

数字信号处理

周治国

2023.8

第二章

离散时间信号与系统分析基础

§ 2-7 Z变换

一、Z 变换的定义

$$\begin{cases} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ z = r \cdot e^{j\omega} \end{cases} \quad \text{z是一个复变量}$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (r \cdot e^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} \cdot e^{-j\omega n} = F\{x(n) r^{-n}\}$$

L 变换是 $CT\ SAS$ 的复频域变换，是 F 变换的推广，把不绝对可积的信号变为指数函数的积分形式；

Z 变换是 DTF 变换的推广，把不绝对可和的信号变为指数函数的求和形式；

§ 2-7 Z变换

二、收敛域 (ROC Region of Convergence)

定义：使某一序列 $x(n)$ 的Z 变换 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ 级数收敛的Z 平面上所有 z 值的集合。

收敛条件：
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$

P36 收敛域与
零极点关系

一般幂级数收敛域为 z 平面上某个环形区域：

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

三、序列特性与收敛域

1. 有限长序列
2. 右边序列
3. 左边序列
4. 双边序列

(1) 有限序列

例：求单位取样序列 $\delta(n)$ 的z变换。

解：单位取样序列是有限长序列的特例，
所以其ZT为：

$$Z[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) z^{-n} = 1 \times z^{-n} \Big|_{n=0} = 1$$

$$N_1 = N_2 = 0$$

收敛域为： $0 \leq |z| \leq \infty$ 即是整个Z平面。

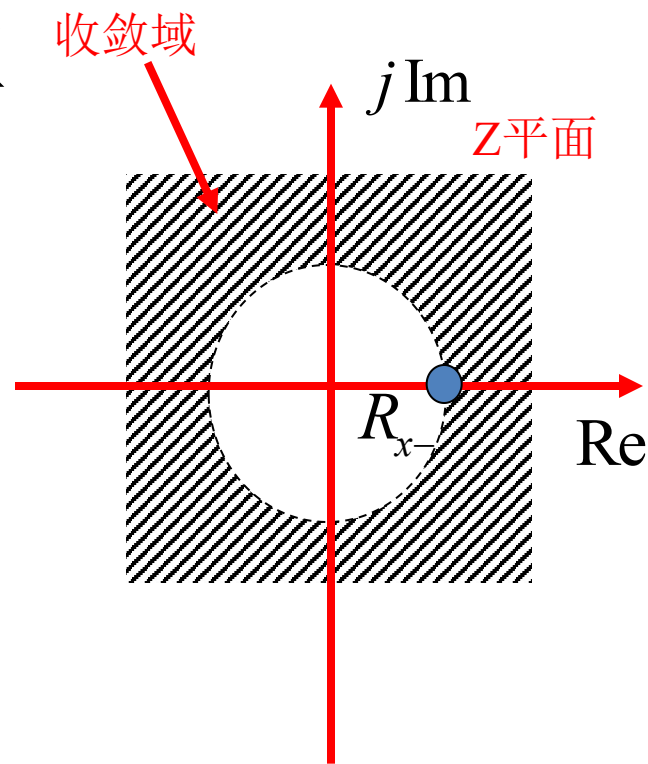
(2) 右边序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq N_1 \\ 0, & n \text{ 为其他值} \end{cases}$$

其ZT为

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

收敛域为： $|z| > R_{x-}$ 如右图所示

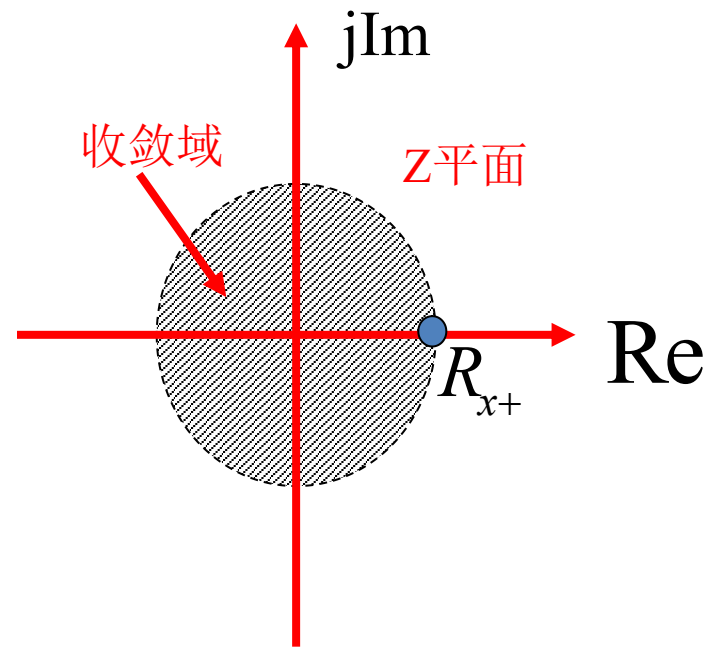


特例：如果右边序列的 $N_1 \geq 0$ ，则称该序列为因果序列。其ZT的收敛域 $R_{x-} < |z| \leq \infty$

(3) 左边序列 $x(n) = \begin{cases} x(n), & n \leq N_2 \\ 0, & n \text{ 为其他值} \end{cases}$

其ZT为: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{N_2} x(n)z^{-n}$

收敛域为: $|z| < R_{z+}$



特例: 如果左边序列的 $N_2 \leq 0$, 则称该序列为逆因果序列, 其收敛域为: $0 \leq |z| < R_{z+}$
可见, 收敛域可以包括0

(4) 双边序列

双边序列是 n 从 $-\infty$ 一直延伸到 $+\infty$ 的序列，它可被看做是一个右边序列和一个左边序列的和。因此它的 ZT 为

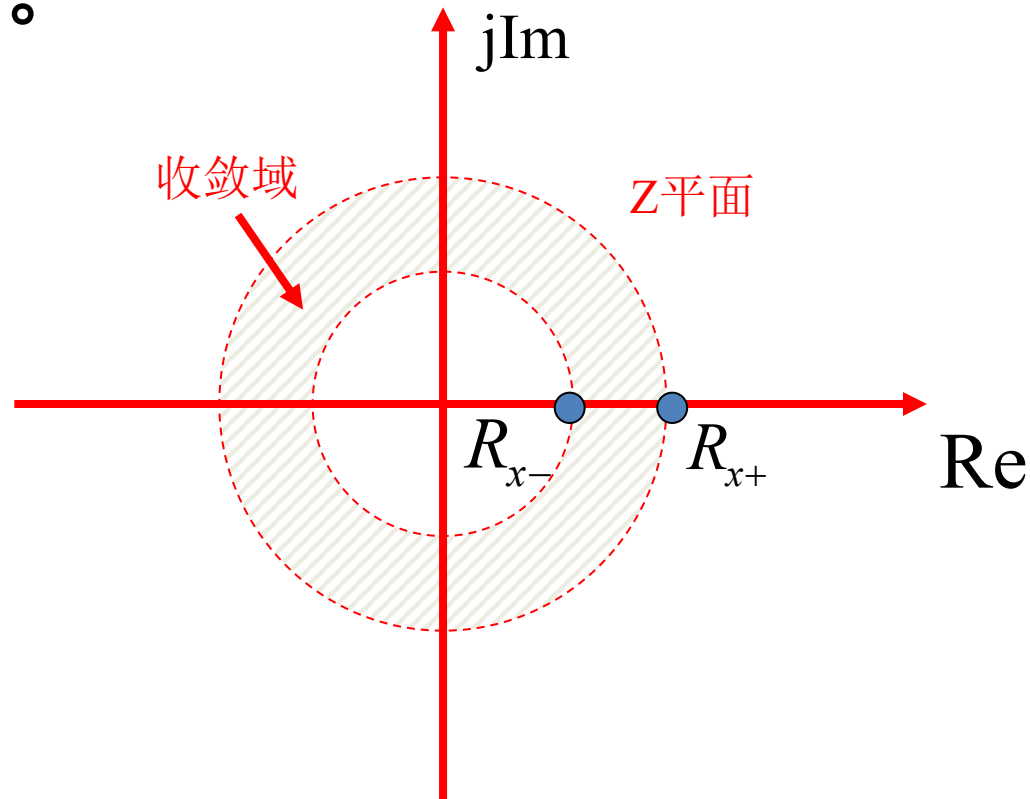
$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \\ &= X_1(z) + X_2(z) \end{aligned}$$

$X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 分别左边序列和右边序列的 ZT

双边序列 ZT 的收敛域是这两个序列 ZT 的收敛域的公共部分，即为一个环域：

$$R_{z-} < |z| < R_{z+}$$

如果 $R_{z-} \geq R_{z+}$ ，则 $X(z)$ 无收敛域，所以该序列的 ZT 不存在。



§ 2-8 L变换、F变换与Z变换关系

一、序列Z变换与L变换关系

理想取样信号： $\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT)$

$$\hat{X}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) e^{-st} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-snT}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) z^{-n}$$

当 $z = e^{sT}$ 时，Z变换就是L变换

§ 2-8 L变换、F变换与Z变换关系

一、序列Z变换与L变换关系

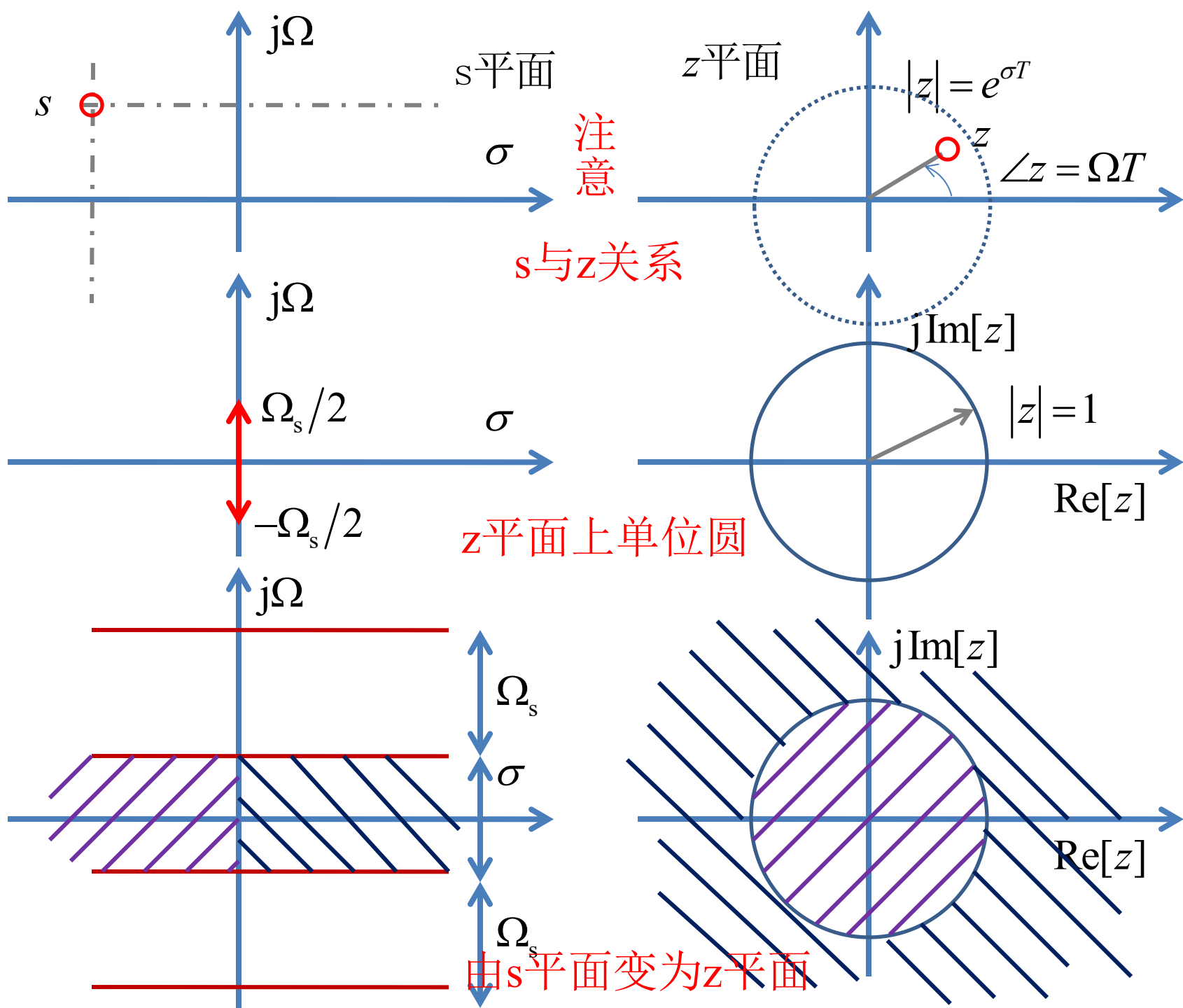
映射关系： $z = e^{sT}$

$$\begin{cases} s = \sigma + j\Omega \\ z = re^{j\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = re^{j\omega} = e^{sT} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\Omega T}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = r = e^{\sigma T} \\ \angle z = \omega = \Omega T \end{cases}$$

见图2-32



§ 2-8 L变换、F变换与Z变换关系

二、序列Z变换与F变换关系

$$\begin{aligned} X(z)|_{z=re^{j\omega}} &= X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(r \cdot e^{j\omega})^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n} \cdot e^{-j\omega n} = F\{x(n)r^{-n}\} \end{aligned}$$

单位圆上的Z变换即序列的F变换, $r = 1$

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

§ 2-9 逆Z变换

- 1、留数围线积分法
- 2、幂级数展开法
- 3、部分分式展开法

§ 2-10 Z变换的定理与性质

- 1、线性
- 2、序列的移位
- 3、乘指数序列
- 4、 $X(z)$ 的微分
- 5、复数序列的共轭
- 6、初值定理
- 7、终值定理
- 8、序列的卷积
- 9、序列乘积的Z变换-复卷积定理
- 10、帕斯维尔定理

§ 2-12 系统函数

一、系统函数的定义

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow h(n) = Z^{-1}[H(z)]$$

系统函数 $H(z)$ 是单位取样响应 $h(n)$ 的Z变换;

如果 $H(z)$ 收敛域包含单位圆 $|z|=1$ 则单位圆上的

系统函数就是系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$

§ 2-12 系统函数

二、系统函数和差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

$$Z\text{变换} \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$\Rightarrow H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

除比例常数A以外，整个系统函数可由其全部极、零点确定。

§ 2-12 系统函数

三、系统函数的收敛域

➤ 稳定系统

➤ 因果系统

➤ 稳定因果系统

$$s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

$$h(n) = 0 \quad n < 0$$

稳定系统：系统函数 $H(z)$ 在单位圆 $|z| = 1$ 上收敛，系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 存在。

因果系统：收敛域为通过离原点最远的 $H(z)$ 的极点的圆的外部。

因果稳定系统：系统函数 $H(z)$ 必须在从单位圆到 ∞ 的整个区域收敛，即系统函数的全部极点必须在单位圆以内，且收敛域包含单位圆。

§ 2-12 系统函数

四、系统频率响应的几何确定法

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = A z^{-(M-N)} \frac{\prod_{r=1}^M (z - c_r)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)}$$

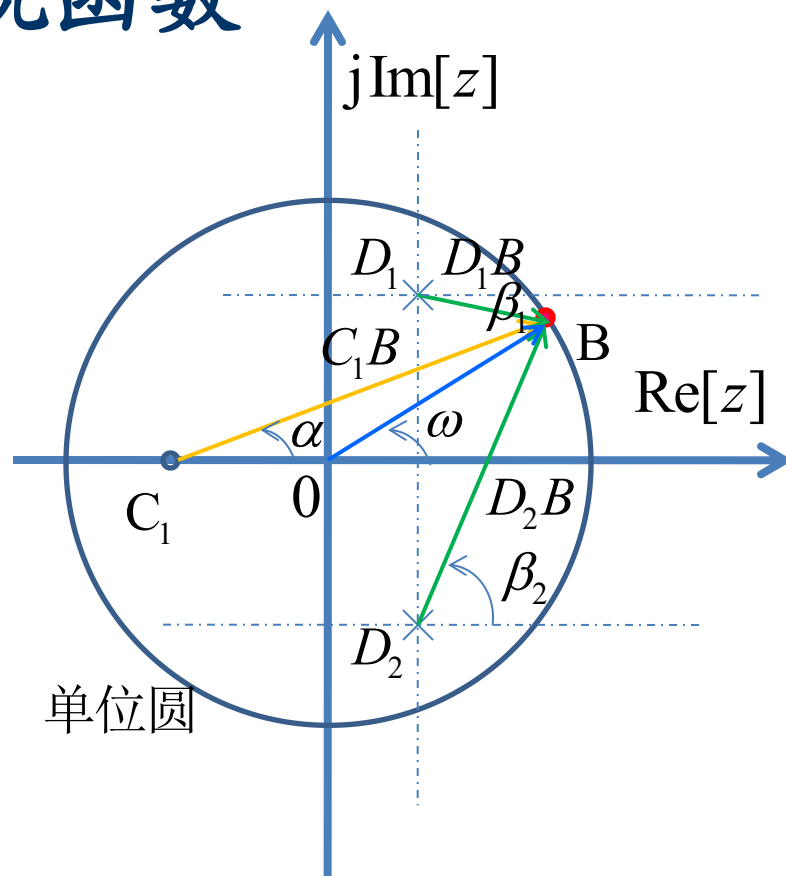
设收敛域包括单位圆，系统频率响应为：

$$H(e^{j\omega}) = A e^{-j\omega(M-N)} \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)}$$

z 平面上零点 c_r 标志为“o” 极点 d_k 标志为“×”，单位圆上 $z = e^{j\omega}$ 的位置用B表示

$$c_r = \overrightarrow{OC_r}; \quad d_k = \overrightarrow{OD_k}; \quad z = e^{j\omega} = \overrightarrow{OB}$$

$$H(e^{j\omega}) = A e^{-j\omega(M-N)} \frac{\prod_{r=1}^M \overrightarrow{C_r B}}{\prod_{k=1}^N \overrightarrow{D_k B}}$$



§ 2-12 系统函数

四、系统频率响应的几何确定法

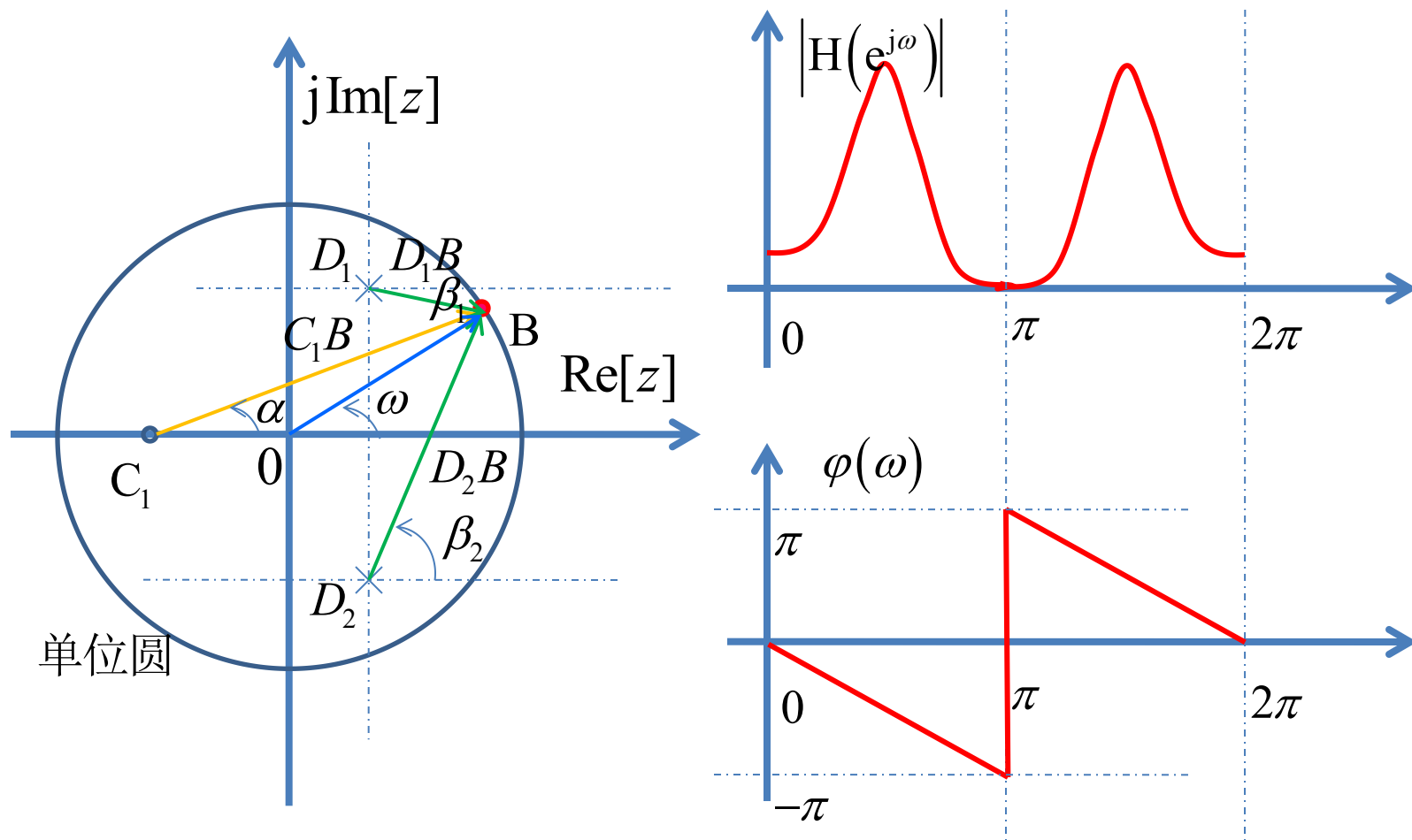
$$H(e^{j\omega}) = Ae^{-j\omega(M-N)} \frac{\prod_{r=1}^M \overrightarrow{C_r B}}{\prod_{k=1}^N \overrightarrow{D_k B}}$$

以极坐标表示:

$$\left\{ \begin{array}{l} |H(e^{j\omega})| = |A| \frac{\prod_{r=1}^M |C_r B|}{\prod_{k=1}^N |D_k B|} = \frac{\text{各零矢量模的连乘积}}{\text{各极矢量模的连乘积}} \\ \varphi(\omega) = \sum_{r=1}^M \alpha_r - \sum_{k=1}^N \beta_k - (M-N)\omega \\ \quad = \text{零矢量幅角之和} - \text{积矢量复角之和} - (M-N)\omega \end{array} \right.$$

§ 2-12 系统函数

四、系统频率响应的几何确定法(图2-35)



系统函数的零极点矢量图

系统的振幅特性和相位特性

可见，知道系统的零极点分布后，就能很容易确定零极点位置对系统特性的影响：

(1) 当B点转到极点附近时，极点矢量长度最短，因而幅度特性可能出现峰值，且极点愈靠近单位圆，极点矢量长度就愈短，峰值就愈高愈尖锐。如果极点在单位圆上，则幅度特性为 ∞ ，系统不稳定。

(2) 当B点转到零点附近时，零点矢量长度变短，幅度特性将出现谷值，零点愈靠近单位圆，谷值就愈接近零。当零点处在单位圆上时，谷值为零。

结论：极点位置主要影响频响的峰值及尖锐程度，零点位置主要影响频响的谷值位置及形状。