# 数字信号处理

周治国

2023.9

# 第三章
# 离散傅里叶变换

# §3-5 离散傅里叶变换的性质

## 1.线性特性

$$\boxed{\text{迭加原理}}\quad \begin{aligned} &x_3(n)=ax_1(n)+bx_2(n)\\ &X_3(k)=DFT\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=aX_1(k)+bX_2(k)\end{aligned}$$

## 2.可用正变换计算逆变换

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)W_N^{kn}\right]^*=\frac{1}{N}\left\{DFT[X^*(k)]\right\}^*$$

## 3.对称定理

$$\forall x(n)\xleftrightarrow{DFT}X(k)$$

则 $$\frac{1}{N}X(n)\xleftrightarrow{DFT}x(-k)\triangleq x(N-k)$$

$$0\le n\le N-1 \qquad\qquad 0\le k\le N-1$$

# §3-5 离散傅里叶变换的性质

4.反转定理

$$\forall x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$$

则 $$x(-n) \xleftrightarrow{DFT} X(-k)$$

5.序列的总和

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) = X(k)\Big|_{k=0} = X(0)$$

6.序列的起始值

$$x(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

# §3-5 离散傅里叶变换的性质

7.序列加长后的DFT

$$\forall x(n), 0 \le n \le N-1 \longleftrightarrow X(k), 0 \le k \le N-1$$

令

$$g(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & N \le n \le mN-1 \end{cases} \quad \forall m \in I$$

问题：

$$G(k) \stackrel{\triangle}{=} DFT\left[g(n)\right] \sim X(k)$$

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

由DFT的定义：

$$G(k)=\sum_{n=0}^{mN-1} g(n) W_{mN}^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{Nm}kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{k}{m}n}$$

$$=X\left(\frac{k}{m}\right)\stackrel{\triangle}{=}X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}\frac{k}{m}}$$

$$k=0,1,\cdots,mN-1$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{而}\quad X(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\\ &k=0,1,\cdots,N-1\\ &X(e^{j\omega})\xleftrightarrow{DTFT}x(n)\end{aligned}}$$

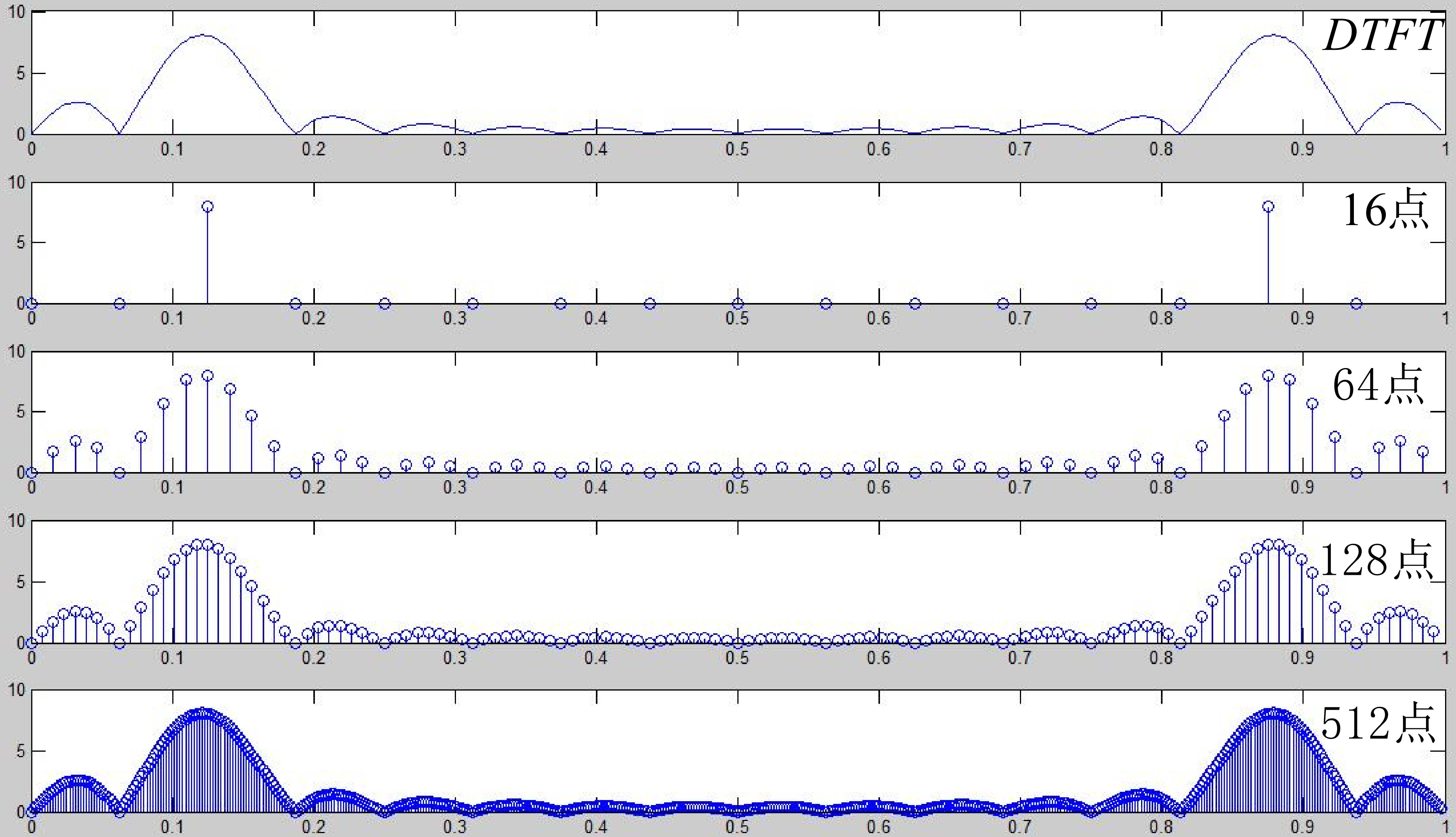
$\therefore G(k)$与$X(k)$具有相同的形状，不同之处是$G(k)$的频谱间隔比$X(k)$的小。即通过补零，可以得到更加细致的频谱。

# 延长序列的DFT

序列x=sin(0.25*pi*n)； n=0:15；

补零到64点，128点，512点，作DFT运算

17?



```
>> n=0:15
x=sin(0.25*pi*n)
L1=0:15
dft_16=fft(x,16)
L2=0:63
dft_64=fft(x,64)
L3=0:127
dft_128=fft(x,128)
L4=0:511
dft_512=fft(x,512)

nx=0:15
K=512
dw=2*pi/K
k=0:511
X=x*exp(j*dw*nx'*k)
subplot(5,1,1)
plot(k*dw/(2*pi),abs(X))

subplot(5,1,2)
stem(L1/16,abs(dft_16))
subplot(5,1,3)
stem(L2/64,abs(dft_64))
subplot(5,1,4)
stem(L3/128,abs(dft_128))
subplot(5,1,5)
stem(L4/512,abs(dft_512))
```

思考：

1.检索“频率分辨力”和“频率分辨率”的区别，或“频率分辨率”的两重含义。

2.从下面仿真，延长序列能否提高频率分辨力？能否提高频率分辨率？

频率分辨力：是指分辨输入信号中两个频率分量最小间隔的能力，即把频率信号区分开来的能力。

注意关于“频率分辨率”的说法有两种含义：
一种是本课本中P101“设F表示频率分量间的增量，它就是前面提到的频率分辨率(F=fs/N)”；
另外一种在很多其他参考书中是这么描述的：“注意：补零不能提高分辨率”。

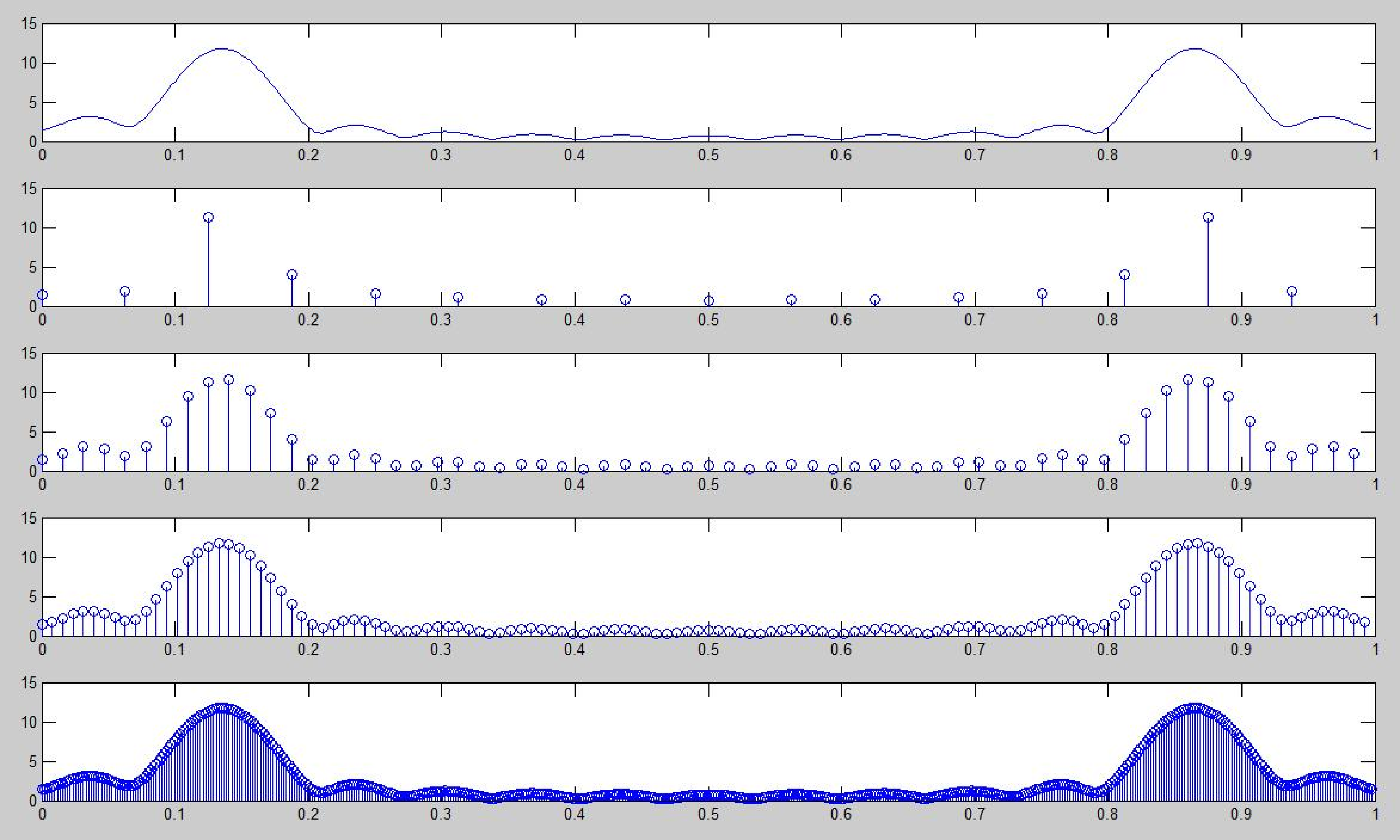
个人建议采用规范说法：“注意：补零不能提高分辨力”。

可以参考“程佩青《数字信号处理》”第二版P121，有关频率分辨力的描述。

# 延长序列的DFT

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.30*pi*n)； n=0:15；

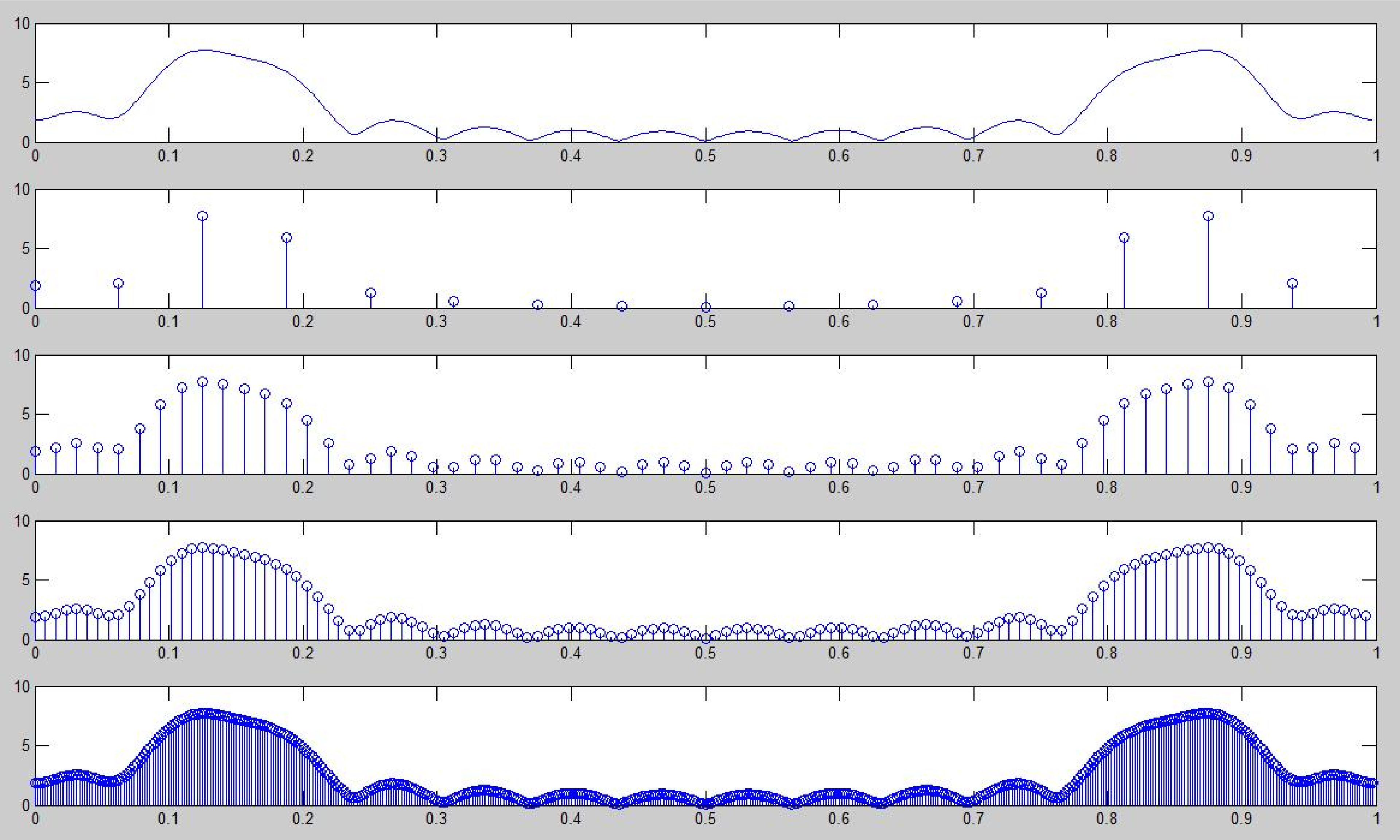
补零到64点，128点，512点，作DFT运算



# 延长序列的DFT

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.33*pi*n)； n=0:15；

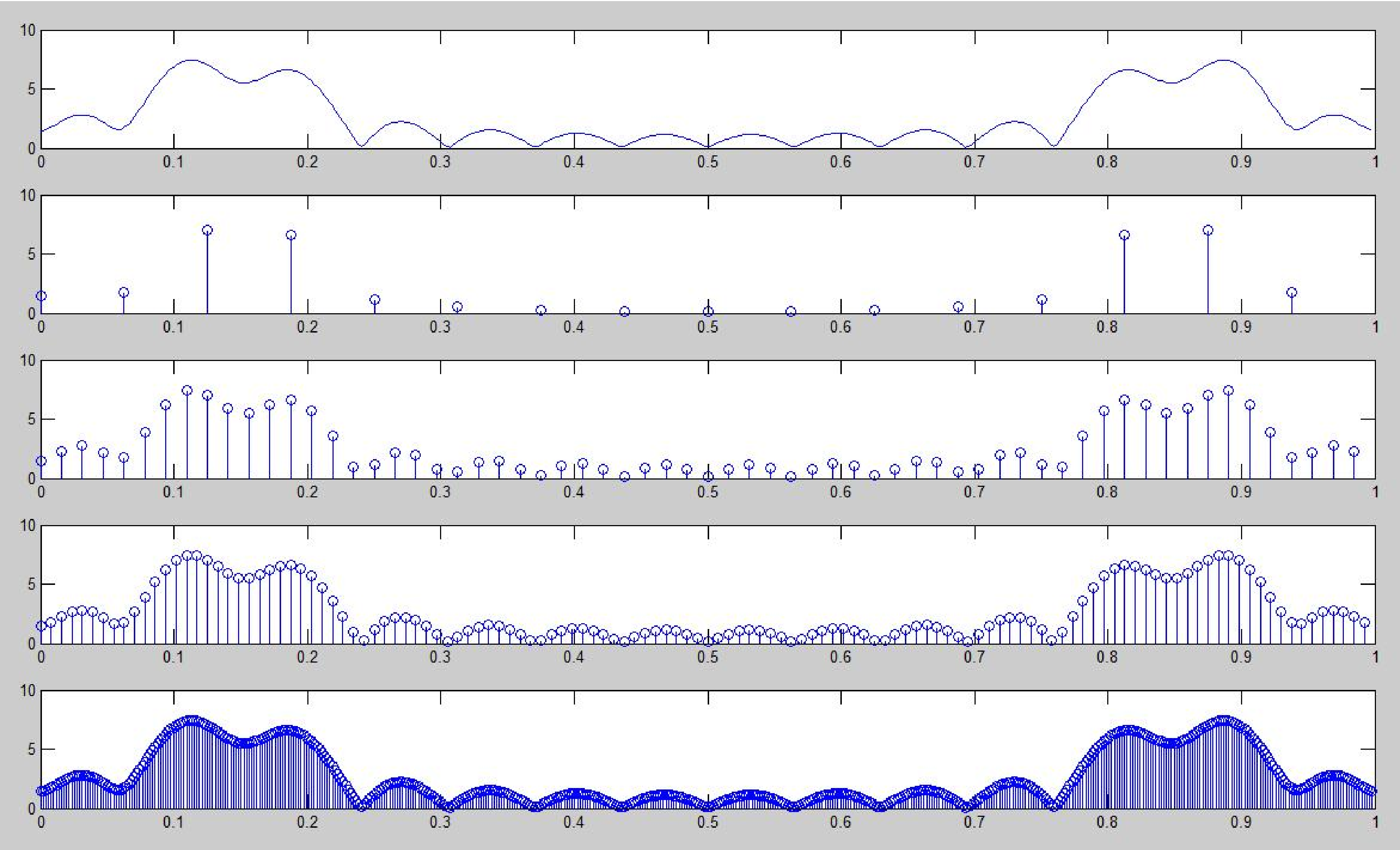
补零到64点，128点，512点，作DFT运算



延长序列的DFT

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.34*pi*n)；  n=0:15；

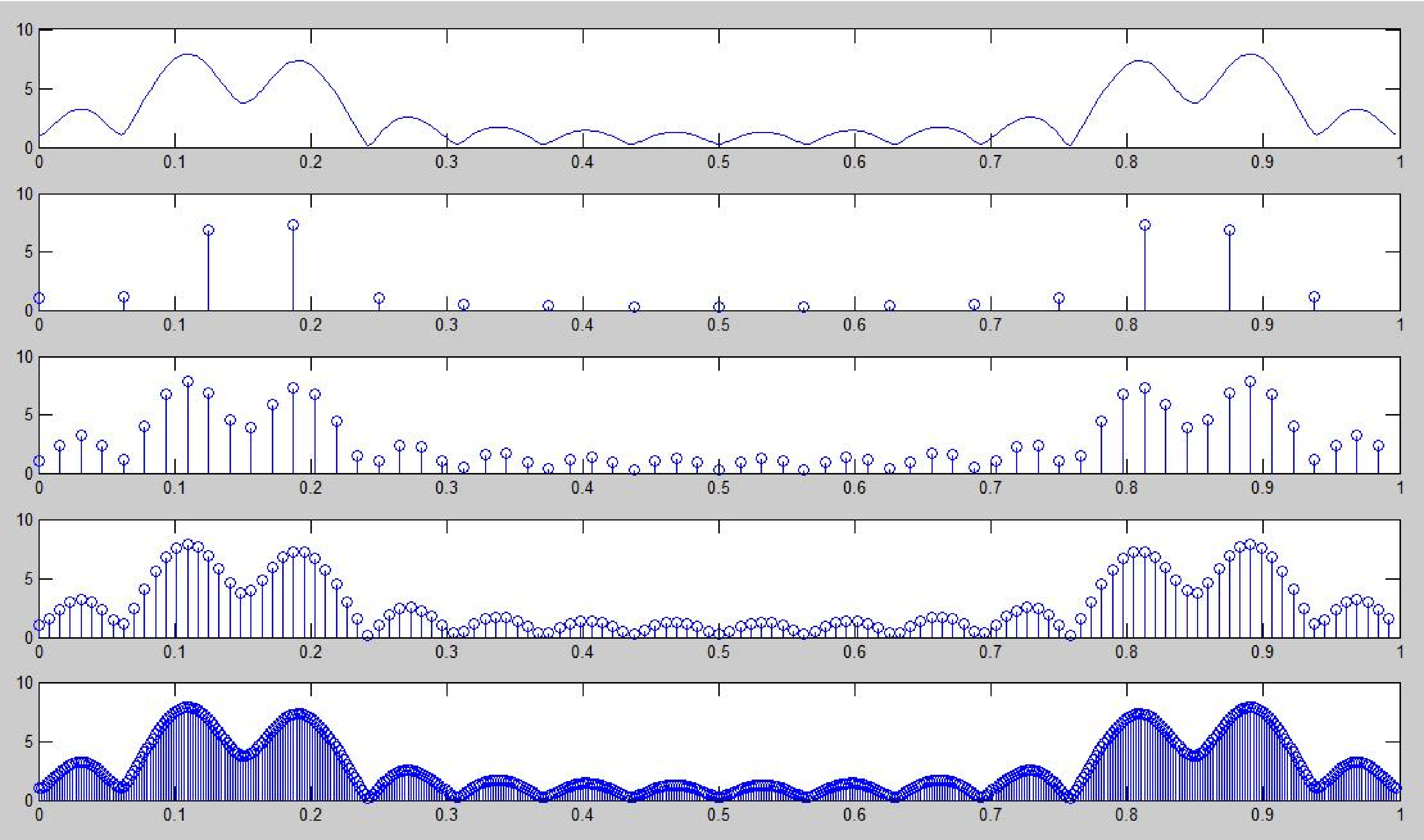
补零到64点，128点，512点，作DFT运算



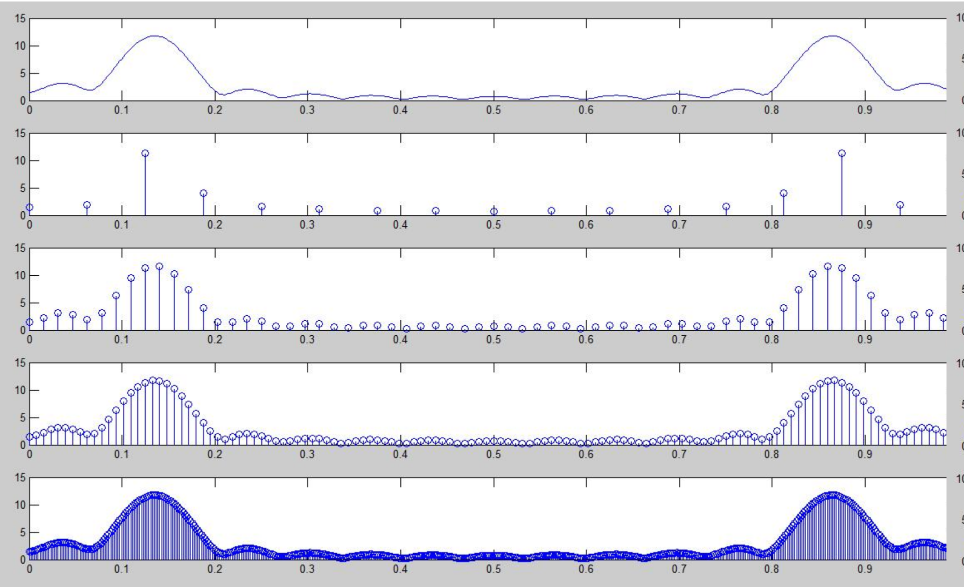
# 延长序列的DFT

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.35*pi*n)； n=0:15；

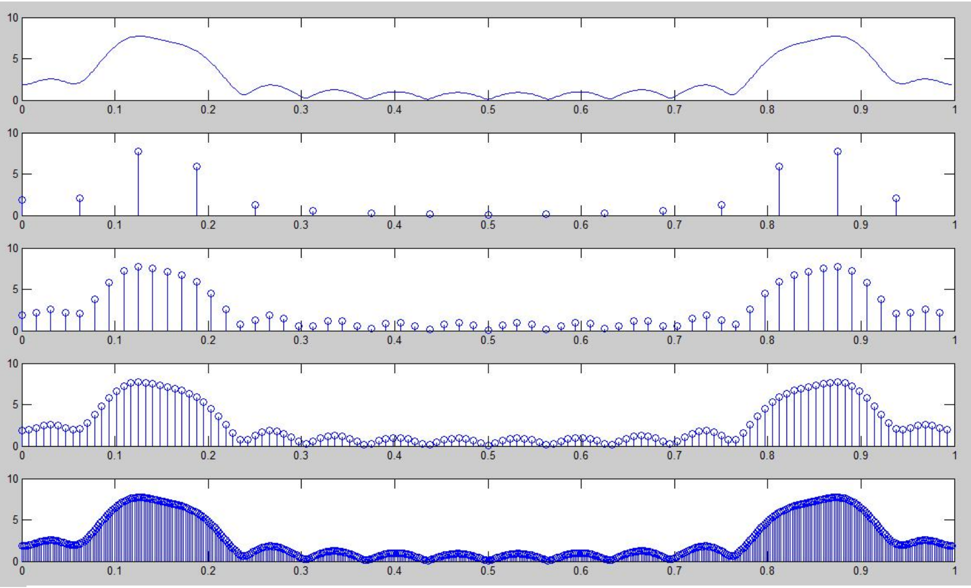
补零到64点，128点，512点，作DFT运算



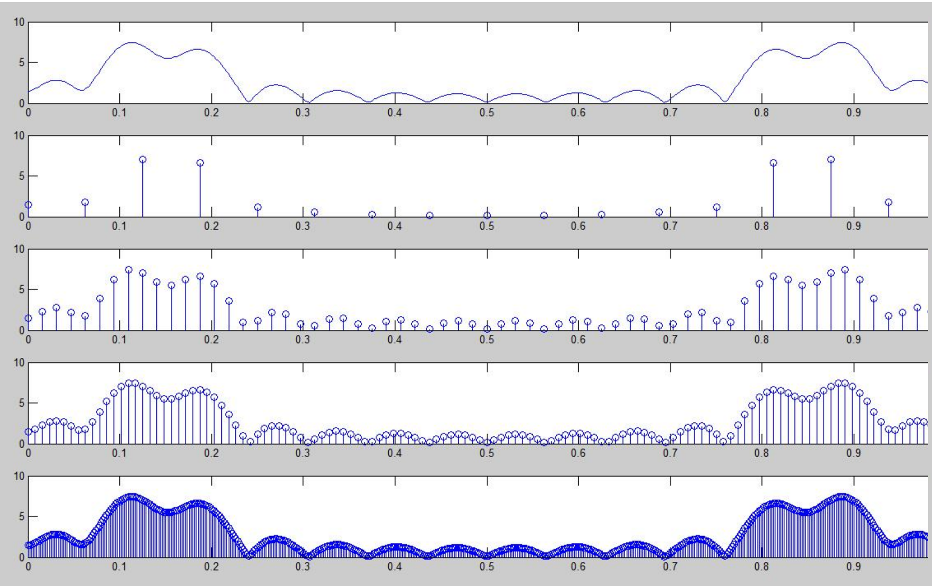
x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.30*pi*n)



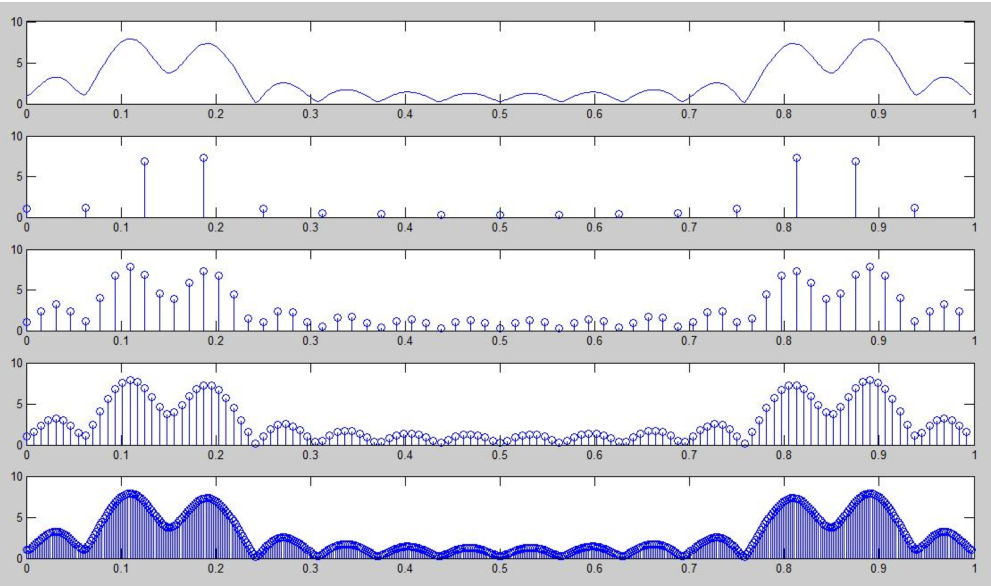
x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.33*pi*n)



x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.34*pi*n)



x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.35*pi*n)



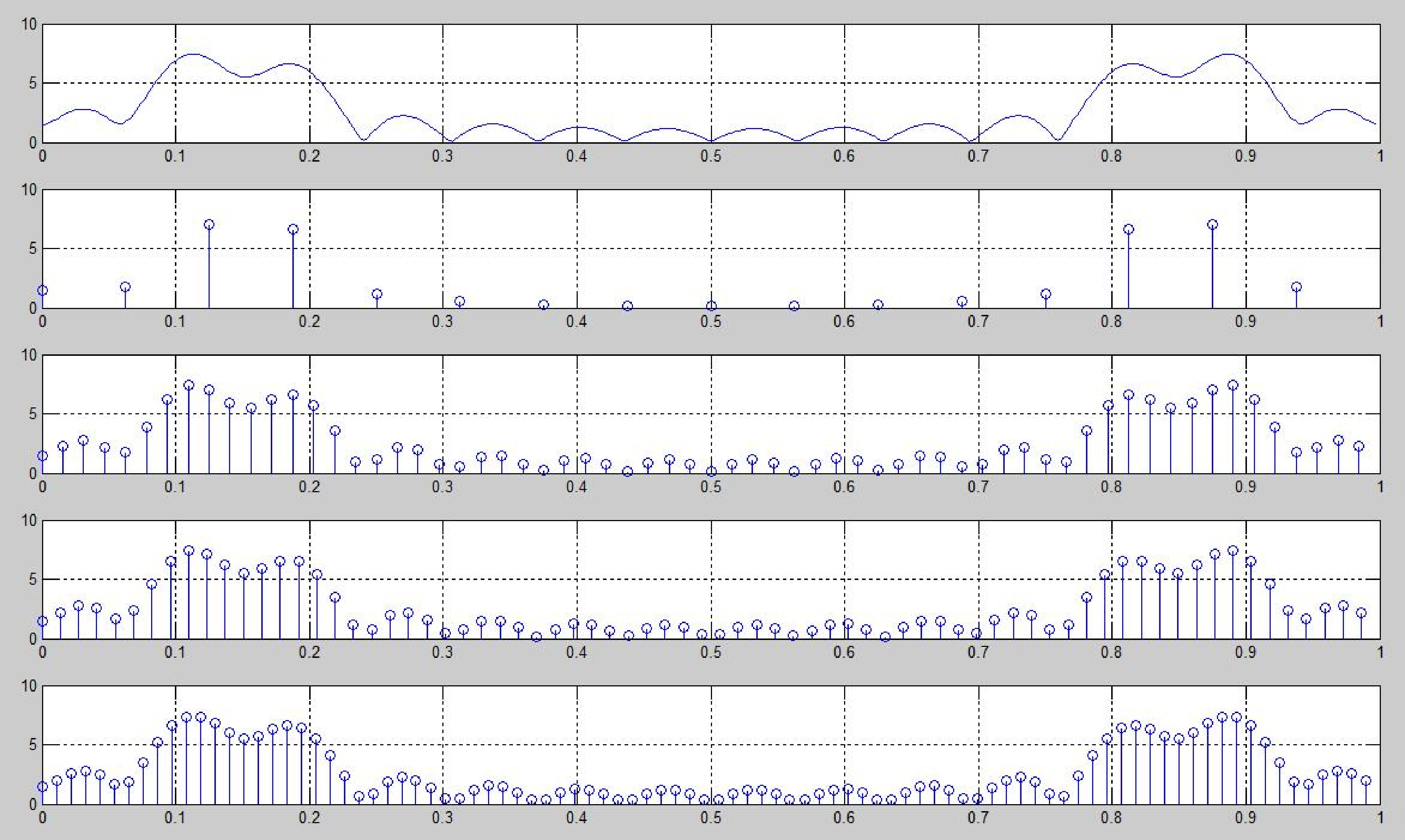
matlab参考程序：

```
n=0:15
x=sin(0.25*pi*n)+sin(0.34*pi*n)
L1=0:15
dft_16=fft(x,16)
L2=0:63
dft_64=fft(x,64)
L3=0:127
dft_128=fft(x,128)
L4=0:511
dft_512=fft(x,512)

nx=0:15
K=512
dw=2*pi/K
k=0:511
X=x*exp(j*dw*nx'*k)
subplot(5,1,1)
plot(k*dw/(2*pi),abs(X))

subplot(5,1,2)
stem(L1/16,abs(dft_16))
subplot(5,1,3)
stem(L2/64,abs(dft_64))
subplot(5,1,4)
stem(L3/128,abs(dft_128))
subplot(5,1,5)
stem(L4/512,abs(dft_512))
```

延长序列的DFT (不是N的整数次幂)

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.35*pi*n)； n=0:15；

补零到64点，73点，93点，作DFT运算



问题1：

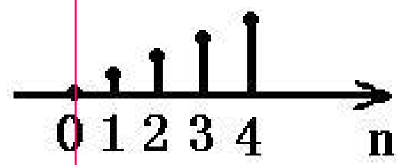
序列DFT运算后，X(k)中间几个点的模值比较大，能否直接置零实现低通滤波？

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

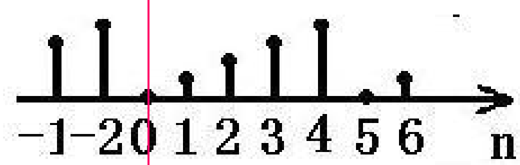
8.圆周移位定理

（1）圆周移位

$$\forall x(n), 0 \le n \le N-1$$

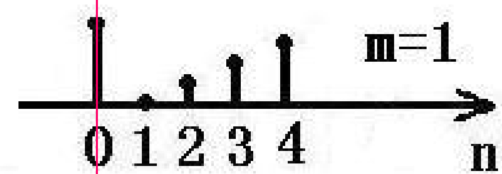



$$\tilde{x}(n) = x((n))_N$$




$$\tilde{x}(n-m) = x((n-m))_N$$


$$x_1(n) = x((n-m))_N R_N(n)$$



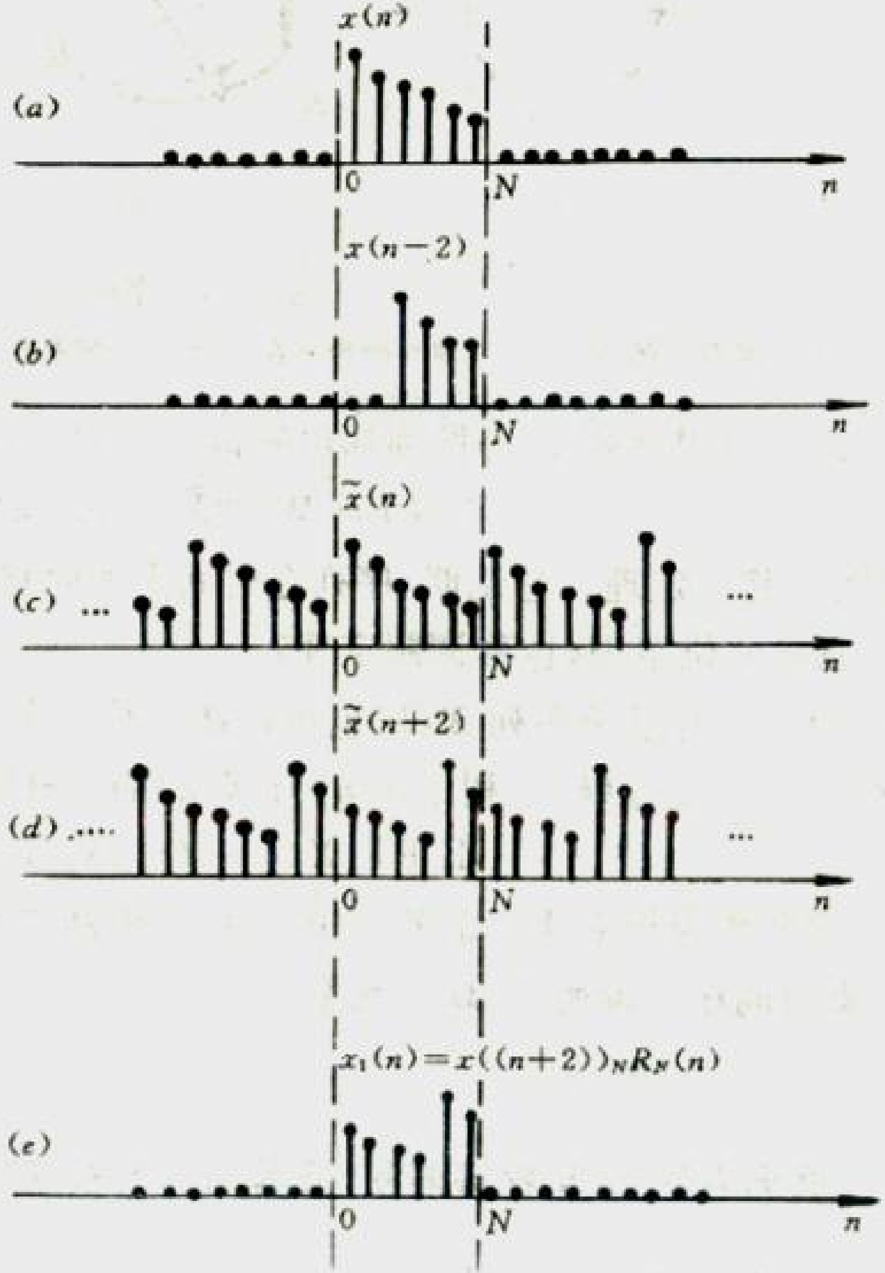



图 3—7　圆周移位过程图

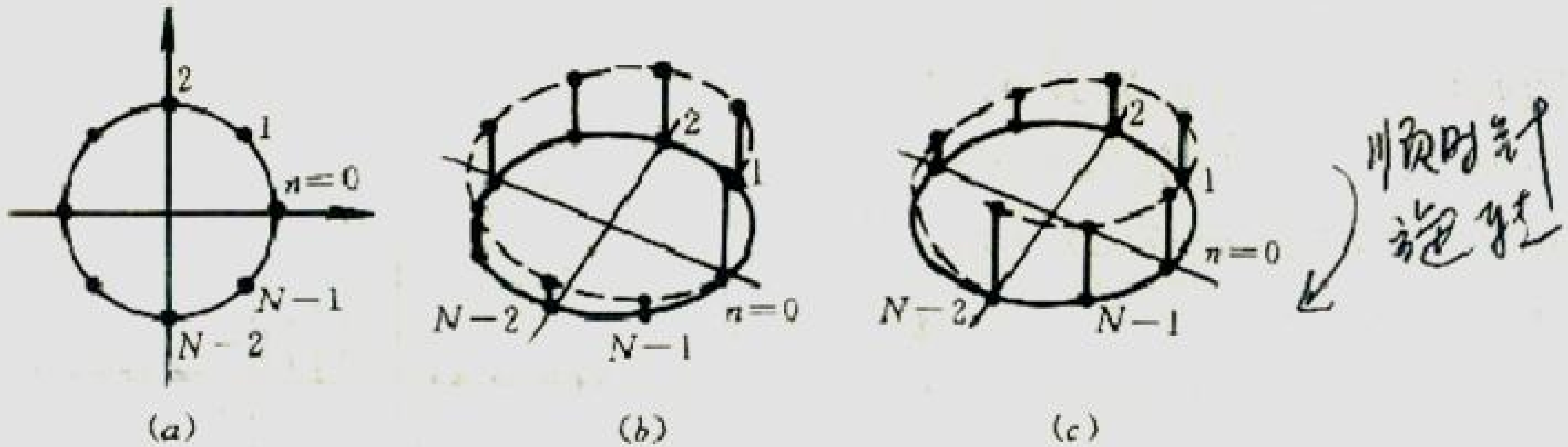



图 3—8 序列的圆周移位

(a) $N$ 等分的圆周 (b) 将序列排列在 $N$ 等分的圆周上 (c) 令圆周旋转得序列 $x(n)$的圆周移位

立体展示，有助理解

# §3-5 离散傅里叶变换的性质

圆周移位计算，习题集：P38-4

已知序列$x(n)=\{1,1,3,2\}$，画出

$(a)x((-n))_5$

$(b)x((-n))_6R_6(n)$

$(c)x((n))_3R_3(n)$

$(d)x((n))_6$

$(e)x((n-3))_5R_5(n)$

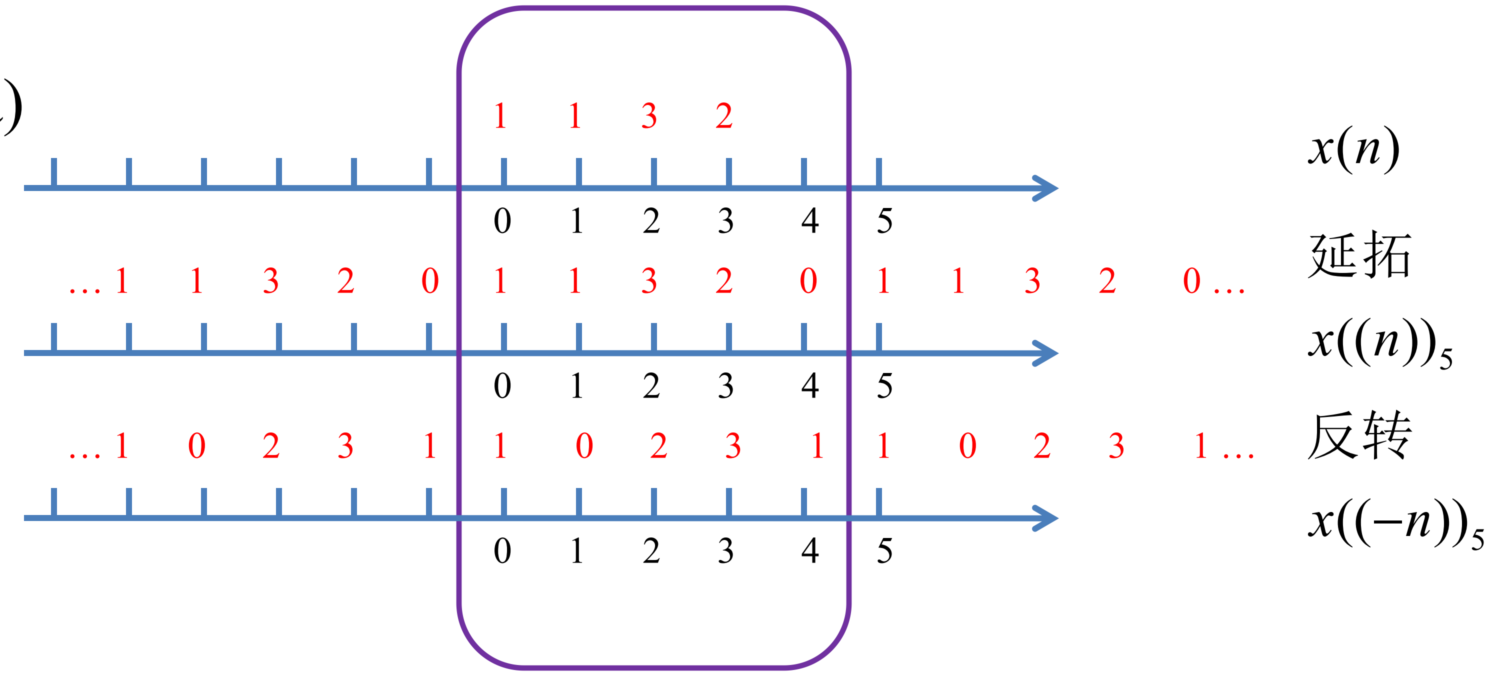
$(f)x((n))_7R_7(n)$

已知序列$x(n)=\{1,1,3,2\}$，画出

$(a)x((-n))_5$　　$(b)x((-n))_6R_6(n)$　　$(c)x((n))_3R_3(n)$

$(d)x((n))_6$　　$(e)x((n-3))_5R_5(n)$　　$(f)x((n))_7R_7(n)$

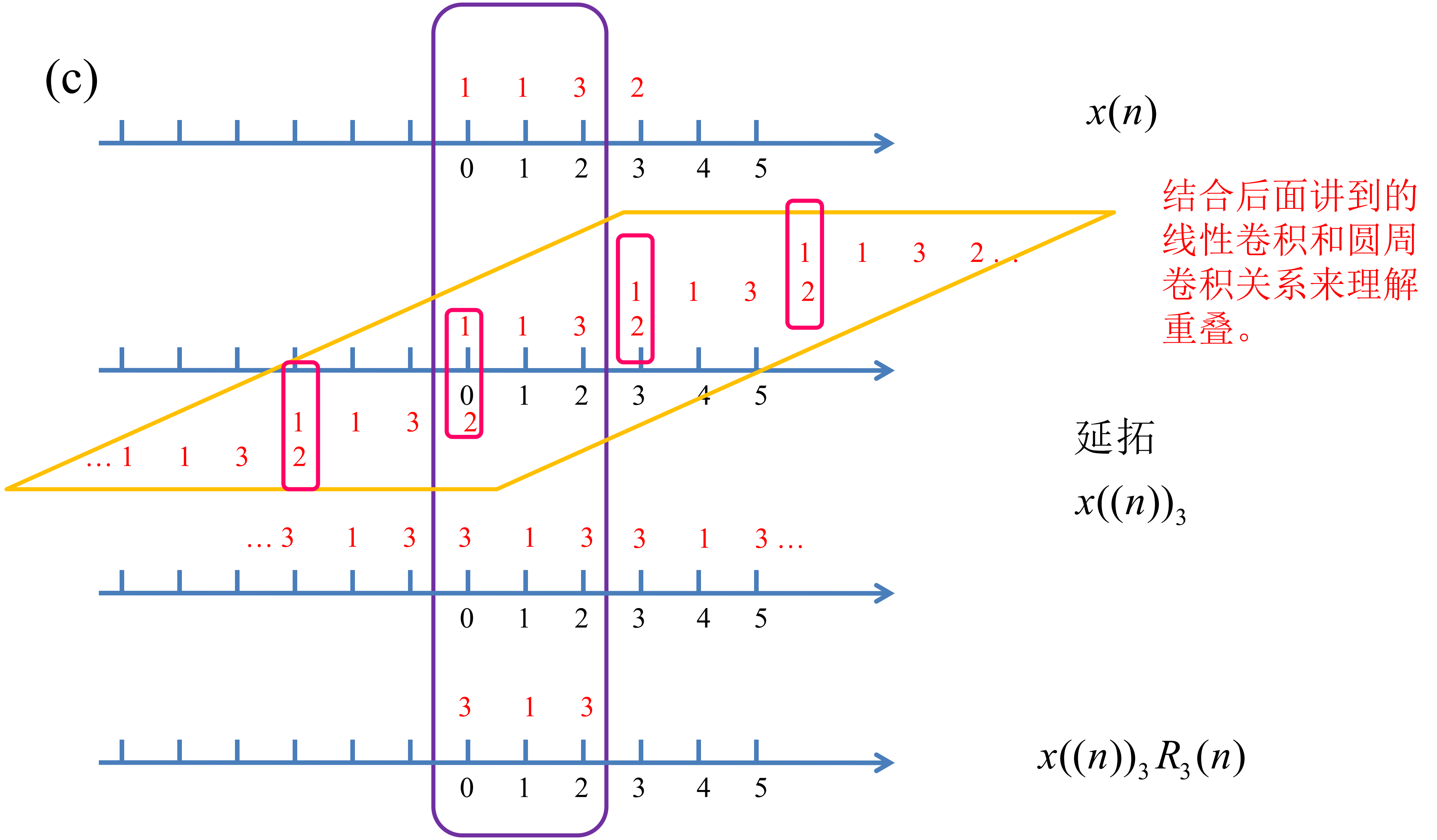
(a)



已知序列$x(n)=\{1,1,3,2\}$，画出

$(a)x((-n))_5$　$(b)x((-n))_6R_6(n)$　$(c)x((n))_3R_3(n)$

$(d)x((n))_6$　$(e)x((n-3))_5R_5(n)$　$(f)x((n))_7R_7(n)$



# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

（2）时间移位定理

由DFS的性质（3－21）式：

$$若\tilde{x}(n)\xleftrightarrow{DFS}\tilde{X}(k),则\tilde{x}(n-m)\xleftrightarrow{DFS}W_N^{mk}\tilde{X}(k)$$

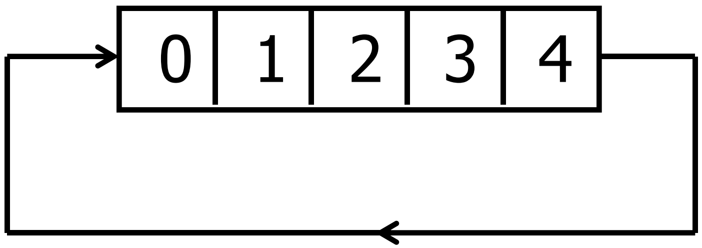
右移m

$$\tilde{X}_1(k)=W_N^{km}\tilde{X}(k)$$

$$\therefore X_1(k)=\tilde{X}_1(k)R_N(k)$$

$$=W_N^{km}\tilde{X}(k)R_N(k)$$

$$=W_N^{km}X(k)$$




循环移位

$$x_1(n)\overset{\triangle}{=}x((n-m))_N R_N(n)\leftrightarrow W_N^{km}X(k)$$

注意与（3－46）式比较

书上是左移

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

（3）频率移位定理

$$\forall x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$$

由DFS的性质（3－22）式：

若$\tilde{X}(k) \xleftrightarrow{IDFS} \tilde{x}(n)$, 则$\tilde{X}(k-l) \xleftrightarrow{IDFS} W_N^{-nl}\tilde{x}(n)$

$$\widetilde{X}(k-l) \xleftrightarrow{DFS} W_N^{-nl}\widetilde{x}(n)$$

$$\therefore X_2(k) \triangleq \tilde{X}(k-l)R_N(k) \xrightarrow{DFT} W_N^{-nl}\tilde{x}(n)R_N(n)$$

$$= W_N^{-nl}x(n)$$

$$= x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}nl}$$

$$\therefore X_2(k) \triangleq X\left((k-l)\right)_N R_N(k) \xleftrightarrow{DFT} W_N^{-nl}x(n)$$

注意与（3－47）式的区别

# §3-5 离散傅里叶变换的性质

## 9.圆周卷积（循环卷积）

### （1）时域圆周卷积定理

由DFS的性质（3－23）式：

$$\tilde{X}_3(k)=\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$$

$$\updownarrow \text{DFS} \qquad\qquad \updownarrow \text{DFS}$$

循环卷积

$$\tilde{x}_3(n)=\tilde{x}_1(n)\tilde{\circledast}\,\tilde{x}_2(n)=IDFS\left[\tilde{X}_3(k)\right]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

$$\therefore X_3(k) = \widetilde{X}_3(k) R_N(k)$$

$$= \widetilde{X}_1(k) \widetilde{X}_2(k) R_N(k)$$

$$= X_1(k) X_2(k)$$

$$x_3(n) = \widetilde{x}_3(n) R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) R_N(n)$$

$$= \left[ \boxed{\sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N} x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \boxed{x_2((n-m))_N R_N(n)}$$

$$= x_1(n) \otimes x_2(n)$$

注意n m
自变量
作用域

$$\therefore X_1(k) X_2(k) \xleftrightarrow{DFT} x_1(n) \otimes x_2(n)$$

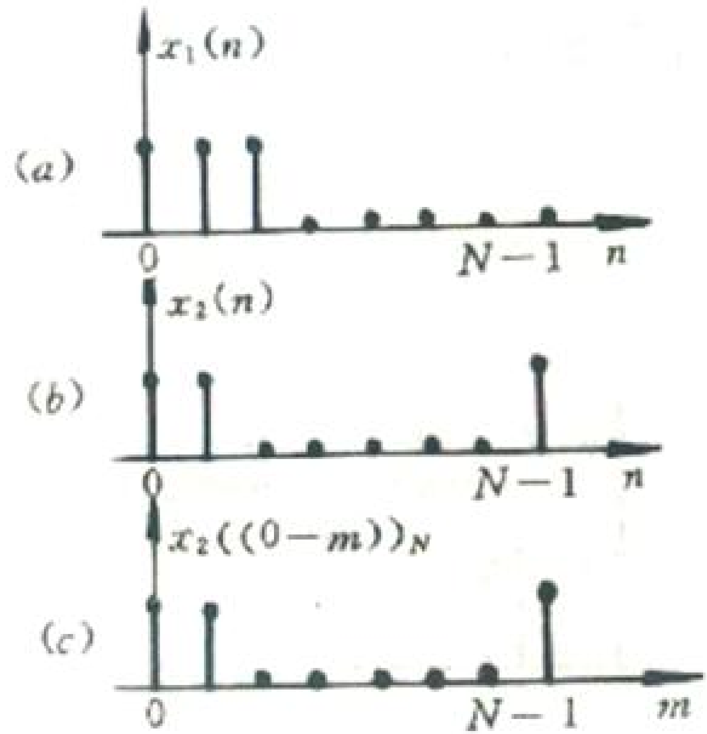



图 3—9 圆周卷积

(a) 序列 $x_1(n)$ (b) 序列 $x_2(n)$ (c) $x_2((0-m))_N$ (d) $x_2((1-m))_N$ (e) 序列 $x_3(n)$

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

（2）频域圆周卷积

$$x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k)$$

# §3-5 离散傅里叶变换的性质

（3）圆周卷积与线性卷积的关系

$\forall x_1(n), 0 \le n \le N-1$

$x_2(n), 0 \le n \le M-1, M \le N$

$\otimes$: $\quad x_c(n) \overset{\triangle}{=} x_1(n) \otimes x_2(n), 0 \le n \le N-1$

*: $\quad x(n) \overset{\triangle}{=} x_1(n) * x_2(n), 0 \le n \le N+M-2$

如何使 $\quad x(n) = x_c(n) \qquad$ ？

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

如何使 $x(n)=x_c(n)$ ?

i）长度相同

令 $L=N+M-1$

$$x_1'(n)=\begin{cases}x_1(n) & 0\le n\le N-1\\ 0 & N\le n\le L-1\end{cases}\qquad x_2'(n)=\begin{cases}x_2(n) & 0\le n\le N-1\\ 0 & N\le n\le L-1\end{cases}$$

$$x_c'(n)=x_1'(n)\otimes x_2'(n),\quad 0\le n\le L-1$$

$$x(n)=x_1(n)*x_2(n),\quad 0\le n\le L-1$$

ii）取值相同

令 $\widetilde{x}_1(n)\overset{\triangle}{=}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}x_1'(n+qL)=x_1'((n))_L$

$$\widetilde{x}_2(n)\overset{\triangle}{=}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}x_2'(n+pL)=x_2'((n))_L$$

周期延拓

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

$$\tilde{x}_L(n) \overset{\triangle}{=} \tilde{x}_1(n) \widetilde{\otimes} \tilde{x}_2(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$$= \sum_{m=0}^{L-1} x_1'(m) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_2'(n-m+pL)$$

交换次序 $$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x_1'(m) x_2'(n+pL-m)$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n+pL-m)$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(n+pL)$$

以L为周期的周期延拓

$$\therefore x_c'(n) = \tilde{x}_L(n) R_L(n)$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(n+pL) R_L(n)$$

$$= x(n)$$

取主值区间

$\therefore$ 当 $L = N+M-1$

或 $\begin{matrix} 0 \le N \le L-1 \\ 0 \le N \le N+M-2 \end{matrix}$ 时

$$x_1(n) * x_2(n) = x_1'(n) \otimes x_2'(n)$$

由上述推导不难看出

$$\forall L \ge N+M-1$$

$$x_1'(n) \otimes x_2'(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

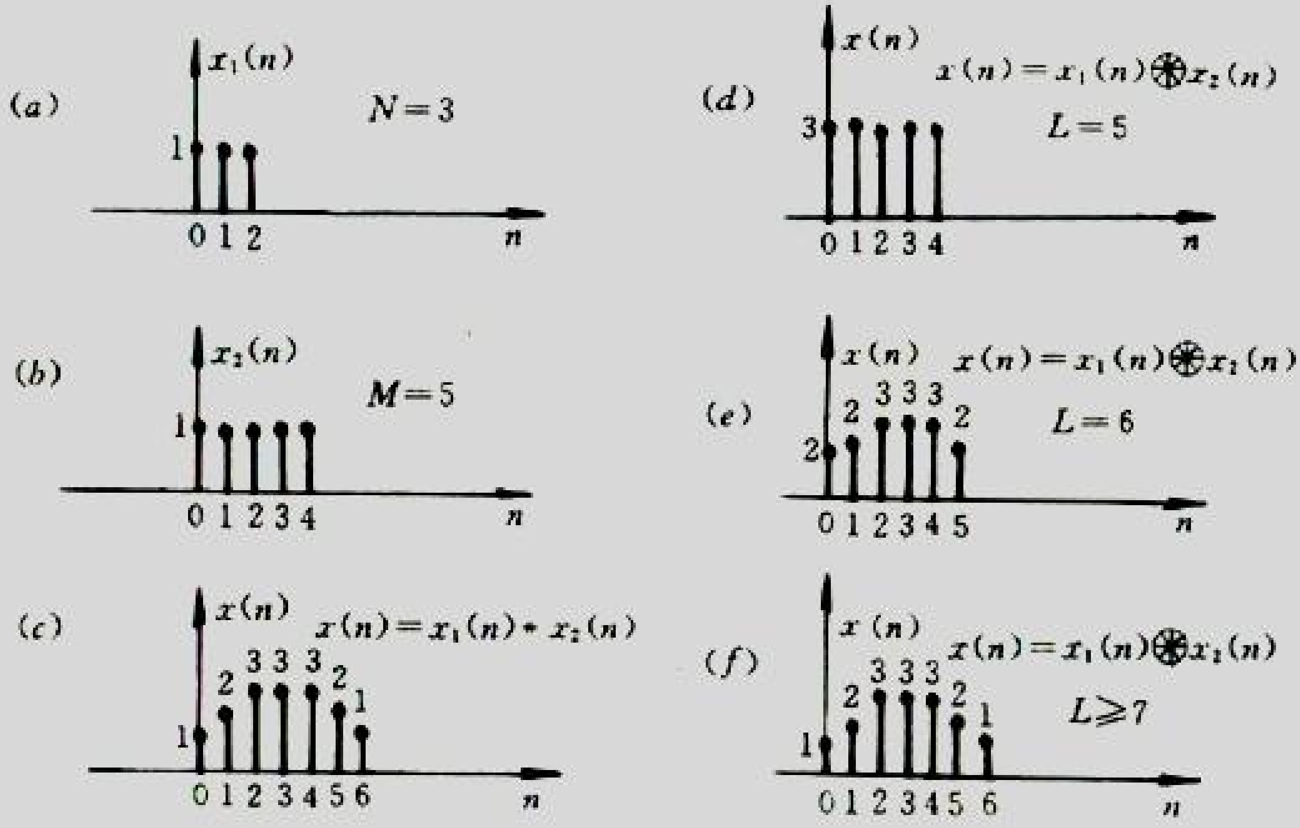
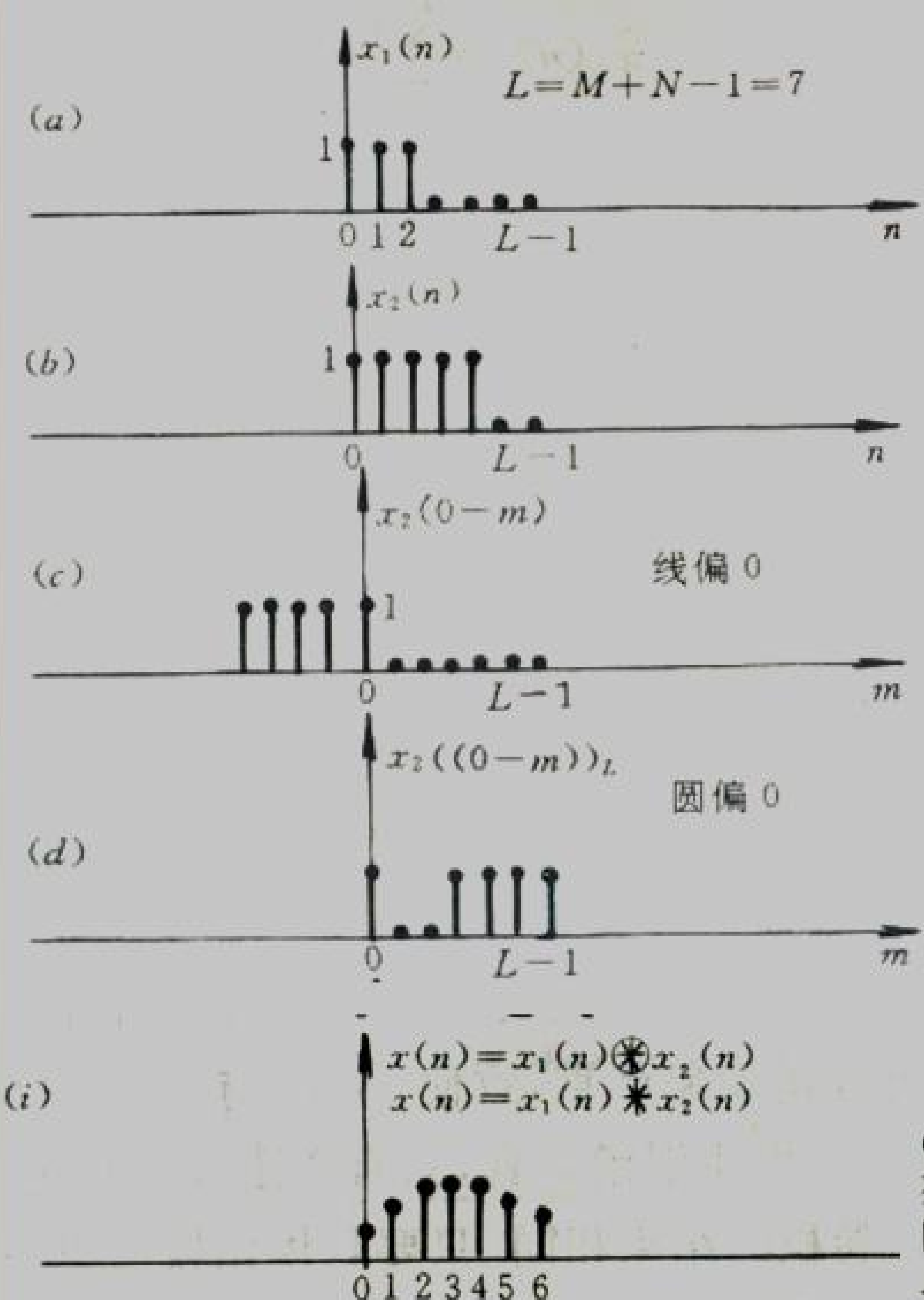



图 3—10　圆周卷积与线性卷积

(a) 序列 $x_1(n)$　(b) 序列 $x_2(n)$　(c) 序列 $x_1(n)$与 $x_2(n)$的线性卷积结果　(d) $x_1(n)$与 $x_2(n)$的列长 $L=5$ 的圆周卷积　(e) $x_1(n)$与 $x_2(n)$的列长 $L=6$ 的圆周卷积　(f) $x_1(n)$与 $x_2(n)$的列长 $L\geqslant 7$ 的圆周卷积



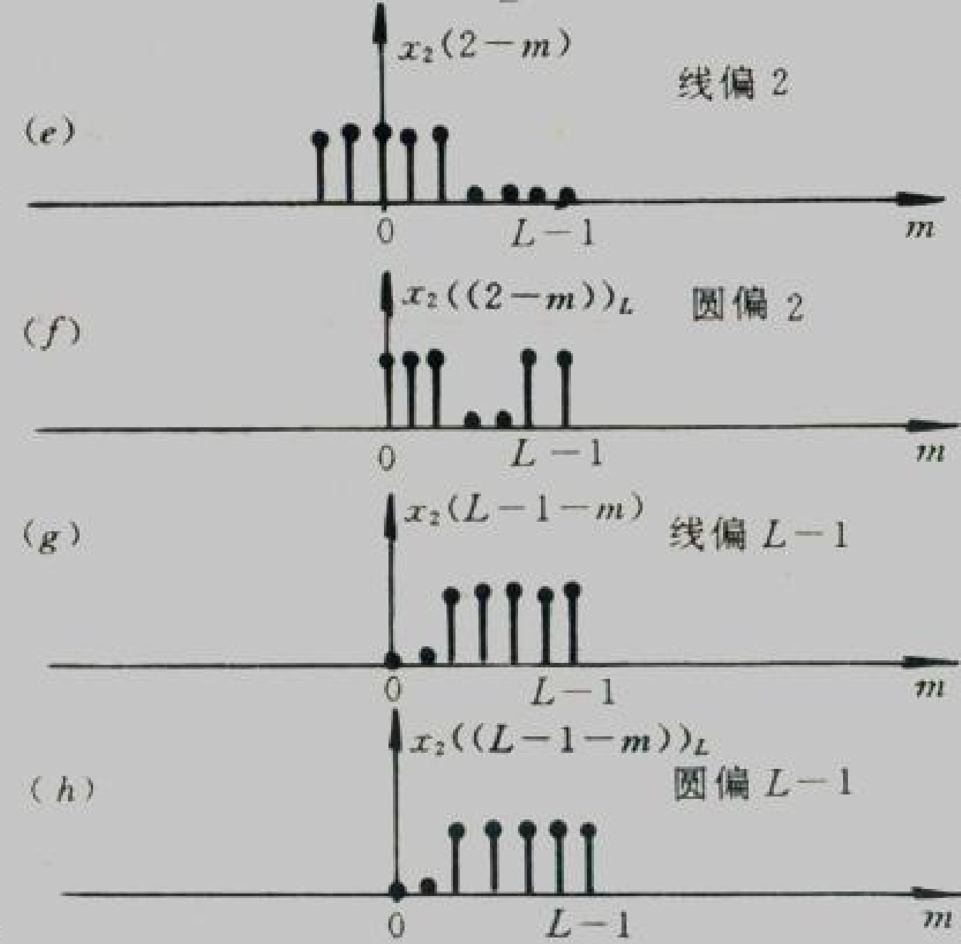




图 3—11 圆周移位及线性移位比较

(*a*) 补充零值点的列长为 $L$ 的 $x_1(n)$ (*b*) 补充零值点的列长为 $L$ 的 $x_2(n)$ (*c*) 线性移位零位的 $x_2(-m)$ (*d*) 圆周移位零位的 $x_2((-m))_L$ (*e*) 线性移位 2 位的 $x_2(2-m)$ (*f*) 圆周移位 2 位的 $x_2((2-m))_L$ (*g*) 线性移位 $L-1$ 位的 $x_2(L-1-m)$ (*h*) 圆周移位 $L-1$ 位的 $x_2((L-1-m))_L$ (*i*) 线性卷积与圆周卷积相等的 $x(n)$

# §3-5 离散傅里叶变换的性质

圆周卷积计算方法小结：

1，哑元坐标

2，周期延拓

3，反转

4，周期移位，相乘相加

例题：

历年考试真题

已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

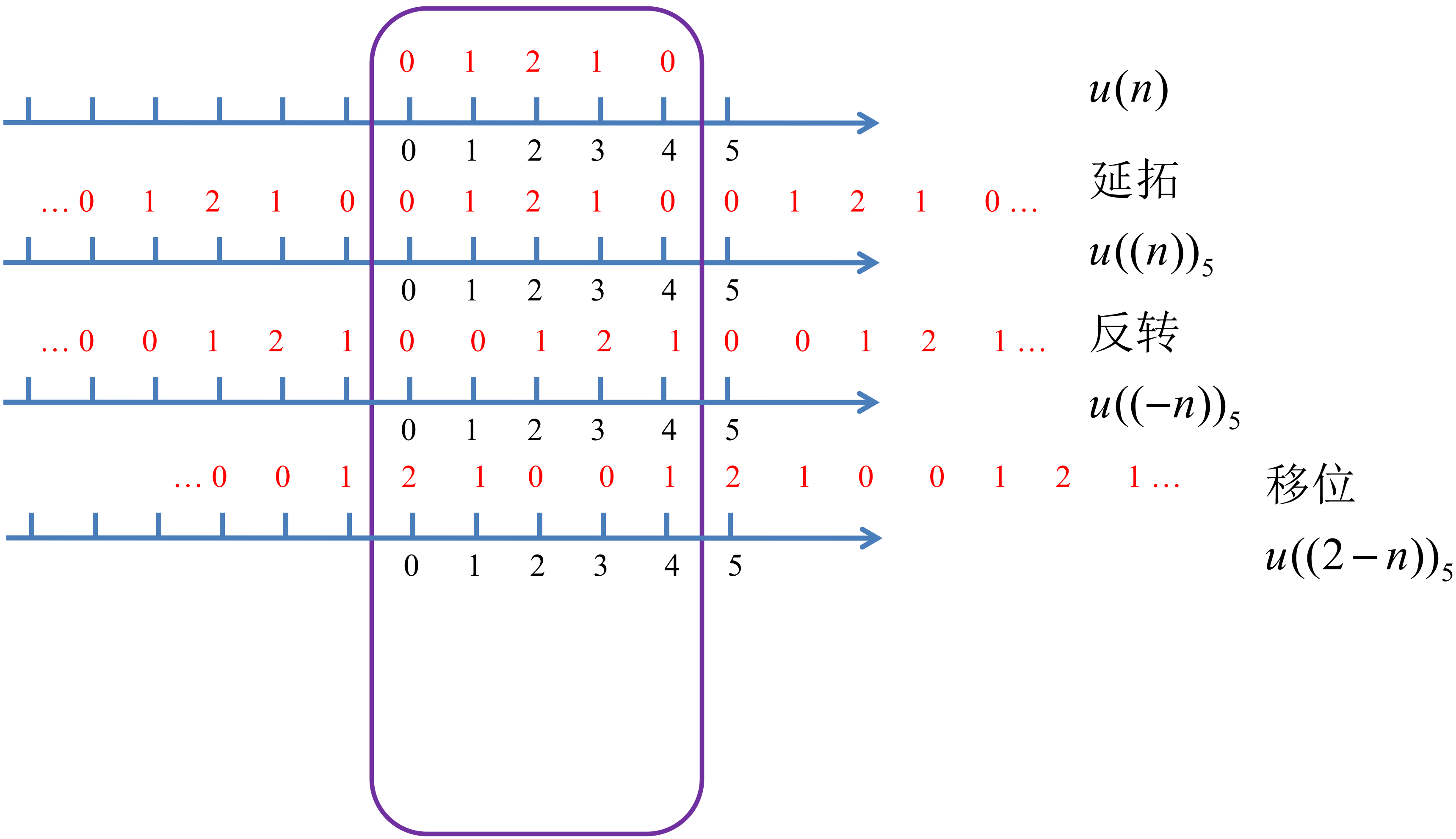
$(a)$画出$x(n)=u((2-n))_5 R_5(n)$的图形

$(b)$求序列$u(n)$和$v(n)$的线性卷积

$(c)$求序列$u(n)$和$v(n)$的5点圆周卷积

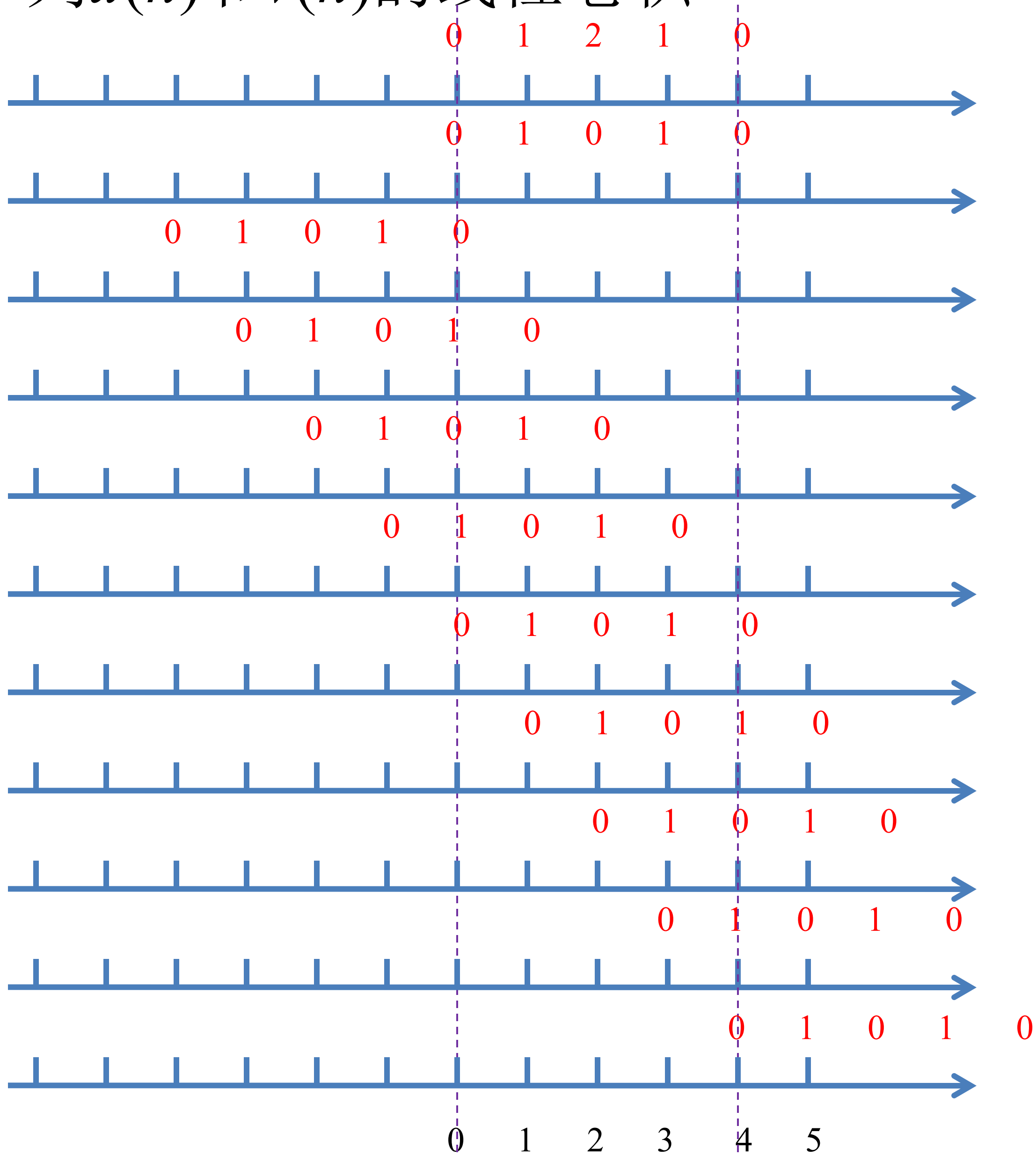
已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

(a)画出$x(n)=u((2-n))_5 R_5(n)$的图形



已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

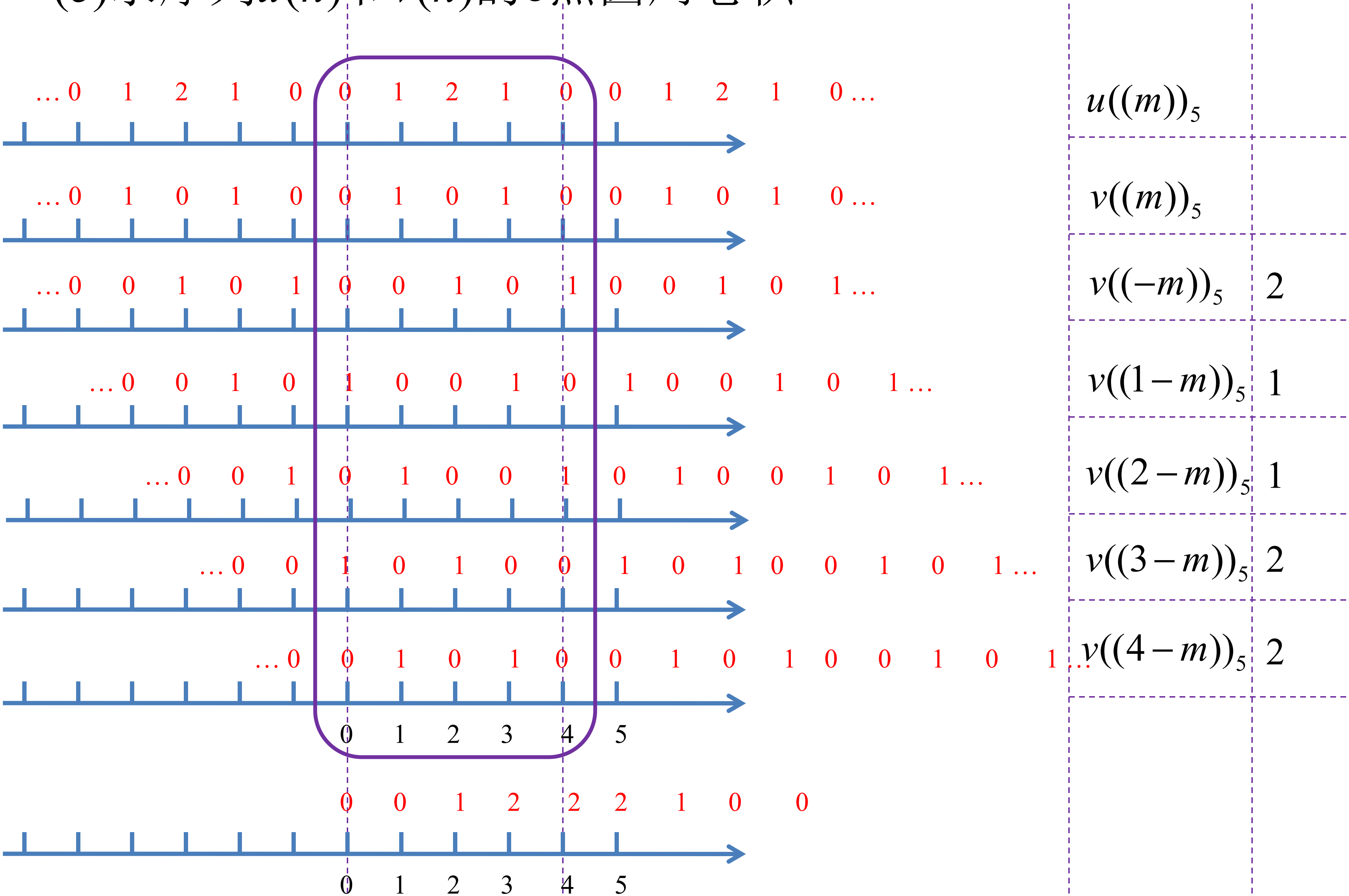
(b)求序列$u(n)$和$v(n)$的线性卷积




| | |
|---|---|
| $u(m)$ | |
| $v(m)$ | |
| $v(-m)$ | 0 |
| $v(1-m)$ | 0 |
| $v(2-m)$ | 1 |
| $v(3-m)$ | 2 |
| $v(4-m)$ | 2 |
| $v(5-m)$ | 2 |
| $v(6-m)$ | 1 |
| $v(7-m)$ | 0 |
| $v(8-m)$ | 0 |

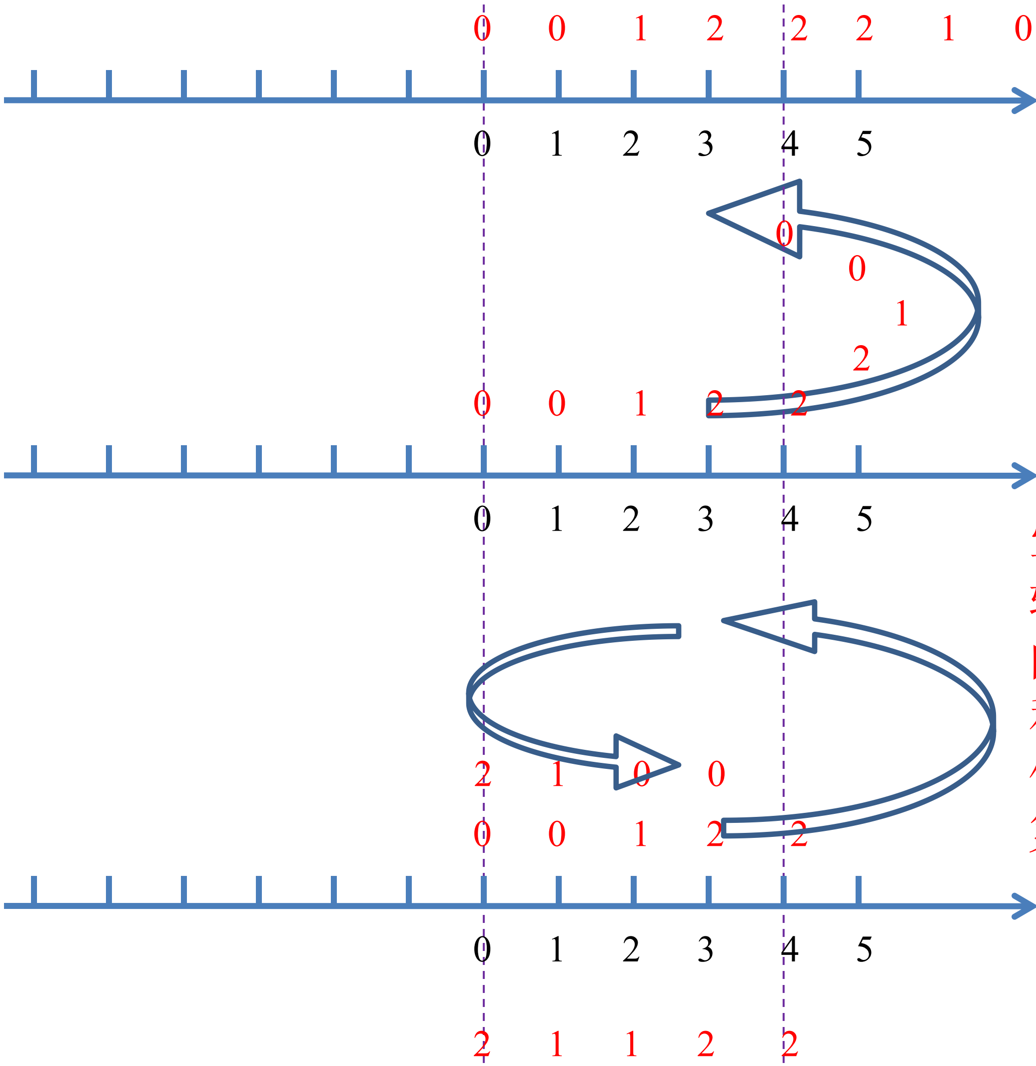
已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

(c)求序列$u(n)$和$v(n)$的5点圆周卷积



已知两个时间序列$u(n)=\{0,1,2,1,0\}$和$v(n)=\{0,1,0,1,0\}$

$(c)$求序列$u(n)$和$v(n)$的5点圆周卷积




掌握将L点线性卷积转化为N点圆周卷积的方法。

和前面讲到的圆周移位计算(习题集P38-4第(c)问)结合理解。

| | |
|---|---|
| $u((m))_5$ | |
| $v((m))_5$ | |
| $v((-m))_5$ | 2 |
| $v((1-m))_5$ | 1 |
| $v((2-m))_5$ | 1 |
| $v((3-m))_5$ | 2 |
| $v((4-m))_5$ | 2 |

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

（4）圆周卷积在信号处理中的应用

计算线性系统输出
- •线性卷积
- •圆周卷积-》快速卷积

快速卷积

$$\forall x(n),0 \le n \le N-1 \qquad h(n),0 \le n \le M-1$$

$$\exists x(n) * h(n) = ?$$

$$x(n) \to x'(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & N \le n \le L-1 \end{cases}$$

$$h(n) \to h'(n) = \begin{cases} h(n) & 0 \le n \le M-1 \\ 0 & M \le n \le L-1 \end{cases} \qquad L \ge N+M-1$$

# §3-5 离散傅里叶变换的性质

$$X'(k) = DFT\left[x'(n)\right]$$

$$H'(k) = DFT\left[h'(n)\right]$$

$$x(n) * h(n) = IDFT\left[X'(k)H'(k)\right]$$

$$\left(x'(n) \otimes h'(n)\right) \qquad 0 \le n \le L-1$$

如果$N >> M$　？

# §3-5 离散傅里叶变换的性质

重叠相加/保留法　　　　　　　　　　　如果$N >> M$ ？

则 $x(n)=\sum_{k=0}^{+\infty} x_k(n) \qquad n \ge 0$

令 $x_k(n)=\begin{cases} x(n) & kL \le n \le (k+1)L-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ (3-56)

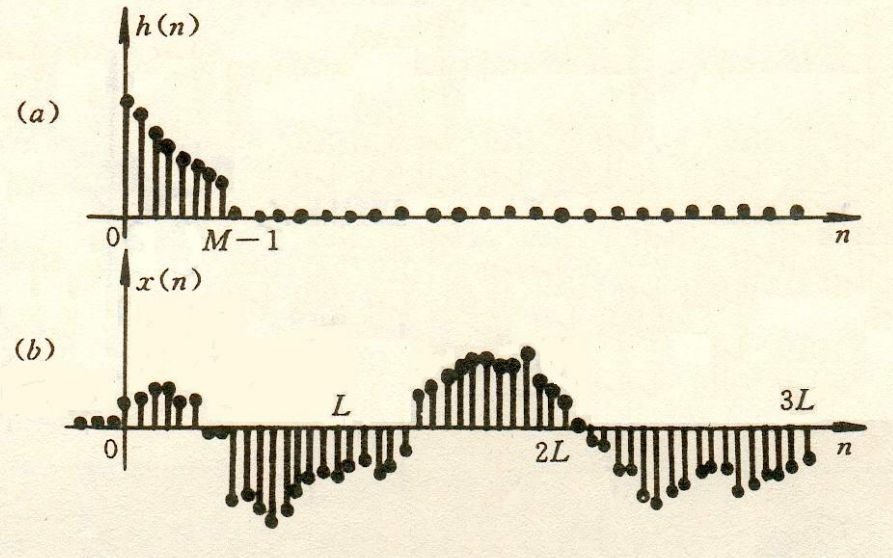



图 3—12　有限列长的单位取样响应及待处理的信号

(a) 单位取样响应 $h(n)$；(b) 待处理的信号 $x(n)$

$$x(n)*h(n)=\sum_{k=0}^{+\infty} x_k(n)*h(n)=\sum_{k=0}^{+\infty} y_k(n) \qquad (3\text{-}57)$$

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

## 重叠相加法图示

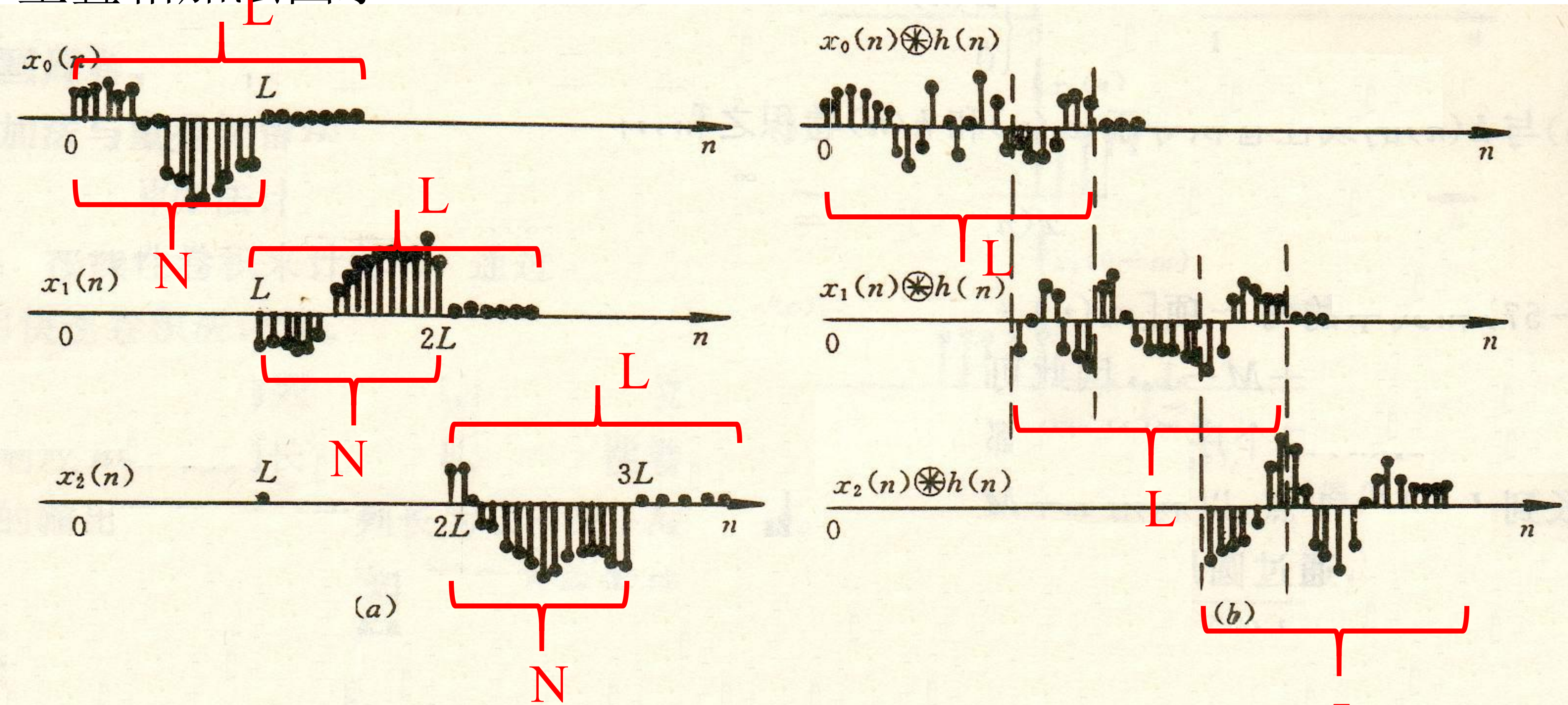



图 3—13 重叠相加法图形

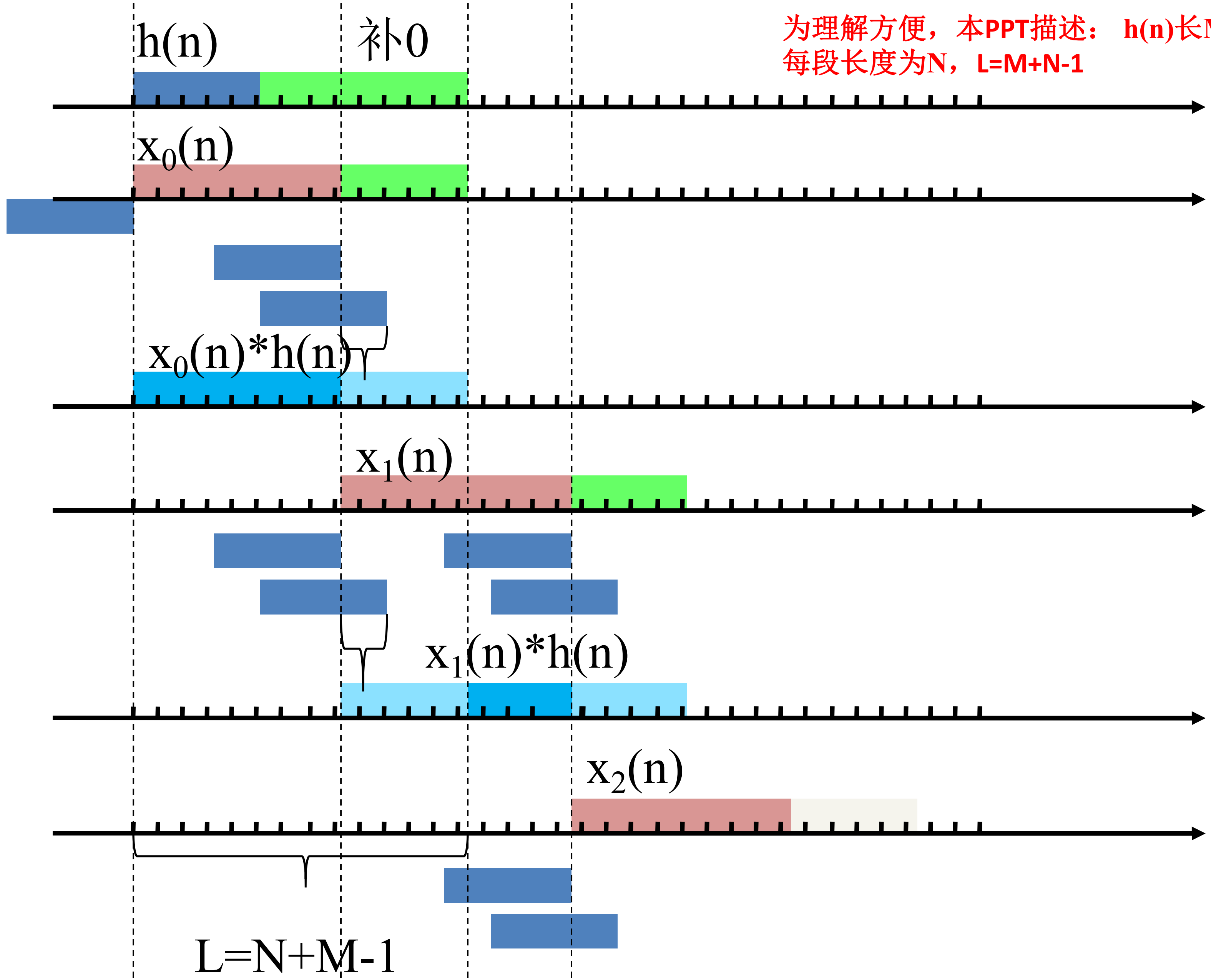
(a) 将 $x(n)$ 分解为列长为 $L$ 的不重叠的几段 (b) 每段 $x_k(n)$ 和 $h(n)$ 卷积的结果

**课本描述：h(n)长M，x(n)分解每段长度为L。**

**由于圆周卷积和线性卷积的关系：L>=M+N-1**

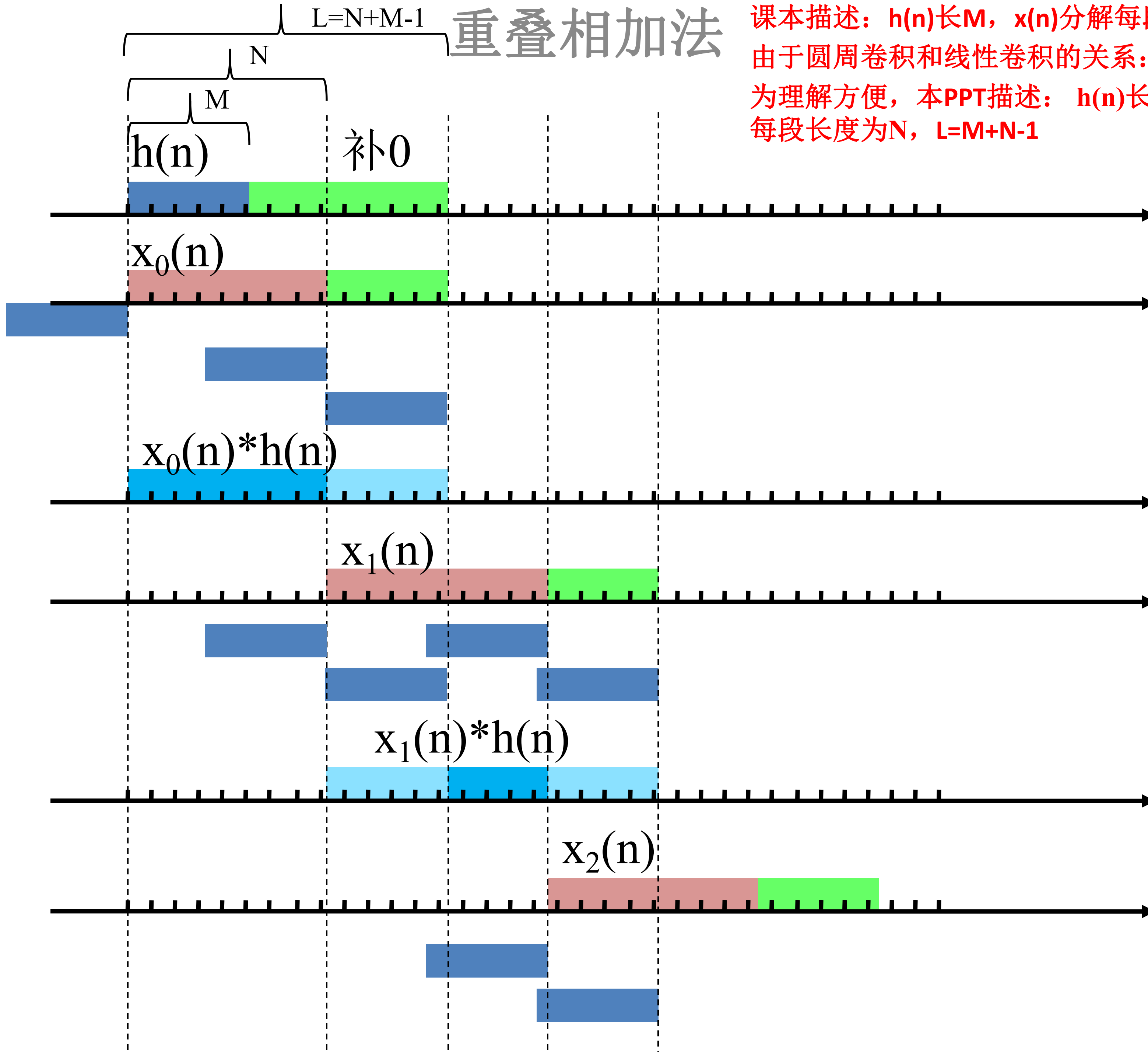
**为理解方便，本PPT描述： h(n)长M，x(n)分解每段长度为N，L=M+N-1**

课本描述：h(n)长M，x(n)分解每段长度为L。
由于圆周卷积和线性卷积的关系：L>=M+N-1
为理解方便，本PPT描述： h(n)长M，x(n)分解每段长度为N，L=M+N-1

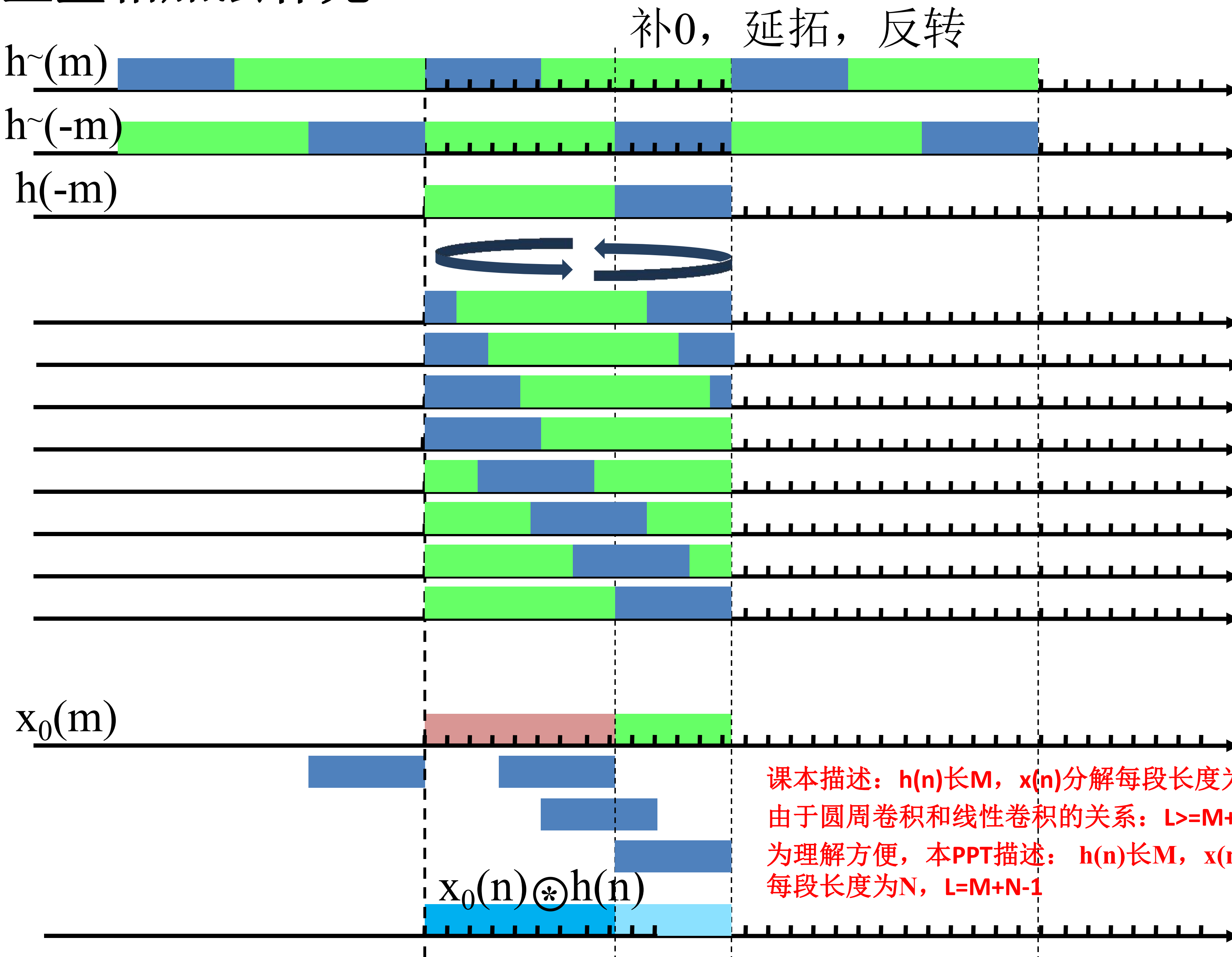


# 重叠相加法

**课本描述：h(n)长M，x(n)分解每段长度为L。**
**由于圆周卷积和线性卷积的关系：L>=M+N-1**
**为理解方便，本PPT描述： h(n)长M，x(n)分解每段长度为N，L=M+N-1**



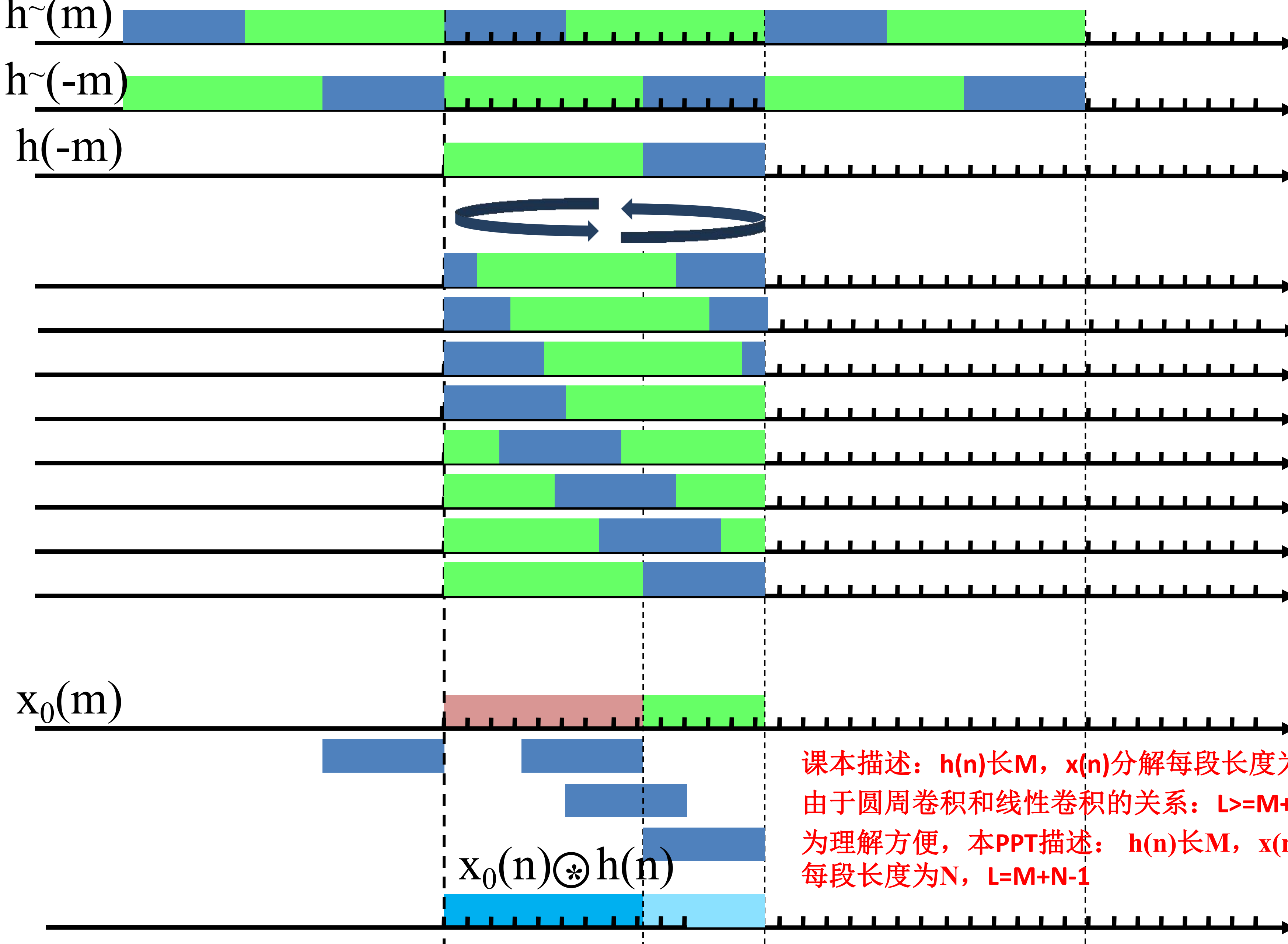
# 重叠相加法补充




课本描述：h(n)长M，x(n)分解每段长度为L。
由于圆周卷积和线性卷积的关系：L>=M+N-1
为理解方便，本PPT描述： h(n)长M，x(n)分解每段长度为N，L=M+N-1

# （动画）重叠相加法补充

补0，延拓，反转




课本描述：h(n)长M，x(n)分解每段长度为L。

由于圆周卷积和线性卷积的关系：L>=M+N-1

为理解方便，本PPT描述： h(n)长M，x(n)分解每段长度为N，L=M+N-1

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

重叠保留法图示

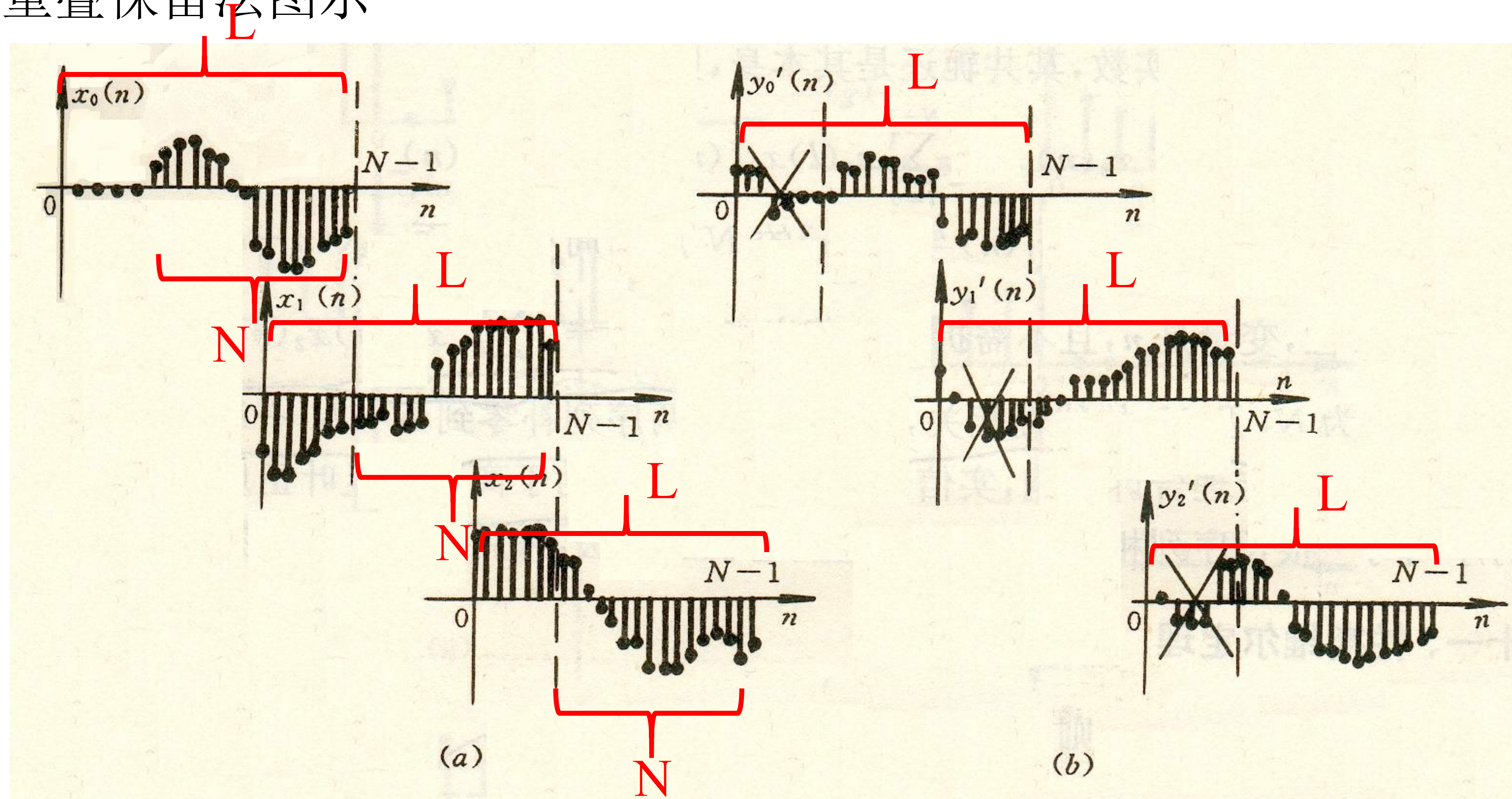
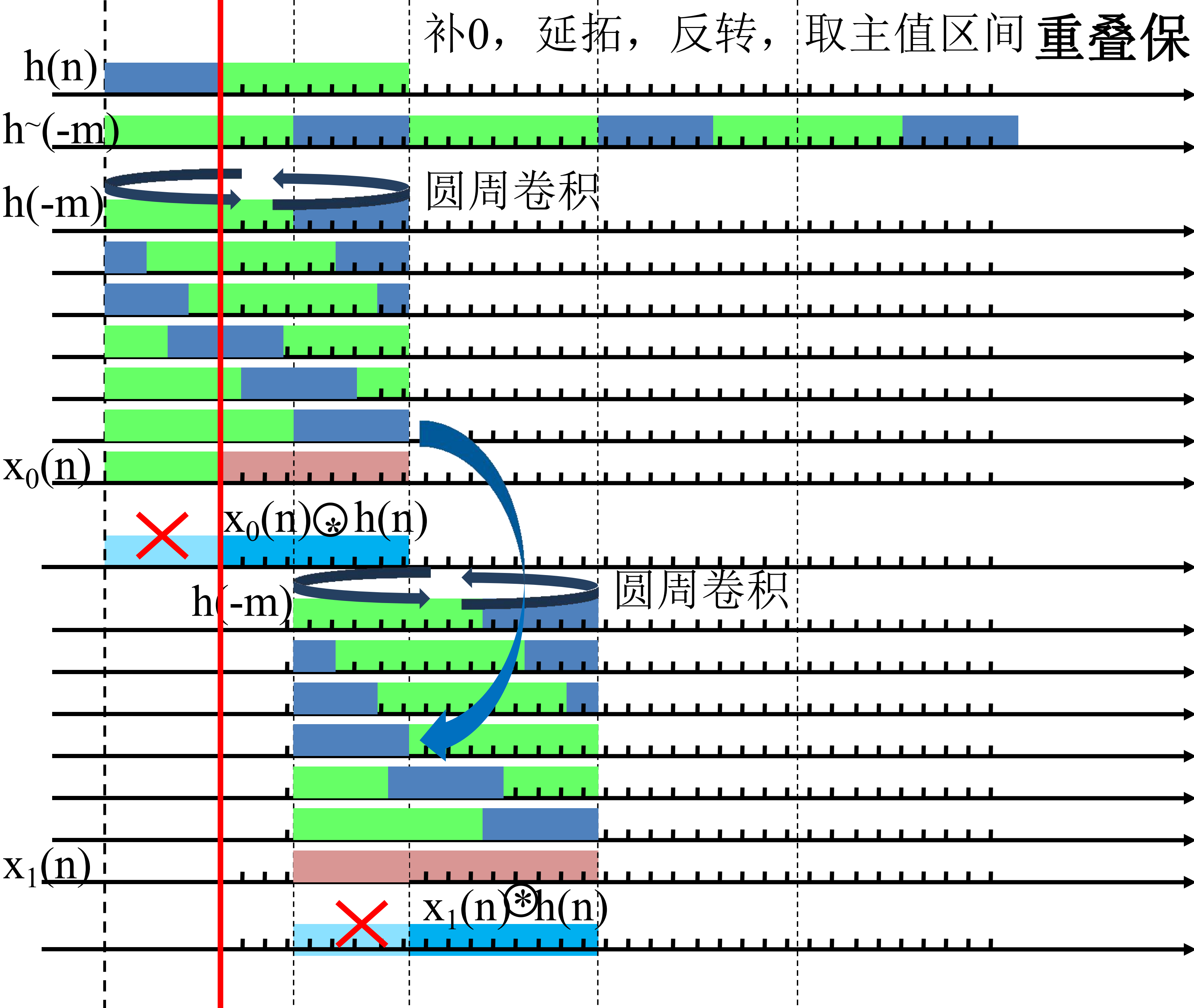


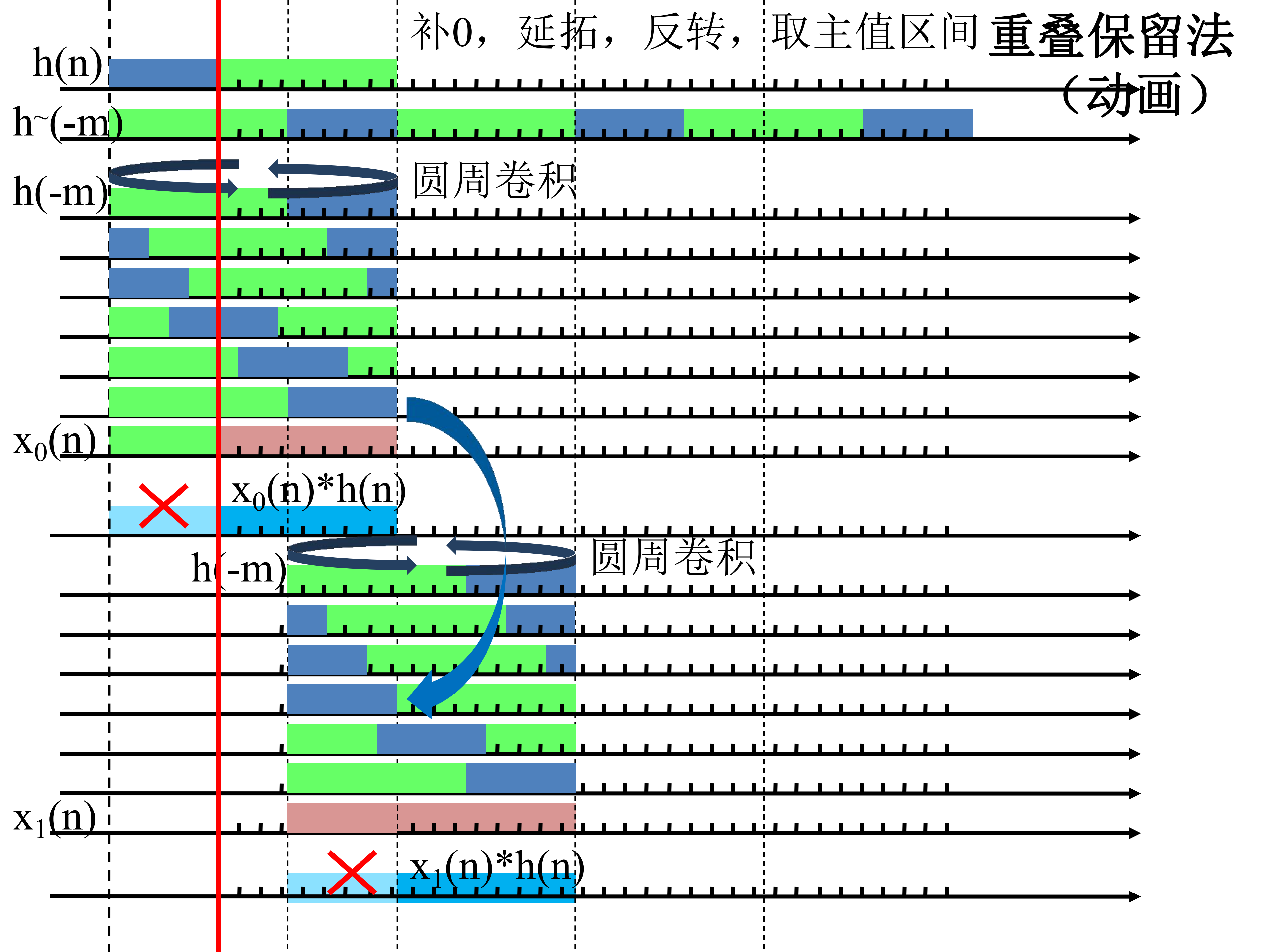

图 3—15　重叠保留法示意图

(a) $x(n)$分解为列长为 $N$ 的重叠的几段

(b) 每一段与 $h(n)$圆周卷积的结果，图中标出在形成线性卷积时每一段要去掉的部分

补0，延拓，反转，取主值区间 **重叠保留法**





补0，延拓，反转，取主值区间
重叠保留法
（动画）
h(n)
h~(-m)
h(-m)
圆周卷积
x0(n)
x0(n)*h(n)
h(-m)
圆周卷积
x1(n)
x1(n)*h(n)

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

10.圆周（循环）相关定理

$$\forall x_1(n) \leftrightarrow X_1(k)$$

$$x_2(n) \leftrightarrow X_2(k)$$

$$X(k) = X_1^*(k) X_2(k)$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$x(n) = x_1^*(-n) \otimes x_2(n)$$

$$\because \widetilde{X}_1^*(K) \xleftrightarrow{DFS} \widetilde{x}_1^*(-n)$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l) x_2\big((l+n)\big)_N R_N(n)$$

其中$0 \le l \le N-1$

# §3-5 离散傅里叶变换的性质

11.帕斯维尔（Parseval）定理　　(能量定理)

$$\forall x(n) \leftrightarrow X(k)$$

则 $$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2$$

# §3-5 离散傅里叶变换的性质

## 12.DFT的对称性

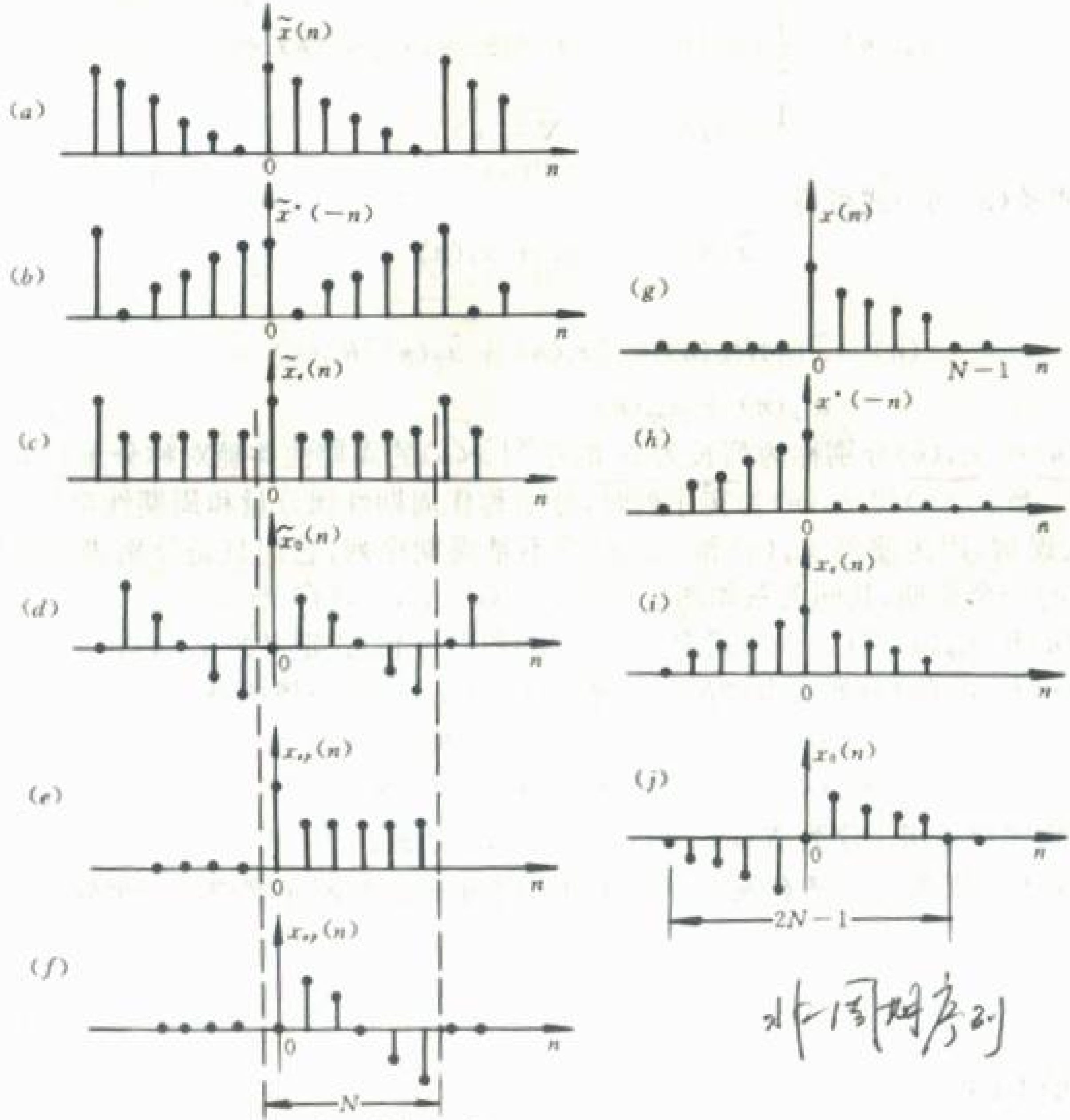
回忆对称序列长度、周期问题

周期序列$\tilde{x}(n)=x((n))_N$

共轭对称分量：$\tilde{x}_e(n)=\dfrac{1}{2}\left[\tilde{x}(n)+\tilde{x}^*(-n)\right]$

共轭反对称分量：$\tilde{x}_o(n)=\dfrac{1}{2}\left[\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)\right]$

非周期序列？




非周期序列

周期序列

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

12.DFT的对称性

周期序列$\tilde{x}(n)=x((n))_N$

共轭对称分量：$\tilde{x}_e(n)=\frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n)+\tilde{x}^*(-n)\right]$

共轭反对称分量：$\tilde{x}_o(n)=\frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)\right]$

取$0\sim N-1$一个周期

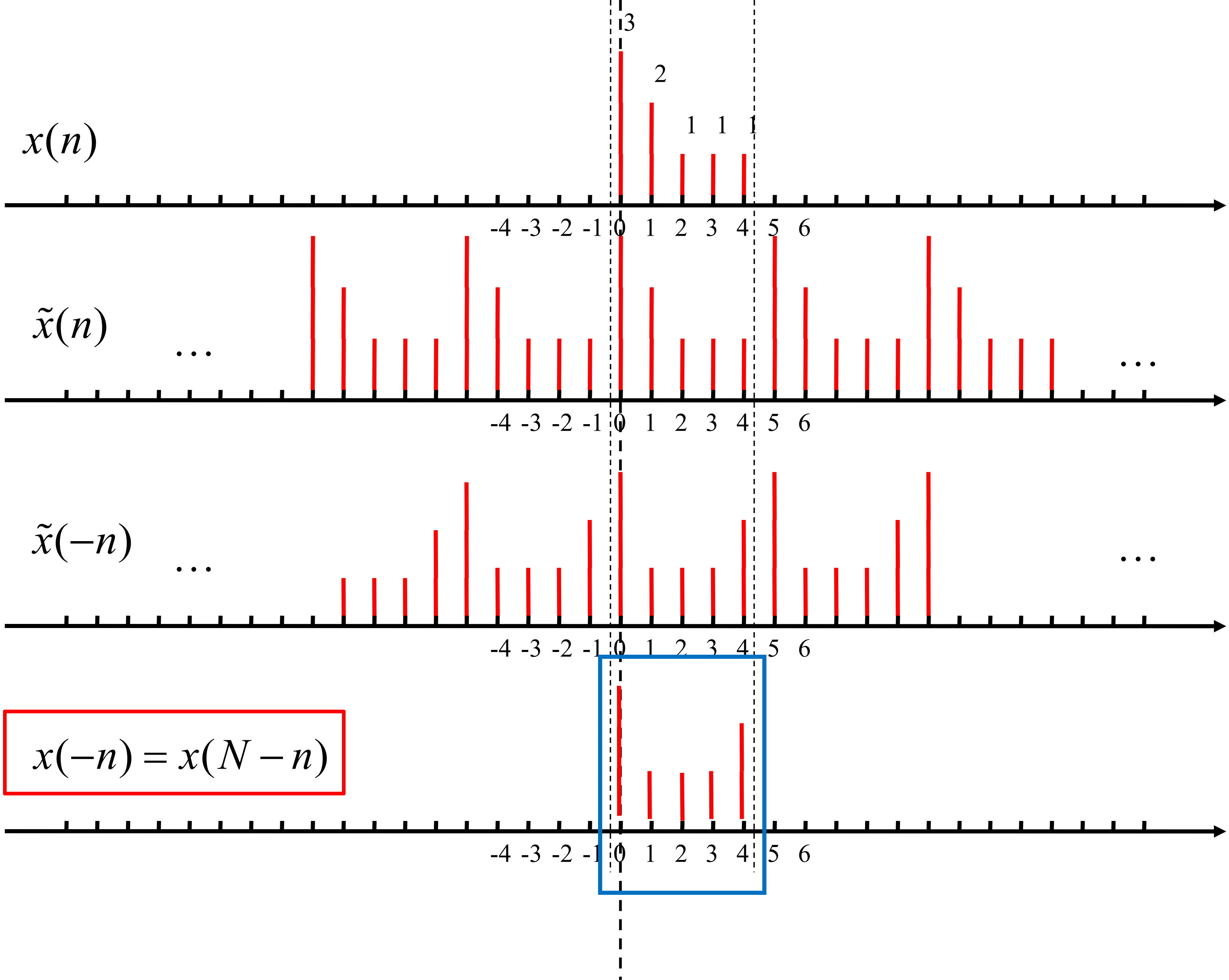
$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}\left[x((n))_N+x^*((-n))_N\right]R_N(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(N-n)\right]$$

$$x_{op}(n)=\frac{1}{2}\left[x((n))_N-x^*((-n))_N\right]R_N(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(N-n)\right]$$

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)$$

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=\left[\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)\right]R_N(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$$

周期性共轭对称分量 周期性共轭反对称分量


$x(n)$
3
2
1 1 1
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
$\tilde{x}(n)$
...
...
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
$\tilde{x}(-n)$
...
...
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
$x(-n) = x(N-n)$
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

## 12.DFT的对称性

奇序列的$DFT$

偶序列的$DFT$

共轭复序列的$DFT$

复数序列的$DFT$

虚序列的$DFT$

实序列的$DFT$

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

奇序列的$DFT$

$$x(n) = -x(-n) = -x(N-n)$$

$$X(k) = -X(-k) = -X(N-k)$$

偶序列的$DFT$

$$x(n) = x(-n) = x(N-n)$$

$$X(k) = X(-k) = X(N-k)$$

共轭复序列的$DFT$

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(N-k)$$

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

$\boxed{\text{复数序列的}DFT}$

$$x(n)=x_r(n)+jx_i(n)$$

$$\begin{cases} x_r(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(n)\right] \\ jx_i(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(n)\right] \end{cases}$$

$$DFT\left[x_r(n)\right]=\frac{1}{2}DFT\left[x(n)+x^*(n)\right]=\frac{1}{2}\left[X(k)+X^*(N-k)\right]=X_{ep}(k)$$

$$DFT\left[jx_i(n)\right]=\frac{1}{2}DFT\left[x(n)-x^*(n)\right]=\frac{1}{2}\left[X(k)-X^*(N-k)\right]=X_{op}(k)$$

$$X(k)=X_{ep}(k)+X_{op}(k)$$

周期性共轭对称分量 周期性共轭反对称分量

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

复数序列的$DFT$

$$X_{ep}^{\ *}(N-k)=\frac{1}{2}\left[X(N-k)+X^{*}(N-N+k)\right]^{*}$$

$$=\frac{1}{2}\left[X(N-k)+X^{*}(k)\right]^{*}$$

$$\Rightarrow X_{ep}(k)=X_{ep}^{\ *}(N-k)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left|X_{ep}(k)\right|=\left|X_{ep}(N-k)\right|\\ \arg\left[X_{ep}(k)\right]=-\arg\left[X_{ep}(N-k)\right]\end{cases}$$

实部相等，虚部相反

实部为偶，虚部为奇

周期性共轭对称分量 周期性共轭反对称分量

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

$$X_{op}(k) = -X_{op}^*(N-k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|X_{op}(k)\right| = -\left|X_{op}(N-k)\right| \\ \arg\left[X_{op}(k)\right] = \arg\left[X_{op}(N-k)\right] \end{cases}$$

实部相反，虚部相等

实部为奇，虚部为偶

# §3-5 离散傅里叶变换的性质

把两个实数序列$x_1(n)$和$x_2(n)$组合为单一的复数函数$x(n)$，当算出复数表示的$X(k)$后，可以将$X(k)$分成两个独立的分量$X_{ep}(k)$和$X_{op}(k)$，它们分别对应于$x_1(n)$和$x_2(n)$的$DFT$。在一次计算中可以得到两个独立信号的变换。

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

复数序列的$IDFT$

$$X(k)=X_r(k)+jX_i(k)$$

$$\begin{cases} X_r(k)=\dfrac{1}{2}\left[X(k)+X^*(k)\right] \\ jX_i(k)=\dfrac{1}{2}\left[X(k)-X^*(k)\right] \end{cases}$$

$$IDFT\left[X_r(k)\right]=\frac{1}{2}IDFT\left[X(k)+X^*(k)\right]=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(N-n)\right]=x_{ep}(n)$$

$$IDFT\left[jX_i(k)\right]=\frac{1}{2}IDFT\left[X(k)-X^*(k)\right]=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(N-n)\right]=x_{op}(n)$$

$$x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$$

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

虚序列的$DFT$

$$x(n)=jx_i(n)$$

$$X(k)=X_{op}(k)$$

实序列的$DFT$

$$x(n)=x_r(n)$$

$$X(k)=X_{ep}(k)$$

上述两种情况不论哪一种都只要知道一半数目的$X(k)$,

利用对称性质就可得到另一半数目的$X(k)$

在$DFT$运算中利用这个特点，可以提高运算效率。

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

| x(n) | X(k) |
| --- | --- |
| 偶序列 | 偶序列 |
| 奇序列 | 奇序列 |
| 实 | 实部为偶，虚部为奇 |
| 虚 | 实部为奇，虚部为偶 |
| 实偶 | 实偶 |
| 实奇 | 虚奇 |
| 虚偶 | 虚偶 |
| 虚奇 | 实奇 |
| 实部为偶，虚部为奇<br>实部为奇，虚部为偶 | 实<br>虚 |

已知4点复序列$c(n)=u(n)+jv(n)$的$DFT$为

$C(k)=\{10+2j,-2+2j,-2+2j,-2-2j\}$

$u(n)$和$v(n)$为两个实序列

$(a)$求序列$u(n)$和$v(n)$的4点$DFT$

$(b)$求序列$x(n)=u((2-n))R_4(n)$和$y(n)=v((n-1))R_4(n)$

$(c)$求序列$u(n)$和$v(n)$5点圆周卷积，与线性卷积哪些值结果相同，并说明原因；

$(d)$写出利用$FFT$求序列$u(n)$和$v(n)$线性卷积的步骤；

$$(1)\,C(k)=\{10+2j,-2+2j,-2+2j,-2-2j\}$$

$$C^*(4-k)=\{10-2j,-2+2j,-2-2j,-2-2j\}$$

$$\because \mathrm{DFT}\{c^*(n)\}=C^*(N-k)$$

$$c(n)=u(n)+jv(n)$$

$$u(n)=\frac{1}{2}\left[c(n)+c^*(n)\right]$$

$$v(n)=\frac{1}{2j}\left[c(n)-c^*(n)\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}U(k)=\dfrac{1}{2}\left[C(k)+C^*(4-k)\right]=\{10,-2+2j,-2,-2-2j\}\\[2ex] V(k)=\dfrac{1}{2}\left[C(k)-C^*(4-k)\right]=\{2,0,2,0\}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u(n)=\{1,2,3,4\}\\ v(n)=\{1,0,1,0\}\end{cases}$$

$$(2)\, x(n) = u((2-n))R_4(n)$$

$$\Rightarrow x(n) = \{3, 2, 1, 4\}$$

$$y(n) = v((n-1))R_4(n)$$

$$\Rightarrow y(n) = \{0, 1, 0, 1\}$$

$$(3)\, u((n))R_5(n) = \{1, 2, 3, 4, 0\}$$

$$v((n))R_5(n) = \{1, 0, 1, 0, 0\}$$

$$\Rightarrow u((n))R_5(n) \circledS v((n))R_5(n) = \{5, 2, 4, 6, 3\}$$

$$u(n) * v(n) = \{1, 2, 4, 6, 3, 4, 0\}$$

# § 3-5 离散傅里叶变换的性质

13.DFT相当于横向滤波器

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)h_k(N-1-n)$$

$$h_k(n)\stackrel{\triangle}{=}\begin{cases}W_N^{(N-1-n)k} & 0\le n\le N-1\\ 0 & n<0,n\ge N\end{cases}$$

P94

# §3-5 离散傅里叶变换的性质

## 14.DFT与Z变换的关系

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$x(n)\xleftrightarrow{DFT}X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k,k=0,1,\cdots,N-1}$$

**问题：**

能否由 $X(k)\overset{\triangle}{=}X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\rightarrow x(n)$

（频域取样）

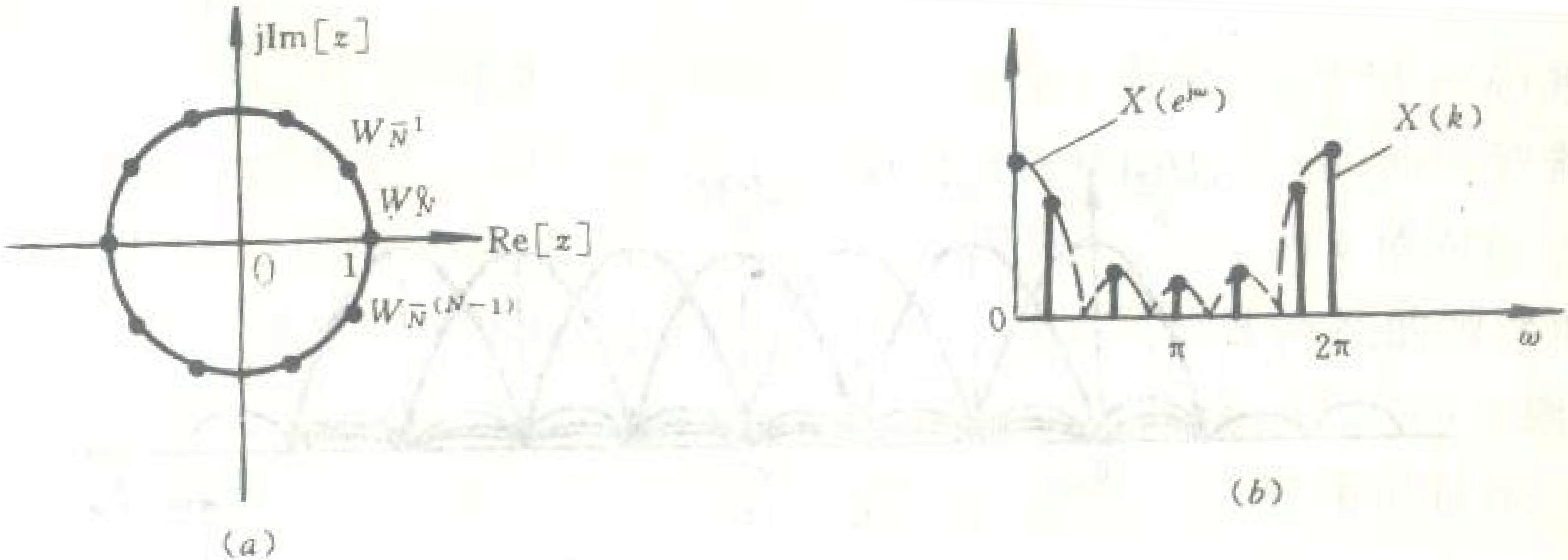



图 3－21 DFT 与 $z$ 变换

($a$) $z$ 平面单位圆上等间隔取样的各点

($b$) $X(k)$是序列傅氏变换 $X(e^{j\omega})$的取样值