1. 在实数集 R 上定义二元运算*为：a*b＝a＋b＋ab，试判断下列论断是否正确？为什么？

(1) <R，*>是一个代数系统。

(2) <R，*>是一个半群。

(3) <R，*>是一个独异点。

2. 设<A，*>是半群，对 A 中任意元 a 和 b，若 a*b＝b*a，则必有 a＝b，证明：

(1) 对 A 中每个元 a，有 a*a＝a。

(2) 对 A 中任意元 a 和 b，有 a*b*a＝a。

(3) 对 A 中任意元 a、b 和 c，有 a*b*c＝a*c。

3. 设 Z 是整数集合，在 Z 上定义二元运算*为：x*y＝x＋y－2，那么 Z 和*是否构成群？为什么？

4. 设<G，*>是群，请证明 x 和 x^{-1} 的阶数相同。

5. 设<G，*>是一群，令 R＝{<a，b>|a、b∈G，存在 g∈G 使 $b＝g*a*g^{-1}$}，证明 R 是 G 上的等价关系。

6. 设<G，*>是群，对任一 a∈G，令 H={y|y*a=a*y，y∈G}，试证明<H，*>是<G，*>的子群。

7. 假设$+_6$是模 6 加法，Z_6={[0], [1], [2], [3], [4], [5]}，则<Z_6, $+_6$>是一个群。试写出<Z_6, $+_6$>中所有的生成元和所有的子群，以及 3 阶子群关于[3]的左陪集。

1. (1)由 a*b＝a＋b＋ab∈R 知，运算*是封闭的，所以<R，*>是一个代数系统。

   (2)对任意的 a、b、c∈R，有

   (a*b)*c＝(a＋b＋ab)*c＝a＋b＋ab＋c＋(a＋b＋ab)c＝a＋b＋c＋ab＋ac＋bc＋abc

   a*(b*c)＝a*(b＋c＋bc)＝a＋b＋c＋bc＋a(b＋c＋bc)＝a＋b＋c＋ab＋ac＋bc＋abc

   所以运算*满足结合率，故<R，*>是一个半群。

   (3)对任意的 a∈R，a*0＝a＝0*a，0 是关于运算*的幺元，所以<R，*>是一个独异点。

2. (1)由(a*a)*a＝a*(a*a)，所以 a*a＝a。

   (2)由 a*(a*b*a)＝(a*a)*(b*a)＝a*b*(a*a)＝(a*b*a)*a，所以有 a*b*a＝a。

   (3)由(a*c)*(a*b*c)＝(a*c*a)*(b*c)＝a*(b*c)＝(a*b)*c＝(a*b)*(c*a*c)＝(a*b*c)*(a*c)，所以有 a*b*c＝a*c。

3. 由 x*y＝x＋y－2 可知，运算*是封闭的。

   又(x*y)*z＝(x＋y－2)*z＝x＋y＋z－4，x*(y*z)＝x*(y＋z－2)＝x＋y＋z－4，即有(x*y)*z＝x*(y*z)，运算*满足结合率。

   因为 x*2＝x＋2－2＝x＝2*x，所以 2 是关于运算*的幺元。

   对任意 x∈Z，令 y＝4－x，则 x*y＝x＋y－2＝2＝y*x，所以 Z 中的每个元素均有逆元。

   综上可知，Z 和*是否构成群。

4. 假设 x 与 x^{-1} 互为逆元。

   若 x=e，则显然 x 与 x^{-1} 都是 1 阶元。

   若 x≠e，令 x 与 x^{-1} 互为逆元，且 x 是 n 阶元，x^{-1} 为 m 阶元，n≠m，即 $x^m=e$，$(x^{-1})^n=e$。

   已知 $x*x^{-1}=e = x^m = x*x^{m-1}$,所以 $x^{-1}=x^{m-1}$，

   同理，$x*x^{-1}=e=(x^{-1})^n=(x^{-1})*(x^{-1})^{n-1}$,所以 $x=(x^{-1})^{n-1}$

   进而 $x*x(^{-1})=(x^{-1})^{n-1}*x^{m-1}$

   $=\underbrace{x^{-1}* x^{-1}*\ldots* x^{-1}}_{n-1\text{ 个}} * \underbrace{x*x*\ldots*x}_{m-1\text{ 个}}$

   因为 n≠m，所以 $x*x^{-1}\neq e$,和 x 与 x^{-1} 互为逆元矛盾，
   所以 n=m,即 x 与 x^{-1} 的阶数相同。

5. 对任意 x∈G，因为 x＝$e*x*e^{-1}$，所以 xRx，故 R 是自反的。

   对任意 x、y∈G，若 $x\,R\,y$，由 R 的定义知，存在 g∈G 使 y＝$g*x*g^{-1}$，$x=g^{-1}*y*(g^{-1})^{-1}$，因为<G，*>是一群，g∈G，于是 g^{-1}∈G，所以 yRx，故 R 是对称的。

   对任意 x、y、z∈G，若 $x\,R\,y$ 且 $y\,R\,z$，由 R 的定义知，存在 g_1、g_2∈G 使 $y=g_1*$

$x*g_1^{-1}$，$z=g_2*y*g_2^{-1}$，于是$z=g_2*y*g_2^{-1}=g_2*(g_1*x*g_1^{-1})*g_2^{-1}=(g_2*g_1)*x*((g_2*g_1)^{-1}$，因为<G，*>是一群，$g_1$、$g_2$∈G，于是$g_2*g_1$∈G，所以$z$Rx，故R是传递的。

综上可得，R是G上的等价关系。

6. 证明一：

对于任意的x，y∈H，以及任意的a∈G，

有$(x*y)*a=x*y*a=x*(y*a)=x*a*y=a*x*y=a*(x*y)$

所以，x*y∈H，*关于H是封闭的。

因为$H=\{y \mid y*a=a*y, y\in G\}$，有$H\subseteq G$。又因为<G,*>是群，所以*在H中可满足结合性。

又因为e*a=a*e，所以e∈H，即存在幺元。

对任意的x∈H，在G上有 $x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$，所以

$$a*x^{-1}=(x^{-1}*x)*(a*x^{-1})=x^{-1}*(x*a)*x^{-1}=x^{-1}*a*x*x^{-1}=x^{-1}*a$$

所以，有$a*x^{-1}=x^{-1}*a$。即$x^{-1}\in H$。

综上所述，<H,*>是<G,*>的子群

证明二：

令x, y∈H，即 x*a=a*x， y*a=a*y

由y*a=a*y, 可对等式两端同时左乘y^{-1}和右乘y^{-1}，得到$a*y^{-1}=y^{-1}*a$

故$x*y^{-1}*a=x*a*y^{-1}=a*x*y^{-1}$

即$x*y^{-1}\in H$，所以, ⟨H, *⟩是⟨G, *⟩的子群。

7. 生成元有：[1], [5]。

子群有：<{[0]}, $+_6$>，<{[0], [3]}, $+_6$>，<{[0], [2], [4]}, $+_6$>和<Z_6, $+_6$>。

3阶子群是<{[0], [2], [4]}, $+_6$>, 它关于[3]的左陪集是{[1], [3], [5]}。