2-1

1.

列出下述集合的成员。

a) $\{x \mid x$ 是使得 $x^2=1$ 的实数$\}$

b) $\{x \mid x$ 是小于 12 的正整数$\}$

c) $\{x \mid x$ 是一个整数的平方且 $x<100\}$

d) $\{x \mid x$ 是整数且 $x^2=2\}$

解： a) {1,-1} b) {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} c) {0,1,4,9,16,25,36,49,64,81} d) $\emptyset$

3.

判断下面每对集合是否相等。

a) $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}$，$\{5, 3, 1\}$

b) $\{\{1\}\}$，$\{1, \{1\}\}$

c) $\emptyset$，$\{\emptyset\}$

解：a) 相等 b)不相等 c) 不相等

5.

判断下列语句是真还是假。

a) $0 \in \emptyset$

b) $\emptyset \in \{0\}$

c) $\{0\} \subset \emptyset$

d) $\emptyset \subset \{0\}$

e) $\{0\} \in \{0\}$

f) $\{0\} \subset \{0\}$

g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

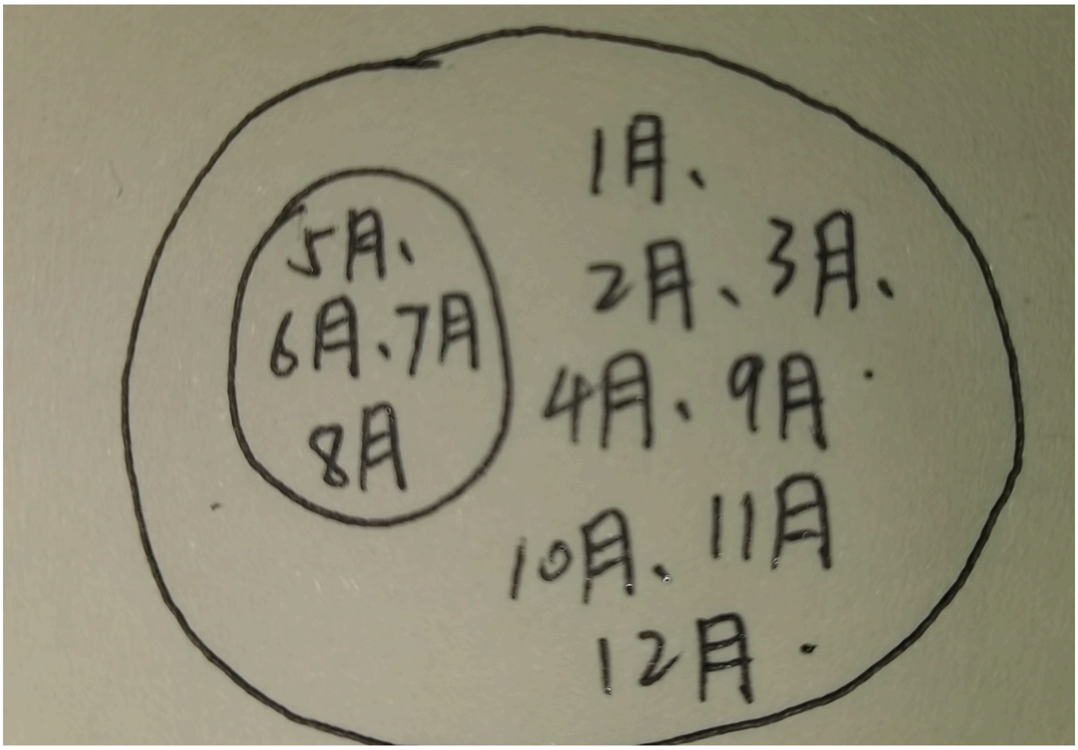
解：用T表示真，F表示假

a) F b)F c)F d)T e)F f)F g) T

7.

用文氏图说明在一年所有的月份集合中月份名称中不包含字母 R 的所有月份的集合。

解：文氏图：



下列各集合的基数是什么？

10. a) $\{a\}$　　b) $\{\{a\}\}$

c) $\{a, \{a\}\}$　　d) $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

解：a) 1　b) 1　c) 2　d) 3

11.

找出下列各集合的幂集。

a) $\{a\}$　　b) $\{a, b\}$　　c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

解：a) { {a}, $\emptyset$ }　b) { {a,b}, {a}, {b}, $\emptyset$ }　c) { { $\emptyset$ }, {{$\emptyset$}}, { $\emptyset$, { $\emptyset$ }}, $\emptyset$ }

12.

下列集合各有多少个元素？

a) $\mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\})$　　b) $\mathcal{P}(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$　　c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

解：a) 8　b) 16　c) 2

13. 证明$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$当且仅当 $A \subseteq B$。

证明：P (A) $\subseteq$ P (B) 当且仅当 A$\subseteq$ B

> 先证　P(A) $\subseteq$ P (B) $\rightarrow$ A $\subseteq$ B
>
> $\forall$ x $\in$ A ,{x} $\in$ P (A) ,而P (A) $\subseteq$ P (B) ,所以{x} $\in$ P (B),
>
> 即 {x} $\subseteq$ B, 即 x $\in$ B,故 A $\subseteq$ B .
>
> 再证　A $\subseteq$ B $\rightarrow$ P(A) $\subseteq$ P (B)
>
> 对于A的任意一个子集C，有 C $\subseteq$ A $\subseteq$ B, 又 C $\in$ P(A) ,

> 所以 C $\in \mathcal{P}$ (B), 即 $\mathcal{P}$ (A) $\subseteq \mathcal{P}$ (B) .
>
> 证毕！

14.

令 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{y, z\}$。求

a) $A\times B$ **b)** $B\times A$

解：

a) { (a,y), (a,z), (b,y), (b,z), (c,y), (c,z), (d,y), (d,z) }

b) { (y,a), (y,b), (y,c), (y,d), (z,a), (z,b), (z,c), (z,d) }

24. 给出一个能列出一个有限集合所有子集的步骤。

解：假设有限集为S={ a_1,a_2,......a_n }. 由于S的子集有2^n 个，所以可以考虑用n位的二进制串来表达，

其中第i位为1当且仅当$a_i \in$ S, 所以只要按递增顺序写出所有的二进制串，就可以写出相应的子集。

2-2

2.

令 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{0, 3, 6\}$。求

a) $A\cup B$ **b)** $A\cap B$

c) $A-B$ **d)** $B-A$

解：

a) A ∪ B = { 0,1,2,3,4,5,6} b) A ∩ B = { 3 }

c) A − B = { 1,2,,4,5} d) B − A = { 0,6 }

6.

令 A 和 B 为两个集合。试证明表 1 中的交换律：

a) $A\cup B=B\cup A$ **b)** $A\cap B=B\cap A$

证明：

> a) A ∪ B ≡ { x | x∈ A ∨ x ∈ B} ≡ { x | x ∈ B ∨ x ∈ A} ≡ B ∪ A

> b) A ∩ B ≡ { x | x ∈ A ∧ x ∈ B} ≡ {x | x∈ B ∧ x ∈ A} ≡ B ∩ A

9.

如果 A、B、C 为集合，试用下面的方法证明$\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

a) 通过证明两边互为子集。 **b)** 使用成员表。

证明：

a) x∈ $\overline{A\cap B\cap C}$ $\equiv$ x $\notin$ A ∩ B ∩ C ≡ ¬ (x ∈ A ∧ x ∈ B ∧ x ∈ C)

≡ x∉ A ∨ x ∉ B ∨ x ∉ C ≡ x∈ $\overline{A}$ ∨ x ∈ $\overline{B}$ ∨ x ∈ $\overline{C}$

≡ x ∈ $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

b) 成员表证明：

A	**B**	**C**	**A ∩ B ∩ C**	$\overline{A\cap B\cap C}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$
1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

16.

令 A 和 B 为全集 U 的子集。证明 $A\subseteq B$ 当且仅当 $\overline{B}\subseteq\overline{A}$。

集合 A 和 B 的对称差，用 $A\oplus B$ 表示，是属于 A 或属于 B 但不同时属于 A 与 B 的元素组成的集合。

证明：

> A ⊆ B ≡ x ∈ A → x ∈ B
>
> ≡ ¬ (x ∈ A) ∨ (x ∈ B)
>
> ≡ x ∉ A ∨ ¬ (x ∉ B)
>
> ≡ x ∈ $\overline{A}$ ∨ ¬ (x ∈ $\overline{B}$)
>
> ≡ ¬ (x ∈ $\overline{B}$) ∨ x ∈ $\overline{A}$
>
> ≡ x ∈ $\overline{B}$ → x ∈ $\overline{A}$
>
> ≡ $\overline{B}\subseteq\overline{A}$

18. 证明 $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$。

证明：x ∈ (A ∪ B) — (A ∩ B) 如果x属于A和B的并集但不属于A和B的交集；

而A ⊕ B 正是这样的定义。

28. 对应于两个集合之差的位串是什么？

如 果 第 一 个 位 串 的 第 i 位 是 1 而 第 二 个 位 串 的 第 i 位 为 0 ,则 两 个 集 合 之 差 的 位 串 的 第 i 位 是 1 ,否 则 为 0 .

下面我用成员表来演示对应于两个集合之差(A— B)的位串：

A	B	A— B
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

2-3

1.

为什么下列问题中的 f 不是从 **R** 到 **R** 的函数？

a) $f(x)=1/x$ **b)** $f(x)=\sqrt{x}$ **c)** $f(x)=\pm\sqrt{(2x+1)}$

解：

a) x不能取到0

b) x不能取到负数

c) 对于每个x 都指派了两个不同的值，$f(x)$不是函数

3.

求下列函数的定义域和值域。(注意在每种情况下，为了求函数定义域，只需确定被该函数指派了值的元素集合。)

a) 函数为每个位串指派串中 1 的位数与 0 的位数之差。

b) 函数为每个位串指派串中 0 的位数的 2 倍。

c) 函数为每个位串指派当把串分成字节(8 位为 1 个字节)时不够一个字节的位数。

d) 函数为每个正整数指派不超过该整数的最大完全平方数。

解：

a)定义域是所有位串集合，值域是整数集合

b) 定义域是所有位串集合，值域是非负偶整数集合

c) 定义域是所有位串集合，值域是{1,2,3,4,5,6,7}

d)定义域是正整数集合，值域是{1,4,9,16,25……}

8.

判断在下列情况下函数 $f: \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ 是否是映上的。

a) $f(m, n)=m+n$　　b) $f(m, n)=m^2+n^2$

c) $f(m, n)=m$　　d) $f(m, n)=|n|$

e) $f(m, n)=m-n$

解:

a) 映上的　b)不映上的 c) 映上的　d) 不映上的 e) 映上的

12.

判断下列各函数是否是从 **R** 到 **R** 的双射函数。

a) $f(x)=2x+1$　　b) $f(x)=x^2+1$

c) $f(x)=x^3$　　d) $f(x)=(x^2+1)/(x^2+2)$

解:

a) 是　b)不是　c) 是　d) 不是

18.

如果 f 和 $f\circ g$ 都是映上的，能否得出结论 g 也是映上的？说明理由。

不是。

令 f : A{a,b} $\to$ B{c}　g : C{d} $\to$ A{a,b};　f(a)=c, f(b)=c,　g(d)=a

可见f , f○g 都是映上的，而g不是。

39.

a) 证明如果 S 是基数为 m 的集合，m 为正整数，则在集合 S 与集合 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 之间存在一个一一对应函数。

b) 证明如果 S、T 均为基数为 m 的集合，m 为正整数，则在集合 S 与集合 T 之间存在一个一一对应函数。

解:

a) S 的基数为m，　说明S有m个不同的元素，所以可令

S的第x个元素对应整数x,这样就是一个一 一对应函数。

b) 由a知存在一个从S到{1,2,3，....}的双射函数f 和一个从{1,2,3，....}

到T的双射函数，合成g○f 就是S到T的双射函数。

2-4

4.

至少找出 3 个不同的序列，其初始项都是 1、2、4，并可用简单的公式或规则产生各项。

解：1，每一项是前一项的两倍；2，第n项等于前一项加上n-1;

3，是正整数但不是3的倍数;

6.

令 $a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$，$n = 0, 1, 2, \cdots$。

a)找出 a_0，a_1，a_2，a_3 和 a_4。

b)证明 $a_2 = 5a_1 - 6a_0$，$a_3 = 5a_2 - 6a_1$ 和 $a_4 = 5a_3 - 6a_2$。

c)证明对于所有整数 n，$n \geqslant 2$，有 $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$。

a) $a_0 = 6$ $a_1 = 17$ $a_2 = 49$ $a_3 = 143$ $a_4 = 421$

b) $5a_1 - 6a_0 = 49 = a_2$ $5a_2 - 6a_1 = 143 = a_3$ $5a_3 - 6a_2 = 421 = a_4$

c) 证明：

> 依题意：
>
> $a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$, $a_{n-1} = 2^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1}$, $a_{n-2} = 2^{n-2} + 5 \cdot 3^{n-2}$
>
> $\therefore\ 5a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5 \cdot 2^{n-1} + 25 \cdot 3^{n-1} - 6 \cdot 2^{n-2} - 30 \cdot 3^{n-2}$
>
> $= 2 \cdot 2^{n-1} + 15 \cdot 3^{n-1}$
>
> $= 2^n + 5 \cdot 3^n$
>
> $= a_n$
>
> 证毕！

9.

找出下面每个带有初始条件的递推关系的解。采用例 10 中所用的迭代方法求解。

a) $a_n = 3a_{n-1}$，$a_0 = 2$

b) $a_n = a_{n-1} + 2$，$a_0 = 3$

c) $a_n = a_{n-1} + n$，$a_0 = 1$

d) $a_n = a_{n-1} + 2n + 3$，$a_0 = 4$

e) $a_n = 2a_{n-1} - 1$，$a_0 = 1$

f) $a_n = 3a_{n-1} + 1$，$a_0 = 1$

g) $a_n = na_{n-1}$，$a_0 = 5$

h) $a_n = 2na_{n-1}$，$a_0 = 1$

解：

a) $a_n = 2 \cdot 3^n$

b) $a_n = 2n + 3$

c) $a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$

d) $a_n = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$

e) $a_n = 1$

f) $a_n = \frac{(3^{n+1} - 1)}{2}$

g) $a_n = 5n\,!$

h) $a_n = 2^n n\,!$

Over!