

# 命题逻辑应用举例

[hawksoft](#)

## 命题逻辑应用举例

- 1 引例：一个问题
- 2 一个逻辑问题：
- 3 不同的逻辑式
- 4 解决问题

这里采用类比思维，学习如何利用命题逻辑解决实际问题，希望对大家有所帮助。

## 1 引例：一个问题

问题：

两个人来分24个馒头，要求如下：

1. A至少分18个
2. B不能少于A

请问应该如何来分？

这样的问题很简单，你会这样做：

第一步，你会快速利用你的数学知识进行建模如下：

引入变量，分别用 $a, b$ 代表A和B分到的馒头数，则问题的条件（限制条件）可以分别写为：

1.  $a + b \leq 24$
2.  $a > 18$
3.  $b > a$

这些条件构成了一个方程，下一步任务就是找出一组 $a, b$ 的值，使每个不等式成立。

第二步，解决上面的问题。你会对有些不等式进行变换（等值变换），为了方便分析和求解。然后逐步找出满足这些条件的值。也可能没解，也可能有多组解。这个我们就不啰嗦了。

这个问题当然很简单，你杀鸡用了牛刀。但要明白，这是一套系统的方法，如果问题变成1000多人分几万个馒头，而且有各种的限制条件，如A的馒头数目是B的3倍，是C的二分之一少三个... 等等。你都可以按照这套方法圆满地解决。

## 2 一个逻辑问题：

问题：

一个岛屿上有类人：骑士和无赖。你去岛上碰见A和B

1. A说" B是骑士。"

2. B说：“我们两个不是同类人。”

请问A和B的类型是什么？

这是一个逻辑问题，同前面一样，

第一步 利用数学进行建模：

引入变量， $A$ ：A是骑士； $B$ ：B是骑士。根据题目的意义和两个人的说法，分别有：

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) = T \quad (1)$$

$$(B \wedge \neg A) \vee (\neg B \wedge \neg A) = T \quad (2)$$

好了，这就是这个问题的模型。这里如果你对这两句的具体形式有疑问，那没有问题，后面讲解。但一定要想你怎样解决分馒头的问题，明白这就是问题的模型，她描述了问题的条件。现在就变成了求解 $A, B$ 的值（ $T$ 或者 $F$ ），使这两个命题公式都成立。

上面的（1）式，是怎么来的，就是需要大家掌握的一个基本功：把一个命题翻译成命题公式。如果现在做不来，没关系，后面就习惯了。可能有人会说，为什么不翻译为： $(A \rightarrow B) \vee (\neg A \rightarrow \neg B)$ 。这样不精确。根据 $\rightarrow$ 的含义， $A \rightarrow B$ 确实表示了如果A是骑士，那么他说的话也是真的，即B也是骑士这个条件。但他还有一个意思，如果A不是骑士，那么不管B是骑士还是无赖，这个命题都为真。但这个明显放松了题目的条件要求。题目中无赖说的都是假的，因此如果A是无赖，他的话必须是假话，即B是必须是无赖。

第二步 求解

这里有几种做法：

1. 直观的想法就是尝试，最坏的运气是把A和B的取值组合（共有四种），分别拿来计算1和2，看是否满足（即为T）。直到找到一组值，这两个公式都满足，则是问题的答案。这简直不是方法。
2. 真值表法。分别画出两个公式的真值表。寻找两个真值表中对应都为T的，这一行A和B的值就是问题的解。顺便说一下，这是计算机的方法，因为计算机可以快速构造出任意公式的真值表（如果你还喜欢python，她有一个包叫sympy，就可以拿来用。偷偷说一下这个包可以帮你做很多数学作业）
3. 等价变换法。按照今天课堂讲的等价公式，将上面的两个公式转换为比较好分析的形式。这是我们后面的学习重点。其实这两个公式已经很好看了。仔细观察，你能很容易看出：
  - 有两组取值可以使公式（1）为T： $(A = T, B = T)$ 和 $(A = F, B = F)$
  - 有两组取值可以是公式（2）为T： $(A = F, B = T)$ 和 $(A = F, B = F)$

为了满足两个公式都为T，就去共同的那组取值，即 $(A = F, B = F)$ ，所以这个问题的解就是她，解释为A和B都是流氓。

### 3 不同的逻辑式

根据题意，还可以将（1）表达为下面的等式：

$$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B) \quad (3)$$

那么，（3）和（1）等价吗？证明如下：

$$\begin{aligned}
(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B) &= (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \\
&= ((\neg A \vee B) \wedge A) \vee ((\neg A \vee B) \wedge \neg B) \\
&= (\neg A \wedge A) \vee (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B) \\
&= (A \wedge B) \vee (\neg A \vee \neg B)
\end{aligned} \tag{3}$$

可见，这两个表达式是等价的。

## 4 解决问题

---

根据题目分析，需要同时满足 (1) 和 (2)，就是：

$$((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \wedge ((B \wedge \neg A) \vee (\neg B \wedge \neg A)) = T \tag{4}$$

简化为：

$$\begin{aligned}
&= (\neg A \wedge \neg B) \vee ((A \wedge B) \wedge (B \wedge \neg A)) \\
&= (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge F) \\
&= (\neg A \wedge \neg B) \vee F \\
&= (\neg A \wedge \neg B)
\end{aligned} \tag{5}$$