学院________ 专业、班________ 年级________ 学号________ 姓名________ 考试教室________

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密 封 线

重庆大学《离散数学》课程试卷

◉ <赖
○ =赖

2018—2019 学年 第 2 学期

开课学院：计算机学院 课程号：CST10101 考试日期：2019.07.04

□□颀咆 ○ 哚赖 ◉ □赖 ○ 鸿弛 考试时间：120 分钟

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

备注：

1.使用试卷标准格式命题时，大标题一律采用四号宋体、小标题及正文用小四号宋体；

2.每套试卷满分应该为 100 分；在每大题的题号后面括号内标明该题的分数值；

3.打印试题时按 A4 纸缩小打印，制卷时再统一按比例放大；试卷原则上要求单面印刷，按份装订。

(以上红色字体为命题时参考内容,命题完成后打印前请删除掉)

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.考试作弊，留校察看，毕业当年不授学位；请人代考、替他人考试、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、选择题（30 分，每小题 2 分）

1．下列哪个公式是命题公式： 【A】

A. (P→(P∨Q))　B. $(P\vee QR)\to S$

C. $(\neg P\to Q)\to(Q\to P)$　D. $((R\to(Q\to R)\to(P\to Q))$

2．令 A 为命题公式 $((P\to Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q))\vee(P\wedge R\wedge\neg P)$，则： 【A】

A．A 是重言式　B． $\neg A$ 是重言式

C．A 和 $\neg A$ 都不是重言式　D． A 和 $\neg A$ 都是重言式

3．命题公式 $\neg(p\wedge q)\to r$ 的成真赋值为 【B】

A．000，001，110　B. 001，011，101，110，111

C．全体赋值　D．无

4．下列公式中哪个不是前束范式？ 【B】

A. $(\forall x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y))$　B. $(\forall x)(\forall y)(P(x)\wedge Q(y))\vee(\exists z)S(z)$

C. $Q(a,b)$　D. P

5．下面的二元关系中哪个是传递的？ 【C】

A．父子关系　B．朋友关系

C．集合的包含关系　D．实数的不相等关系

6．下列选项中不是偏序集合的是 【B】

A．<P(N)，⊆>　B．<P(N)，⊂>

C．<P({a})，⊆>　D．<P(Ø)，⊆>

7．设 A={a, b, c}，R1、R2 是 A 上的二元关系，且 R1 = {<a, b>, <a, c>, <b, c>}，R2 ={<a, b>, <a, a>}，则 $R_1\circ R_2=$ 【D】

A．{<a, b>, <a, c>}　B．{<a, b>, <a, c>, <b, c>}

C．{<a, b>, <a, a>}　D．Φ

8．设集合 S={x|x=2n，n∈Z+}，则 S 【A】

A．在普通乘法下封闭，在普通加法下不封闭

B．在普通乘法和普通加法下都封闭

C．在普通加法下封闭，在普通乘法下不封闭

D．在普通加法和普通乘法下均不封闭

9．设<A, ★>是代数系统，元素 $a\in A$ 有左逆元 a_L^{-1} 和右逆元 a_R^{-1}。若运算★满足（　），则 $a_L^{-1}=a_R^{-1}$。 【A】

A．结合律　B．交换律

C．等幂率　D．分配律

10．设集合 A = {0, 1, 2, 3}，+ 4: 关于模 4 的加法，则系统<A, +4>的生成元是【C】

A．0，1　B．1，2

C．1，3　D．1，2，3

11．设 S= {0，1，2，3}，≤是小于等于关系，则 S 与≤ 【A】

A．不构成代数系统　B．是半群，不是独异点

C．是独异点，不是群　D．是群

12．设有向图 G=<V，E>，其中 V= {a，b，c，d，e，f}，E= {<a，b>，<b，c>，<a，d>，<d，e>，<f，e>}。此有向图是 【C】

A．强连通图　B．单侧连通图

C．弱连通图　D．不连通图

13．设 G 是由五个顶点组成的完全图，则从图 G 中删去几条边可以得到树 【A】

A．6　B．5

C．8　D．4

14．连通图至少有 【C】

A．一条欧拉回路　B．一条汉密尔顿回路

C．一颗生成树　D．一条欧拉路

15．设 T 是无向树，T 中有 2 个 2 度结点，4 个 3 度结点和 3 个 4 度结点，且 T 中没有大于 4

命题人：邢永康、刘斌、黎勇 组题人：黄宏宇、刘然 审题人：冯亮、陈超 命题时间：2019.06.05 教务处制

度的结点。请问 T 中有几片树叶？　　【C】

A．10　　B．11

C．12　　D．13

二、解答题（28 分，每小题 7 分）

16．求下列命题公式的主析取范式和主合取范式： $(P\to Q)\wedge(Q\to P)$

解:先求主合取范式:

$$(P\to R)\wedge(Q\to R)\Leftrightarrow(\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)\wedge((P\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R)$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$$

（+2）

由此可得 $(P\to R)\wedge(Q\to R)$ 的主合取范式为

$M_{100}\wedge M_{110}\wedge M_{010}$　　(+1)

于是可得 $(P\to R)\wedge(Q\to R)$ 的主析取范式为

$m_{000}\vee m_{001}\vee m_{011}\vee m_{101}\vee m_{111}$　　(+2)

即 $(P\to R)\wedge(Q\to R)$ 的主析取范式为:

$$(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$$

(+2)

17．设集合 P = {x1, x2, x3, x4, x5}上的偏序关系如图 1 所示。找出 *P* 的最大元、最小元、极大元、极小元，并找出子集{x2, x3, x6}，{x2, x3, x5}的上界、下界、上确界、下确界，填入表 1。

表 1

子集	上界	下界	上确界	下确界
$\{x_2, x_3, x_6\}$	x_6	x_1	x_6	x_1
$\{x_2, x_3, x_5\}$	无	x_1	无	x_1

（+4）

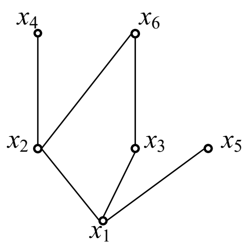


图 1

解：*P* 没有最大元，最小元为 x_1。

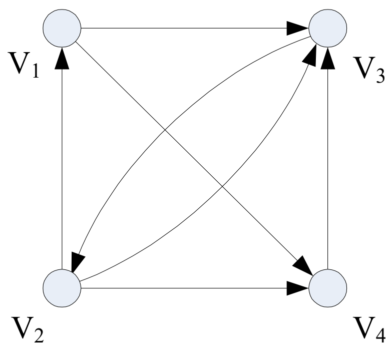
极大元为 x_4、x_5、x_6，极小元为 x_1。(+3)

18．设$<Z_6, +_6>$是一个群，这里$+_6$是模 6 加法，Z_6={[0], [1], [2], [3], [4], [5]}，试写出$<Z_6, +_6>$中所有的生成元和所有的子群。

解：生成元有：[1], [5]。(+3)

子群有：<{[0]}, +6>，<{[0], [3]}, +6>，<{[0], [2], [4]}, +6>和<Z6, +6>。(+4)

19．设有向图 G=（V,E）如下图所示，求邻接矩阵 A，可达性矩阵 P，并求长度为 3 的路的总数以及回路数.



解：

邻接矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

(+2)

可达性矩阵 P= $A\vee A^2\vee A^3\vee A^4$

V 其中

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&1&2&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&1\\0&1&2&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&2&4&3\\1&2&2&1\\0&1&2&1\end{bmatrix}$$

(+2)

其中长度为 3 的路有：17

长度为 3 的回路：6　　(+3)

三、证明题（32 分，每小题 8 分）

20．证明：$S \to \neg Q, S \vee R, \neg R \leftrightarrow Q \Rightarrow R$

证明：

(1) $S \vee R$　　P

(2) $\neg R$　　P（附加前提）

(3) S　　(1)(2)T, I

(4) $S \to \neg Q$　　P

(5) $\neg Q$　　(3)(4)T, I　（+2）

(6) $\neg R \leftrightarrow Q$　　P

(7) $(\neg R \to Q) \wedge (Q \to \neg R)$　　(6)T, E

(8) $\neg R \to Q$　　(7)T, I

(9) R　　(5)(8)T, I　（+4）

(10) $R \wedge \neg R$　　(2)(9)矛盾　（+2）

21．给定集合 S={1, 2, 3, 4, 5}，找出 *S* 上的等价关系 *R*，要求此关系 *R* 能产生划分{{1, 2},{3},{4, 5}}。并画出关系图。

解：我们可用如下方法产生一个等价关系：

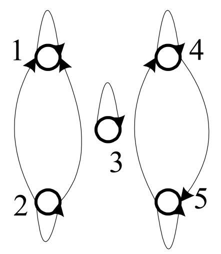
R1={1, 2}×{1, 2}={<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>}　（+1）

R2={3}×{3}={<3, 3>}　（+1）

R3={4, 5}×{4, 5}={<4, 4>, <4, 5>, <5, 4>, <5, 5>}　（+1）

R= R1∪R2∪R3={<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <4, 5>, <5, 4>, <5, 5>}（+3 分）

关系图如下图所示。（+2）



22．设<G, *>是一个群，而 a∈G，如果 f 是从 G 到 G 的映射，使得对于每一个 x∈G，都有

f(x) = a * x * a-1

试证明 f 是一个从 G 到 G 上的自同构。

证明：对于任意的 x，y∈G，若 x ≠ y，则由群的消去律有：

f(x) = a * x * a-1 ≠ a * y * a-1 = f(y)

所以，*f* 是 *G* 到 *G* 的入射。　（+3）

对于任意的 *y*∈*G*，由封闭性得

a-1*y*a∈G，　（+2）

不妨设 a-1*y* a=x。

这就说明，对于任意的 y∈G 必存在 x∈G，有

f(x* y)= a*(x*y)*a-1= (a*x*a-1)*(a*y*a-1)= f(x)* f(y)　（+3）

因此，f 是一个从 G 到 G 上的自同构

23．设 G 是一个有 v 个节点 e 条边的连通简单平面图，若 v≥3 则 e≤3v-6。

证明：设简单连通平面图 G 的面数为 r，当 v=3，e=2 时 $e \le 3v-6$ 显然成立，(+2)

除此以外，若 $e \ge 3$，则每一面的次数不小于 3，由于一个有限平面图面的次数之间等于边的 2 倍，可令各面次数之和为 2e，因此 $2e \ge 3r$，即 $r \le \frac{2}{3}e$

(+2)

代入欧拉定理得：(+3)

$$2 = v - e + r \le v - e + \frac{2}{3}e\text{，(+2)即 } e \le 3v-6\text{。(+2)}$$

四、综合题（10 分）

24．**将下列论述符号化，并推证其结论：**不就业的学生是不能毕业的。有些毕业的学生升学考上了研究生。因此，有些升学考上研究生的学生是算就业的。

解：设论域为学生。

令 $M(x)$：x 是就业的学生；$F(x)$：x 是毕业的学生；$G(x)$：x 是升学考上研究生的学生。

本题符号化为：

$(\forall x)(\neg M(x) \to \neg F(x)) \wedge (\exists x)(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow (\exists x)(G(x) \wedge M(x))$；（+3）

证明：

（1）$(\exists x)(F(x) \wedge G(x))$　　P

（2）$F(c) \wedge G(c)$　　ES（1）

（3）$(\forall x)(\neg M(x) \to \neg F(x))$　　P

（4）$\neg M(c) \to \neg F(c)$　　US（3）

（5）$M(c)\vee\neg F(c)$	T（4）E	
（6）$F(c)$	T（2）I	
（7）$M(c)$	T（5），（6）I	
（8）$G(c)$	T（2）I	
（9）$G(c)\wedge M(c)$	T（7），（8）I	
（10）$(\exists x)(G(x)\wedge M(x))$	EG（9）	（+7）