哈尔滨工业大学计算机科学与技术学院

实验报告

课程名称：机器学习

课程类型：选修

实验题目：逻辑回归

学号：7203610316

姓名：符兴

1. 实验目的

理解逻辑回归模型，掌握逻辑回归模型的参数估计算法。

2. 实验要求及实验环境

2-1. 实验要求

实现两种损失函数的参数估计（1，无惩罚项；2.加入对参数的惩罚），可以采用梯度下降、共轭梯度或者牛顿法等。

验证：可以手工生成两个分别类别数据（可以用高斯分布），验证你的算法。考察类条件分布不满足朴素贝叶斯假设，会得到什么样的结果。逻辑回归有广泛的用处，例如广告预测。可以到UCI网站上，找一实际数据加以测试。

2-2. 实验环境

Ubuntu+VSCode+Python3.9

3. 设计思想（本程序中的用到的主要算法及数据结构）

3-1. 生成训练数据

在本次实验中，使用`np.random.multivariate_normal()`生成二维高斯分布。

其中数据1的数据参数为$\mu = [0,4], \sigma = \begin{bmatrix} 2,0 \\ 0,2 \end{bmatrix}$，数据2的数据参数为$\mu = [4,8], \sigma = \begin{bmatrix} 2,0 \\ 0,2 \end{bmatrix}$。

3-2. 梯度下降法

在本次实验中，考虑的是二分布问题。同时满足下面两种假设：

(1) 类别先验服从伯努利分布

(2) 类内样本点服从正态分布，同时正例和反例的正态分布具有相同的协方差矩阵。

因此，由贝叶斯公式可得在给定样本的情况下，其为正例的概率为：

$$
\begin{aligned}
P(Y=1|X=x) &= \frac{P(X=x|Y=1)P(Y=1)}{P(X=x)} \\
&= \frac{P(X=x|Y=1)P(Y=1)}{P(X=x|Y=1)P(Y=1)+P(X=x|Y=0)P(Y=0)}
\end{aligned} \tag{1}
$$

即：

$$
\begin{aligned}
P(Y=1|X=x) &= \frac{1}{1+\frac{\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu_0)^T\sum^{-1}(x-\mu_0)\}}{\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T\sum^{-1}(x-\mu_1)\}}\cdot\frac{1-p}{p}} \\
&= \frac{1}{1+\exp\{(\mu_0-\mu_1)^T\sum^{-1}x+\frac{1}{2}(\mu_1^T\sum^{-1}\mu_1-\mu_0^T\sum^{-1}\mu_0)+\ln(\frac{1-p}{p})\}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

此时，不妨令$w=\sum^T(\mu_0-\mu_1)=(w_0,w_1,...,w_d)$，$b=\frac{1}{2}(\mu_1^T\sum^{-1}\mu_1-\mu_0^T\sum^{-1}\mu_0)$，则式(2)可简化得：

$$
P(Y=1|X=x)=\frac{1}{1+\exp\{w^Tx+b\}} \tag{3}
$$

由式(3)我们即可通过函数来计算概率并进行判断。在逻辑回归中，某个样本属于其真实标记样本的概率越大越好；不妨令式(3)为$f(x)=\frac{1}{1+\exp\{x\}}$由最大似然函数可知：

$$
\begin{aligned}
L(w)=P(y|x;w) &= \arg\max\prod_{i=1}^{n}P(y^{(i)}|x^{(i)};w) \\
&= \arg\max\prod_{i=1}^{n}f(x^{(i)})^{y^{(i)}}(1-f(x^{(i)}))^{1-y^{(i)}}
\end{aligned} \tag{4}
$$

对式(4)取对数有：

$$
\begin{aligned}
L^{'}(w) &= \arg\max\ln L(w) \\
&= \arg\max\sum_{i=1}^{n}(y^{(i)}\ln f(x^{(i)})+(1-y^{(i)}\ln(1-f(x^{(i)})))) \\
&= \arg\min\sum_{i=1}^{n}[-y_i(w^T+b)+\ln(1+\exp\{w^Tx+b\})]
\end{aligned} \tag{5}
$$

式(5)对w求偏导可得：

$$\frac{\partial L^{'}}{\partial w}=-\sum_{i=1}^{N}x_i(y_i-\frac{\exp\{w^Tx\}}{1+\exp\{w^Tx\}}) \tag{6}$$

综上推导，目标是最小化关于w、b的损失函数。在本次实验中，我们令数据为：$Data=[1,x_1,x_2]$，因此$w=[w_0,w_1,w_2]T$，这样就不需要对参数b单独处理。即梯度下降的迭代式子为:

$$w^i=w^{i-1}-lr*\frac{\partial L^{'}}{\partial w} \tag{7}$$

3-3. 添加正则项

在训练过程中，可以加入正则项w来约束其模长，即损失函数改为：

$$L^{'}(w)=\sum_{i=1}^{n}[-y_i(w^Tx+b)+\ln\left(1+\exp\{w^Tx+b\}\right)]+\frac{\lambda}{2}w^Tw \tag{8}$$

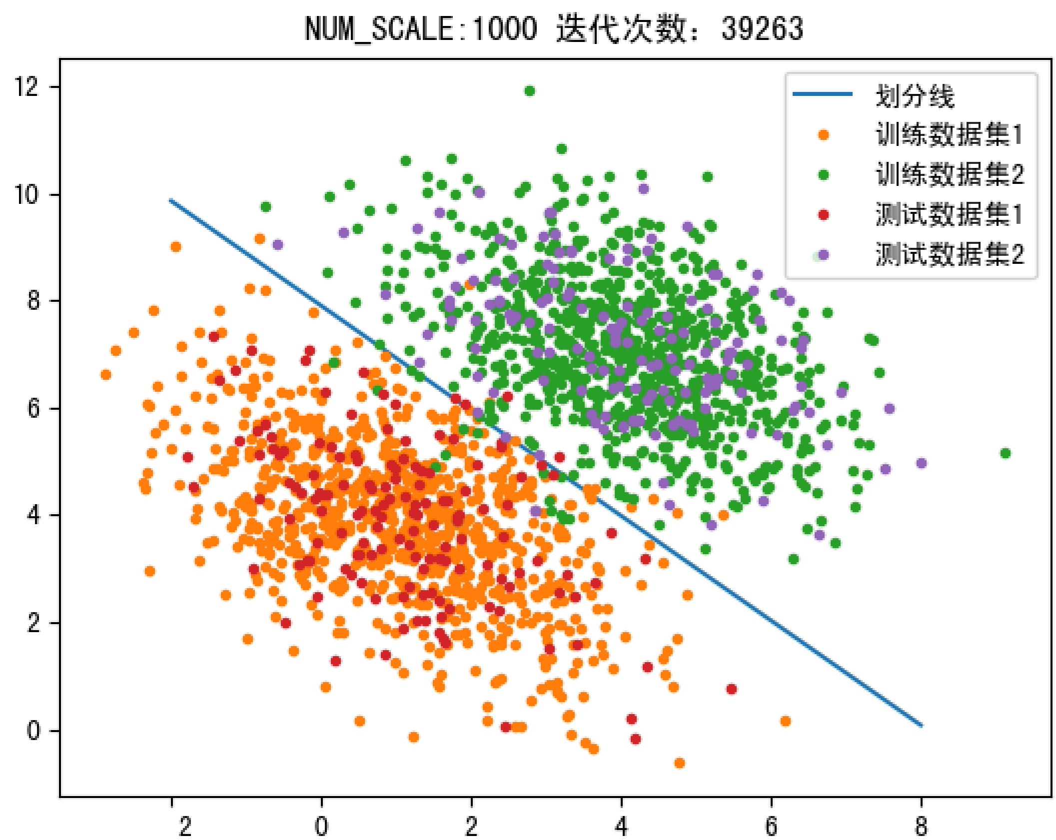
即式(8)对w求偏导可得：

$$\frac{\partial L^{'}}{\partial w}=-\sum_{i=1}^{N}x_i(y_i-\frac{\exp\{w^Tx\}}{1+\exp\{w^Tx\}})+\lambda w \tag{9}$$

4. 实验结果分析

4-1. 满足朴素贝叶斯不带正则项的实验结果

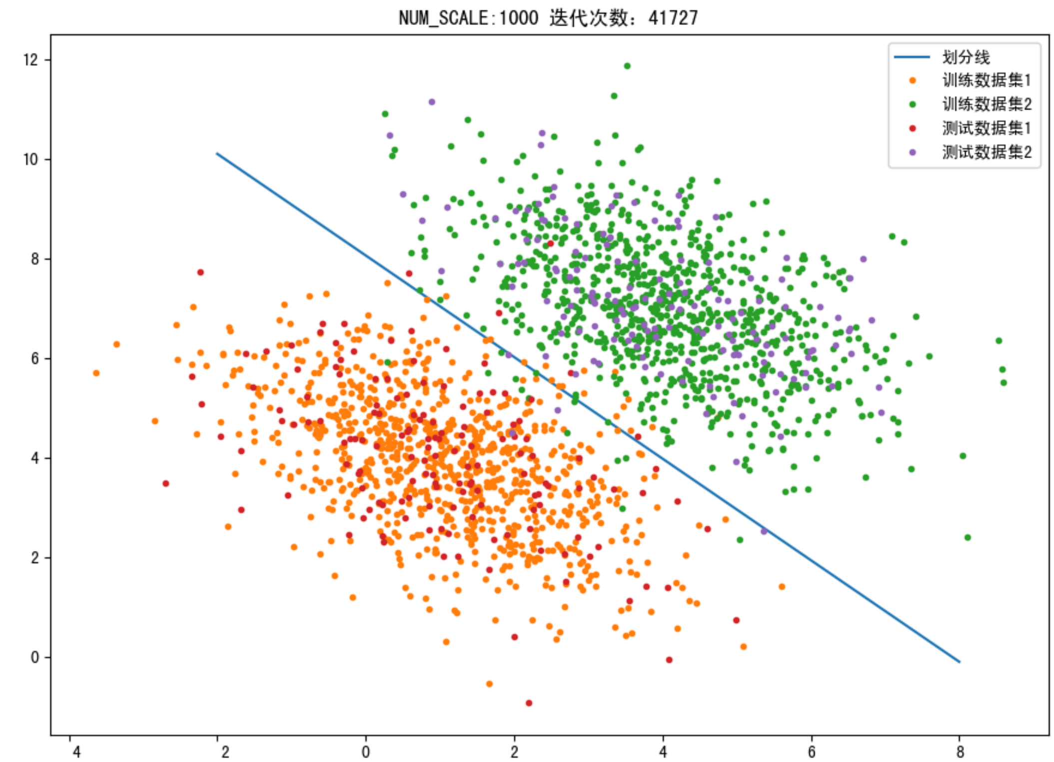
表1 满足朴素贝叶斯不带正则项的实验数据



正确率:0.98

4-2.满足朴素贝叶斯带正则项的实验结果

表2 满足朴素贝叶斯带正则项的实验数据



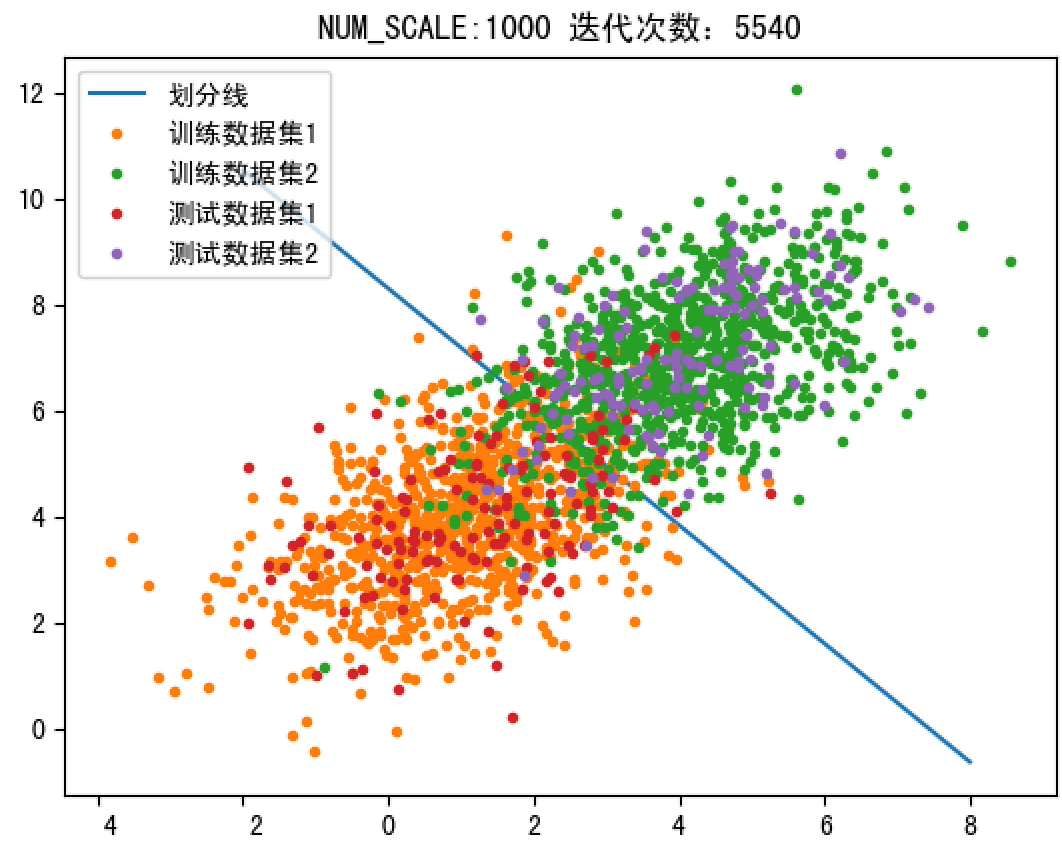
正则项系数:1e-6

正确率:0.97

4-3.不满足朴素贝叶斯不带正则项的实验结果

不满足朴素贝叶斯即几个样本维度之间并不满足相互独立的条件，在本次实验中表现为数据参数为$\mu=[4,8],\sigma=\begin{bmatrix}2,1\\1,2\end{bmatrix}$。即两个维度的协方差不为0，二者之间不是相互独立的。

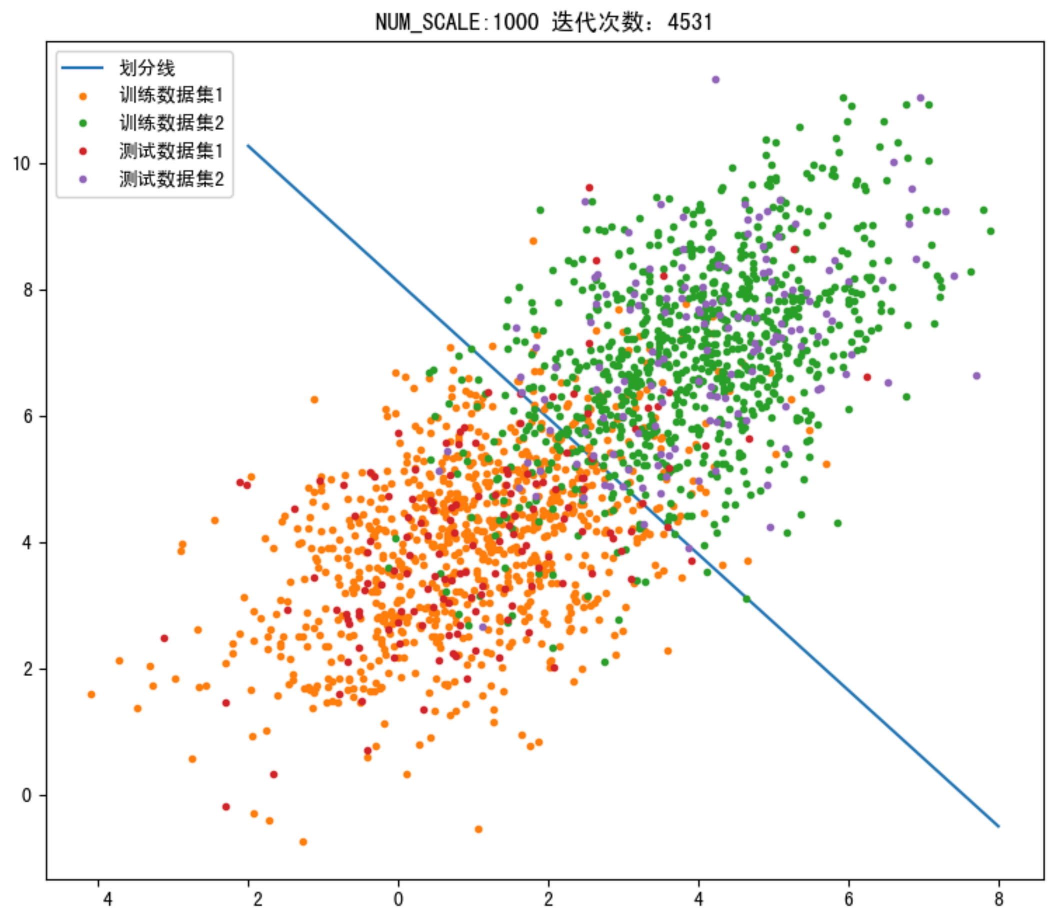
表3 不满足朴素贝叶斯不带正则项的实验数据



正确率:0.88

4-4.不满足朴素贝叶斯带正则项的实验结果

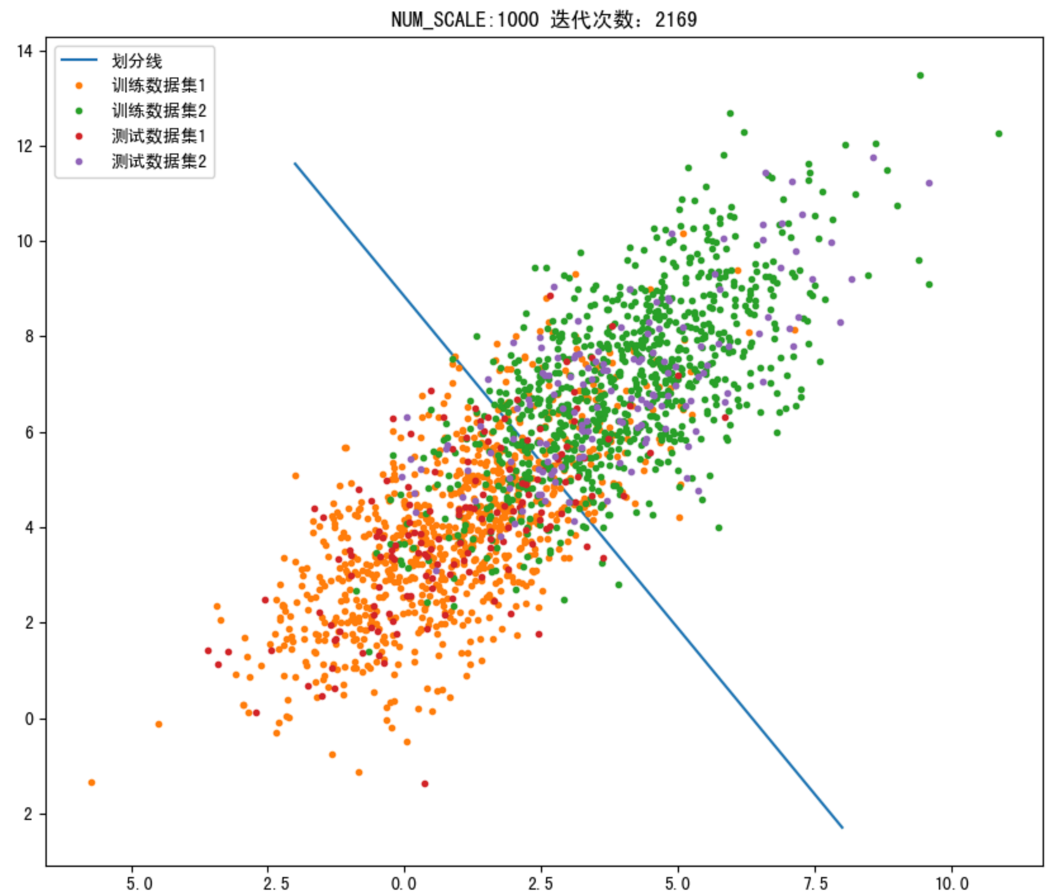
表4 不满足朴素贝叶斯带正则项的实验数据



正则项系数:1e-6

正确率:0.893

表5 不满足朴素贝叶斯带正则项的实验数据 cov=3



正则项系数:1e-6

正确率:0.82

5. 结论

1. 在满足朴素贝叶斯条件下，逻辑回归的正确率高达0.97，分类效果较好。
2. 在本次实验中，正则项系数的作用没有实验1的明显，对正确率影响不大。
3. 在不满足朴素贝叶斯条件下，逻辑回归的正确率不高，原因是样本维度之间存在相关性。
4. 在不满足朴素贝叶斯条件下，协方差越大，正确率越低，分类效果越不好。

6. 参考文献

[1]阿泽. 【机器学习】逻辑回归（非常详细）. 知乎专栏. https://zhuanlan.zhihu.com/p/74874291?ivk_sa=1024320u

[2]程序遇上只能星空. 详解优化算法之梯度下降法. CSDN专栏. https://blog.csdn.net/kevinjin2011/article/details/125299113

7. 代码附录

```python
# %%
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

class GradientDescentOptimizer:
    def __init__(self,numScale,learningRate,lossLimit):
        self.numScale=numScale
        self.learningRate=learningRate
        self.lossLimit=lossLimit

    def sigmoid(self,xMatrix,wVec):
        return 1 / (1 + np.exp(-np.dot(xMatrix, wVec)))

    def calcGradient(self,xMatrix,wVec,tVec,lambdaPenalty):
        return xMatrix.T.dot(tVec-self.sigmoid(xMatrix,wVec))+ lambdaPenalty * wVec

    def calcLoss(self,xMatrix,wVec,tVec,lambdaPenalty):
        return np.sum(-np.dot(tVec.T, np.log(self.sigmoid(xMatrix, wVec)))-np.dot((np.ones((len(tV

    def optimizeParam(self,xMatrix,wVec,tVec,lambdaPenalty):
        # 观测优化过程以及优化次数的限制
        ck=0
        # 记录Loss值
        lastLoss=self.calcLoss(xMatrix,wVec,tVec,lambdaPenalty)
        loss=lastLoss
        while True:
            wVecTmp=wVec+self.learningRate*self.calcGradient(xMatrix,wVec,tVec,lambdaPenalty)
            lossTmp=self.calcLoss(xMatrix,wVecTmp,tVec,lambdaPenalty)
            if lossTmp>lastLoss:
                self.learningRate*=0.5
            else:
                wVec=wVecTmp
                loss=lossTmp
                if(np.abs(loss-lastLoss)<self.lossLimit) and (loss<=1.3 or wVec.shape[0]<=3):
                    break
                lastLoss=loss
            ck+=1
        return wVec,ck
# 生成数据
def makeData(numScale,mean,sigma):
    data = np.random.permutation(np.random.multivariate_normal(mean,sigma,numScale))
    data = np.hstack((np.array([1 for _ in range(0,len(data))]).reshape(len(data),1),data))
    # Shuffle数据，并划分数据集和测试集
    train= data[0:int(0.85*numScale),]
    test= data[len(train):len(data),]
    return train,test
```

```python
# 画出划分线线
def drawLine(wVec):
    x = np.linspace(-2, 8, 100)
    y = (-wVec[0][0] - wVec[1][0] * x) / wVec[2][0]
    plt.plot(x,y,label="划分线")

# 计算正确率
def judge(wVec,test1,test2):
    result1 = test1.dot(wVec)
    result2 = test2.dot(wVec)
    errCnt = 0
    for i in result1:
        if i > 0:
            errCnt += 1
    for i in result2:
        if i < 0:
            errCnt += 1
    return (len(test1)+len(test2)-errCnt)/(len(test1)+len(test2))

# %%
# 超参
NUM_SCALE = 1000
LEARNING_RATE = 0.01
LOSS_LIMIT = 1e-8

# 生成数据
train1,test1 = makeData(NUM_SCALE,np.array([1,4]),np.array([[2, 3], [3, 2]]))
train2,test2 = makeData(NUM_SCALE,np.array([4,7]),np.array([[2, 3], [3, 2]]))

# %%
# 生成训练数据并无正则项的梯度下降
data = np.vstack((train1,train2))
label = np.vstack((np.zeros((len(train1),1)),np.ones((len(train2),1))))
optimizer=GradientDescentOptimizer(NUM_SCALE,LEARNING_RATE,LOSS_LIMIT)
wVec,cnt = optimizer.optimizeParam(data,np.ones((3,1)),label,1e-6)

# 显示结果
print("正确率: "+str(judge(wVec,test1,test2)))
drawLine(wVec)
plt.title("NUM_SCALE:"+str(NUM_SCALE)+" 迭代次数: "+str(cnt))
plt.plot(train1[0:,1],train1[0:,2],".",label="训练数据集1")
plt.plot(train2[0:,1],train2[0:,2],".",label="训练数据集2")
plt.plot(test1[0:,1],test1[0:,2],".",label="测试数据集1")
plt.plot(test2[0:,1],test2[0:,2],".",label="测试数据集2")
plt.legend()
```

```
plt.show()
```