Problema de decisión de grupo

Resolución mediante matrices de comparación por pares

Ignacio Amaya de la Peña

6 de junio de 2014

Introducción

- Problema de decisión entre varias alternativas
- Los datos que tenemos son las preferencias entre alternativas de varios expertos
- Queremos conseguir ordenar las alternativas de forma que reflejen lo mejor posible sus preferencias

Técnicas a emplear

- Álgebra matricial
- Matrices de comparación por pares (PCM *Pair Comparison Matrix*)
- Algoritmos numéricos

- Tenemos $L_1 \ldots L_n$ expertos
- Tenemos $A_1 \ldots A_n$ alternativas
- Vector de pesos w que contiene el ranking que buscamos

Introducción

Elementos del problema

$$
\begin{array}{ccccccc}
E_1 & \rightarrow & M^1 = (m_{ij}^k)_{i,j=1,..,n} & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
\vdots & & \vdots & \rightarrow & \boxed{?} & \rightarrow & w = (w_1, .., w_n)^t \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
E_n & \rightarrow & M^m = (m_{ij}^k)_{i,j=1,..,n} & & & & \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow
\end{array}
$$

Expertos	Matrices con las decisiones	Vector de prioridad del grupo

Fundamentos teóricos y conceptos

m_{ij} : razón de importancia entre la alternativa A_i y la alternativa A_j

$m_{ij} > 0$

$$M \equiv \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz M de comparación por pares nxn

Escala de Saaty

Escala	Valoración numérica	Recíproco
Preferencia máxima	9	1/9
Preferencia muy fuerte	7	1/7
Preferencia fuerte	5	1/5
Preferencia moderada	3	1/3
Misma preferencia	1	1

Ejemplo : Encuesta a alumnos sobre preferencias entre asignaturas

- A: Modelización
- B: Sistemas Operativos
- F: Ingeniería del Software
- D: Programación funcional
- E: Programación lógica
- F: Topología

Cuadro: Construcción PMC

	A	B	C	D	E	F
A		8	4	2	5	7
B			1/6	1/8	1/4	1/2
C				1/3	2	5
D					4	7
E						5
F						

Cuadro: Construcción PMC

	A	B	C	D	E	F
A	1	8	4	2	5	7
B		1	1/6	1/8	1/4	1/2
C			1	1/3	2	5
D				1	4	7
E					1	5
F						1

Problema de decisión de grupo

Ignacio Amaya de la Peña

Introducción
Motivación
Elementos del problema
Fundamentos teóricos y conceptos
PCM
Métricas vectoriales
Modelo y métodos
Formulación del problema
Optimización logarítmica
Mínimos cuadrados
Símplex
Errores
Funciones de MATLAB
Ejemplos numéricos

Cuadro: Construcción PMC

	A	B	C	D	E	F
A	1	8	4	2	5	7
B	1/8	1	1/6	1/8	1/4	1/2
C	1/4	6	1	1/3	2	5
D	1/2	8	3	1	4	7
E	1/5	4	1/2	1/4	1	5
F	1/7	2	1/5	1/7	1/5	1

- Propiedades
  - Reciprocidad $m_{ij} x m_{ji} = 1 \quad \forall i, j$
  - Consistencia $m_{ij} x m_{jk} = m_{ik} \quad \forall i, j, k$
  - Consistencia $\rightarrow$ Reciprocidad

- Teorema de Saaty
  - Si M es consistente:
    - Autovalores de M: 0 y n
    - Existe un vector $w = (w_1, .., w_n)^t$ tal que $m_{ij} = w_i / w_j \quad \forall i, j$. Además w es un autovector asociado al autovalor dominante de M.
  - Si M es recíproca:
    - Autovalor dominante de M: $\lambda_{max} \geq n$
    - M consistente $\iff \lambda_{max} = n$

- Caso consistente: existe solución exacta

$$\exists\, w \quad / \quad m_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \quad \forall\, i,j = 1,..,n$$

- Caso no consistente: no existe solución

$$\nexists\, w \quad \text{que cumpla} \quad \begin{cases} m_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \\ \vdots \\ \forall\, i,j = 1,..,n \end{cases}$$

Estamos ante un sistema no lineal sin solución

$$\begin{cases} m_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \\ \vdots \\ \forall\, i,j = 1,..,n \end{cases}$$

- Linealizamos el sistema mediante una transformación logarítmica.
- Resolvemos el sistema de forma aproximada. La elección de la mejor aproximación dependerá de la métrica que escojamos.
  - Métrica 2 (solución aproximada mediante mínimos cuadrados).
  - Métrica 1 (solución aproximada mediante el método del símplex).

Modelo y métodos

Modelo y métodos
Formulación del problema

$$
\begin{array}{ccccccc}
E_1 & \to & M^1 = (m_{ij}^k)_{i,j=1,..,n} & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
\vdots & & \vdots & \to & \boxed{?} & \to & w = (w_1, .., w_n)^t \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
E_n & \to & M^m = (m_{ij}^k)_{i,j=1,..,n} & & & & \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow
\end{array}
$$

Incompatibles Distintas decisiones	Inconsistente	Vector de prioridad del grupo

Problema de optimización vectorial

$$\begin{array}{ccccc} M^1 & \cdots & M^k & \cdots & M^m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \|M^1 - W\| & \cdots & \|M^k - W\| & \cdots & \|M^m - W\| \end{array}$$

$$\boxed{Min(\|M^1 - W\|, .., \|M^k - W\|, ..\|M^m - W\|)}$$

W es una matriz nxn consistente que cumple $W_{ij} = w_i/w_j$

$\|\cdot\|$ es una norma matricial

Modelo y métodos

Formulación del problema

- Problema: En general un problema de optimización vectorial no tiene solución.
- Solución : Convertir el problema a otro que sí sepamos resolver.

Problema de optimización escalar

$$\boxed{Min \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k)^p \| M^k - W \|^p}$$

p es el parámetro métrica

α_k es el peso del experto k

(hemos considerado $\alpha_k = 1 \quad \forall k$)

Estamos ante un problema no lineal

$$Min \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k)^p \|M^k - W\|^p$$

Vamos a realizar una transformación logarítmica para obtener un sistema lineal sobredeterminado.

$$M^k = \left(m_{ij}^k\right)_{i,j} \quad \rightarrow \quad L^k = \left(l_{ij^k}\right)_{i,j}, \quad l_{ij}^k = log(m_{ij}^k)$$

$$w = (w_{ij}) \quad \rightarrow \quad v = (v_i), \quad v_i = log(w_{ij})$$

$$W = \left(w_i \big/ w_j\right)_{i,j} \quad \rightarrow \quad V = \left(v_i - v_j\right)_{i,j}$$

Aplicando la transformación anterior obtenemos el siguiente problema de optimización.

$$\boxed{Min \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k)^p \| L^k - V \|^p}$$

A continuación lo resolveremos para los casos:

- $p = 2 \longrightarrow$ mediante mínimos cuadrados.
- $p = 1 \longrightarrow$ mediante el método del símplex.

En ambos casos tenemos que resolver el siguiente sistema sobredeterminado.

$$\begin{cases} v_i - v_j = l_{ij}^k \\ \vdots \\ \sum v_i = 0 \end{cases}$$

$$\forall\, i,j = 1,..,n \quad / \quad i < j$$

$$\forall\, k = 1,..,m$$

Vamos a resolver el sistema sobredeterminado anterior minimizando en el sentido de mínimos cuadrados.

De esta forma nos encontramos ante el siguiente problema.

$$\boxed{Min \sum_{k=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} (v_i - v_j - l_{ij}^k)^2 \text{ con } i < j}$$

Una vez resuelto el sistema debemos deshacer la transformación logarítmica y normalizar (con norma 1).

$$\widetilde{w_i} = e^{v_i} \quad \text{con } i = 1, .., n$$

$$w_i = \frac{\widetilde{w_i}}{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{w_i}}$$

Ahora vamos a resolver el sistema sobredeterminado usando la métrica 1 para encontrar la mejor solución.

De esta forma nos encontramos ante el siguiente problema.

$$Min \sum_{k=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} \left| v_i - v_j - l_{ij}^{k} \right| \text{ con } i < j$$

En este caso queremos resolver un problema de programación lineal. Introducimos dos nuevas variables: n y p (variables de desviación positiva y negativa) para no tener que trabajar con el valor absoluto.

$$n_{ij}^k = \frac{1}{2}\left[\left|v_i - v_j - l_{ij}^k\right| + \left(v_i - v_j - l_{ij}^k\right)\right]$$

$$p_{ij}^k = \frac{1}{2}\left[\left|v_i - v_j - l_{ij}^k\right| - \left(v_i - v_j - l_{ij}^k\right)\right]$$

Con estas nuevas variables nuestro problema de optimización queda de la siguiente forma:

$$\boxed{Min \sum_{k=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} (n_{ij}^k + p_{ij}^k) \text{ con } i < j}$$

sujeto a:

$$l_{ij}^k - v_i + v_j + n_{ij}^k - p_{ij}^k = 0 \quad \text{con} \quad i,j = 1,..,n \quad k = 1,..,m$$

$$n_{ij}^k \geq 0 \quad p_{ij}^k \geq 0 \quad \forall i,j,k$$

Tras obtener la solución aplicando el método del símplex debemos deshacer la transformación logarítmica y normalizar (con norma 1).

$$\widetilde{w_i} = e^{v_i} \quad \text{con } i = 1, .., n$$

$$w_i = \frac{\widetilde{w_i}}{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{w_i}}$$

Errores

Errores

Índice de consistencia

$$CI(M) = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

(λ_{max}: autovalor dominante de M)

Errores

- Norma de Frobenius

$$\|A\|_F \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \right\}^{1/2} \text{ siendo } \quad A = \left(a_{ij} \right)_{i,j}$$

Errores

- Grado de satisfacción del experto k con la solución

$$e_k = \frac{1}{n^2} \boxed{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{m_{ij}^k - \frac{w_i}{w_j}}{m_{ij}^k} \right)^2 \right\}^{1/2}}$$

$$\downarrow$$

promedio de residuos relativos

con métrica de Frobenius

Errores

- Grado de satisfacción del grupo (de tamaño m)

$$E = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} e_k$$

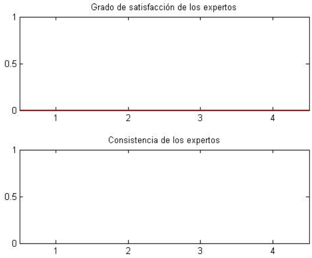
Funciones de MATLAB

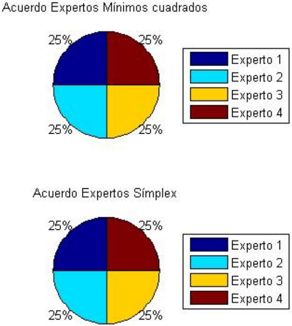
Funciones de MATLAB

- Creación de matrices consistentes
- Creación de matrices de comparación por pares
- Cálculo del vector de pesos mediante mínimos cuadrados
- Cálculo del vector de pesos mediante el símplex
- Cálculo de errores
- Gráficas con los resultados

Ejemplos numéricos

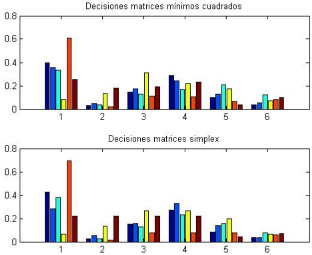
4 expertos y 4 decisiones (caso consistente)

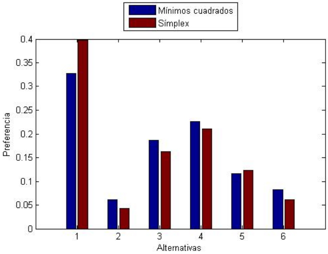




Ejemplos numéricos

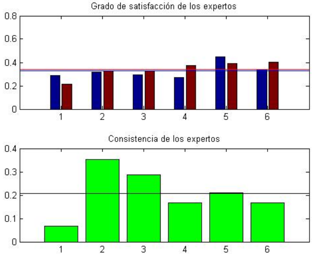
6 expertos y 6 decisiones





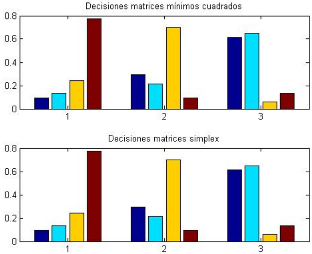
Ejemplos numéricos

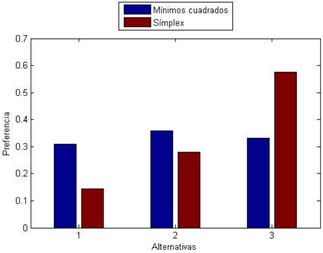
6 expertos y 6 decisiones



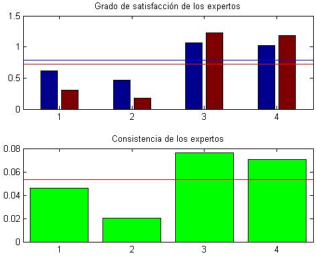
Ejemplos numéricos

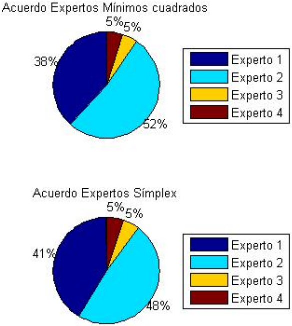
4 expertos y 3 decisiones





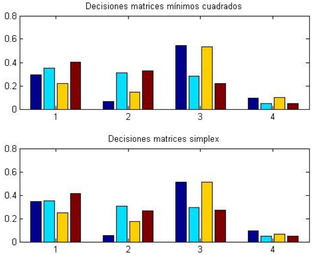
4 expertos y 3 decisiones

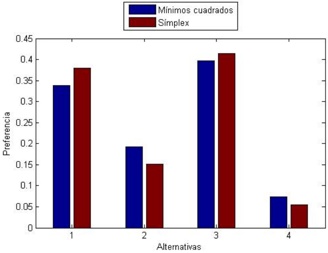




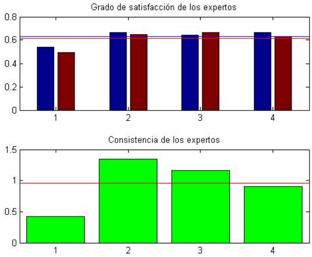
Ejemplos numéricos

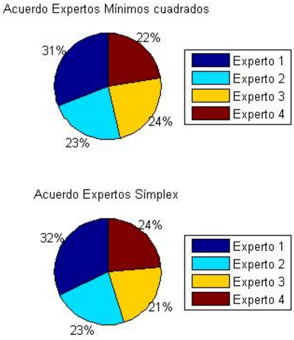
4 expertos y 4 decisiones





4 expertos y 4 decisiones





Referencias

1. Introducción
   - Motivación
   - Elementos del problema
2. Fundamentos teóricos y conceptos
   - PCM
   - Métricas vectoriales
3. Modelo y métodos
   - Formulación del problema
   - Optimización logarítmica
   - Mínimos cuadrados
   - Símplex
4. Errores
5. Funciones de MATLAB
6. Ejemplos numéricos

Referencias

- E. Dopazo, M. Ruiz-Tagle, A parametric GP model dealing with incomplete information for group decision-making, *Applied Mathematics and Computation* 218 (2011) 514-519.
- Crawford, G. and Williams, C., A note on the analysis of subjective judgment matrices,*Journal of Mathematical Psychology* 29 (1985) 387-405.
- Saaty, T.L., Fundamentals of Decision Making, *RSW Publications*, 1994.

Gracias por su atención