

频域滤波

Outline

- 1 背景
- 2 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

Joseph Fourier



函数表示

- $f(x)$
- $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots$

Topic

- 1 背景
- 2 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

连续傅里叶变换

- 连续函数 $f(x)$ 的傅立叶变换 $F(u)$:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

- 傅立叶变换 $F(u)$ 的反变换:

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

离散傅里叶变换

- 离散函数 $f(x)$ (其中 $x, u = 0, 1, 2, \dots, M-1$) 的傅里叶变换:

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{\frac{-j2\pi ux}{M}}$$

- 反变换

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{\frac{j2\pi ux}{M}}$$

频谱

$$F(u) = |F(u)|e^{-j\phi(u)}$$

- 频率谱

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

- 相位谱

$$\phi(u) = \arctan \frac{I(u)}{R(u)}$$

- 功率谱

$$P(u) = R^2(u) + I^2(u)$$

Topic

- 1 背景
- 2 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

频谱

$$F(u, v) = |F(u, v)|e^{-j\phi(u, v)}$$

- 频率谱

$$|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$$

- 相位谱

$$\phi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)}$$

- 功率谱

$$P(u, v) = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

Topic

- 1 背景
- 2 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

线性

$$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$$

共轭对称性

$$F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$$

比例

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

微分

$$\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} \Leftrightarrow (ju)^n F(u, v)$$
$$(-jx)^n f(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial^n F(x, y)}{\partial x^n}$$

拉普拉斯算子：

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Leftrightarrow -(u^2 + v^2) F(u, v)$$

卷积

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x - m, y - n)$$

$$\mathcal{F}[f(x, y) * h(x, y)] = F(u, v) H(u, v)$$

$$f(x, y) h(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[F(u, v) * H(u, v)]$$

Topic

- 1 背景
- 2 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

频率域的基本性质

- 低频对应图像中变化平缓的区域
- 高频对应图像中变化剧烈的区域（噪声、边缘等）

频域滤波步骤

- 计算图像的 DFT $F(u, v) = \mathcal{F}[f(u, v)]$
- 滤波, 滤波器为 $H(u, v)$

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

- 反变换 $g(u, v) = \mathcal{F}^{-1}[G(u, v)]$

基本滤波器性质

- 低通滤波器：通低频阻高频，用于图像平滑，消除高频噪声
- 高通滤波器：通高频阻低频，用于图像锐化，检测边缘

空间域滤波与频率域滤波关系

- 在频域指定滤波器
- 反变换
- 在空域执行卷积完成滤波

Topic

- 1 背景
- 2 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波**
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

高斯函数低通滤波器

- 高斯滤波器函数 (低通):

$$H(u) = Ae^{\frac{-u^2}{2\delta^2}}$$

- 对应的空间域函数:

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\delta Ae^{-2\pi^2\delta^2x^2}$$

高斯滤波器特性

- 频域和空域高斯滤波器都是实函数
- 高斯曲线直观，易于操作
- 高斯滤波器参数： δ 增大，则 $H(u)$ 变宽 $h(x)$ 变窄

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} H(u) = A$$

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} h(x) = \infty$$

Topic

- 1 背景
- 2 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器**
- 8 频域锐化滤波器

理想低通滤波器

● 理想低通滤波器函数

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

● 振铃现象示例：

$f(x) = [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

$H(u) = [1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1]$

$f(x) * h(x) = [0.89, 0.89, 0.23, 0.17, 0.0, 0.11, 0.06, 0.06, 0.11, 0.0, 0.17, 0.23]$

Topic

- 1 背景
- 2 一维傅里叶变换及其反变换
- 3 二维离散傅里叶变换
- 4 二维傅里叶变换的性质
- 5 频域滤波
- 6 基于高斯函数的滤波
- 7 低通滤波器
- 8 频域锐化滤波器

理想高通滤波器

● 理想高通滤波器函数

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & D(u, v) \leq D_0 \\ 1, & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

陷波滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & (u, v) = (0, 0) \\ 1, & \text{其它} \end{cases}$$

背景 一维傅里叶变换及其反变换
○○○○ ○○○○

二维离散傅里叶变换
○○○

二维傅里叶变换的性质
○○○○○○○

频域滤波
○○○○○

基于高斯函数的滤波
○○○

低通滤波器
○○

频域滤波
○○○○

周期噪声滤波

