第五章 关系

5-1

2.

对集合{1，2，3，4}上的每一个关系，确定它是否是自反的、是否是对称的、是否是反对称的、是否是传递的。

a){(2，2)，(2，3)，(2，4)，(3，2)，(3，3)，(3，4)}

b){(1，1)，(1，2)，(2，1)，(2，2)，(3，3)，(4，4)}

c){(2，4)，(4，2)}

d){(1，2)，(2，3)，(3，4)}

e){(1，1)，(2，2)，(3，3)，(4，4)}

f){(1，3)，(1，4)，(2，3)，(2，4)，(3，1)，(3，4)}

解：

a) 传递的；

b) 自反的，对称的，传递的；

c) 对称的；

d) 反对称的；

e) 自反的，对称的，反对称的，传递的；

f) 不存在题中所说性质。

3.

确定定义在所有 Web 页上的关系 R 是否为自反的、对称的、反对称的和传递的，其中 $(a, b)\in R$ 当且仅当

a)每个访问 Web 页 a 的人也访问了 Web 页 b。

b)在 Web 页 a 和 b 上没有公共链接。

c)在 Web 页 a 和 b 上至少有一条公共链接。

d)存在一个 Web 页，其中包含了到 Web 页 a 和 b 的链接。

解：

a) 自反的，传递的；

b) 对称的；

c) 对称的；

d) 对称的；

22.

n 元素集合上有多少个关系是

a)对称的？ b)反对称的？

c)非对称的？ d)反自反的？

e)自反的和对称的？

f)既不是自反的也不是反自反的？

解:

a) $2^{n(n+1)/2}$ b) $2^n 3^{n(n-1)/2}$ c) $3^{n(n-1)/2}$

d) $2^{n(n-1)}$ e) $2^{n(n-1)/2}$ f) $2^{n^2} - 2 \cdot 2^{n(n-1)}$

24

证明：集合 A 上的关系 R 是对称的当且仅当 $R=R^{-1}$，其中 R^{-1} 是 R 的逆关系。

证明:

> “当关系”：对∀ a ,b ∈ A,如果 （a,b） ∈ R , 则（b,a） ∈ R^{-1} , 由于 R =R^{-1}， 故（b,a） ∈ R , 可得关系R是对称的;
>
> “仅当关系”：对∀ a ,b ∈ A,如果 （a,b） ∈ R , 则（b,a） ∈ R^{-1}， 由于关系R是对称的，故（b,a） ∈ R , 所以
>
> $R^{-1} \subseteq R$, 同理，有$R \subseteq R^{-1}$, 故 R = R^{-1} 。

26.

设 R 是自反的和传递的关系。证明对所有的正整数 n，$R^n=R$。

解:

> 证明：数学归纳法：1，当 n = 1时，上述结论显然成立；2，假设当 n = k时, R^k = R ;
>
> 3,当 n=k+1 时，由于R是传递的，由定理一得：$R^{k+1} \subseteq R$, 又注意到 $R^{k+1} = R^k \circ R$,
>
> 令（a,b） ∈ R, 因为 R是自反的，所以（b,b） ∈ R , 由假设 R^k = R, 所以（b,b） ∈ R^k,
>
> 由合成的定义得 （a,b） ∈ R^{k+1} , 即 $R \subseteq R^{k+1}$,所以 R^{k+1} = R 。
>
> 由以上三步，题设得证。

5-2

无。

5-3

1.

用矩阵表示下面每个定义在{1，2，3}上的关系(按增序列出集合中的元素)。

a){(1，1)，(1，2)，(1，3)}

b){(1，2)，(2，1)，(2，2)，(3，3)}

c){(1，1)，(1，2)，(1，3)，(2，2)，(2，3)，(3，3)}

d){(1，3)，(3，1)}

解:

a) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

6.

当 R 是有穷集 A 上的关系时，怎样从表示 R 的关系矩阵得到表示这个关系的补 $\overline{R}$ 的矩阵？

解:

把矩阵中的每一个0元素变成1，每一个1元素变成0 。

7.

设 R 是矩阵

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

所表示的关系，求表示下述关系的矩阵。

a) R^{-1} b) $\overline{R}$ c) R^2

解:

a) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

8.

设 R 是矩阵

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

表示的关系，求表示下述关系的矩阵

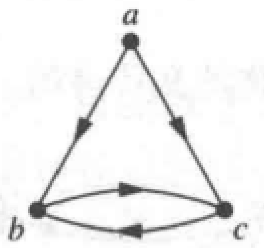
a) R^2 b) R^3 c) R^4

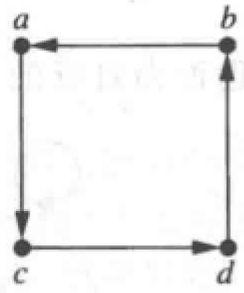
解:

a) $\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

14.

确定练习 10～11 所示的有向图表示的关系是否为自反的、反自反的、对称的、反对称的和传递的。

10. 

11. 

解:

10题：反自反的；　11题：反自反的，反对称的。

16.

证明：如果 M_R 是表示关系 R 的矩阵，那么 $M_R^{[n]}$ 是表示关系 R^n 的矩阵。

证明:

> 即证:（M_R 表示 R） → ($M_R^{[n]}$ 表示 R^n)
>
> 用数学归纳法：已知 M_R 表示 R， 当n=1时，$M_R^{[1]}$ 表示 R 显然成立；假设当 n = k 时，$M_R^{[k]}$ 表示 R^k 成立，
>
> 则当 n = k+1时，$M_R^{[k+1]} = M_R^{[k]} \odot M_R^{[1]} = R^k \circ R = R^{k+1}$.由以上步骤可知题设得证。

5-4

1.

设 R 是定义在集合{0，1，2，3}上的关系，R 中包含有序对(0，1)，(1，1)，(1，2)，(2，0)，(2，2)和(3，0)，求

a) R 的自反闭包　　b) R 的对称闭包

解:

a) { (0,0) , (0,1) , (1,1) , (1,2) , (2,0) , (2,2) , (3,0) , (3,3) } ；

b) { (0,1) , (1,0) , (1,1) , (1,2) , (2,1) , (2,0) , (0,2) , (2,2) , (3,0) , (0,3) } 。

7.

假设有穷集 A 上的关系 R 由矩阵 M_R 表示，证明表示 R 的对称闭包的矩阵是 $M_R \vee M_R^T$。

解:

> 证明：M_R 表示 关系R，而R的对称闭包 $s(R) = R \cup R^c = M_R \vee M_{R^c} = M_R \vee M_R^T$ 。

10.

设 R 是所有学生的集合上的关系，如果 $a \neq b$ 且 a 和 b 至少有一门是公共课程，则 R 包含了有序对(a，b)。什么时候(a，b)在下面的关系中？

a) R^2　　b) R^3　　c) R^*

解:

a) 如果有学生 c ,使得a和c有公共课程，c和b也有公共课程，那么 （a,b）在关系 R^2 中。

b) 如果有学生 c 和 d ，使得a 和 c 有公共课程且 c 和 d 有公共课程且d 和 b 也有公共课程，

那么 （a,b）在关系 R^3 中。

c) 如果有从学生 a 开始到 学生 b 结束的学生序列，使得序列中的每一个学生与他的下一个学生

都有公共课程，那么（a,b） 在关系 R^* 中。

11.

假设关系 R 是对称的，证明 R^* 是对称的。

> 证明：关系R是对称的，即$R = R^C$，又因为 $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^n)^c = (\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n)^c = (R^*)^C$，
>
> 所以 R^* 是对称的。

12.

使用算法 1 找出下面{1，2，3，4}上的关系的传递闭包。

a){(1，2)，(2，1)，(2，3)，(3，4)，(4，1)}

b){(2，1)，(2，3)，(3，1)，(3，4)，(4，1)，(4，3)}

c){(1，2)，(1，3)，(1，4)，(2，3)，(2，4)，(3，4)}

d){(1，1)，(1，4)，(2，1)，(2，3)，(3，1)，(3，2)，(3，4)，(4，2)}

解:

a) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

13.

使用沃舍尔算法找出练习 12 中关系的传递闭包。

解:

a) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

14.

求出包含关系{(1，2)，(1，4)，(3，3)，(4，1)}的最小的关系，使得它是

a)自反的和传递的。 b)对称的和传递的。 c)自反的、对称的和传递的。

解:

a) { (1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (3,1), (4,1), (4,2), (4,4) } ;

b) { (1,1) , (1,2) , (1,4) , (2,1) , (2,2) , (2,4), (3,3) , (4,1) , (4,2), (4,4) } ;

c) { (1,1) , (1,2) , (1,4) , (2,1) , (2,2) , (2,4), (3,3) , (4,1) , (4,2), (4,4) } 。

5-5

1.

下面是定义在{0，1，2，3}上的关系，其中哪些是等价关系？给出其他关系中所缺少的等价关系应具有的性质。

a){(0，0)，(1，1)，(2，2)，(3，3)}

b){(0，0)，(0，2)，(2，0)，(2，2)，(2，3)，(3，2)，(3，3)}

c){(0，0)，(1，1)，(1，2)，(2，1)，(2，2)，(3，3)}

d){(0，0)，(1，1)，(1，3)，(2，2)，(2，3)，(3，1)，(3，2)，(3，3)}

e){(0，0)，(0，1)，(0，2)，(1，0)，(1，1)，(1，2)，(2，0)，(2，2)，(3，3)}

解:

a) 是等价关系； b) 不是等价关系，缺少自反性，传递性；

c) 是等价关系； d)不是等价关系，缺少传递性； e) 不是等价关系，缺少传递性，对称性。

6.

设 R 是长度至少为 3 的所有位串的集合上的关系，R 由有序对(x, y)构成，其中 x 和 y 是长度至少为 3 的位串，且它们的前 3 位相同。证明 R 是等价关系。

解:

> 证明： 假设x是长度至少为3的串，由于x 与自己的前三位相同，所以 （x,x） ∈ R, 因此R是自反的；假设（x,y） ∈ R , 那么x 和y 的前三位是相同的，y 与x 的前三位自然也相同，即（y,x） ∈ R , 所以R是对称的；假设 （x,y） ∈ R ,(y,z) ∈ R , 即x与y，y与z的前三位相同，所以x与z的前三位也相同，即 （x,z） ∈ R,说明R是传递的， 综上可知R是等价关系。

8.

设 R 是定义在正整数的有序对构成的集合上的关系，$((a, b), (c, d)) \in R$ 当且仅当 $a+d=b+c$。证明 R 是等价关系。

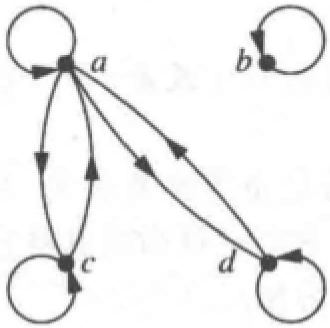
解:

> 证明：因为 a+b = b+a,所以（(a,b） ,(a,b)） ∈ R,因此R是自反的；假设（(a,b） ,(c,d)） ∈ R , 即 a+d = b+c ,亦即 c+b = d+a ,所以（(c,d） ,(a,b)） ∈ R , 所以R是对称的；假设（(a,b） ,(c,d)） ∈ R 且 （(c,d） ,(e,f)） ∈ R ,即 a+d = b+c 且 c+f = d+e ,两式结合得 a+f = b+e , 所以（(a,b),(e,f)） ∈ R , 说明R是传递的。

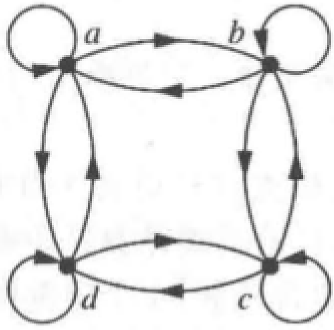
11. 12.

在练习 11～12 中，判断有向图中所示的关系是否为等价关系。

11.



12.



解:

11，不是等价关系，不满足传递性；12，不是等价关系，不满足传递性。

15.

当 n 为下列各数时，同余类$[n]_5$(即 n 关于模 5 同余的等价类)是什么？

a) 2　　**b)** 3　　**c)** 6　　**d)** −3

解:

a) $[2]_5$ = { ……-13-8,-3,2,7,12,17……} ;

b) $[3]_5$ = { ……-7,-2,3,8,13……} ;

c) $[6]_5$ = {……-4,1,6,11,16…… } ;

d) $[-3]_5$ = {……-8,-3,2,7,12…… } 。

21.

列出由{0，1，2，3，4，5}的划分产生的等价关系中的有序对。

a) {0}，{1，2}，{3，4，5}

b) {0，1}，{2，3}，{4，5}

c) {0，1，2}，{3，4，5}

d) {0}，{1}，{2}，{3}，{4}，{5}

如果在划分 P_1 中的每个集合都是划分 P_2 中每个集合的子集，则 P_1 叫作 P_2 的加细。

解:

a) { (0,0) , (1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5) } ;

b) { (0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5) } ;

c) { (0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5) } ;

d) { (0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),{5,5} } .

29.

当我们构造一个关系的自反闭包的对称闭包的传递闭包时，一定能得到一个等价关系吗？

解:

由等价关系的定义知，一定能得到一个等价关系。

31.

设计一个算法，找出包含一个给定关系的最小的等价关系。

解：

先构成给定关系的自反闭包，再构成它的自反闭包的对称闭包，最后构成它的自反闭包的对称闭包的传递闭包，

所得关系即为给定关系的最小身为等价关系。

5-6

1.

以下这些定义在集合{0，1，2，3}上的关系，哪些是偏序的？如果不是偏序的，请给出它缺少偏序的哪些性质。

a){(0，0)，(1，1)，(2，2)，(3，3)}

b){(0，0)，(1，1)，(2，0)，(2，2)，(2，3)，(3，2)，(3，3)}

c){(0，0)，(1，1)，(1，2)，(2，2)，(3，3)}

d){(0，0)，(1，1)，(1，2)，(1，3)，(2，2)，(2，3)，(3，3)}

e){(0，0)，(0，1)，(0，2)，(1，0)，(1，1)，(1，2)，(2，0)，(2，2)，(3，3)}

解：

a) 是； b) 不是，不满足反对称性，传递性； c) 是； d) 是；   e) 不是，不满足反对称性，传递性。

4.

确定以下 0-1 矩阵表示的关系是否为偏序。

a) $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\end{bmatrix}$

解：

a) 不是 b) 是 c) 不是

8.

在下面的偏序集中，找出两个不可比的元素。

a)$(\mathcal{P}(\{0,1,2\}),\subseteq)$ **b)**$(\{1,2,4,6,8\},|)$

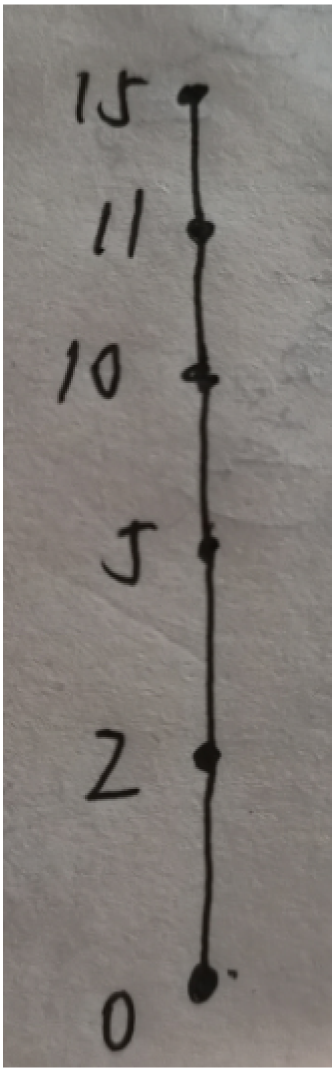
解：

a) 比如：{0,1} 和 {1,2}； b)比如：4 和 6 。

11.

画出定义在{0，2，5，10，11，15}上的“小于或等于”关系的哈塞图。

解：



17.

对偏序集({3，5，9，15，24，45}，|)，回答下述问题。

a)求极大元。

b)求极小元。

c)存在最大元吗？

d)存在最小元吗？

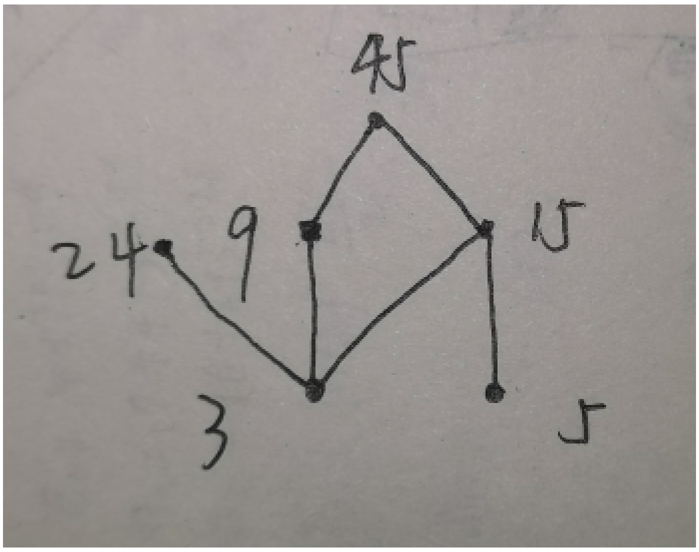
e)找出{3，5}的所有上界。

f)如果存在，求{3，5}的最小上界。

g)求{15，45}的所有下界。

h)如果存在，求{15，45}的最大下界。

解:



哈赛图如上；根据此图易知：

a) 极大元是24,45；　　b) 极小元是3,5；

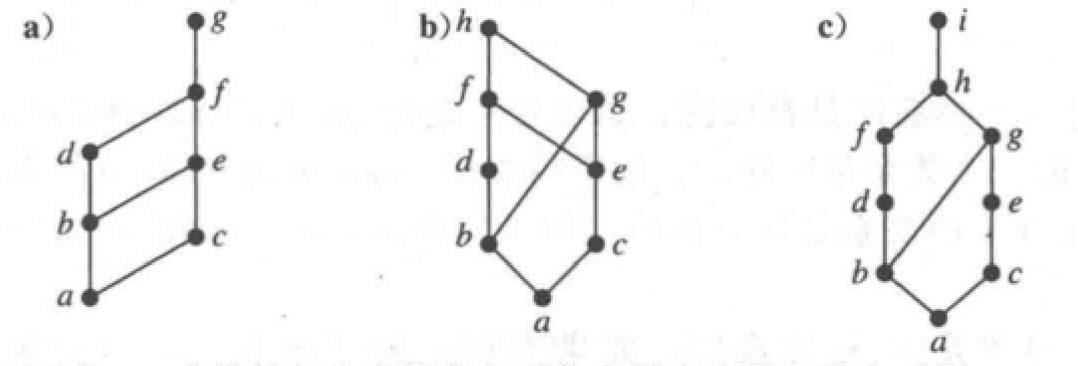
c)不存在；　　d)不存在；

e) 15,45；　　f) 15;

g) 3,5,15；　　h) 15 。

22.

确定具有下面哈塞图的偏序集是否为格。



解：

a) 是　b) 不是，因为元素f,g没有下确界　　c) 是

24.

在一个公司里，使用信息流的格模型控制敏感信息，这些信息具有由有序对(A，C)表示的安全类别。这里 A 是权限级别，这种权限级别可以是非私有的(0)、私有的(1)、受限制的(2)或注册的(3)。种类 C 是所有项目集合{猎豹，黑斑羚，美洲狮}的子集(在公司里常常使用动物的名字作为项目的代码名字)。

a)是否允许信息从(私有的，{猎豹，美洲狮})流向(受限制的，{美洲狮})？

b)是否允许信息从(受限制的，{猎豹})流向(注册的，{猎豹，黑斑羚})？

c)允许信息从(私有的，{猎豹，美洲狮})流向哪个类？

d)允许信息从哪个类流向安全类(受限制的，{黑斑羚，美洲狮})？

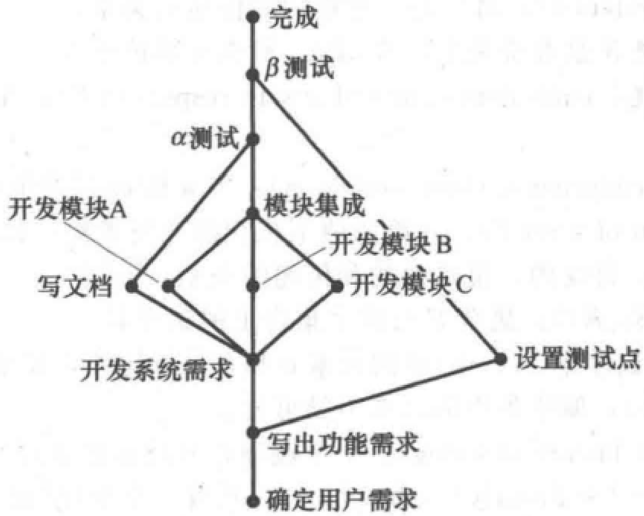
解：

a)不允许；
b)允许；
c)(私有的，{猎豹，美洲狮})，(受限制的，{猎豹，美洲狮})，(注册的，{猎豹，美洲狮})，(私有的，{猎豹，美洲狮，黑斑羚〉)，(受限制的，{猎豹，美洲狮，黑斑羚})，(注册的，{猎豹，美洲狮，黑斑羚})；

d)(非私有的，{黑斑羚，美洲狮})，(私有的，{黑斑羚，美洲狮})，(受限制的，(黑斑羚，美洲狮})，(非私有的，{黑斑羚})，(私有的，{黑斑羚}))，(受限制的，{黑斑羚})，(非私有的，{美洲狮))，(私有的，{美洲狮})，(受限制的，{美洲狮})，(非私有的，$\emptyset$)，(私有的，$\emptyset$)，(受限制的，$\emptyset$) .

33.

如果关于一个软件项目的任务的哈塞图如下图所示，给出这个软件项目的任务的完成顺序。



解:

确定用户需求 $\prec$ 写出功能需求 $\prec$ 设置测试点 $\prec$ 开发系统需求 $\prec$ 写文档 $\prec$ 开发模块A $\prec$ 开发模块B $\prec$ 开发模块C $\prec$ 模块集成 $\prec$ α测试 $\prec$ β测试 $\prec$ 完成 。

End !