第 3 章 概率理论

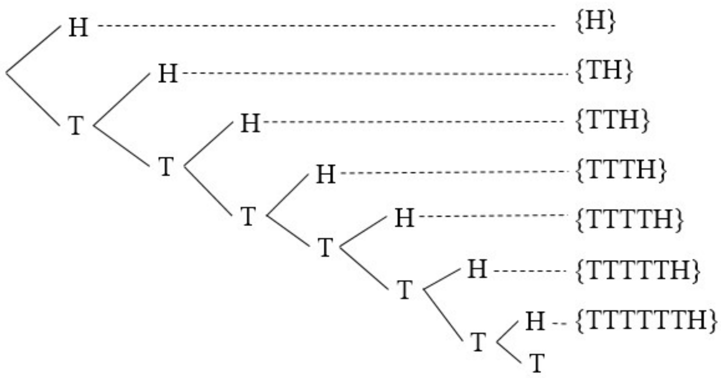
第 72 页

大数法则(Law of large number)：重复试验相当多次后(N 足够大)，相对次数的概率会 近似古典方法或逻辑推导的概率。

因为计算机的快速计算，利用计算机模拟或仿真(simulation)，使 N 相当大，可以很方 便地计算相对次数。

例题 3.1： 掷一个硬币(正反两面)，直到出现第一个正面，则停止。我们用 H 表示正面(人头 head)，T 表示反面(tail)。样本点：{H}、{TH}、{TTH}、{TTTH}、{TTTTH}、{TTTTTH}、{TTTTTTH}、…

如果试验是一连串的过程，则可以用结果树(outcome tree)来表示所有的样本点。



例题 3.2： 假设男孩的出生概率是 52%，女孩是 48%。令 B 代表男孩，令 G 代表女孩。如果连续出生 3 个小孩，其样本点及结果树如下图。

这个结果树的「样本点的概率不同」计算，是假设：第一个孩子的性别和第二个孩子的性别是独立事件。但是如果：第一个孩子和第二个孩子是双胞胎，则不是独立事件。

有关独立事件请见第 3.6 节。

图 3-1 连续 3 个小孩的结果树

例题 3.3： 52 张扑克牌，抽出一张牌，计算下列事件的概率。

1. A＝ 出现 1 张老 K
2. B＝ 出现 1 张红心
3. C＝ 出现 1 张人头(J，Q，K)
4. D＝ 出现 1 张黑桃
5. $A \cup B$
6. $A \cap B$
7. $C \cup D$
8. 以红色牌{红心,红方块}，黑色牌{黑桃，黑梅花}为一个性质；{A},{J,Q,K}，{2,3,…,10} 点数牌为另一个性质，写出列联表。

解答：1. $P(A)=\dfrac{4}{52}$ 2. $P(B)=\dfrac{13}{52}$ 3. $P(C)=\dfrac{12}{52}$ 4. $P(D)=\dfrac{13}{52}$

5. $P(A \cup B)=\dfrac{16}{52}$ 6. $P(A \cap B)=\dfrac{1}{52}$ 7. $P(C \cup D)=\dfrac{22}{52}$

性 质 1

性质 2	$\{A\}$	$\{J,Q,K\}$	{2,3,...,10}	
{红心,红方块}	2	6	18	26
{黑桃,黑梅花}	2	6	18	26
	4	12	36	52

例题 3.4： 假设男孩的出生概率是 0.5，女孩是 0.5，连续出生 3 个小孩的试验，计算下列事件的概率。

1. A＝ 至少有 2 个女孩。
2. B＝ 第 2 个是女孩，第 3 个是男孩。
3. C＝ 最多有 1 个男孩。
4. D＝ 清一色，三个都是相同性别。
5. E＝ 只有 1 个女孩。
6. F＝ 只有 2 个女孩。
7. G＝ 有 3 个女孩。
8. $P(A \cup B)$
9. $P(A \cap B)$
10. $P(C \cup D)$
11. $P(C \cap D)$

解答：1. $P(A)=P\{E_4,E_6,E_7,E_8\}=4/8$ 2. $P(B)=P\{E_3,E_7\}=2/8$

3. $P(C)=P\{E_4,E_6,E_7,E_8\}=4/8$ 4. $P(D)=P\{E_1,E_8\}=2/8$

5. $P(E)=P\{E_2,E_3,E_5\}=3/8$ 6. $P(F)=P\{E_4,E_6,E_7\}=3/8$

7. $P(G)=P\{E_8\}=1/8$

8. $P(A \cup B)=P\{E_3,E_4,E_6,E_7,E_8\}=5/8$

9. $P(A \cap B)=P\{E_7\}=1/8$

10. $P(C \cup D)=P\{E_1,E_4,E_6,E_7,E_8\}=5/8$

11. $P(C \cap D)=P\{E_8\}=1/8$

3.3 排列组合的公式

组合公式是：排列(不同物品)变组合；相同物品排列公式是：组合(相同物品)变排列。其步骤互逆，两个公式结果相同。

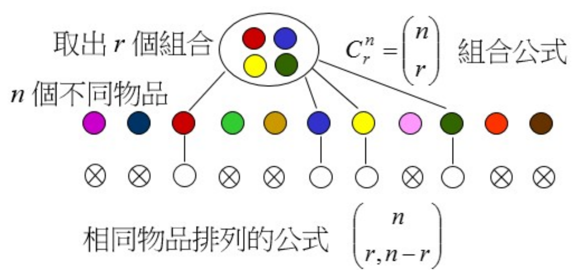


图 组合公式与相同物品排列公式

二项系数(binomial coefficient) ： $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

多项系数(multinomial coefficient) ：

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+...+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}$$

例题 3.6 排列公式

R> DescTools::CombN(n,r,repl=F,ord=T) ; DescTools::CombN(30,4,F,T)

例题 3.7 组合公式

R> DescTools::CombN(n,r,repl=F,ord= F) ; DescTools::CombN(30,6,F,F)

例题 3.11 重复组合

R> DescTools::CombN(n,m,repl=T,ord=T) ; DescTools::CombN(4,12,T,F)

例题 3.12 重复排列

R> DescTools::CombN(n,m,repl=T,ord=F) ; DescTools::CombN(6,2,T,F)

例题 3.12a： 有 3 男 2 女去看电影，刚好有一排 5 个空位，请问：

1. 他们以随机抽签入座，座位的方式有几种？
2. 如果以男女间隔坐，座位的方式有几种？
3. 如果甲男想和乙女坐在一起，座位的方式有几种？

例题 3.12b： 有 4 个信封分别装有 4 张支票，不知道其中金额，也不知道最大及最小金额。你可以任选一个信封，打开看其中金额，决定是否接受。如果接受就结束，如果不接受就可以再开下一个信封，决定是否接受，但不能再选已被你放弃的信封。如果已选到最后一个信封，当然一定要选它，否则什么都没有。请问：如何决定，可以得到最大的期望金额？

3.5 条件概率

例题 3.16： 52 张扑克牌，抽出一张牌，下列事件的概率：

A = 出现 1 张 老 K　　　　B = 出现 1 张 红心

C = 出现 1 张 人头(J，Q，K)　　D = 出现 1 张 黑桃

计算下列条件概率 ：

1. P(A|B) 2. P(B|A) 3. P(C|A) 4. P(A|C) 5. P(C|B) 6. $P(A|\overline{C})$ 7. $P(C|\overline{A})$

解答：1. $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1/52}{13/52}=\dfrac{1}{13}$ 2. $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1/52}{4/52}=\dfrac{1}{4}$

3. $P(C\mid A)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(A)}=\dfrac{4/52}{4/52}=1$ 4. $P(A\mid C)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(C)}=\dfrac{4/52}{12/52}=\dfrac{4}{12}$

5. $P(C\mid B)=\dfrac{P(C\cap B)}{P(B)}=\dfrac{3/52}{13/52}=\dfrac{3}{13}$ 6. $P(A\mid \overline{C})=\dfrac{P(A\cap \overline{C})}{P(\overline{C})}=\dfrac{0/52}{40/52}=0$

7. $P(C\mid \overline{A})=\dfrac{P(C\cap \overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{8/52}{48/52}=\dfrac{8}{48}$

例题 3.17： $\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}},\mathrm{B},\overline{\mathrm{B}}$ 的列联表概率如下，请验证 $\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}},\mathrm{B},\overline{\mathrm{B}}$ 的关系。

	B	$\overline{\mathrm{B}}$	
A	0.6	0.1	0.7
$\overline{\mathrm{A}}$	0	0.3	0.3
	0.6	0.4	1

解答： P(B|A) =0.6/0.7=0.86 > 0.6=P(B), P(A|B) =0.6/0.6=1 > 0.7=P(A), $\mathrm{A}\xrightarrow{\oplus}\mathrm{B}$

$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\mid\overline{\mathrm{B}})=0.3/0.4=0.75>0.3=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$, $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}\mid\overline{\mathrm{A}})=0.3/0.3=1>0.4=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}})$, $\overline{\mathrm{A}}\xrightarrow{\oplus}\overline{\mathrm{B}}$,

$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\mid\mathrm{B})=0/0.6=0<0.3=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}\mid\overline{\mathrm{A}})=0/0.3=0<0.6=\mathrm{P}(\mathrm{B})$, $\overline{\mathrm{A}}\xrightarrow{\otimes}\mathrm{B}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\mid\overline{\mathrm{B}})=0.1/0.4=0.25<0.7=\mathrm{P}(\mathrm{A})$, $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}\mid\mathrm{A})=01/0.7=0.14<0.4=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}})$, $\mathrm{A}\xrightarrow{\otimes}\overline{\mathrm{B}}$

例题 3.17a：国贸系统计学有 40 个学生，其中有 17 个男生，23 个女生。随机抽样 2 个学生，第一个是女生，第二个是男生的概率是多少？

解答：令 F1＝ 第一个是女生； B2 =第二个是男生。

$$P(F1\cap B2)=P(F1)P(B2\mid F1)=\frac{23}{40}\times\frac{17}{39}=0.251$$

这是不投返式抽样，第二个试验的概率和前次试验有关，所以条件概率 $P(B2\mid B1)\neq P(B2)$，全部结果树如图：

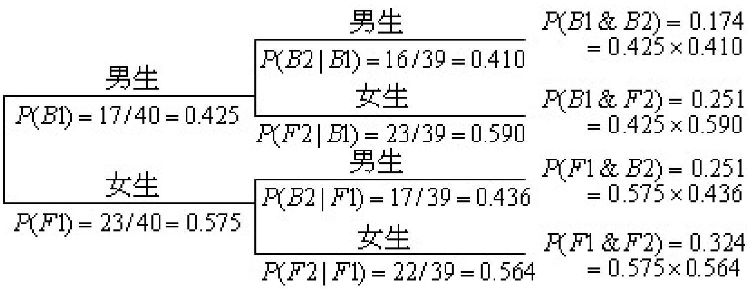
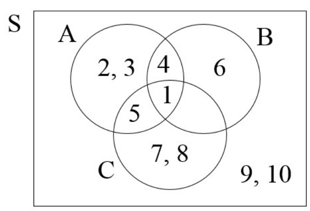


图 3-8 抽样后不投返的结果树

例题 3.19a： **我们来交易吧 Let 's Make A Deal**

四门问题：有 4 个门，其中一个门后面有一辆汽车，3 个门各有只羊。参赛者选一个门，暂时不打开，主持人打开一个有羊的门，主持人问:「要不要换另外 2 个门之一」？请问换或不换，得到汽车的概率各多少？

3.6 独立事件与互斥事件



例题 3.21：若样本空间 S = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9, 10}，

A = {1 , 2 , 3 , 4 , 5}，

B = {1 , 4 , 6}，

C = {1 , 5 , 7 , 8}。

则 A 与 B 是正面信息；

A 与 C 是独立；

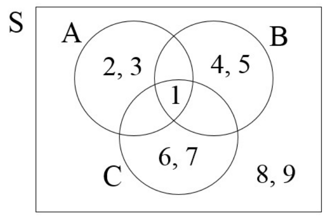
B 与 C 是负面信息。

解答：$0.5 = P(A) < P(A \mid B) = 2/3$，　$0.3 = P(B) < P(B \mid A) = 0.4$　(正面信息)

$0.5 = P(A) = P(A \mid C) = 0.5$，　$0.4 = P(C) = P(C \mid \mathrm{A}) = 0.4$　(独立)

$0.3 = P(B) > P(B \mid C) = 1/4 = 0.23$，　$0.4 = P(C) > P(C \mid B) = 1/3$　(负面信息)

例题 3.21a：若样本空间 S = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9}，A = {1 , 2 , 3}，B = {1 , 4 , 5}，C = {1 , 6 , 7}。则 A 与 B 是独立的；A 与 C 是独立的；B 与 C 是独立的；A，B 与 C 是两两独立的，但 A，B 与 C 不是相互独立的。



解答：$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/9$

$P(A \cap C) = P(A)P(C) = 1/9$

$P(B \cap C) = P(B)P(C) = 1/9$

$1/9 = P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C) = 1/27$

例题 3.21b：52 张扑克牌，抽出一张牌，下列事件：

A = 出现 1 张老 K；　B = 出现 1 张红心；　C = 出现 1 张人头。请问：

1. A 与 B 是否独立事件？　　2. A 与 B 是否互斥事件？

3. A 与 C 是否独立事件？　　4. B 与 C 是否独立事件？

解答：1. $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/52}{13/52} = \dfrac{1}{13} = P(A)$

$P(A \cap B) = \dfrac{1}{52} = \dfrac{4}{52} \times \dfrac{13}{52} = P(A)P(B)$ 所以 A 与 B 是独立事件。

2. $P(A \cap B) = \dfrac{1}{52} > 0$　所以 A 与 B 不是互斥事件。

3. $P(C \mid A) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} = \dfrac{4/25}{4/25} = 1 \neq P(C) = \dfrac{12}{52}$　所以 A 与 C 不是独立事件。

4. $P(C \mid B) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(B)} = \dfrac{3/25}{13/25} = \dfrac{3}{13} = P(C)$　所以 B 与 C 是独立事件。

3.7　贝叶斯公式

若　$P(B_1 \mid A_1)$ ③ = ④ $P(B_1 \mid A_2)$，则 A_1 和 B_1 是独立 ,$P(A_1 \mid B_1) = P(A_1)$

若　$P(B_1 \mid A_1)$ ③ > ④ $P(B_1 \mid A_2)$，

$1 - P(B_1 \mid A_1) = P(B_2 \mid A_1) < P(B_1 \mid A_2) = 1 - P(B_1 \mid A_2)$，

则 B_1 对 A_1 是正面信息，$P(A_1 \mid B_1) > P(A_1)$；

B_1 对 A_2 是负面信息，$P(A_2 \mid B_1) < P(A_2)$；

　　B_2 对 A_1 是负面信息, $P(A_1 \mid B_2) < P(A_1)$;

　　B_2 对 A_2 是正面信息, $P(A_2 \mid B_2) > P(A_2)$.

若　$P(B_1 \mid A_1)$ ③ < ④ $P(B_1 \mid A_2)$,

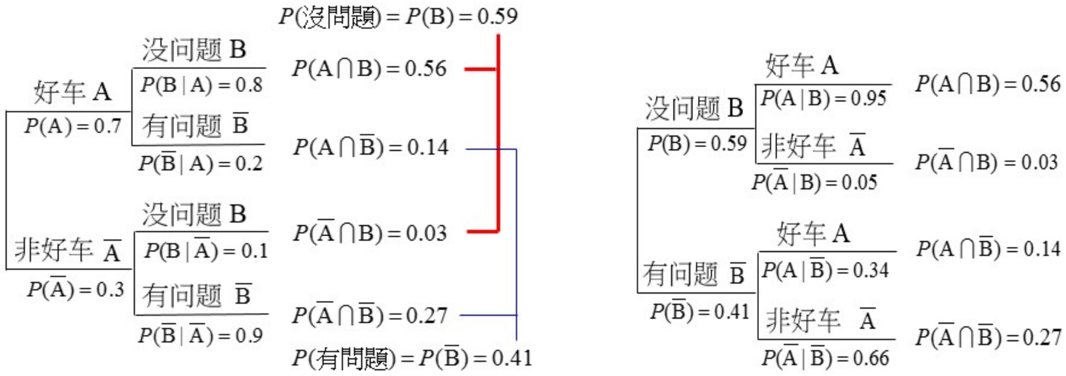
则　B_1 对 A_1 是负面信息, $P(A_1 \mid B_1) < P(A_1)$;

　　B_1 对 A_2 是正面信息, $P(A_2 \mid B_1) > P(A_2)$;

　　B_2 对 A_1 是正面信息, $P(A_1 \mid B_2) > P(A_1)$;

　　B_2 对 A_2 是负面信息, $P(A_2 \mid B_2) < P(A_2)$.

例题 3.22： 述结果，请对照图 3-7 (1) 的情况。



例题 3.23： 全概率公式、概率公理、列联表、事件独立、事件正负信息

调查人民对某个议题或法案的意见。为了要让受访者诚实回答。设计两个问题：

第 1 问题：你是否赞成某个法案？(月薪是否小于 5000 元)

第 2 问题：你是否反对某个法案？

假定每个人一定是「赞成」或「反对」中择一，而且不能是「没有意见」

准备 10 个信封，其中 7 个信封放第 1 问题，3 个信封放第 2 问题。受访者从 10 个信封抽出一个信封，不要读问题，只要回答「是」或「否」。我们不知他回答哪一个问题。现在有 1000 位受访者，其中有 600 人回答「是」。

1. 请问：1000 位受访者当中，赞成法案的有多少人？
2. 如果 10 个信封，第 1 问题和第 2 问题，各有 5 个信封，上述答案是多少？
3. 在什么情况下，上述问题没有答案？(可能是有些人不诚实回答)
4. 应该如何控制 10 个信封中，第 1 问题和第 2 问题的比例，使求解更适当？
5. "回答第 1 问题的人数"，和"回答「是」的人数"，在什么情况下是独立？
6. "回答第 1 问题的人数"，和"回答「是」的人数"，如何是正(负)面信息？

解答：令事件 A=1000 位受访者当中回答第 1 问题的人数，$\overline{A}$=回答第 2 问题的人数

　事件 B=1000 位受访者当中回答「是」的人数，$\overline{B}$=回答「否」的人数

　事件 C=1000 位受访者当中「赞成法案」的人数，$\overline{C}$=「反对法案」的人数

　　$p = P(C)$=1000 位受访者当中「赞成法案的」的概率

1. 全概率公式　$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})$

　假定每人诚实回答　$P(B \mid A) = p$,　$P(B \mid \overline{A}) = 1 - p$,　$P(\overline{B} \mid A) = 1 - p$,　$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = p$

所以　$P(B)=P(A)p+[1-P(A)](1-p)=P(A)p+1-P(A)-p+P(A)p$

$$p=\frac{P(A)+P(B)-1}{2P(A)-1}$$

$P(A)=0.7,\quad P(B)=0.6,\quad \Rightarrow\quad p=0.75$

2. $P(A)=0.5,\quad P(B)=0.6,\quad \Rightarrow\quad p$　无法计算，没有定义

3. 概率公理 1

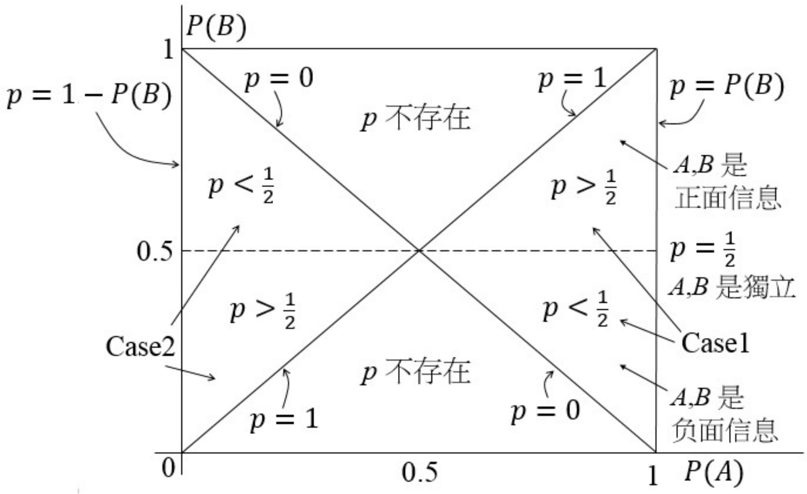
$$0\le p=\frac{P(A)+P(B)-1}{2P(A)-1}\le 1$$

Case1　$p\ge 0\Rightarrow P(A)+P(B)-1\ge 0,\quad 2P(A)-1\ge 0\ \Rightarrow P(A)+P(B)\ge 1,\quad P(A)\ge 0.5$

$p\le 1\Rightarrow P(A)+P(B)-1\le 2P(A)-1\ \Rightarrow P(A)\ge P(B)$

Case2　$p\ge 0\Rightarrow P(A)+P(B)-1\le 0,\quad 2P(A)-1\le 0\ \Rightarrow P(A)+P(B)\le 1,\quad P(A)\le 0.5$

$p\le 1\Rightarrow P(A)+P(B)-1\ge 2P(A)-1\ \Rightarrow P(A)\le P(B)$



4. 上图的上下两个三角形，没有答案 p 不存在。

5. $P(A)$接近 0 或接近 1，即第 1 问题的信封最好是 1,2,3 个或 7,8,9 个，不能用 5 个信封。最好不要 $P(A)$=0.4 或 0.6，$P(B)$ 范围很小，会使 p 很敏感。

6. A,B 的列联表

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A)p$	$P(A)(1-p)$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A})((1-p)$	$P(\overline{A})p$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

A,B 独立　$P(A)p=P(A)P(B)\Rightarrow p=P(B)$

$$P(A)p\times P(\overline{A})p=P(A)(1-p)\times P(\overline{A})(1-p)$$

$$P(A)P(\overline{A})p^2=P(A)P(\overline{A})-2P(A)P(\overline{A})p+P(A)P(\overline{A})p^2\Rightarrow 1-2p=0\Rightarrow p=0.5$$

A,B 正面信息　$P(A)p\times P(\overline{A})p>P(A)(1-p)\times P(\overline{A})(1-p)\Rightarrow p>0.5$

A,B 负面信息　$P(A)p\times P(\overline{A})p<P(A)(1-p)\times P(\overline{A})(1-p)\Rightarrow p<0.5$

习题

1. 若 $P(A)=0.5,\ P(B)=1/3$，请依下列各条件，求出 $P(A\cap B)$。

   (1). $P(A\cup B)=4/5=0.8$　(2). $P(A\mid B)=3/4=0.75$　(3). $P(B\mid A)=2/5=0.4$

   (4). A，B 为独立事件　(5). A，B 为互斥事件　(6). $P(A^C\cap B)=1/10=0.1$

2. 令 A，B 为样本空间 S 中的两个事件，若

$P(B)=0.3,\ P(A\cap B)=0.12,\ P(A^C\cap B^C)=0.42$

   (1). 求出 P(A)

   (2). 求出 $P(A\cap B^C)$

   (3). 求出 P(A|B)

   (4). A 和 B 是否为独立事件？为什么？

   (5). $A,\ B,\ A^C,\ B^C$ 是否为互斥事件？为什么？

3. 从一副扑克牌 52 张中取 5 张，试求下列样本点数目：

   (1). 若每张取出后不放回，5 张有排列顺序。

   (2). 若每张取出后不放回，5 张没有排列顺序。

   (3). 若每张取出后放回，5 张有排列顺序。

   (4). 若每张取出后放回，5 张没有排列顺序。

4. 从一副标准扑克牌中选取五张，试求下列概率？

   (1). 一对(one pair)的概率？例如：{K,K,2,5,8}

   (2). 两对(two pairs)的概率？例如：{J,J,3,3,6}

   (3). 三条(three of a kind)的概率？例如：{7,7,7,Q,9}

   (4). 顺子(straight)的概率？例如：{8,9,10,J,Q}

   (5). 同花(flush) 的概率？例如：全部是红心

   (6). 葫芦(full house)的概率？例如：{Q,Q,Q,6,6}

   (7). 四条(four of a kind)的概率？例如：{9,9,9,9,A}

   (8). 同花顺(straight flush) 的概率？例如：相同花色{10,J,Q,K,A}

5. 将 10 元硬币，5 元硬币和 1 元硬币各一枚放入雪茄盒中，关上盒盖彻底摇动后，打开盒盖观察每一枚硬币，并将结果记录下来，依序为：10 元，5 元，1 元。(H,T,H) 表示 10 元和 1 元为正面，5 元为反面。(T,H,H) 则表示 10 元为反面，而 5 元和 1 元为正面。

   (1). 此样本空间共有多少样本点？

   (2). 列出至少有两个硬币为正面之事件的样本点？

   (3). 令 D 代表 10 元为正面的事件，列出事件 D 的所有样本点。

   (4). 令 N 代表 5 元 正面的事件，列出事件 $N^C\cap D$ 的所有样本点。

6. 从五对夫妻中选出四位委员，下列条件下有几种选法？

   (1). 所有成员具有相等的选举资格？

   (2). 委员中须由三女一男组成？

(3). 丈夫和妻子不得同时选上？

7. 单选题中包括四道问题，第一题有三个选择，第二题有四个选择，第三题有三个选择，第四题有五个选择。若一学生以猜测方式作答，则下列概率为何？

(1). 至少一题对的概率？

(2). 至少三题对的概率？

8. 在装配在线的机器其一天中故障的概率为 0.01，每台机器故障时有后备机器可供使用，而每台后备机器的故障率为 0.01。若每台机器和其后备机器皆故障时，装配线即会停顿。现在装配在线有五台机器，若机器故障为独立事件，则明天装配线停顿的概率为何？

9. 在一群音乐家中，10% 弹钢琴但不会其它乐器，有一半会弹钢琴，一半会拉大提琴，80% 会拉小提琴，10% 三者皆会。又其中 40% 会小提琴和钢琴，30% 会小提琴和大提琴但不会弹钢琴。

(1). 任何两个事件是否彼此独立？

(2). 三项乐器都不会的百分比为何？

(3). 一个音乐家会钢琴与拉小提琴的概率为何？

(4). 一个音乐家会钢琴与大提琴的概率为何？

(5). 一个音乐家三者皆会的概率为何？

(6). 一个音乐家只会拉小提琴的概率为何？

(7). 一个音乐家只会拉大提琴的概率为何？

(8). 一个音乐家会拉小提琴，则他会弹钢琴的概率为何？

10. 遗传乃由概率法则控制，在一种特种实验鼠中，每一代中有 3/4 是短毛，1/4 是长毛。两只长毛实验鼠的后代皆为长毛，但是两只短毛实验鼠的后代有 8/9 为短毛，若父母亲为一只长毛一只短毛，则 2/3 的后代为短毛。随机选取一只长毛实验鼠，其父母亲皆为短毛的概率为何？

11. 男性人口中有将近 1/15 是色盲，色盲是和性别有关的特征，也就是说女性要两个 色盲基因才会患色盲，而男性只要有一个色盲基因即为色盲。父亲只会将色盲基因传给女儿而非儿子，母亲则会传给女儿或儿子。所以任一位父母传给女儿色盲基因的概率为 1/15。

(1). 女性为色盲的概率为何？

(2). 若男女人口比例为 103 比 105，则全部人口中色盲所占比例为何？

12. 假设一年 365 天每天出生的概率相等，现在有一班 60 人，计算下列概率：

(1). 每个人生日都不同的概率。

(2). 刚好有 5 个人生日相同，其他人生日都不同的概率。

(3). 有 5 人生日相同，另外 4 人生日相同，其他人生日不同的概率。

13. 某公司推出一种新产品，为了要了解这种新产品是否比旧产品受到顾客的喜爱，决定做一次市场测试，若随意测试三位使用者的意见(是否喜爱新产品)，则由调查的结果：

(1). 写出样本空间 S。

(2). 写出「至少有两位用户比较喜爱新产品」的事件。

(3). 你是否可以求出上述事件的概率？

14. E 与 F 为互斥事件，其中 $P(E)=0.3,\ P(F)=0.6$，试求下列各概率值：

(1). $P(\overline{E})$ (2). $P(E\cap F)$ (3). $P(E\cup F)$

(4). $P(\overline{E}\cap\overline{F})$ (5). $P(\overline{E}\cup\overline{F})$

15. 有一位投资者预备从：三家银行股票、四家电器公司股票、与两家塑料公司股票中，买进两种股票，请问：

(1). 他至少买进一种银行股票的概率为多少？

(2). 他至少买进一种银行股票或一种塑料公司股票的概率为多少？

(3). 他正好买进一种银行股票与一种电器公司股票的概率为多少？

16. 设 E，F 与 G 为三个事件，利用集合的联集，交集与余集，表示下列各合成事件：

(1). E，F 与 G 中至少有一个发生的事件

(2). E 与 F 发生，而 G 不发生的事件

(3). E 发生，但 F 与 G 中至少有一个发生的事件

(4). E，F 与 G 中至少有两个发生的事件

(5). E，F 与 G 中恰好有两个发生的事件

(6). E，F 与 G 皆发生的事件

17. 某银行查账员随意由客户的存款账目中抽查一个账目，开户未满六个月者视为新账目，其他皆为旧账目；该行客户的存款有活期存款及定期存款两种，其客户个数分别如下：

活期存款新账目：528；定期存款新账目：46

活期存款旧账目：1804；定期存款旧账目：248

设 N 与 O 分别为抽到新账目与旧帐目的事件，E 与 F 分别为抽到活期存款与定期存款的事件，求下列各概率值：

(1). $P(N\mid E)$ (2). $P(O\mid F)$ (3). $P(E\cap O)$

(4). $P(N\cup F)$) (5). $P(N\mid E\cup F)$ (6). $P(E\cup F\mid N)$

18. 某石油公司的油气探员在某一地区连续钻孔以寻求有开采价值的油井，如果发现一个有开采价值的油井，就停止在钻孔。假设这些探员每次钻孔会发现有开采价值油井的概率为 0.08，请问：

(1). 至多钻两个孔就会发现有开采价值油井的概率是多少？

(2). 钻第二个孔才发现有开采价值油井的概率是多少？

19. 某公司鼓励员工空闲时多做运动，为了增购运动器材，调查所有员工对于运动的嗜好，有 60% 的员工喜欢打乒乓球，有 50%的员工喜欢打羽毛球，两者都喜欢的占 30%，设 E 为员工喜欢打乒乓球的事件，F 为员工喜欢打羽毛球的事件，请问下列概率值为多少？

(1). $P(E)$ (2). $P(F)$ (3). $P(E\cap F)$

(4). $P(E\cup F)$ (5). $P(F\mid E)$ (6). $P(E\mid F)$

(7). 员工打乒乓球的嗜好与打羽毛球的嗜好是否独立？

20. 有两篮食物，第一篮中有 2 块火腿三明治，5 块奶酪三明治；第二篮中有 6 块火腿三明 治及 3 块奶酪三明治。于黑暗中，随机抽出一篮。

(1). 自该篮中抽出一块三明治为火腿的概率为何？

(2). 若自该篮中抽出第一块三明治，计算第二块也是火腿三明治的条件概率为何？

21. 某工厂的产品包装成箱时，只有 95% 的产品箱全部装合格品，其余的 5%中每箱都有 4% 的不合格品。现有一位顾客随意取其中一箱，并随意由其中抽出一个产品出来检查，请问：

(1). 正好抽到不合格品的概率是多少？

(2). 如果抽到合格品，那么它是由「全部含合格品」的包装箱中取出的概率是多少？

22. 某机场所用的旅客行李检查仪器，可以查出 98%有问题的行李，但 3% 没有问题的行李会被它误认为有问题。假设平常旅客出境所携带的行李中 4% 有问题。请问：

(1). 被这套仪器显示有问题的行李，它本身的确如此的概率是多少？

(2). 被这套仪器显示没有问题的行李，它本身亦的确如此的概率是多少？

(3). 由以上的结果，你认为这套仪器的准确性如何？

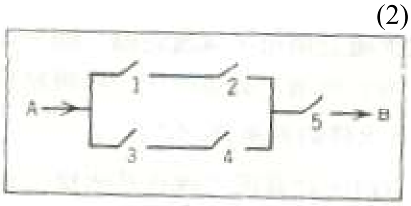
23. 某地有 40% 的天气是雨天，60% 是晴天，一气压计制造商于实验室中检验其产品，发现有时候会有错误。气压计晴天误测为雨天的机会为 30%，雨天误测为晴天的机会为 10%。于观察气压计之前预测明天的天气，为雨天的概率是 40%。现在气压计预测为雨天，请问：

(1). 实际是雨天的概率？

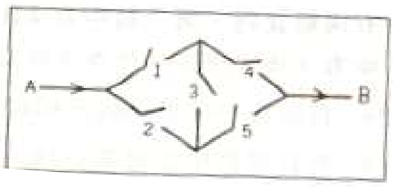
(2). 实际是晴天的概率？

24. 下列两个电路，每个都有五个开关，其连接(可通电)的概率为：p_i，$i = 1,2,3,4,5$，假设五个开关是互相独立的。计算 A 到 B 可以通电的概率。

(1).



(2).



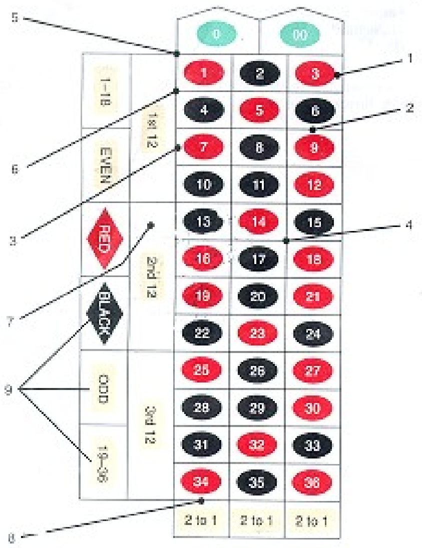
25. 一位心不在焉的教授 ，将学生的五封介绍信随机放入不同地址的信封。请问没有一封信装对信封的概率。

26. 我给你两个信封，其中有一个信封的钱是另一个信封的两倍。现在你选一个信封，打开里面是 1000 元。你可以拿这个信封，或放弃它，换另一个信封。你换不换？

27. 一个捷运车站的月台，有往北和往南两班车，都是固定每隔 10 分钟一班车。我随机到车站月台，那一班车先到，就搭那班车。经过多次试验，我发现有 90% 的概率，搭上往北的车子，为什么？

28. 有 1000 个硬币，其中只有一个两面都是人头，其他 999 个是正常的硬币。现在从这 1000 个硬币，随机抽出一个硬币，连续掷 10 次，结果都是人头，在这种情况下，请问抽到那个两面人头的硬币，其概率是多少？

29. 赌场的轮盘有 38 个格子(1~36 及 0,00)，可以有 9 种押注策略，其赔率如下：



押注策略		赔率
1	1 个号码 {0}, {00},{1}~{36}	35-1
2	2 个号码 {6,9}, {11,12}	17-1
3	3 个号码 {7,8,9}	11-1
4	4 个号码 {14,15,17,18}	8-1
5	5 个号码 {0,00,1,2,3}	6-1
6	6 个号码 {1,2,3,4,5,6}	5-1
7	12 个号码 1-12, 13-24, 25-36	2-1
8	一行 12 号码 {1,4,7,10,…,34}	2-1
9	奇数、偶数、红色、黑色、1-18、19-36	1-1

0、00 两个号码不是奇数、偶数、红色、或黑色。

(1). 计算上述 9 个事件的概率，及 P(事件 5 | 事件 8), P(2nd 12 | even)

(2). 如果只赌一局，赌注 100 元，写出上述 9 个策略之随机变量、概率函数、期望值与方差。

(3). 如果连续赌 200 局，每局赌注 100 元，都用同一个策略，假设不在乎输钱，只在乎赢钱。各策略，赢到多少钱以上的概率有 5%?

(4). 如果连续赌 200 局，每局赌注 100 元，都用同一个策略，假设在乎输钱，请问各策略，输到 15000 元以上的概率有多少？

30. 下表为过去 50 周，洗衣机每周销售量的统计资料：

洗衣机每周销售量	0	1	2	3	4
周数	20	15	10	4	1

(1) 请定义与洗衣机每周销售量有关的随机实验与随机变数。

(2) 请将此随机实验的样本点写出来。

(3) 请依据此统计数据计与随机变量算出相对的概率表。

(4) 请用此相对的概率表，计算出每周卖出至少两台洗衣机的概率。

(5) 请用此相对的概率表，计算出每周卖出 1 台至 3 台洗衣机的概率。

31. 下表为某县所有银行过去曾经通过的 30 年房屋贷款的利率分布统计资料：

30 年房屋贷款的利率	6.0%	6.5%	7.0%	7.5%	>7.5%
概率	0.20	0.23	0.25	0.28	.04

(1) 此县银行最常通过的 30 年房屋贷款利率为何？

(2) 此县银行最少通过的 30 年房屋贷款利率为何？

(3) 若此银行随机选出此县一家银行，此银行 30 年房屋贷款的利率超过 7.0%的概率为何？

(4) 若此银行随机选出此县一家银行，此银行 30 年房屋贷款的利率在 6.50%至 7.5%的概率为何？

32. 某住屋周刊进行订户的问卷调查，50%的订户表示拥有自己的住家，80%的订户表示拥有车子，90%拥有自己住家的订户表示拥有自己的车子。

(1) 此住屋周刊订户拥有自己住家与车子的概率为何？

(2) 此住屋周刊订户拥有自己住家或拥有自己车子的概率为何？

(3) 此住屋周刊订户没有自己住家也没有自己车子的概率为何？

33. 根据过去 500 个周末的车祸事件调查，两个因素会影响车祸的造成: 车祸中车辆数与是否有酒醉驾车，这些统计次数的结果如下表:

是否酒驾	车祸中车辆数			
	1	2	3	总数
是	60	100	40	200
否	40	215	45	300
总数	100	315	85	500

(1) 根据此 500 个周末的车祸事件调查，超过 1 辆车的车祸概率为何？

(2) 根据此 500 个周末的车祸事件调查，超过 1 辆车且酒驾的车祸概率为何？

(3) 根据此 500 个周末的车祸事件调查，超过 1 辆车或酒驾的车祸概率为何？

(4) 根据此 500 个周末的车祸事件调查，在酒驾的车祸中由 1 辆车造成的车祸概率为何？

(5) 根据此 500 个周末的车祸事件调查，在多辆车的车祸中由酒驾造成的车祸概率为何？

(6) 根据此 500 个周末的车祸事件调查，在非酒驾的车祸中由 1 辆车造成的车祸概率为何？

(7) 根据此 500 个周末的车祸事件调查，在非酒驾的车祸中由多辆车造成的车祸概率为何？

(8) 请问这两个因素(车祸中车辆数与是否有酒醉驾车)是否独立?

34. 个人理财公司将顾客依据性别与投资组合(债券、股票、或两者平衡)，这些统计概率的结果如下表:

性别	投资组合		
	债券	股票	两者平衡
男	0.18	0.20	0.25
女	0.12	0.10	0.15

(1) 请问顾客性别为男性的概率为何？

(2) 请问顾客投资组合为两者平衡的概率为何？

(3) 请问顾客性别为男性或投资组合为两者平衡的概率为何？

(4) 请问顾客性别为男性且投资组合为两者平衡的概率为何？

(5) 在男性顾客中，投资组合为两者平衡的概率为何？

(6) 在投资组合为两者平衡的顾客中，男性的概率为何？

(7) 请问这两个因素(性别与投资组合)是否独立？

35. 某国立大学毕业新鲜人申请两家高科技公司(I 公司与 T 公司)的工程师工作，此毕业新鲜人认为自己有 60%的概率可以申请到 I 公司，50%的概率可以申请到 T 公司，但是若收到 T 公司的工作接受函后，此毕业新鲜人认为自己申请到 I 公司的概率高达 80%。

(1) 两家高科技公司都接受此毕业新鲜人工程师工作的概率为何？

(2) 至少有一家高科技公司都接受此毕业新鲜人工程师工作的概率为何？

(3) 若收到 I 公司的工作接受函后，此毕业新鲜人认为自己申请到 T 公司的概率为何？

36. 某药厂针对某疾病发展一新的测试方法，此疾病据估计已感染此地区 1%的人口。但是根据实验结果若受测者已受感染，95%的概率新的测试方法可以检测到感染，但是若受测者未感染，98%的概率新的测试方法可以检测到无感染。

(1) 此地区未感染人口的概率为何？

(2) 此地区受测者检测到无感染的概率为何？

(3) 此地区未感染受测者检测到受感染的概率为何？

(4) 此实验结果正确的概率为何？

(5) 此实验结果不正确的概率为何？

37. 某国立大学研究所在全国 3 个地区举行入学考试(北、中、南)，北区考场有 1000 人、中区考场有 400 人、南区考场有 600 人，三区考场通过考试的比率分别为 70%、78%、75%。

(1) 随机从这些考生中抽出一人，其通过考试的概率为何？

(2) 随机从通过考试的考生中抽出一人，其在中区考场考试的概率为何？

(3) 随机从这些考生中抽出一人，其在南区考场考试但未通过的概率为何？

(4) 随机从这些考生中抽出一人，其在北区考场考试或未通过的概率为何？

(5) 请问这两个因素(地区、通过与否)是否独立？

38. 一个公正的硬币掷三次，

D = 反面出现的次数是奇数　　E = 第一次和第二次出现相同

F = 第二次和第三次出现正面　　A = 第一次出现正面

B = 第二次出现正面　　C = 第三次出现正面

则 A, B,C 是否两两独立或相同独立？ D,E,F 是否两两独立或相同独立？