一招解决集合与关系中的计数问题

hawksoft

集合与关系中的计数问题，是指如下的一类问题：给定一个含有n个元素的集合A，集合A问有多少个子集？问在集合A上可以定义多少个关系？可以定义多少个自反关系？可以定义多少个对称关系？等等。

1 一招在手

计数问题，是组合数学研究的基本问题之一。这里讲一个最基本和最普遍的计数方法，称为乘法法则。

乘法法则：完成一个任务需要n步，每一步的方案数分别为：$m_1, m_2, \cdots, m_n$,则完成该任务的的方案总数为：$m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$

乘法法则很简单，但可以解决很多计数问题。使用该法则的重点在于两个：**一是确定完成任务的步骤，二是确定每一个步骤的可选方案数**。对于有些问题，还是比较直观，如下面的例子：

例1：由数字$0, 1, \cdots, 9$组成的8位密码，共有多少个？

解答：套用乘法法则。生成一个满足要求的密码需要**8**步，每一步分别生成密码的1位；因为每一位密码可以是10个数字中的任意一个数字，所以生成密码的每一步有10种方案；所以总的密码数对应所有的解决方案，即为：$10 \times 10 \cdots \times 10 = 10^8$

而对有些问题，则不是很直观，如下面的例子：

例2：含有n个元素的集合A共有多少个不同的子集？

解答：为了使用乘法法则，我们首先将集合A的n个元素排成一列$a_1, a_2, \cdots, a_n$。根据子集的定义，得到一个子集的任务可以分为n步；第i步决定元素a_i是否选入子集，所以有2种方案。根据乘法法则，总的方案数为：$2 \times 2 \cdots \times 2 = 2^n$

2 初试身手

我们这里只研究二元关系，它的**本质是序偶（又称为二元组）的集合**。

首先要记住一点：**如果对集合A上的所有元素指定一种顺序，则定义在A上的每一个关系，都对应一个$n \times n$的方形矩阵M_R**，而且M_R是$0-1$矩阵。

$$M_R = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

因此，我们把**集合上关系的计数问题转化为对应的矩阵的计数问题**。

例3: 给定含有n个元素的集合A，能够定义多少个不同的关系？

解答：在A上定义一个关系R就是确定一个矩阵M_R，也就是确定矩阵M_R的每一项m_{ij}。因为M_R共有n^2项，所以可以分为n^2步；m_{ij}只能是0或者1，因此每一步有2种可选方案。根据乘法法则，总的方案数是：$2 \times 2 \cdots \times 2 = 2^n$

例4: 给定含有n个元素的集合A，能够定义多少个不同的恒等关系？

解答：恒等关系对应的矩阵的特点是：对角线上的项全都是1，其余项都是0。因此，获得这样的矩阵可以分为2步：

1. 第一步将对角线上的n项设为1，只有**1**种可选方案。
2. 接着将除对角线外的n^2-n项设为0，也只有**1**种可选方案。

所以总的方案数有$1 \times 1 = 1$。

3 横扫天下

按照上面的思路，我们可以照猫画虎，完成其它较为复杂的关系计数问题。

1 给定含有n个元素的集合A，能够定义2^{n^2-n}个不同的自反关系

证明：自反关系对应的矩阵的特点是：对角线上的项全都是1，其余项可以是0或1。因此，获得这样的矩阵可以分为以下步骤：

1. 第一步将对角线上的n项设为1，只有**1**种可选方案。
2. 通过n^2-n步将除对角线外的n^2-n项设为0或者1。由于每一步有两种可选方案，所以总的方案数为2^{n^2-n}。

所以总的方案数有$1 \times 2^{n^2-n} = 2^{n^2-n}$。

2 给定含有n个元素的集合A，能够定义2^{n^2-n}个不同的反自反关系

证明：反自反关系对应的矩阵的特点是：对角线上的项全都是0，其余项可以是0或1。因此，获得这样的矩阵可以分为以下步骤：

1. 第一步将对角线上的n项设为0，只有**1**种可选方案。
2. 通过n^2-n步将除对角线外的n^2-n项设为0或者1。由于每一步有两种可选方案，所以总的方案数为2^{n^2-n}。

所以总的方案数有$1 \times 2^{n^2-n} = 2^{n^2-n}$。

3 给定含有n个元素的集合A，能够定义$2^n \times 2^{(n^2-n)/2}$不同的对称关系

解答：对称关系对应的矩阵的特点是：对角线上的项可以是0或者1，其余项必须成对满足$m_{ij} = m_{ji}$。因此，获得这样的矩阵可以分为以下步骤：

1. 通过n步将对角线上的n项设为0或者1。因为每一步有2种方案，因此总共有2^n种方案。
2. 进行（$n^2 - n$）$/2$ 步，每一步操作是将m_{ij}, m_{ji}设置为以下2种情况之一：
   - $m_{ij} = 0, m_{ji} = 0$
   - $m_{ij} = 1, m_{ji} = 1$ 。

     因为每一步有2种可选方案。所以总的方案数是$2^{(n^2-n)/2}$

根据乘法法则，以上共进行了$n + (n^2 - n)/2$步，所以总的方案数是：$2^n \times 2^{(n^2-n)/2}$

4 给定含有n个元素的集合A，能够定义$2^n \times 3^{(n^2-n)/2}$个不同的反对称关系

解答：对称关系对应的矩阵的特点是：对角线上的项可以是0或者1，其余项必须成对满足:
当$m_{ij} = 1$时，$m_{ji} = 0$。因此，获得这样的矩阵可以分为以下步骤：

1. 通过n步将对角线上的n项设为0或者1。因为每一步有2种方案，因此总共有2^n种方案。
2. 进行（$n^2 - n$）$/2$步，每一步操作是将m_{ij}, m_{ji}设置为以下**3**种情况之一:
   - $m_{ij} = 1, m_{ji} = 0$
   - $m_{ij} = 0, m_{ji} = 1$
   - $m_{ij} = 0, m_{ji} = 0$ 。

     因为每一步有3种可选方案。所以总的方案数是$3^{(n^2-n)/2}$

根据乘法法则，以上共进行了$n + (n^2 - n)/2$步，总的方案数是：$2^n \times 3^{(n^2-n)/2}$

5 给定含有n个元素的集合A，能够定义$2^{(n^2-n)/2}$个不同的自反且对称的关系

解答：根据题目要求，对应的矩阵的特点是：对角线上的项全部是1，其余项成对满足：$m_{ij} = m_{ji}$。因此，获得这样的矩阵可以分为以下步骤：

1. 通过1步将对角线上的n项设为1。这一步只有1种方案。
2. 步进行（$n^2 - n$）$/2$ 步，每一步操作如下：将m_{ij}, m_{ji}设置为以下2种情况之一：
   - $m_{ij} = 0, m_{ji} = 0$
   - $m_{ij} = 1, m_{ji} = 1$ 。

   因为每一步有2种可选方案。所以总的方案数是$2^{(n^2-n)/2}$

根据乘法法则，以上共进行了$n + (n^2 - n)/2$步，总的方案数是：$1 \times 2^{(n^2-n)/2} = 2^{(n^2-n)/2}$

6 给定含有n个元素的集合A，能够定义$2^n \times 3^{(n^2-n)/2}$个不同的自反且反对称关系

解答：根据题目要求，对应的矩阵的特点是：对角线上的项全部是1，其余项必须成对满足:
当$m_{ij}=1$时，$m_{ji}=0$。因此，获得这样的矩阵可以分为以下步骤：

1. 通过1步将对角线上的n项设为0。因为这1步总共有1种方案。
2. 进行（n^2-n）$/2$步，每一步操作是将m_{ij}, m_{ji}设置为以下**3**种情况之一:
    - $m_{ij}=1, m_{ji}=0$
    - $m_{ij}=0, m_{ji}=1$
    - $m_{ij}=0, m_{ji}=0$ 。

    因为每一步有3种可选方案。所以总的方案数是$3^{(n^2-n)/2}$

根据乘法法则，以上共进行了$n+(n^2-n)/2$步，总的方案数是：$1 \times 3^{(n^2-n)/2}$