数字信号处理

周治国

2023.9

第三章
离散傅里叶变换

§ 3-3 离散傅里叶级数(DFS)

一、DFS变换的推导

由DTFT推导DFT

由DTFT $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\because X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)}) \qquad \therefore 令\tilde{X}(e^{j\omega}) \stackrel{\triangle}{=} X(e^{j\omega})$$

假定 $x(n) = 0,\quad$ 当$n < 0,\quad n > N-1 \quad$ (有限长)

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\tilde{X}(k) \stackrel{\triangle}{=} X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}(k+N) \quad (3-11)$$

$$0 \le k \le N-1$$

采样，周期性离散频率函数　　　　时域序列周期化

§3-3 离散傅里叶级数(DFS)

由 $\tilde{x}(n+N)=\tilde{x}(n), \quad N\sim$周期

$$\tilde{x}(n)=x(n), \quad 0\le n\le N-1$$

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad （3-11）$$

可见 $\tilde{x}(n)\longrightarrow\tilde{X}(k)$

问题 $\tilde{X}(k)\xrightarrow{?}\tilde{x}(n)$

令 $\tilde{x}'(n)\stackrel{\triangle}{=}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

代入（3-11）式

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m)\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}$$

§3-3 离散傅里叶级数(DFS)

$$\tilde{x}'(n) \overset{\triangle}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m)\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}$$

可以证明

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \begin{cases} 1 & n = m+Nl \\ 0 & n \neq m+Nl \end{cases}$$

正交定理

$$\therefore \tilde{x}'(n) \overset{\triangle}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\left[\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m)\right]_{n=m} = \tilde{x}(n)$$

$$\therefore \tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad \text{（3-13）}$$

$$\tilde{X}(k) \longrightarrow \tilde{x}(n)$$

§3-3 离散傅里叶级数(DFS)

结合（3-11）、（3-13）式，

$$\widetilde{x}(n) \xleftrightarrow{DFS} \widetilde{X}(k)$$

为方便起见，令

$$W_N \overset{\triangle}{=} e^{-j\frac{2\pi}{N}} \qquad \longrightarrow W_N\text{因子}$$

DFS变换：

$$\widetilde{X}(k) \overset{\triangle}{=} DFS\left[\widetilde{x}(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \widetilde{x}(n) W_N^{kn}, \quad \forall k$$

$$\widetilde{x}(n) \overset{\triangle}{=} IDFS\left[\widetilde{X}(k)\right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{X}(k) W_N^{-kn}, \quad \forall n$$

§3-3 离散傅里叶级数(DFS)

DFS例题：习题集P37　1

已知$\tilde{x}(n)=\{14\quad 12\quad 10\quad 8\quad 6\quad 10\}$，求DFS

解：$\tilde{X}(k)=DFS\left[\tilde{x}(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn},\quad \forall k$

$$=\sum_{n=0}^{5}\tilde{x}(n)W_6^{kn}=\sum_{n=0}^{5}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{6}nk}$$

$\tilde{X}(0)=60$　　$\tilde{X}(3)=0$

$\tilde{X}(1)=9-j3\sqrt{3}$　　$\tilde{X}(4)=3-j\sqrt{3}$

$\tilde{X}(2)=3+j\sqrt{3}$　　$\tilde{X}(5)=9+j3\sqrt{3}$

§3-3 离散傅里叶级数(DFS)

二、DFS的主要性质

1.线性特性

迭加原理

$$\tilde{x}_3(n) = a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)$$

$$\tilde{X}_3(k) = DFS\left[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)\right] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$$

2.移位特性

（1）时域移位

若$\tilde{x}(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}(k)$, 则$\tilde{x}(n-m) \xleftrightarrow{DFS} W_N^{mk}\tilde{X}(k)$

（2）频域移位

若$\tilde{X}(k) \xleftrightarrow{IDFS} \tilde{x}(n)$, 则$\tilde{X}(k-l) \xleftrightarrow{IDFS} W_N^{-nl}\tilde{x}(n)$

§3-3 离散傅里叶级数(DFS)

3.周期卷积特性

（1）时域

$$\forall \tilde{x}_1(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_1(k), \quad \tilde{x}_2(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_2(k)$$

$$\tilde{X}(k) = \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$$

IDFS ↕

$$x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m)\tilde{x}_1(n-m)$$

$$= \tilde{x}_1(n) \tilde{\circledast} \tilde{x}_2(n) \rightarrow \text{周期卷积}$$

比较：

$* \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty}$

$\tilde{\circledast} \quad \sum_{m=0}^{N-1}$ 仅一个周期

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n+N)$$

时域周期卷积$\longleftrightarrow$频域相乘

§3-3 离散傅里叶级数(DFS)

3.周期卷积特性

（2）频域

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)\xleftrightarrow{DFS}\tilde{X}(k)=\frac{1}{N}\tilde{X}_1(k)\ \widetilde{\otimes}\tilde{X}_2(k)$$

时域相乘$\longleftrightarrow$频域周期卷积

§3-3 离散傅里叶级数(DFS)

周期卷积计算例题 课本P75

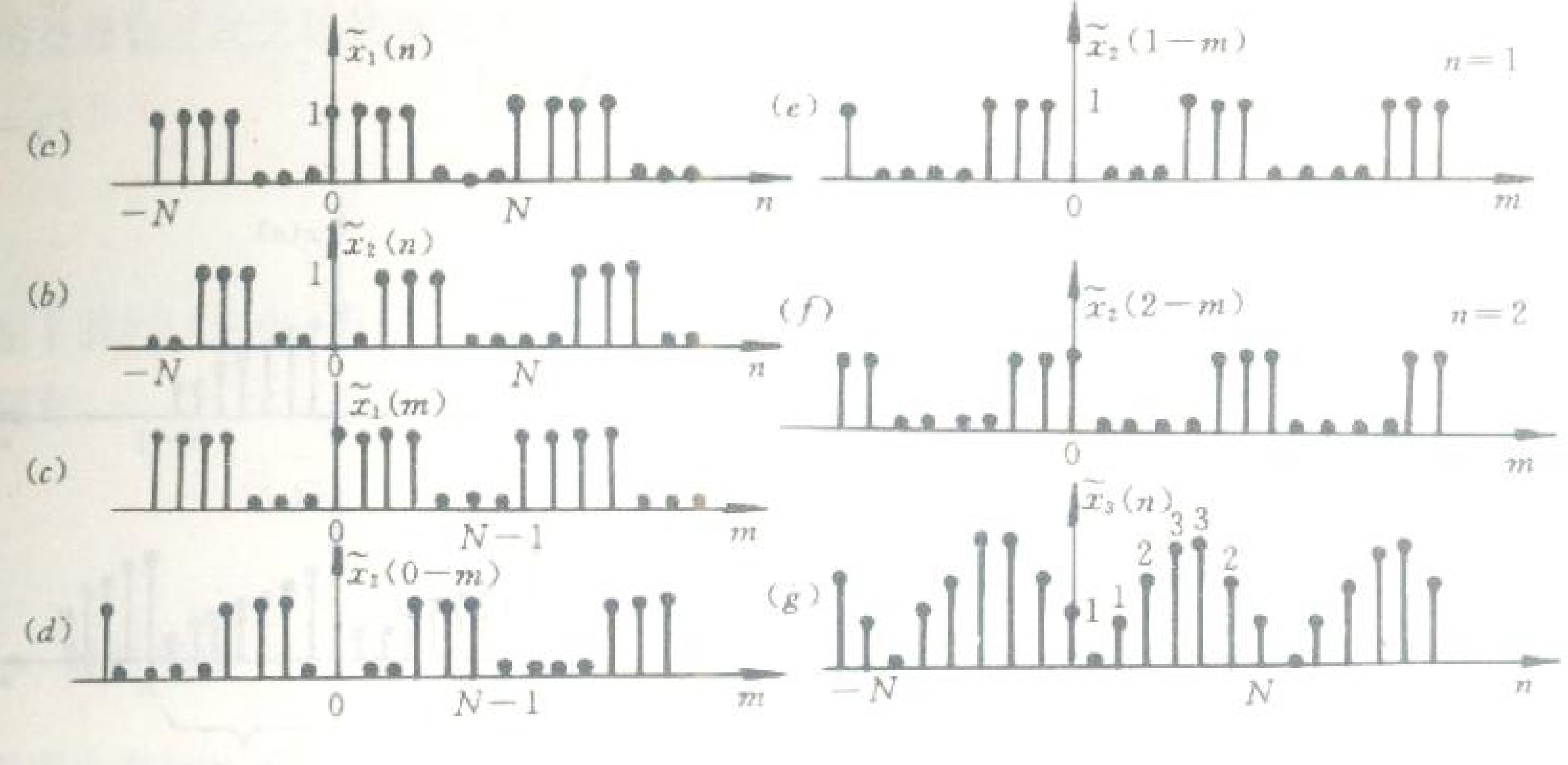

图 3—5 周期卷积

§ 3-3 离散傅里叶级数(DFS)

周期卷积计算例题 习题集P38 3

$$x(n)=\begin{cases} n+1 & 0\le n\le 4 \\ 0 & 其他 \end{cases}，求h(n)=R_4(n-2)$$

$$令\tilde{x}(n)=x\left((n)\right)_6,\tilde{h}(n)=h\left((n)\right)_6$$

求$\tilde{x}(n)$和$\tilde{h}(n)$的周期卷积

$$解：\tilde{y}(n)=\tilde{x}(n)\,\tilde{\otimes}\,\tilde{h}(n)=\sum_m x(m)h(n-m)$$

$$=\{14\quad 12\quad 10\quad 8\quad 6\quad 10\}$$

表 3-3

$\tilde{h}(n-m)$ \ $\tilde{x}(m)$ \ n	1	2	3	4	5	0	$\tilde{y}(n)$
0	0	1	1	1	1	0	14
1	0	0	1	1	1	1	12
2	1	0	0	1	1	1	10
3	1	1	0	0	1	1	8
4	1	1	1	0	0	1	6
5	1	1	1	1	0	0	10

§3-3 离散傅里叶级数(DFS)

4.对称特性

（1） $\forall \tilde{x}(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}(k)$

则 $\tilde{x}^*(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}^*(-k)$

$\tilde{x}^*(-n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}^*(k)$

$$DTFT\left[x(n)\right] = X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$DTFT\left[x^*(n)\right] = X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$DTFT\left[x^*(-n)\right] = X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x(n) \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$x^*(-n) \leftrightarrow X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

§3-3 离散傅里叶级数(DFS)

（2） $\forall \widetilde{x}(n) \xleftrightarrow{DFS} \widetilde{X}(k)$

则

$$\mathrm{Re}\left[\tilde{x}(n)\right] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_e(k) = \frac{1}{2}\left[\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(-k)\right]$$

$$j\,\mathrm{Im}\left[\tilde{x}(n)\right] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_o(k) = \frac{1}{2}\left[\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(-k)\right]$$

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)\right] \xleftrightarrow{DFS} \mathrm{Re}\left[\tilde{X}(k)\right]$$ 共轭对称

$$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)\right] \xleftrightarrow{DFS} j\,\mathrm{Im}\left[\tilde{X}(k)\right]$$ 共轭反对称

$$\mathrm{Re}\{x(n)\} = \frac{1}{2}\left[x(n) + x^*(n)\right] \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\right] = X_e(e^{j\omega})$$

$$j\,\mathrm{Im}\{x(n)\} = \frac{1}{2}\left[x(n) - x^*(n)\right] \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})\right] = X_o(e^{j\omega})$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) + x^*(-n)\right] \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})\right] = \mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) - x^*(-n)\right] \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})\right] = j\,\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$

§ 3-3 离散傅里叶级数(DFS)

（3）

$\forall \tilde{x}(n)=\tilde{x}^{*}(n)$ 实序列

$\downarrow \quad \downarrow$

$\tilde{X}(k)=\tilde{X}^{*}(-k)$ 共轭对称

$\downarrow$

$\left|\tilde{X}(k)\right|=\left|\tilde{X}(-k)\right|$ 偶对称

$\arg[\tilde{X}(k)]=-\arg[\tilde{X}(-k)]$ 奇对称

实序列$:x(n)\leftrightarrow X(e^{j\omega})$

$1.x(n)=x^{*}(n)\Rightarrow X(e^{j\omega})=X^{*}(e^{-j\omega})$

$$2.\begin{cases} X(e^{j\omega})=\mathrm{Re}\left\{X(e^{j\omega})\right\}+j\,\mathrm{Im}\left\{X(e^{j\omega})\right\} \\ X^{*}(e^{-j\omega})=\mathrm{Re}\left\{X(e^{-j\omega})\right\}-j\,\mathrm{Im}\left\{X(e^{-j\omega})\right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{Re}\left\{X(e^{j\omega})\right\}=\mathrm{Re}\left\{X(e^{-j\omega})\right\} \\ \mathrm{Im}\left\{X(e^{j\omega})\right\}=-\mathrm{Im}\left\{X(e^{-j\omega})\right\} \end{cases}$$

$X(e^{j\omega})$实部是偶函数，虚部是奇函数

3.极坐标形式：$X(e^{j\omega})=\left|X(e^{j\omega})\right|e^{j\arg\left[X(e^{j\omega})\right]}$

幅度是ω的偶函数$\left|X(e^{j\omega})\right|=\left|X(e^{-j\omega})\right|$

相位是ω的奇函数$\arg\left[X(e^{j\omega})\right]=-\arg\left[X(e^{-j\omega})\right]$