

# 准备知识

## 1.1 实数与实数集

## 1. 实数与数轴



## 2. 实数集

- 1) 区间:
- |        |                  |
|--------|------------------|
| 开区间    | $(a, b)$         |
| 闭区间    | $[a, b]$         |
| 半开半闭区间 | $[a, b), (a, b]$ |

2) 邻域: 称开区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  为  $x_0$  点的  $\delta$  邻域.

去心邻域:  $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

# 准备知识

## 1.2 有界集与上下确界

## 有界集

设 $D$ 是一个数集，如果存在一个实数 $a$ （或者 $b$ ），使任意的数 $x \in D$ ，有 $a \leq x$ （或 $x \leq b$ ），则称数集 $D$ 有下（上）界，而 $a$ （或 $b$ ）为 $D$ 的下（上）界。

若 $D$ 既有上界又有下界，称 $D$ 为**有界集**。

$\Leftrightarrow \exists M > 0, s.t. \forall x \in D, \text{满足 } |x| \leq M.$

## 公理

设数集 $D$ 有上界, 则必有一个最小的上界.  
称之为**上确界**, 记为  $\sup_{x \in D} D$ .

$$A = \sup_{x \in D} D \Leftrightarrow \forall x \in D, \text{有 } x \leq A$$

$$\text{且 } \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in D, \text{ s.t. } x_0 > A - \varepsilon.$$

## 推论

设数集 $D$ 有下界, 则必有一个最大的下界,  
称之为**下确界**, 记为  $\inf_{x \in D} D$ .

# 准备知识

## 1.3 函数

## 函数

设在某一问题中，存在两个变量 $x, y$ ，如果对于变量 $x$ 所取的每一个值 $x$ ，通过一定规律（关系），都有唯一变量 $y$ 与之对应，此时称变量 $x$ 为自变量，变量 $y$ 叫做因变量，又叫做 $x$ 的函数，记为 $y=f(x)$ 。

三个要素： 自变量， 函数关系， 因变量

## 常见函数

1. 数列（整标函数）。记为 $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  或  $\{a_n\}$ 。

$$y = f(x), x = 1, 2, \dots$$

2. 基本初等函数。

包含常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数。

$$y = C$$

$$y = x^a$$

$$y = a^x$$

$$y = \ln x$$

$$y = \begin{cases} \sin x \\ \cos x \\ \tan x \\ \cot x \end{cases}$$



$$y = \begin{cases} \arcsin x \\ \arccos x \\ \arctan x \\ \operatorname{arccot} x \end{cases}$$





## 常见函数

### 3. 初等函数.

基本初等函数经过有限多次复合与四则运算得到的函数.

复合:

$$y = f(u), u = g(x) \Rightarrow y = f(g(x))$$

# 准备知识

## 0.4 复合函数举例

例. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$ , 求  $f(g(x))$ .

解:  $f(g(x)) = \begin{cases} g^2(x) + 1, & g(x) \leq 0 \\ \sin(g(x)), & g(x) > 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} x^6 + 1, & x^3 \leq 0 \text{ 且 } x \leq 1 \\ x + 1, & \sqrt{x} \leq 0 \text{ 且 } x > 1 \\ \sin x^3, & x^3 > 0 \text{ 且 } x \leq 1 \\ \sin \sqrt{x}, & \sqrt{x} > 0 \text{ 且 } x > 1 \end{cases}$$

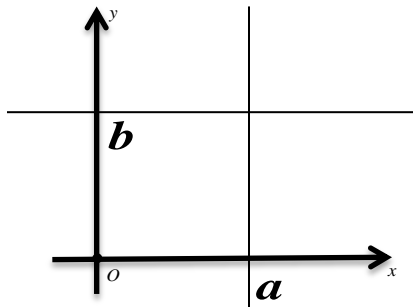
$$= \begin{cases} x^6 + 1, & x \leq 0 \\ \sin x^3, & 0 < x \leq 1 \\ \sin \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$$

# 准备知识

## 0.5极坐标

## 1. 直角坐标.

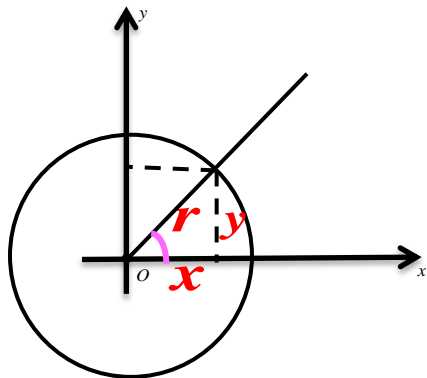
$(x, y)$



$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

## 2. 极坐标.

$(r, \theta)$



$$\begin{cases} r = c & \text{半径为} r \text{的圆} \\ \theta = \theta_0 & \text{角度为} \theta_0 \text{的射线} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

例.  $r = \cos \theta$  表示什么曲线?

解.  $r^2 = r \cos \theta$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = x$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$