

一招解决集合与关系中的计数问题

[hawksoft](#)

一招解决集合与关系中的计数问题

1 一招在手

2 初试身手

3 横扫天下

1 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义 2^{n^2-n} 个不同的自反关系

2 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义 2^{n^2-n} 个不同的反自反关系

3 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义 $2^n \times 2^{(n^2-n)/2}$ 个不同的对称关系

4 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义 $2^n \times 3^{(n^2-n)/2}$ 个不同的反对称关系

5 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义 $2^{(n^2-n)/2}$ 个不同的自反且对称的关系

6 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义 $2^n \times 3^{(n^2-n)/2}$ 个不同的自反且反对称关系

7 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义 $2^{n^2} - 2^n \times 2^{(n^2-n)/2}$ 个不同的非对称关系

集合与关系中的计数问题，是指如下的一类问题：给定一个含有 n 个元素的集合 A ，问集合 A 有多少个子集？问在集合 A 上可以定义多少个关系？可以定义多少个自反关系？可以定义多少个对称关系？等等。

1 一招在手

计数问题，是组合数学研究的基本问题之一。这里讲一个最基本和最普遍的计数方法，称为乘法法则。

乘法法则：完成一个任务需要 n 步，每一步的方案数分别为： m_1, m_2, \dots, m_n ，则完成该任务的方案总数为： $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$

乘法法则很简单，但可以解决很多计数问题。使用该法则的重点在于两个：一是确定完成任务的步骤，二是确定每一个步骤的可选方案数。对于有些问题，还是比较直观，如下面的例子：

例1：由数字 $0, 1, \dots, 9$ 组成的8位密码，共有多少个？

解答：套用乘法法则。生成一个满足要求的密码需要8步，每一步分别生成密码的1位；因为每一位密码可以是10个数字中的任意一个数字，所以生成密码的每一步有10种方案；所以总的密码数对应所有的解决方案，即为： $\underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_8 = 10^8$

而对有些问题，则不是很直观，如下面的例子：

例2：含有 n 个元素的集合 A 共有多少个不同的子集？

解答：为了使用乘法法则，我们首先将集合 A 的 n 个元素排成一列 a_1, a_2, \dots, a_n 。根据子集的定义，得到一个子集的任务可以分为 n 步；第 i 步决定元素 a_i 是否选入子集，所以有2种方案。根据乘法法则，总的方案数为： $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_n = 2^n$

2 初试身手

我们这里只研究二元关系，它的本质是序偶（又称为二元组）的集合。

首先要记住一点：如果对集合 A 上的所有元素指定一种顺序，则定义在 A 上的每一个关系，都对应一个 $n \times n$ 的方形矩阵 M_R ，而且 M_R 是 0-1 矩阵。

$$M_R = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

因此，我们把集合上关系的计数问题转化为对应的矩阵的计数问题。

例3: 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义多少个不同的关系？

解答：在 A 上定义一个关系 R 就是确定一个矩阵 M_R ，也就是确定矩阵 M_R 的每一项 m_{ij} 。因为 M_R 共有 n^2 项，所以可以分为 n^2 步； m_{ij} 只能是 0 或者 1，因此每一步有 2 种可选方案。根据乘法法则，总的方案数是： $\overbrace{2 \times 2 \cdots \times 2}^n = 2^n$

例4: 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义多少个不同的恒等关系？

解答：恒等关系对应的矩阵的特点是：对角线上的项全都是 1，其余项都是 0。因此，获得这样的矩阵可以分为 2 步：

1. 第一步将对角线上的 n 项设为 1，只有 1 种可选方案。
2. 接着将除对角线外的 $n^2 - n$ 项设为 0，也只有 1 种可选方案。

所以总的方案数有 $1 \times 1 = 1$ 。

3 横扫天下

按照上面的思路，我们可以照猫画虎，完成其它较为复杂的关系计数问题。

1 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义 2^{n^2-n} 个不同的自反关系

证明：自反关系对应的矩阵的特点是：对角线上的项全都是 1，其余项可以是 0 或 1。因此，获得这样的矩阵可以分为以下步骤：

1. 第一步将对角线上的 n 项设为 1，只有 1 种可选方案。
2. 通过 $n^2 - n$ 步将除对角线外的 $n^2 - n$ 项设为 0 或者 1。由于每一步有两种可选方案，所以总的方案数为 2^{n^2-n} 。

所以总的方案数有 $1 \times 2^{n^2-n} = 2^{n^2-n}$ 。

2 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义 2^{n^2-n} 个不同的反自反关系

证明：反自反关系对应的矩阵的特点是：对角线上的项全都是0，其余项可以是0或1。因此，获得这样的矩阵可以分为以下步骤：

1. 第一步将对角线上的 n 项设为0，只有1种可选方案。
2. 通过 $n^2 - n$ 步将除对角线外的 $n^2 - n$ 项设为0或者1。由于每一步有两种可选方案，所以总的方案数为 2^{n^2-n} 。

所以总的方案数有 $1 \times 2^{n^2-n} = 2^{n^2-n}$ 。

3 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义 $2^n \times 2^{(n^2-n)/2}$ 不同的对称关系

解答：对称关系对应的矩阵的特点是：对角线上的项可以是0或者1，其余项必须成对满足 $m_{ij} = m_{ji}$ 。因此，获得这样的矩阵可以分为以下步骤：

1. 通过 n 步将对角线上的 n 项设为0或者1。因为每一步有2种方案，因此总共有 2^n 种方案。
2. 进行 $(n^2 - n) / 2$ 步，每一步操作是将 m_{ij}, m_{ji} 设置为以下2种情况之一：
 - $m_{ij} = 0, m_{ji} = 0$
 - $m_{ij} = 1, m_{ji} = 1$ 。

因为每一步有2种可选方案。所以总的方案数是 $2^{(n^2-n)/2}$

根据乘法法则，以上共进行了 $n + (n^2 - n)/2$ 步，所以总的方案数是： $2^n \times 2^{(n^2-n)/2}$

4 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义 $2^n \times 3^{(n^2-n)/2}$ 个不同的反对称关系

解答：对称关系对应的矩阵的特点是：对角线上的项可以是0或者1，其余项必须成对满足：当 $m_{ij} = 1$ 时， $m_{ji} = 0$ 。因此，获得这样的矩阵可以分为以下步骤：

1. 通过 n 步将对角线上的 n 项设为0或者1。因为每一步有2种方案，因此总共有 2^n 种方案。
2. 进行 $(n^2 - n) / 2$ 步，每一步操作是将 m_{ij}, m_{ji} 设置为以下3种情况之一：
 - $m_{ij} = 1, m_{ji} = 0$
 - $m_{ij} = 0, m_{ji} = 1$
 - $m_{ij} = 0, m_{ji} = 0$ 。

因为每一步有3种可选方案。所以总的方案数是 $3^{(n^2-n)/2}$

根据乘法法则，以上共进行了 $n + (n^2 - n)/2$ 步，总的方案数是： $2^n \times 3^{(n^2-n)/2}$

5 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义 $2^{(n^2-n)/2}$ 个不同的自反且对称的关系

解答：根据题目要求，对应的矩阵的特点是：对角线上的项全部是1，其余项成对满足： $m_{ij} = m_{ji}$ 。因此，获得这样的矩阵可以分为以下步骤：

1. 通过1步将对角线上的 n 项设为1。这一步只有1种方案。
2. 步进行 $(n^2 - n) / 2$ 步，每一步操作如下：将 m_{ij}, m_{ji} 设置为以下2种情况之一：
 - $m_{ij} = 0, m_{ji} = 0$
 - $m_{ij} = 1, m_{ji} = 1$ 。

因为每一步有2种可选方案。所以总的方案数是 $2^{(n^2-n)/2}$

根据乘法法则，以上共进行了 $n + (n^2 - n)/2$ 步，总的方案数是： $1 \times 2^{(n^2-n)/2} = 2^{(n^2-n)/2}$

6 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义 $2^n \times 3^{(n^2-n)/2}$ 个不同的自反且反对称关系

解答：根据题目要求，对应的矩阵的特点是：对角线上的项全部是1，其余项必须成对满足：

当 $m_{ij} = 1$ 时， $m_{ji} = 0$ 。因此，获得这样的矩阵可以分为以下步骤：

1. 通过1步将对角线上的 n 项设为0。因为这1步总共有1种方案。
2. 进行 $(n^2 - n) / 2$ 步，每一步操作是将 m_{ij}, m_{ji} 设置为以下3种情况之一：
 - $m_{ij} = 1, m_{ji} = 0$
 - $m_{ij} = 0, m_{ji} = 1$
 - $m_{ij} = 0, m_{ji} = 0$ 。

因为每一步有3种可选方案。所以总的方案数是 $3^{(n^2-n)/2}$

根据乘法法则，以上共进行了 $n + (n^2 - n)/2$ 步，总的方案数是： $1 \times 3^{(n^2-n)/2}$

7 给定含有 n 个元素的集合 A ，能够定义个 $2^{n^2} - 2^n \times 2^{(n^2-n)/2}$ 不同的非对称关系

解答：所有的关系中，除了满足对称性的外，其余都是非对称关系。因此有：

$$\underbrace{2^{n^2}}_{\text{所有关系数}} - \underbrace{2^n \times 2^{(n^2-n)/2}}_{\text{对称关系数}}$$