第 7 章 统计估计

7.4 总体平均数的区间估计

例题 7.1：美国轮胎公司要估计其生产轮胎的行驶哩数，已知行驶哩数为正态分布，标准差是 2500 英哩。现在随机抽样 16 个轮胎，行驶哩数如下：

40133，39433，38309，40572，37494，40403，41224，38544，39446，41559，35012，40882，42294，37176，39322，39704

计算总体平均哩数，90%的置信区间。

解答：样本平均数 $\bar{x}$ = 39469.19。 总体平均哩数，90% 的置信区间：

$$(\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (39469.19-1.645\frac{2500}{\sqrt{16}},\ 39469.19+1.645\frac{2500}{\sqrt{16}}) =$$

(38441.1, 40497.3)

例题 7.2：母狗的怀孕期间是正态分布。现在随机抽样 15 只母狗，观查其怀孕日数如下：

62.0，62.2，59.4，60.8，61.1，61.4，60.3，60.2，61.8，60.4，59.8，60.4，60.4，59.2，60.9

计算总体平均数，95%的置信区间。

解答：样本平均数 $\bar{x}$ = 60.69。 样本标准差 s=0.90。 总体平均数，95% 的置信区间：

$$(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}) = (60.69-2.145\frac{0.90}{\sqrt{15}},\ 60.69+2.145\frac{0.90}{\sqrt{15}}) =$$

(60.19, 61.18)

7.5 总体比例的区间估计

例题 7.3：一批电子零件，现在随机抽样 100 件，检查是否合格。结果是 80 件合格，计算总体合格比例，95% 的置信区间。

解答：$n = 100$ 为大样本，即 $t = np = 80 \geq 5$ 且 $n - t = n(1 - p) = 20 \geq 5$，则利用标准正态分布，计算总体比例 p 的 95%置信区间为

$$\left[\hat{p}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

$$=()\left[0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8(0.2)}{100}},\ 0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8(0.2)}{100}}\right]$$

$$= [0.7216, 0.8784]$$

7.6 总体方差的区间估计

例题 7.4：某一电子零件的厚度是正态分布，现在抽样 10 件，厚度如下：

1.23，1.33，1.24，1.25，1.26，1.28，1.20，1.24，1.30，1.26

计算厚度标准差的 90%置信区间。

解答：抽样标准差 $s^2 = 1.366 * 10^{-3}$，$\chi^2_{0.05,9} = 16.917$，$\chi^2_{0.95,9} = 3.334$

总体方差 σ^2 的 90%置信区间为

$$\left[\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}},\ \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right] = \left[\frac{9*1.366*10^{-3}}{16.917},\ \frac{9*1.366*10^{-3}}{3.334}\right] = [7.267*10^{-4},\ 36.875*10^{-4}]$$

总体标准差 σ 的 90%置信区间为 $[2.696 * 10^{-2},\ 6.072 * 10^{-2}]$

7.7 抽样的样本量

例题 7.5：电子零件厂商想估计零件合格率，如果要达到置信水平 99%，置信区间的长度为 5% (半径 2.5%)。抽样的数目应该是多少？

1. 事先抽样 30 个，合格 26 个。
2. 如果没有事先抽样。

解答：1. 事先抽样 30 个，合格 26 个。则样本量 n 是：

$$n = \left[\frac{2*z_{\alpha/2}}{L}\right]^2 p(1-p) = \left[\frac{2*(2.58)}{0.05}\right]^2 (\frac{26}{30})(\frac{4}{30}) = 1231$$

所以还要再抽样 1201 个。

2. 如果没有事先抽样，则样本量 n 是：

$$n = \left[\frac{z_{\alpha/2}}{L}\right]^2 = \left[\frac{2.58}{0.05}\right]^2 = 2663$$

以上结果告诉我们，要检验总体比例(例如：总统直接民选，某候选人的得票率)，要使预测的置信区间有 99%的置信度，置信区间的差距只有 5%，(置信区间为 $p \pm 2.5\%$)，那么不管总体有多大(1000 万人也好，1 亿人也好)，我们只要抽样 2663 人。

盖洛普民意调查(Gallup poll)常用的样本量是 1823 人。

当然，先决条件是，抽样没有非抽样误差，也就是：样本的来源没有偏向某一特别阶层，被抽样的受访者没有违心之答等等。

习题

1. 随机抽样 30 个 GRE 成绩，平均分数 1082 分，标准差 108，决定下列参数的 95%及 99%置信区间。

(1) 总体平均数。 (2) 总体标准差。

2. 为了决定某个团体的平均教育水平，抽样 50 人，平均教育年数是 11.4 年，标准差 3.2 年。计算总体平均数 95%及 98%之置信区间。

3. 研究人员要知道某地区每家庭平均收入之置信区间，置信区间半径为 100 元，置信度为 95%，若总体标准差为 500 元，抽样样本量应为多少？

4. 民意调查抽样 1022 位市民，他们对某位首长的支持之比率为 63%，计算这位首长受支持比例的 90%置信区间？

5. 从某一团体 750 个家庭中不重复抽样 200 个家庭，其平均小孩人数为 3.2 人，标准差为 0.8 人。计算这团体每个家庭平均小孩人数的 95%置信区间？

6. 随机抽样 12 部机器，检查其效率如下 ：

0.820 , 0.913 , 0.764 , 0.881 , 0.902 , 0.893

0.663 , 0.862 , 0.812 , 0.778 , 0.932 , 0.824

(1) 计算总体平均效率的 95%置信区间？

(2) 计算总体方差及标准差的 95%置信区间？

7. 从一已知方差为 100 的常态总体中抽选若干样本，今知 95%的置信区间为 [17.2,22.8]，则样本有多大？

8. 500 户人家之所得呈正态分布，$\sigma = 25$，今欲使总体平均数 95%置信区间半径为 10，则最少应抽出多少样本？

9. 随机抽取 36 个零件为一样本，其内径的平均数为 2.6 吋，标准差为 0.3 吋，求全部总体零件内径平均数的 95%与 99%置信区间。

10. 已知由 $N(\mu,\sigma^2)$ 抽得十个样本所算得的之平均数为 $\overline{X}=25$，方差为 $s^2=2$ 试在 95%置信度下，求下列各种情形之的置信区间？

(1) $\sigma^2=1$ (2) σ^2 未知。

11. 某工厂为测定某种制成品所含维他命的成分起见，特抽 17 个样本，测定其每 100 公克内所含维他命量(mg)，如次：

16, 22, 21, 20, 23, 21, 19, 15, 13, 23, 17, 20, 29, 18, 22, 16, 25

试求在 95%可靠性下，维他命含有量之总体平均数的置信区间。

12. 消费者抽样调查，显示 400 名被调查者，有 160 人喜爱该公司的产品。

(1) 请估计 95% 的置信水平，全部消费者喜爱该公司的产品的比率在何范围内？

(2) 要达到置信水平 99%，置信区间的长度为 5%，则抽样的数目应该是多少？

13. 假设有两个经济学家想要估计美国家庭对食物的平均花费金额。一个经济学家用 U 为样本估计量，另一个用 V 为估计量。已知 V 的标准差是 U 的三倍，且 U，V 独立，并

且 U，V 皆为不偏估计量，现在欲设计三个新的估计量 W_1, W_2, W_3，如下：

$$W_1 = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V \text{ , } W_2 = \frac{3}{4}U + \frac{1}{4}V \text{ , } W_3 = 1U + 0V$$

(1) W_1, W_2, W_3 何者是不偏估计量

(2) W_1, W_2, W_3 那一个估计量最好？试说明理由。

(3) 是否可以利用 U 与 V 找出更好的统计量？

14. 从 n 次试验，成功 X 次的样本计比例 $P = \dfrac{x}{n}$，是总体比例 p 的估计量，如果我们改为下列估计量：$p^* = \dfrac{X+1}{n+2} = \dfrac{nP+1}{n+2}$

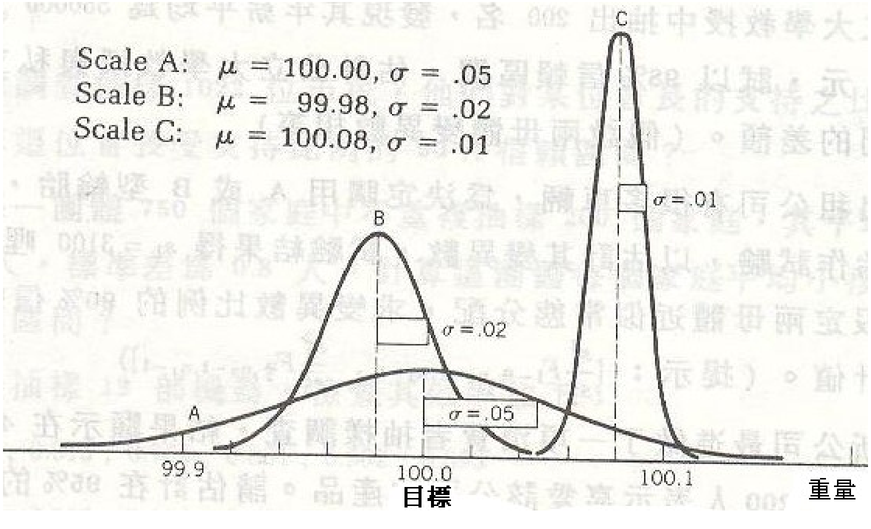
(1) P 的 MSE 如何？它是否为一致估计量？

(2) P^*的 MSE 如何？它是否为一致估计量？

(3) 当 n = 10 而 p= 0, 0.1, 0.2, ..., 0.9, 1.0 ，P^*对 P 的效率如何？

(4) 在什么情况下，P^*比 P 是较好的估计量？

15. 一个估计量有小的方差(但是可能是有偏估计量)，称为精密(precise)；一个估计量有小的 MSE，称为正确(accurate)。以下有三个秤重器：A，B，C 分别秤 100 公克的物体许多次，得到下列结果：(目标参数 μ=100)



(1) 那一个秤重器最精密？那一个秤重器最正确？

(2) A 比 B 的效率如何？ C 比 B 的效率如何？

(3) 如果分别秤 25 个样本，计算样本平均，则 A，B，C 那一个秤重器最正确？

16. 若根据调查青少年每天花在上网的时间是标准差为 2 小时的正态分布，假设你想做青少年上网行为的研究，随机抽样 100 位青少年，根据这个样本所计算出来的平均上网时间为每天 6 小时，请回答以下的问题。

(1) 请问青少年每天平均上网时间的 95%置信区间。请解释这个置信区间。

(2) 请问青少年每天平均上网时间的 99%置信区间。请解释这个置信区间。

(3) 请问青少年每天平均上网时间的 90%置信区间。请解释这个置信区间。

(4) 若样本量增加为 300 位青少年，假设算出之平均上网时间不变，请问青少年每天平均上网时间的 95%置信区间。

(5) 若样本量降低为 36 位青少年，假设算出之平均上网时间不变，请问青少年每天平均上网时间的 95%置信区间。

(6) 若上网的时间是标准差增加为 2.2 小时，假设算出之平均上网时间不变，请问青少年每天平均上网时间的 95%置信区间。

(7) 若上网的时间是标准差降低为 1.5 小时，假设算出之平均上网时间不变，请问青少年每天平均上网时间的 95%置信区间。

(8) 若算出之平均上网时间增加为 8 小时，请问青少年每天平均上网时间的 95%置信区间。

(9) 若算出之平均上网时间降低为 5 小时，请问青少年每天平均上网时间的 95%置信区间。

(10) 请根据上述结果解释信心程度、样本量、总体标准差与平均数对置信区间的影响。

17. 某旅馆想要估计每天平均住房数的调查，若根据以往经验此旅馆每天平均住房数是标准差为 24 间房的正态分布，请回答以下的问题。

(1) 假设你想做此旅馆每天平均住房数的研究，随机抽样 16 天的住房数，根据这个样本所计算出来的每天平均住房数为 48 间房，若根据某信心程度所算出的上下限为 40 间房至 56 间房，请问信心程度为多少？

(2) 假设你想做此旅馆每天平均住房数的研究，随机抽样 25 天的住房数，根据这个样本所计算出来的住房数为 36 间房，请计算此旅馆每天平均住房数的 95%置信区间。

(3) 假设你想算出此旅馆每天平均住房数的 95%置信区间，在样本每天平均住房数的加减 5 间房内，请问应该随机抽样多少天的住房数？

18. 某肥料工厂想要估计生产出来肥料每桶平均重量，若根据以往经验此肥料工厂每桶肥料平均重量是正态分布，请回答以下的问题。

(1) 若每桶肥料平均重量标准差为 200 公克，假设你想算出此肥料工厂每桶肥料平均重量的 99%置信区间，在样本每桶肥料平均重量的加减 40 公克内，请问应该随机抽样多少桶的肥料数？

(2) 若每桶肥料平均重量标准差降低为 100 公克，假设你想算出此肥料工厂每桶肥料平均重量的 99%置信区间，在样本每桶肥料平均重量的加减 40 公克内，请问应该随机抽样多少桶的肥料数？

(3) 若每桶肥料平均重量标准差为 200 公克，假设你想算出此肥料工厂每桶肥料平均重量的 95%置信区间，在样本每桶肥料平均重量的加减 40 公克内，请问应该随机抽样多少桶的肥料数？

(4) 若每桶肥料平均重量标准差降低为 100 公克，假设你想算出此肥料工厂每桶肥料平均重量的 95%置信区间，在样本每桶肥料平均重量的加减 40 公克内，请问应该随机抽样多少桶的肥料数？

19. 由于健康饮食风潮，某冷冻食品的制造商想知道有多少消费者在购买冷冻食品时，会挑选健康为主要考虑的冷冻食品，因此委请广美公关做调查，随机抽样 1500 位消费者，其中有 360 位挑选冷冻食品时认为健康为主要考虑，而根据广美公关的估计全台湾会买冷冻食品的消费者约有 2 百万人，请回答以下的问题。

(1) 请问本调查所欲计算的总体参数为？

(2) 假设总体为正态分布，请问挑选冷冻食品时认为健康为主要考虑比率的点估计量？

(3) 假设总体为正态分布，请问挑选冷冻食品时认为健康为主要考虑比率的 95%估计置信区间？

(4) 若使用此 95%估计置信区间，请估计冷冻食品的 2 百万消费者中有多少人会以健康为主要考虑？

20. 某会计师查核一餐馆的订单状况，她想知道六月时此餐馆采购部门所犯的错误，因此从六月 950 张订单中随机抽样 100 张，找出其中每张订单上的金钱错误，根据此样本平均每张订单的金钱错误为 NT$150 而标准差为 NT$524，请回答以下的问题。

(1) 请估计六月平均每张订单的金钱错误的 95%置信区间？

(2) 请估计六月总订单的金钱错误的 95%置信区间？

补充教材

说明一下估计量S^2的分母为什么是 n - 1？一是使估计量S^2为方差的不偏估计量，另一是 n-1 是自由度。如果数据是抽样数据，样本量为 n，若 n = 1，则无法知道其变异的程度；如果 n = 2，则 $x_1 - \bar{x} = -(x_2 - \bar{x})$，所以我们只能知道一个变异的程度。

所以当样本量是 n，则残差(residual) $x_i - \bar{x}$，$\sum x_i - \bar{x} = 0$，只有 n-1 个是自由的(free)，第 n 个残差等于其它残差总和的负值。 n-1 是样本方差的自由度(degrees of freedom)。自由度是「变异程度的信息数量」(pieces of information)。

表 7.a 是「正态分布」估计量的期望值、方差、MSE、不偏性、有效性 与一致性。

表 7.a 正态分布估计量的期望值、方差、MSE、不偏性、有效性与一致性。

参数	估计量	期望值	方差	MSE	不偏	有效	一致
M	抽样平均数 $\bar{X}$	μ	σ^2/n	σ^2/n	Yes	No	Yes
M	抽样中位数 $\hat{X}$	μ	$1.57\sigma^2/n$	$1.57\sigma^2/n$	Yesˇ	No	Yes
M	缩小估计量 $r\bar{X}$	rμ	$r^2\sigma^2/n$	$MSE(r\bar{X})$	No	Yes	Yes
σ^2	抽样方差 S^2	σ^2	$2\sigma^4/(n-1)$	$2\sigma^4/(n-1)$	Yes	No	Yes
σ^2	最大概似估计 $\frac{n-1}{n}S^2$	$\frac{n-1}{n}\sigma^2$	$\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$	$\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4$	x	x	ˇ
σ^2	缩小估计量$\frac{n-1}{n+1}S^2$	$\frac{n-1}{n+1}\sigma^2$	$\frac{2(n-1)}{(n+1)^2}\sigma^4$	$\frac{2}{n+1}\sigma^4$	x	ˇ	ˇ
σ	抽样标准差 S	$c(n)\sigma$	$(1-c^2(n))\sigma^2$	$(2-2c(n))\sigma^2$	x	X	ˇ
σ	不偏估计量$\frac{S}{c(n)}$	σ	$\frac{1-c(n)}{c^2(n)}\sigma^2$	$\frac{1-c(n)}{c^2(n)}\sigma^2$	ˇ	ˇ	ˇ
σ	抽样全距 R	$d_2(n)\sigma$	$d_3(n)\sigma$		X	X	X

$$MSE(r\bar{X}) = r^2\frac{\sigma^2}{n} + (1-r^2)\mu^2 \qquad r = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}} \cong \frac{\bar{X}^2}{\bar{X}^2 + \frac{S^2}{n}}$$

因为 $r\bar{X}$ 含有未知参数 μ，σ²，所以不能当作估计量。我们利用$\bar{X}$, S² 来代替。

从表中，我们可以发现我们常用的估计量，并不见得是最有效率的估计量，甚至不见得是「不偏估计量」(例如抽样标准差)，但是因为公式简单，差异不大，而且使用习惯，成为通用的估计量。一般说来，，基础统计学是不用介绍其他估计量(如缩小估计量、最大概似估计量，请见附录光盘)，也不用去记。我们放在这里，因为号称「统计学的学习地图」，要让读者知道，还有那条路，为什么要走这条路？

平均数μ的估计量当然是$\bar{X}$，方差 σ² 的估计量是 S²。标准差σ 的估计量通常采用 S，虽然它是有偏估计量，是为了计算方便(计算机没有普遍使用以前)。标准差σ 的

不偏估计量 $\dfrac{S}{c(n)}$，在质量管理中，会利用这个不偏估计量来作管制图的上下限的估计。

$$c(n)=\text{修正標準差為不偏估計量之係數}=\frac{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{n-1}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

$$\Gamma(\frac{n}{2})=\begin{cases}\left(\dfrac{n}{2}-1\right)! & \text{若 n 是偶數}\\[2ex] (\dfrac{n}{2}-1)(\dfrac{n}{2}-2)\cdots(\dfrac{1}{2})\,\Gamma(\dfrac{1}{2}) & \text{若 n 是奇數}\end{cases}\qquad \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c(n)	0.797885	0.886227	0.921318	0.939985	0.951533	0.959368	0.965031	0.969397	0.972660

$d_2(n)$和 $d_3(n)$则没有公式，要查表，已超出本书范围。

7.4 总体平均数的区间估计

有些参数(例如：方差 σ^2)的置信区间，并非估计值 s^2 加减一个半径 E，而是除以两个常数：

$$\left[\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}},\ \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right]$$

当样本量 n 增加，则置信区间的长度会缩小。

当置信度 $1-\alpha$ 增大，则置信区间的长度会增大。

定理：假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 n 个抽样随机变量，x_i 为其随机值，单总体平均数 μ 的区间估计(interval estimator)，分成下列几种情况计算：

(1) 若 X_i 是正态分布，其标准差 σ 已知，则总体平均数 μ 的 1-α 置信区间为

$$\left[\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

(2) 若 X_i 是正态分布，其标准差 σ 未知，则总体平均数 μ 的 1-α 置信区间为

$$\left[\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

(3) 若 X_i 不是正态分布，其标准差 σ 已知，n > 30，则总体平均数 μ 的 1-α 置信

区间为 $\left[\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

(4) 若 X_i 不是正态分布，其标准差 σ 未知，n > 30，则总体平均数 μ 的 1-α 置信区间为 $\left[\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right]$

(5) 若 X_i 不是正态分布，其标准差 σ 未知，n > 100，则总体平均数 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间为 $\left[\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right]$

以上结果整理成表 7.2 。

因为参数 μ 是未知常数(不变的数)，$\bar{x}$ 是变量(不同的样本组，有不同的 $\bar{x}$)，置信区间 $[A,B]$是变动的。所以，$[A,B]$ 为 μ 的 95% 置信区间，不能说 μ 有 95% 的概率在置信区间 $[A,B]$，而应该说置信区间 $[A,B]$ 有 95% 包括 μ。

如果 σ 未知，则以样本标准差 s 代替 σ，这样会降低置信区间的置信度。所以为了保持置信度，要放宽置信区间，于是用较大的 t 值 $t_{\frac{\alpha}{2}}$ 代替 $z_{\frac{\alpha}{2}}$。

7.8 标准误差

标准误差(Standard error)是估计量(例如 $\bar{X}$)的方差[例如 $V(\bar{X})=\sigma^2/n$]的估计值(例如 s^2/n)的开方(例如 $\sqrt{s^2/n}$)。

参数的 $1-\alpha$ 置信区间为: [点估计 ±(估計量機率分配)$_{\alpha/2}$×(标准误差)]

参数的检验值 =(统计值 – 参数)/ 标准误差 (第 8 章)

$$X_i, E(X_i)=\mu, V(X_i)=\sigma^2 \xrightarrow{\text{抽樣平均}} \bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$X\text{標準差}\ S_X \qquad\qquad \text{標準誤}\ S_{\bar{X}}$$

$$S_X=\sqrt{\frac{S_{xx}}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \qquad\qquad S_{\bar{X}}=\frac{S_X}{\sqrt{n}}$$

图 7.6 标准差与标准误差

重迭估计法 (jackknife 是折迭刀)

重迭法或刀切法 (jackknife procedure) 是多功能的区间估计法，因为它几乎适用于所有情况，不需要总体是常态的假设条件。如果原来估计量是「有偏估计量」(但是当样本数很大，会趋近不偏估计量，例如：σ 的估计量 S，则重迭法会消去 其偏误。

重迭法虽然最后用到 t 分配求置信区间，但是因为不用假设总体是常态分配，所以算是「无母数统计」。

利用重迭法，作参数的区间估计步骤如下：

1. 假设要估计的参数为 θ，估计量为 $\hat{\theta}$
2. 取 n 个样本
3. 利用 n 个样本数据代入估计量 $\hat{\theta}$，得到估计值 $\hat{\theta}_{all}$ 1
4. n 个样本数据不计第 1 个资料，其它 n - 1 个资料代入估计量 $\hat{\theta}$，得到估计值 $\hat{\theta}_{-1}$
5. 同理，不计第 2 个资料，代入估计量，得到估计值 $\hat{\theta}_{-2}$。
   依此类推，得到 $\hat{\theta}_{-3}$ ，$\hat{\theta}_{-4}$ ，…，$\hat{\theta}_{-n}$
6. 计算虚拟值 (pseudovalue)
   $$J_i = n\hat{\theta}_{all} - (n-1)\hat{\theta}_{-i} \quad , \quad i = 1,2,\cdots,n$$
7. 计算 J_i 的平均值与标准偏差
   $$\bar{J} = \frac{\sum_{i}^{n} J_i}{n}$$
   $$s_J = \sqrt{\frac{\sum_{i}^{n}(J_i - \bar{J})^2}{n-1}}$$
8. 总体参数 θ 的 $1-\alpha$ 置信区间为
   $$\bar{J} \mp t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{s_J}{\sqrt{n}}$$

若 $\theta = \mu$ ，则重迭法的置信区间与平均数 t 分配置信区间相同。

若 $\theta = \sigma$ ，则重迭法的置信区间如下：

例题：下列七个样本数据：

6.2, 3.1, 1.0, 7.3, 4.2, 0.7, 11.7

利用重迭法，计算总体标准偏差 σ 的 95 % 置信区间。

解答： $\theta = \sigma$，$\hat{\theta} = s$， n = 7，样本平均数 $\bar{x} = 5.17$ ，所以：

$$\hat{\theta}_{all} = s_{all} = \sqrt{\frac{(6.2-5.17)^2 + (3.1-5.17)^2 + \cdots + (11.7-5.17)^2}{7-1}} = \sqrt{17.226} = 4.15$$

$$\hat{\theta}_{-1} = s_{-1} = \sqrt{\frac{(3.1-5.0)^2 + (1.0-5.0)^2 + \cdots + (11.7-5.0)^2}{6-1}} = \sqrt{20.424} = 4.52$$

$$\hat{\theta}_{-2} = s_{-2} = 4.44,\ \hat{\theta}_{-3} = s_{-3} = 4.08,\ \hat{\theta}_{-4} = s_{-4} = 4.09,$$
$$\hat{\theta}_{-5} = s_{-5} = 4.52,\ \hat{\theta}_{-6} = s_{-6} = 4.00,\ \hat{\theta}_{-7} = s_{-7} = 3.28,$$

$$J_1 = ns_{all} - (n-1)s_{-1} = 7 \times (4.15) - 6 \times (4.52) = 1.93$$

$J_2=2.41,\ J_3=4.57,\ J_4=4.51,\ J_5=1.93,\ J_6=5.05,\ J_7=9.37$

$\bar{J}=4.25$

$$s_J=\sqrt{\frac{(1.93-4.25)^2+(2.41-4.25)^2+\cdots+(9.37-4.25)^2}{7-1}}=\sqrt{6.862}=2.62$$

$$\bar{J}\mp t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s_J}{\sqrt{n}}=4.25\mp 2..447\times\frac{2.62}{\sqrt{7}}=4.25\mp$$

总体标准差 σ 的 95 % 置信区间： [1.83, 6.67]。

重迭法在 中文统计 → 统计估计 →重迭法 jackknife

自力估计法

自力估计法或自助估计法(Bootstrap confidence interval)是利用原样本数据，当作总体再抽样很多次，根据其统计值，作直方图，找出置信区间。Bootstrap 原意是长统靴带，”Pull oneself by one's own bootstrap” 意思是「靠自己力量而成功」，所我们译为自力抽样(bootstrap sampling)。自力置信区间法适用于不是常态分配的总体，或者是较复杂的参数估计。

其步骤如下：

1. 已经抽出 n 个样本，将这 n 个样本编号 。 令 i = 1
2. n 个样本当做总体，利用随机随机数表，随机抽样 n 个出来。因为随机抽样是返回式(重複式)抽样，所以抽出的 n 个值可能有重复。
3. 抽出的 n 个样本计算估计量 $\hat{\theta}$ (如 $\bar{X}$)，得到 $\hat{\theta}_i$ (如 $\bar{X}_i$)。
4. i = i +1 重复第 2,3 步 k 次 。
5. 将 $\hat{\theta}_i$, i = 1,2,…,k 画出直方图，在直方图上找出 $1-\alpha$ 置信区间。

例题：下列 10 个样本数据 ，计算平均数的 95% 自力置信区间。

16，12，14，6，43，7，0，54，25，13

解答：10 个样本数据编号 1,2,3,…,9,0。从随机随机数表，

抽出 10 个随机数资料： 3, 9, 6, 5, 7, 6, 4, 5, 4, 5 ，

得到 10 个样本数据：14, 25, 7, 43, 0, 7, 6, 43, 6, 43。所以 $\bar{x}_1=19.4$ 。

重复上述步骤，再抽出 10 个随机数，计算平均数，重复 k = 1000 次。

得到 $\bar{x}_i$, i=1,…,1000，画出直方图，

平均数的 95 % 自力置信区间 $10\le\mu\le 31$

自力法在 中文统计 → 非参数统计 → Bootstrap 自力抽样估计