数字信号处理

周治国

2023.10

第四章 快速傅里叶变换

§ 4-4 按频率抽取(DIF)的FFT算法 (Sande-Tukey算法)

一、算法原理

$$\forall x(n), \quad 0 \le n \le N-1, \quad N = 2^{\nu}$$

$$\updownarrow$$

$$X(k) = DFT[x(n)]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

将$x(n)$，$0 \le n \le N\text{-}1$ 按顺序分为前后两半

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(\frac{N}{2}+n\right) W_N^{k(n+\frac{N}{2})} \qquad (4\text{-}23)$$

$k=0,1,\ldots,N\text{-}1$

注意：$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \ne W_{N/2}$

∴两个Σ和式并不是 N/2-DFT

不过，由于 $W_N^{k\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k\frac{N}{2}} = e^{-j\pi k} = (-1)^k$

所以，式(4-23)可改写为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(\frac{N}{2}+n)W_N^{k(\frac{N}{2}+n)} \qquad (4\text{-}23)$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + (-1)^k x(\frac{N}{2}+n)]W_N^{kn}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1 \qquad (4\text{-}24)$$

$$\because (-1)^k \begin{cases} 1 & k\text{为偶数} \\ -1 & k\text{为奇数} \end{cases}$$

$\therefore$可按k的奇偶取值将$X(k)$分为两部分：

$$X(2r)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[x(n)+x(\frac{N}{2}+n)]W_N^{2rn}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[x(n)+x(\frac{N}{2}+n)]W_{N/2}^{rn} \qquad r=0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1 \qquad (4\text{-}25)$$

$$X(2r+1)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[x(n)-x(\frac{N}{2}+n)]W_N^{(2r+1)n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[x(n)-x(\frac{N}{2}+n)]W_N^{n}\cdot W_N^{2rn}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}[x(n)-x(\frac{N}{2}+n)]W_N^{n}\cdot W_{N/2}^{rn} \qquad r=0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1 \qquad (4\text{-}26)$$

显然，若令

$$x_1(n) \overset{\Delta}{=} [x(n) + x(n+\frac{N}{2})], \qquad n = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

$$X_1(k) \overset{\Delta}{=} X(2k), \qquad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

$$x_2(n) \overset{\Delta}{=} [x(n) - x(n+\frac{N}{2})]W_N^n, \qquad n = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

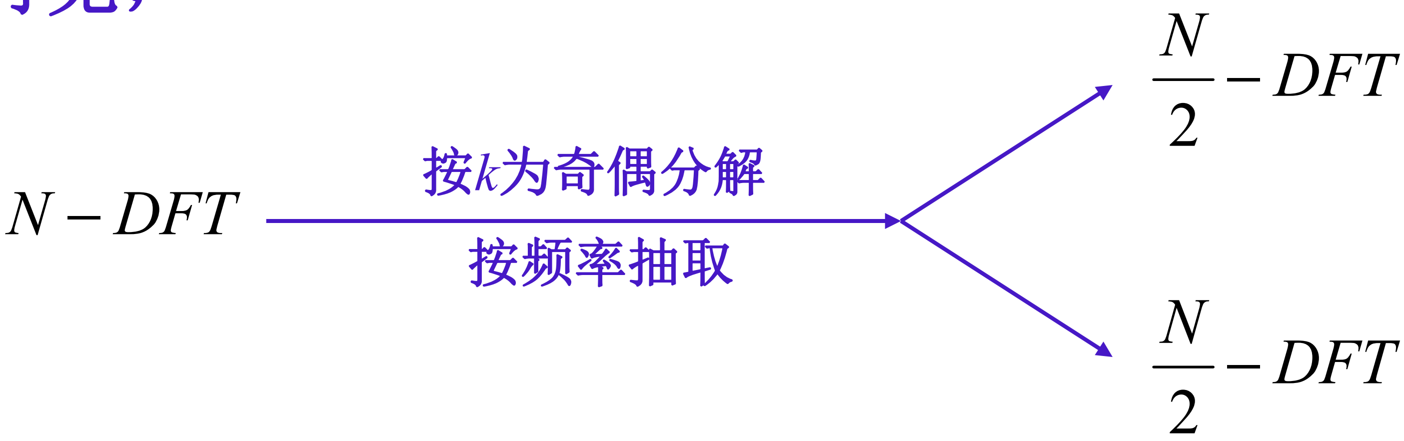
$$X_2(k) \overset{\Delta}{=} X(2k+1), \qquad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

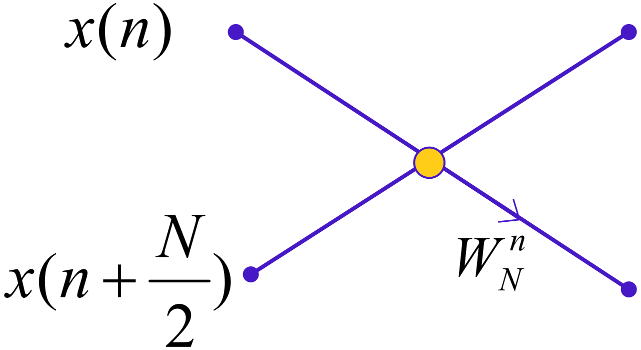
则有（式(4-25)(4-26)分别变为）

$$X_1(k) = X(2k) = DFT[x_1(n)] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) W_{N/2}^{kn}, \quad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

$$X_2(k) = X(2k+1) = DFT[x_2(n)] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n) W_{N/2}^{kn}, \quad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

可见，





$$x_1(n)\overset{\Delta}{=}x(n)+x(n+\frac{N}{2})$$

$$n=0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

$$x_2(n)\overset{\Delta}{=}[x(n)-x(n+\frac{N}{2})]W_N^n$$

例：N=8，DIF的分解过程（见图4-16）[P.137]

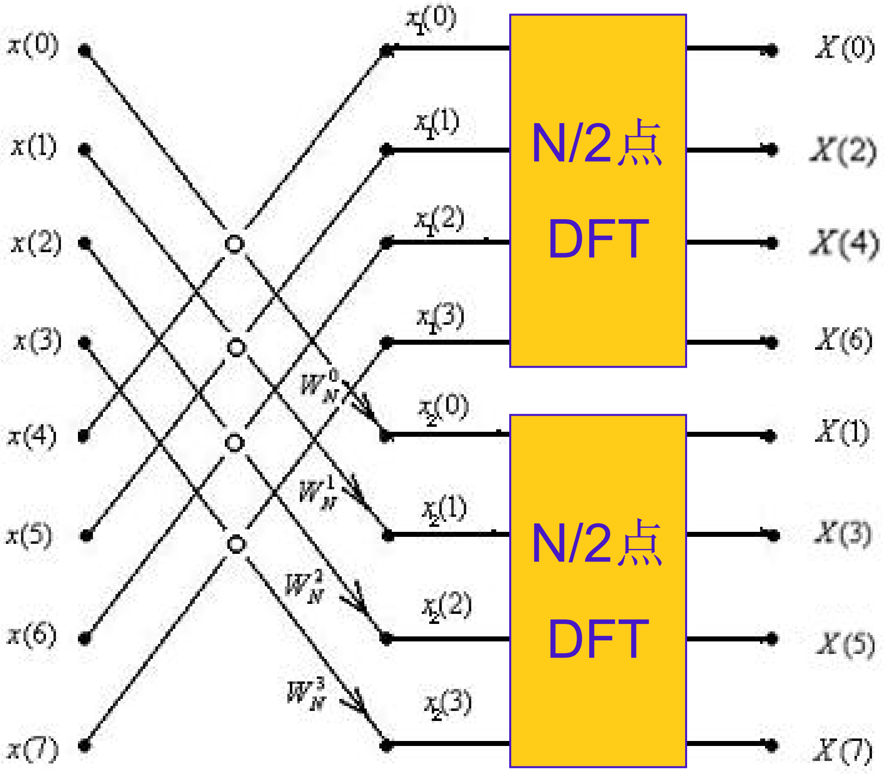
$\because N = 2^{\nu}，\dfrac{N}{2} = 2^{\nu-1}$仍为偶数$(\nu \geq 3)$

$\therefore$上述分解过程可继续下去，

直至分解v次/步后变成求 N/2 个 2-DFT 为止。

$\longrightarrow$ DIF-FFT算法

（显然与DIT-FFT算法的分解类似）

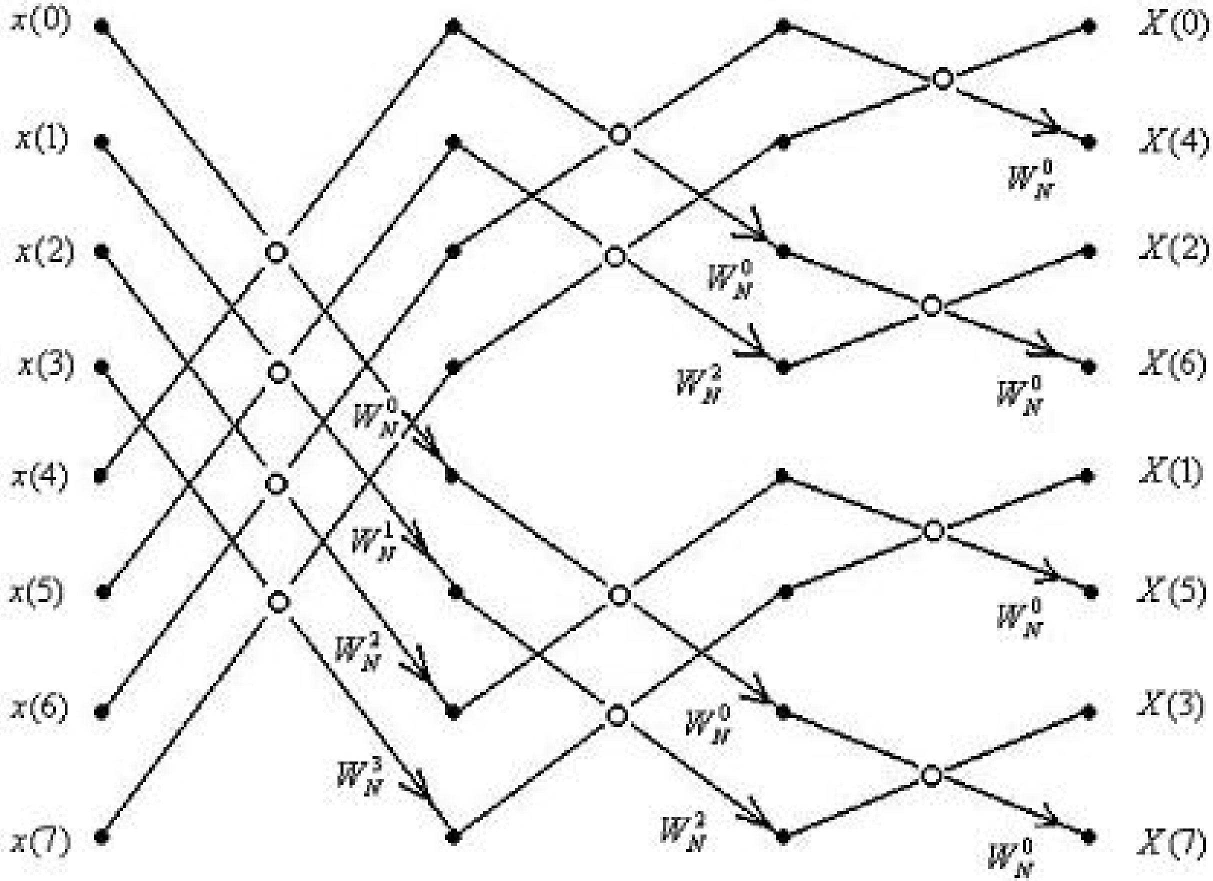


例：N=8，DIF-FFT算法流图　　[图4-18，P.138]

注意：① $W_N^n,\quad n=0,1,\dots,N/2-1$ $\qquad n=0,1,\dots,N/2-1$

$W_{N/2}^n,\quad n=0,1,\dots,N/4-1 \longrightarrow W_N^n,\ n=0,1,\dots,N/2-2$

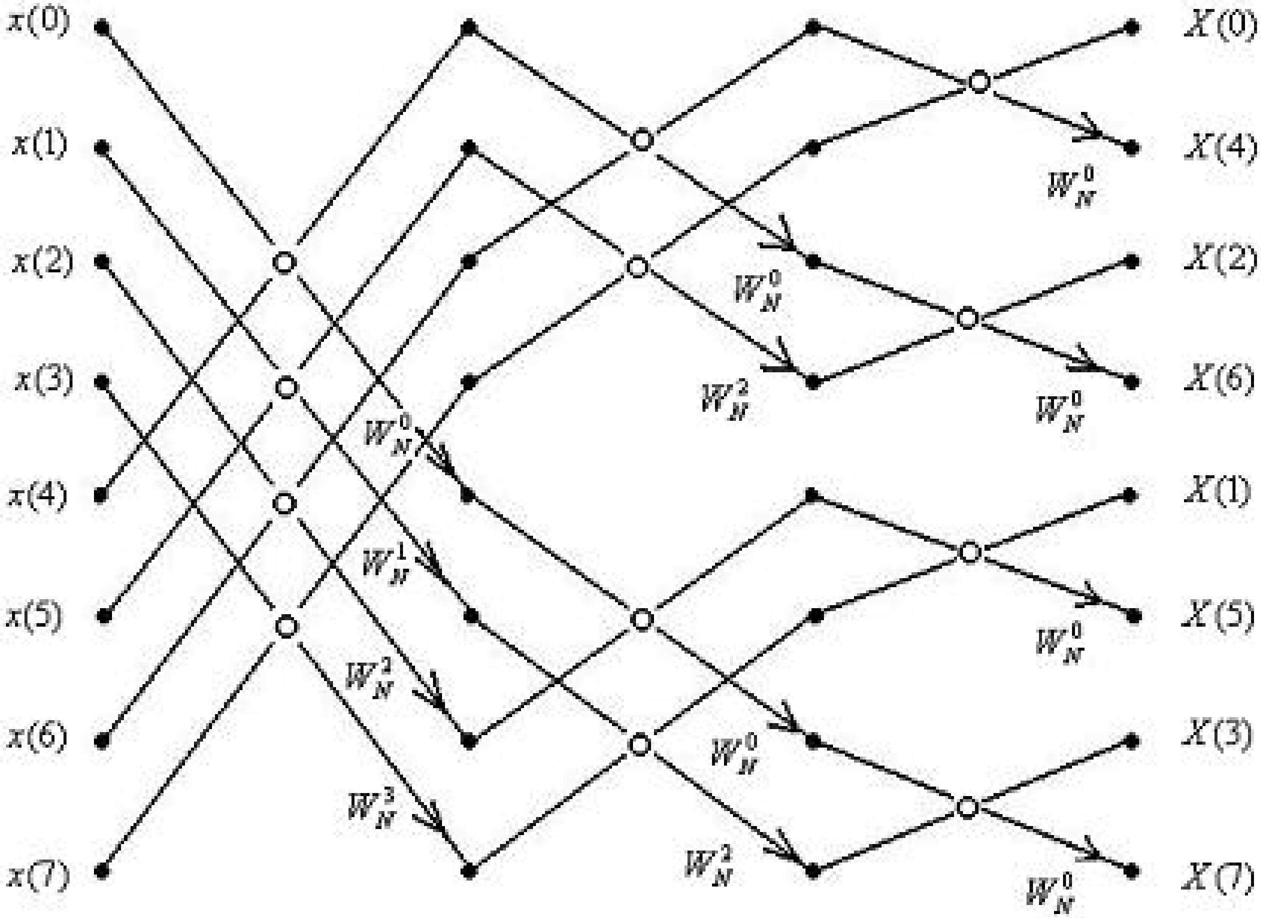
$W_{N/4}^n,\quad n=0,1,\dots,N/8-1$ $\qquad n=0,1,\dots,N/2-4$

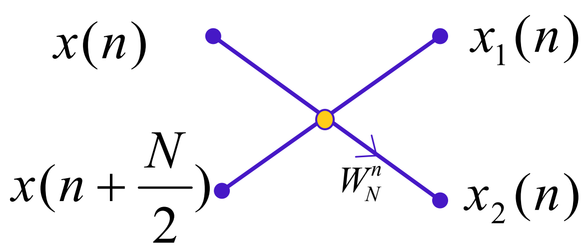


② $W_N^0(=1)$, 依然保留

（为了算法结构上的统一）

二、DIF-FFT与DIT-FFT的比较

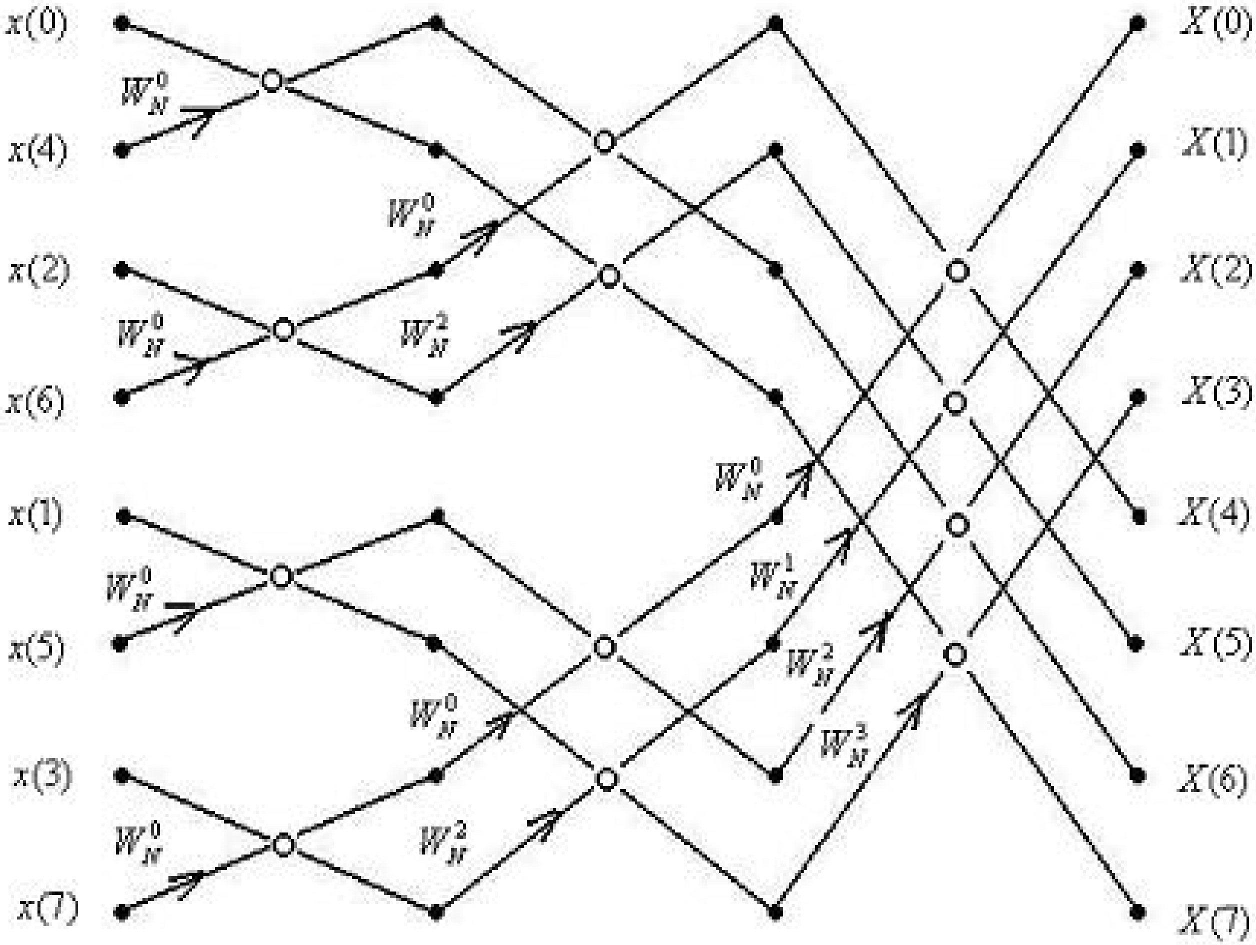


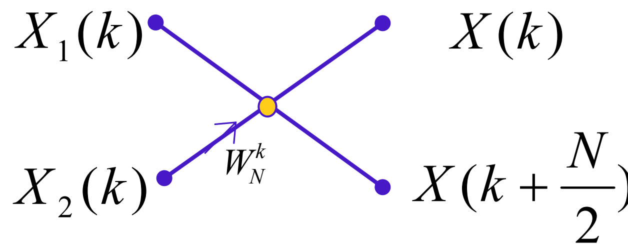


$$x_1(n) \overset{\Delta}{=} x(n) + x(n+\frac{N}{2})$$

$$x_2(n) \overset{\Delta}{=} [x(n) - x(n+\frac{N}{2})]W_N^n$$

图4-18 N=8,DIF-FFT算法流图

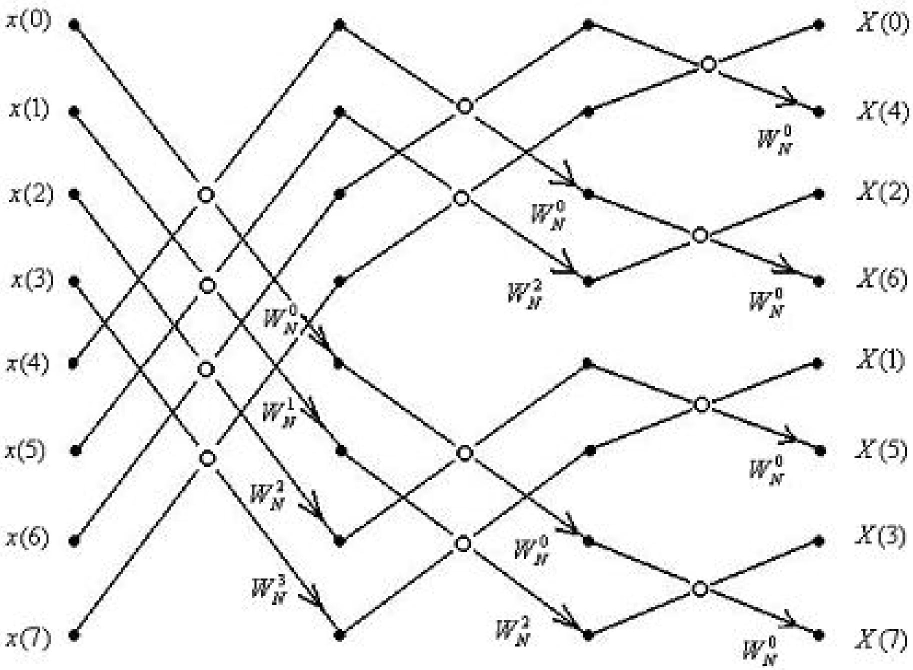




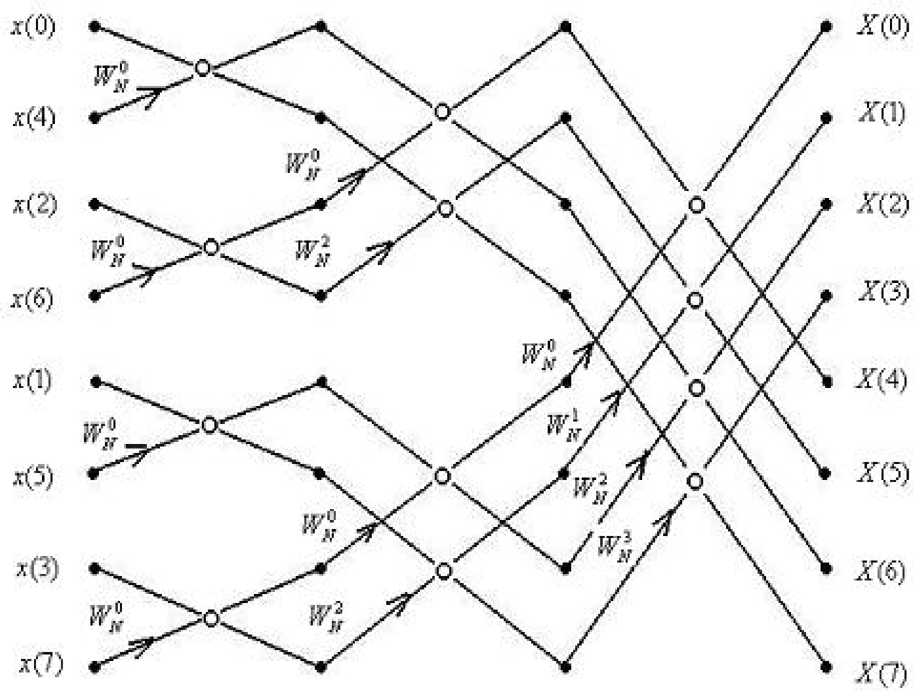
$$X(k) = X_1(k) + W_N^n X_2(k)$$

$$X(k + \frac{N}{2}) = X_1(k) - W_N^n X_2(k)$$

图4-5 N=8,DIT-FFT算法流图



N=8,DIF-FFT



N=8,DIT-FFT

1. 二者的区别

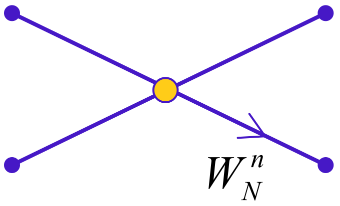
(1) 输入与输出

DIF：顺序　　　　反序

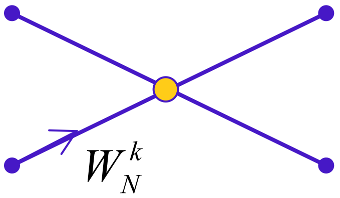
DIT：反序　　　　顺序

(2) 蝶形运算

DIF：先加减，后相乘



DIT：先相乘，后加减



2. 二者的相似之处

(1)分解过程

DIF：v列　　每列N/2个蝶形运算　　$m_F = \frac{N}{2}\log_2^N$，$a_F = \log_2^N$

DIT：v列　　同上　　同上

(2)原位运算（∵所有运算均由蝶形运算构成）

3. 二者关系

DIF-FFT　　转置　　DIT-FFT

三、逆DFT的快速算法(IFFT)

1\. 算法一：

$$IDFT: \ x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}, \quad n=0,1,\ldots,N-1$$

$$DFT: \ X(k)=\sum_{k=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}, \quad k=0,1,\ldots,N-1$$

$$\downarrow$$

$$FFT$$

比较IDFT与DFT，可见 FFT $\xrightarrow[x(n)\to X(k)]{W_N \to \frac{1}{2}W_N^{-1}}$ IFFT

$\longrightarrow$

(1) DIT-FFT $\xrightarrow[x(n)\to X(k)]{W_N \to \frac{1}{2}W_N^{-1}}$ DIF-IFFT

(2) DIF-FFT $\xrightarrow[x(n)\to X(k)]{W_N \to \frac{1}{2}W_N^{-1}}$ DIT-IFFT

例：N=8，DIT-IFFT算法流图[图4-19，P.138]

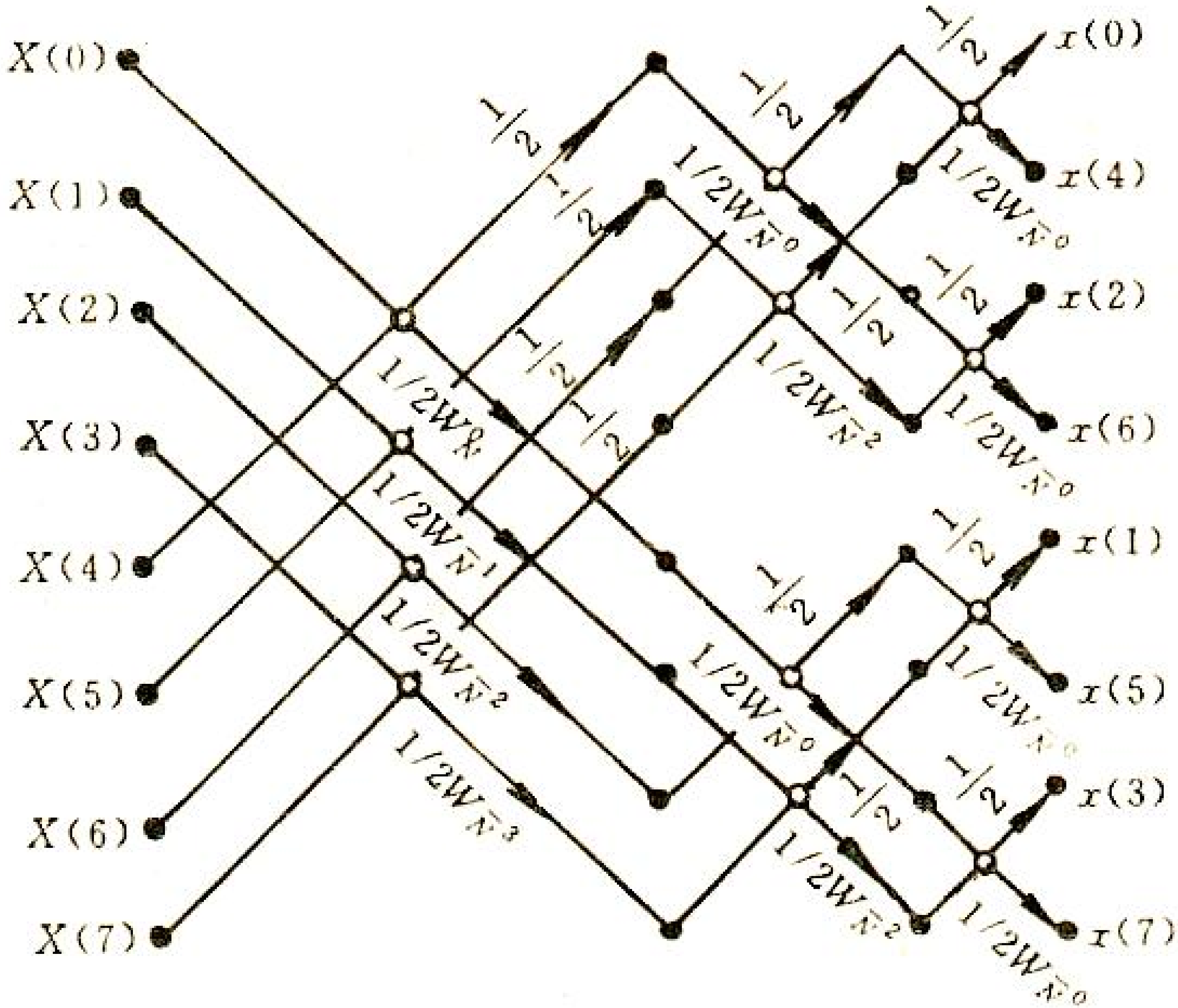


图 4－19　N＝8 的时间抽取 IFFT 流图

例：N=8，DIT-IFFT算法流图[图4-19，P.138]

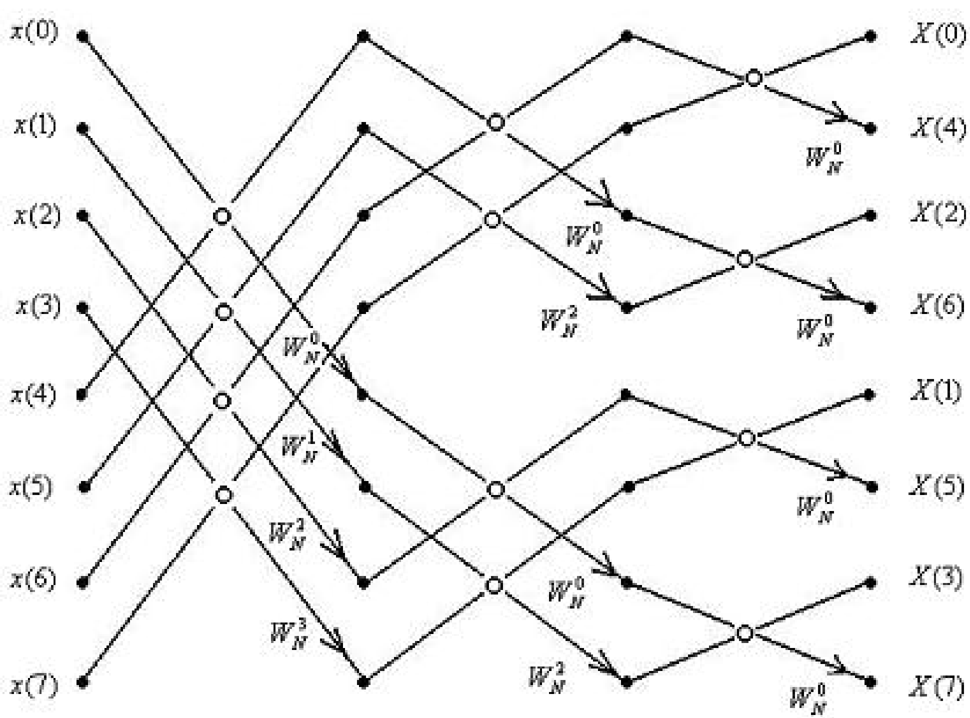


图4-18 N=8,DIF-FFT算法流图

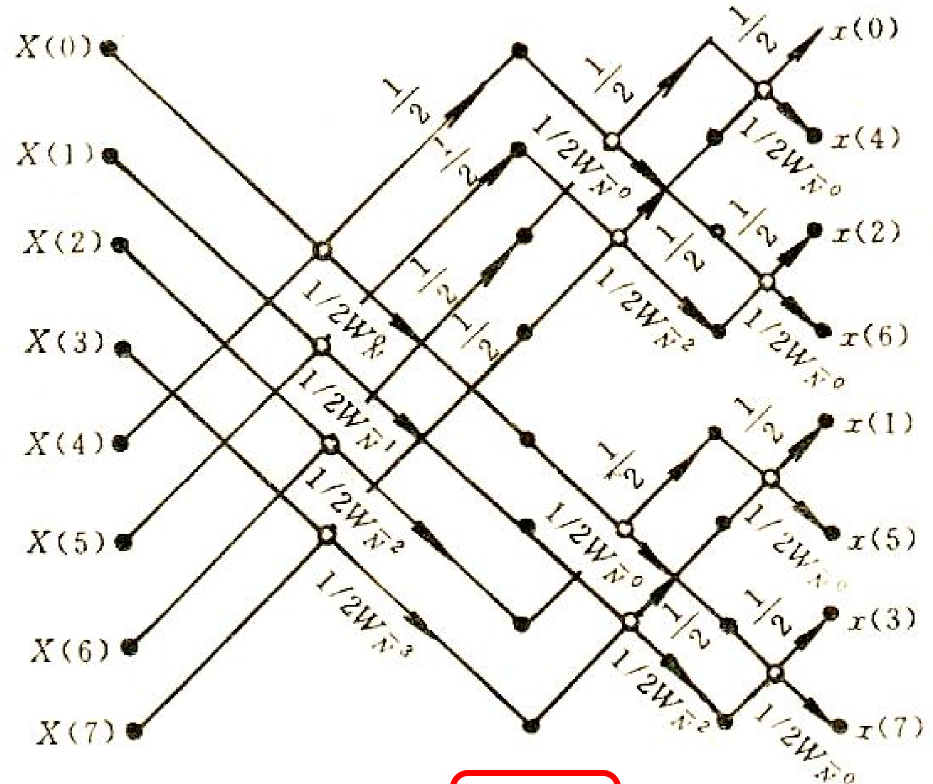


图 4－19 N＝8 的时间抽取 IFFT 流图

解释：1.相同的流图可以采用同一个计算机算法

2.按时间抽取是“抽x(n)”和按频率抽取是“抽X(k)”

3.DIF-FFT和DIT-IFFT流图结构一样

4.DIT-FFT和DIF-IFFT流图结构一样

例：N=8，DIT-IFFT算法流图[图4-19，P.138]

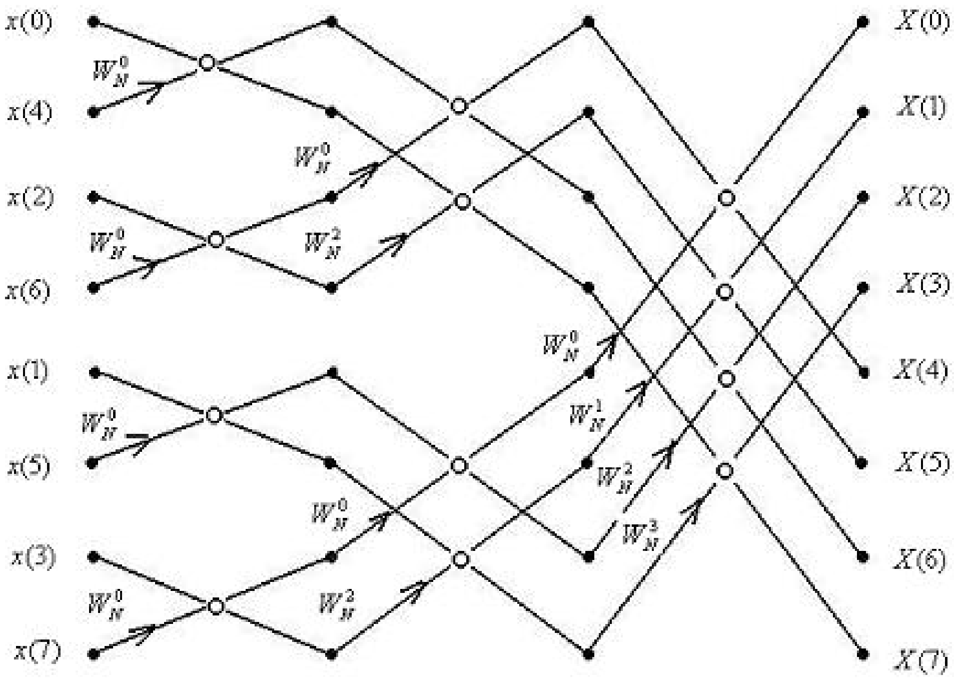


图4-5 N=8时的按时间抽取FFT运算流图

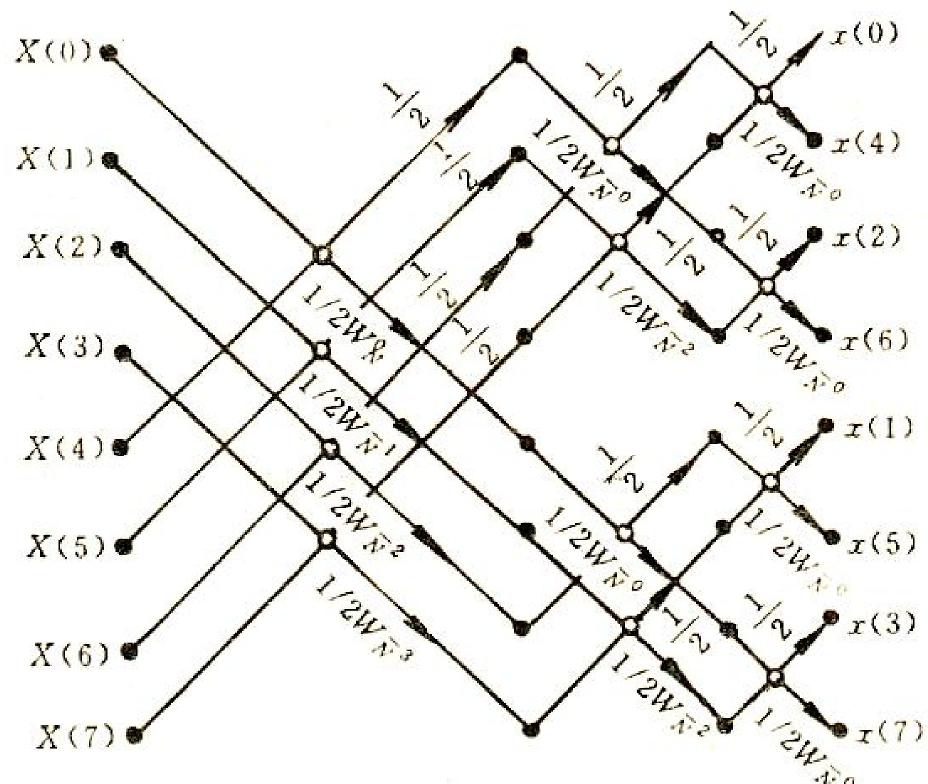


图 4－19 $N=8$ 的时间抽取 IFFT 流图

2. 算法二

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)W_N^{kn}\right]^*=\frac{1}{N}\left\{DFT[X^*(k)]\right\}^*$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{N}\left\{FFT[X^*(k)]\right\}^*$$

优点：

四、DIF-FFT算法的若干变体

$\because$ DIF-FFT $\overset{\text{转置}}{\rightleftarrows}$ DIT-FFT

$\therefore$ 变体 $\overset{\text{转置}}{\longleftrightarrow}$ 变体

往年真题：

试导出按频率抽取基-2 FFT算法的蝶形运算公式，并画出相应的N=16时的算法流图。（要求输入正序，输出反序，原位运算）

N=16 基-2 按频率抽取FFT流图

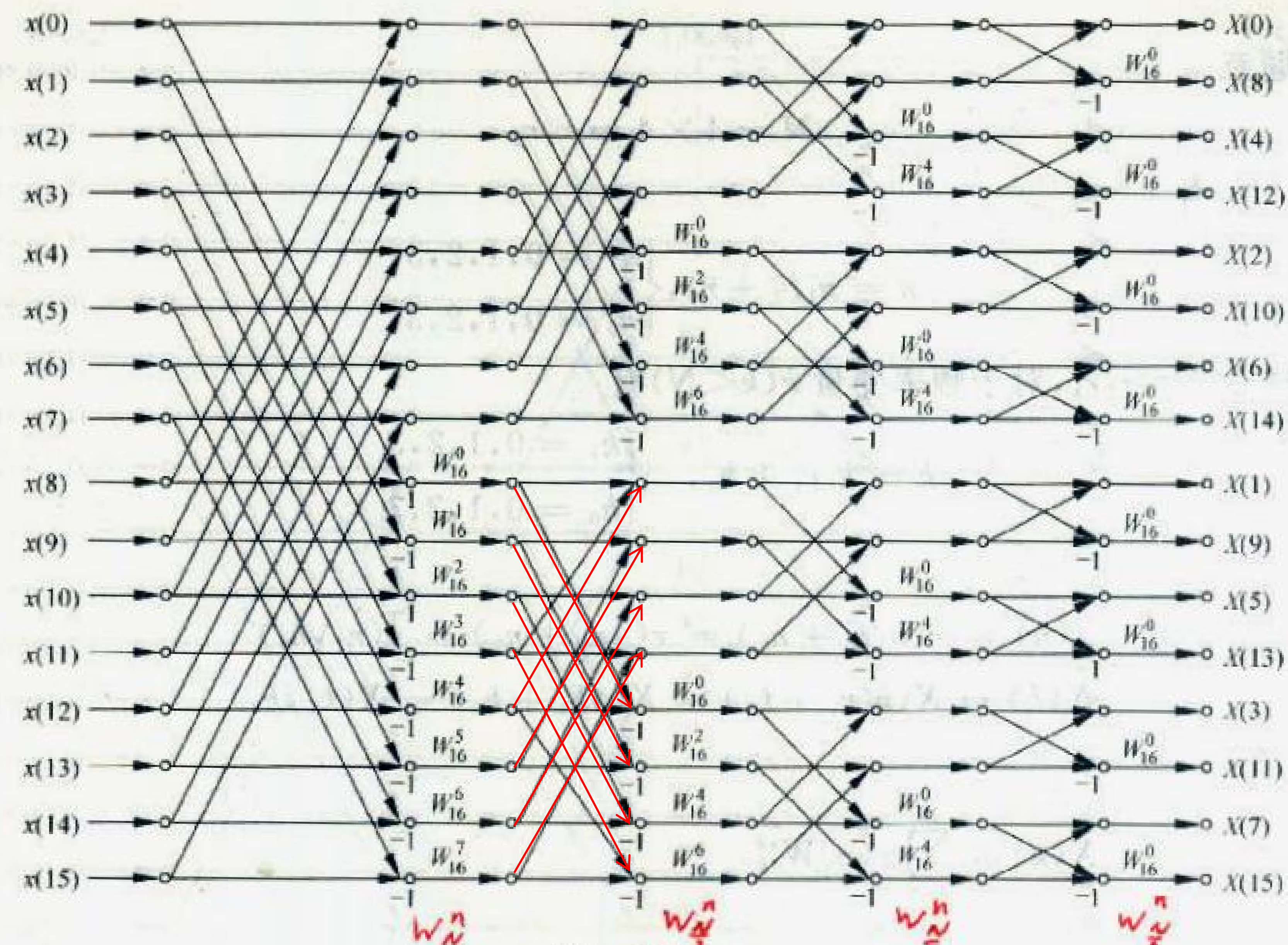


图　P4-3(b)