数字信号处理

周治国

2023.11

第五章 数字滤波器

FIR数字滤波器

概 述

IIR滤波器幅度特性好，但无法实现线性相位，需附加调相网络；

IIR滤波器需要注意稳定性问题；

由于单位抽样响应特点不同，IIR滤波器设计方法不能移植于FIR滤波器的设计；

在图像处理，数据传输和现代通信系统中多要求系统具有线性相位特性，方便起见，很多时候均使用FIR滤波；

FIR滤波可利用快速傅立叶变换；

鉴于FIR滤波器可以做到线性相位，可专门讨论线性相位FIR滤波器的设计，因为若对相位不感兴趣，可用阶数低很多的IIR滤波实现。

一、系统具有线性相位响应的条件

线性相位条件： $h(n)=\pm h(N-n-1)$

FIR频响：

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}$$

极坐标形式

$$H(e^{j\omega})=\pm\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\theta(\omega)}$$

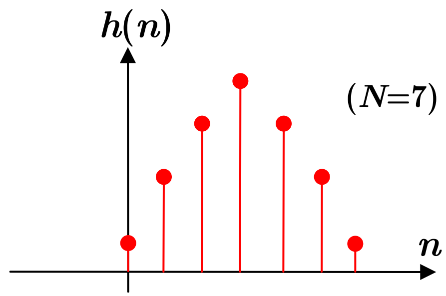
$h(n)$是实序列时，$\left|H(e^{j\omega})\right|=\left|H(e^{-j\omega})\right|$，$\theta(\omega)=-\theta(-\omega)$

$$H(e^{j\omega})=H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

中心奇偶对称：与圆周奇偶对称不同

二、线性相位FIR系统的时、频域特点

Case 1：$h(n)$中心偶对称，N 为奇数



$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n)\left[e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-n-1)}\right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$

$$= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n)\left[e^{j\omega\frac{N-1}{2}} e^{-j\omega n} + e^{j\omega\frac{N-1}{2}} e^{-j\omega(N-n-1)}\right]\right\}$$

$$= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n)\left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} + e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\right]\right\}$$

$$= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left[h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n)\cos\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]$$

定义一个$(N+1)/2$点序列 $a(n)$:

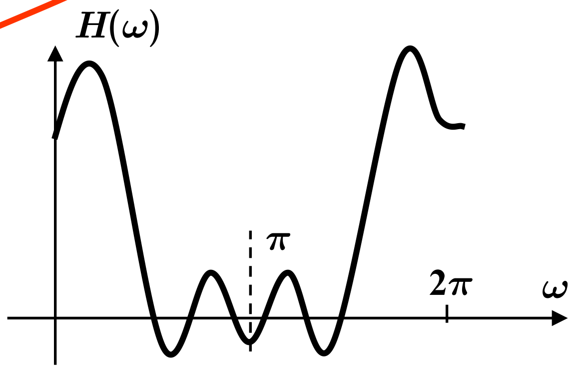
$$a(0)=h\left(\frac{N-1}{2}\right),\ a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right),\ n=1,2,\ldots,\frac{N-1}{2}$$

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a(n)\cos\omega n$$

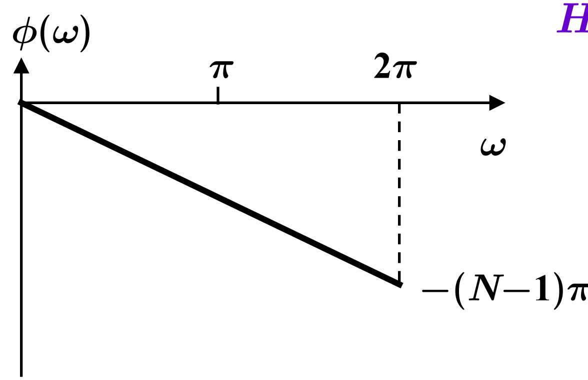
$$\Rightarrow\begin{cases}H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a(n)\cos\omega n\\ \phi(\omega)=-\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega\end{cases}$$

这里$H(\omega)$并不是幅频响应，其值可正可负

note



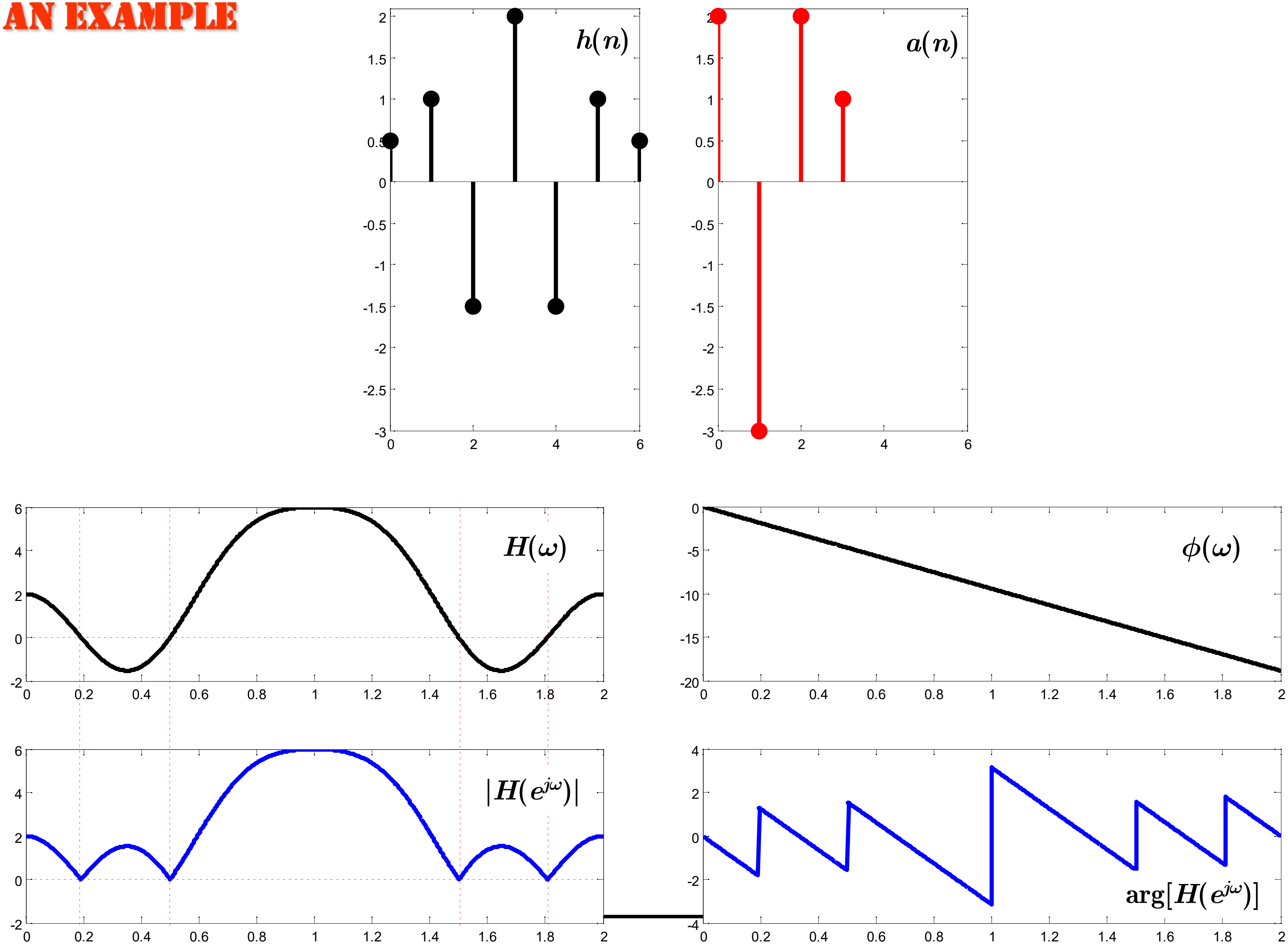
$H(\omega)=H(2\pi-\omega)$



利用上式可由 $h(n)$ 得到滤波器频率响应

线性相位FIR滤波器

AN EXAMPLE



Case 2：$h(n)$中心偶对称，N 为偶数

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)\left[e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-1-n)}\right]$$

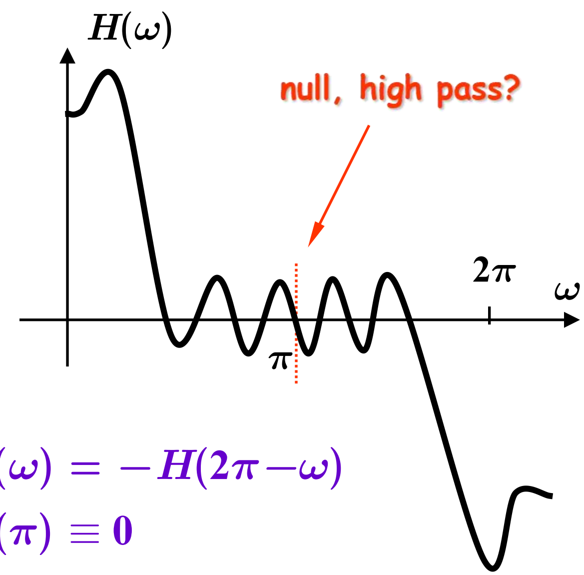
$$= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)\left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} + e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\right]$$

$$= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N}{2}-n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

定义一个$(N/2+1)$点序列 $b(n)$：

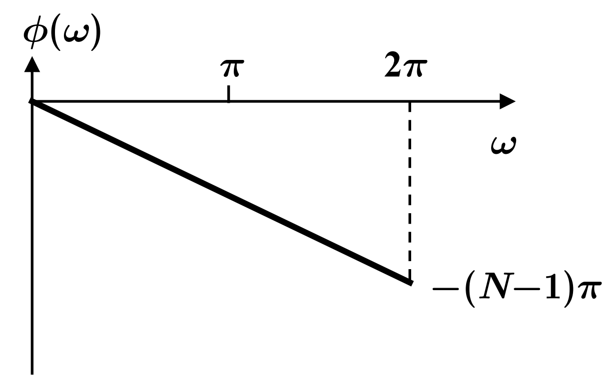
$$b(0)=0,\ b(n) = 2h\left(\frac{N}{2}-n\right),\ n=1,2,\ldots,\frac{N}{2}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{\underbrace{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}_{\phi(\omega)}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]}_{H(\omega)}$$

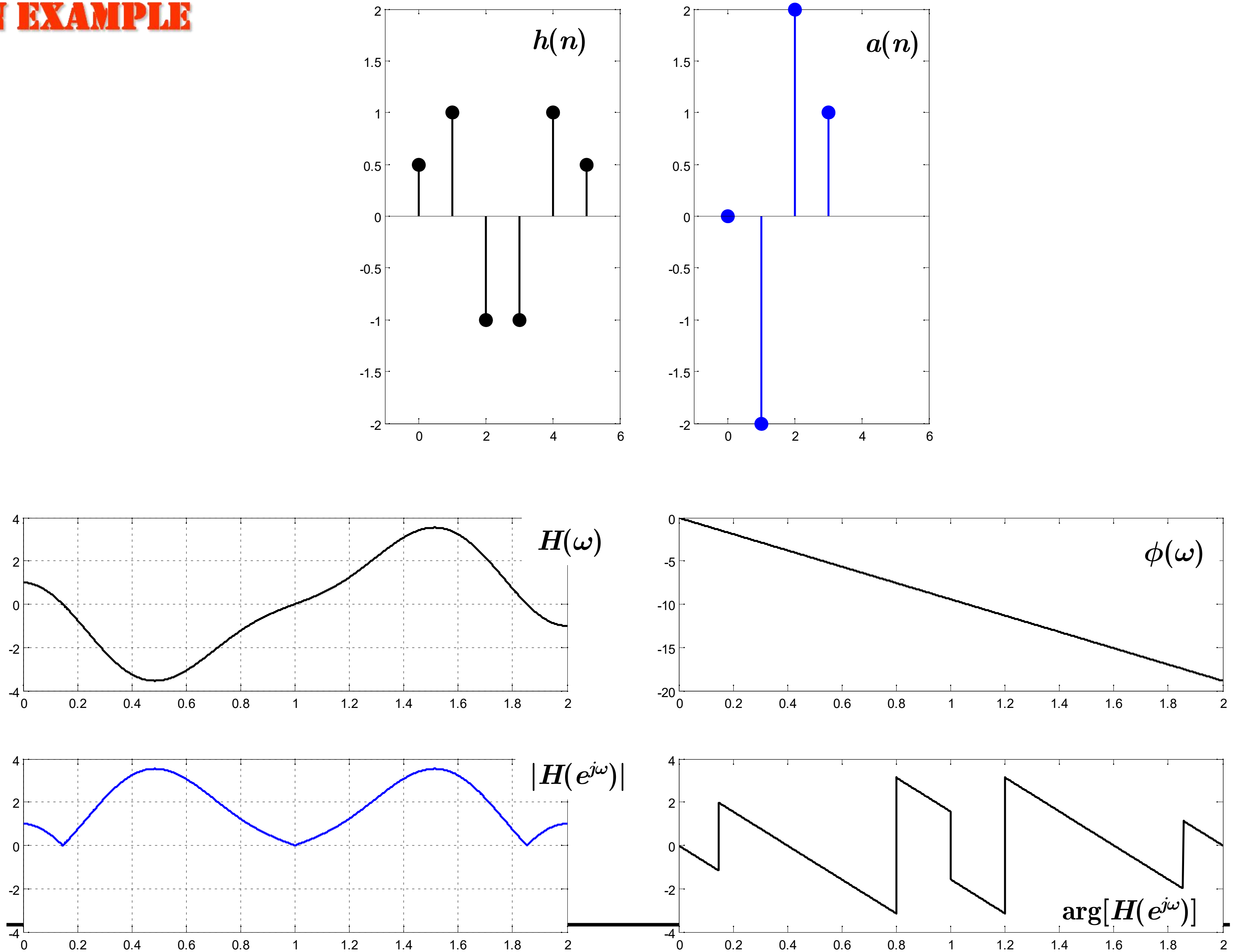


$H(\omega) = -H(2\pi-\omega)$

$H(\pi) \equiv 0$



AN EXAMPLE



Case 3: $h(n)$中心奇对称，N 为奇数（中间项恒为零）

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \;\; e^{-j\omega n} - e^{-j\omega(N-1-n)}$$

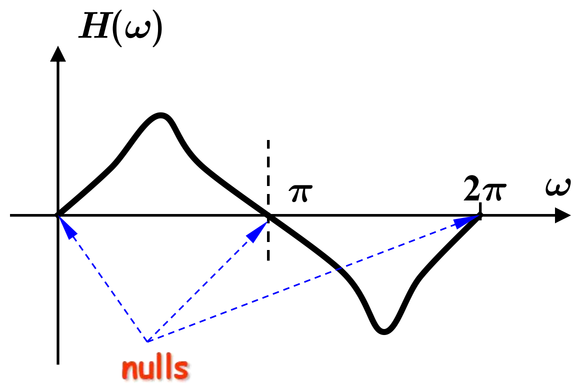
$$= e^{j\left|\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega\right|} \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n)\sin\, \omega\left|\frac{N-1}{2} - n\right|$$

定义一个$(N+1)/2$点序列 $c(n)$:

$$c(0)=0,\ c(n) = 2h\left|\frac{N-1}{2} - n\right|,\ n = 1, 2, \ldots, \frac{N-1}{2}$$

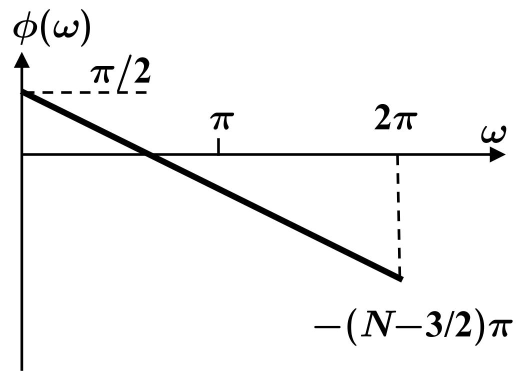
$$H(e^{j\omega})$$

$$= e^{\overbrace{j\left|\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega\right|}_{\phi(\omega)}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin\, \omega n}_{H(\omega)}$$

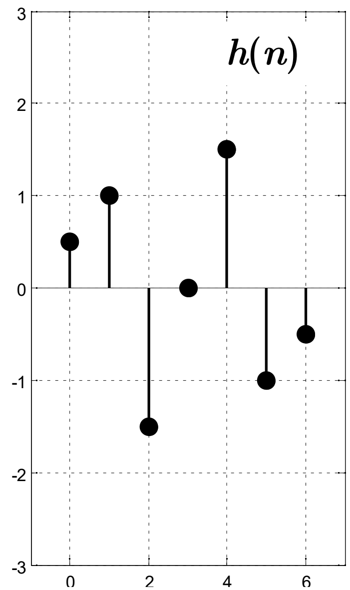


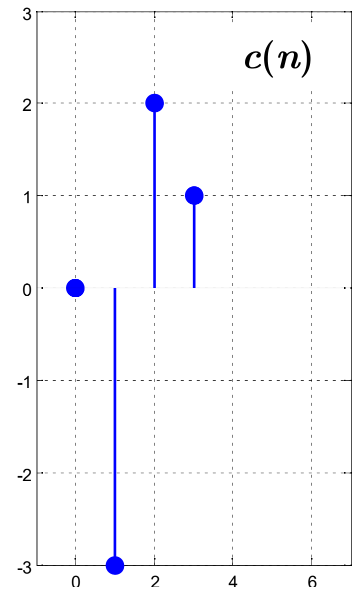
$$H(\omega) = -H(2\pi-\omega)$$

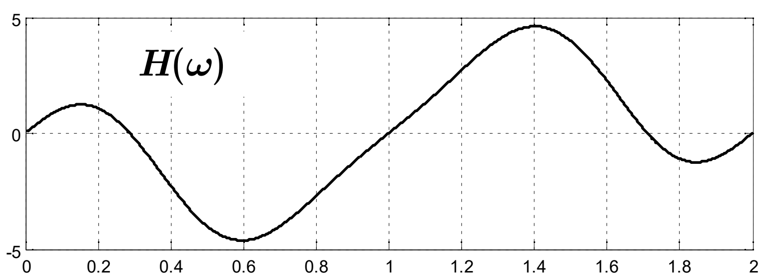
$$H(0) = H(\pi) = H(2\pi) \equiv 0$$

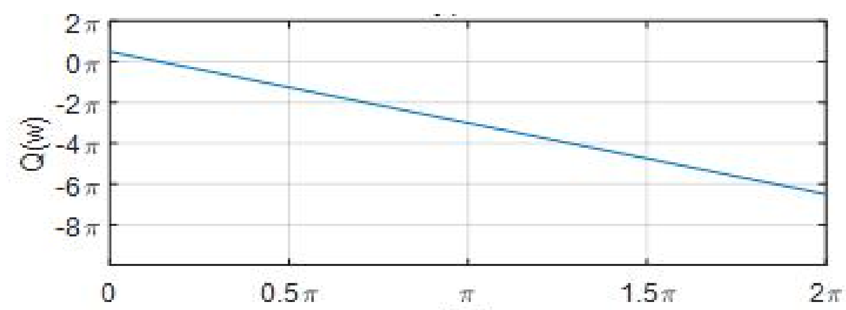


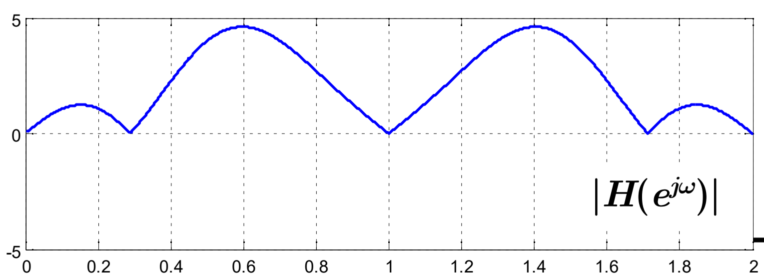
AN EXAMPLE

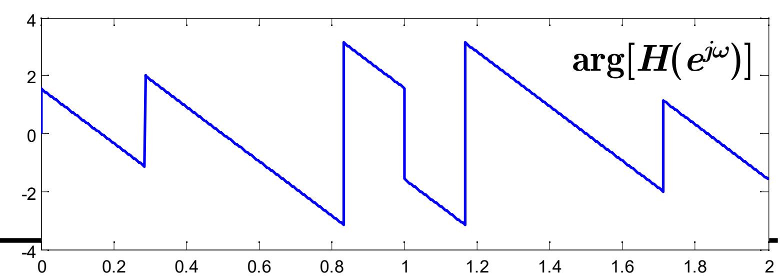












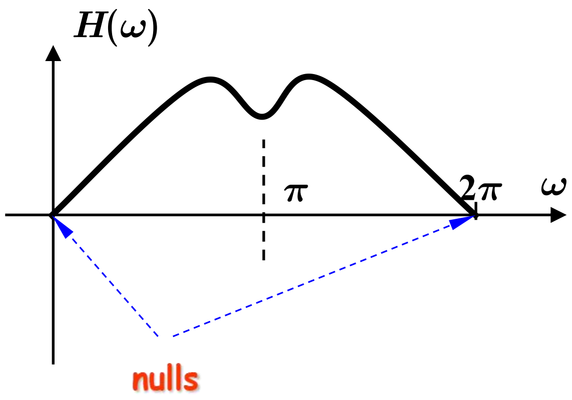
Case 4: $h(n)$中心奇对称，N 为偶数

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)\left[e^{-j\omega n} - e^{-j\omega(N-1-n)}\right] = e^{-j\left[\frac{N-1}{2}\right]\omega} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)\, 2j \sin\left[\left(\frac{N}{2} - n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

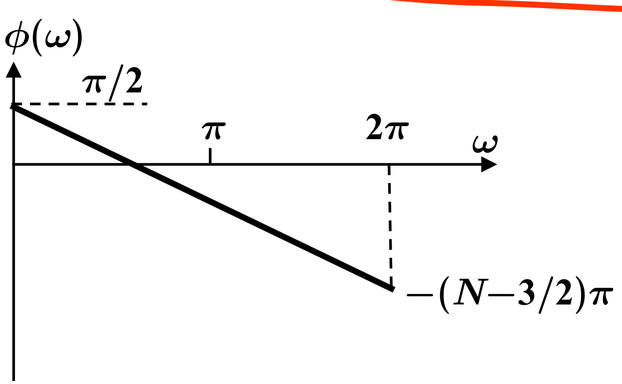
定义一个$N/2+1$点序列 $d(n)$：

$$d(0) = 0,\ d(n) = 2h\left[\frac{N}{2} - n\right],\ n = 1, 2, \ldots, \frac{N}{2}$$

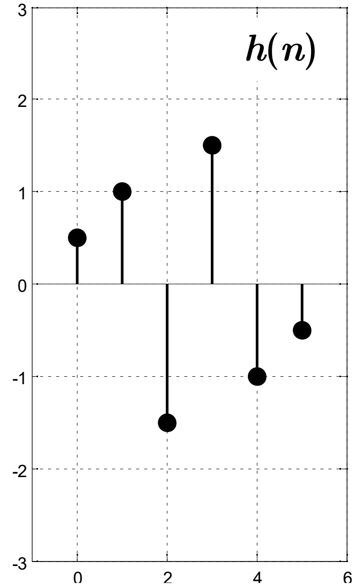
$$H(e^{j\omega}) = e^{\underbrace{j\left[\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right]}_{\phi(\omega)}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]}_{H(\omega)}$$

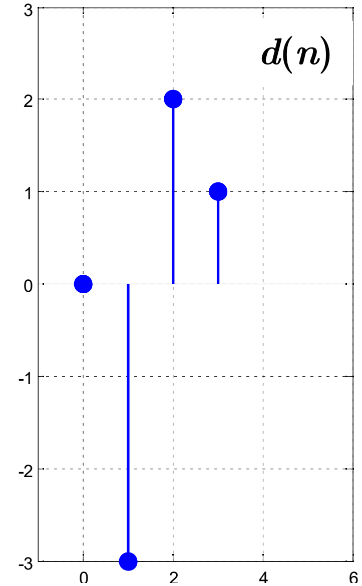


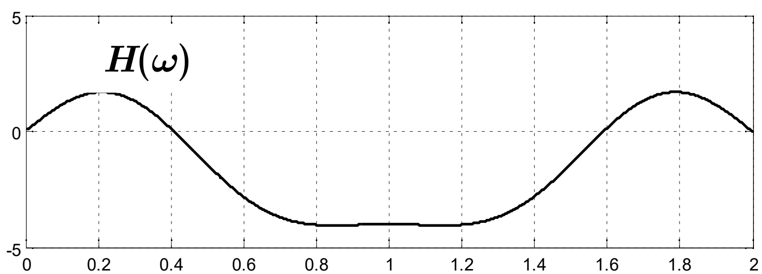
$$H(\omega) = H(2\pi - \omega)$$
$$H(0) = H(2\pi) \equiv 0$$

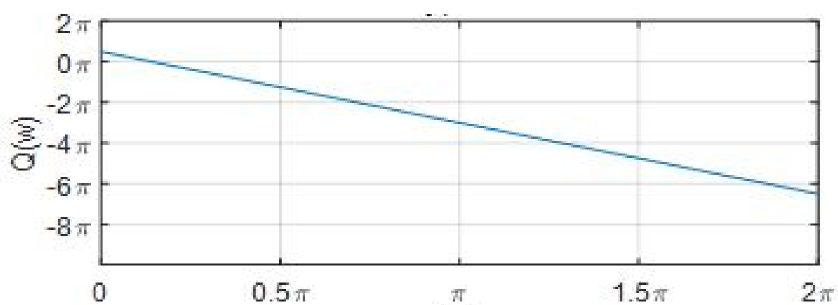


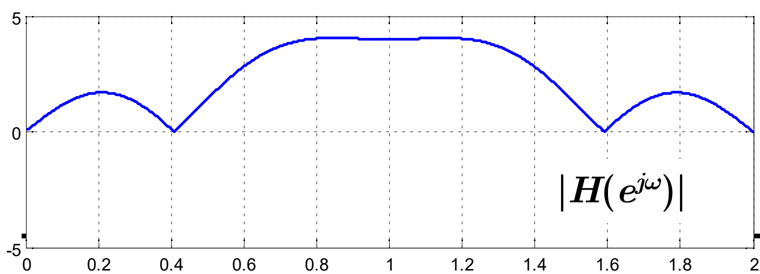
AN EXAMPLE

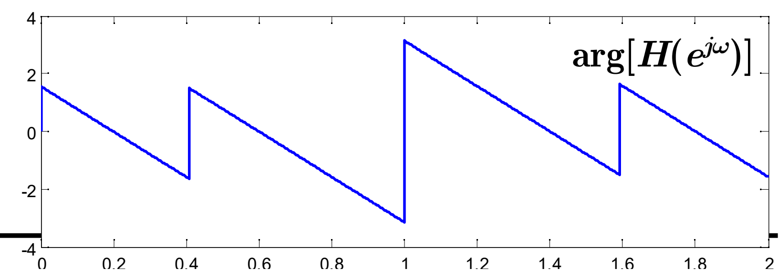


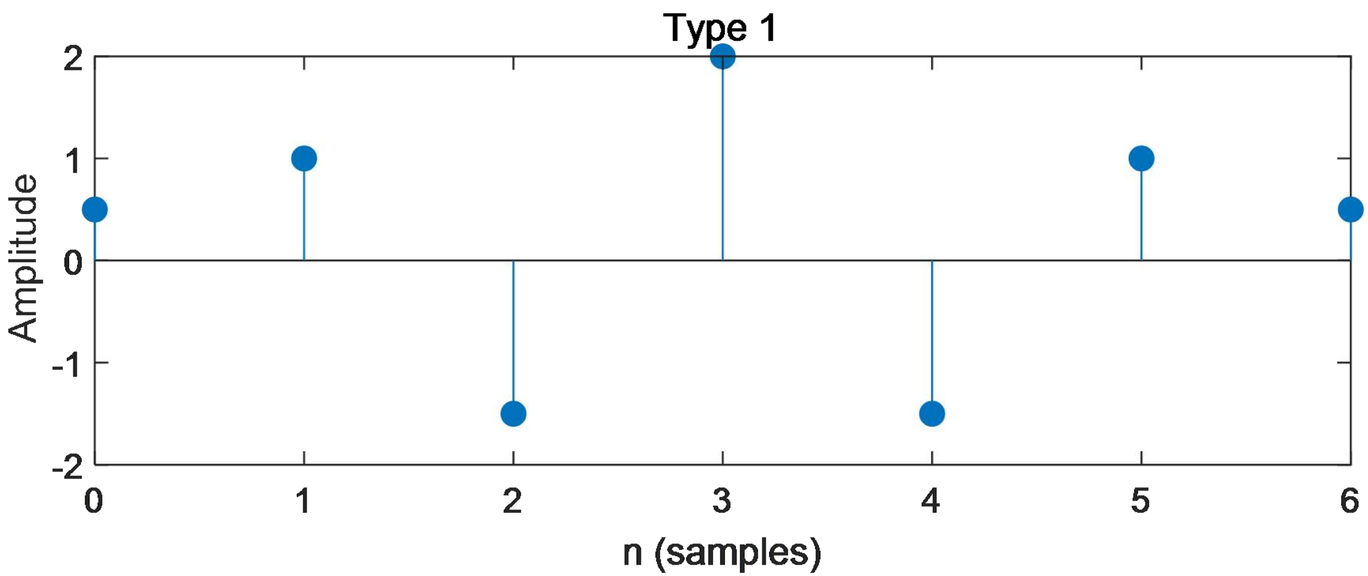


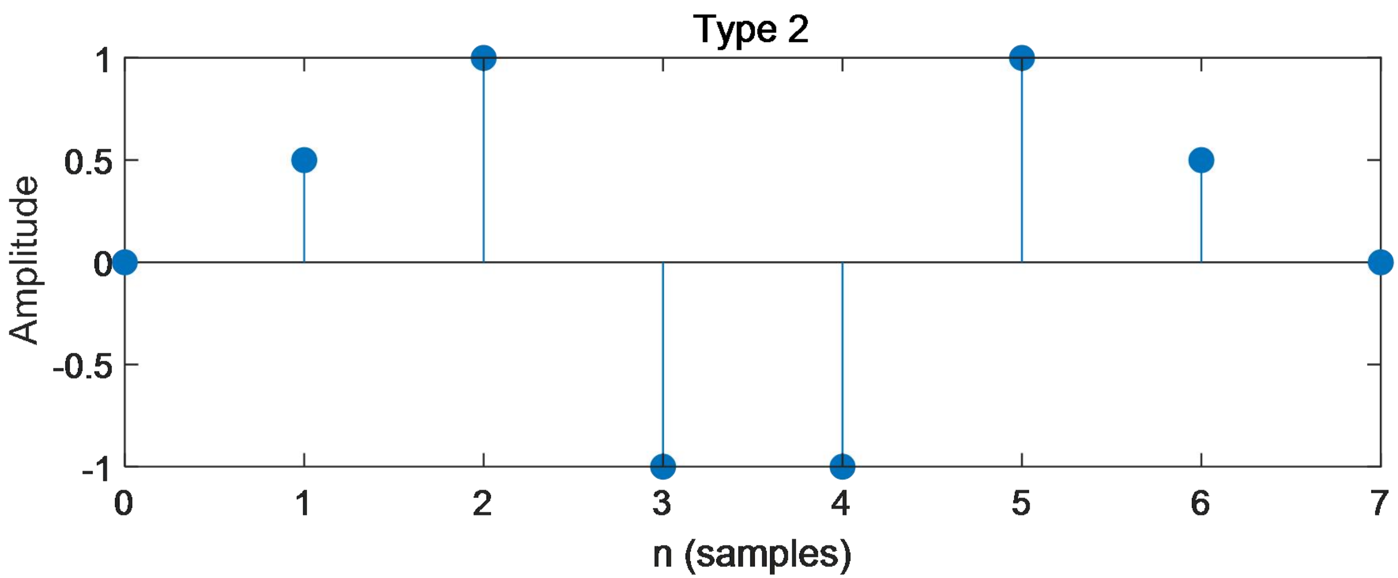


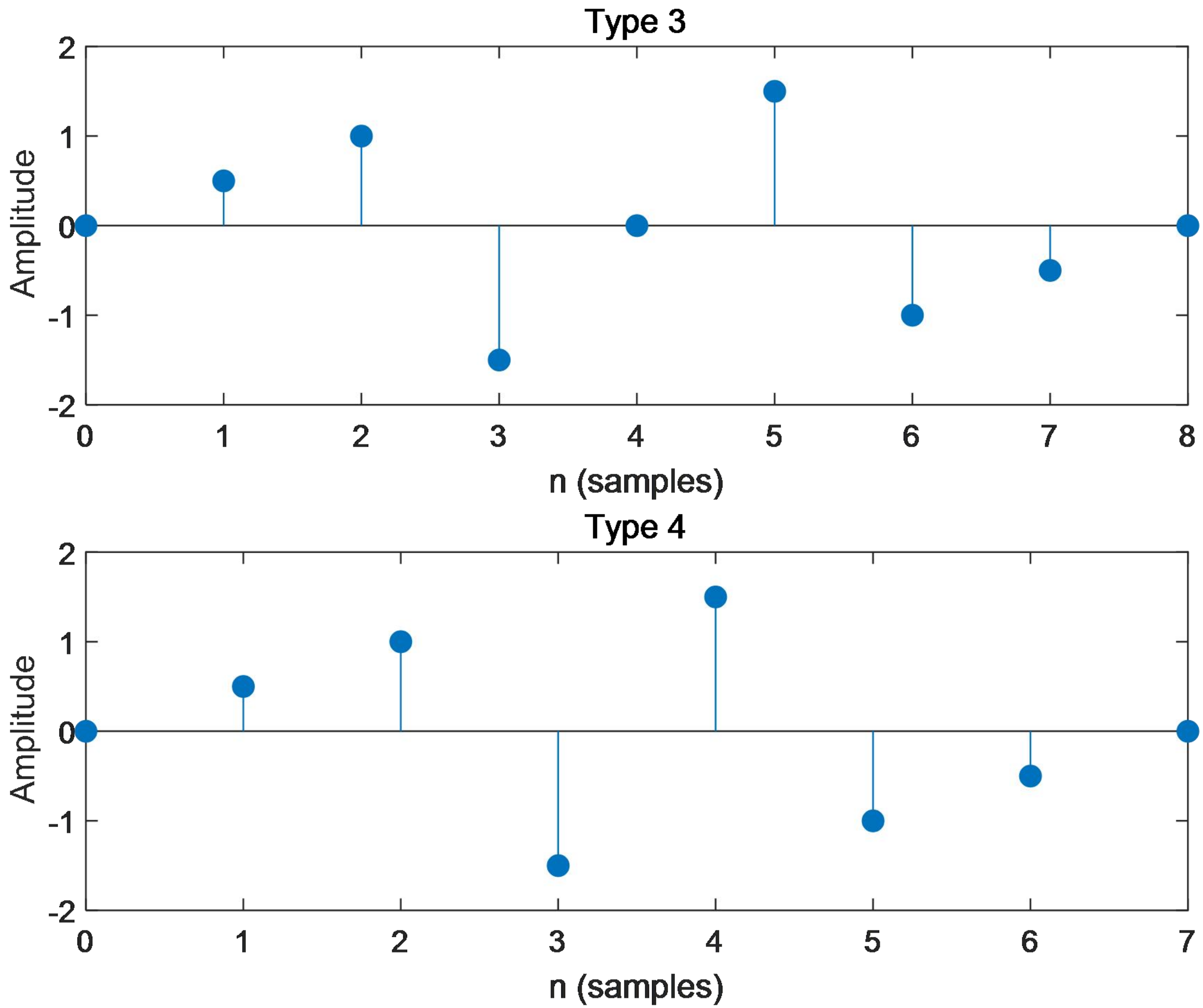


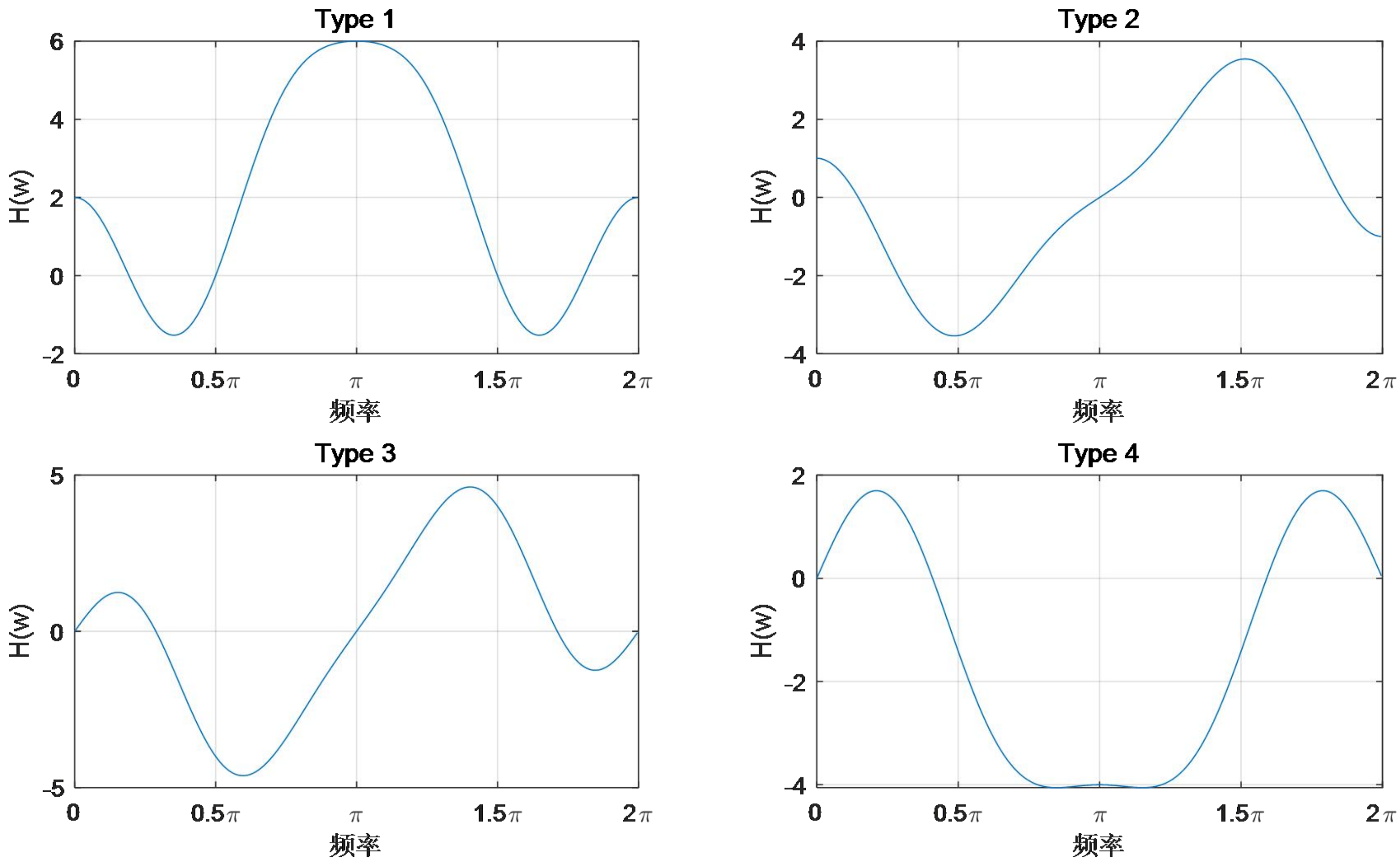




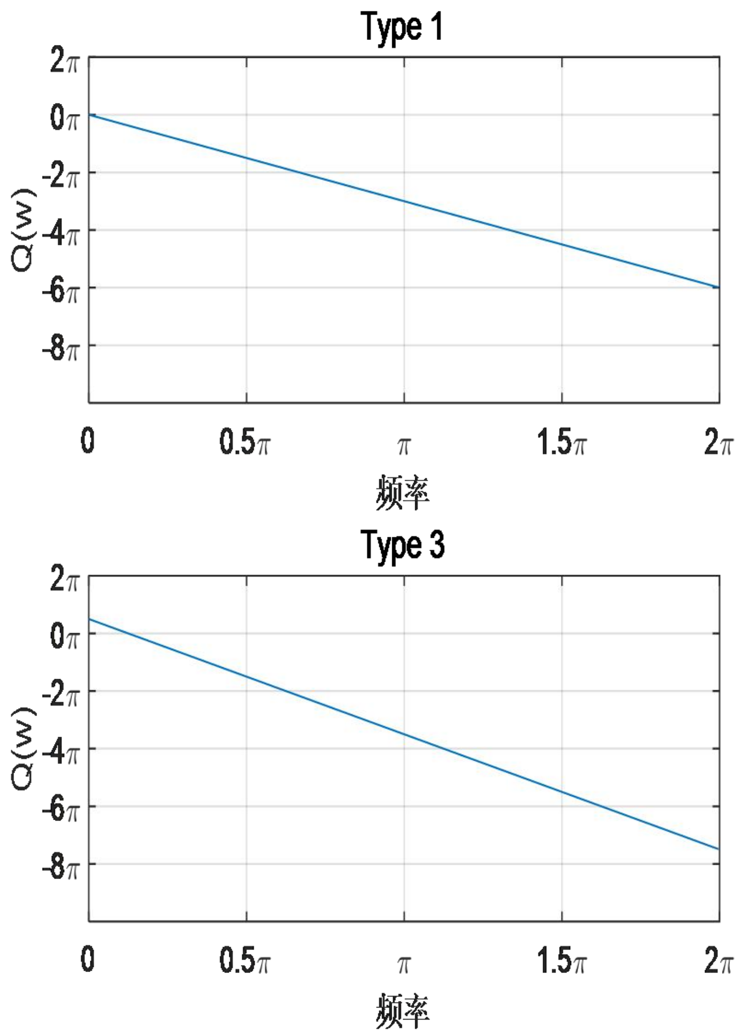

Type 1
Amplitude
2
1
0
-1
-2
0
1
2
3
4
5
6
n (samples)


Type 2
Amplitude
1
0.5
0
-0.5
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
n (samples)

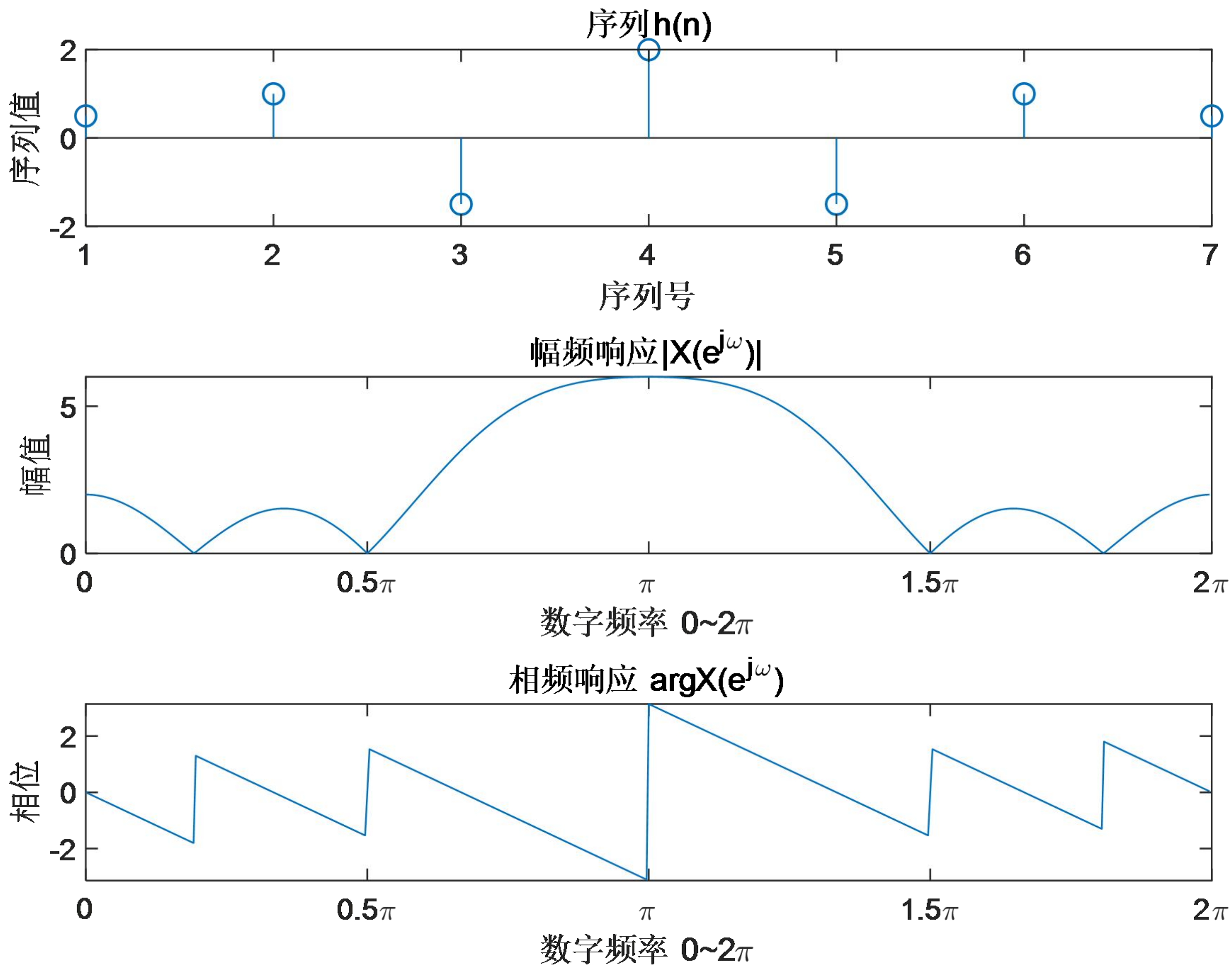

Type 3
Amplitude
n (samples)
Type 4
Amplitude
n (samples)



Type 1
Type 2
Type 3
Type 4
H(w)
频率
0
0.5π
π
1.5π
2π
6
4
2
0
-2
-4
5
-5

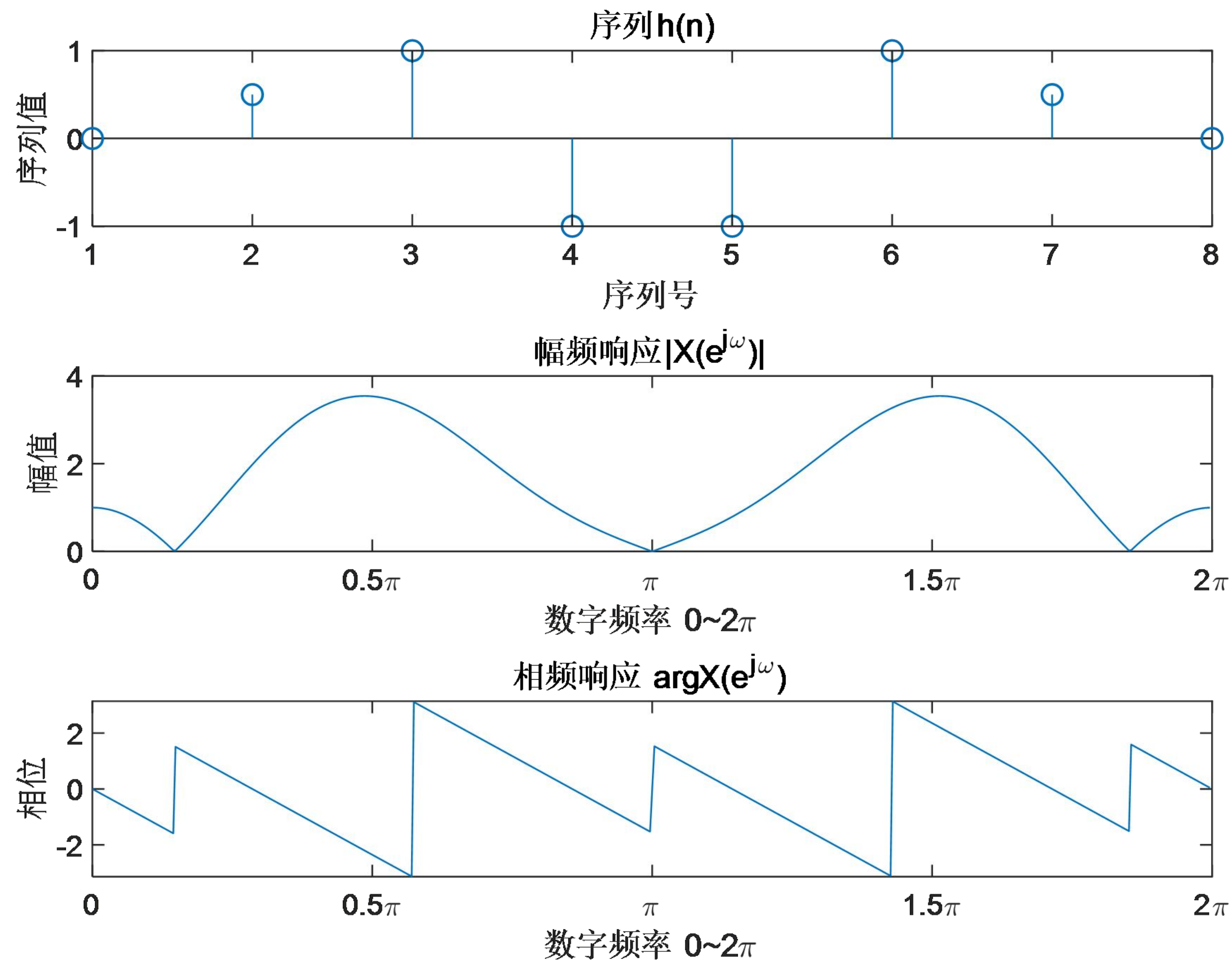

Type 1
Type 2
Type 3
Type 4
Q(w)
频率
2π
0π
-2π
-4π
-6π
-8π
0
0.5π
π
1.5π
2π

幅频、相频响应 h1



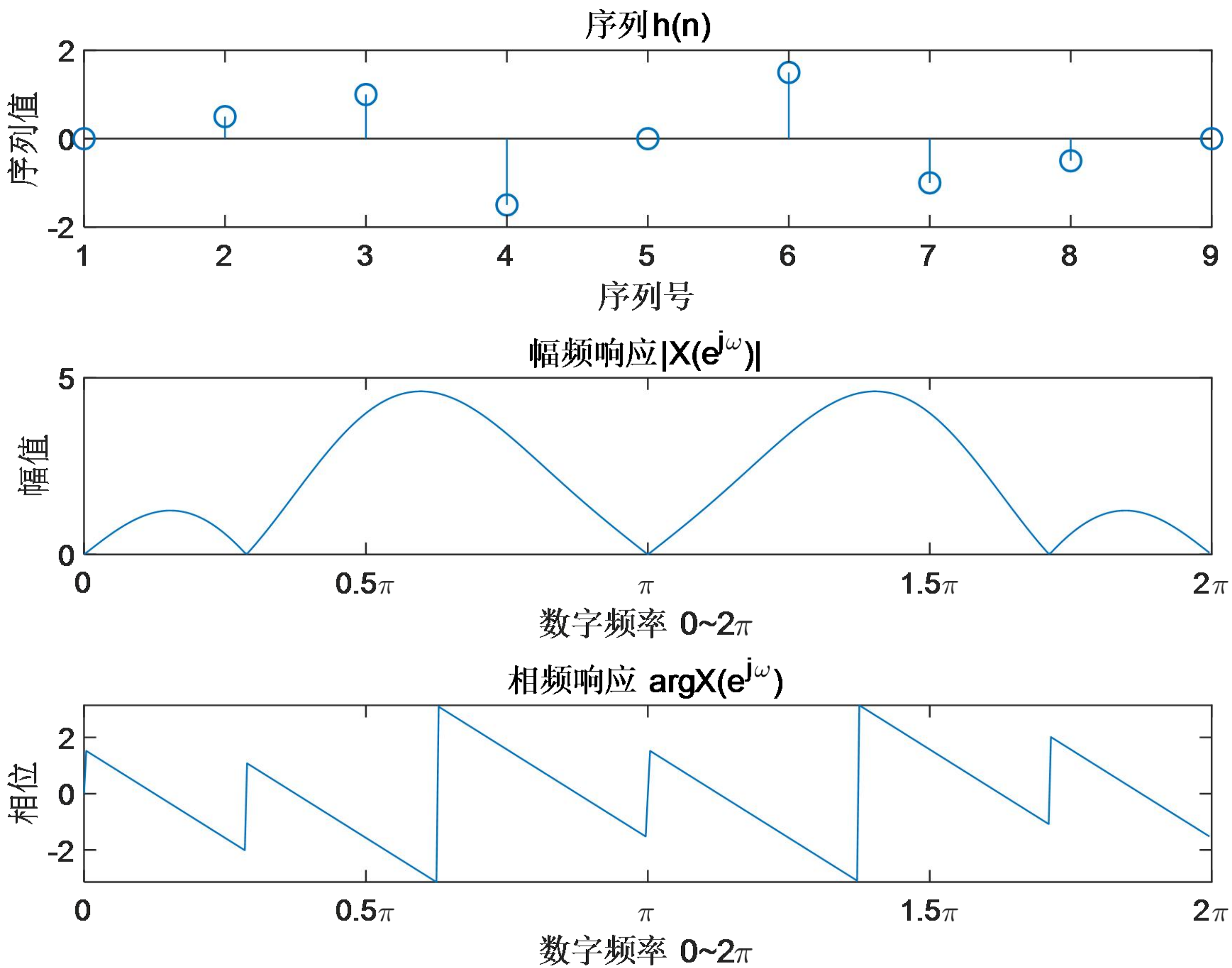
序列h(n)
序列值
2
0
-2
1
2
3
4
5
6
7
序列号
幅频响应|X(e^{jω})|
幅值
5
0
0
0.5π
π
1.5π
2π
数字频率 0~2π
相频响应 argX(e^{jω})
相位
2
0
-2
0
0.5π
π
1.5π
2π
数字频率 0~2π

幅频、相频响应 h2



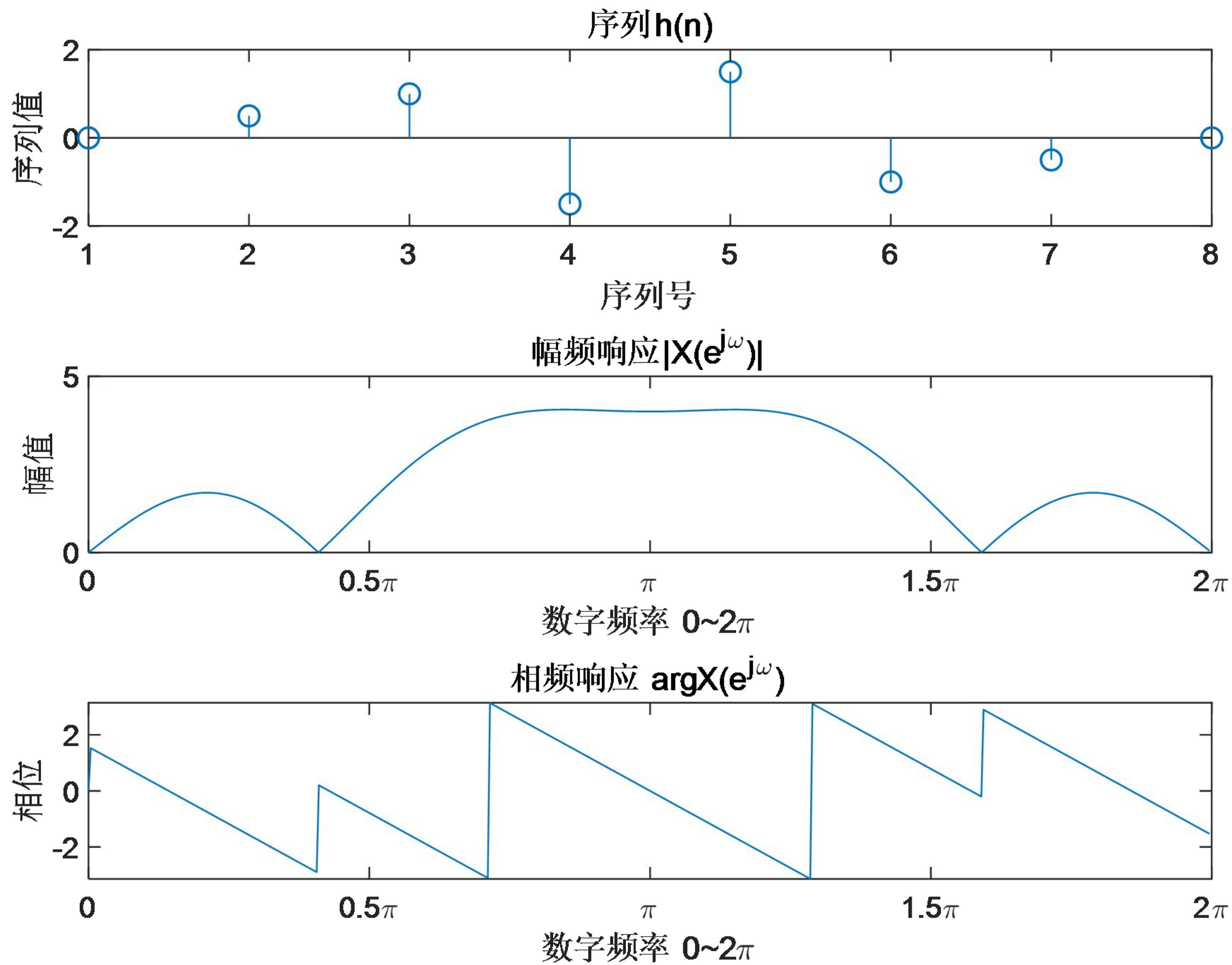
序列h(n)
序列值
序列号
1
0
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
幅频响应|X(e^{jω})|
幅值
4
2
0
0
0.5π
π
1.5π
2π
数字频率 0~2π
相频响应 argX(e^{jω})
相位
2
0
-2
0
0.5π
π
1.5π
2π
数字频率 0~2π

幅频、相频响应 h3



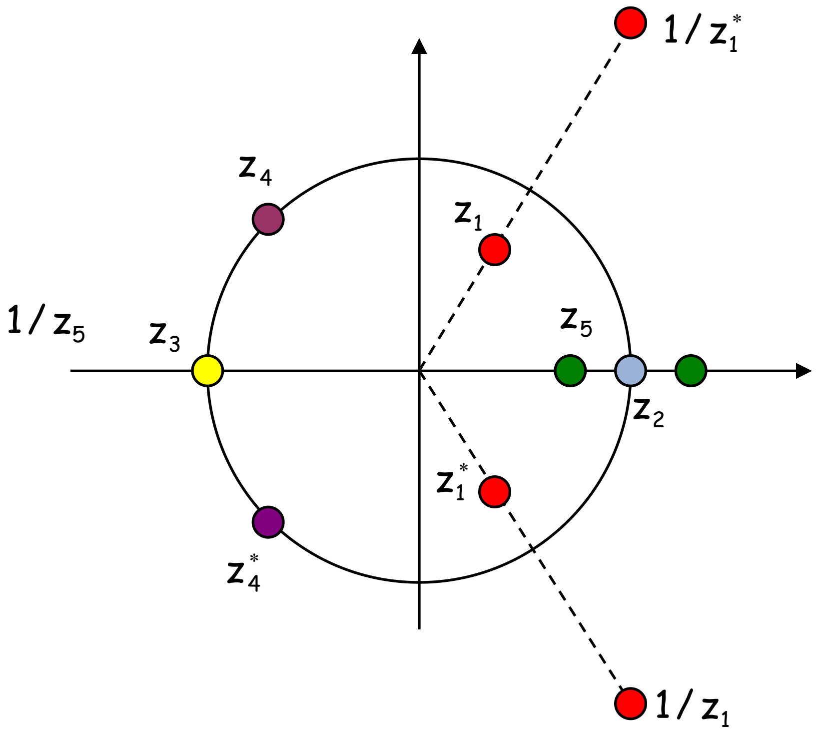
序列h(n)
2
0
-2
序列值
1
2
3
4
5
6
7
8
9
序列号
幅频响应|X(e^jω)|
5
0
幅值
0
0.5π
π
1.5π
2π
数字频率 0~2π
相频响应 argX(e^jω)
2
0
-2
相位
0
0.5π
π
1.5π
2π
数字频率 0~2π

幅频、相频响应　　h4



序列h(n)
序列值
序列号
2
0
-2
1
2
3
4
5
6
7
8
幅频响应|X(e^jω)|
幅值
5
0
0.5π
π
1.5π
2π
数字频率 0~2π
相频响应 argX(e^jω)
相位
2
0
-2
0
0.5π
π
1.5π
2π
数字频率 0~2π

线性相位系统零点特点



$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n) z^{-n} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m) z^{-(N-1-m)} \\
&= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{m} \\
&= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})
\end{aligned}
$$

A summary:

线性相位 FIR 数字滤波器特点

① **时域：**

$$h(n) = \pm h(N-n-1)$$

② **频域：**

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega) e^{j\left[\frac{L}{2}\pi - \frac{N-1}{2}\omega\right]}$$

$$H(z) = (-1)^L z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

— $H(\omega)$ **为实函数**

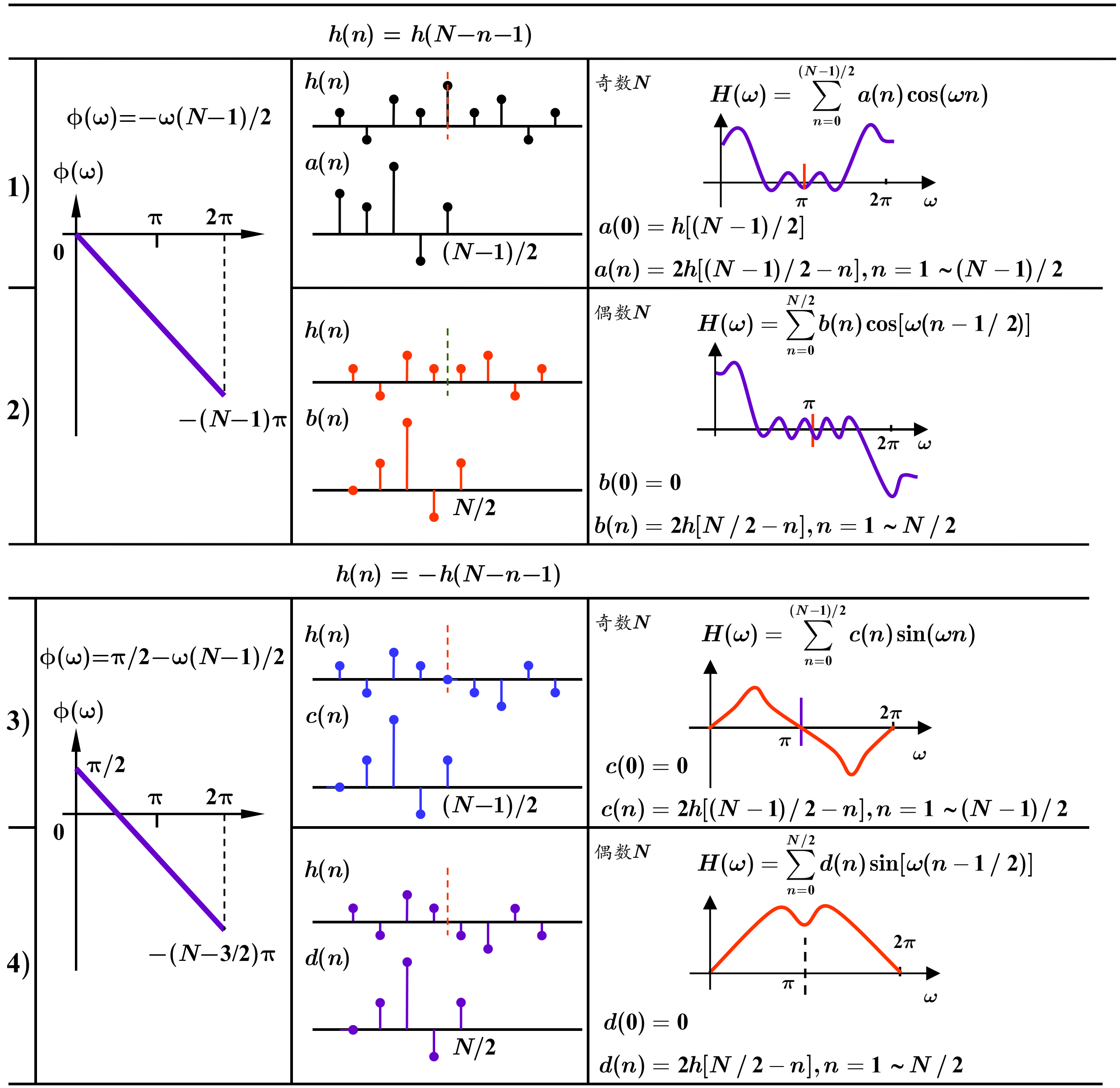
— $h(n)$ **偶对称：** $L = 0$

— $h(n)$ **奇对称：** $L = 1$

③ **零点：**

成倒易对出现

线性相位FIR滤波器的四种情况



How to derive $H(e^{j\omega})$ from h(n)?