) {
        boolean sorted = true;
        for (int i = 1; i < end; i++) {
            if (array[i - 1] > array[i]) {
                Swap(array, i - 1, i);
                sorted = false;
            }
        }

        if (sorted == true) {
            break;
        }
```

```
    }
}
```

【实例2】

```
// 计算fibonacci的空间复杂度?
int[] fibonacci(int n) {
    long[] fibArray = new long[n + 1];
    fibArray[0] = 0;
    fibArray[1] = 1;
    for (int i = 2; i <= n ; i++) {
        fibArray[i] = fibArray[i - 1] + fibArray [i - 2];
    }

    return fibArray;
}
```

【实例3】

```
// 计算阶乘递归Factorial的空间复杂度?
long factorial(int N) {
    return N < 2 ? N : factorial(N-1)*N;
}
```

【实例答案及分析】

1. 实例1使用了常数个额外空间，所以空间复杂度为 O(1)
2. 实例2动态开辟了N个空间，空间复杂度为 O(N)
3. 实例3递归调用了N次，开辟了N个栈帧，每个栈帧使用了常数个空间。空间复杂度为O(N)