背景 一维傅里叶变换及其反变换 二维离散傅里叶变换 二维傅里叶变换的性质 频域滤波 基于高斯函数的滤波 低通滤波器 0000 0000 000 000 00

频域滤波

频域

Outline

- 1 背景
- ② 一维傅里叶变换及其反变换
- ③ 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

- 1 背景
- ② 一维傅里叶变换及其反变技
- ③ 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

傅里叶与傅里叶变换

- 法国数学家傅里叶(生于 1768年)在 1822年出版的《热分析理论》一书中指出:任何周期函数都可以表达为不同频率的正弦和或余弦和的形式,即傅立叶级数。
- 20世纪50年代后期,快速傅立叶变换算法出现,得到了广泛的应用。

Joseph Fourier



函数表示

•
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

- 1 背景
- ② 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

连续傅里叶变换

• 连续函数 f(x) 的傅立叶变换 F(u):

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx$$

● 傅立叶变换 F(u) 的反变换:

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux} du$$

离散傅里叶变换

• 离散函数 f(x) (其中 $x, u = 0, 1, 2, \dots, M-1$) 的傅里叶变换:

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{\frac{-j2\pi ux}{M}}$$

反变换

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{\frac{j2\pi ux}{M}}$$

$$F(u) = |F(u)|e^{-j\phi(u)}$$

• 频率谱

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

• 相位谱

$$\phi(u) = \arctan \frac{I(u)}{R(u)}$$

功率谱

$$P(u) = R^2(u) + l^2(u)$$

- 1 背景
- 2 一维傅里叶变换及其反变换
- ③ 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

二维离散傅里叶变换与反变换

• 一个图像尺寸为 $M \times N$ 的函数 f(x, y) 的离散傅立叶变换 F(u, v):

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

反变换:

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

频谱

$$F(u, v) = |F(u, v)|e^{-j\phi(u, v)}$$

频率谱

$$|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$$

• 相位谱

$$\phi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)}$$

• 功率谱

$$P(u, v) = R^{2}(u, v) + l^{2}(u, v)$$

- 1 背景
- 2 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

$$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$$

平移特性

$$f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N})} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N})}$$

$$\stackrel{\text{d}}{=} u_0 = \frac{M}{2}, v_0 = \frac{N}{2} \text{ ft},$$

$$f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N})} = f(x,y)e^{-j\pi(x+y)}$$

$$= f(x,y)(-1)^{x+y}$$

$$\mathcal{F}[f(x,y)(-1)^{x+y}] = F(u - \frac{M}{2}, v - \frac{N}{2})$$

共轭对称性

$$F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

 $|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$

比例

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F(\frac{u}{a}, \frac{v}{b})$$

$$\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n} \Leftrightarrow (ju)^n F(u,v)$$
$$(-jx)^n f(x,y) \Leftrightarrow \frac{\partial^n F(x,y)}{\partial x^n}$$

拉普拉斯算子:

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Leftrightarrow -(u^2 + v^2) F(u, v)$$

$$f(x,y) * h(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) h(x-m,y-n)$$

$$\mathcal{F}[f(x,y) * h(x,y)] = F(u,v) H(u,v)$$

$$f(x,y) h(x,y) = \mathcal{F}^{-1}[F(u,v) * H(u,v)]$$

- 1 背景
- 2 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

频率域的基本性质

- 低频对应图像中变化平缓的区域
- 高频对应图像中变化剧烈的区域(噪声、边缘等)

频域滤波步骤

- 计算图像的 DFT $F(u, v) = \mathcal{F}[f(u, v)]$
- 滤波,滤波器为 H(u, v)

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)$$

• 反变换
$$g(u,v) = \mathcal{F}^{-1}[G(u,v)]$$

基本滤波器性质

- 低通滤波器:通低频阻高频,用于图像平滑,消除高频噪声
- 高通滤波器: 通高频阻低频, 用于图像锐化, 检测边缘

空间域滤波与频率域滤波关系

- 在频域指定滤波器
- 反变换
- 在空域执行卷积完成滤波

- 1 背景
- 2 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

高斯函数低通滤波器

● 高斯滤波器函数 (低通):

$$H(u) = Ae^{\frac{-u^2}{2\delta^2}}$$

• 对应的空间域函数:

$$h(x) = \sqrt{2\pi} \delta A e^{-2\pi^2 \delta^2 x^2}$$

高斯滤波器特性

- 频域和空域高斯滤波器都是实函数
- 高斯曲线直观, 易于操作
- 高斯滤波器参数: δ 增大, 则 H(u) 变宽 h(x) 变窄

$$\lim_{\delta \to \infty} H(u) = A$$
$$\lim_{\delta \to \infty} h(x) = \infty$$

- 1 背景
- ② 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

理想低通滤波器

• 理想低通滤波器函数

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \le D_0 \\ 0, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

• 振铃现象示例:

$$f(x) = [1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$$

$$H(u) = [1,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,1]$$

$$f(x)*h(x) = [0.89,0.89,0.23,0.17,0.0,0.11,$$

$$0.06,0.06,0.11,0.0,0.17,0.23]$$

- 1 背景
- ② 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

频域

理想高通滤波器

• 理想高通滤波器函数

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & D(u, v) \le D_0 \\ 1, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & (u, v) = (0, 0) \\ 1, & \sharp \dot{\Xi} \end{cases}$$

周期噪声滤波

