

数字信号处理

周治国

2023.9

第三章

离散傅里叶变换

§ 3-6 频域采样

问题：

采用DFT实现了频域取样，对于任意一个频率特性能否用频率取样的方法去逼近？

研究：

- 1， 限制？
- 2， 经过频率取样后有什么误差？
- 3， 如何消除误差？
- 4， 取样后所获得的频率特性怎样？

§ 3-6 频域采样

一、取样点数的限制

$\forall x(n)$, 任一非周期序列 (绝对可和)

$$X(z) \rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(k) \stackrel{\Delta}{=} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k, k=0,1,\dots,N-1}$$

注意: $X(k) \neq DFT[x(n)]$ 为什么?

问题: $X(k), 0 \leq k \leq N-1 \xrightarrow{?} x(n)$

频率取样后, 信息有没有损失? 能否用序列频率特性取样值 $X(k)$ 恢复出原序列 $x(n)$?

\therefore 频域取样 \rightarrow 时域周期化

\therefore 若 $x(n)$ 为无限长序列, 则不可能由 $X(k) \rightarrow x(n)$

问题:

若有 $x(n), n = 0, 1, \dots, M-1$

如何选取 **N** 才能使

$$X(k) \rightarrow x(n)$$

$$0 \leq k \leq N-1 \quad 0 \leq n \leq M-1$$

§ 3-6 频域采样

$$\text{令 } \tilde{X}(k) \stackrel{\Delta}{=} X((k))_N \longleftrightarrow \tilde{x}'(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \quad \forall n$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{M-1} x(m) W_N^{km} \right] W_N^{-kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1} x(m) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k}$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1} x(m) \delta((n+lN)-m) \quad \forall l, n$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(n+lN) \rightarrow x(n) \text{ 的周期延拓}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} \\ &= \begin{cases} 1, & m = n + lN \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \delta((n+lN)-m) \end{aligned}$$

§ 3-6 频域采样

∴只有当 $N \geq M$ 时（否则 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ 太大，导致混叠），

$$\tilde{x}'(n) \rightarrow \tilde{x}'(n)R_N(n) \rightarrow x(n), \quad 0 \leq n \leq M-1$$

既然

$$X(k) \rightarrow x(n)$$

$$0 \leq k \leq N-1 \quad 0 \leq n \leq N-1$$



$$\forall z, X(z) = ?$$

N点有限长序列 $x(n)$ ，可从单位圆 $X(z)$ 的N个取样值 $X(k)$ 恢复，因而这N个 $X(k)$ 也应该能完全表达整个 $X(z)$ 函数及频响 $X(e^{j\omega})$ 。
DFT的综合就是z变换。

§ 3-6 频域采样

二、内插公式

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \right] z^{-n}$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} (W_N^{-k} z^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - \boxed{W_N^{-kN}} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

=1

$$= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (3-101)$$

$X(z)$ 的内插公式

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi_k(z) \quad (3-102)$$

式中:

$$\phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

(内插函数)

在已知 $X(k)$ 时, 可根据内插公式求得任意 z 点的 $X(z)$ 值, 因此 $X(z)$ 的 N 个取样点的 $X(k)$ 值, 包含了 z 变换的全部信息。

§ 3-6 频域采样

类似的，有：

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi_k(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi_k(e^{j\omega}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right) \end{aligned}$$

式中：

$$\phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$

比较： 时域取样定理
频域取样公式

§ 3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题

若信号持续时间为有限长，则其频谱无限宽；
若信号的频谱为有限宽，则其持续时间无限长。
严格来说，持续时间有限的带限信号是不存在的。

为满足DFT的变换条件，实际上对频谱很宽的信号，为防止时域取样后产生频谱混叠失真，可用前置滤波器滤除幅度较小的高频分量，使连续时间信号的带宽小于折叠频率。

对于持续时间很长的信号，取样点数太多以致无法存储和计算，只好截取为有限长进行DFT。

所以，用DFT对连续时间信号进行傅里叶分析必然是近似的，近似的准确程度严格的说是被分析波形的一个函数。

两个变换之间的差异是因为DFT需要对连续时间信号取样和截断为有限列长而产生。

思考1:

课本P100上说：“信号的持续时间为有限长，则其频谱无限宽；若信号的频谱为有限宽，则其持续时间无限长。”

人唱一首歌，持续时间有限长，是否频谱无限宽？感觉好像应该有限宽。试解释这一现象。

数字信号处理系统的典型框图

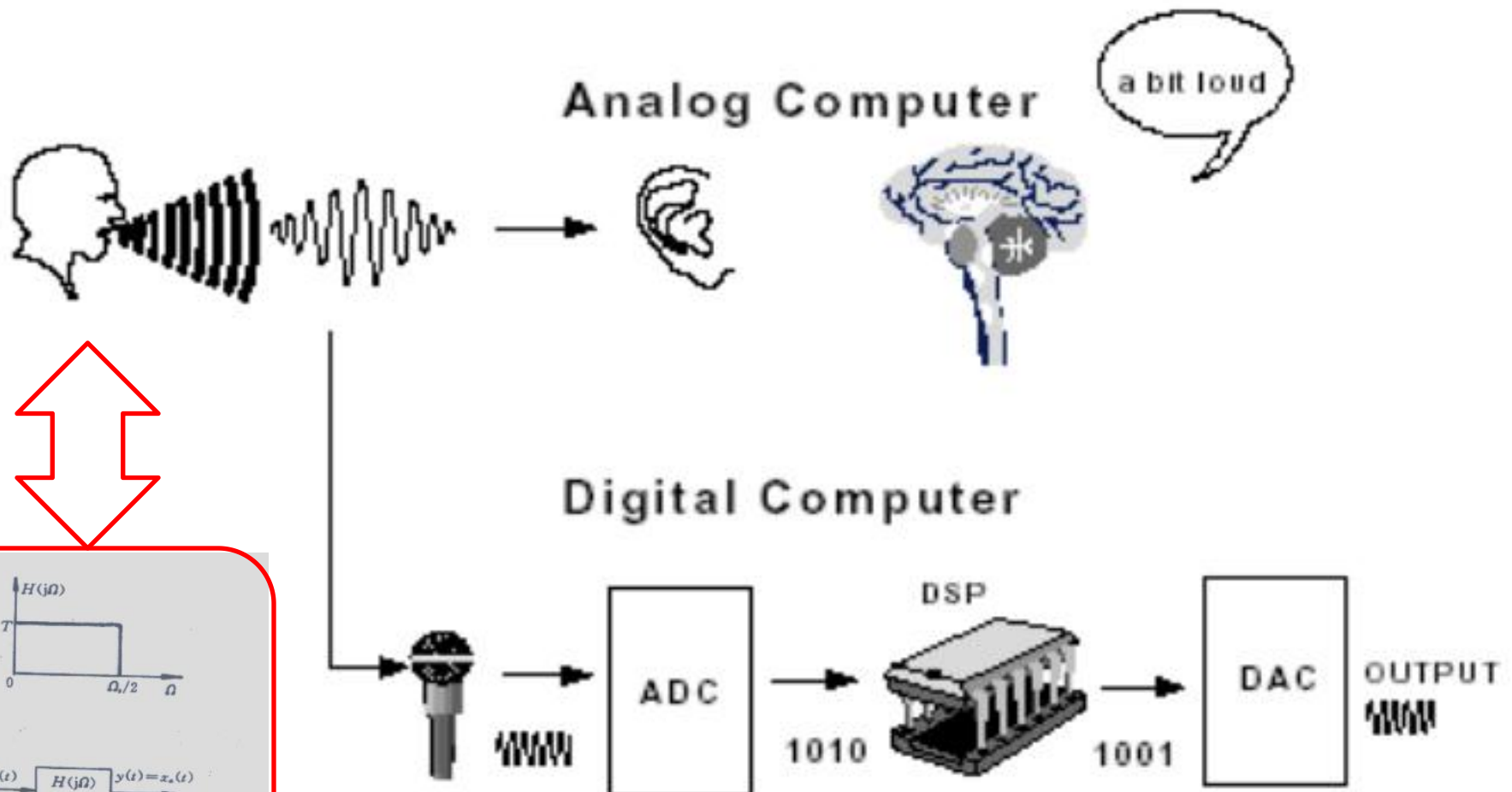
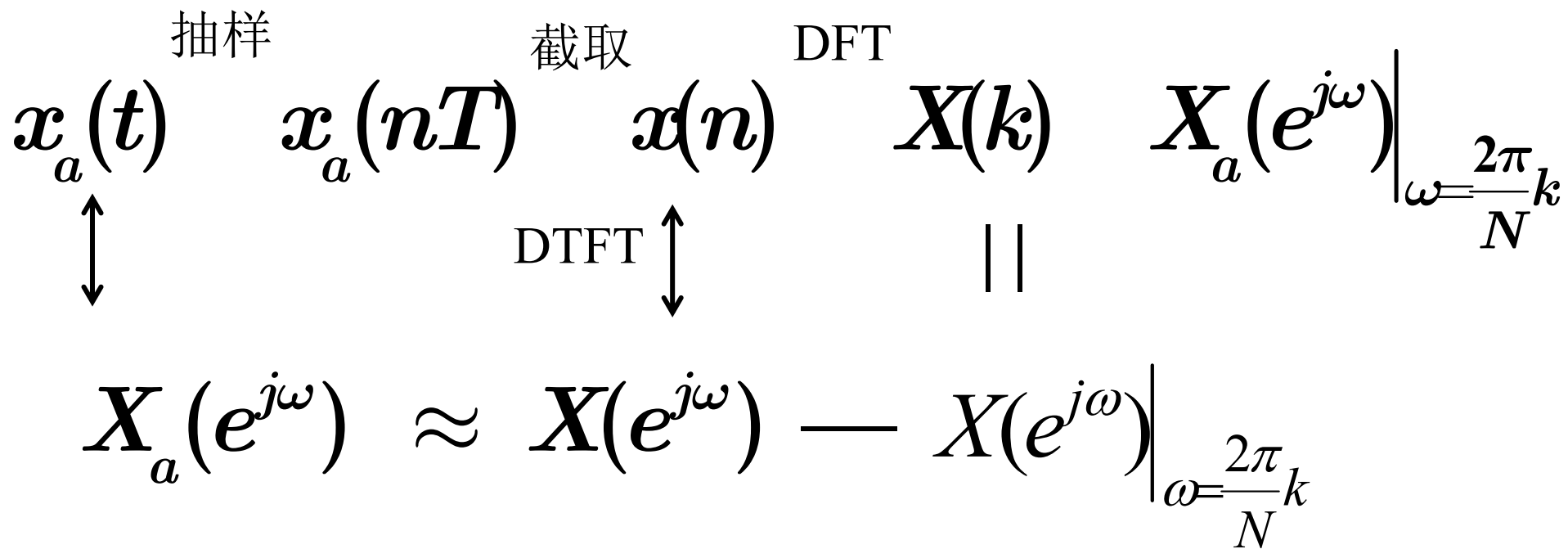


图 2-7 取样信号的恢复

解释：人的喉咙相当于低通滤波器。歌曲的频谱在人头脑中“酝酿”的时候“持续时间为有限长，其频谱无限宽”；但经过人喉咙唱出来的时候“其频谱为有限宽，且其持续时间无限长”。

§ 3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题



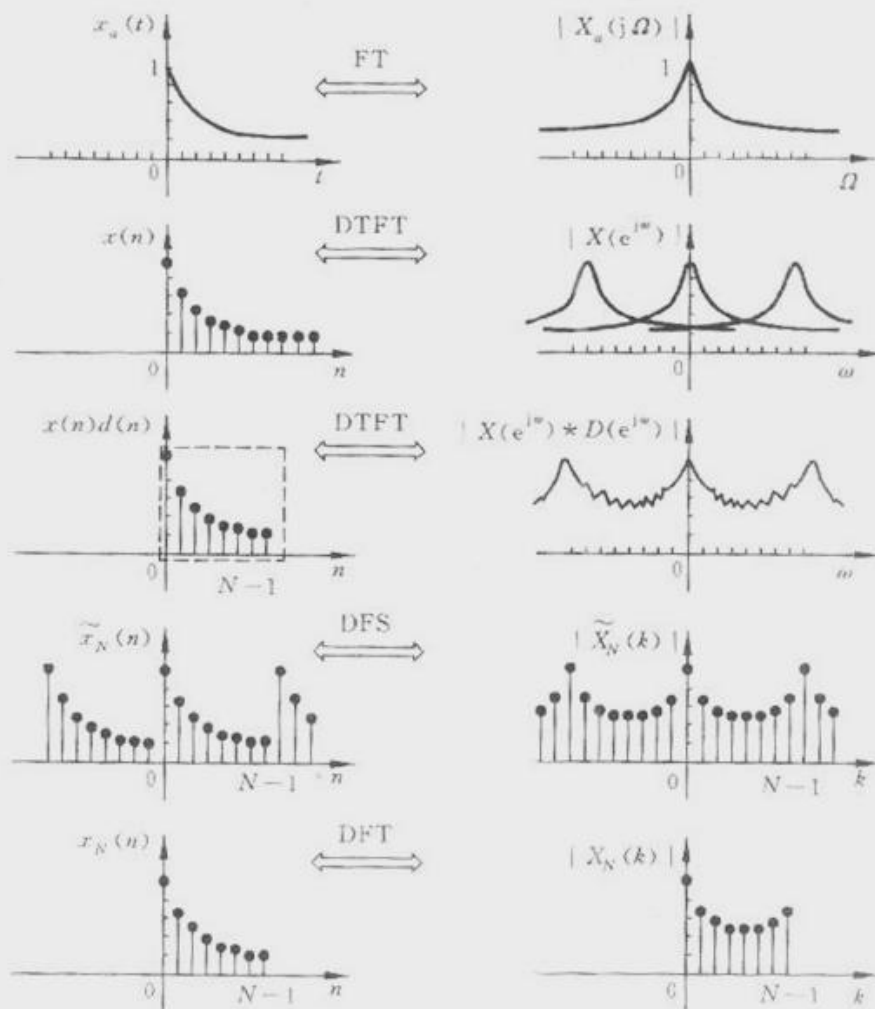
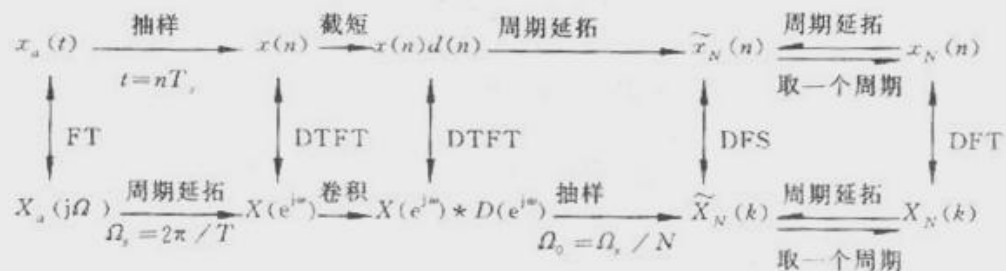


图 3-15 利用 DFT 对 CTFT(连续时间傅里叶变换)逼近的全过程

§ 3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题

一、混叠现象

消除办法:

$$f_s \geq 2f_h \quad T \leq \frac{1}{2f_h} \quad F = \frac{1}{NT} = \frac{f_s}{N} \quad t_p = \frac{1}{F} = NT$$

取样
频率

信号最
高频率


取样
周期

频率分量
间的增量
(频率
分辨率)

最小记
录长度

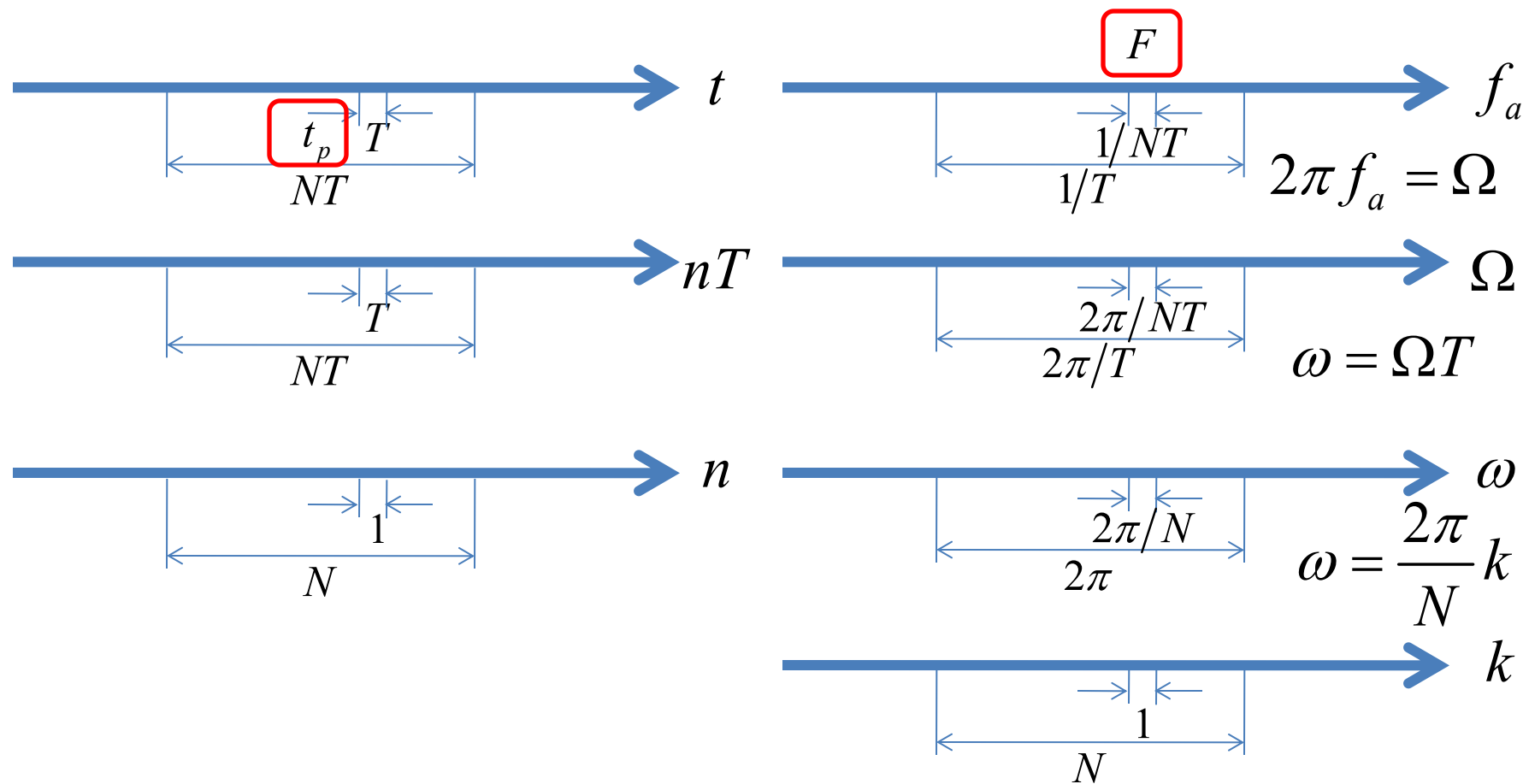
实际中通常:

$$f_s = (3 \sim 4)f_h$$


$$N \geq \frac{2f_h}{F}$$

P71: 在自变量为 t 和 f 的情况下，在一个域中对函数进行取样，必是另一个域中函数的周期。

关键字：模拟域谱间距；数字域谱间距



§ 3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题

$\forall F$ — 频率分辨率

\therefore **DFT**的 $F = \frac{1}{NT} = \frac{f_s}{N}$

$$\left(\because \Delta\omega = \frac{2\pi}{N} \rightarrow \Delta f = \frac{1}{N}, \Delta\Omega = \frac{\Delta\omega}{T}, \Delta f_a = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} = \frac{1}{NT} \right)$$

数字域

模拟域

$$f_s \geq 2f_h \text{ 或 } T \leq \frac{1}{2f_h}$$

$$\therefore N \geq \frac{2f_h}{F} \left(\because N = \frac{f_s}{F} \right)$$

注意:

$$\begin{array}{c} \forall t_p = NT \Longrightarrow F = \frac{1}{NT} = \frac{1}{t_p} \text{ 不变} \\ \downarrow \\ N \uparrow \longrightarrow T \downarrow \longrightarrow f_s \uparrow \longrightarrow \frac{f_s}{N} \end{array}$$

§ 3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题

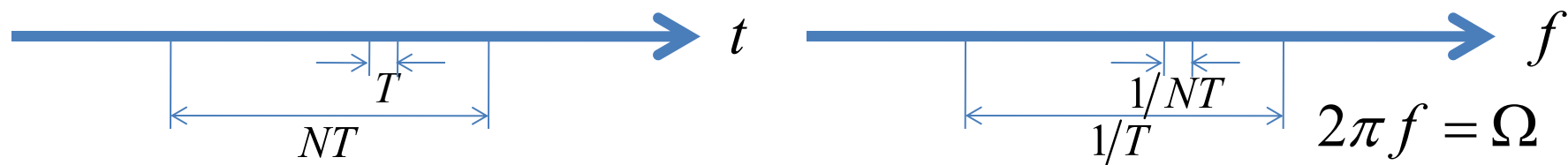
例： P101

例题：习题集P47-13

频谱分析的模拟信号以8kHz被抽样，计算了512个抽样的DFT，试确定频谱抽样之间的频率间隔。

解：

由下图



$$\text{频域抽样间隔 } f_0 = \frac{1}{NT} = \frac{8k}{512} = 15.6 \text{ Hz}$$

思考2:

课本P101上说：“信号的频率分辨率 F 和最小记录长度 t_p 成反比”。

$$F=1/t_p \quad (3-110)$$

有同学问：如果示波器采样时间持续1s，以100Ms/s (每秒采样100M次)的采样速率对信号采样，最小记录长度 $t_p=1s$ ，根据公式(3-110)，那么无论怎么设置采样率，频率分辨率都是1Hz。若需要对信号进行实时高精度测频，如何实现。

解释：示波器内部往往每一通道有一定深度的存储FIFO，即示波器可以以100Ms/s 持续采集FIFO空间深度的数据。也即N是常数。

$$t_p = 1/F = N/f_s$$

提高采样率 f_s ， t_p 增加， F 减小。

若需要对信号进行高精度测频，分辨率0.01Hz，信号最高频率100Hz，根据采样定理，先选择合适采样率，如400Hz/s，根据上述公式， $N > 10k$ ， $t_p = 100s$ 。

如何实时处理，这是个难题。我们的经验，可以先预估信号频点，采用DFT，在信号频点附近计算若干点的DFT。

§ 3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题

二、栅栏效应

$$X(k) \approx X_a(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k, 0 \leq k \leq N-1}$$

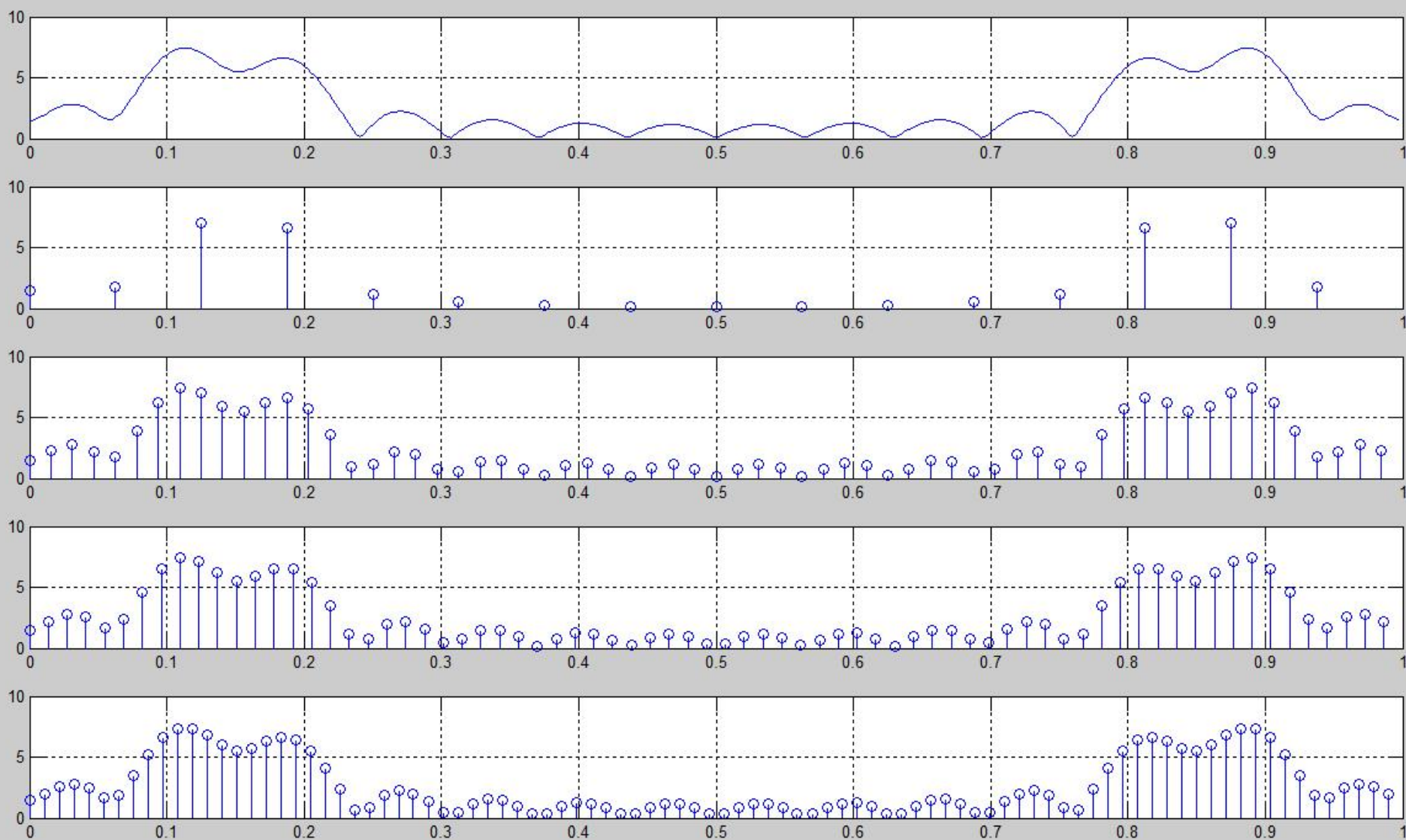
办法：对 $x(n)$ 通过补零加长。

注意：补零不能提高分辨率！

延长序列的DFT (不是2的整数次幂)

序列 $x = \sin(0.25 \cdot \pi \cdot n) + \sin(0.35 \cdot \pi \cdot n)$; $n = 0:15$;

补零到64点, 73点, 93点, 作DFT运算

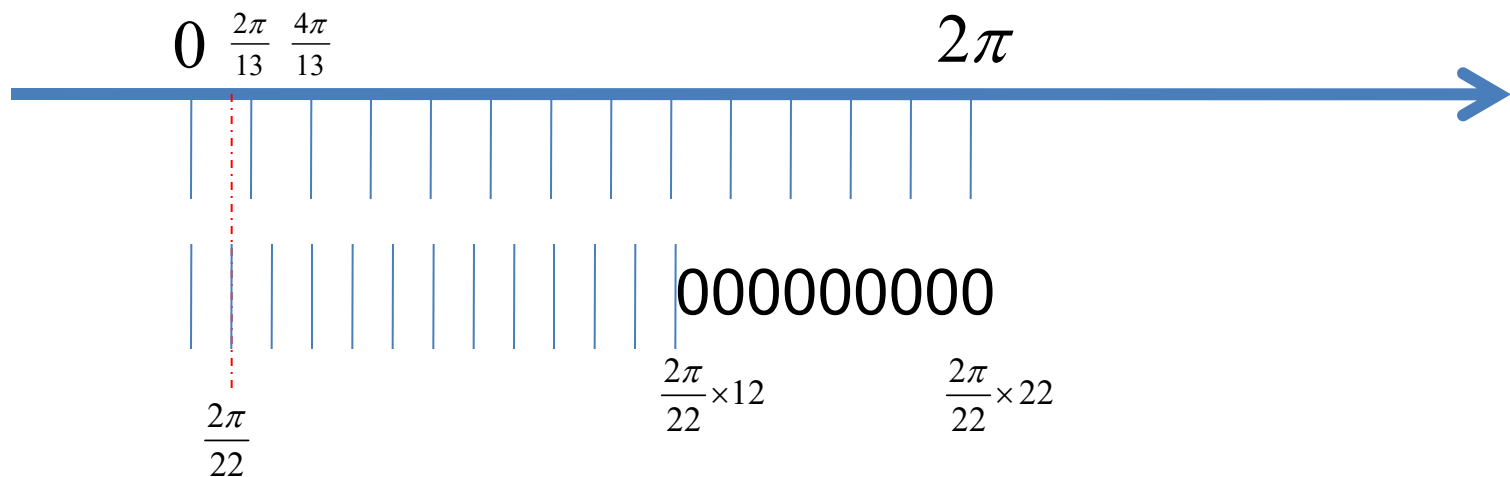


历年考试真题

设有限长序列 $x(n)$, $0 \leq n \leq 12$, 令 $X(e^{j\omega})$ 表示 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $DTFT$, 如果希望通过计算一个 M 点DFT来求出 $\omega = \pi / 11$ 处 $X(e^{j\omega})$ 的值, 试确定最小可能的正整数 M , 并给出一种利用 M 点DFT求出 $\omega = \pi / 11$ 处 $X(e^{j\omega})$ 的值的值的方法。

历年考试真题

设有限长序列 $x(n)$, $0 \leq n \leq 12$, 令 $X(e^{j\omega})$ 表示 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $DTFT$, 如果希望通过计算一个 M 点DFT来求出 $\omega = \pi / 11$ 处 $X(e^{j\omega})$ 的值, 试确定最小可能的正整数 M , 并给出一种利用 M 点DFT求出 $\omega = \pi / 11$ 处 $X(e^{j\omega})$ 的值的值的方法。



$$0 < \omega = \frac{2\pi}{22} < \frac{2\pi}{13}$$

§ 3-7 用DFT对连续时间信号逼近的问题

三、频谱泄露现象

$$x_a(nT) \rightarrow x(n), 0 \leq n \leq N-1$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \\ x_a(nT)R_N(n) & \xleftrightarrow{FT} & X_a(e^{j\omega}) \widetilde{\otimes} R_N(e^{j\omega}) \\ \downarrow \text{DFT} & \swarrow \omega = \frac{2\pi}{N}k & \\ X(k) = X_a(k) \otimes R_N(k) & & \end{array}$$

$\because R_N(k)$ 并非 $\delta(k)$

$\therefore X_a(k)$ 中的的频谱被展宽 \rightarrow 泄漏

解决办法：选择谱特性更接近 $\delta(k)$ 的窗函数

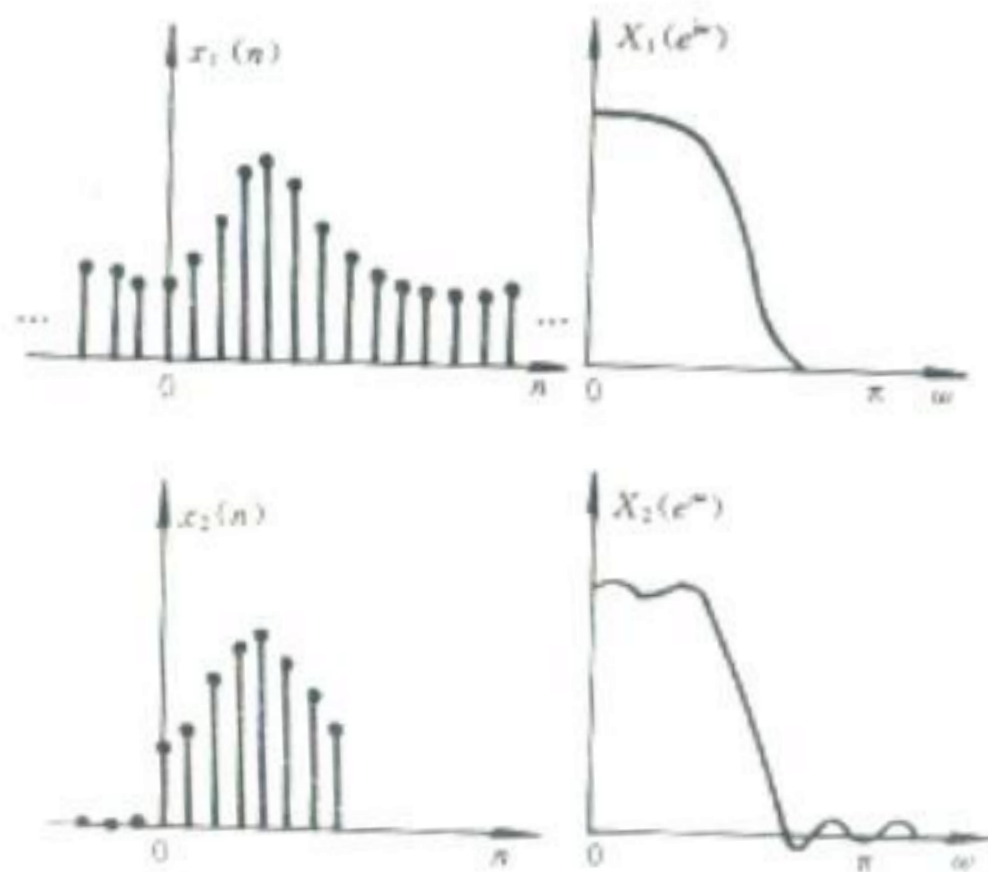


图 3-23 信号截断时产生的频谱泄漏现象

对模拟信号 $x(t) = \cos(400\pi t)$ 以一定的采样率进行采样，得到一个256点数字序列 $x(n)$ ，其中 $n = 0 \sim 255$ 。

- (1) 若采样率 $F_s = 0.8\text{KHz}$ ，计算序列 $x(n)$ 的256点DFT。该结果能否说明题中所述情形不存在谱泄露现象？为什么？
- (2) 若采样率 $F_s = 0.4\text{KHz}$ ，重新计算序列 $x(n)$ 的256点DFT，并解释产生该结果的原因。

解:

$$(1) x(t) = \cos(400\pi t)$$

$$F_s = 0.8 \text{ KHz}$$

$$x(n) = \cos(400\pi nT) = \cos\left(\frac{400\pi n}{F_s}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{j\pi n/2} + e^{-j\pi n/2} \right] = \frac{1}{2} \left[e^{j\frac{2\pi n}{256}64} + e^{j\frac{2\pi n}{256}(256-64)} \right], n = 0 \sim 255$$

$$\text{DFT}\{x(n)\} = 128[\delta(k-64) + \delta(k-192)]$$

$$(2) x(t) = \cos(400\pi t)$$

$$F_s = 0.4 \text{ KHz}$$

$$x(n) = \cos(400\pi nT) = \cos\left(\frac{400\pi n}{F_s}\right) = \cos(\pi n)$$

$$\text{DFT}\{x(n)\} = 256\delta(k-128)$$

§ 3-8 加权技术与窗函数

一、加权的作用

P105

$$x(n) \rightarrow w(n)x(n) \xrightarrow{DFT} \text{抑制频谱泄漏} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

点、线、面

频域
滤波

（频域加权）

时域：点相卷
频域：线相乘

抑制“栅瓣”露头

时域
加权

（时域滤波）

时域：点相乘
频域：线相卷

抑制“主瓣”泄露

处理过程

输入信号

- 限频：前置滤波
- 限时：加窗截断（加权）

数字处理

- 滤波：时域相卷，频域相乘

§ 3-8 加权技术与窗函数

二、常用的窗函数

幅度响应

$$W_{db}(\omega) = 20 \log_{10} \frac{|W(e^{j\omega})|}{W(e^{j0})}$$

$$w(n) \leftrightarrow W(e^{j\omega})$$

$$W(e^{j0})$$

1. 矩形窗

$$w(n)=1,$$

$$n=-\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

$$w(n)=1,$$

$$n=0, 1, \dots, N-1$$

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\left[\frac{N-1}{2}\omega\right]}$$

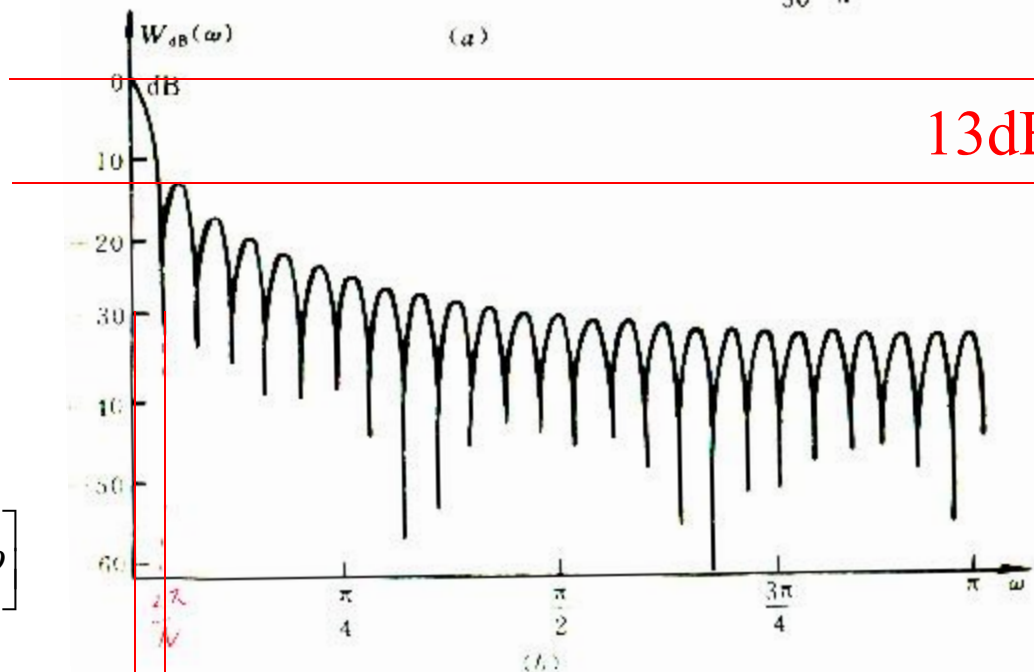
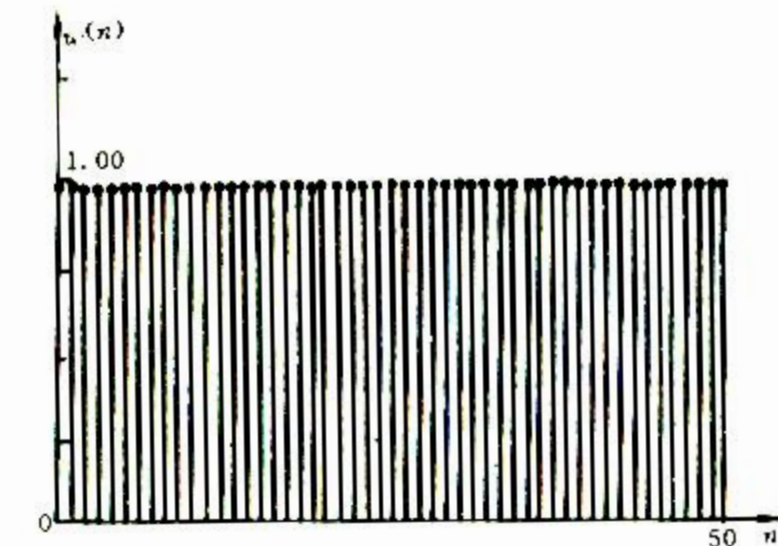
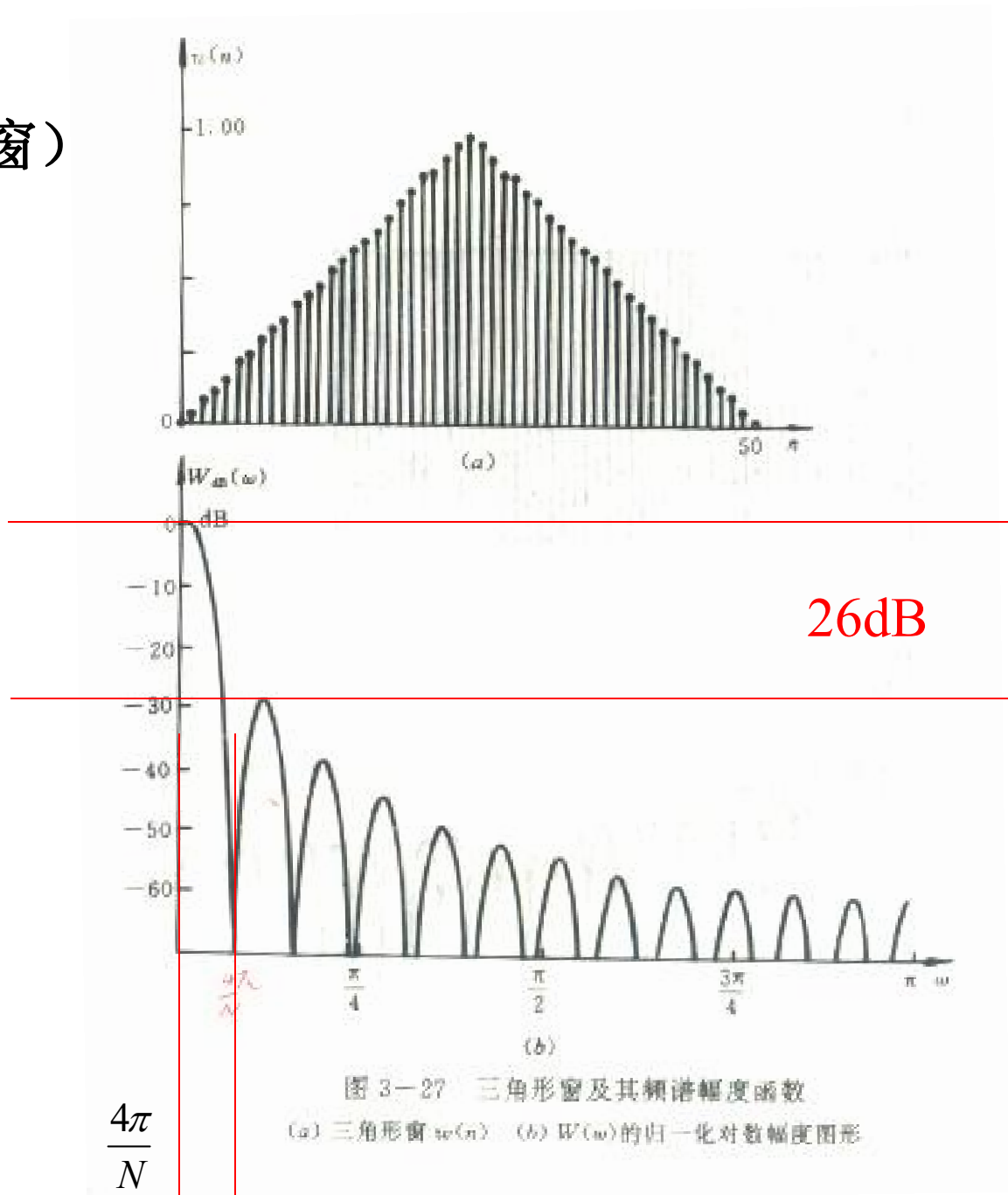


图 3-26 矩形窗及其频谱幅度函数

(a) 矩形窗 $w(n)$; (b) $W(e^{j\omega})$ 的归一化对数幅度图形

$$\frac{2\pi}{N}$$

2. 三角形窗 (巴特利特Bartlett窗)



$$\frac{4\pi}{N}$$

3. 汉宁窗 (Hanning Window) 余弦平方窗, 升余弦窗

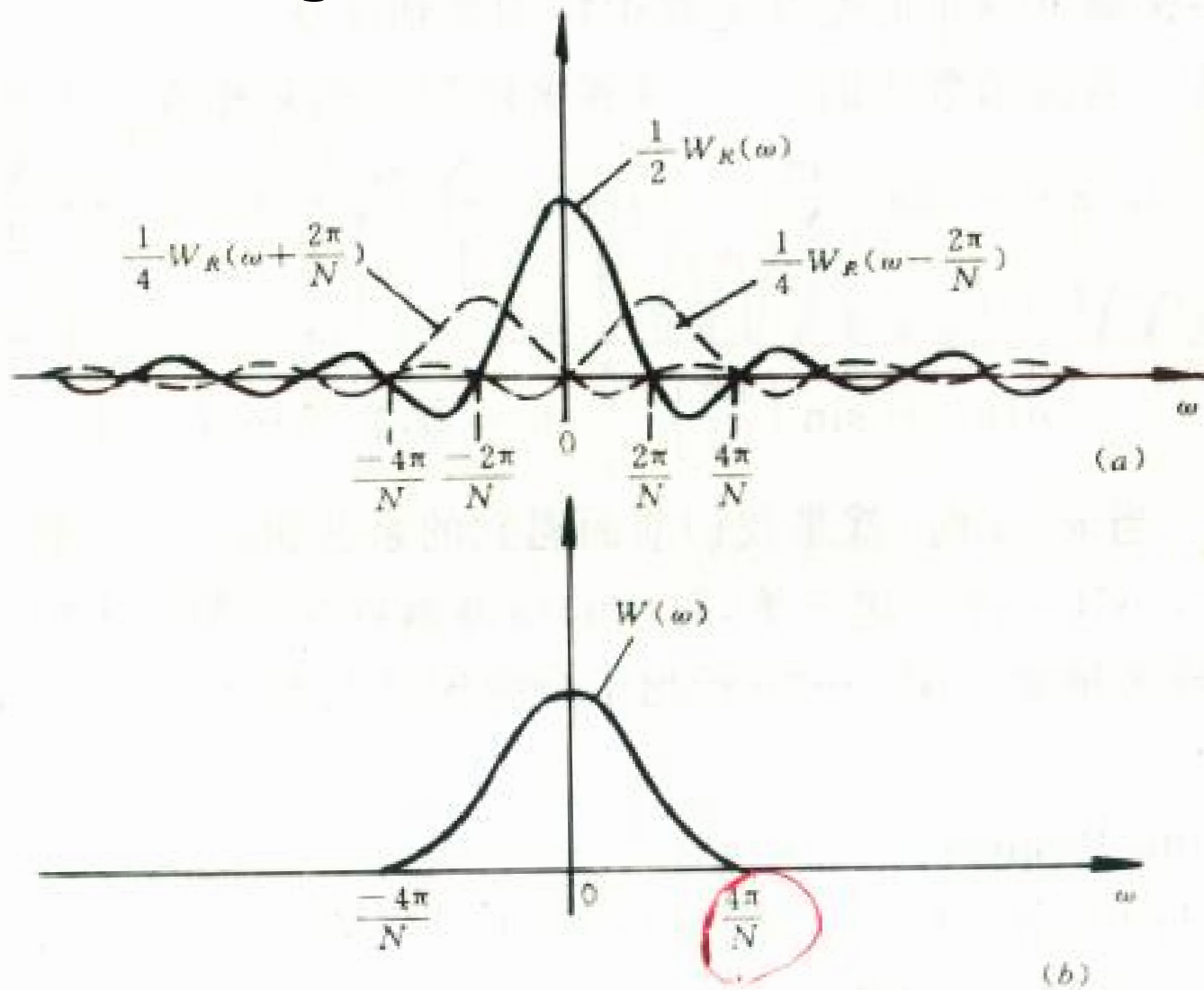


图 3-28 汉宁窗频谱

(a) 三个矩形窗幅度谱的叠加; (b) 汉宁窗频谱 $W(\omega)$ 主瓣

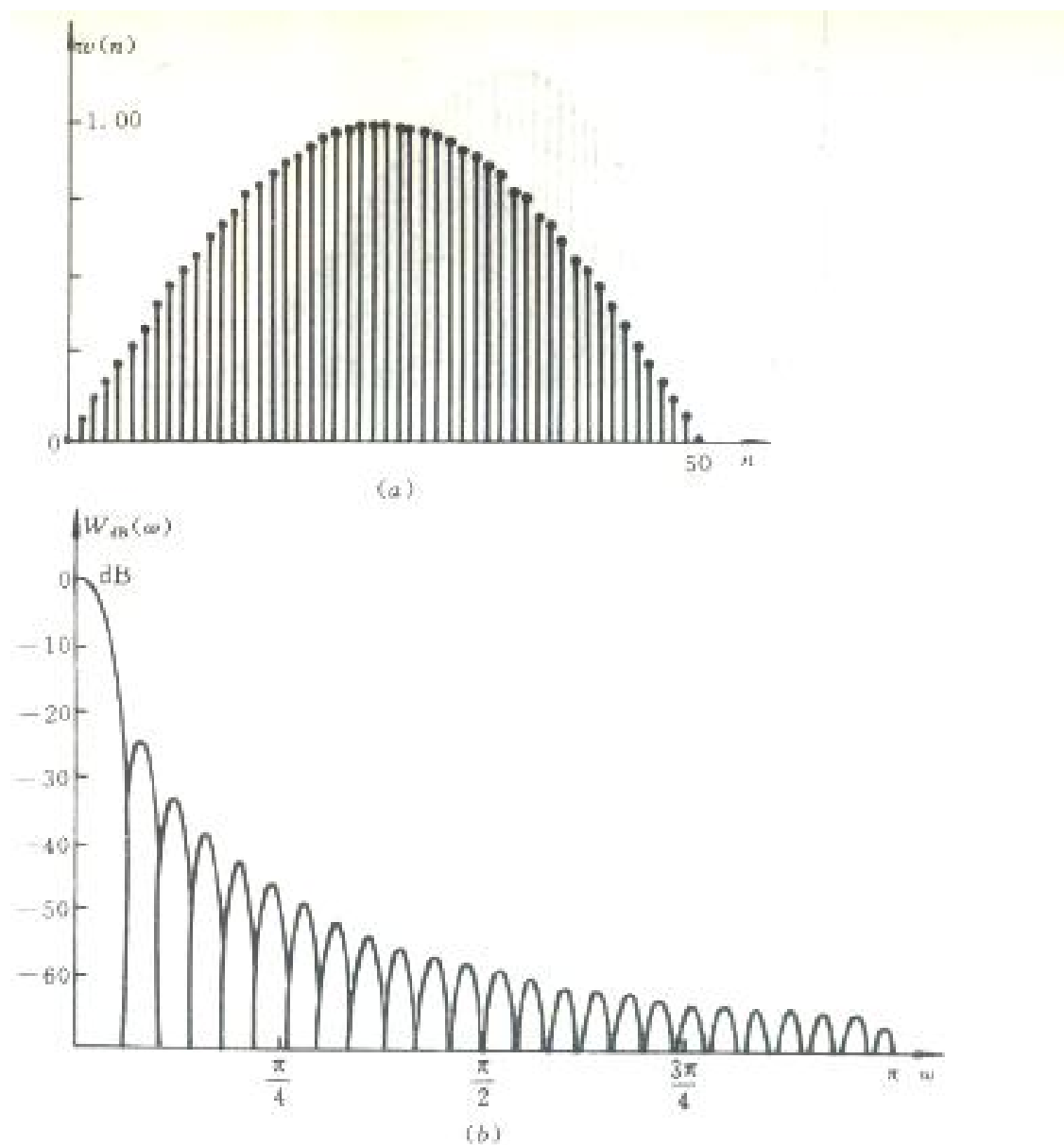


图 3-29 余弦窗及其频谱幅度函数

(a) 余弦窗 $w(n)$

(b) $W(\omega)$ 的归一化对数幅度图形

4.海明窗 (Hamming Window)

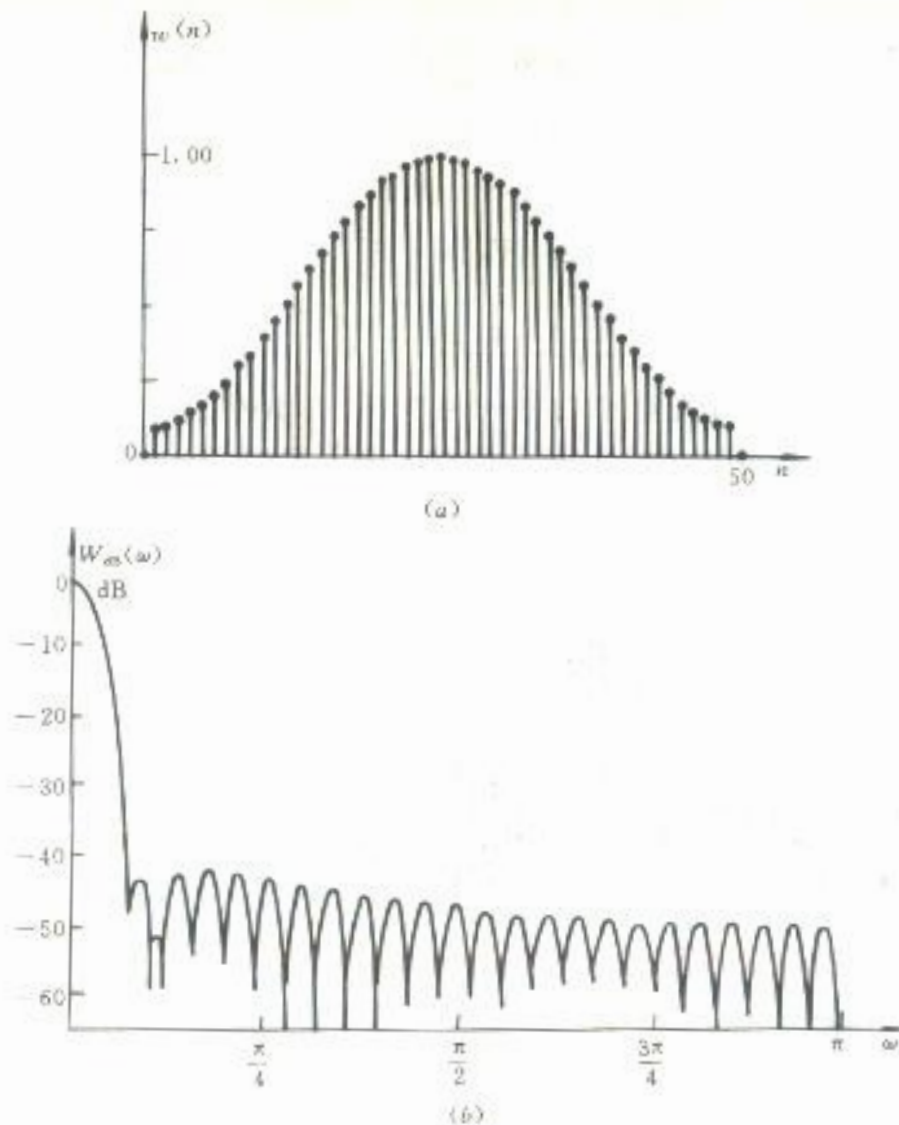


图 3-31 海明窗及其频谱幅度函数

(a) 海明窗 $w(n)$

(b) $W_m(\omega)$ 的归一化对数幅度图形

§ 3-8 加权技术与窗函数

5. 布拉克曼窗 (**Blackman Window**)

(二阶升余弦窗)

式(3-151)、(3-152), P114图3—32

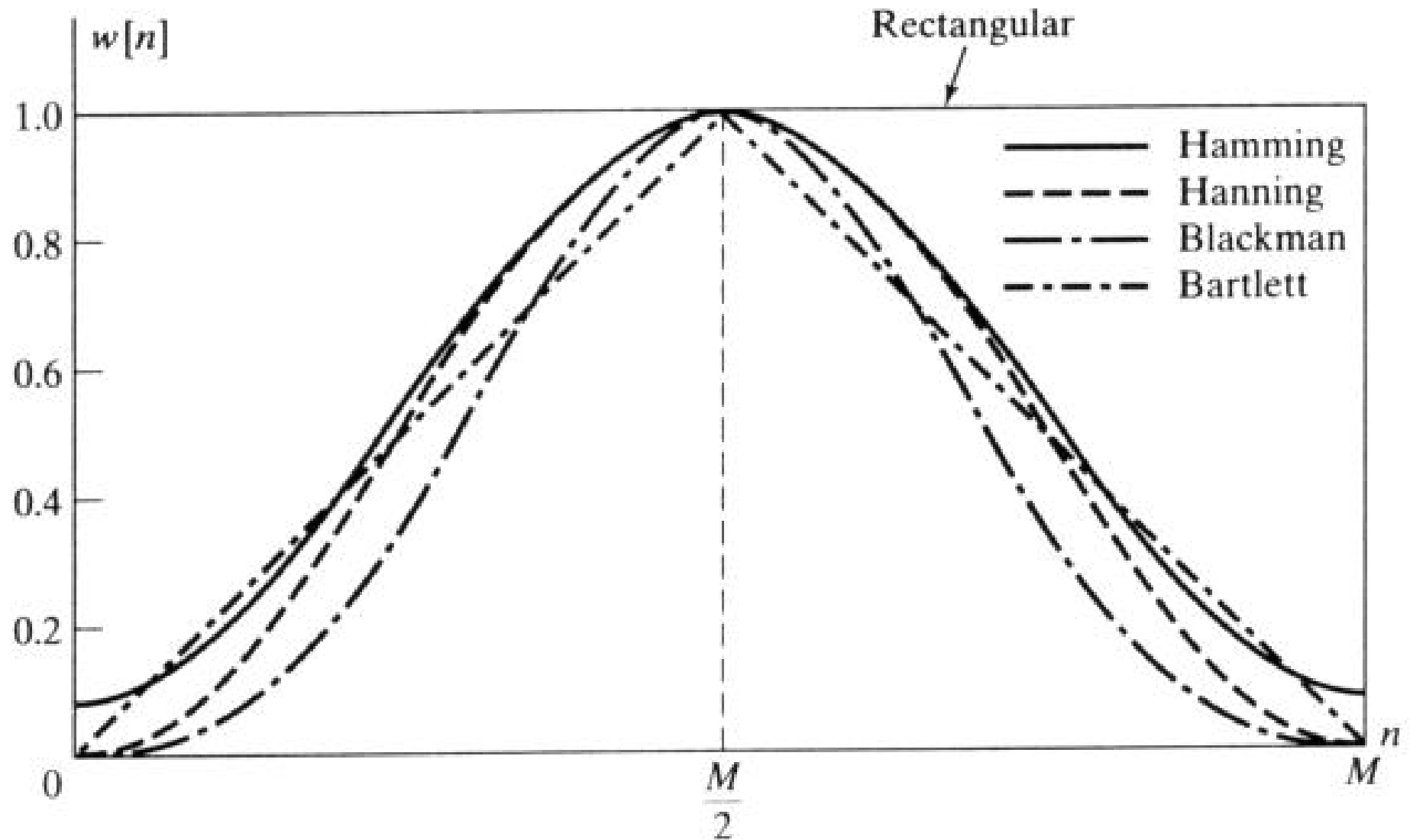
6. 布拉克曼—哈里斯窗 (**Harris**)

式(3-146)&表3—2、(3-152)&表3—2 ,
P116图3—34, P117图3—35

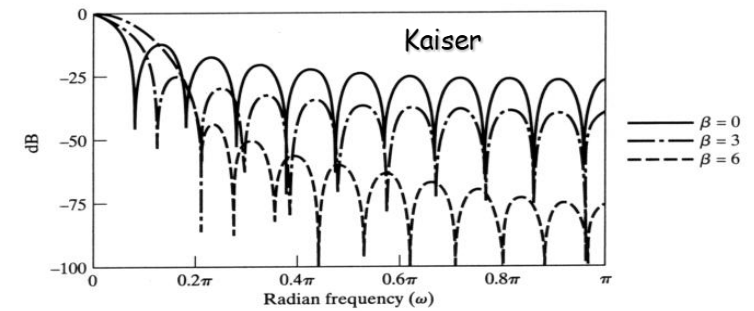
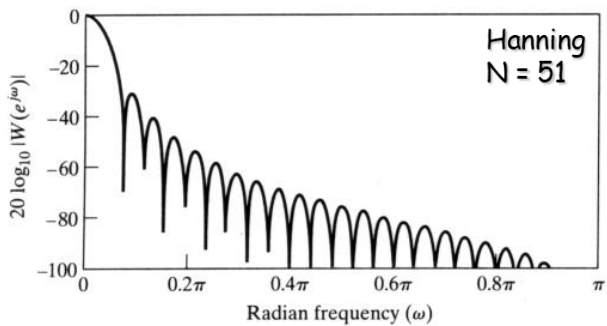
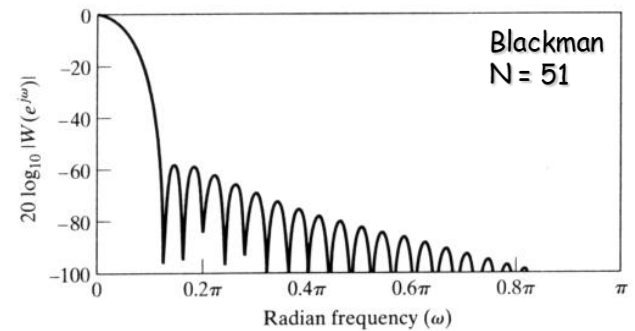
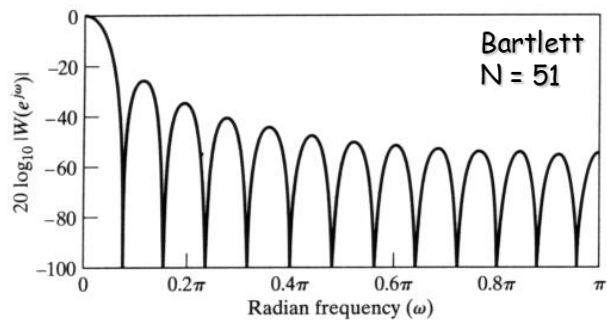
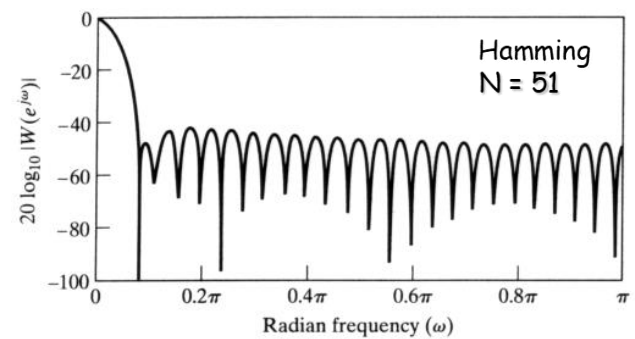
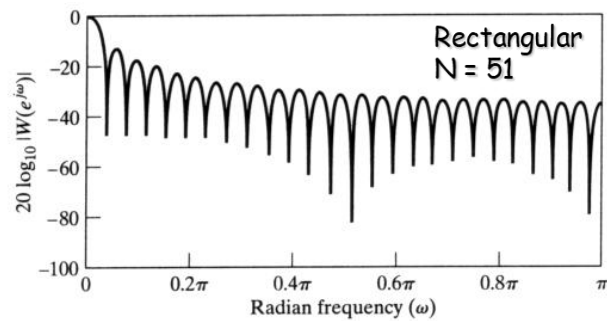
7. 最优化窗

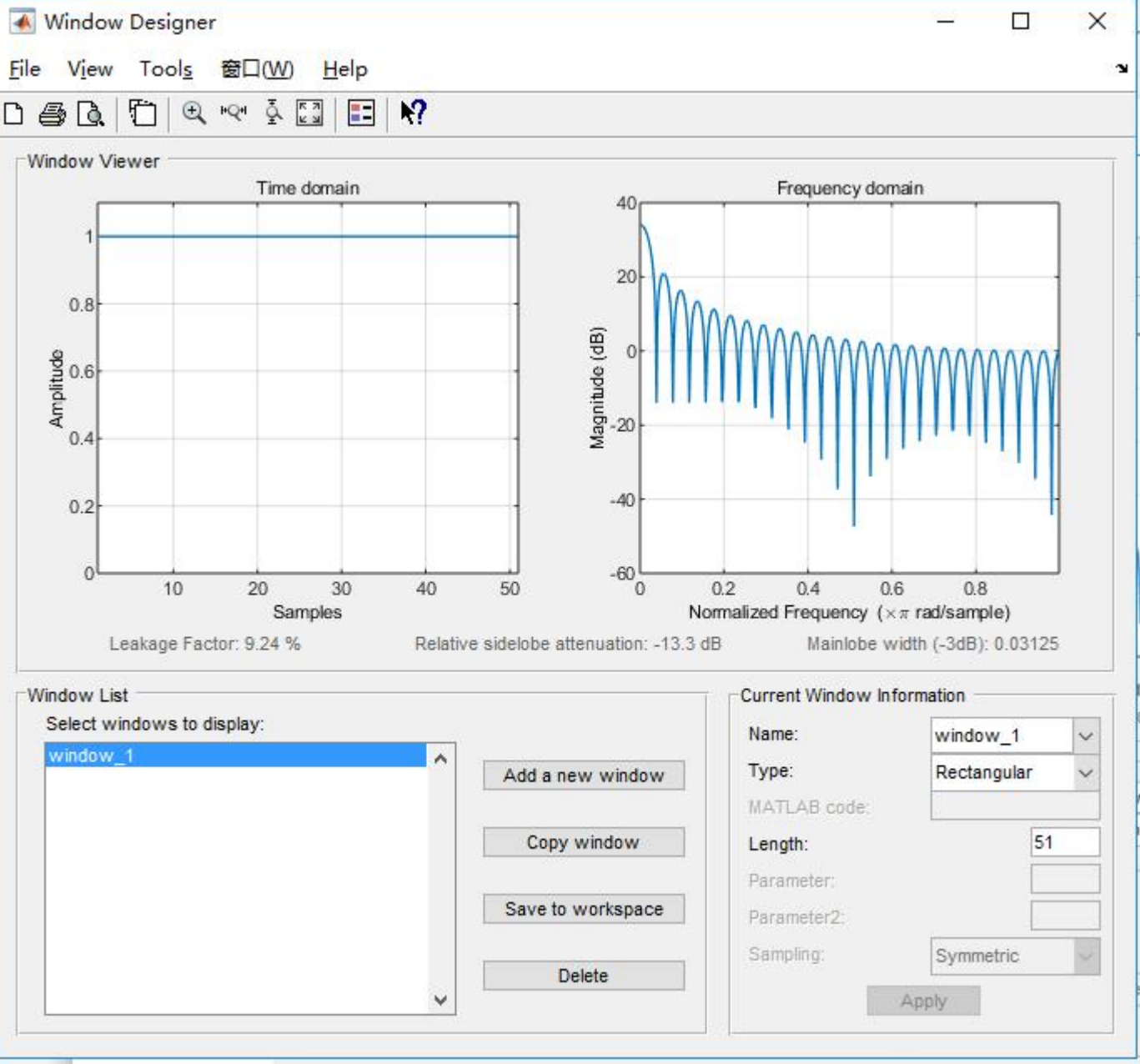
详见P116—118图3—36

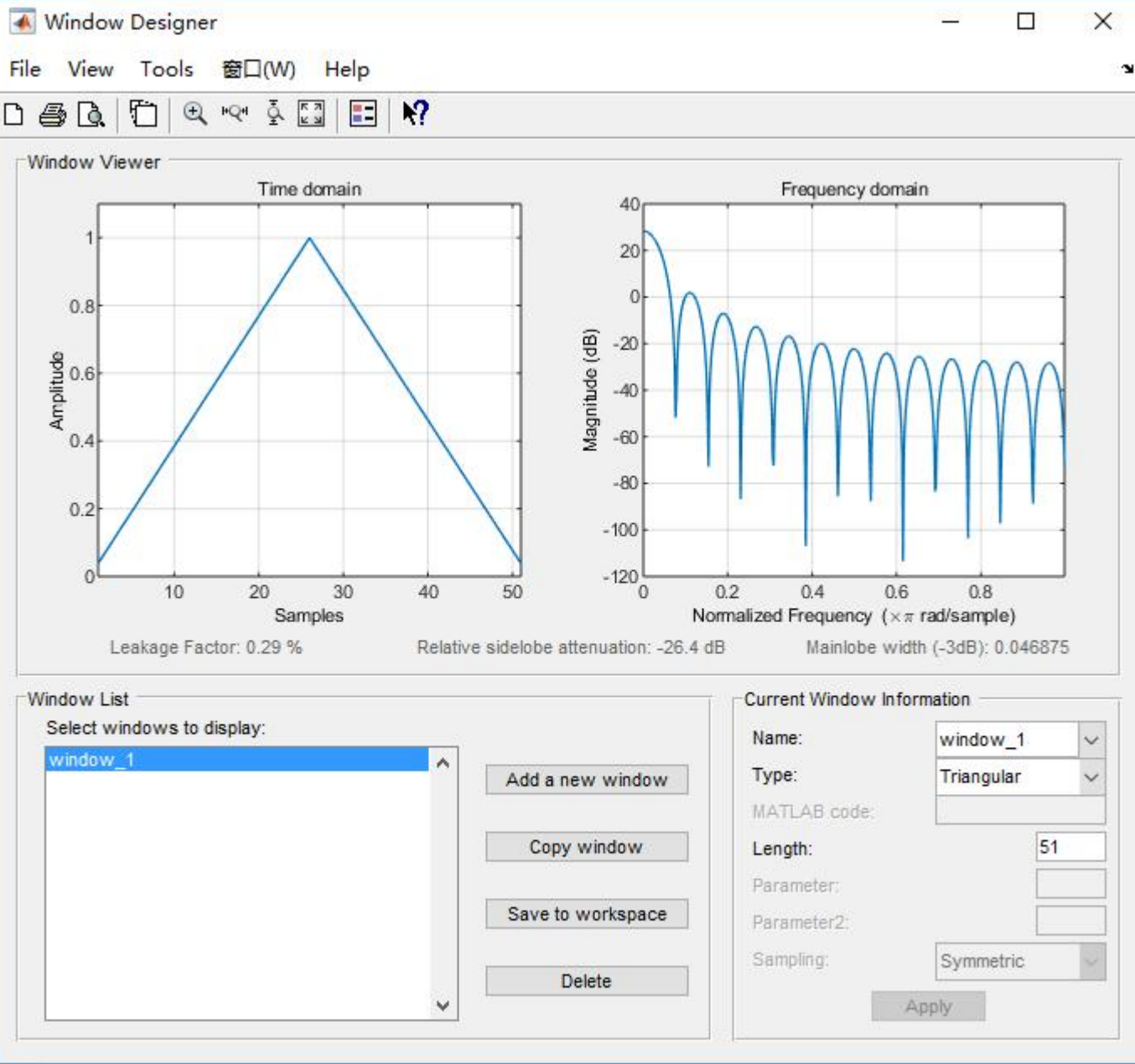
Shape of commonly used window functions.

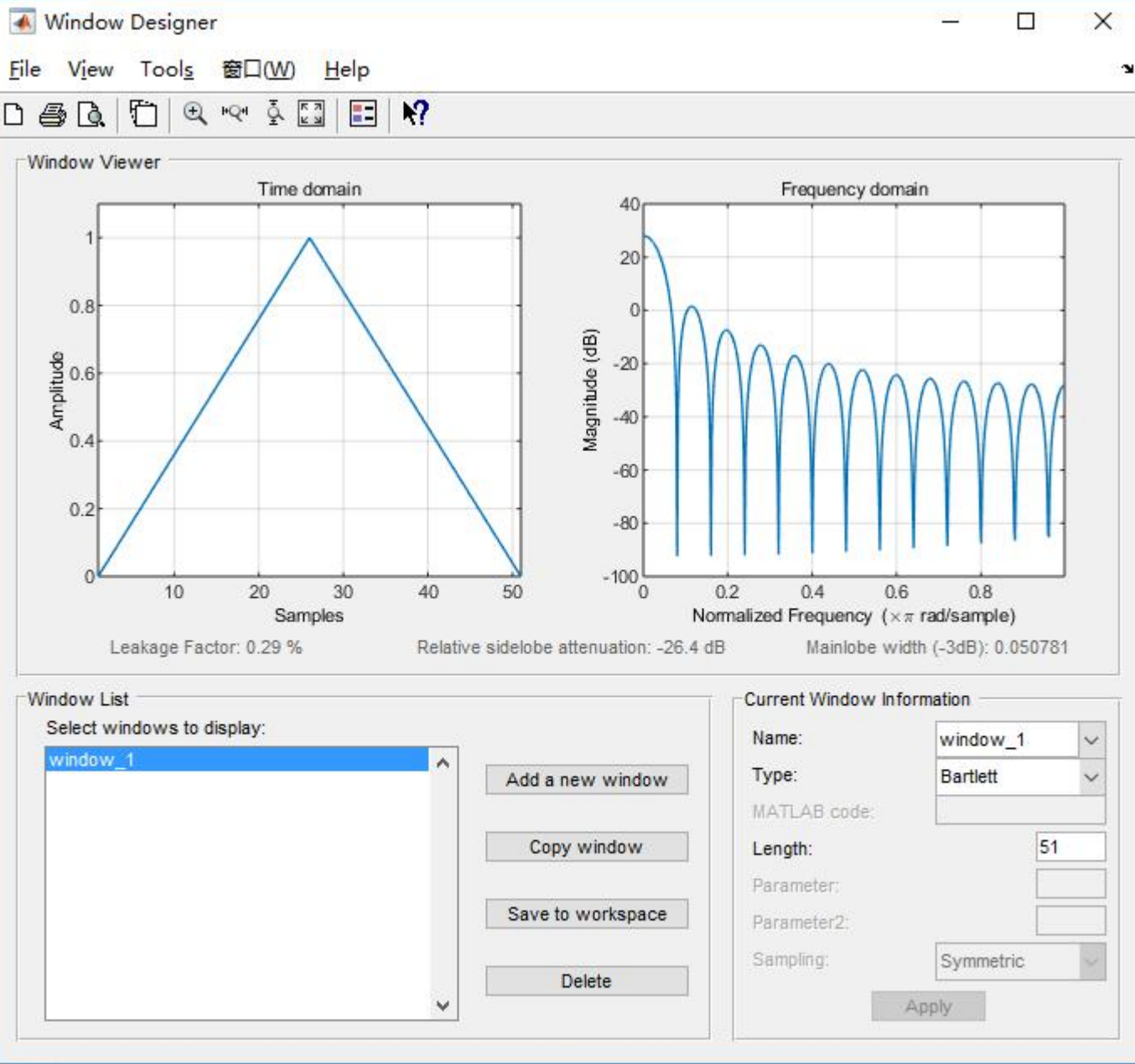


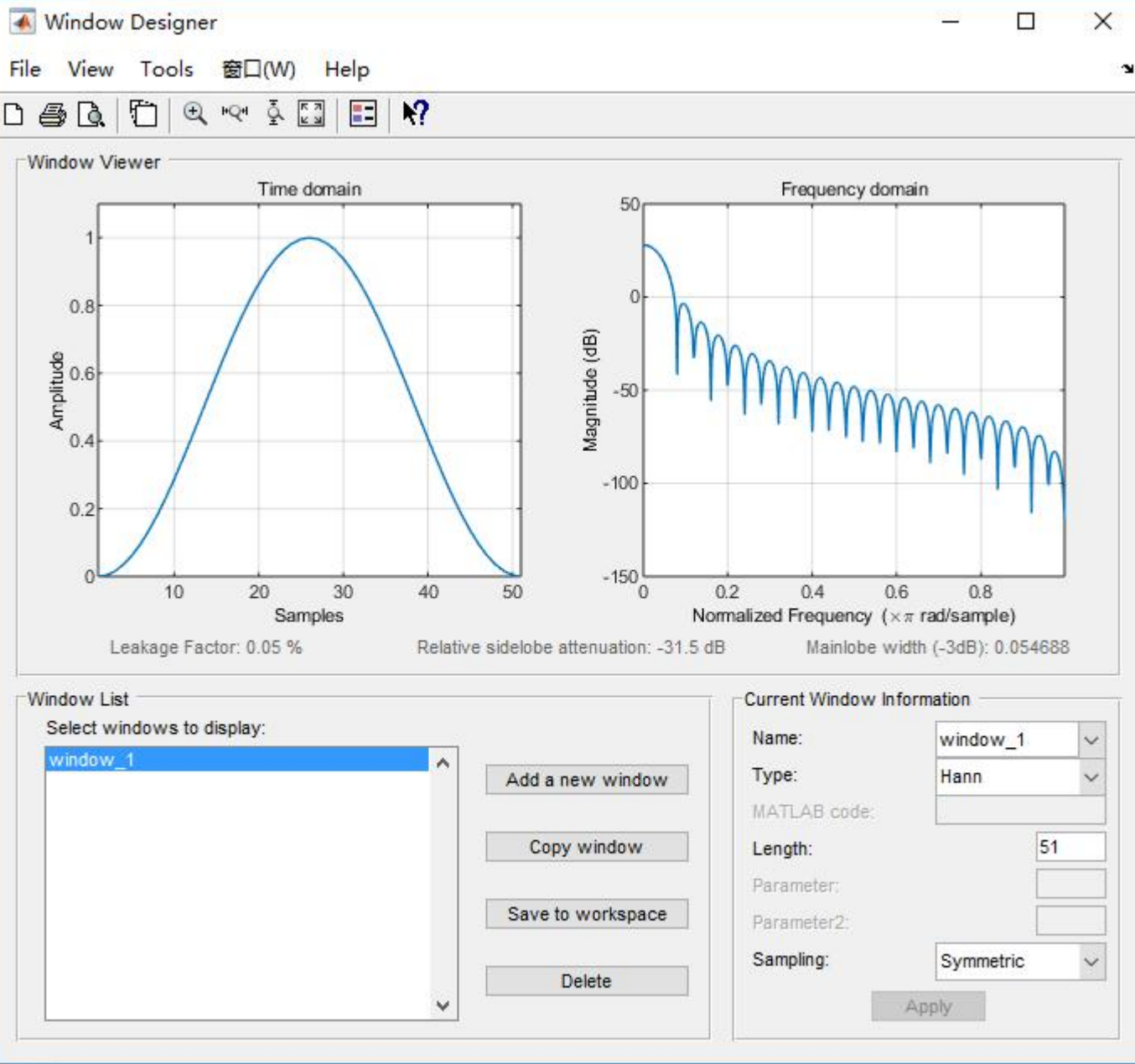
主瓣宽度 v. s. 副瓣高度

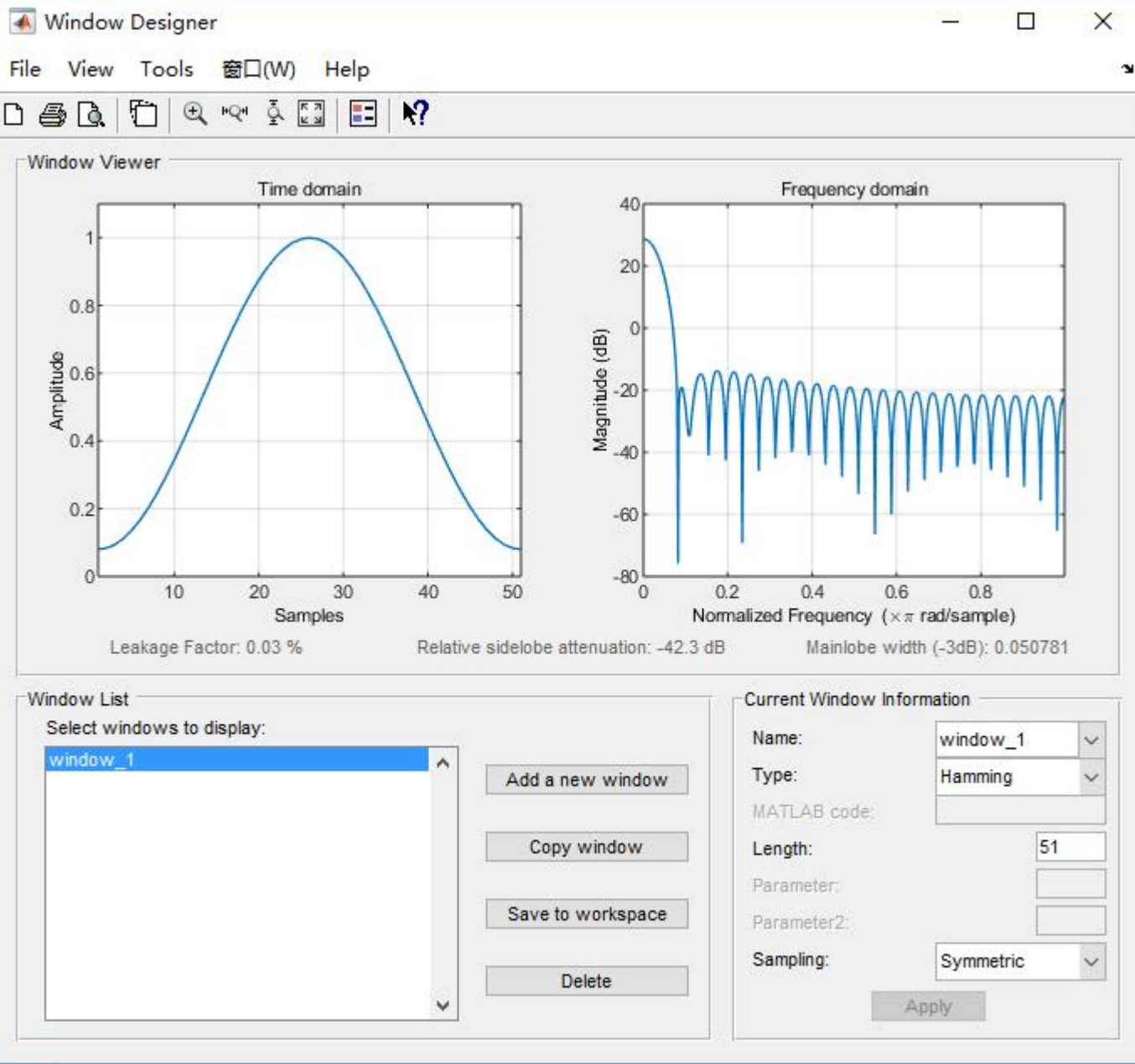


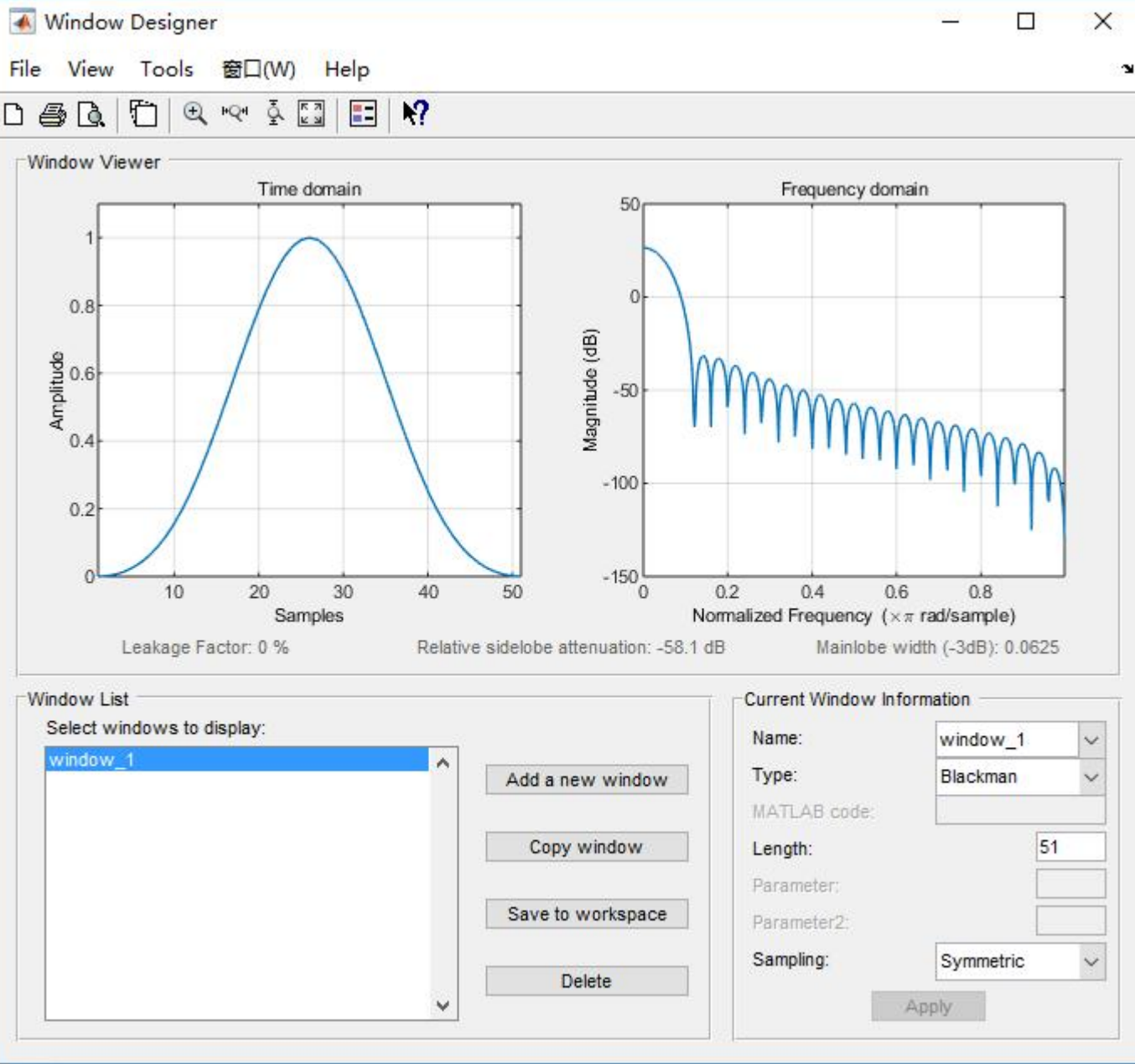


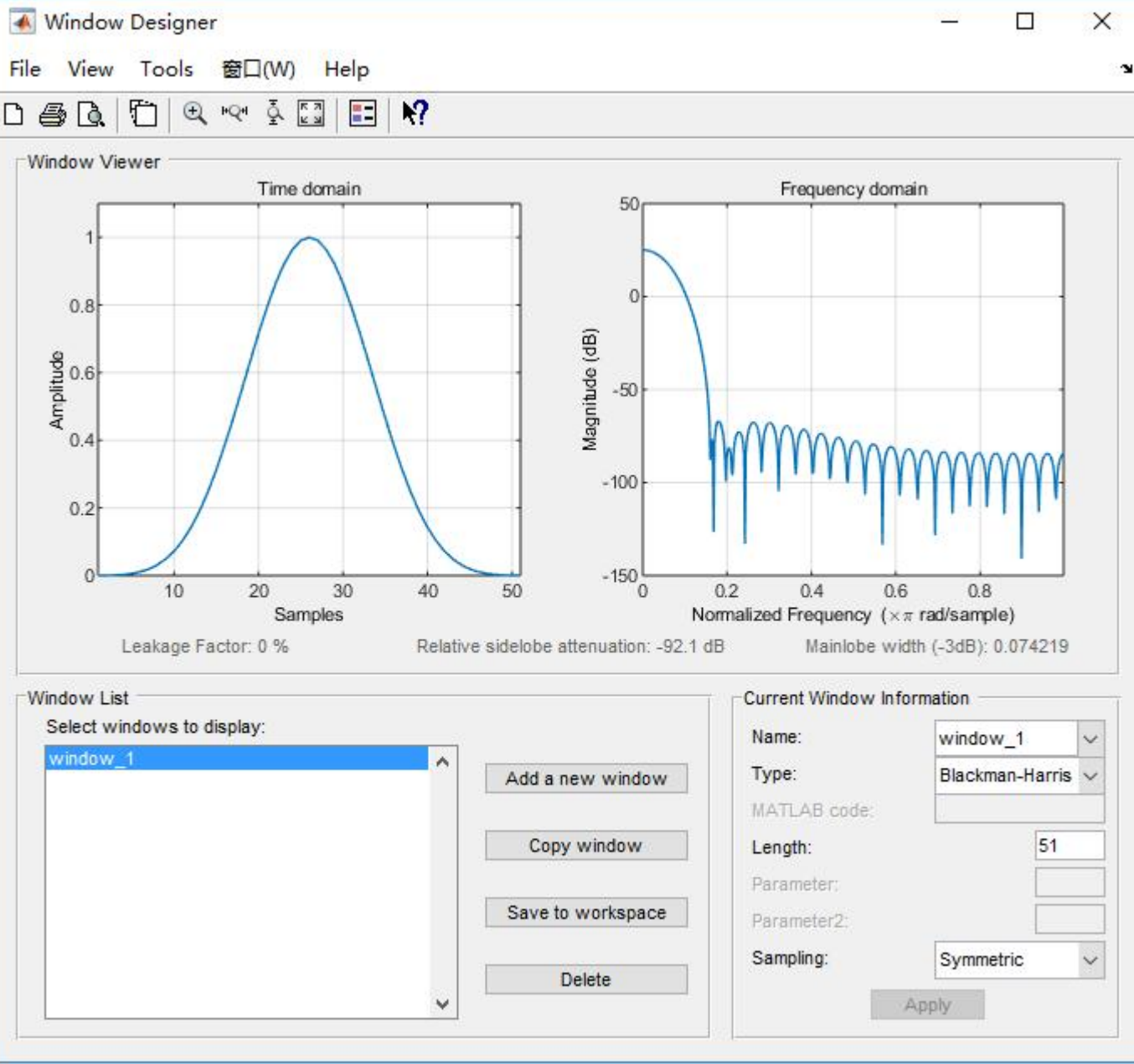


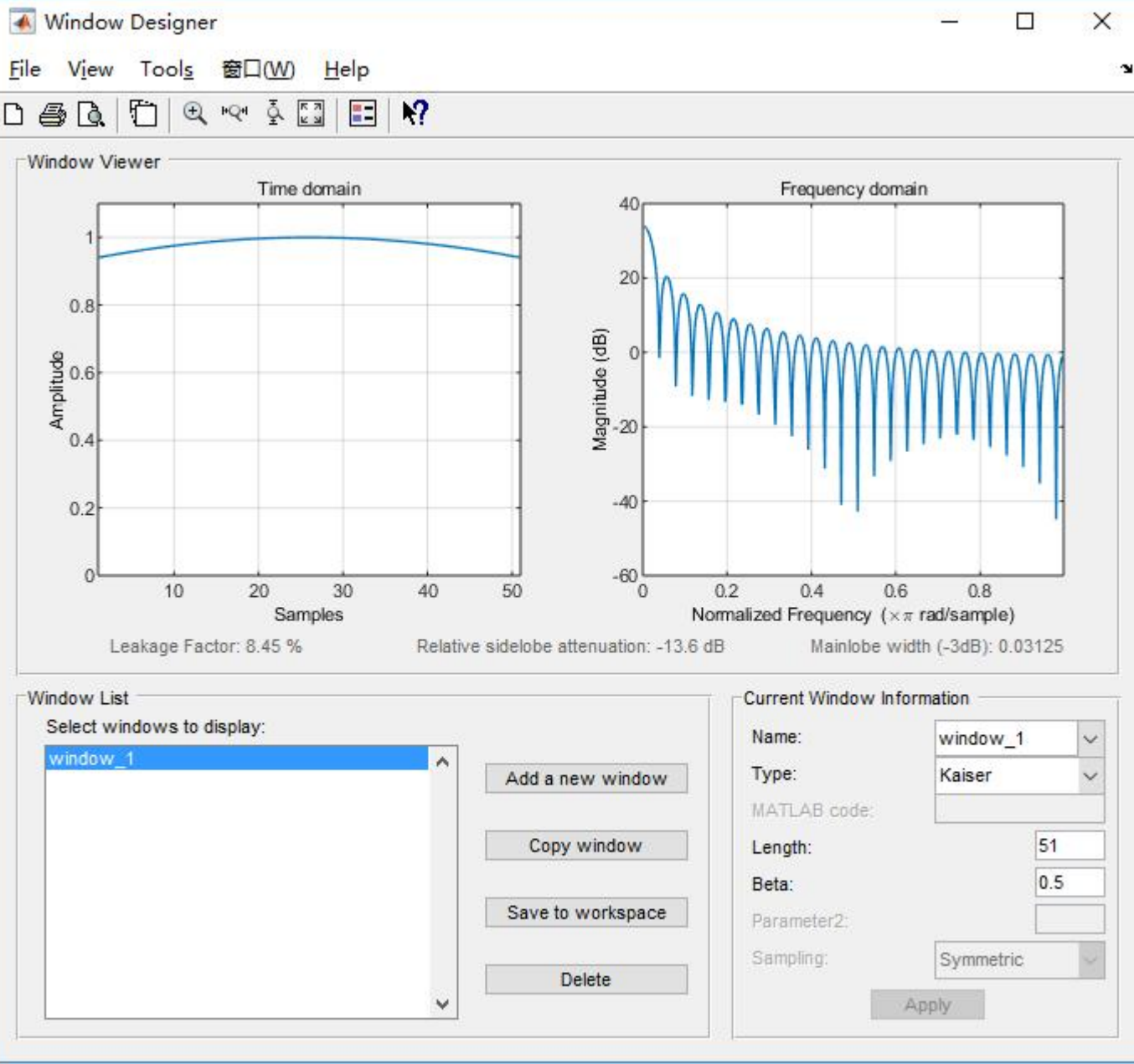


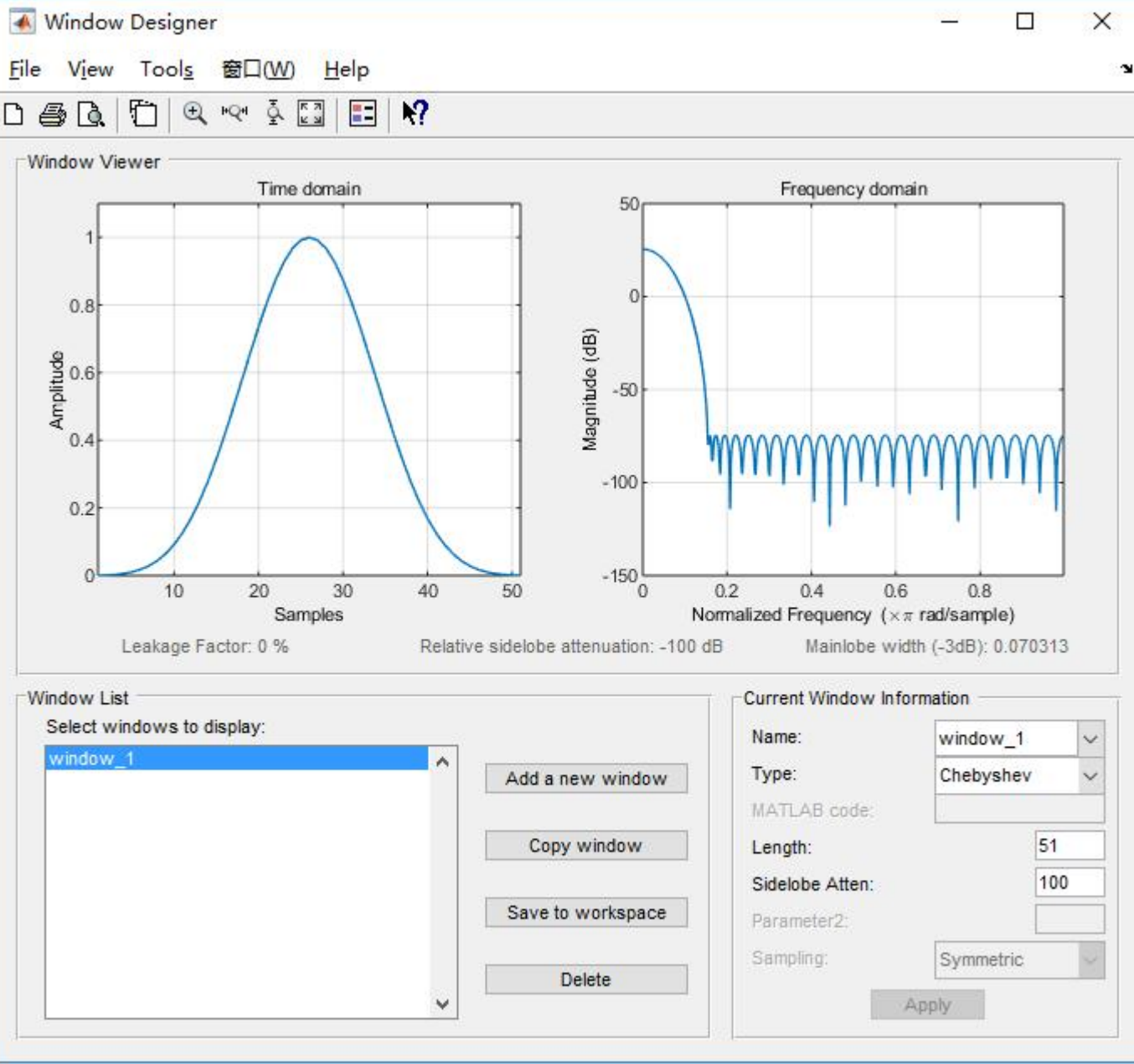


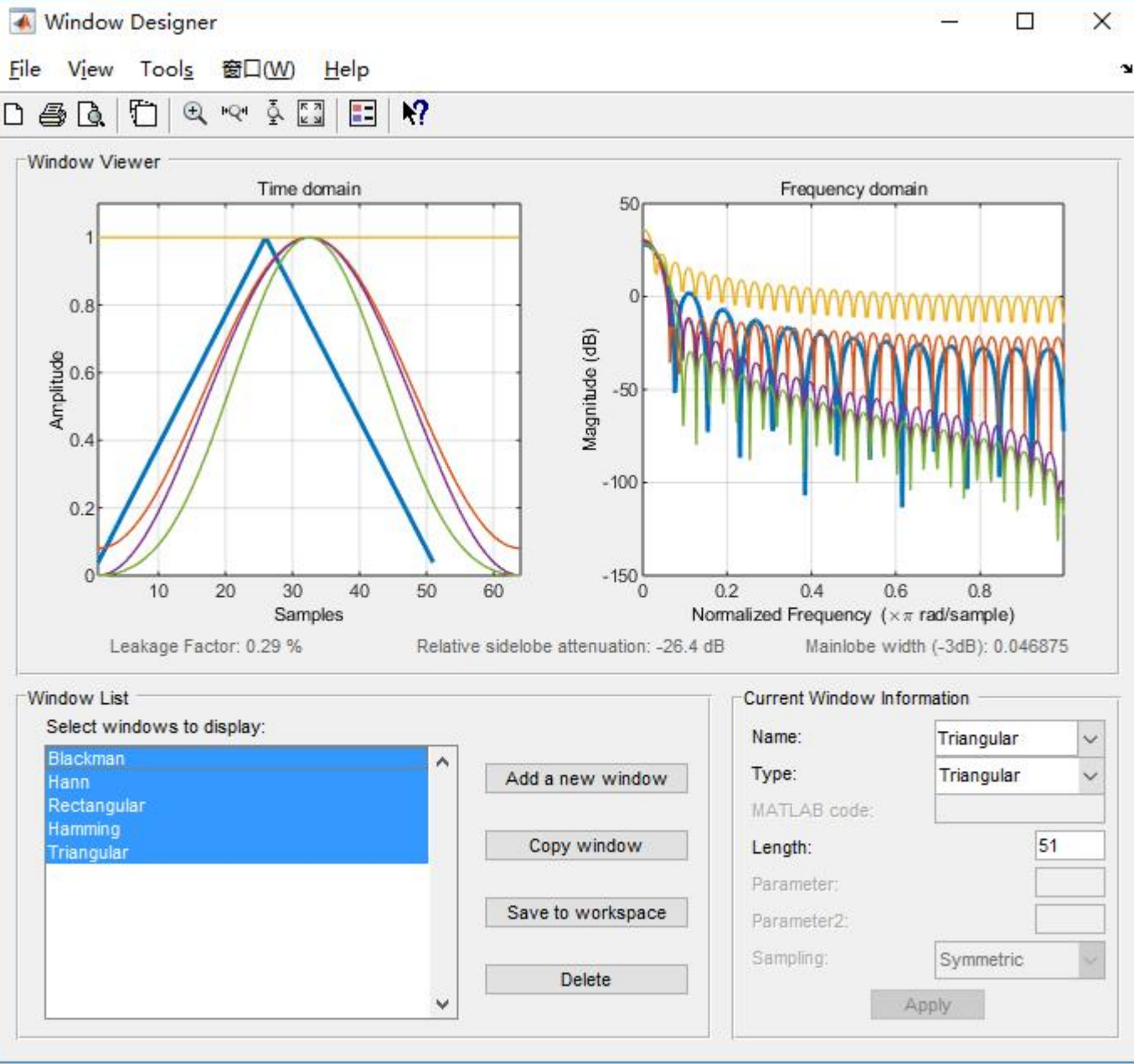




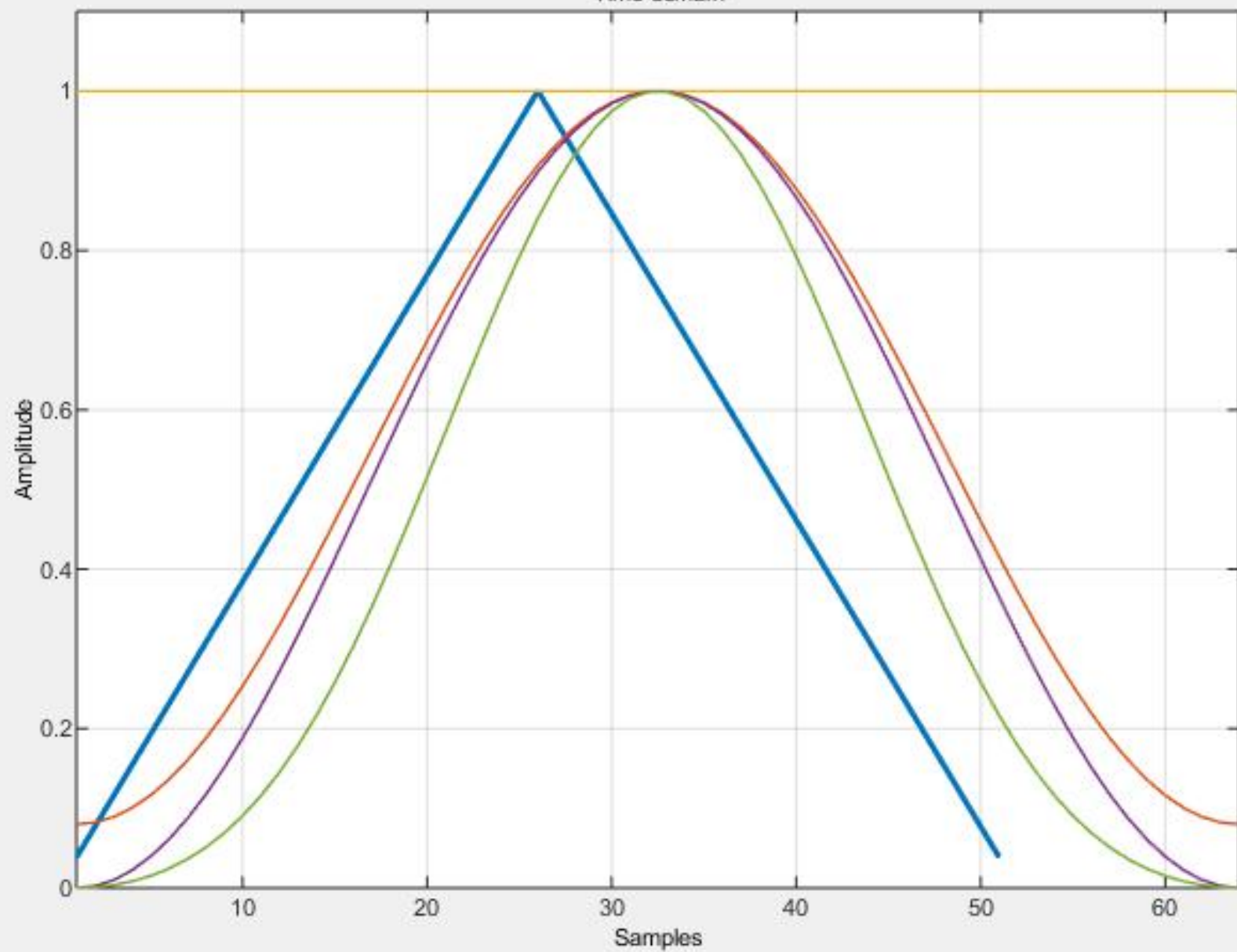


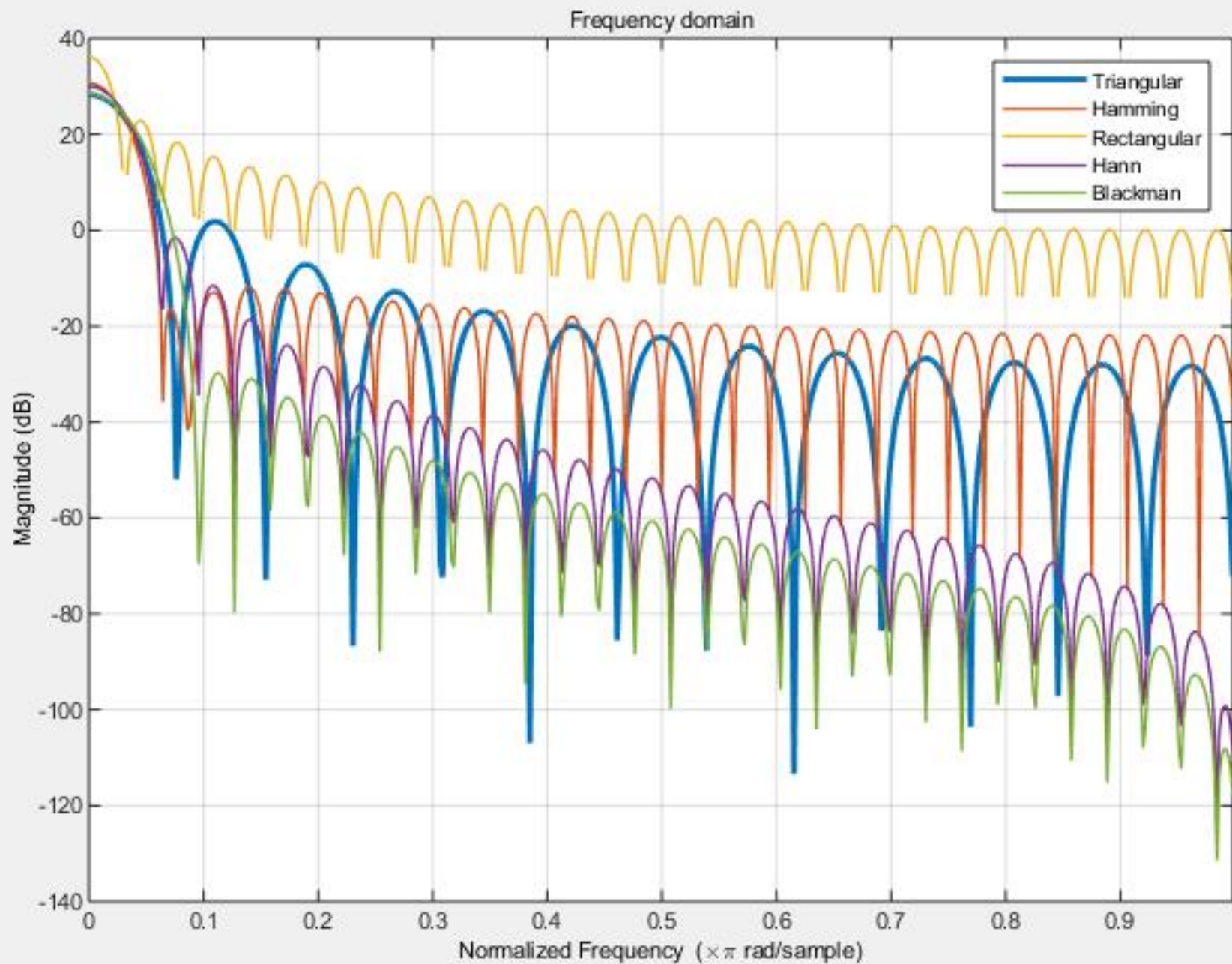




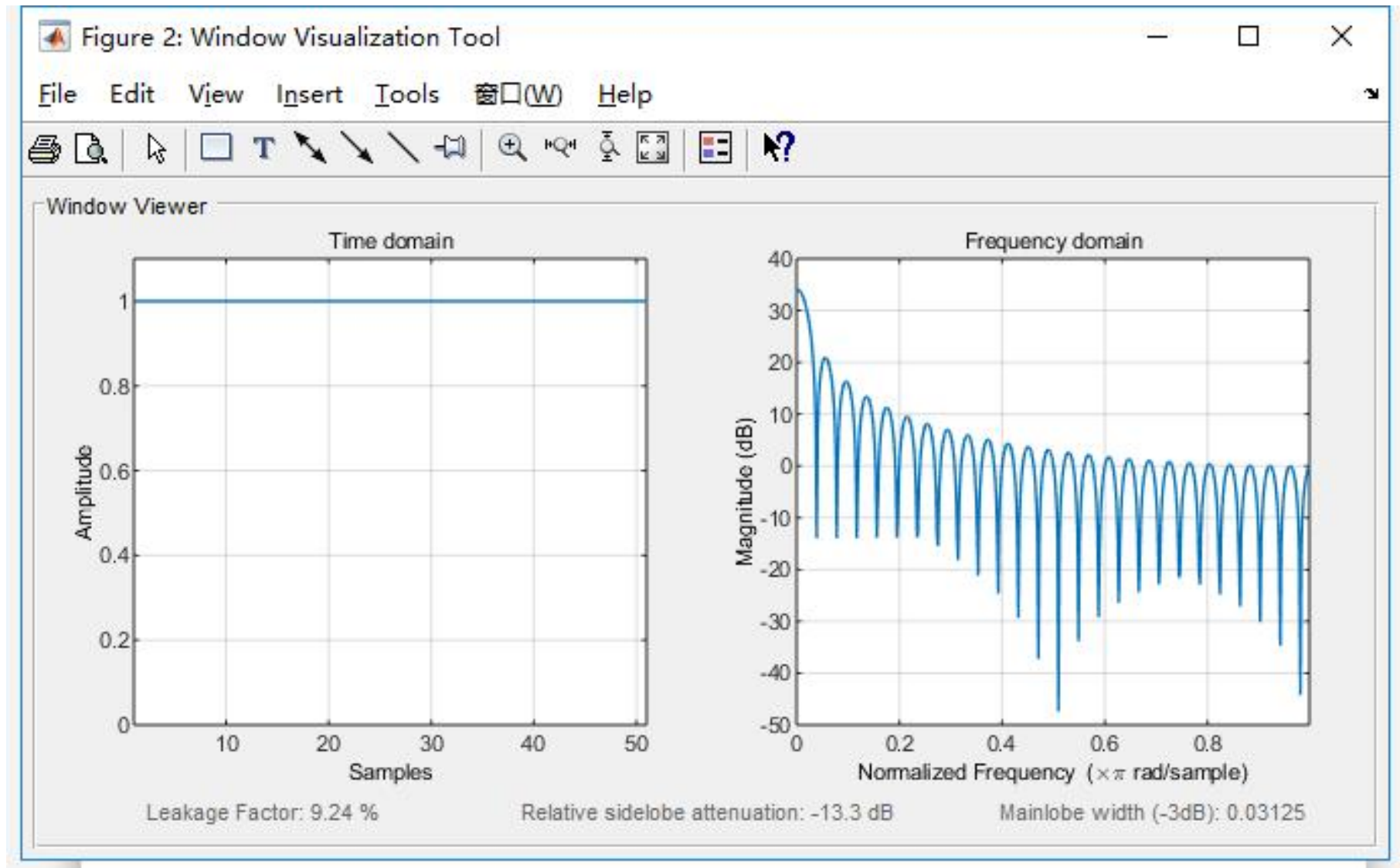


Time domain






```
>> wvtool(rectwin(51))
```



第3章 回顾

1.四种傅氏变换

2.DFS

3.DFS性质

4.DFT

5.DFT性质

6.频域采样

7.用DFT对连续时间信号逼近的问题

8.加权技术和窗函数