Xinran Wang

Seminarpräsentation: Polynomial Time Data Reduction for Dominating Set

Goethe University Frankfurt

s1922410@stud.uni-frankfurt.de

Frankfurt am Main, 28. November 2025

Gliederung

- Motivation: Das Dominating-Set-Problem
- Grundlagen & Definitionen
- Reduktionsregel 1 (Fokus: Einzelner Knoten)
- Reduktionsregel 2 (Fokus: Knotenpaar)
- Eigenschaften + Komplexität
- Zusammenfassung

Das Dominating-Set-Problem

Gegeben sei ein ungerichteter Graph G. Ein k-Dominating-Set ist eine Menge von k Knoten, sodass jeder nicht enthaltene Knoten mindestens einen Nachbarn in dieser Menge hat. Die Dominationszahl $\gamma(G)$ ist die kleinste Größe eines dominierenden Sets. Das Dominating-Set-Problem fragt, ob $\gamma(G) \leq k$ gilt.

Eine große Herausforderung

- Das Problem ist NP-schwer und W[2]-vollständig.
- Das bedeutet: Ein schneller Algorithmus für allgemeine Graphen ist höchst unwahrscheinlich. [2]

Praktische Relevanz

- In mobilen Ad-hoc-Netzwerken (MANETs) wird eine kleine dominierende Menge als „virtuelles Rückgratfür die Kommunikation genutzt.

Die Lösungsstrategie: Datenreduktion

Die zentrale Idee

Anstatt das schwere Problem direkt zu lösen, wenden wir eine Vorverarbeitung (Preprocessing) an.

- **Ziel:** Die Problemgröße durch einfache Reduktionsregeln gezielt verkleinern.
- **Bedingung:** Die Dominationszahl $\gamma(G)$ des Graphen darf dabei nicht verändert werden.
- **Grundlage:** Die Arbeit von Alber, Fellows und Niedermeier, die zwei intuitive Regeln vorschlägt. [3]

Definition (Nachbarschaft und Grad)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zwei Knoten $i, j \in V$ heißen **adjazent** oder **benachbart**, wenn eine Kante $\{i, j\} \in E$ existiert. Die **offene Nachbarschaft** eines Knotens $i \in V$ ist die Menge all seiner Nachbarknoten und wird mit $N(i)$ bezeichnet:

$$N(i) = \{j \in V \mid \{i, j\} \in E\}$$

Die **geschlossene Nachbarschaft** eines Knotens $i \in V$ ist die Menge, die i selbst und alle seine Nachbarn enthält und wird mit $N[i]$ bezeichnet:

$$N[i] = N(i) \cup \{i\}$$

Der **Grad** eines Knotens i, bezeichnet mit $\deg(i)$, ist die Anzahl seiner Nachbarn, also $\deg(i) = |N(i)|$.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Definition (Paar-Nachbarschaft)

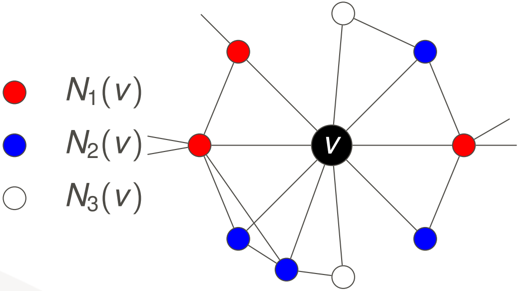
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $i, j \in V$ zwei verschiedene Knoten. Die Menge der *kombinierten Nachbarn* von i und j ist die Menge aller Knoten, die zu mindestens einem der beiden Knoten i oder j adjazent sind. Gemäß der hier verwendeten Quelle wird sie mit $N(i, j)$ bezeichnet:

$$N(i, j) = N(i) \cup N(j)$$

Reduktionsregel 1

Wir partitionieren die Nachbarn $N(v)$ in drei disjunkte Mengen:

$$\begin{aligned}
N_1(v) &:= \{u \in N(v) : N(u) \setminus N[v] \neq \emptyset\},\\
N_2(v) &:= \{u \in N(v) \setminus N_1(v) : N(u) \cap N_1(v) \neq \emptyset\},\\
N_3(v) &:= N(v) \setminus (N_1(v) \cup N_2(v)).
\end{aligned}$$

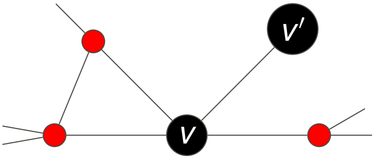


Bedingung

Die Reduktionsregel wird auf einen Knoten $v \in V$ angewendet, sofern dessen Partition $N_3(v)$ nicht leer ist.

Aktion: Transformation zu G'

- Entferne alle Knoten aus $N_2(v)$ und $N_3(v)$.
- Füge einen neuen "Gadget-Knoten" v' und die Kante $\{v, v'\}$ hinzu.



Korrektheit von Regel 1

Lemma

Gegeben sei ein Graph $G(V, E)$, und Graph $G'(V', E')$ der Graph, der durch Anwendung der Reduktionsregel 1 entsteht, dann gilt: $\gamma(G) = \gamma(G')$.

- $N_3(v)$ können nur von v oder von Knoten aus $N_2(v) \cup N_3(v)$ dominiert werden
- Für jedes $w \in N_2(v) \cup N_3(v)$ gilt $N(w) \subseteq N(v)$
- Die Nachbarn der Knoten aus $N_2(v) \cup N_3(v)$ ebenfalls Nachbarn von v sind
- Alle Knoten, die von $N_2(v) \cup N_3(v)$ dominiert werden, auch automatisch von v dominiert
- Mit v eine genau so gut oder bessere Menge konstruieren. v' erzingt, dass v in eine optimale dominante Menge im reduzierten Graphen aufgenommen wird
- Das Löschen von $N_2(v) \cup N_3(v)$ ist eine korrekte Reduktion
- $=> \gamma(G') = \gamma(G)$

Laufzeit von Regel 1

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Planare Graphen

Gesamtlaufzeit: $O(n)$

- Die Analyse der Nachbarschaftsbeziehung der geschlossenen Nachbarschaft $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ => Die relevante Struktur: der von $N[v]$ induzierte Teilgraph, $G[N[v]]$
- Knotenanzahl von $G[N[v]]$ ist $k = |N[v]| = \deg(v) + 1$ => $O(\deg(v))$
- G planar => $G[N[v]]$ auch planar
- Euler-Satz: ein einfacher planarer Graph mit $k \geq 3$ Knoten besitzt höchstens $3k - 6$ Kanten
- Die Anzahl der Kanten in $G[N[v]]$: durch $3(\deg(v) + 1) - 6 = 3\deg(v) - 3$ beschränkt => $O(\deg(v))$
- Die Bestimmung von $N_1(v), N_2(v), N_3(v)$ durch die Untersuchung aller Knoten und Kanten in $G[N[v]]$
- Die Laufzeit für Verarbeitung eines einzelnen Knotens v ebenfalls $O(\deg(v))$
- Die Gesamtelaufzeit: Die Summe der Kosten über alle Knotens des $G[N[v]]$:

$$\sum_{v \in V} O(\deg(v)) = O\left(\sum_{v \in V} \deg(v)\right)$$

- Die Gesamtlaufzeit in $O(n)$ liegt.

Laufzeit von Regel 1

Allgemeine Graphen

Gesamtlaufzeit: $O(n^3)$

- Die Anzahl der Knoten: $k = \deg(v) + 1$
- Die Anzahl der Kanten (Im schlimmsten Fall: ein Clique): $O(k^2) = O(\deg(v)^2)$
- Die Analyse der Nachbarschaftsbeziehungen für einen Knoten v erfordert daher eine Laufzeit von $O(\deg(v)^2)$
- Die Gesamtlaufzeit aller Knoten erfolgt

$$\sum_{v \in V} \mathcal{O}((\deg(v))^2).$$

- Für jeden Knoten $v \in V$ gilt: $\deg(v) < n$, also

$$(\deg(v))^2 < n^2.$$

- Die obere Schranke für einen einzelnen Knoten

$$(\deg(v))^2 = \mathcal{O}(n^2).$$

- In der Gesamtsumme jeden Summanden durch diese obere Schranke ersetzen

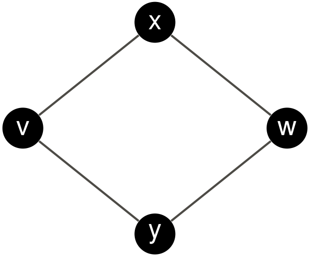
$$\sum_{v \in V} \mathcal{O}((\deg(v))^2) \leq \sum_{v \in V} \mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^3).$$

- Die Gesamtlaufzeit für allgemeine Graphen durch $O(n^3)$ beschränkt

Motivation für Regel 2

Ein Problem für Regel 1

- In diesem Graphen hat kein einziger Knoten eine nicht-leere N_3-Menge.
- Zum Beispiel sind die Nachbarn von v (also x und y) über w mit dem Rest des Graphen verbunden.
- **Regel 1 ist nicht anwendbar.**



Die Lösung

Wir müssen die Struktur von **Knotenpaaren**, hier (v, w), gleichzeitig betrachten.

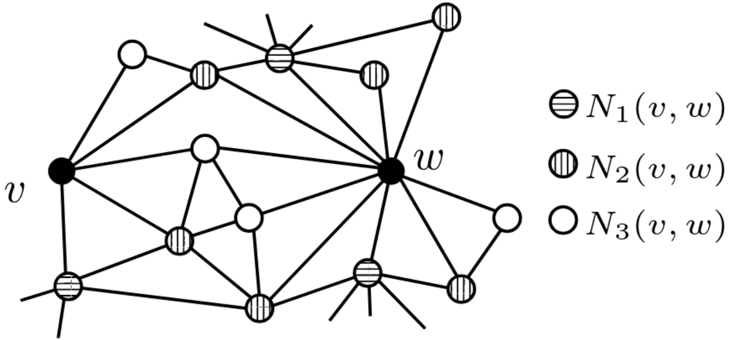
Reductionsregel 2

- Für ein Knotenpaar (v, w) analysieren wir die kombinierte Nachbarschaft $N(v, w) := N(v) \cup N(w)$.
- Diese wird analog zu Regel 1 partitioniert in $N_1(v, w)$, $N_2(v, w)$ und $N_3(v, w)$.

$$
\begin{aligned}
N_1(v, w) &:= \{u \in N(v, w) : N(u) \setminus N[v, w] \neq \emptyset\},\\
N_2(v, w) &:= \{u \in N(v, w) \setminus N_1(v, w) : N(u) \cap N_1(v, w) \neq \emptyset\},\\
N_3(v, w) &:= N(v, w) \setminus (N_1(v, w) \cup N_2(v, w)).
\end{aligned}
$$

Reduktionsregl 2

Regel 2 wird angewendet, wenn $N_3(v, w)$ nicht-leer ist und keine einfache Einzelpunktlösung existiert.
Folgendes Beispiel visualisiert die Partitionierung:



Reductionsregel 2: Fall 1 und Fall 2

Fall 1 Wenn $N_3(v, w)$ von einem einzelnen Knoten aus $\{v, w\}$ dominiert werden kann:

(1.1) Wenn $N_3(v, w) \subseteq N(v)$ und zugleich $N_3(v, w) \subseteq N(w)$ gilt:

- Entferne $N_3(v, w)$ und $N_2(v, w) \cap N(v) \cap N(w)$ aus G.
- Füge zwei neue Knoten z, z' und die Kanten $\{v, z\}, \{w, z\}, \{v, z'\}, \{w, z'\}$ zu G hinzu.

(1.2) Wenn $N_3(v, w) \subseteq N(v)$, aber nicht $N_3(v, w) \subseteq N(w)$ gilt:

- Entferne $N_3(v, w)$ und $N_2(v, w) \cap N(v)$ aus G.
- Füge einen neuen Knoten v' und die Kante $\{v, v'\}$ zu G hinzu.

(1.3) Wenn $N_3(v, w) \subseteq N(w)$, aber nicht $N_3(v, w) \subseteq N(v)$ gilt:

- Entferne $N_3(v, w)$ und $N_2(v, w) \cap N(w)$ aus G.
- Füge einen neuen Knoten w' und die Kante $\{w, w'\}$ zu G hinzu.

Fall 2 Wenn $N_3(v, w)$ nicht von einem einzelnen Knoten aus $\{v, w\}$ dominiert werden kann:

- Entferne $N_3(v, w)$ und $N_2(v, w)$ aus G.
- Füge zwei neue Knoten v', w' und die Kanten $\{v, v'\}, \{w, w'\}$ zu G hinzu.

Reductionsregel 2: Korrektheit beweisen

Die zentrale Aufgaben: $N_3(v, w)$ muss dominiert werden
Da $N_3(v, w)$ keine Verbindung nach außen, kann man nur aus einer begrenzten lokalen Menge M auswählen.

$$M := \{v, w\} \cup N_2(v, w) \cup N_3(v, w).$$

Lemma

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $G' = (V', E')$ der Graph, der nach der Anwendung von Regel 2 auf G resultiert. Dann gilt $\gamma(G) = \gamma(G')$.

Verschiedene Fälle analysieren

(1.1)

- Alle Knoten aus der Menge $N_3(v, w)$ sind sowohl Nachbarn von v als auch von w
- Optimal: v oder w auswählen, um gesamte Menge zu dominieren, da für alle Knotenpaare $x, y \in M$ gilt: $N(x, y) \subseteq N(v, w)$
- **Das Problem hier:** welche der beiden gewähl werden soll?
- **Lösung mit Gadget-Konstruktion:** Das Hinzufügen von zwei neue Knoten z, z' und die Kanten $\{v, z\}, \{w, z\}, \{v, z'\}, \{w, z'\}$ zu G $=>$ eine **Oder** modellieren
- Die Sicherheit vom Löschen von Knoten $N_3(v, w)$ und $N_2(v, w) \cap N(v) \cap N(w)$ ist gewährleistet, da die schon von v oder w dominiert
- Die Größe der dominierenden Menge ändert sich dabei nicht.

Verschiedene Fälle analysieren

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

(1.2)

- v dominiert die Menge $N_3(v,w)$, aber w tut dies nicht
- Optimal: v zu wählen, da die Auswahl von v (möglicherweise zusammen mit w) mindestens so viele Knoten dominiert wie jede beliebige andere Kombination von zwei Knoten x, y aus der lokalen Menge $M \setminus (\{v\} \cap (N_2(v,w) \cap N(w)))$
- Das Hinzufügen von v' und die Kante $\{v, v'\}$ stellt sicher, dass in der optimalen Lösung v enthalten sein muss
- w ist eventuell notwendig
- Wie im Fall (1.1): Das Löschen von $N_3(v,w)$ und $N_2(v,w) \cap N(v)$ aus G ist sicher, da die schon von v dominiert wurden

(1.3)

Symmetrische Analyse von Fall (1.2)

Verschiedene Fälle analysieren

(2)

Die Menge $N_3(v, w)$ kann nicht von v oder w individuell dominiert werden $=>$ Hier werden 2 Knoten gebraucht

Für alle Knotenpaare $x, y \in M$ gilt: $N(x, y) \subseteq N(v, w)$

Die Kanten $\{v, v'\}$ und $\{w, w'\}$ erzwingt die Aufnahme beider Knoten v und w in die dominierende Menge

Das Löschen von $N_3(v, w)$ und $N_2(v, w)$ ist sicher, da alle Knoten bereits von v und w dominiert werden

Die Größe von der dominierenden Menge ändert dabei nicht

Reduktionsregel 2: Laufzeit analysieren

Die Anwendung von Regel 2 auf einen Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten erfordert eine Laufzeit von $O(n^2)$, falls G planar ist, und eine Laufzeit von $O(n^4)$ im allgemeinen Fall.

Planare Graphen

- Die Analyse der Nachbarschaftsbeziehungen innerhalb der kombinierten geschlossenen Nachbarschaft $N[v, w] = N[v] \cup N[w]$
- Die relevante Struktur ist der von $N[v, w]$ induzierte Teilgraph $G[N[v, w]]$ (auch planar)
- **Knotenanzahl:** $k = |N[v, w]| \leq |N[v]| + |N[w]| = (\deg(v) + 1) + (\deg(w) + 1) => $ In $O(\deg(v) + \deg(w))$ liegen
- **Kantenanzahl:** auch $O(\deg(v) + \deg(w))$
- Die Laufzeit für die Verarbeitung eines **einzelnen Paares** (v, w) ebenfalls $O(\deg(v) + \deg(w))$
- Die Gesamtlaufzeit summiert die Kosten aller $O(n^2)$ Knotenpaare:

$$\sum_{v,w \in V} O(\deg(v) + \deg(w)) = O\left(\sum_{v \in V}\left(\sum_{w \in V} \deg(v) + \sum_{w \in V} \deg(w)\right)\right)$$

- Die innere Summe $\sum_{w \in V} \deg(w)$ ist nach dem Handschlaglemma $2|E|$ $=>$ liegt in $O(n)$
- Die Summe $\sum_{w \in V} \deg(v)$ entspricht $n \cdot \deg(v)$

$$O\left(\sum_{v \in V}(n \cdot \deg(v) + O(n))\right) = O\left(n \sum_{v \in V} \deg(v) + n \cdot O(n)\right) = O(n \cdot O(n) + O(n^2)) = O(n^2)$$

- Somit liegt die Gesamtlaufzeit für planare Graphen in $O(n^2)$

Reduktionsregel 2: Laufzeit analysieren

Allgemeine Graphen

- Die Anzahl der Knoten ist weiterhin $k \in O(\deg(v) + \deg(w))$
- Im schlimmsten Fall kann die Anzahl der Kanten in diesem Teilgraphen in der Größenordnung von $O(k^2) = O((\deg(v) + \deg(w))^2)$ liegen
- Die Analyse für ein Paar (v, w) erfordert eine Laufzeit von $O((\deg(v) + \deg(w))^2)$
- Gesamtlaufzeit:

$$\sum_{v,w \in V} O((\deg(v) + \deg(w))^2)$$

- Für jeden Knoten $\deg(v) < n$ gilt $\Rightarrow O((n+n)^2) = O(n^2)$

$$\sum_{v,w \in V} O(n^2) = O(n^2) \cdot O(n^2) = O(n^4)$$

- Daraus folgt, dass die Gesamtlaufzeit im allgemeinen Fall in $O(n^4)$ liegt

Eigenschaften + Komplexität

- **Definition 10 – Reduzierter Graph:** Ein Graph $G = (V, E)$ ist *reduziert*, wenn die Reduktionsregeln 1 und 2 nicht mehr anwendbar sind.
- **Strukturelle Eigenschaften reduzierter Graphen:**
  - Für jeden Knoten $v \in V$ gilt $N_3(v) = \emptyset$ (außer ggf. einem durch frühere Regelanwendung entstandenen Gadget-Knoten mit Grad 1).
  - Für jedes Knotenpaar (v, w) existiert ein Knoten in $N_2(v, w) \cup N_3(v, w)$, der die gesamte Menge $N_3(v, w)$ dominiert.
  - Andernfalls wäre Regel 2 noch anwendbar.
- **Reduktionsprozess:**
  - Jede Regelanwendung entfernt Knoten, der Graph wird kleiner.
  - Maximal $O(n)$ erfolgreiche Anwendungen (da endliche Knotenanzahl).
  - Der Prozess terminiert garantiert.
- **Theorem 11 – Komplexität:**
  - Jeder Graph G kann in einen reduzierten Graphen G' mit gleicher Dominationszahl ($\gamma(G) = \gamma(G')$) transformiert werden.
  - **Laufzeit:**
    - $O(n^3)$ für *planare Graphen*
    - $O(n^5)$ für *allgemeine Graphen*

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Zusammenfassung

- Wir haben zwei einfache, auf lokalen Strukturen basierende Regeln zur Datenreduktion für Dominating Set kennengelernt.
- Diese Regeln verkleinern die Problemgröße in polynomieller Zeit, ohne die Lösung zu verändern.

Praxisrelevanz und Alternativen

- Die vorgestellten Regeln sind einfach umzusetzen und in der Praxis sehr effektiv.
- Es gibt theoretisch schnellere Algorithmen (z.B. über Baumzerlegung) [1], diese sind aber aufgrund hoher Konstanten und Komplexität oft weniger praxistauglich.

References I

[1] H. L. Bodlaender. Personal communication. 2002.

[2] Serge Gaspers. 8. parameterized intractability: the w-hierarchy comp6741: Parameterized and exact computation. 2015.

[3] Rolf Niedermeier Jochen Alber, Michael R. Felloes. Polynomial time data reduction for dominating set. 2002.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Fragen?