数字信号处理

周治国

2023.8

第二章
离散时间信号与系统分析基础

§2-2 连续时间信号的取样及取样定理

一、信号的取样

1.用一定宽度的脉冲进行取样

2.用理想冲激脉冲进行取样

？区别

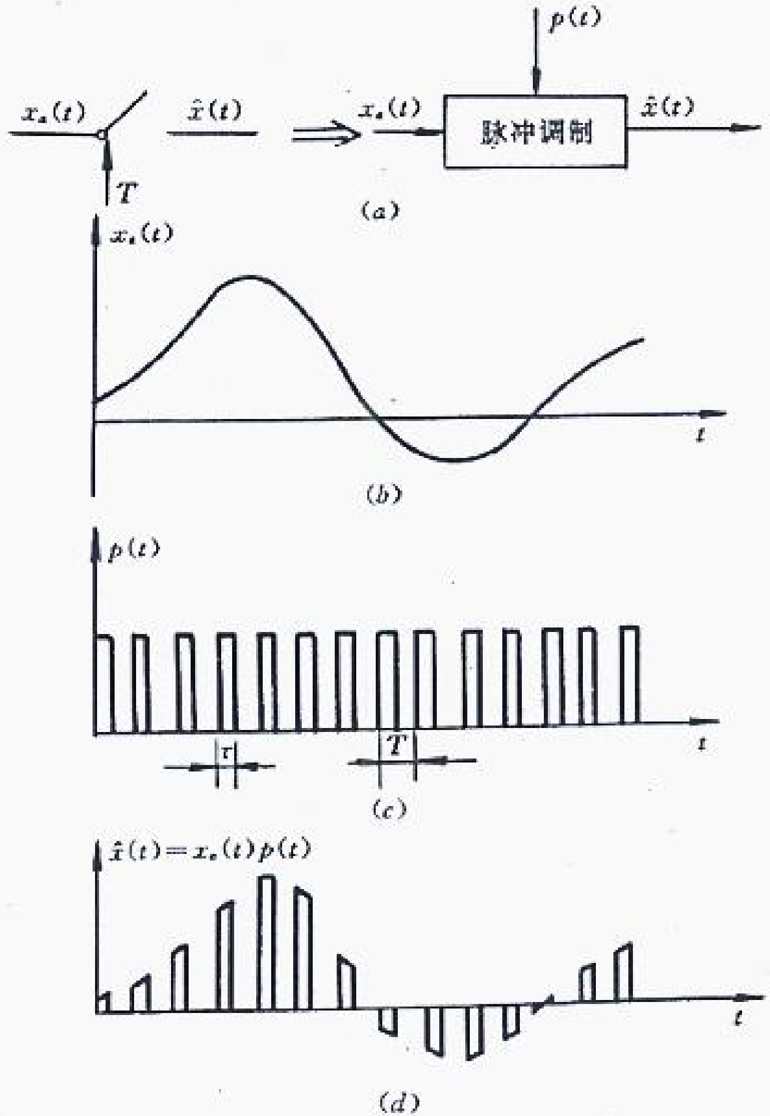


图 2－1　用一定宽度的脉冲进行取样得出的取样信号

(a) 信号取样原理图　　(b) 连续时间信号 $x_a(t)$ 波形

(c) 取样脉冲 $p(t)$ 波形　　(d) 取样信号 $\hat{x}(t)$ 波形

§2-2 连续时间信号的取样及取样定理

$$x_a(t)$$

$$p_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$\hat{x}(t)=x_a(t)p_\delta(t)$$

$$=x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$$

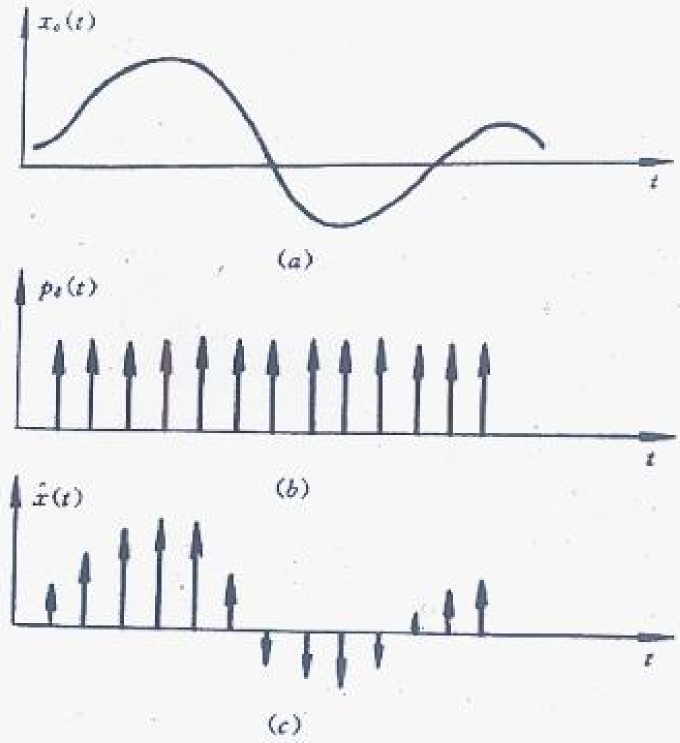


图 2—2 利用理想冲激取样所得的取样信号
(a) 连续时间信号 $x_a(t)$波形 (b) 冲激函数 $p_\delta(t)$波形
(c) 理想冲激取样信号 $\hat{x}(t)$波形

§2-2 连续时间信号的取样及取样定理

信号与系统表示
数字信号处理表示相反

二、取样定理

冲激脉冲序列傅氏级数展开

$$p_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m e^{jm\frac{2\pi}{T}t}$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{jm\frac{2\pi}{T}t}$$

回忆：傅氏级数

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m e^{jm\omega_0 t}$$

$$C_m=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$ 取样角频率

注意：ω，Ω

§2-2 连续时间信号的取样及取样定理

理想取样信号傅氏变换

$$\hat{X}(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)p_\delta(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{jm\frac{2\pi}{T}t}e^{-j\Omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-j(\Omega-m\Omega_s)t}dt$$

$$p_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m e^{jm\frac{2\pi}{T}t}$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{jm\frac{2\pi}{T}t}$$

$$\boxed{\Omega_s=\frac{2\pi}{T}}$$

§2-2 连续时间信号的取样及取样定理

理想取样信号傅氏变换

$$\hat{X}(j\Omega)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-j(\Omega-m\Omega_s)t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j(\Omega-m\Omega_s)t}dt$$

原连续时间信号傅氏变换

$$X_a(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j\Omega t}dt$$

结论：
1.乘以1/T
2.周期延拓

$$\hat{X}(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a\left[j(\Omega-m\Omega_s)\right]$$

$$\boxed{\Omega_s=\frac{2\pi}{T}}$$

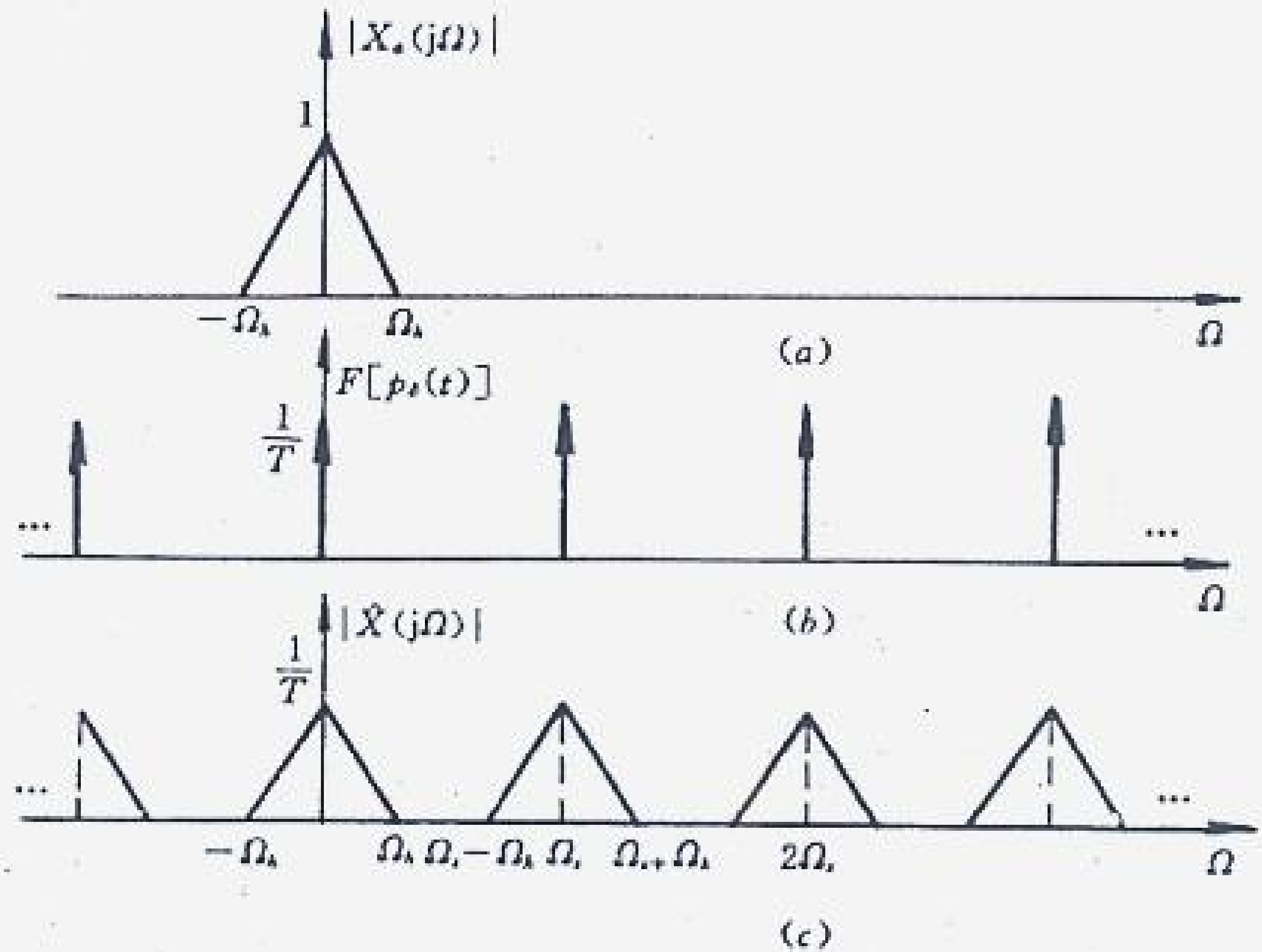


图 2—3　理想取样信号的频谱

(a) 原连续时间信号 $x_a(t)$ 的频谱　　(b) $p_\delta(t)$ 的梳状谱

(c) 理想取样信号 $\hat{x}(t)$ 的频谱

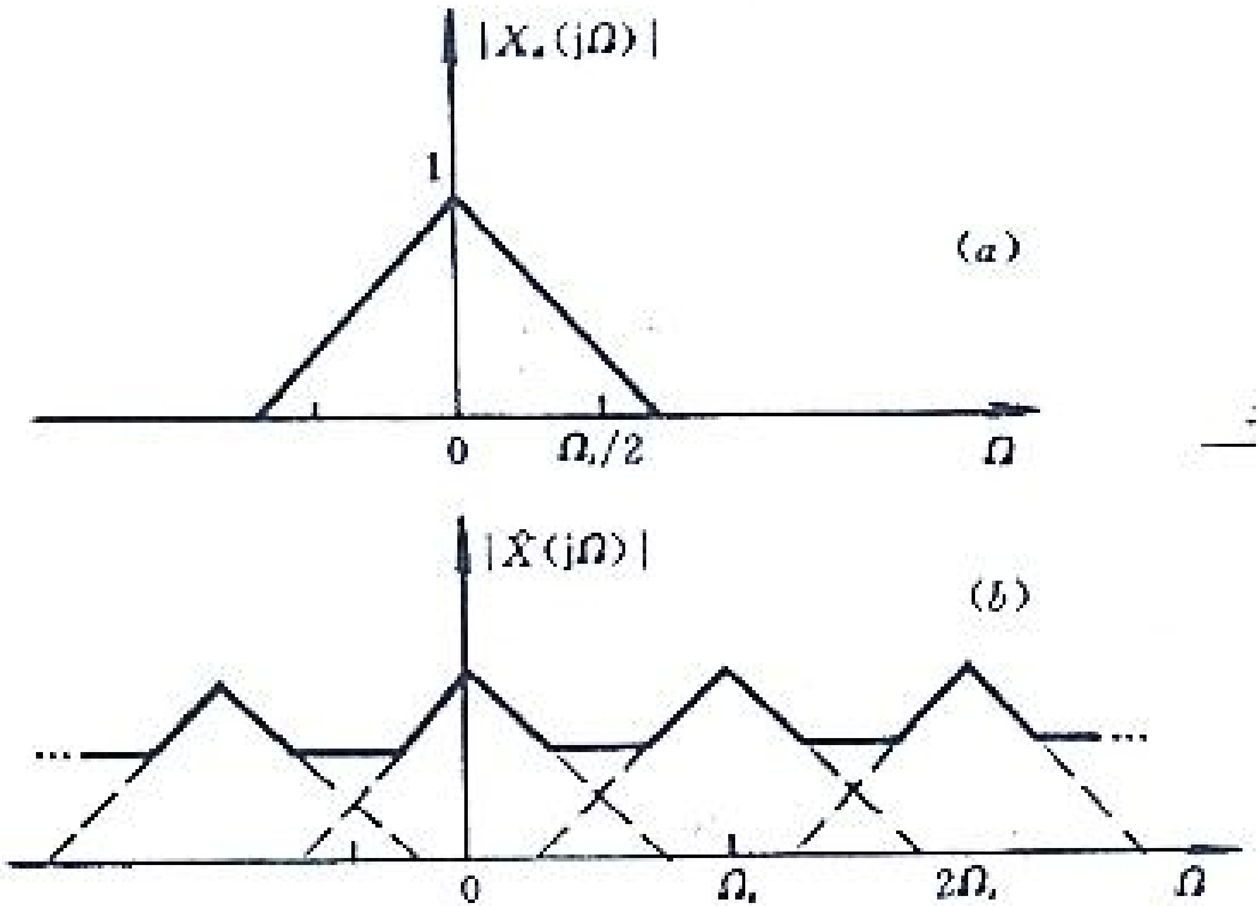


图 2－4　频谱的混叠

(a) 原连续时间信号 $x_a(t)$ 的频谱

(b) 信号取样后发生的频谱混叠现象

§2-2 连续时间信号的取样及取样定理

讨论：

1.限带信号

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le \Omega \le \Omega_h \\ \Omega_s \ge 2\Omega_h \end{array}}$$

2.信号最高频率

$$\boxed{\Omega_h \le \frac{1}{2}\Omega_s}$$

折叠频率：$\Omega_0 = \dfrac{1}{2}\Omega_s$

奈奎斯特频率：Ω_h

（信号最高频率）

香农取样定理：

取样频率必须大于原模拟信号频谱中最高频率的两倍，则 $x_a(t)$ 可由其取样信号$x(nT)$来唯一表示。

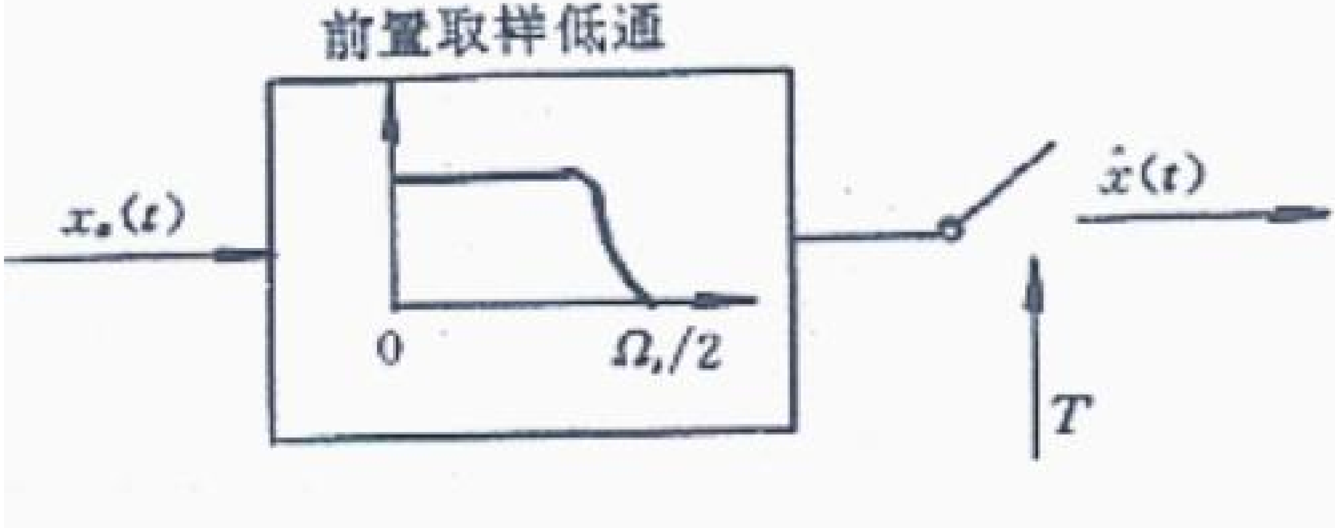


图 2—5　利用前置低通滤波器
防止频谱混叠的产生

§2-2 连续时间信号的取样及取样定理

问题：

采用非零脉宽取样频谱？

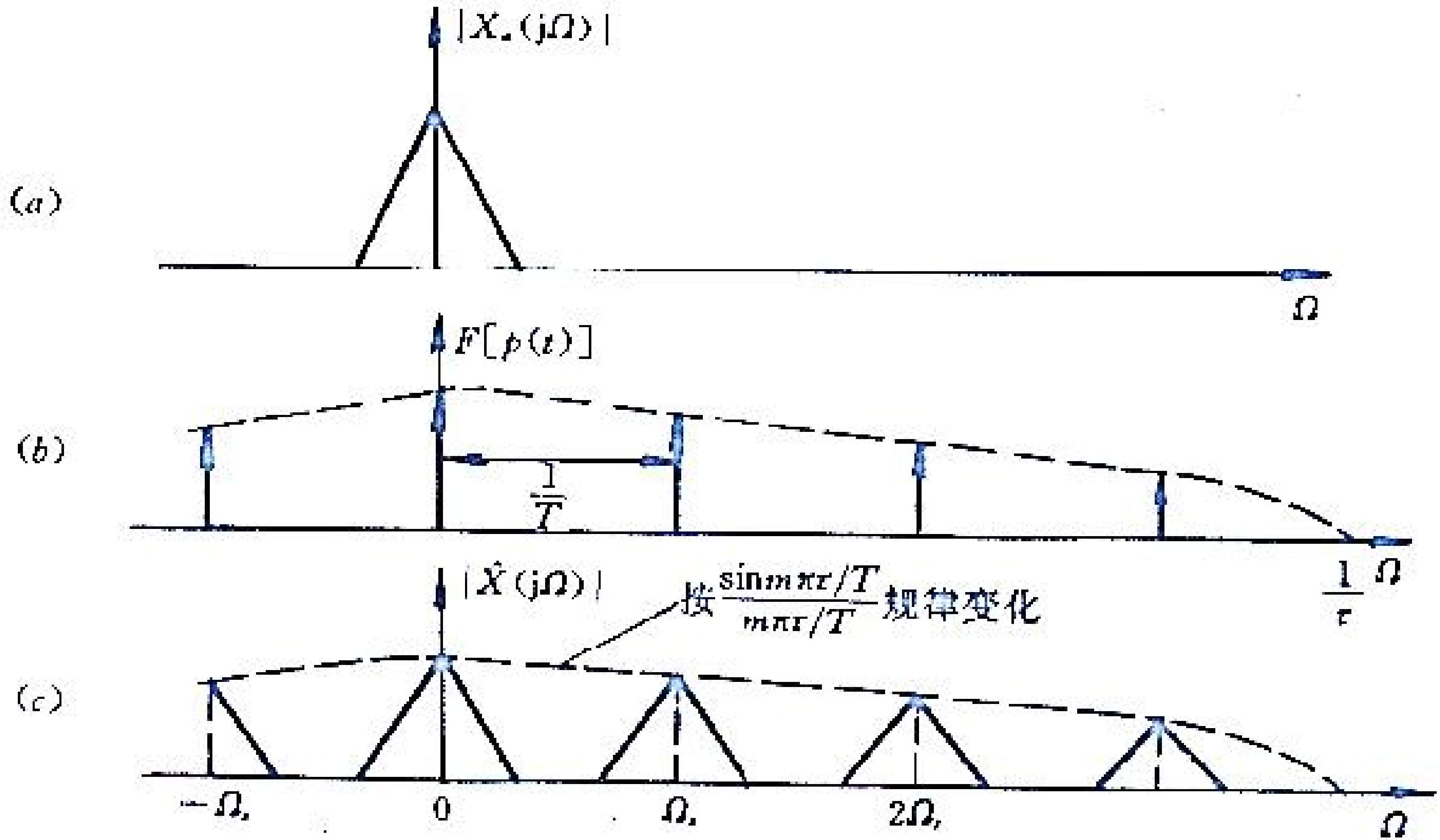


图 2—6　利用有限宽度的脉冲取样所得的取样信号幅度谱

(a) 原连续时间信号 $x_a(t)$ 的幅度谱　　(b) $p(t)$ 的频谱

(c) 利用有限宽度的脉冲取样所得的取样信号幅度谱

§2-2 连续时间信号的取样及取样定理

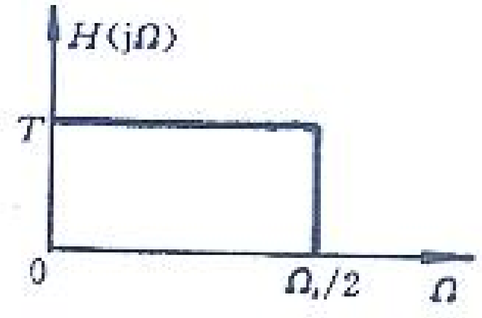
三、信号的恢复

设信号最高频率不超过折叠频率

$$X_a(j\Omega)=\begin{cases}X_a(j\Omega) & |\Omega|<\Omega_s/2\\ 0 & |\Omega|\ge\Omega_s/2\end{cases}$$

不产生混叠

$$\boxed{\hat{X}(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a\left[j\left(\Omega-m\Omega_s\right)\right]}$$



理想滤波器

$$H(j\Omega)=\begin{cases}T & |\Omega|<\Omega_s/2\\ 0 & |\Omega|\ge\Omega_s/2\end{cases}$$

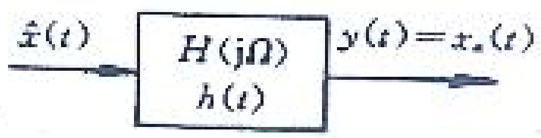


图 2—7 取样信号的恢复

$$Y(j\Omega)=\hat{X}(j\Omega)H(j\Omega)=X_a(j\Omega)$$

$$y(t)=x_a(t)$$

四、取样内插公式

$$\boxed{h_a(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$ 理想滤波器脉冲响应

$$= \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{\sin\frac{\Omega_s}{2}t}{\frac{\Omega_s}{2}t} = \frac{\sin\frac{\pi}{T}t}{\frac{\pi}{T}t}$$

$$\boxed{\Omega_s = \frac{2\pi}{T}}$$

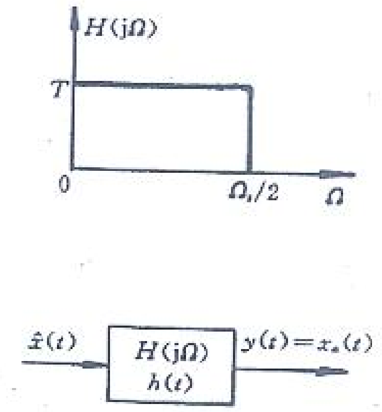


图 2—7 取样信号的恢复

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)$$

内插函数

$$h_a(t-nT) = \frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

理想取样信号通过低通滤波器(卷积)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}(\tau)h_a(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(\tau-nT)h_a(t-\tau)d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-nT)h_a(t-\tau)d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\boxed{h_a(t-nT)}$$

§2-2 连续时间信号的取样及取样定理

四、取样内插公式

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)h_a(t-nT)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

$$=x_a(t)$$

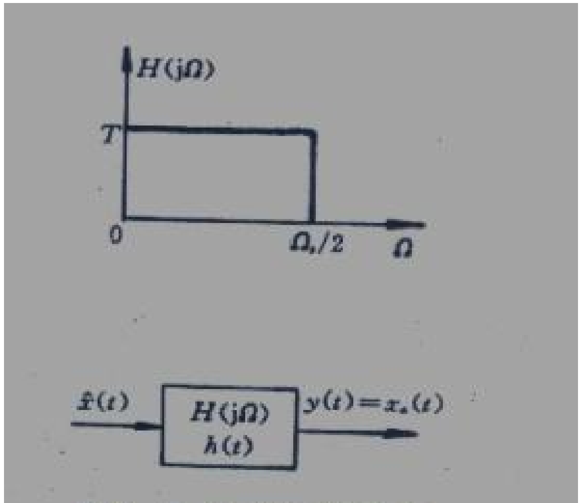


图 2—7 取样信号的恢复

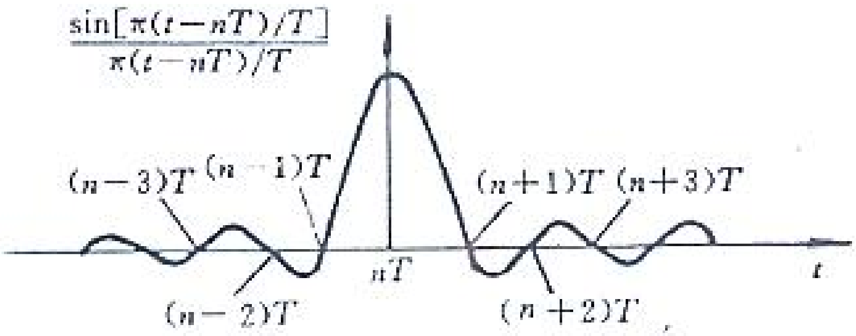


图 2—8 内插函数

如何理解不损失任何信息

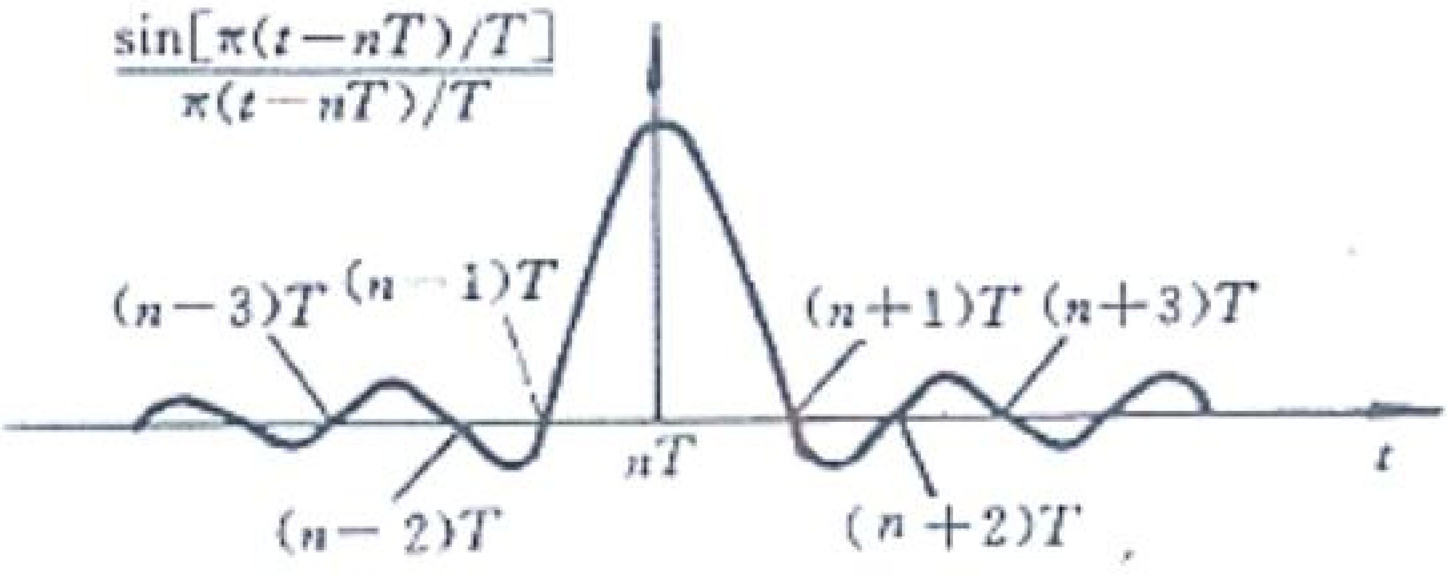
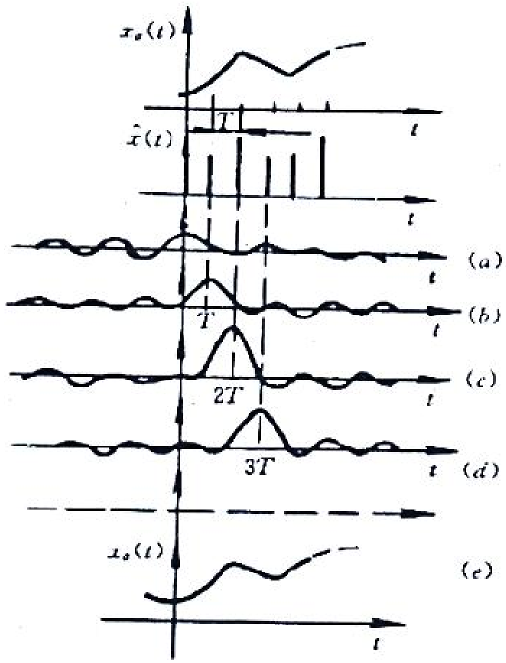


图 2−8 内插函数

结论：只要满足取样率高于两倍信号最高频率，连续时间函数$x_a(t)$可以由它的取样值$x_a(nT)$来表达而不损失**任何**信息。这时只要把每一个取样瞬间的函数值乘上对应的内插函数并求其总和，即可得到$x_a(t)$。



(a) $x_a(0T)\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{T}\right)(t-0T)}{\left(\dfrac{\pi}{T}\right)(t-0T)}$

(b) $x_a(1T)\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{T}\right)(t-1T)}{\left(\dfrac{\pi}{T}\right)(t-1T)}$

(c) $x_a(2T)\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{T}\right)(t-2T)}{\left(\dfrac{\pi}{T}\right)(t-2T)}$

(d) $x_a(3T)\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{T}\right)(t-3T)}{\left(\dfrac{\pi}{T}\right)(t-3T)}$

(e) $x_a(t)=\Sigma x_a(nT)\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{T}\right)(t-nT)}{\left(\dfrac{\pi}{T}\right)(t-nT)}$

图 2—9　内插函数叠加成连续时间函数 $x_a(t)$

特点：每一取样点上由于只有该取样值所对应的内插函数不为零，所以各取样点上的信号值不变，而取样点之间的信号则由各取样值内插函数波形延伸叠加而成。