一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1．设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & x \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}=a_1x+a_0$，则 $a_0=$

A．-7　　B．-4　　C．4　　D．7

2．设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行与第 3 行互换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 (-2) 倍加到第 3 列得到单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}=$

A．$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

C．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3．若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -k \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2k \end{pmatrix}$ 的秩为 2，则数 $k=$

A．1　　B．2

C．3　　D．4

4．设线性方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多个解，则数 $a=$

A．-2　　B．-1

C．1　　D．2

5．设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|2\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}|=0$，$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$

A．$-\dfrac{3}{2}$　　B．$-\dfrac{2}{3}$

C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6．行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}=$____________.

7．设 3 阶矩阵$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，若行列式$|\boldsymbol{B}|=-2$，则行列式$|3\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3-2\boldsymbol{\beta}_1|=$____________.

8．已知n阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}=$____________.（用矩阵$\boldsymbol{A}$表示.）

9．设$\boldsymbol{A}$为 2 阶矩阵，若存在矩阵$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，

则$\boldsymbol{A}=$_______.

10．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,3,t)^{\mathrm{T}}$线性无关，则数$t$的取值应满足____________.

11．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & t \end{pmatrix}$，若 3 阶非零矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则数$t=$____________.

12．设 4 元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的增广矩阵经初等行变换化为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & c-2 & 0 \end{array}\right)$$

若该方程组有无穷多解且其导出组的基础解系有 2 个向量，则数a,c的取值应分别满足____________.

13．设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$有特征值为3，若矩阵$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{B}$必有一个特征值为____________.

14．已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$是其一个特征向量，则$\boldsymbol{\alpha}$对应的特征值为____________.

15．设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$正定，则数$t$的取值范围为____________.

三、计算题：本大题共7小题，每小题9分，共63分。

16．计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$的值.

17．已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$，求

（1）矩阵$\boldsymbol{X}$，使得$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$；（2）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$.

18．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$满足关系式$\boldsymbol{ABA}=6\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{B}$.

19．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,3,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,0,4)^{\mathrm{T}}$的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20．确定数k的值，使线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-1 \\ 2x_1+kx_2-2x_3=0 \\ kx_1+2x_2+x_3=k \end{cases}$有无穷多解，并求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21．设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值是$6,3,3$，已知特征值6对应的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$.

22．求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$化为标准形$f=-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

四、证明题：本题7分。

23．设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，n维列向量$\boldsymbol{\alpha}$满足$\boldsymbol{A\alpha}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，证明向量组$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$线性无关.