数字信号处理

周治国

2023.8

第二章

离散时间信号与系统分析基础

§2-6 DTFT的对称性质

一、几个术语

1.对任意实序列：

1.$x(n)$为实序列，若$x(n)=x(-n)$，则称偶对称

记为：$x_e(n)=x_e(-n)$

even

2.$x(n)$为实序列，若$x(n)=-x(-n)$，则称奇对称

记为：$x_o(n)=-x_o(-n)$

odd

§2-6 DTFT的对称性质

一、几个术语

1.对任意实序列：

3.$x(n)$为实序列，$\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$是偶序列

即：$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$

4.$x(n)$为实序列，$\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$是奇序列

即：$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$

$\Rightarrow x(n)=x_e(n)+x_o(n)$

结论：任一实序列可由偶序列和奇序列之和构成。

§ 2-6 DTFT的对称性质

一、几个术语

2.对任意复序列：

1.$x(n)$为复序列，若$x(n)=x^*(-n)$，则称共轭对称

记为：$x_e(n)=x_e^*(-n)$

2.$x(n)$为复序列，若$x(n)=-x^*(-n)$，则称共轭反对称

记为：$x_o(n)=-x_o^*(-n)$

§ 2-6 DTFT的对称性质

一、几个术语

2.对任意复序列：

3.$x(n)$为复序列，$\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(-n)\right]$是共轭对称序列

即：$x_e(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(-n)\right]$

4.$x(n)$为复序列，$\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(-n)\right]$是共轭反对称序列

即：$x_o(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(-n)\right]$

$\Rightarrow x(n)=x_e(n)+x_o(n)$

结论：任一复序列可由共轭对称序列和共轭反对称序列之和构成。

§2-6 DTFT的对称性质

3.DTFT的共轭对称与共轭反对称：

*DTFT*离散时间傅里叶变换

$$\begin{cases} X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ x\left(n\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega})=X_e(e^{j\omega})+X_o(e^{j\omega})$$

$X_e(e^{j\omega})=\frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega})+X^*(e^{-j\omega})\right]$是共轭对称函数

即：$X_e(e^{j\omega})=X_e^*(e^{-j\omega})$

$X_o(e^{j\omega})=\frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega})-X^*(e^{-j\omega})\right]$是共轭反对称函数

即：$X_o(e^{j\omega})=-X_o^*(e^{-j\omega})$

§ 2-6 DTFT的对称性质

二、DTFT的对称性质：

DTFT离散时间傅里叶变换

$$\begin{cases} X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n} \\ x\left(n\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \end{cases}$$

$$DTFT\left[x\left(n\right)\right]=X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$DTFT\left[x^*\left(n\right)\right]=X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$DTFT\left[x^*\left(-n\right)\right]=X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

即：

$$x\left(n\right)\leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x^*\left(n\right)\leftrightarrow X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$x^*\left(-n\right)\leftrightarrow X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

证明：

$$1.DTFT\left[x^*\left(n\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^*(n)e^{-j\omega n}=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{j\omega n}\right]^*=\left[X\left(e^{-j\omega}\right)\right]^*=X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$2.DTFT\left[x^*\left(-n\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^*(-n)e^{-j\omega n}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x^*(m)e^{j\omega m}=\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)e^{-j\omega m}\right]^*$$

$$=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}\right]^*=\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]^*=X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

§ 2-6 DTFT的对称性质

*DTFT*离散时间傅里叶变换

$$\begin{cases} X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ x\left(n\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \end{cases}$$

$$x\left(n\right)\leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x^*\left(n\right)\leftrightarrow X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

$$x^*\left(-n\right)\leftrightarrow X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\mathrm{Re}\left\{x\left(n\right)\right\}=\frac{1}{2}\left[x\left(n\right)+x^*\left(n\right)\right]\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega})+X^*(e^{-j\omega})\right]=X_e(e^{j\omega})$$

$$j\,\mathrm{Im}\left\{x\left(n\right)\right\}=\frac{1}{2}\left[x\left(n\right)-x^*\left(n\right)\right]\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega})-X^*(e^{-j\omega})\right]=X_o(e^{j\omega})$$

$$x_e\left(n\right)=\frac{1}{2}\left[x\left(n\right)+x^*\left(-n\right)\right]\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega})+X^*(e^{j\omega})\right]=\mathrm{Re}\left\{X(e^{j\omega})\right\}$$

$$x_o\left(n\right)=\frac{1}{2}\left[x\left(n\right)-x^*\left(-n\right)\right]\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega})-X^*(e^{j\omega})\right]=j\,\mathrm{Im}\left\{X(e^{j\omega})\right\}$$

§ 2-6 DTFT的对称性质

实序列:$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$

$$x(n) \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)$$
$$x^*(n) \leftrightarrow X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$
$$x^*(-n) \leftrightarrow X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

1.$x(n) = x^*(n) \Rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

$$2.\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \mathrm{Re}\left\{X(e^{j\omega})\right\} + j\,\mathrm{Im}\left\{X(e^{j\omega})\right\} \\ X^*(e^{-j\omega}) = \mathrm{Re}\left\{X(e^{-j\omega})\right\} - j\,\mathrm{Im}\left\{X(e^{-j\omega})\right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\left\{X(e^{j\omega})\right\} = \mathrm{Re}\left\{X(e^{-j\omega})\right\} \\ \mathrm{Im}\left\{X(e^{j\omega})\right\} = -\mathrm{Im}\left\{X(e^{-j\omega})\right\} \end{cases}$$

实部相等
虚部相等

$X(e^{j\omega})$实部是偶函数, 虚部是奇函数

3.极坐标形式: $X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\arg\left[X(e^{j\omega})\right]}$

幅度是ω的偶函数$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{-j\omega})\right|$

相位是ω的奇函数$\arg\left[X(e^{j\omega})\right] = -\arg\left[X(e^{-j\omega})\right]$