

第 4 章 随机变量

第 89 页 图 4.3

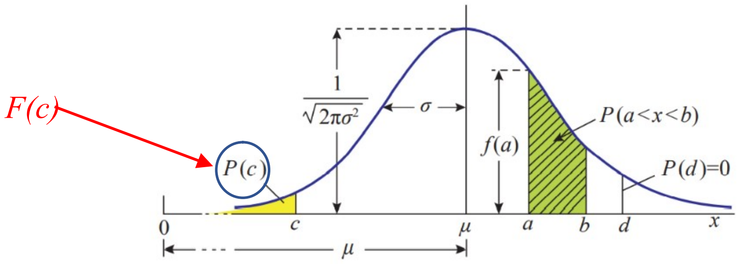


图4.2 正态分布的概率密度图

第 99 页

相关系数的推论统计请见第 11 章相关分析。随机变量相关的分类如图 4.7 所示。

4.1 随机变量

例题 4.1：掷一个硬币(正反两面)，直到出现第一个正面，则停止。如果第一次就出现正面，可得 1 元，第 2 次才出现正面，可得 2 元，第 3 次才出现正面，可得 4 元，第 4 次才出现正面，可得 8 元，依此类推，第 i 次才出现正面，可得 2^{i-1} 元。

解答：X = 掷硬币的次数，Y = 获得的金钱

X({H})=1、Y({H})=1、X({TH}) = 2、Y({TH}) = 2、X({TTH}))=3、Y({TTH}))=4

$X(\{\underbrace{TT\cdots T}_{n}H\}) = n+1$、$Y(\{\underbrace{TT\cdots T}_{n}H\}) = 2^n$

4.2 概率分布函数与概率密度函数

概率函数的表示方式

概率分布函数的表示方式，通常有三种，

1. 表格(离散型)，例如：

实数值 x	概率值 P(x)
1	0.2
2	0.3
3	0.4
4	0.1

2. 公式(离散型或连续型)，例如：

$$\mathrm{P}(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & 若\ x = 1,2,3,4 \\ 0 & 其他 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 2x & 若\ 0 < x < 2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

3. 图形，连续型概率分布如图 4.2，离散型如单值直方图或下图 4.3：

概率分布函数　　　　　　　　　　　　累积分布函数

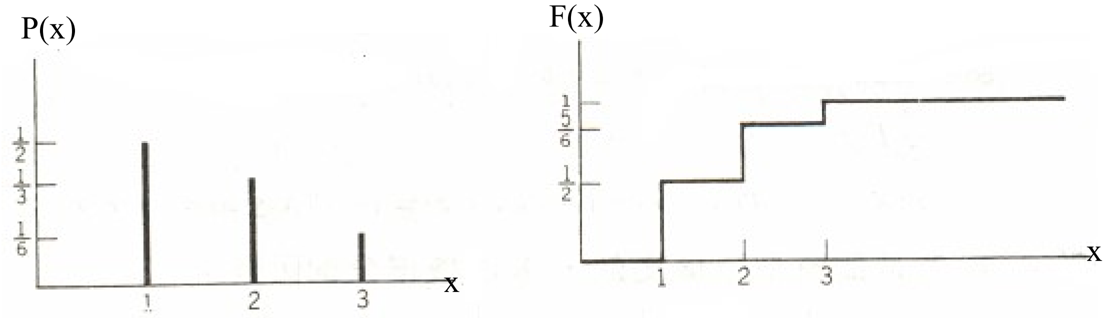


图 4.3 概率分布函数与累积分布函数

概率密度函数(连续型)通常用公式表示，不能用表格来表示，而图形只能说明它的形状，要知道其概率数值，只有代入公式。

例题 4.2： 若 X 是离散型随机变量，X 的概率分布函数：

$$P(1)=1/2,\qquad P(2)=1/3,\qquad P(3)=1/6$$

计算 累积分布函数 F(x)。

解答：
$$F(x)=\begin{cases}0 & 若\ x<1\\ 1/2 & 若\ 1\le x<2\\ 5/6 & 若\ 2\le x<3\\ 1 & 若\ 3\le x\end{cases}$$

例题 4.2a： 若 X 是连续型随机变量，X 的概率密度函数：

$$f(x)=\begin{cases}C(4x-2x^2) & 若\ 0<x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

1. C 值应该是多少 ？　　　　2. 计算 $P(X>1)>1$

解答：1. $\int_0^2 f(x)dx=C\int_0^2(4x-2x^2)dx=1$　　$C\left[2x^2-\frac{2x^3}{3}\right]\Big|_{x=0}^{x=2}=1$　　$C=\frac{3}{8}$

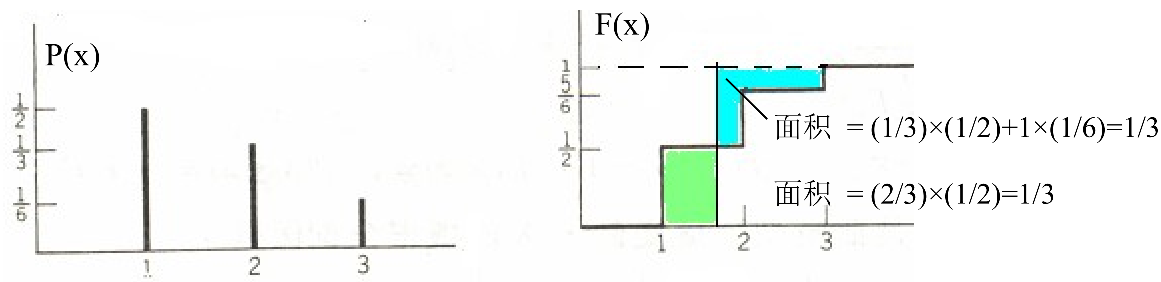
2. $P(X>1)=\frac{3}{8}\int_1^2(4x-2x^2)dx=\frac{1}{2}$

累积分布函数的补充教材 F(x) (请对照第二章描述统计)

中位数 M_e = 最小的 x 使 F(x)≧0.5， $F(M_e)=P(X\le M_e)\ge 1/2,\ and\quad P(X\ge M_e)\ge 1/2$

平均数 μ =μ 左边 F(x) 和 F(x)＝0 的面积 等于 μ 右边 F(x) 和 F(x)＝1 的面积

离散型概率分布

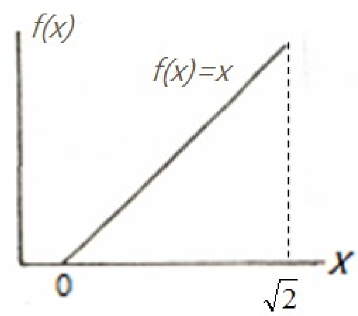


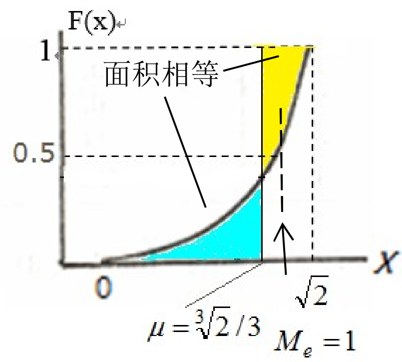
中位数 5/3=平均數

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + P(a), \qquad P(a < X \le b) = F(b) - F(a),$$
$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) + P(a) - P(b), \qquad P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(b),$$

连续型概率分布

下四分位数 Q_1，上四分位数 Q_3， $F(Q_1) = 0.25,\quad F(M_e) = 8.5,\quad F(Q_3) = 0.75$

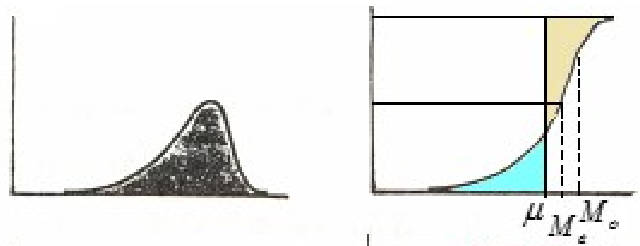




$M_o = \sqrt{2} = 1.414$

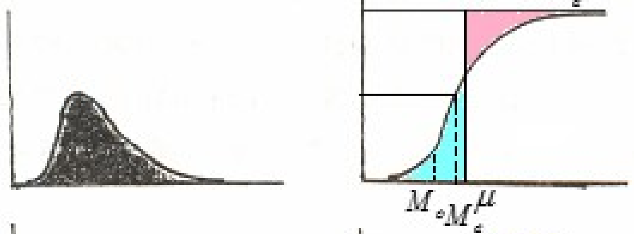
$M_e = 1$

$\mu = \sqrt[3]{2}/3 = 0.943$



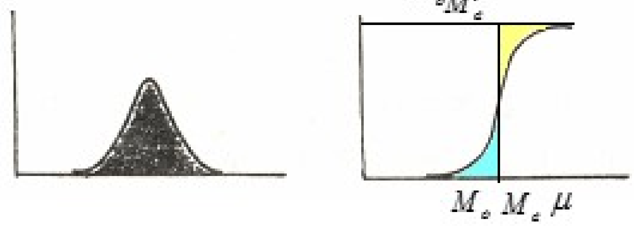
左偏型概率分布

$\mu \le M_e \le M_o$



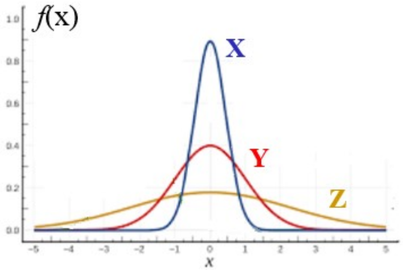
右偏型概率分布

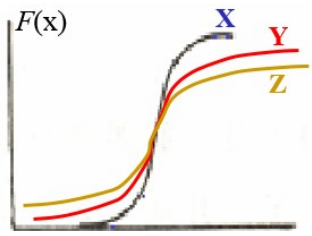
$M_o \le M_e \le \mu$

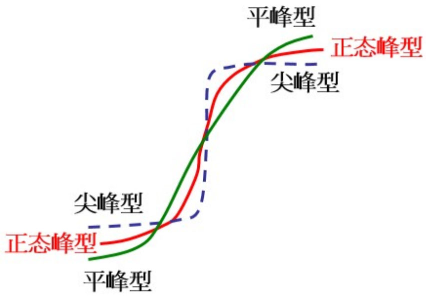


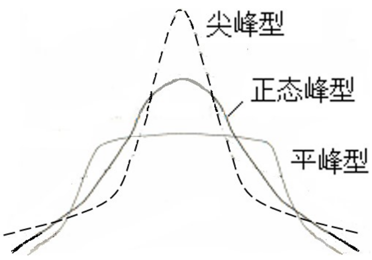
对称型概率分布

$M_o = M_e = \mu$



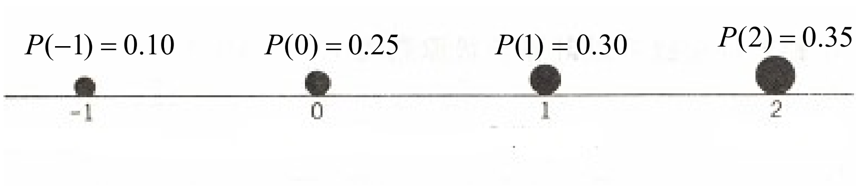






4.3 期望与方差

图 4.3 和图 2.18 同样表示，平均数是资料的平衡点：



$$0.1\times1.9+0.25\times0.9=0.3\times0.1+0.35\times1.1$$

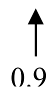


图 4.4 期望是数据平衡点 0.9

例题 4.4：竞价的期望值

在企业的买卖行为中常有「投标比价」的行为。机率与期望值可以应用在这种情况，决定最佳之出价。我们现在以房屋买卖的竞价情况，来说明期望值的应用。

在台湾的法院拍卖房屋有一底价，在底价之上以出价最高者买到，这是封闭型拍卖，拍卖的出价者不知道其他人的出价，最后开标一翻两瞪眼。在美国的房屋买卖也有封闭型拍卖，买方将出价交给卖方的中介，最后日期以出价最高者买到。现在我们以美国房屋买卖为例，假设卖方出价 40 万元(美金)，你是买方，你的中介者建议，这个房子出价在 30 万以下是买不到的，在 30 万到 40 万间买到的机率如表 4.1，出价越高，买到的机率是直线上升。

利用期望值决定封闭型拍卖的出价策略。

表 4.1 各种出价买到房子的机率

出价	买到的机率	没买到的机率
30	0	1.0
31	0.1	0.9
32	0.2	0.8
33	0.3	0.7
34	0.4	0.6
35	0.5	0.5
36	0.6	0.4
37	0.7	0.3
38	0.8	0.2
39	0.9	0.1
40	1.0	0

以上每个「出价」是一个随机变量，其结果是「买到」(随机变量值为其“利得”)或「买不到」(随机变数值为 0)。

那么你应该选择那个随机变量(出价多少)，当作决策，使其期望利得最大。换言之，应该如何出价？解答：是否买到这个房子 ，由下列两个条件来决定：

1. 市场上的买气：那就是「买到的机率」
2. 你个人认为这房子价值多少：

如果你认为这房子只值 38 万，就不要出价超过 38 万。因为买到就亏本，没人作亏本生意，如果有别人出价超过 38 万，让他去买好了。

所以你认为它值 38 万，就出价 38 万吗？当然不是，以下是利用期望值，来计算最佳的出价金额。

如果你认为房子值 38 万元，而出价 36 万买到，所以就赚到 2 万元。「出价 36 万」的随机变量结果是： 1.买到，机率 0.6，赚 2 万元；

2. 没买到(别人出价更高)，机率 0.4，没赚没赔。

所以出价 36 万的期望值是：赚 $0.6\times 2=1.2$ 万(美元)。

以下是各种出价状况及其期望利得。

我们可以看出最大期望利得是出价 34 万。

现在我们归纳出一个公式是：如果你认为房子价值是 A，而出价在 B 以下就买不到(因为一定有人出价 B 以上)，在上例中 A＝38、B＝30，所以最佳出价是 (A+B)/2。

以上实例应用到工程投标(最低价得标)，则 A 为工程成本，而投标在 B 以上就标不到 (B＞A，一定有人投标 B 以下)，则最佳出价应该是 (A+B)/2。

出价	买到的利得	买到的机率	期望的利得
30	8	0	0
31	7	0.1	0.7
32	6	0.2	1.2
33	5	0.3	1.5
34	4	0.4	1.6 ← max
35	3	0.5	1.5
36	2	0.6	1.2
37	1	0.7	0.7
38	0	0.8	0
39	-1	0.9	-0.9
40	-2	1.0	-2.0

但是假设房屋是买方市场，则出价买到的机率不再是一直线而是向上凸的曲线，这时最佳出价应该比 (A+B)/2 还低一点。如果房屋是卖方市场，则出价买到的机率为是向上凹的曲线，这时最佳出价应该比 (A+B)/2 还高一点。

出价	买方市场 买到的机率	卖方市场 买到的机率
30	0	0
31	0.20	0.02
32	0.36	0.05
33	0.50	0.11
34	0.62	0.18
35	0.73	0.27
36	0.82	0.38
37	0.89	0.50
38	0.95	0.64
39	0.98	0.80
40	1.00	1.00

如果你认为房子值 38 万元，在上述机率之下，应出价多少？

例题 4.5 赌场优势。 赌场优势(House advantage，House Edge)是在赌场的每一项赌博游戏中，玩家押注一 单位，其“玩家期望的负数”，以百分比计算。赌场优势 = 玩家期望的负数 = 赌场的期 望。通常玩家的期望是负的，负负得正，赌场优势是正的，赌场优势越大，对玩家越不 公平。长期来看，玩家永远是输的，赌场永远是赢的。请计算赌场里，轮盘(Roulette)和 百家乐(Baccarat)的赌场优势。

解答：美式轮盘(请见第 3 章习题 29 题)

4.6 双随机变量

例题 4.6a：随机变量 X ,Y 的联合概率密度函数如下 ：

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-x}e^{-2y} & 若\ 0<x<\infty,\ \ 0<y<\infty \\ 0 & 其他\end{cases}$$

1. 计算 $P(X>1,Y<1)$ 2. 计算 $P(X<Y)$ 3. 计算 $P(X<a)$

解答：1. $P(X>1,Y<1)=\int_0^1\int_1^\infty 2e^{-x}e^{-2y}dxdy=\int_0^1 2e^{-2y}(-e^{-x}|_1^\infty)dy=e^{-1}\int_0^1 2e^{-2y}dy=e^{-1}-e^{-3}$

2. $P(X<Y)=\int_0^\infty\int_0^y 2e^{-x}e^{-2y}dxdy=\int_0^\infty 2e^{-2y}(1-e^{-y})dy=\int_0^\infty 2e^{-2y}dy-\int_0^\infty 2e^{-3y}dy=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

3. $P(X<a)=\int_0^a\int_0^\infty 2e^{-x}e^{-2y}dydx=\int_0^a e^{-x}dy=1-e^{-a}$

例题 4.8：随机变量 *X*: $P(X=-1)=P(X=1)=0.5$，两随机变量 *X,Y* 的联合概率密度函数如下:

X \ Y	① $Y=2X$ -2	2	$P_X(x)$
-1	0.5	0	0.5
1	0	0.5	0.5
$P_Y(y)$	0.5	0.5	1

X \ Y	② 直线正相关 -1	1	$P_X(x)$
-1	0.4	0.1	0.5
1	0.1	0.4	0.5
$P_Y(y)$	0.5	0.5	1

X \ Y	③ 直线负相关 -1	1	$P_X(x)$
-1	0.2	0.3	0.5
1	0.3	0.2	0.5
$P_Y(y)$	0.5	0.5	1

① $Cov(X,Y)=2,\ \rho_{XY}=1$

$P(Y=2\,|\,X=1)=0.5/0.5=1$

② $Cov(X,Y)=0.6,\ \rho_{XY}=0.6$

$P(Y=1\,|\,X=1)=0.8>P_Y(Y=1)$

③ $Cov(X,Y)=-0.2,\ \rho_{XY}=-0.2$

$P(Y=1\,|\,X=1)=0.4>P_Y(Y=1)$

X \ Y	④ $Y=X+X^2$		
X	0	2	$P_X(x)$
-1	0.5	0	0.5
1	0	0.5	0.5
$P_Y(y)$	0.5	0.5	1

X \ Y	⑤ X,Y 独立		
X	-1	1	$P_X(x)$
-1	0.25	0.25	0.5
1	0.25	0.25	0.5
$P_Y(y)$	0.5	0.5	1

X \ Y	⑥ $Y=X^2$	
X	1	$P_X(x)$
-1	0.5	0.5
1	0.5	0.5
$P_Y(y)$	1	1

④ $Cov(X,Y)=0,\ \rho_{XY}=0$

$P(Y=2\,|\,X=1)=0.5/0.5=1$

⑤ $Cov(X,Y)=0,\ \rho_{XY}=0$

$P(Y=1\,|\,X=1)=0.5=P_Y(Y=1)$

⑥ $Cov(X,Y)=0,\ \rho_{XY}$ 不存在

$P(Y=1\,|\,X=1)=0.5/0.5=1$

如果 $P(Y=1\,|\,X=1)=0.8>P_Y(Y=1)$，表示 $X=1$ 对 $Y=1$ 是正面消息，意思是当 X 增加(从 -1 到+1)，Y 增加(从 -1 到+1)的概率就提高了，这就是正相关。

例题 4.9： 随机变量 X,Y 的联合概率密度函数如下：

变量 X	变量 Y	概率
+1	+1	1/3
0	-1	1/3
-1	+1	1/3

(1) 计算 $Cov(X,Y),\ \rho_{XY}$，(2) X,Y 是否独立？

解答： $P_X(1)=1/3,\ \ P_X(0)=1/3,\ \ P_X(-1)=1/3,\ \ E(X)=0$

$P_Y(1)=2/3,\ \ P_Y(-1)=1/3,\ \ E(Y)=1/3,\qquad E(X)E(Y)=0$

$E(XY)=0,\qquad Cov(X,Y)=0,\qquad \rho_{XY}=0$

$P(1,1)=1/3\neq P_X(1)P_Y(1)=(1/3)(2/3)=2/9$ X,Y 不是独立

定义： 若 X,Y 是双随机变量，X,Y 的联合概率密度函数 *f(x,y)*，Y 的边际概率函数 *f(y)*，已知 Y = y，则 X 的条件概率函数(conditional probability function)，记作 $P(x\,|\,Y=y)$ 或 $f(x\,|\,Y=y)$：

$$P(x\,|\,Y=y)=\frac{P(x,y)}{P_Y(y)},\qquad P(y\,|\,X=x)=\frac{P(x,y)}{P_X(x)}$$

$$f(x\,|\,Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\qquad f(y\,|\,X=x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

例题 4.10： 假设一个小区的家庭有：15% 没有小孩，20% 有 1 个小孩，35% 有 2 个小孩，30% 有 3 个小孩。假设每个家庭，男孩的概率和女孩的概率相等。随机抽出 1 个家庭。令 X = 抽出的家庭中，男孩的数目；Y = 抽出的家庭中，女孩的数目。

计算 联合概率密度函数 $P(i,j)=P(X=i,Y=j)$

解答： $P(0,0)=P\{\text{没有小孩}\}=0.15$

$P(0,1)=P\{\text{有1女孩}\}=P\{\text{有1小孩}\}\times P\{\text{有1女孩}\,|\,\text{有1小孩}\}=(0.2)(0.5)=0.1$

$$P(0,2) = P\{有2女孩\} = P\{有2小孩\} \times P\{有2女孩 \mid 有2小孩\} = (0.35)(0.5)^2 = 0.0875$$
$$P(1,1) = P\{有1女1男\} = P\{有2小孩\} \times P\{有1女1男 \mid 有2小孩\} = 2(0.35)(0.5)^2 = 0.175$$

男孩數 X	女孩數 Y: 0	1	2	3	$P_X(x)$
0	0.15	0.10	0.0875	0.0375	0.375
1	0.10	0.175	0.1125	0	0.3875
2	0.0875	0.1125	0	0	0.20
3	0.0375	0	0	0	0.0375
$P_Y(y)$	0.375	0.3875	0.20	0.0375	1

定理： X,Y 是双随机变量，X,Y 是独立，若且唯若 $P(x \mid Y=y) = P_X(x)$, $f(x \mid Y=y) = f_X(x)$

定义： 已知 Y = y, 则 X 的条件期望(conditional expected value) $E(X \mid Y=y)$：

$$E(X \mid Y=y) = \sum_x xP(x \mid Y=y) \qquad E(X \mid Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x \mid Y=y)dx$$

已知 Y = y,则 X 的条件方差(conditional variance) $V(X \mid Y=y)$：

$$V(X \mid Y=y) = \sum_x [x - E(X \mid Y=y)]^2 P(x \mid Y=y) = \sum_x x^2 P(x \mid Y=y) - [E(X \mid Y=y)]^2$$
$$V(X \mid Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X \mid Y=y)]^2 f(x \mid Y=y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x \mid Y=y)dx - [E(X \mid Y=y)]^2$$

E(X|Y) 和 V(X|Y) 都是随机变量，定义域和 Y 相同，

E(X|Y) ： y → E(X|Y = y) 概率是 $P_Y(y)$

V(X|Y) ： y → V(X|Y = y) 概率是 $P_Y(y)$

因为随机变量有期望与方差，所以有 E[E(X|Y)]，V[E(X|Y)]、E[V(X|Y)]、V[V(X|Y)]

E(X) = E[E(V|Y)]　　　　V(X) = E[V(X|Y)] + V[E(X|Y)]

例题 4.11： 随机变量 X 代表教育程度：0 是不识字，1 是小学程度，2 是中学程度，3 是大学以上程度。随机变量 Y 代表年龄：30 是青年(25 岁到 35 岁)，45 是中年(35 岁到 55 岁)，70 是老年(55 岁到 100 岁)。随机变量 X,Y 的联合概率密度函数如下：

教育程度	年龄: 30	45	70	$P_X(x)$
0	0.01	0.02	0.05	0.08
1	0.03	0.06	0.10	0.19
2	0.18	0.21	0.15	0.54
3	0.07	0.08	0.04	0.19
$P_Y(y)$	0.29	0.37	0.34	1

计算 $E(X \mid Y=30)$, $V(X \mid Y=30)$, $E(X \mid Y=45)$, $V(X \mid Y=45)$

$E(X \mid Y=70)$, $E(X \mid Y=70)$, $V(X \mid Y=70)$

解答：

x	$P(x \mid Y=30)$	$xP(x \mid Y=30)$	$x^2P(x \mid Y=30)$
0	0.01/0.29=0.034	0	0
1	0.03/0.29=0.104	0.104	0.104
2	0.18/0.29=0.621	1.242	2.482
3	0.07/0.29=0.241	0.723	2.169
	Σ	2.07	4.757

$E(X|Y=30)=2.07$，　$V(X|Y=30)=4.757-(2.07)^2=0.4721$,

$E(X|Y=45)=1.95$，　$V(X|Y=45)=0.5755$

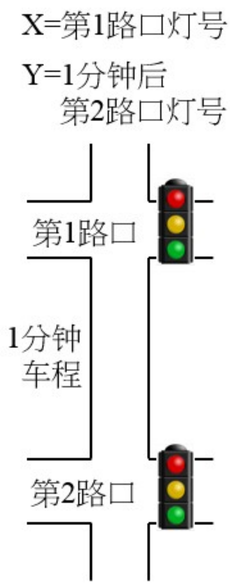
$E(X|Y=70)=1.53$，　$V(X|Y=70)=0.7791$

结论：年龄愈低，教育程度愈高；年龄愈高，教育程度的差异(变化)愈大。

例题 4.12：在一个十字路口的红绿灯，每隔一分钟变换红绿灯，所以任何时候到达路口，碰到红灯的机率应该是 0.45，可是每次到达路口遇到红灯的机率是百分之百，为什么？

解答：因为这个路口的红绿灯(随机变量 X)，和前一个路口的红绿灯(随机变数 Y)，是相关的。前一个路口变绿灯，加上两路口的开车时间，这个路口就变红灯，所以从上个路口到这个路口，一定遇到红灯。

X \ Y	绿灯	黄灯	红灯	$P_X(x)$
绿灯	0	0	0.45	0.45
黄灯	0	0.1	0	0.1
红灯	0.45	0	0	0.45
$P_Y(y)$	0.45	0.1	0.45	1



P(X＝ 绿灯)=0.45，但是 P(X＝ 绿灯|Y=绿灯)=0，P(X＝ 红灯|Y=绿灯)=1

如果 X,Y 联合概率是下列列联表，则是一路绿灯。

X \ Y	绿灯	黄灯	红灯	$P_X(x)$
绿灯	0.45	0	0	0.45
黄灯	0	0.1	0	0.1
红灯	0	0	0.45	0.45
$P_Y(y)$	0.45	0.1	0.45	1

如果 X,Y 联合概率是下列列联表，则 X,Y 是独立。

X \ Y	绿灯	黄灯	红灯	$P_X(x)$
绿灯	0.2025	0.045	0.2025	0.45
黄灯	0.045	0.01	0.045	0.1
红灯	0.2025	0.045	0.2025	0.45
$P_Y(y)$	0.45	0.1	0.45	1

4.7　马可夫不等式与查比希夫不等式

定理：马可夫不等式(Markov's Inequality)：

随机变量 X 的值域 R_X，是大于 0 的实数。则对于所有的 $a>0$，$P(X\ge a)\le \frac{E(X)}{a}$

定理：查比希夫不等式(Chebyshev's Inequality)：

随机变量 X 的期望 μ，方差 σ^2，则对于所有的 $k>0$，

$$P(\mu-k\sigma\le X\le \mu+k\sigma)\ge 1-\frac{1}{k^2}$$

例题 4.14：假设我们知道一个工厂的每天生产量是随机变量，平均数 50。

1. 每天生产量超过 75 的概率是多少 ？

2. 如果知道每天生产量的方差是 25，每天生产量在 40 到 60 之间的概率是多少？

解答：1. 利用 马可夫不等式　$P(X\ge 75)\le \frac{E(X)}{75}=\frac{2}{3}$

2. 利用查比希夫不等式 $P(|X-50|\geq 10)\leq \frac{25}{10^2}=\frac{1}{4}$

$P(|X-50|<10)\geq 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ $P(40\leq X\leq 60)\geq \frac{1}{4}$

习题

1. 下列随机变量中，那些是离散随机变量？那些是连续随机变量？

X ：一批产品所含不良产品数

Y ： 一辆汽车由基隆到高雄行驶高速公路的耗油量

Z ： 一位保险推销员一个月内所销售的保险单数

U ： 某一天一个超级市场的营业额

V ： 台北地区每天总耗电量

2. 从一个包含四颗红球和两颗白球的箱子中，顺序取出三颗球，然后观察白球的数目。试求此随机变量的概率分布、平均数、及标准差，如果：

(1). 每取出一球后立即放回箱中，再取下一球。

(2). 取出来的球不再放回。

3. 随机变量 X，期望 E(X) = 0.6，其概率分布是：

$$f(x)=\begin{cases} a+bx^2 & \text{若 } 0\leq x\leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

计算 a 与 b。

4. 某一数学系有 12 个成员，5 位为高年级，7 位为低年级，如果要从其中任意选 4 人参加会议，试求 4 人当中高年级多于低年级的概率。

5. 随机变量 X,Y 为独立随机变量，有相同的概率密度函数如下：

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{若 } x>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

计算随机变量 $Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度函数。

6. 某工厂过去 100 个工作天当中，每天所接获对某一产品的订货数目如下：

訂貨數	0	1	2	3	4	5	6
出現天數	11	16	21	24	15	9	4

设 X 为每天的订货数目，P(X) 则近似于其相对频率。

(1). 试求平均数和标准差。

(2). 一天中订货数目超过 4 个的概率为多少？

7. 某一地区过去六个月以来失业率的记录如下所示：

失業率 (X)	相對頻率
$X \geq 10\%$	0.08
$8\% \leq X < 10\%$	0.40
$6\% \leq X < 8\%$	0.50
$X < 6\%$	?

使用这些相对频率做为未来失业可能性的估计值，假设连续每个月之观测值间互为独立(虽然事实并非如此)，试求下周失业率的概率：

(1). 下周失业率少于 8 % 的概率？

(2). 下周失业率至少为 6%，但少于 10 % 的概率？

(3). 下周失业率至少为 8 % 的概率 ？

8. 如果 $E(X)=2$ 且 ，计算：

(1). $E[(2+4X)^2]$(2). $E[X^2+(X+1)^2]$

9. 如果 $P(X=i)=p_i$， $p_1+p_2+p_3=1$， $E(X)=2$

(1). p_1, p_2, p_3 是什么值，使 V(X) 为最小？

(2). p_1, p_2, p_3 是什么值，使 V(X) 为最大？

(3). p_1, p_2, p_3 是什么值，使 V(X) = 0.4？

10. 讨论不等式：$E(X^2) \geq [E(X)]^2$ 什么时候等式成立？

11. 随机变量 X ,Y 的累积概率分布是 ：

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{若} \quad x<0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{若} \ 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{2}{3} & \text{若} \ 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{11}{12} & \text{若} \ 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{若} \ 3 \leq x \end{cases} \quad F(y)=\begin{cases} 0 & \text{若} \quad y<0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{若} \ 0 \leq y < 1 \\ \dfrac{2}{3} & \text{若} \ 1 \leq y < 2 \\ \dfrac{11}{12} & \text{若} \ 2 \leq y < 3 \\ 1 & \text{若} \ 3 \leq y \end{cases}$$

(1). 分别画出概率质量(密度) 函数的图形。

(2). 计算 $E(X), V(X)$ 与 $E(Y), V(Y)$

(3). 求 $P(X > 0.5)$, $P(Y > 0.5)$

(4). 求 $P(2 < X \leq 4)$, $P(2 < y \leq 4)$

(5). 求 $P(X \leq 3)$, $P(Y \leq 3)$

(6). 求 $P(X = 1)$, $P(Y = 1)$

12. 随机变量 X，Y 的联合概率分布是：

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6}{7}(x+y)^2 & 若\ 0\le x,y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

(1). 计算 X 与 Y 的边际概率密度函数。

(2). 计算 E(X) 与 V(Y)。

(3). X 与 Y 是否独立 。

13. 一个医院实验室中储藏有八袋的血液，已知其中有三袋为 O 型血液，但是不知道是那几袋。现在需要两袋的 O 型血液，每次只取一袋测试其血型，若为 O 型，则使用之，若不是 O 型，则注明其血型后再取下一袋。

(1). 为得到两袋的 O 型血液，计算必须测试之袋数的概率分布。

(2). 试求此随机变量的平均数及标准差。

14. 随机变量 X 的概率分布 $P(x)=A\dfrac{2^x}{x!}$，$x=1,2,3,4$，试计算 A 值 与 X 的期望 。

15. 设一袋中有红球 20 个，白球 30 个，黄球 40 个，今由其中一次抽出 5 球(不返回)，

(1). 计算红球出现数目之期望及方差。

(2). 计算红球或白球」出现数目之期望及方差。

16. 连续掷一个骰子，令 X = 第一次出现 5 点所需要掷出的次数；Y = 第一次出现 6 点所需要掷出的次数，试求 ：

(1). E(X)

(2). E(X|Y = 1)

(3). E(X|X>5)

17. 为了节省时间与金钱，又要保证进货的质量，货品的购买人时常会由欲装运的货品中检验一部份货品，以判断整批货品的质量。假定一位买者欲购的四部复印机中有两部有缺陷，但此位买者不知情，而由此四部复印机中随机检验两部，设 Y 为抽出缺陷的复印机数。求 Y 的概率分布。

18. 为防范汽车在一年内被偷，保险公司推出了汽车防盗险，约定如果人保后一年内汽车被偷，保险公司要付出 20 万的补偿费。根据调查的结果，发现一部汽车一年内的失窃率为 0.002，而且一年内同一个人会失窃两次或更多次的概率为 0：

(1). 保险公司一向以不吃亏为原则，问每部汽车一年的保险费最少应该为多少？

(2). 如果题中的失窃率降低为 0.0015，而保险费为(1)中的金额，请问保险公司 每年一部汽车的保险费平均可以赚多少元？

19. 设随机变量 X 的离散概率分布如下表：

x	概率值 P(x)
0	0.2
1	0.4
2	0.3
3	0.05
4	0.05

(1). 计算 $P(X>1), P(1<X<3)$

(2). 计算 $E(X), V(X)$

(3). 求 $E[(X-3)(X-3)]$

(4). 设 $Y=(X-3)(X-3)$，求 Y 的概率分布

(5). 由 Y 的概率分布，求 E(Y) 与 V(Y)

20. 一个袋子中有 10 个球：5 个红球，3 个白球，2 个绿球。取出 4 个球，每次取出后不放回。令 X = 取出 4 球中红球的数目，Y = 取出 4 球中白球的数目。

(1) 联合概率函数 P(x,y)

(2). 计算 $E(X),V(X)$ 与 $E(Y),V(Y)$。

(4). 求 $P_X(x)$, $P_Y(y)$

(5). 求 $E(X\mid Y=2)$, $V(X\mid Y=2)$, $E(Y\mid X=1)$, $V(Y\mid X=1)$

(5). 求 $P(X=2\mid Y=1)$, $P(Y=1\mid X=3)$

(6). 求 $Cov(X,Y)$, ρ_{XY}

21. 随机变量 X 之概率分布为：$P(X=1)=0.2$,$P(X=2)=0.3$，其余概率是连续且均匀分布于 1 与 2 之间。

(1). 试求 X 之累积概率分布函数并画图。

(2). 试求 X 之中位数及平均数。

22. 以下所定义的随机变量值应是离散(discrete)还是连续(continuous)?请将其有可能的值或范围列出。

(1) $X=$ 任意一天在台北县所发生的车祸总数

(2) $Y=$ 任选一位参加某健康减重计划的实验者，在一个月内所减少的重量

$Z=$ 任选杭州市 100 个家庭的平均小孩数

$W=$ 任选 10 个家庭中，拥有微波炉的家庭数

$V=$ 某快餐餐厅服务每位客人的供餐时间

23. 下表为随机变量 *X*(台湾每个家庭所拥有汽车数)的概率分布，请根据这个分布回答以下的问题。

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.43	0.42	0.10	0.05

(1) 请问 $P(X>1)$与 $P(X\geqq 2)$分别为?

(2) 请问 $P(1\leqq X\leqq 2)$与 $P(0<X<1)$分别为?

(3) 请找到 X 之期望。

(4) 请找到 X 之标准差。

(5) 请计算 $E(X^2)$、$E(2X^2+5)$与 $E(X-2)^2$。

(6) 请计算 $V(3X-2)$、$V(3)$与 $V(3X)-2$。

24. 下表为随机变量 X(台湾大学生每个月逛书店次数)的概率分布，请根据这个分布回答以下的问题。

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.20	0.25	0.30	0.25

(1)　请找到 X 之期望与标准差。

(2)　请找到 $Y = 2X - 1$ 之期望与标准差。

(3)　请问 $P(X \geq 1)$与 $P(X \leqq 2)$分别为?

(4)　假设台湾共有约 20 万学生，每位大学生每次到书店的消费平均约为 NT$250，其中 40%为书店的毛利，每家书店的固定成本约 NT$400000，请计算每家书店净利之期望与标准差。

25. 请问以下各项目是否为概率分布，请解释为什么不是概率分布的原因。

x	0	1	2	3
$p(x)$	0.15	0.25	0.35	0.45

x	2	3	4	5
$p(x)$	-0.20	0.30	0.50	0.40

X	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	0.10	0.15	0.45	0.25	0.05

26. 美美与莉莉是好朋友，两人都爱猫也都养猫。变量 X 为美美过去三年内养猫数，而变量 Y 为莉莉过去三年内养猫数，以下两表为 X 与 Y 的边际概率分布，请根据这两个分布回答以下的问题。

x	0	1	2
$P(x)$	0.2	0.5	0.3

y	0	1	2
$p(y)$	0.4	0.5	0.1

(1)　请找到 X 之期望与标准差。

(2)　请找到 Y 之期望与标准差。

(3)　若假设 X 与 Y 相互独立，请找到这两个变量的联合概率分布。

(4)　请计算 X 与 Y 的协方差为?请解释此协方差。

(5)　请计算 X 与 Y 的相关系数为?请解释此相关系数。

(6)　请找到 $X+Y$ 这个变量的概率分布，并 $X+Y$ 之期望与标准差。

(7)　请用 $X+Y$ 之方差来检验 X 与 Y 相互独立假设。

(8)　请找到 XY 这个变量的概率分布，并 XY 之期望与标准差。

(9)　请用 XY 之方差来检验 X 与 Y 相互独立假设。

27. 健力运动器材店贩卖各类运动器材，假设变量 X 为过去一年每天卖出的网球拍数，而变量 Y 为过去一年每天卖出的羽球拍数，下表为 X 与 Y 的联合概率分布，请根据这个分布回答以下的问题。

	X		
Y	1	2	3
1	0.30	0.18	0.12
2	0.15	0.09	0.06

3	0.05	0.03	0.02

(1) 请找到 X 与 Y 这两个变量的分别的边际概率分布。

(2) 请问从 X 与 Y 的联合概率分布与边际概率分布，检验 X 与 Y 是否相互独立?

(3) 请找到 $P(Y = 2 \mid X = 1)$?

(4) 请找到 X 之期望与标准差。

(5) 请找到 Y 之期望与标准差。

(6) 请计算 X 与 Y 的协方差为?请解释此协方差。

(7) 请计算 X 与 Y 的相关系数为?请解释此相关系数。

(8) 请找到 $X+Y$ 这个变量的概率分布，并 $X+Y$ 之期望与标准差。

(9) 请用 $X+Y$ 之方差来检验 X 与 Y 相互独立假设。

(10) 请找到 XY 这个变量的概率分布，并 XY 之期望与标准差。

(11) 请用 XY 之方差来检验 X 与 Y 相互独立假设。

28. 文宏与建华为两个互相竞争的房屋中介商，假设变量 X 为文宏过去三年每月卖出的房屋数，而变量 Y 为建华过去三年每月卖出的房屋数，下表为 X 与 Y 的联合概率分布，请根据这个分布回答以下的问题。

	X		
Y	1	2	3
1	0.25	0.20	0.14
2	0.15	0.07	0.04
3	0.10	0.03	0.02

(1) 请找到 X 与 Y 这两个变量的分别的边际概率分布。

(2) 请问从 X 与 Y 的联合概率分布与边际概率分布，检验 X 与 Y 是否相互独立?

(3) 请找到 $P(Y = 1 \mid X = 2)$?

(4) 请找到 X 之期望与标准差。

(5) 请找到 Y 之期望与标准差。

(6) 请计算 X 与 Y 的协方差为?请解释此协方差。

(7) 请计算 X 与 Y 的相关系数为?请解释此相关系数。

(8) 请找到 $X+Y$ 这个变量的概率分布，并 $X+Y$ 之期望与标准差。

(9) 请用 $X+Y$ 之方差来检验 X 与 Y 相互独立假设。

29. 假设你想投资某投资组合套餐，将 30%的本金投资于第一类股票、70%的本金投资于第二类股票机会，假设一年后第一类股票有 10%的回收、第二类股票有 18%的回收，而且第一类股票的回收标准差为 15%、第二类股票的回收标准差为 24%的回收，若变量 X 为此投资组合套餐的回收，请回答以下的问题。

(1) 请找到 X 之期望。

(2) 若假设这两种股票为 100%相关，请找到 X 之标准差。

(3)　若假设这两种股票为 50%相关，请找到 X 之标准差。

(4)　若假设这两种股票完全不相关，请找到 X 之标准差。

(5)　请从相关系数来讨论 X 之标准差的变化。