数字信号处理

周治国

2023.11

第五章 数字滤波器

IIR数字滤波器

脉冲响应不变变换法

IIR数字滤波器设计

- **一、从模拟滤波器设计数字滤波器**
  - **1、从模拟低通滤波器设计数字低通滤波器**
    - （1）脉冲/阶跃响应不变法
    - （2）双线性变换法
  - 2、IIR数字低通滤波器的频率变换（高通、带通、带阻数字滤波器的设计
    - （1）直接由模拟原型到各种类型数字滤波器的转换
    - （2）从数字低通滤波器到各种类型数字滤波器的转换
- 二、直接设计IIR数字滤波器
  - 1、IIR数字低通滤波器的频域直接设计方法
    - （1）零、极点位置累试法（点阻滤波器）
    - （2）幅度平方函数法
  - 2、IIR数字低通滤波器的时域直接设计方法
    - （1）帕德逼近法
    - （2）波形形成滤波器设计
- 三、IIR数字滤波器的优化设计方法
  - 1、最小均方误差方法
  - 2、最小p误差方法
  - 3、最小平方逆设计法
  - 4、线性规划设计方法

模拟原型滤波器数字化设计方法

原理（Principle）

首先按一定指标设计出满足要求的模拟原型滤波器，再将其通过某种方式数字化

转换方法（Conversion methods）

— 将微分方程转换为差分方程

— **脉冲响应不变变换法**

— **双线性变换法**

— 匹配Z变换

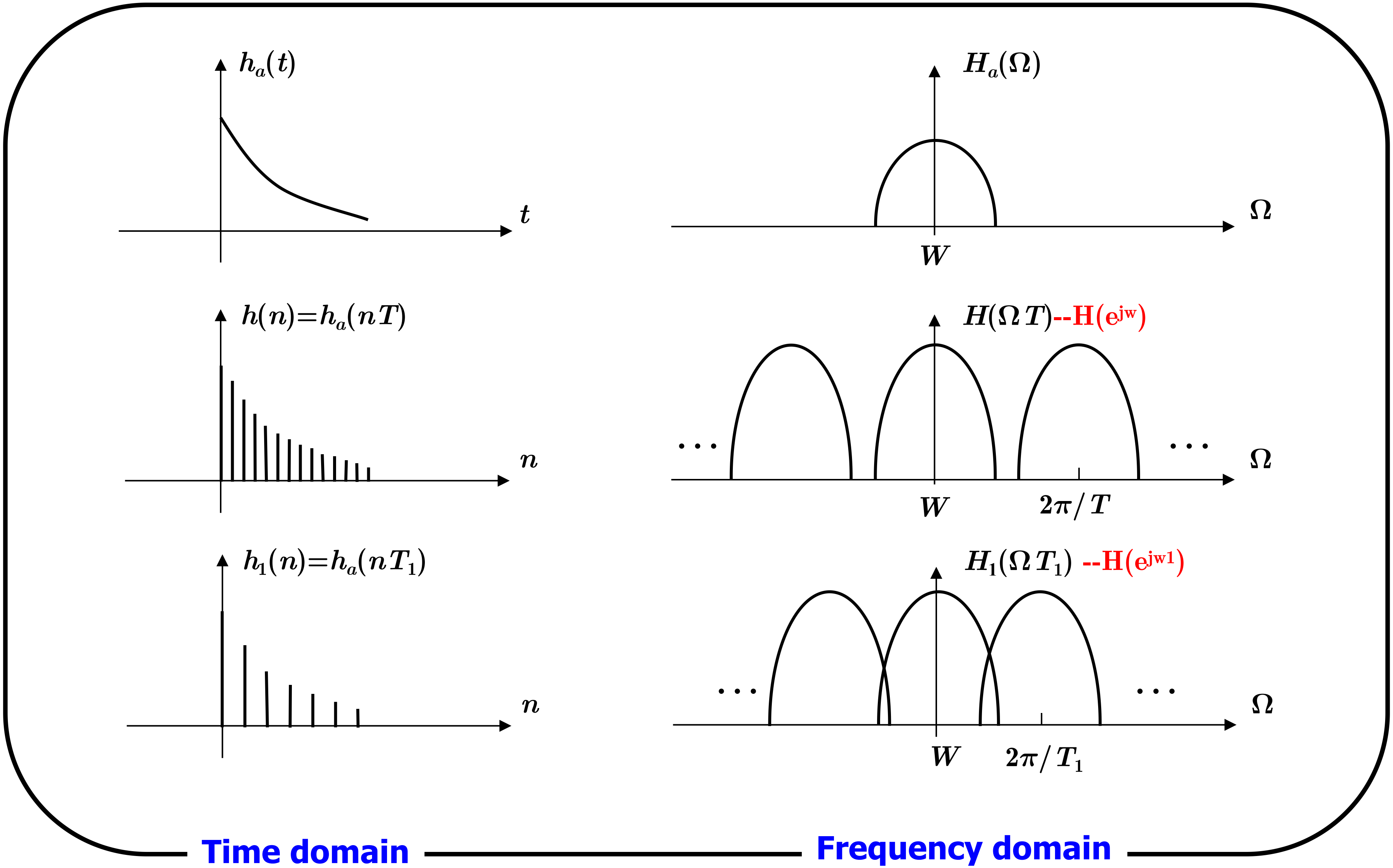
要求（Requirement）

① s–平面的左半平面应映射至z–平面的单位圆内，即系统稳定性要在转换中能够保持；

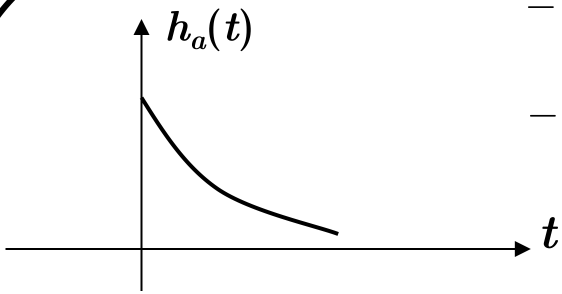
② 保形要求（频率选择能力）

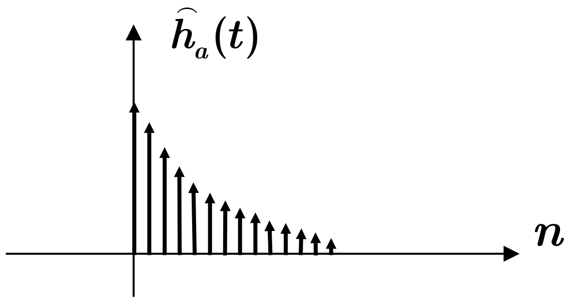
- IIR数字滤波器设计
  - 一、从模拟滤波器设计数字滤波器
    - 1、从模拟低通滤波器设计数字低通滤波器
      - 脉冲响应不变法
      - （2）双线性变换法
    - 2、IIR数字低通滤波器的频率变换（高通、带通、带阻数字滤波器的设计
      - （1）直接由模拟原型到各种类型数字滤波器的转换
      - （2）从数字低通滤波器到各种类型数字滤波器的转换
  - 二、直接设计IIR数字滤波器
    - 1、IIR数字低通滤波器的频域直接设计方法
      - （1）零、极点位置累试法（点阻滤波器）
      - （2）幅度平方函数法
    - 2、IIR数字低通滤波器的时域直接设计方法
      - （1）帕德逼近法
      - （2）波形形成滤波器设计
  - 三、IIR数字滤波器的优化设计方法
    - 1、最小均方误差方法
    - 2、最小p误差方法
    - 3、最小平方逆设计法
    - 4、线性规划设计方法

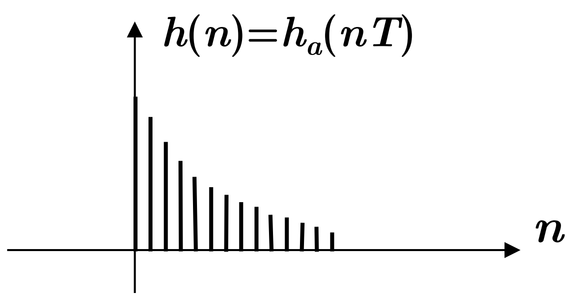
脉冲响应不变法--变换原理



脉冲响应不变法--变换原理







— $h_a(t)$ $\hat{h}_a(t)$ $h(n)$ $H(z)$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$

— $H_a(s)$ $\hat{H}_a(s)$ $\overset{?}{\longrightarrow}$ $H(z)$

$$\hat{H}_a(s) = L\left[\hat{h}_a(t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT)e^{-sTn}$$

$$H(z) = \hat{H}_a(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \neq H_a(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

$$\hat{H}_a(s) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left|s - j\frac{2\pi}{T}m\right| \neq H_a(s)$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}m\right) \neq H_a\left(\Omega = \frac{\omega}{T}\right)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{T}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}H_a\left|j\frac{\omega}{T}\right| = \frac{1}{T}H_a(j\Omega) \quad |\omega| \leq \pi}$$

结论： 由$H_a(s)$和$H(z)$之间不是单值映射

频率变换坐标是线性的

脉冲响应不变法—模拟滤波器数字化

$$H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i}$$ 并联，部分分式

$$\Rightarrow h_a(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{s_i t}u(t)\Rightarrow h(n)=h_a(nT)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{s_i Tn}u(nT)$$

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}h(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}\sum_{i=1}^{N}A_i(e^{s_iT})^n z^{-n}u(n)=\sum_{i=1}^{N}A_i\sum_{n=0}\left(e^{s_iT}z^{-1}\right)^n$$

$$=\sum_{i=1}^{N}A_i\lim_{N}\frac{1-(e^{s_iT}z^{-1})^N}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$$

$$\underset{|z|>|e^{s_iT}|}{=}\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$$

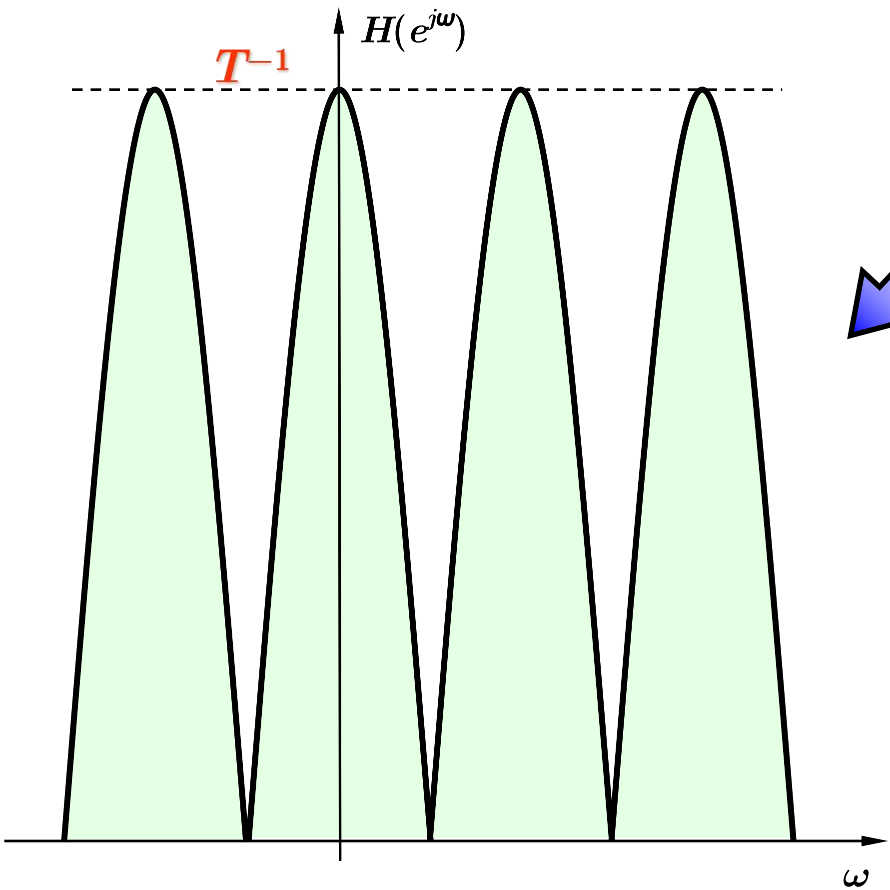
此处把课本（5-23）和（5-43）（5-46）统一起来

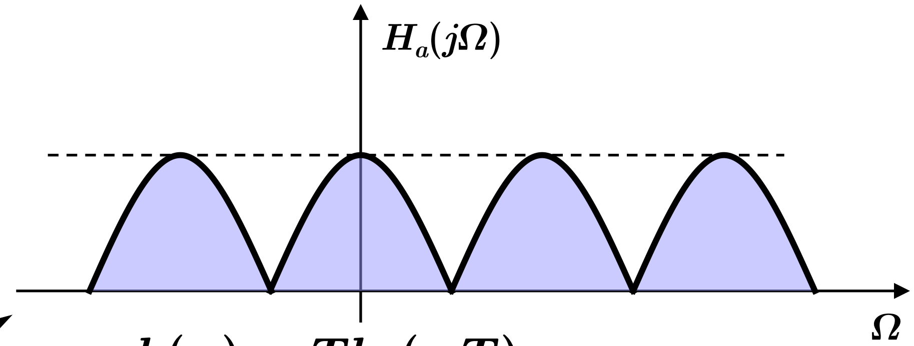
$$\frac{A_i}{s-s_i}\Leftrightarrow\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}=\frac{A_i z}{z-e^{s_iT}}$$

优缺点

1、增益过高（T^{-1}）

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{T}H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right)=\frac{1}{T}H_a(j\Omega)\quad |\omega|\le\pi$$





$$h(n)=Th_a(nT)$$

$$\Downarrow$$

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{TA_i}{1-s^{s_iT}z^{-1}}$$

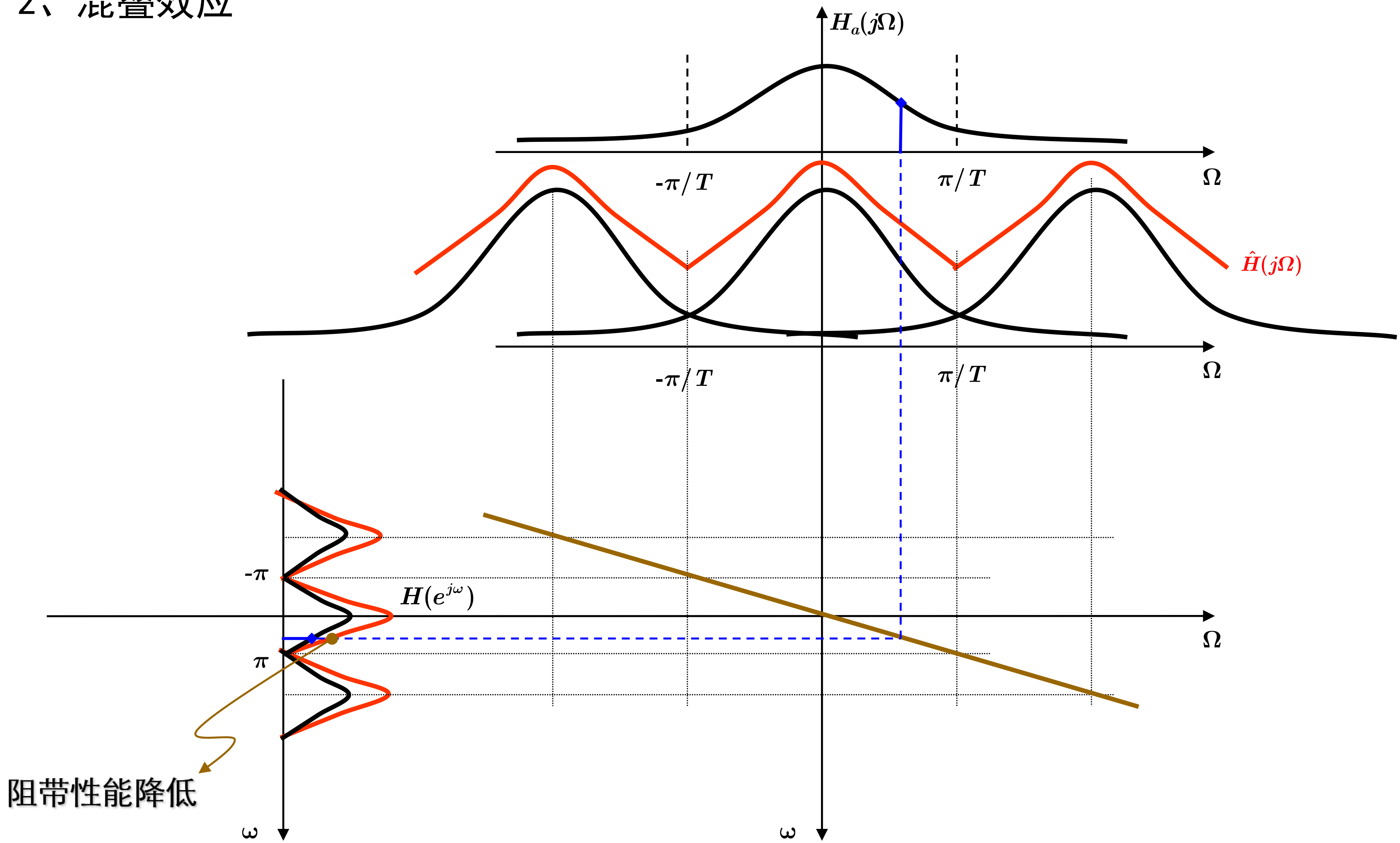
$$\Downarrow$$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}H_a\left(j\frac{\omega}{T}-j\frac{2\pi}{T}m\right)$$

$$\Downarrow$$

$$H(e^{j\omega})=H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right),|\omega|\le\pi$$

2、混叠效应



$H_a(j\Omega)$
$\hat{H}(j\Omega)$
$-\pi/T$
π/T
Ω
$-\pi/T$
π/T
Ω
$-\pi$
$H(e^{j\omega})$
π
Ω
阻带性能降低
ω
ω

IIR滤波器设计1—课本P194

如果所要设计的数字低通滤波器满足下列条件：

(a) 在$\omega \leq 0.2\pi$的通带范围内幅度变化不大于$1dB$，

(b) 在$0.3\pi \leq \omega \leq \pi$的阻带范围内幅度衰减不小于$15dB$，

试用脉冲响应不变变换法，设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器，

(1) 确定滤波器的阶数N

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)确定滤波器的频率响应$H(e^{j\omega})$

(4)给出滤波器的任意一种结构实现形式 √

解：（1）由已知条件列出对模拟滤波器的衰减要求

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\Omega_p)\right| \ge -1dB \\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right| \le -15dB \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\frac{\omega}{T}) = H_a(j\Omega), |\omega| \le \pi$$

$\omega = \Omega T$，$T = 1$

$$\Rightarrow \Omega_p = \frac{\omega_p}{T} = 0.2\pi，\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = 0.3\pi,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j0.2\pi)\right| \ge -1dB \\ 20\lg\left|H_a(j0.3\pi)\right| \le -15dB \end{cases}$$

$$A^2(\Omega) = \left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\Rightarrow 20\lg\left|H_a(j\Omega)\right| = -10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10\lg\left[1+\left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \ge -1dB & \text{通带} \\ -10\lg\left[1+\left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \le -15dB & \text{阻带} \end{cases}$$

$$\text{取等号}\begin{cases} 1+\left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1} (a) \\ 1+\left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{1.5} (b) \end{cases}$$

解出：$N = 5.89$，$\Omega_c = 0.7047$取$N = 6$

代入$(a), \Omega_c = 0.7032$　满足通带，给阻带裕量

代入$(b), \Omega_c = 0.7080$　满足阻带，给通带裕量

(2)由巴特沃斯滤波器极点公式得到

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}]}, k = 1, 2, \cdots, N$$

$$s_{1,2} = -0.18 \pm j0.70; \quad s_{3,4} = -0.50 \pm j0.50; \quad s_{5,6} = -0.70 \pm j0.18$$

$$H_a(s) = \frac{K}{(s^2+0.36s+0.49)(s^2+0.99s+0.49)(s^2+1.36s+0.49)}; \quad K = 0.12 \quad (H_a(s)\big|_{s=0} = 1)$$

或直接由表5-1

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^{\ 6}}{s^6+3.863\Omega_c s^5+7.464\Omega_c^{\ 2} s^4+9.141\Omega_c^{\ 3} s^3+7.464\Omega_c^{\ 4} s^2+3.863\Omega_c^{\ 5} s+\Omega_c^{\ 6}}$$

$$= \frac{0.12093}{s^6+2.7170s^5+3.6910s^4+3.1789s^3+1.8252s^2+0.6644s+0.1209}$$

展成部分分式

$$H_a(s) = \left[\frac{0.9351 - 1.6196\mathrm{i}}{s-(-0.6845+0.1834\mathrm{i})} + \frac{0.9351+1.6196\mathrm{i}}{s-(-0.6845-0.1834\mathrm{i})}\right]$$

$$+\left[\frac{0.1447+0.2505\mathrm{i}}{s-(-0.1834+0.6845\mathrm{i})} + \frac{0.1447-0.2505\mathrm{i}}{s-(-0.1834-0.6845\mathrm{i})}\right]$$

$$+\left[\frac{-1.0797-0.0000\mathrm{i}}{s-(-0.5011+0.5011\mathrm{i})} + \frac{-1.0797+0.0000\mathrm{i}}{s-(-0.5011-0.5011\mathrm{i})}\right]$$

$$H_a(s)=\left[\frac{0.94-1.62i}{s-(-0.68+0.18i)}+\frac{0.94+1.62i}{s-(-0.68-0.18i)}\right]$$

$$+\left[\frac{0.14+0.25i}{s-(-0.18+0.68i)}+\frac{0.14-0.25i}{s-(-0.18-0.68i)}\right]+\left[\frac{-1.08}{s-(-0.50+0.50i)}+\frac{-1.08}{s-(-0.50-0.50i)}\right]$$

由$\dfrac{1}{s-s_i}\Leftrightarrow\dfrac{1}{1-e^{s_iT}z^{-1}}=\dfrac{z}{z-e^{s_iT}}$

$$s_1=-0.68+0.18i\Rightarrow\frac{0.94-1.62i}{s-(-0.68+0.18i)}\Leftrightarrow\frac{0.94-1.62i}{1-e^{-0.68+0.18i}z^{-1}}$$

$$s_2=-0.68-0.18i\Rightarrow\frac{0.94+1.62i}{s-(-0.68-0.18i)}\Leftrightarrow\frac{0.94+1.62i}{1-e^{-0.68-0.18i}z^{-1}}$$

$$s_3=-0.18+0.68i\Rightarrow\frac{0.14+0.25i}{s-(-0.18+0.68i)}\Leftrightarrow\frac{0.14+0.25i}{1-e^{-0.18+0.68i}z^{-1}}$$

$$s_4=-0.18-0.68i\Rightarrow\frac{0.14-0.25i}{s-(-0.18-0.68i)}\Leftrightarrow\frac{0.14-0.25i}{1-e^{-0.18-0.68i}z^{-1}}$$

$$s_5=-0.50+0.50i\Rightarrow\frac{-1.08}{s-(-0.50+0.50i)}\Leftrightarrow\frac{-1.08}{1-e^{-0.50+0.50i}z^{-1}}$$

$$s_6=-0.50-0.50i\Rightarrow\frac{-1.08}{s-(-0.50-0.50i)}\Leftrightarrow\frac{-1.08}{1-e^{-0.50-0.50i}z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{0.94-1.62i}{1-e^{-0.68+0.18i}z^{-1}}+\frac{0.94+1.62i}{1-e^{-0.68-0.18i}z^{-1}}$$

$$+\frac{0.14+0.25i}{1-e^{-0.18+0.68i}z^{-1}}+\frac{0.14-0.25i}{1-e^{-0.18-0.68i}z^{-1}}$$

$$+\frac{-1.08}{1-e^{-0.50+0.50i}z^{-1}}+\frac{-1.08}{1-e^{-0.50-0.50i}z^{-1}}$$

$$=\frac{0.94-1.62i}{1-\left(0.50+0.09i\right)z^{-1}}+\frac{0.94+1.62i}{1-\left(0.50-0.09i\right)z^{-1}}$$

$$+\frac{0.14+0.25i}{1-\left(0.65+0.53i\right)z^{-1}}+\frac{0.14-0.25i}{1-\left(0.65-0.53i\right)z^{-1}}$$

$$+\frac{-1.08}{1-\left(0.53+0.29i\right)z^{-1}}+\frac{-1.08}{1-\left(0.53-0.29i\right)z^{-1}}$$

$$=\frac{1.84-0.65z^{-1}}{1-z^{-1}+0.26z^{-2}}+\frac{0.28-0.45z^{-1}}{1-1.3z^{-1}+0.7z^{-2}}+\frac{-2.16+1.14z^{-1}}{1-1.06z^{-1}+0.37z^{-2}}$$

$$=\frac{0.0007z^{-1}+0.0105z^{-2}+0.0167z^{-3}+0.0042z^{-4}+0.0001z^{-5}}{1-3.36z^{-1}+5.07z^{-2}-4.28z^{-3}+2.12z^{-4}-0.58z^{-5}+0.07z^{-6}}$$

% P194 教学demo

% 采用脉冲响应不变变换法，设计数字巴特沃斯滤波器

% 通带 Wp = 0.2*pi　　1dB

% 阻带 Ws = 0.3~1*pi　15dB

% 求：N, H(z), H(ejw), 直接-I

```
T = 1;
fs = 1;
Wp = 0.2*pi;
Ws = 0.3*pi;
Ap = 1;    %dB
As = 15;   %dB
```

```
[N,Wc] = buttord(Wp,Ws,Ap,As,'s');
%返回最小N和Wc
%计算结果：N=6  Wc = 0.7087
```

buttord

Butterworth filter order and cutoff frequency

Syntax

```
[n,Wn] = buttord(Wp,Ws,Rp,Rs)

[n,Wn] = buttord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s')
```

%[n,Wn] = buttord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s') finds the minimum order n and cutoff frequencies Wn for an analog Butterworth filter. Specify the frequencies Wp and Ws in radians per second. The passband or the stopband can be infinite.

[B,A] = butter(N,Wc,'s');

%设计模拟滤波器。

%[___] = butter(___,'s') designs a lowpass, highpass, bandpass, or bandstop analog Butterworth filter with cutoff angular frequency Wn.

butter

Butterworth filter design

Syntax

```
[b,a] = butter(n,Wn)
[b,a] = butter(n,Wn,ftype)

[z,p,k] = butter(___)
[A,B,C,D] = butter(___)

[___] = butter(___,'s')
```

[r,p,k] = residue(Bs,As);

%部分分式展开

```
B =      0         0         0         0         0         0    0.1266

A = 1.0000    2.7380    3.7484    3.2533    1.8824    0.6905    0.1266

H(s) = 0.1266 / (s^6 + 2.7380*s^5 + 3.7484*s^4 + 3.2533*s^3 + 1.8824*s^2 + 0.6905*s + 0.1266)
```

% 留数	% 极点
% r =	% p =
% 0.9351 - 1.6196i	% -0.6845 + 0.1834i
% 0.9351 + 1.6196i	% -0.6845 - 0.1834i
% 0.1447 + 0.2505i	% -0.1834 + 0.6845i
% 0.1447 - 0.2505i	% -0.1834 - 0.6845i
% -1.0797 - 0.0000i	% -0.5011 + 0.5011i
% -1.0797 + 0.0000i	% -0.5011 - 0.5011i

```
%H(s) =    (0.9351 - 1.6196i) / [s-(-0.6845 + 0.1834i)]
%        + (0.9351 + 1.6196i) / [s-(-0.6845 - 0.1834i)]
%        + (0.1447 + 0.2505i) / [s-(-0.1834 + 0.6845i)]
%        + (0.1447 - 0.2505i) /  [s-(-0.1834 - 0.6845i)]
%        + (-1.0797 - 0.0000i) / [s-(-0.5011 + 0.5011i)]
%        + (-1.0797 + 0.0000i) / [s-(-0.5011 - 0.5011i)]
```

```
%---------------------------------------------------------------------
%Create zero-pole-gain model; convert to zero-pole-gain model
hs = tf(num,den);
zpk(hs);

% ans =
%
%                                  0.12665
% ---------------------------------------------------------------------
%  (s^2 + 1.369s + 0.5022) (s^2 + 1.002s + 0.5022) (s^2 + 0.3668s + 0.5022)
%
% Continuous-time zero/pole/gain model.
%
%---------------------------------------------------------------------
```

[D,C] = impinvar(B,A,fs);

%脉冲响应不变变换法 设计数字滤波器

%[bz,az] = impinvar(b,a,fs) creates a digital filter with numerator and denominator coefficients bz and az, respectively, whose impulse response is equal to the impulse response of the analog filter with coefficients b and a, scaled by 1/fs. If you leave out the argument fs, or specify fs as the empty vector [], it takes the default value of 1 Hz.

impinvar

Impulse invariance method for analog-to-digital filter conversion

Syntax

```
[bz,az] = impinvar(b,a,fs)
[bz,az] = impinvar(b,a,fs,tol)
```

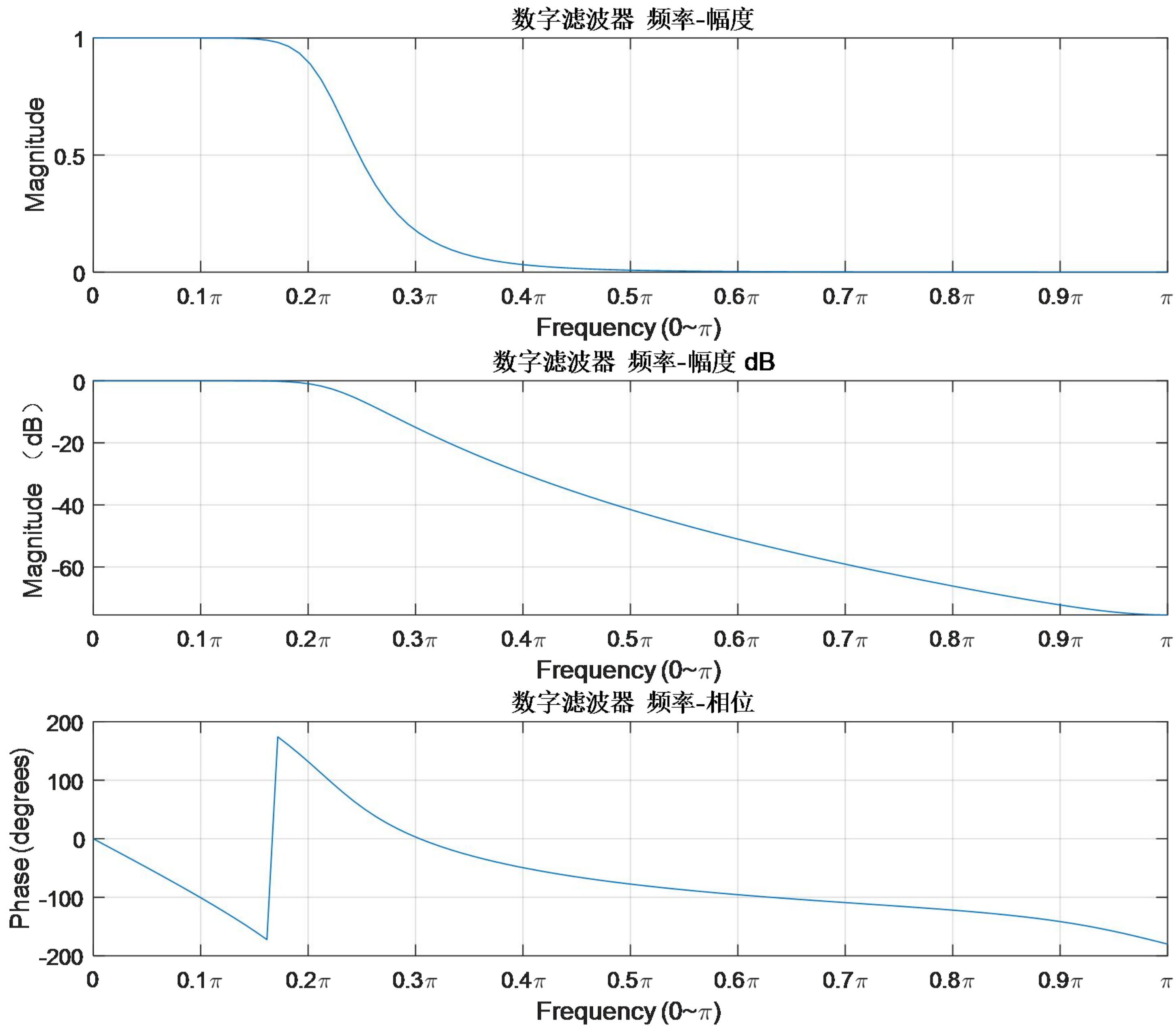
D = -0.0000   0.0007   0.0105   0.0167   0.0042
0.0001   0

C = 1.0000   -3.3443   5.0183   -4.2190   2.0725   -
0.5600   0.0647

%H(z)=
(0.0007*z^5 + 0.0105*z^4 + 0.0167*z^3 + 0.0042*z^2
+ 0.0001*z)
/
(z^6 -3.3443*z^5 + 5.0183*z^4 -4.2190*z^3 +
2.0725*z^2 -0.5600*z + 0.0647)

$$H(z)=\frac{0.0007z^{-1}+0.0105z^{-2}+0.0167z^{-3}+0.0042z^{-4}+0.0001z^{-5}}{1-3.36z^{-1}+5.07z^{-2}-4.28z^{-3}+2.12z^{-4}-0.58z^{-5}+0.07z^{-6}}$$

```
Hz = filt(D,C);

Hz =

  -1.887e-15 + 0.0006584 z^-1 + 0.0105 z^-2 + 0.01672 z^-3 + 0.004232 z^-4 + 0.0001062 z^-5
  -----------------------------------------------------------------------------------------
       1 - 3.344 z^-1 + 5.018 z^-2 - 4.219 z^-3 + 2.073 z^-4 - 0.56 z^-5 + 0.0647 z^-6

Sample time: unspecified
Discrete-time transfer function.
```


数字滤波器 频率-幅度
Magnitude
1
0.5
0
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-幅度 dB
Magnitude （dB）
0
-20
-40
-60
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-相位
Phase (degrees)
200
100
0
-100
-200
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency (0~π)

采用修订版 buttord_z 函数

```
function [order,wn] = buttord_z(wp,ws,rp,rs,opt)


% next find the butterworth natural frequency W0 (or, the "3dB frequency")
% to give exactly rs dB at WA.  W0 will be between 1 and WA:
W0 = WA / ( (10^(.1*abs(rs)) - 1)^(1/(2*(abs(order)))));
%modified by Zhiguo Zhou 2019.5.3
W0_P = WP / ( (10^(.1*abs(rp)) - 1)^(1/(2*(abs(order)))));%通带
W0_S = WS / ( (10^(.1*abs(rs)) - 1)^(1/(2*(abs(order)))));%阻带
```

```
[N,Wc] = buttord_z(Wp,Ws,Ap,As,'s');
%采用修订版 buttord_z 函数，N=2， Wc = 0.7032


[B,A] = butter(N,Wc,'s');
%设计模拟滤波器
%B = 0          0          0          0          0          0          0.1209
%A = 1.0000    2.7170    3.6910    3.1788    1.8252    0.6644    0.1209
%H(s) =
                                                0.1209
           ---------------------------------------------------------------------------------------------------
             s^6 + 2.7170*s^5 + 3.6910*s^4 + 3.1788*s^3 + 1.8252*s^2 + 0.6644*s + 0.1209
```

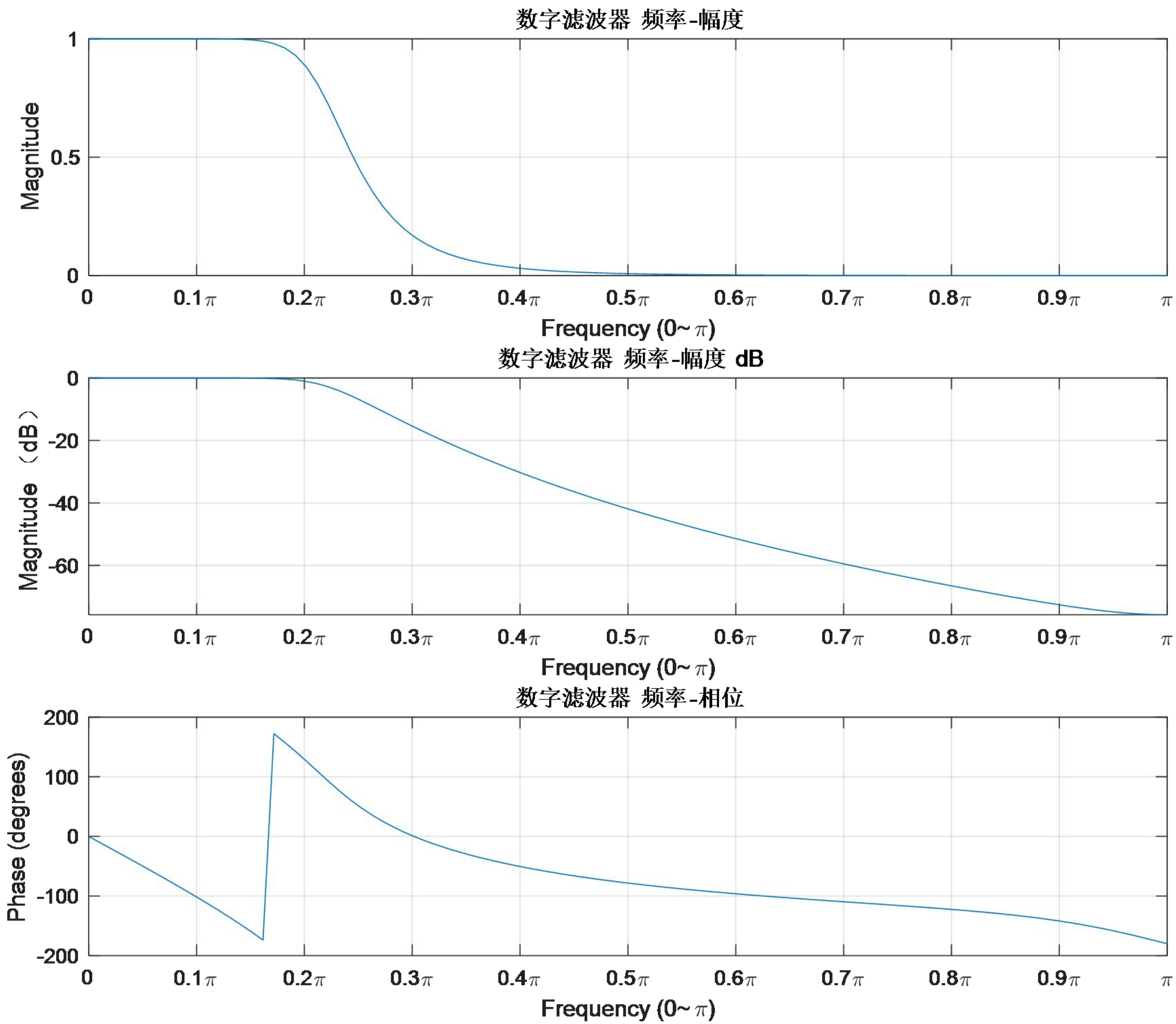
```
%部分分式展开
Bs = num;%分子
As = den;%分母
[r,p,k] = residue(Bs,As);

%H(s) =
      0.9279 - 1.6071i              0.9279 + 1.6071i
  ------------------------------ + ------------------------------
   s - (-0.6792 + 0.1820i)         s-(-0.6792 - 0.1820i)

      0.1435 + 0.2486i              0.1435 - 0.2486i
+ ------------------------------+ ------------------------------
   s-(-0.1820 + 0.6792i)           s-(-0.1820 - 0.6792i

      -1.0714 + 0.0000i             -1.0714 - 0.0000i
 + ------------------------------ + ------------------------------
   s-(-0.4972 + 0.4972i            s-(-0.4972 - 0.4972i)
```

```
% 留数 r =
%   -1.0714 + 0.0000i
%   -1.0714 - 0.0000i
%    0.1435 + 0.2486i
%    0.1435 - 0.2486i
%    0.9279 - 1.6071i
%    0.9279 + 1.6071i
```

```
% 极点  p =
%   -0.4972 + 0.4972i
%   -0.4972 - 0.4972i
%   -0.1820 + 0.6792i
%   -0.1820 - 0.6792i
%   -0.6792 + 0.1820i
%   -0.6792 - 0.1820i
```

```
[D,C] = impinvar(B,A,fs);
%D = -0.0000    0.0006    0.0101    0.0161    0.0041    0.0001         0
%C =  1.0000   -3.3635    5.0684   -4.2759    2.1066   -0.5706    0.0661

Hz = filt(D,C);
%Hz =
%
%  -1.066e-14 + 0.000631 z^-1 + 0.0101 z^-2 + 0.01614 z^-3 + 0.004101 z^-4 + 0.0001033 z^-5
%  ------------------------------------------------------------------------------------------
%     1 - 3.364 z^-1 + 5.068 z^-2 - 4.276 z^-3 + 2.107 z^-4 - 0.5706 z^-5 + 0.06607 z^-6
%
```

$$H(z)=\frac{0.0007z^{-1}+0.0105z^{-2}+0.0167z^{-3}+0.0042z^{-4}+0.0001z^{-5}}{1-3.36z^{-1}+5.07z^{-2}-4.28z^{-3}+2.12z^{-4}-0.58z^{-5}+0.07z^{-6}}$$


数字滤波器 频率-幅度
Magnitude
1
0.5
0
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-幅度 dB
Magnitude （dB）
0
-20
-40
-60
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-相位
Phase (degrees)
200
100
0
-100
-200
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency (0~π)

IIR滤波器设计2--往年真题

如果所要设计的数字低通滤波器满足下列条件：

(a) 在$\omega \le \pi/8$的通带范围内幅度变化不大于$3dB$,

(b) 在$\pi/2 \le \omega \le \pi$的阻带范围内幅度衰减不小于$20dB$,

试用脉冲响应不变变换法，设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器,

(1) 确定滤波器的阶数N

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)确定滤波器的频率响应$H(e^{j\omega})$

(4)给出滤波器的直接I型结构实现形式

03A(05-06)

提示：

(1)所有小数均计算到小数点后两位

(2)假设取样间隔$T=1$

(3)双线性变换的频率变换关系为：

$\Omega = 2/Ttg(\omega/2)$

(4)模拟巴特沃斯低通滤波器$H_a(s)$的极点为：

$s_k = \Omega_c e^{j\pi[1/2+(2k-1)/(2N)]}, k = 1, 2, \cdots, N$

(4)模拟巴特沃斯低通滤波器平方函数为：

$A^2(\Omega) = 1/[1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}]$

解：(1) 由已知条件列出对模拟滤波器的衰减要求

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\Omega_c)\right| \ge -3dB \\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right| \le -20dB \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\frac{\omega}{T}) = H_a(j\Omega),$$

$\omega = \Omega T$，$T = 1$

$$\Rightarrow \Omega_c = \frac{\omega_c}{T} = \frac{\pi}{8},\ \Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\frac{\pi}{8})\right| \ge -3dB \\ 20\lg\left|H_a(j\frac{\pi}{2})\right| \le -20dB \end{cases}$$

$$A^2(\Omega) = \left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\Rightarrow 20\lg\left|H_a(j\Omega)\right| = -10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10\lg\left[1+\left(\frac{\pi/8}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \ge -3dB \\ -10\lg\left[1+\left(\frac{\pi/2}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \le -20dB \end{cases}$$

取等号 $\begin{cases} 1+\left(\frac{\pi/8}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.3}(a) \\ 1+\left(\frac{\pi/2}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{2}(b) \end{cases}$

$\Omega_c = \pi/8 = 0.39$

解出：$N = 1.66$，取 $N = 2$

(2)由巴特沃斯滤波器极点公式得到

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}]}, k=1,2$$

$$\begin{cases} s_1 = \dfrac{\pi}{8} e^{j\pi\frac{3}{4}} \\ = 0.39(-0.707 + j0.707) \\ s_2 = \dfrac{\pi}{8} e^{j\pi\frac{5}{4}} \\ = 0.39(-0.707 - j0.707) \end{cases}$$

$$s_{1,2} = 0.28(-1 \pm j)$$

由表5-1

$$H_a(s) = \frac{0.15}{s^2 + 0.55s + 0.15}$$

(3)展成部分分式

$$H_a(s) = \frac{0.15}{s^2 + 0.55s + 0.15}$$

$$= \frac{A}{s-(-0.28+j0.28)} + \frac{B}{s-(-0.28-j0.28)}$$

解得 $\begin{cases} A = -0.28j \\ B = 0.28j \end{cases}$

$$H_a(s) = \frac{-0.28j}{s-(-0.28+j0.28)} + \frac{0.28j}{s-(-0.28-j0.28)}$$

由 $\dfrac{1}{s-s_k} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-e^{s_k T}z^{-1}} = \dfrac{z}{z-e^{s_k T}}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{-0.28j}{1-e^{(-0.28+j0.28)}z^{-1}} + \frac{0.28j}{1-e^{(-0.28-j0.28)}z^{-1}}$$

此处修订了符号错误

把课本（5-23）和（5-43）（5-46）统一起来

$$H(z)=\frac{-0.28j}{1-e^{(-0.28+j0.28)}z^{-1}}+\frac{0.28j}{1-e^{(-0.28-j0.28)}z^{-1}}$$

$$=\frac{-0.28j}{1-\left(0.7282+0.2078\mathrm{i}\right)z^{-1}}+\frac{0.28j}{1-\left(0.7282-0.2078\mathrm{i}\right)z^{-1}}$$

$$=\frac{0.1164z^{-1}}{1-1.4564z^{-1}+0.5735z^{-2}}$$

此处修订了符号错误
把课本（5-23）和
（5-43）（5-46）统一起来

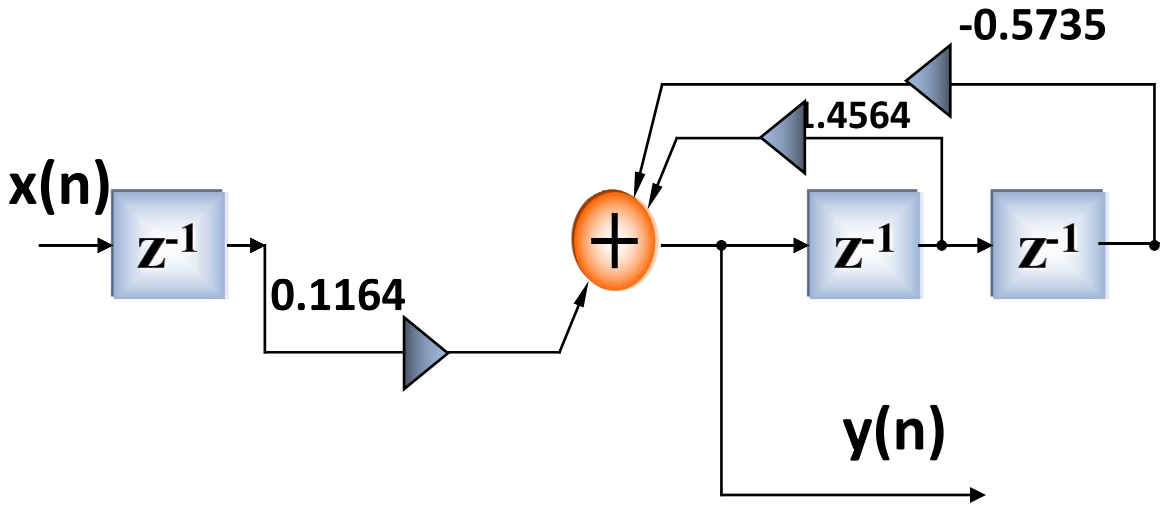
$$H(z)=\frac{0.1164z^{-1}}{1-1.4564z^{-1}+0.5735z^{-2}}$$

(5)频率响应

$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

(6)滤波器结构

直接I，II

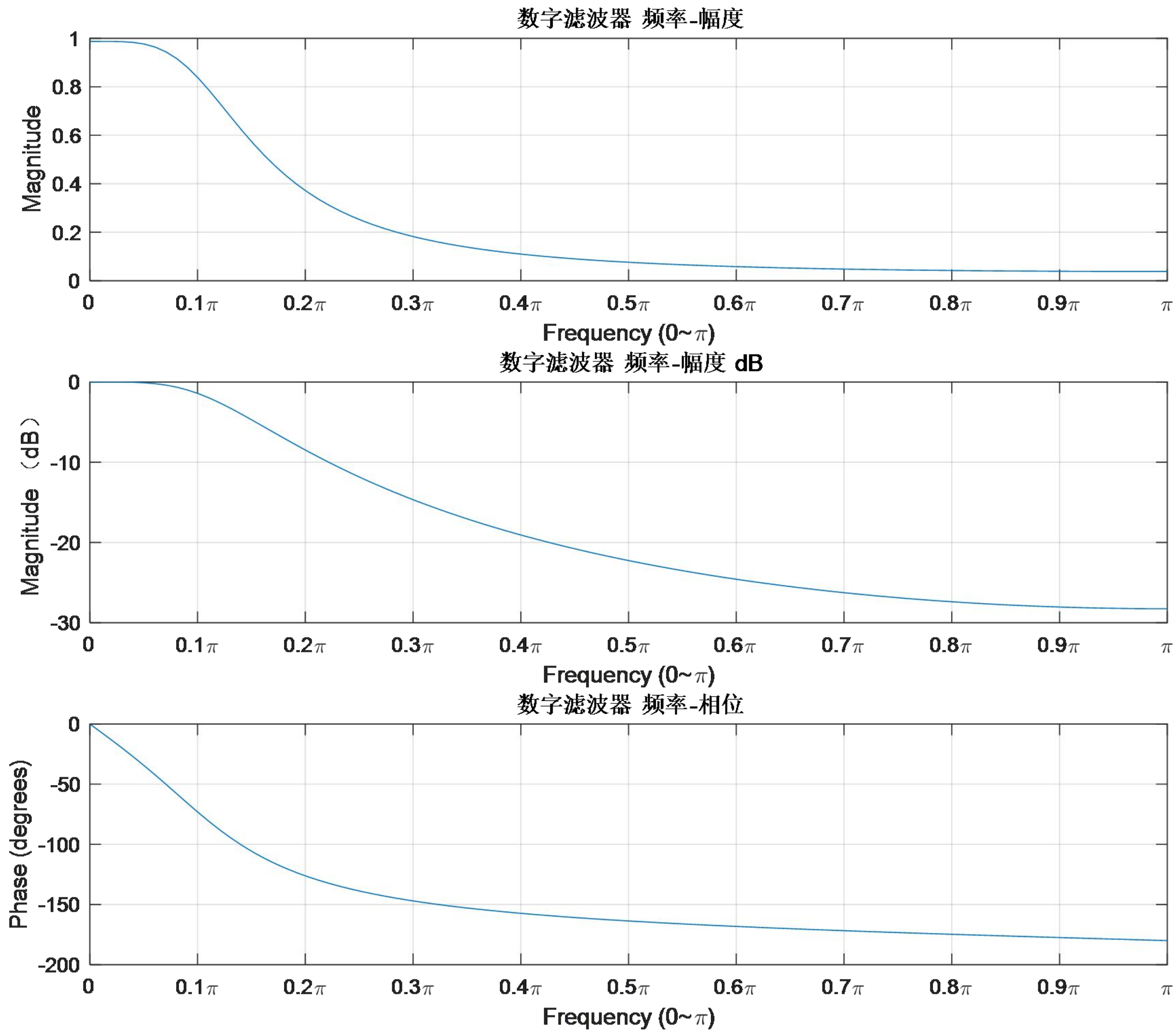


```
[N,Wc] = buttord_z(Wp,Ws,Ap,As,'s');
%N = 2, Wc = 0.3932

[B,A] = butter(N,Wc,'s');
%设计模拟滤波器。
%B =      0         0         0.1546
%A = 1.0000    0.5560         0.1546
%H(s) =
%           0.1546
%  ----------------------------
%  s^2 + 0.5560*s + 0.1546
```

$$H_a(s) = \frac{0.15}{s^2 + 0.55s + 0.15}$$

```
[D,C] = impinvar(B,A,fs);
%D = 0         0.1156     0
%C = 1.0000   -1.4564    0.5735

Hz = filt(D,C);
%Hz =
%          0.1156 z^-1
%  --------------------------
%  1 - 1.4564 z^-1 + 0.5735 z^-2
```

$$H(z) = \frac{0.1164z^{-1}}{1-1.4564z^{-1}+0.5735z^{-2}}$$



数字滤波器 频率-幅度
Magnitude
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-幅度 dB
Magnitude （dB）
0
-10
-20
-30
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-相位
Phase (degrees)
0
-50
-100
-150
-200
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency (0~π)

IIR滤波器设计3—习题集P91修改版

用脉冲响应不变变换法设计相应的数字巴特沃斯低通滤波器，

指标：$0 \le f \le 2.5Hz$衰减小于$3dB$

$f \ge 50Hz$衰减大于或等于$40dB$

抽样频率$f_s = 200Hz$。

(1) 确定滤波器的阶数N

(2) 确定滤波器的系统函数$H(z)$

(3)确定滤波器的频率响应$H(e^{j\omega})$

(4)给出滤波器的任意一种结构实现形式 √

解：

(1)把模拟角频率转化为数字角频率

$$T=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{200},$$

$$\Rightarrow \Omega_c=2\pi f_c=5\pi \qquad \omega_c=\Omega_c T=\frac{\pi}{40},$$

$$\Rightarrow \Omega_s=2\pi f_s=100\pi \quad \omega_s=\Omega_s T=\frac{\pi}{2},$$

(2) 由已知条件列出对模拟滤波器的衰减要求

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\Omega_c)\right| \ge -3dB \\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right| \le -40dB \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega})=H_a(j\frac{\omega}{T})=H_a(j\Omega),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20\lg\left|H_a(j5\pi)\right| \ge -3dB \\ 20\lg\left|H_a(j100\pi)\right| \le -40dB \end{cases}$$

$$A^2(\Omega)=\left|H_a(j\Omega)\right|^2=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\Rightarrow 20\lg\left|H_a(j\Omega)\right|=-10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10\lg\left[1+\left(\dfrac{5\pi}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \ge -3dB \\ -10\lg\left[1+\left(\dfrac{100\pi}{\Omega_c}\right)^{2N}\right] \le -40dB \end{cases}$$

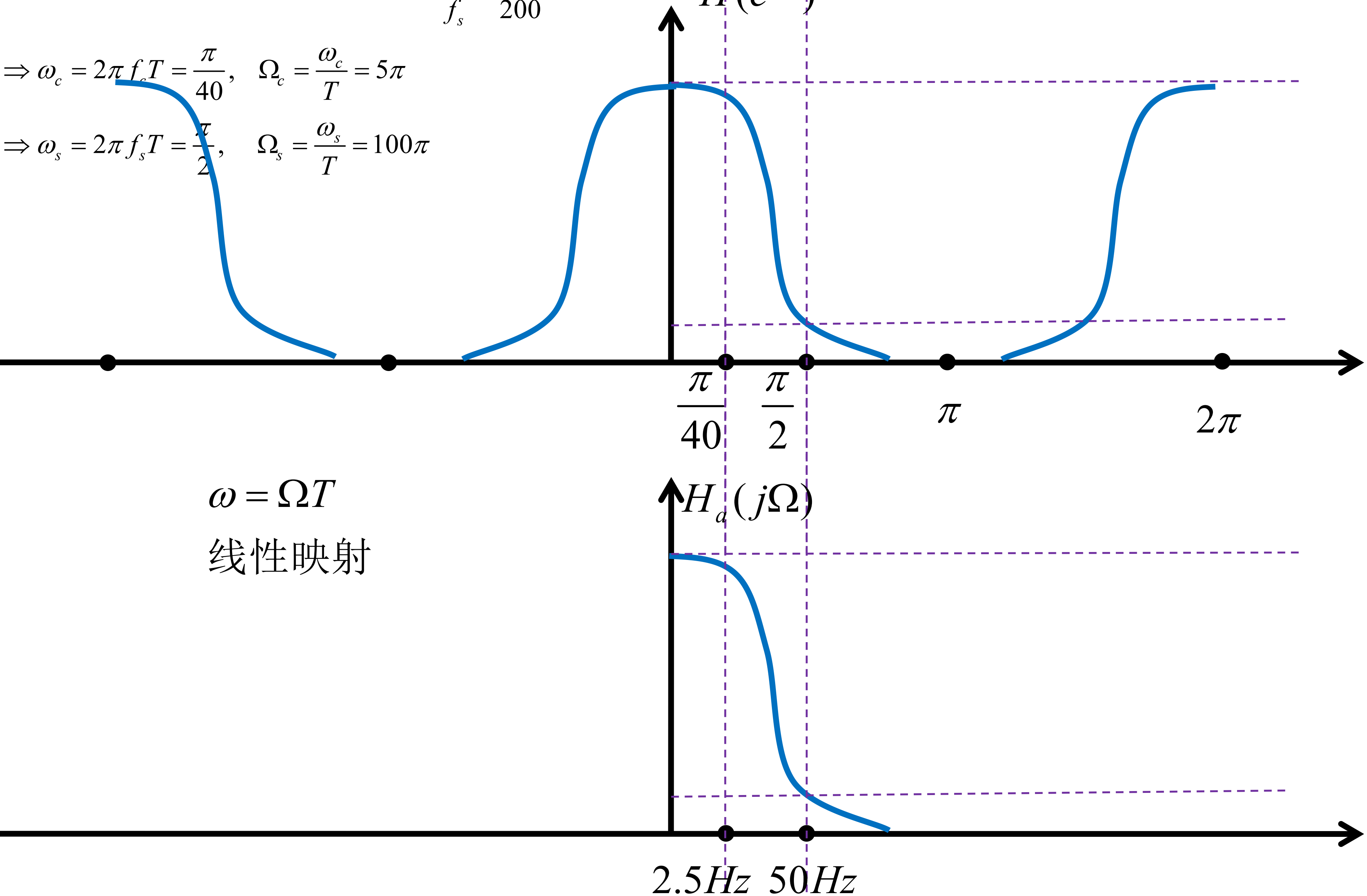
由题干3dB，可直接得到$\Omega_c=5\pi=15.7$

取等号解出：$N=1.54$，取$N=2$

把模拟角频率转化为数字角频率 $T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{200}$,

$\Rightarrow \omega_c = 2\pi f_c T = \frac{\pi}{40}$, $\Omega_c = \frac{\omega_c}{T} = 5\pi$

$\Rightarrow \omega_s = 2\pi f_s T = \frac{\pi}{2}$, $\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = 100\pi$



$\omega = \Omega T$

线性映射

或取等号$\begin{cases} 1+\left(\dfrac{5\pi}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{0.3}(a) \\ 1+\left(\dfrac{100\pi}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{4}(b) \end{cases}$

由题干3dB，可直接得到$\Omega_c=5\pi=15.7$

取等号解出：$N=1.54$，取$N=2$

(3)由巴特沃斯滤波器极点公式得到

$$s_k=\Omega_c e^{j\pi[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}]},k=1,2$$

$$s_1=5\pi e^{j\frac{3\pi}{4}}=15.7(\cos\frac{3\pi}{4}+j\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$=15.7(-0.707+j0.707)$$

$$s_2=5\pi e^{j\frac{5\pi}{4}}=15.7(\cos\frac{5\pi}{4}+j\sin\frac{5\pi}{4})$$

$$=15.7(-0.707-j0.707)$$

或直接由表5-1

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^{\ 2}}{s^2+\sqrt{2}\Omega_c s+\Omega_c^{\ 2}}\text{得到}$$

$$\Rightarrow H_a(s)=\frac{247.3}{s^2+22.24s+247.3}$$

(4)展成部分分式

$$s_1 = -11.12 + j11.12$$

$$s_2 = -11.12 - j11.12$$

$$H_a(s) = \frac{247.3}{s^2 + 22.24s + 247.3} = \frac{A}{s-(-11.12+j11.12)} + \frac{B}{s-(-11.12-j11.12)}$$

解得 $\begin{cases} A = -11.12j \\ B = 11.12j \end{cases}$

$$H_a(s) = \frac{-11.12j}{s-(-11.12+j11.12)} + \frac{11.12j}{s-(-11.12-j11.12)}$$

由 $\frac{1}{s-s_k} \Leftrightarrow \frac{1}{1-e^{s_kT}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{s_kT}}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{-11.12j}{1-e^{(-11.12+j11.12)/200}z^{-1}} + \frac{11.12j}{1-e^{(-11.12-j11.12)/200}z^{-1}}$$

or

由 $\frac{1}{s-s_k} \Leftrightarrow \frac{T}{1-e^{s_kT}z^{-1}} = \frac{Tz}{z-e^{s_kT}}$ (修正公式)

$$\Rightarrow H(z) = \frac{-11.12j \times \frac{1}{200}}{1-e^{(-11.12+j11.12)/200}z^{-1}} + \frac{11.12j \times \frac{1}{200}}{1-e^{(-11.12-j11.12)/200}z^{-1}}$$

此处修订了符号错误
把课本（5-23）和
（5-43）（5-46）统一起来

$$H(z)=\frac{-11.12j}{1-e^{(-11.12+j11.12)/200}z^{-1}}+\frac{11.12j}{1-e^{(-11.12-j11.12)/200}z^{-1}}$$

$$=\frac{-11.12j(1-\left(0.9445\ -\ 0.0526\mathrm{i}\right)z^{-1})+11.12j(1-\left(0.9445+0.0526\mathrm{i}\right)z^{-1})}{1-(0.9445+0.0526\mathrm{i}+0.9445-0.0526\mathrm{i})z^{-1}+\left(0.9445+0.0526\mathrm{i}\right)\left(0.9445\ -\ 0.0526\mathrm{i}\right)z^{-2}}$$

$$=\frac{1.1698z^{-1}}{1-1.889z^{-1}+0.8948z^{-2}}$$

or

$$H(z)=\frac{1.1698\times\frac{1}{200}z^{-1}}{1-1.889z^{-1}+0.8948z^{-2}}=\frac{0.0058z^{-1}}{1-1.889z^{-1}+0.8948z^{-2}}$$

此处修订了符号错误
把课本（5-23）和
（5-43）（5-46）统一起来

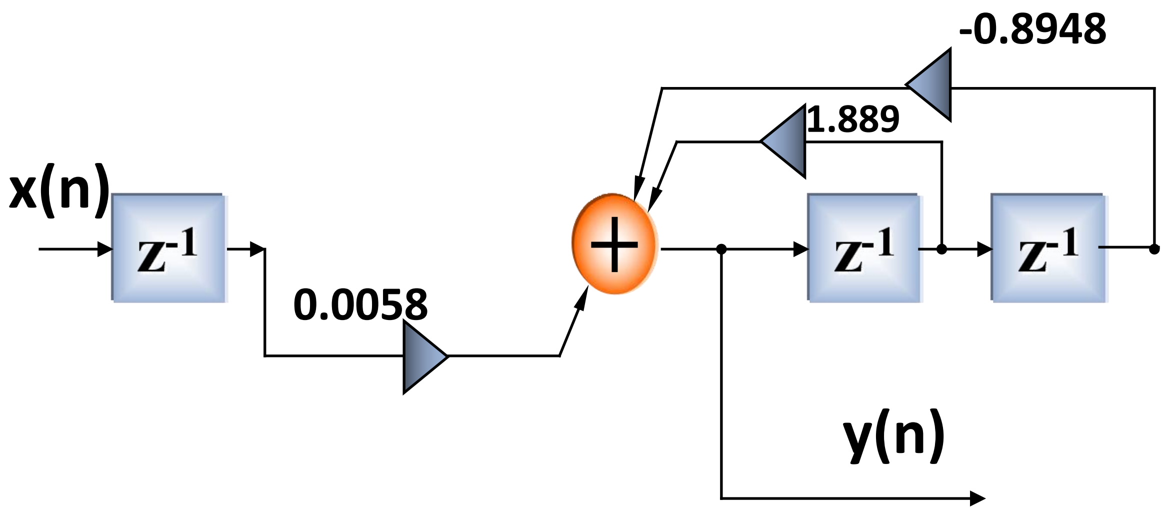
$$H(z)=\frac{0.0058z^{-1}}{1-1.889z^{-1}+0.8948z^{-2}}$$

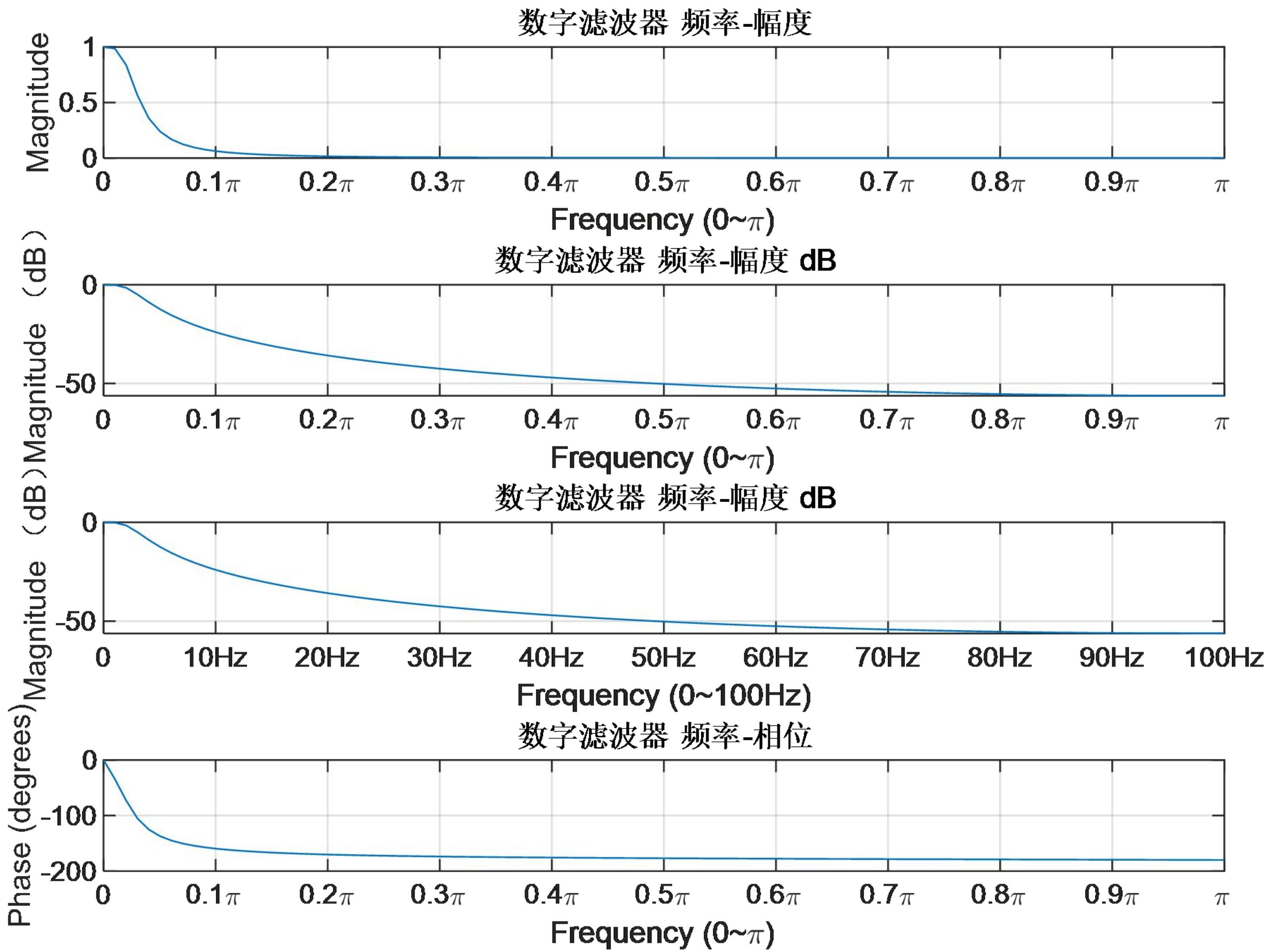
(5)频率响应

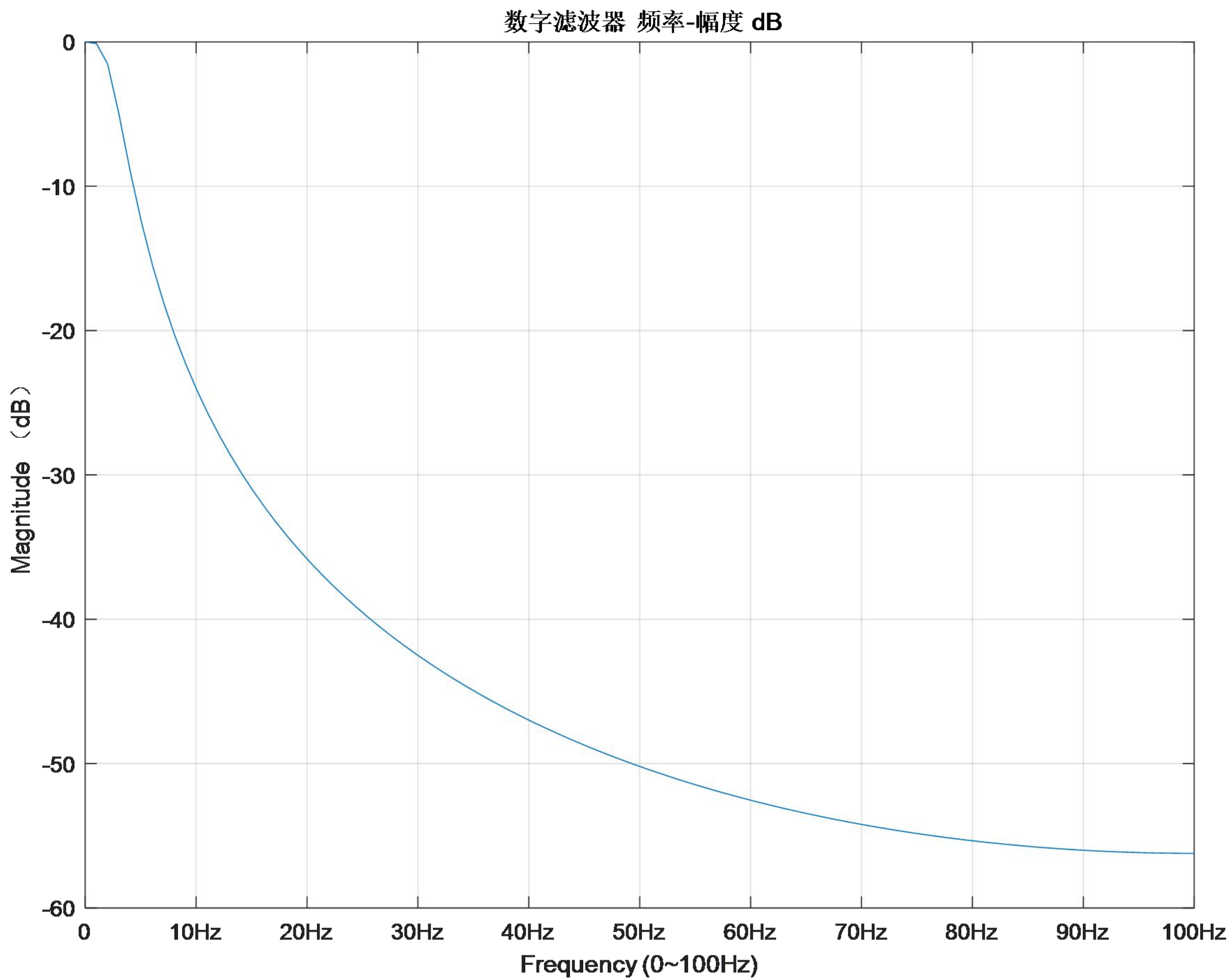
$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

(6)滤波器结构

直接I，II




数字滤波器 频率-幅度
Magnitude
1
0.5
0
0
0.1π
0.2π
0.3π
0.4π
0.5π
0.6π
0.7π
0.8π
0.9π
π
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-幅度 dB
Magnitude（dB）
0
-50
Frequency (0~π)
数字滤波器 频率-幅度 dB
Magnitude（dB）
0
-50
10Hz
20Hz
30Hz
40Hz
50Hz
60Hz
70Hz
80Hz
90Hz
100Hz
Frequency (0~100Hz)
数字滤波器 频率-相位
Phase (degrees)
0
-100
-200
Frequency (0~π)



数字滤波器 频率-幅度 dB
Magnitude （dB）
Frequency (0~100Hz)
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
0
10Hz
20Hz
30Hz
40Hz
50Hz
60Hz
70Hz
80Hz
90Hz
100Hz