数字信号处理

周治国

2023.10

第四章 快速傅里叶变换

学习要点

- 快速计算DFT的基本思路和方法
- 基2时间抽取FFT算法
- 基2频率抽取FFT算法
- 实序列FFT算法
- 分裂基FFT算法
- Chirp-Z 变换
- FFT的应用：**卷积、相关计算**

§4-1 引言

DFT: $x(n) \leftrightarrow X(k)$ $\begin{matrix} 0\le n\le N-1 \\ 0\le k\le N-1 \end{matrix}$

频域分析：一种有效的信号分析工具

$$X(k) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

$$X(e^{j\omega}) \approx X_a(e^{j\omega}) \triangleq FT[x_a(nT)]$$

问题：

$\forall x(n),\quad 0\le n\le N-1$

$\updownarrow$

$\exists X(k)\quad 0\le k\le N-1$

有效的→快速的→实时处理

$\downarrow$ $Cooley-Tukey, 1965$

FFT

§4-2 直接计算DFT的问题和改善DFT运算效率的途径

一、直接计算DFT的问题

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\qquad 0\le k\le N-1$$

P124

$$\boldsymbol{x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\qquad 0\qquad n\qquad N-1}$$

设 $N=1024$ 　　 8092

*： N^2 　　 $=10^6$ 　　 65.5×10^6

+： $N(N-1)$ 　　 $=10^6$ 　　 65.5×10^6

问题的提出

Example: compute 4点序列{2, 3, 3, 2}之DFT

$$X[m]=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]W_N^{km},\quad m=0,1,\cdots,N-1$$

$$X[0]=2W_N^0+3W_N^0+3W_N^0+2W_N^0=10$$

$$X[1]=2W_N^0+3W_N^1+3W_N^2+2W_N^3=-1-j$$

$$X[2]=2W_N^0+3W_N^2+3W_N^4+2W_N^6=0$$

$$X[3]=2W_N^0+3W_N^3+3W_N^6+2W_N^9=-1+j$$

terrible!

N	DFT
4	16
32	1024
128	16384
1024	1048576

复数加法: $N(N-1)$　　复数乘法: N^2

如何提高计算效率?

§4-2 直接计算DFT的问题和改善DFT运算效率的途径

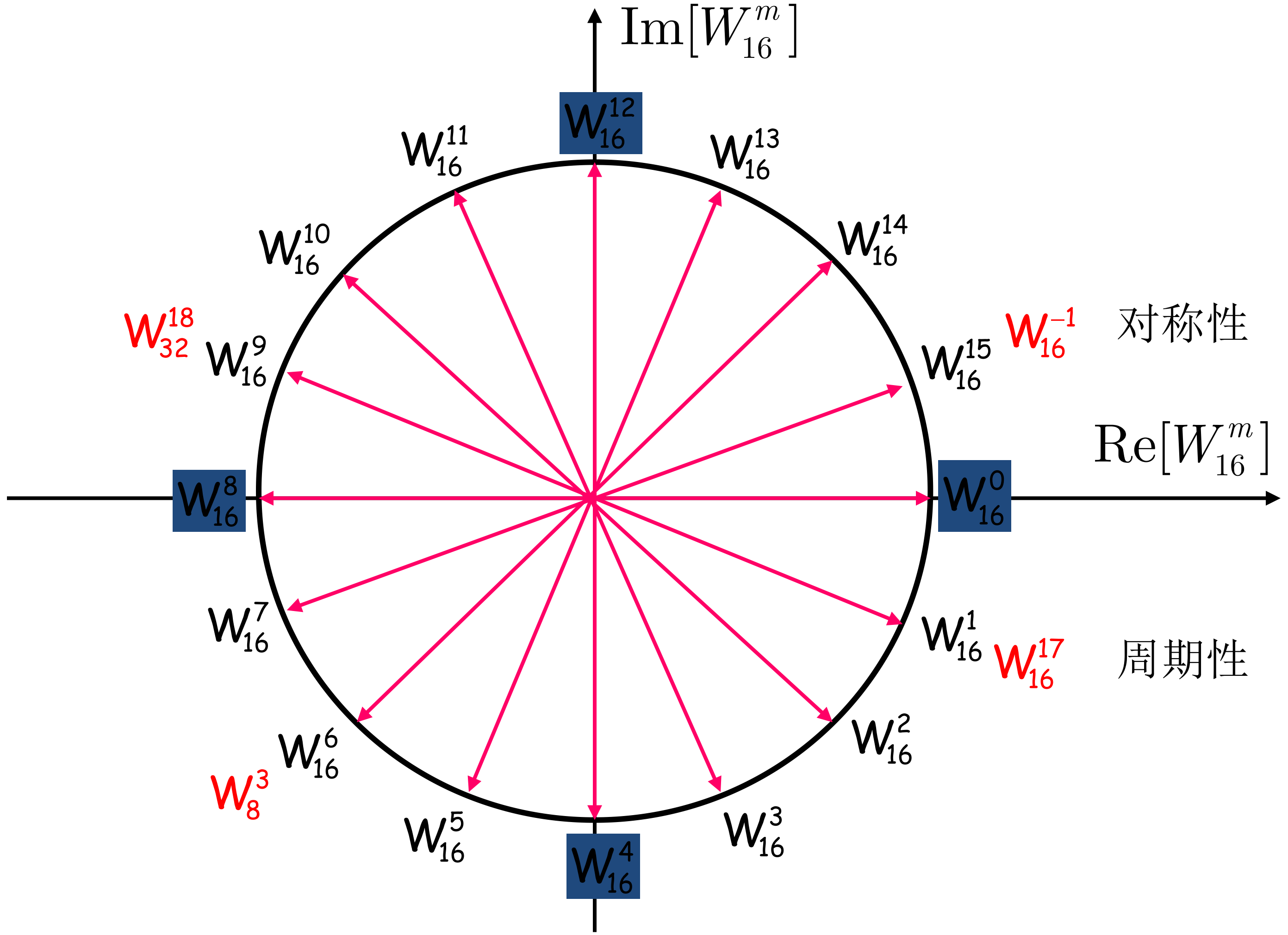
二、改善DFT运算效率的基本途径

1.利用W_N^{kn}的特性

① $W_N^{k(N-n)}=W_N^{-kn}=(W_N^{kn})^*$ （共轭）对称性

② $W_N^{kn}=W_N^{k(n+N)}=W_N^{n(k+N)}$ 周期性

解决问题的思路



参考P96 图3-21

Revisit the first example

$$X[0] = 2W_4^0 + 3W_4^0 + 3W_4^0 + 2W_4^0 = 10$$

$$X[1] = 2W_4^0 + 3W_4^1 + 3W_4^2 + 2W_4^3 = -1 - j$$

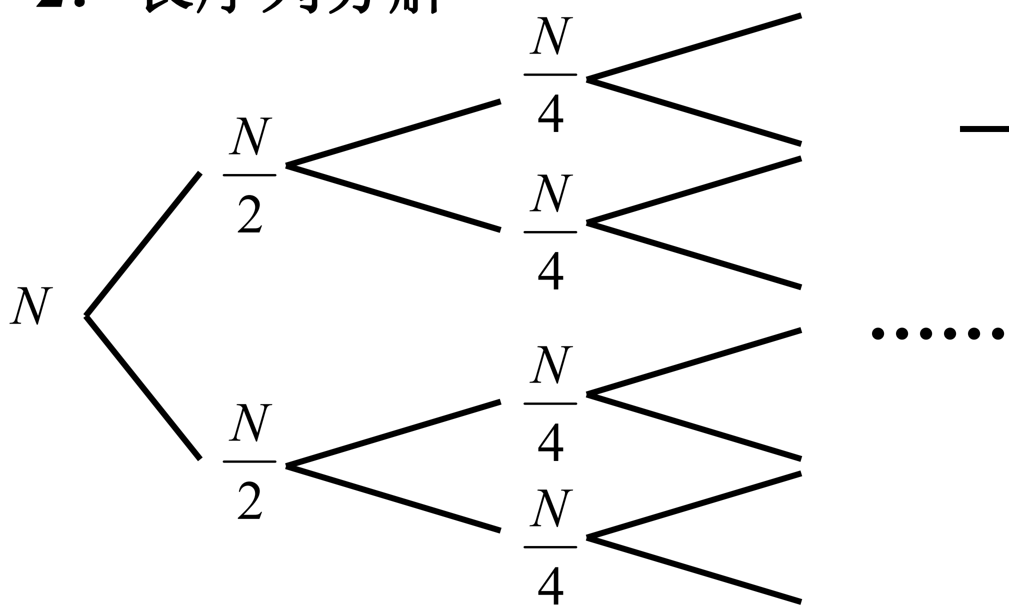
$$X[2] = 2W_4^0 + 3W_4^2 + 3W_4^4 + 2W_4^6 = 0$$

$$X[3] = 2W_4^0 + 3W_4^3 + 3W_4^6 + 2W_4^9 = -1 + j$$

An observation used in the earlier FFT work：e.g. 戈泽尔算法

§4-2 直接计算DFT的问题和改善DFT运算效率的途径

2．长序列分解



Decimation-in-Time (DIT)

Decimation-in-Frequency (DIF)

$$N^2 \rightarrow \left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2} \rightarrow \left(\frac{N}{4}\right)^2 \times 4 = \frac{N^2}{4} \rightarrow \left(\frac{N}{8}\right)^2 \times 8 = \frac{N^2}{8} \cdots\cdots$$

$$\frac{N^2}{2} \qquad \frac{N^2}{2^2} \qquad \frac{N^2}{2^3} \quad \cdots \quad \frac{N^2}{2^v}$$

解决问题的途径和算法 (since 1965)

分而治之

将时域序列逐次分解为一组子序列，利用旋转因子的特性，由子序列的离散傅立叶变换来实现整个序列的离散傅立叶变换

** 按时间抽取 (Decimation in time) DIT-FFT

$$x[n] \to \begin{cases} x[2r] \\ x[2r+1] \end{cases} \quad r = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1$$

- Cooley-Tukey (库利-图基,美,1965)

** 按频率抽取 (Decimation in frequency) DIF-FFT

$$X[k] \to \begin{cases} X[2k] \\ X[2k+1] \end{cases}$$

- Sand-Tukey (桑德-图基,美,1966)

** 分裂基方法

- Duhamel-Hollmann (杜哈梅尔-霍尔曼,法,1984)

…