数字信号处理

周治国

2023.10

第四章 快速傅里叶变换

§4-5 N为复合数的FFT算法——统一的FFT算法

如何理解P140

“无害的”？

$$N = 2^{\nu} \rightarrow 基-2\ \ FFT$$

$$N \neq 2^{\nu}，如何快速计算 DFT?$$

处理方法:

(1)通过补零，使序列长度=2^{ν}→ 基-2 FFT

(2)N=ML（复合数）→ 统一的FFT算法

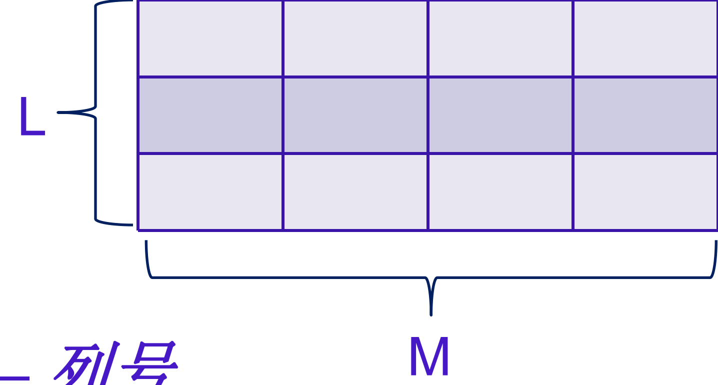
(3)N≠ML（素数）→ Chirp-Z 变换(CZT)

一、算法原理

$$\forall x(n),\quad 0 \le n \le N-1,\quad N = ML（复合数）$$

∵ N-$DFT \sim N^2$

∴如果 N-DFT $\begin{cases} M个L\text{-}DFT \sim M \times L^2 \\ L个M\text{-}DFT \sim L \times M^2 \end{cases}$ ⟶ 减少了运算



为此，令

$$n = Mn_1 + n_0\ ,\qquad n_0 = 0,1,\ldots,M-1 \text{ —— 列号},\quad n_1 = 0,1,\ldots,L-1 \text{ —— 行号}$$

$$x(n) \rightleftarrows x(n_1, n_0)$$

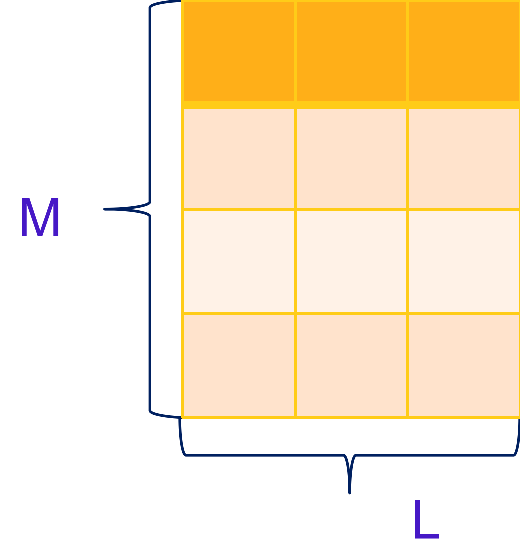
(L,M)

$$\begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(M-1) \\ x(M) & x(M+1) & \cdots & x(2M-1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x(M(L-1)) & \cdots & \cdots & x(ML-1) \end{bmatrix} \rightleftarrows \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & \cdots & x(0,M-1) \\ x(1,0) & x(1,1) & \cdots & x(1,M-1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x(L-1,0) & x(L-1,1) & \cdots & x(L-1,M-1) \end{bmatrix}$$

横着进

L行M列，L x M

同理，对DFT的输出$X(k)$做类似的处理：



令 $k=Lk_1+k_0$

$k_0=0,1,\ldots,L-1 \sim n_1$

$k_1=0,1,\ldots,M-1 \sim n_0$

$$X(k) \rightleftarrows \underset{(M,L)}{X(k_1, k_0)} \overset{转置}{\rightleftarrows} \underset{(L,M)}{X_2(k_0, k_1)}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) & X(L) & \cdots & X((M-1)L) \\ X(1) & X(L+1) & \cdots & X((M-1)L+1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ X(L-1) & X(2L-1) & \cdots & X(ML-1) \end{bmatrix} \rightleftarrows \begin{bmatrix} X(0,0) & X(1,0) & \cdots & X(M-1,0) \\ X(0,1) & X(1,1) & \cdots & X(M-1,1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ X(0,L-1) & X(1,L-1) & \cdots & X(M-1,L-1) \end{bmatrix}$$

竖着出

$X_2(k_0, k_1)$

L行M列，L x M

(M,L)

$$X(k)=X(Lk_1+k_0)=X(k_1,k_0)$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

$x(Mn_1+n_0)$

$$=\sum_{n_0=0}^{M-1}\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1,n_0)W_N^{(Mn_1+n_0)(Lk_1+k_0)}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{M-1}\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1,n_0)\underbrace{\boxed{W_N^{MLk_1n_1}}}_{=1}\underbrace{W_N^{Mn_1k_0}}_{=W_L^{k_0n_1}}\underbrace{W_N^{Lk_1n_0}}_{=W_M^{k_1n_0}}W_N^{k_0n_0}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{M-1}\underbrace{\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1,n_0)W_L^{k_0n_1}}W_N^{k_0n_0}W_M^{k_1n_0}$$

L行M列，L x M

$$=\sum_{n_0=0}^{M-1}[\underline{X_1(k_0,n_0)\boxed{W_N^{k_0n_0}}}]W_M^{k_1n_0}$$

转置

$$=\sum_{n_0=0}^{M-1}X_1'(k_0,n_0)W_M^{k_1n_0}=\boxed{X_2(k_0,k_1)}=\boxed{X(k_1,k_0)}=X(Lk_1+k_0)=X(k)$$

$0\le k_0\le L-1,\ 0\le k_1\le M-1$ $\qquad 0\le k\le N-1$

L行M列，　M行L列，

式中

$$\boxed{X_1(k_0,n_0)}\overset{\Delta}{=}\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1,n_0)W_L^{k_0n_1}$$

一列一列求DFT

$$\overset{\Delta}{=}DFT_{n_1}[x(n_1,n_0)]$$

$$0\le k_0\le L-1,\forall n_0$$

$$\boxed{X_1'(k_0,n_0)}\overset{\Delta}{=}X_1(k_0,n_0)W_N^{k_0n_0}$$

$$0\le n_0\le M-1,\forall k$$

$$\boxed{X_2(k_0,k_1)}\overset{\Delta}{=}\sum_{n_0=0}^{L-1}X_1'(k_0,n_0)W_M^{k_1n_0}$$

一行一行求DFT

$$\overset{\Delta}{=}DFT_{n_0}[X_1'(k_0,n_0)]$$

$$0\le k_1\le M-1,$$

$$0\le k_0\le L-1,\forall n_0$$

L x M　　M x L

$$X(k)=X(Lk_1+k_0)=X(k_1,k_0)$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

$x(Mn_1+n_0)$

$$=\sum_{n_0=0}^{M-1}\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1,n_0)W_N^{(Mn_1+n_0)(Lk_1+k_0)}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{M-1}\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1,n_0)\underbrace{\boxed{W_N^{MLk_1n_1}}}_{=1}\underbrace{W_N^{Mn_1k_0}}_{=W_L^{k_0n_1}}\underbrace{W_N^{Lk_1n_0}}_{=W_M^{k_1n_0}}W_N^{k_0n_0}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{M-1}\underbrace{\sum_{n_1=0}^{L-1}x(n_1,n_0)W_L^{k_0n_1}}_{}W_N^{k_0n_0}W_M^{k_1n_0}$$

L行M列，L x M

$$=\sum_{n_0=0}^{M-1}[\underline{X_1(k_0,n_0)\boxed{W_N^{k_0n_0}}}]W_M^{k_1n_0}$$

$$=\sum_{n_0=0}^{M-1}X_1'(k_0,n_0)W_M^{k_1n_0}=\boxed{X_2(k_0,k_1)}\overset{\text{转置}}{=}\boxed{X(k_1,k_0)}=X(Lk_1+k_0)=X(k)$$

$0\le k_0\le L-1,\ 0\le k_1\le M-1$ $\qquad 0\le k\le N-1$

L行M列， M行L列，

L x M M x L

理解：

1. x(n)， X(k)都是一维数据；且输入为正序；

2. x(n)“横着进” 使正序输入变为L行M列二维结构($x(n_1,n_0)$)，经过复合数算法对二维数据处理；

①若X(k)“竖着出”输出可以使二维数据$X_2(k_0,k_1)$(仍然为L行M列)还原为一维正序X(k)输出；

②若X(k)经过将二维数据$X_2(k_0,k_1)$译序，$X(k)=X(Lk_1+k_0)$输出(“横着出”)，这时一维X(k)输出不是正序；但经过$X_2(k_0,k_1)$ 转置成$X(k_1,k_0)$，再将二维数据$X(k_1,k_0)$译序，$X(k)=X(Lk_1+k_0)$输出(“横着出”)，这时一维X(k)输出是正序。

式中

$$X_1(k_0,n_0) \overset{\Delta}{=} \sum_{n_1=0}^{L-1} x(n_1,n_0) W_L^{k_0 n_1}$$

$$\overset{\Delta}{=} DFT_{n_1}[x(n_1,n_0)], \qquad 0 \le k_0 \le L-1, \forall n_0$$

一列一列
求DFT

$$X_1'(k_0,n_0) \overset{\Delta}{=} X_1(k_0,n_0) \underline{\underline{W_N^{k_0 n_0}}}, \qquad 0 \le n_0 \le M-1, \forall k$$

旋转
因子

$$X_2(k_0,n_1) \overset{\Delta}{=} \sum_{n_0=0}^{L-1} X_1'(k_0,n_0) W_M^{k_1 n_0}$$

$$\overset{\Delta}{=} DFT_{n_0}[X_1'(k_0,n_0)], \qquad 0 \le k_1 \le M-1, 0 \le k_0 \le L-1, \forall n_0$$

一行一行
求DFT

二、运算步骤

(1) $x(n) \to x(n_1, n_0)$ $\quad n_1 = 0,1,\ldots,L-1$ 行号

$\uparrow$ $\quad n_0 = 0,1,\ldots,M-1$ 列号

$n = mn_1 + n_0$

(2) $\forall n_0, \quad 0 \le n_0 \le M-1$ （针对每一列）

$$X_1(k_0, n_0) = DFT_{n_1}[x(n_1, n_0)] = \sum_{n_1=0}^{L-1} x(n_1, n_0) W_L^{k_0 n_1}, \qquad k_0 = 0,1,\ldots,L-1$$

(3) $X_1'(k_0, n_0) = X_1(k_0, n_0) W_N^{k_0 n_0} \qquad 0 \le k_0 \le L-1$

$0 \le n_0 \le M-1$

(4) $\forall k_0, \quad 0 \le k_0 \le L-1$ （针对每一行）

$$X_2(k_0, k_1) = DFT_{n_0}[X_1'(k_0, n_0)] = \sum_{n_0=0}^{M-1} X_1'(k_0, n_0) W_M^{k_1 n_0}, \quad k_0 = 0,1,\ldots,M-1$$

(5) 译序

$X_2(k_0, k_1) \to X(k_1, k_0) \to X(k) \qquad 0 \le k \le N-1$

$\uparrow \qquad 0 \le k_0 \le L-1$

$k = Lk_1 + k_0, \qquad 0 \le k_1 \le M-1$

例：N=12=4×3, L=3, M=4　算法流图：图4-20,P.144

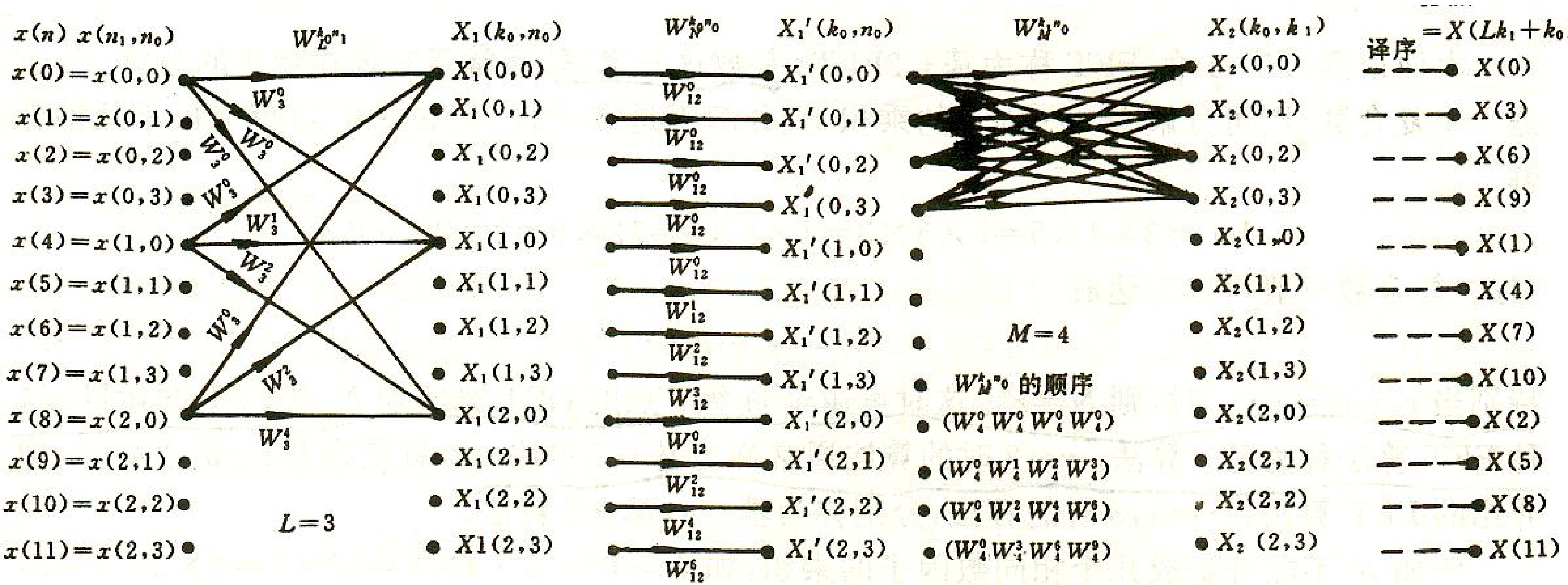


图 4－20　$N=M\times L=4\times 3=12$ 时的 FFT 运算流图

同理：$\forall n_1,\ 0\le n\le L-1$

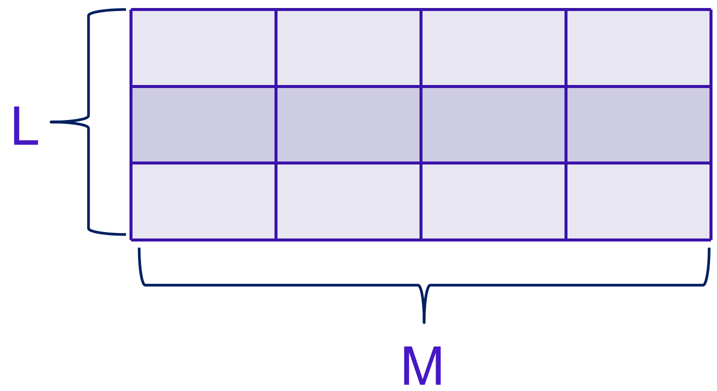
详见(4-38) P.142

N=N1 * N2

N1=3 N2=4

4列3行

先3-DFT，再4-DFT



例：N=12=4×3，M=4，L=3 算法流图：图4-20,P.144

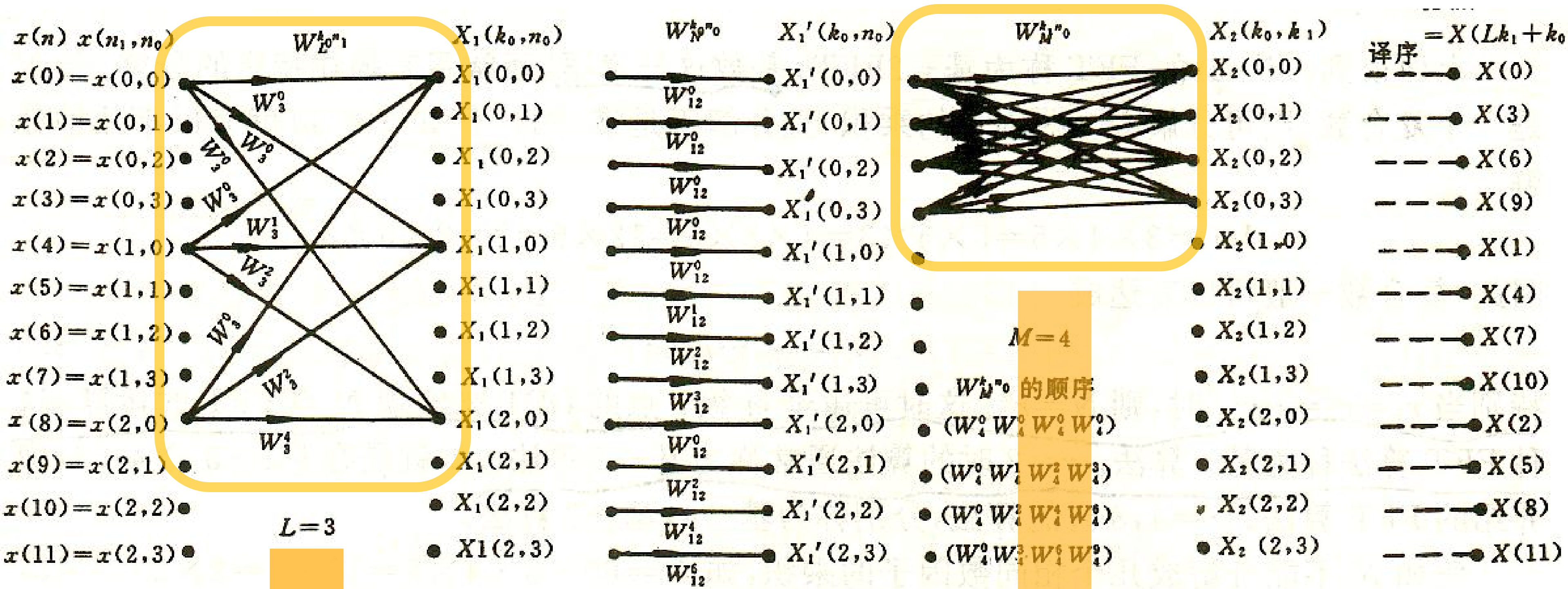


图 4−20　$N=M\times L=4\times3=12$ 时的 FFT 运算流图

这是一个蝶形

三点蝶形

这仍然是一个蝶形

四点蝶形

4列3行

x(n)={x(0), x(1), x(2)…x(11)}

4列3行

M

L

x(0)	x(1)	x(2)	x(3)
x(4)	x(5)	x(6)	x(7)
x(8)	x(9)	x(10)	x(11)

x(0,0)	x(0,1)	x(0,2)	x(0,3)
x(1,0)	x(1,1)	x(1,2)	x(1,3)
x(2,0)	x(2,1)	x(2,2)	x(2,3)

$X_1(k_0,n_0)=DFT_{n_1}[x(n_1,n_0)] \quad k_0=0,1,\ldots,L-1$

$X_1(0,0)$	$X_1(0,1)$	$X_1(0,2)$	$X_1(0,3)$
$X_1(1,0)$	$X_1(1,1)$	$X_1(1,2)$	$X_1(1,3)$
$X_1(2,0)$	$X_1(2,1)$	$X_1(2,2)$	$X_1(2,3)$

$X_1'(k_0,n_0)=X_1(k_0,n_0)W_N^{k_0n_0}$

$0\le k_0\le L-1 \quad 0\le n_0\le M-1$

$X'_1(0,0)$	$X'_1(0,1)$	$X'_1(0,2)$	$X'_1(0,3)$
$X'_1(1,0)$	$X'_1(1,1)$	$X'_1(1,2)$	$X'_1(1,3)$
$X'_1(2,0)$	$X'_1(2,1)$	$X'_1(2,2)$	$X'_1(2,3)$

$X_2(k_0,k_1)=DFT_{n_0}[X_1'(k_0,n_0)]$

$X_2(0,0)$	$X_2(0,1)$	$X_2(0,2)$	$X_2(0,3)$
$X_2(1,0)$	$X_2(1,1)$	$X_2(1,2)$	$X_2(1,3)$
$X_2(2,0)$	$X_2(2,1)$	$X_2(2,2)$	$X_2(2,3)$

$X_2(k_0,k_1)$

译序

X(0)	X(3)	X(6)	X(9)
X(1)	X(4)	X(7)	X(10)
X(2)	X(5)	X(8)	X(11)

$X(k)=X(Lk_1+k_0) \quad 0\le k\le N-1$

X(k)={X(0), X(3), X(6), …X(11)}

转置

X(0,0)	X(1,0)	X(2,0)
X(0,1)	X(1,1)	X(2,1)
X(0,2)	X(1,2)	X(2,2)
X(0,3)	X(1,3)	X(2,3)

X(0)	X(1)	X(2)
X(3)	X(4)	X(5)
X(6)	X(7)	X(8)
X(9)	X(10)	X(11)

$X_2(k_0,k_1)\to X(k_1,k_0)\to X(k) \quad 0\le k\le N-1$

X(k)={X(0), X(1), X(2)…X(11)}

N=12 组合数 N=MxL=4x3 FFT流图

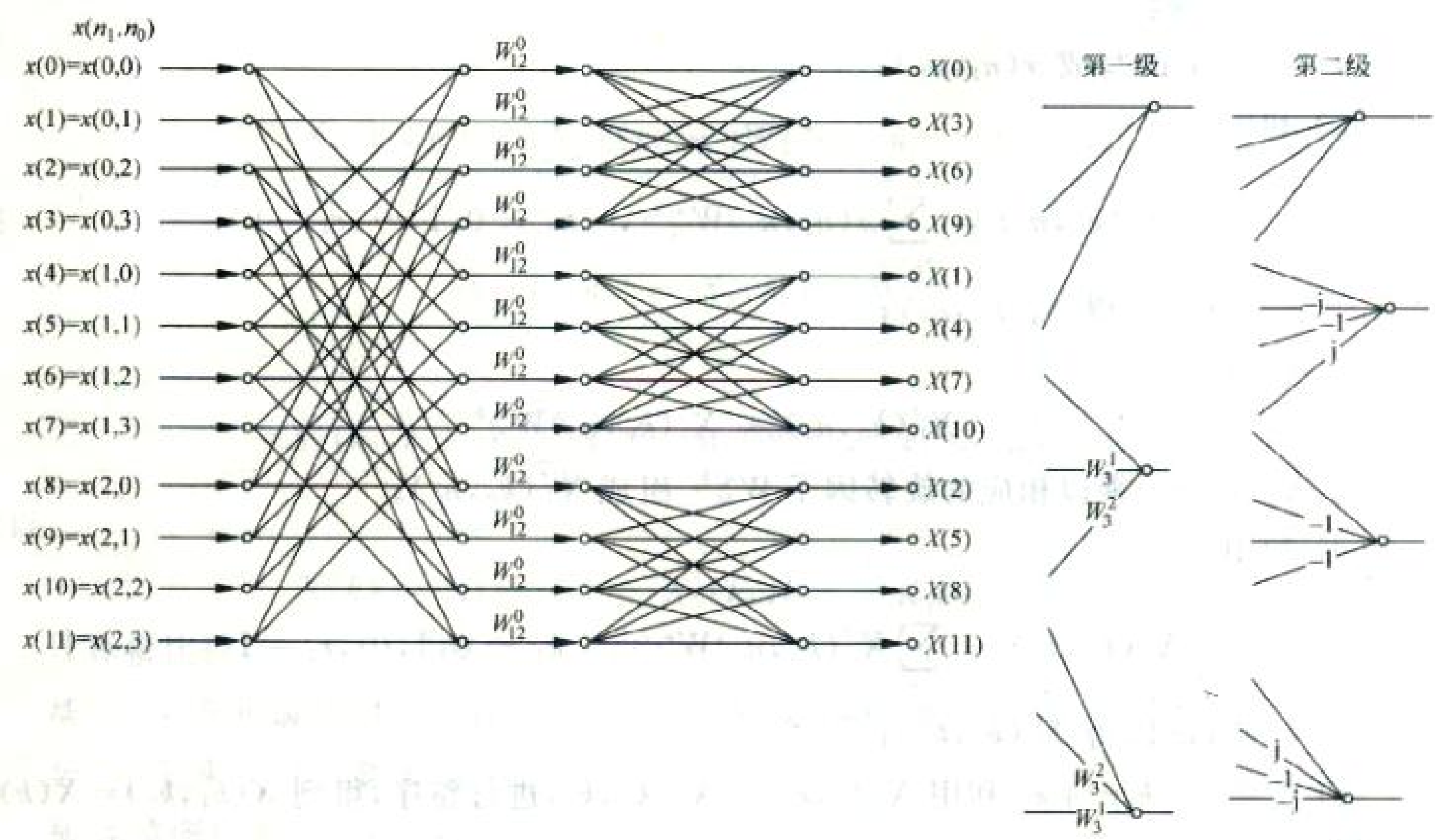


图 P4-5

比较前后蝶形

4列3行

N=30=5x2x3 组合数 FFT流图

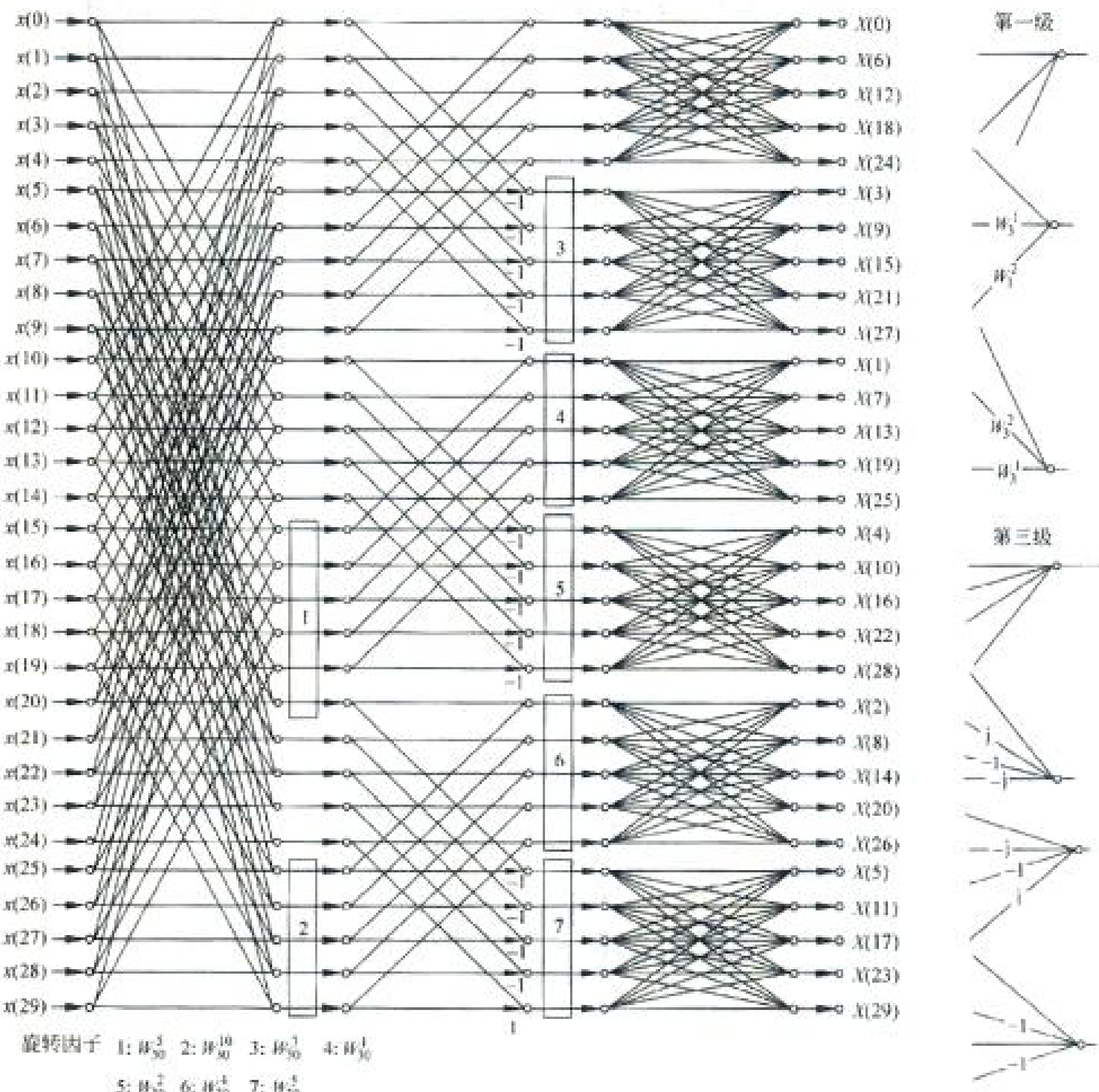


图 P4-6

？

空间结构

比较前后蝶形

N=30=5x2x3 组合数 FFT流图

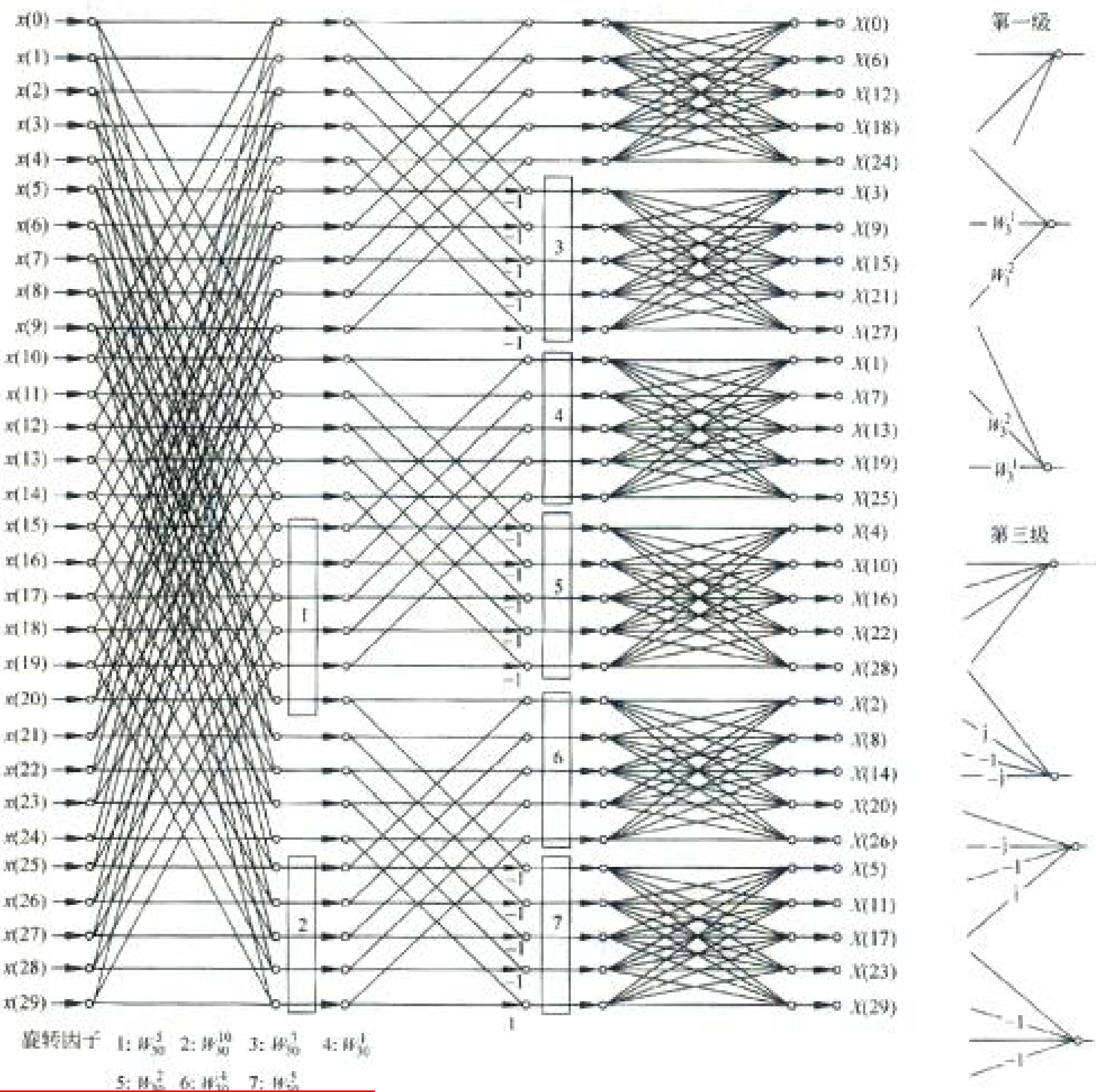
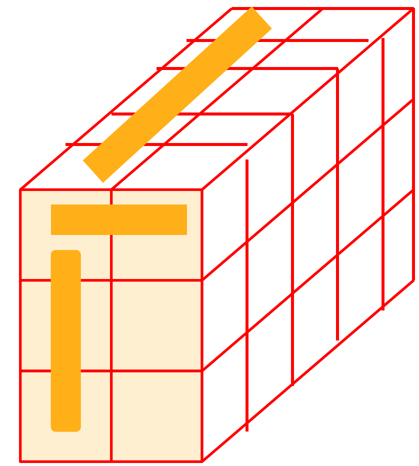


图 P4-6



3行2列5纵

比较前后蝶形

三、基数（指特定的分解）

1. $N=2^v$→基2 FFT算法

2. $N\neq 2^v$

(1) $N=r_1,r_2,\ldots,r_M$

M级$r_1,r_2,\ldots,r_M$点DFT →混合基算法

(2) $r_1=r_2=\ldots=r_M \rightarrow N=r^M$

M级r-DFT → 基-r FFT算法

比如：a) $N=2^M$→基-2 FFT

b) $N=4^M$→基-4 FFT

四、运算量估算

$N=ML$

(1) M个L-DFT： $\times$— $M\times L^2=N\times L$

$+$— $M\times L(L-1)=N(L-1)$

(2) 乘N个 $W_N^{k_0 n_0}$ 因子： $\times$— N

(3) L个M-DFT： $\times$—$L\times M^2=N\times M$

$+$— $L\times M(M-1)=N(M-1)$

总运算量： $\times$— $NL+N+NM=N(L+M+1) < N^2$

$+$— $N(L-1)+N(M-1)=N(L+M-2) < N(N-1)$

N为复合数

按时间

Or **抽取 FFT算法流图？**

按频率

五、统一的FFT方法与DIT、DIF

$N=2^v$

（1）$N= M \times L = 2^{v-1} \times 2$　　2行，v-1列

（2）$N= M \times L = 2 \times 2^{v-1}$　　v-1行，2列

$$x(n) \longrightarrow x(n_1, n_0)$$

（1）$N=M \times L= 2^{v-1} \times 2$

为此，令

$$n=Mn_1+n_0\ ,\qquad n_0=0,1,\ldots,M-1 \text{ —— 列号}$$
$$n_1=0,1,\ldots,L-1 \text{ —— 行号}$$

$$x(n) \rightleftarrows x(n_1, n_0)$$

$$\begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(2^{v-1}-1) \\ x(2^{v-1}) & x(2^{v-1}+1) & \cdots & x(2^{v}-1) \end{bmatrix} \rightleftarrows \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & \cdots & x(0,2^{v-1}-1) \\ x(1,0) & x(1,1) & \cdots & x(1,2^{v-1}-1) \end{bmatrix}$$

2行2^{v-1}列

同理，对DFT的输出$X(k)$做类似的处理：

令 $k=Lk_1+k_0$

$k_0=0,1,\ldots,L-1 \sim n_1$

$k_1=0,1,\ldots,M-1 \sim n_0$

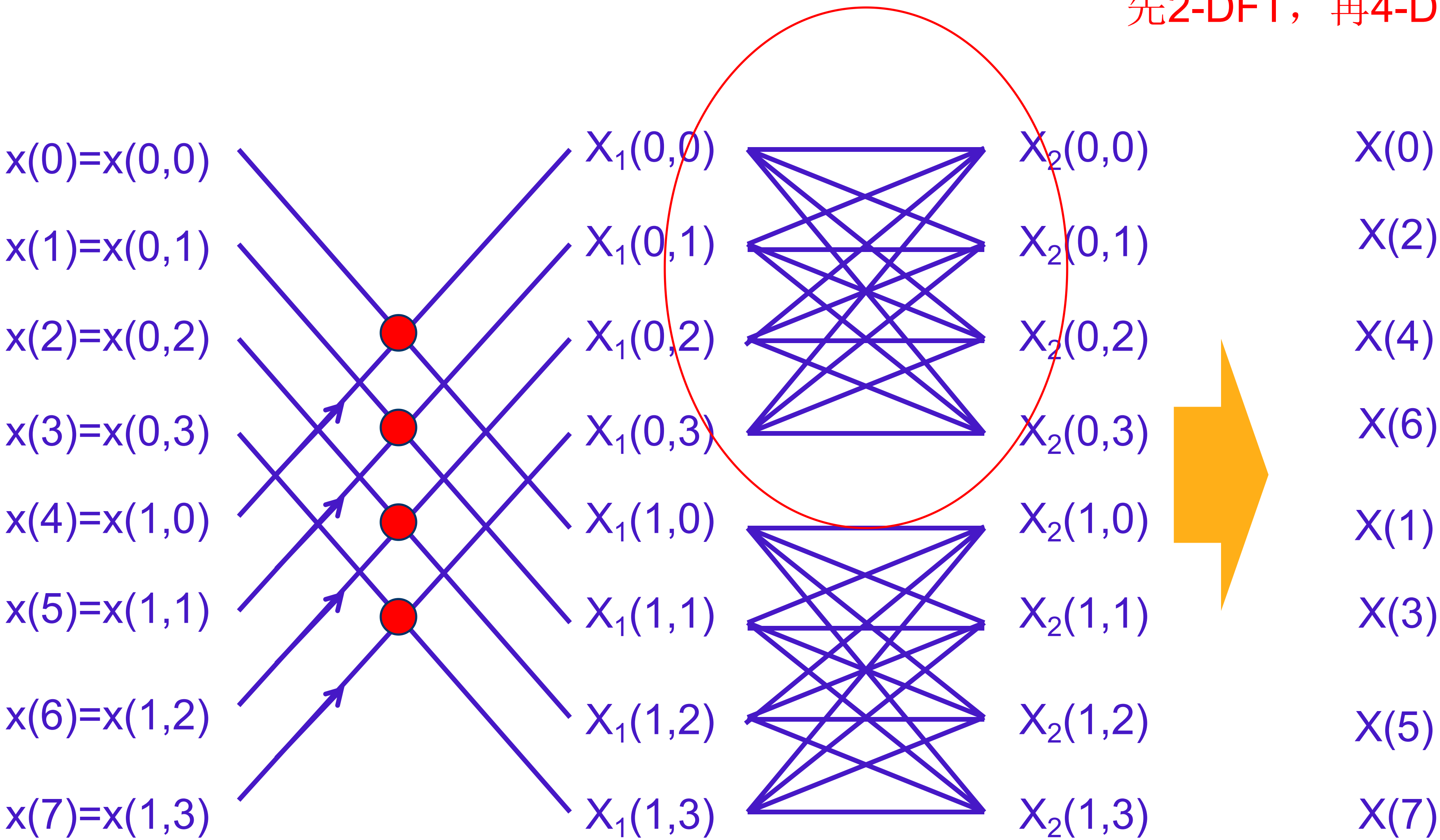
$$X(k) \rightleftarrows X(k_1, k_0)$$

$$\begin{bmatrix} X(0) & X(2) & \cdots & X(2^v-2) \\ X(1) & X(3) & \cdots & X(2^v-1) \end{bmatrix} \rightleftarrows \begin{bmatrix} X(0,0) & X(1,0) & \cdots & X(2^{v-1},0) \\ X(0,1) & X(1,1) & \cdots & X(2^{v-1},1) \end{bmatrix}$$

例：N=8　4x2

4列2行

先2-DFT，再4-DFT



DIF-FFT

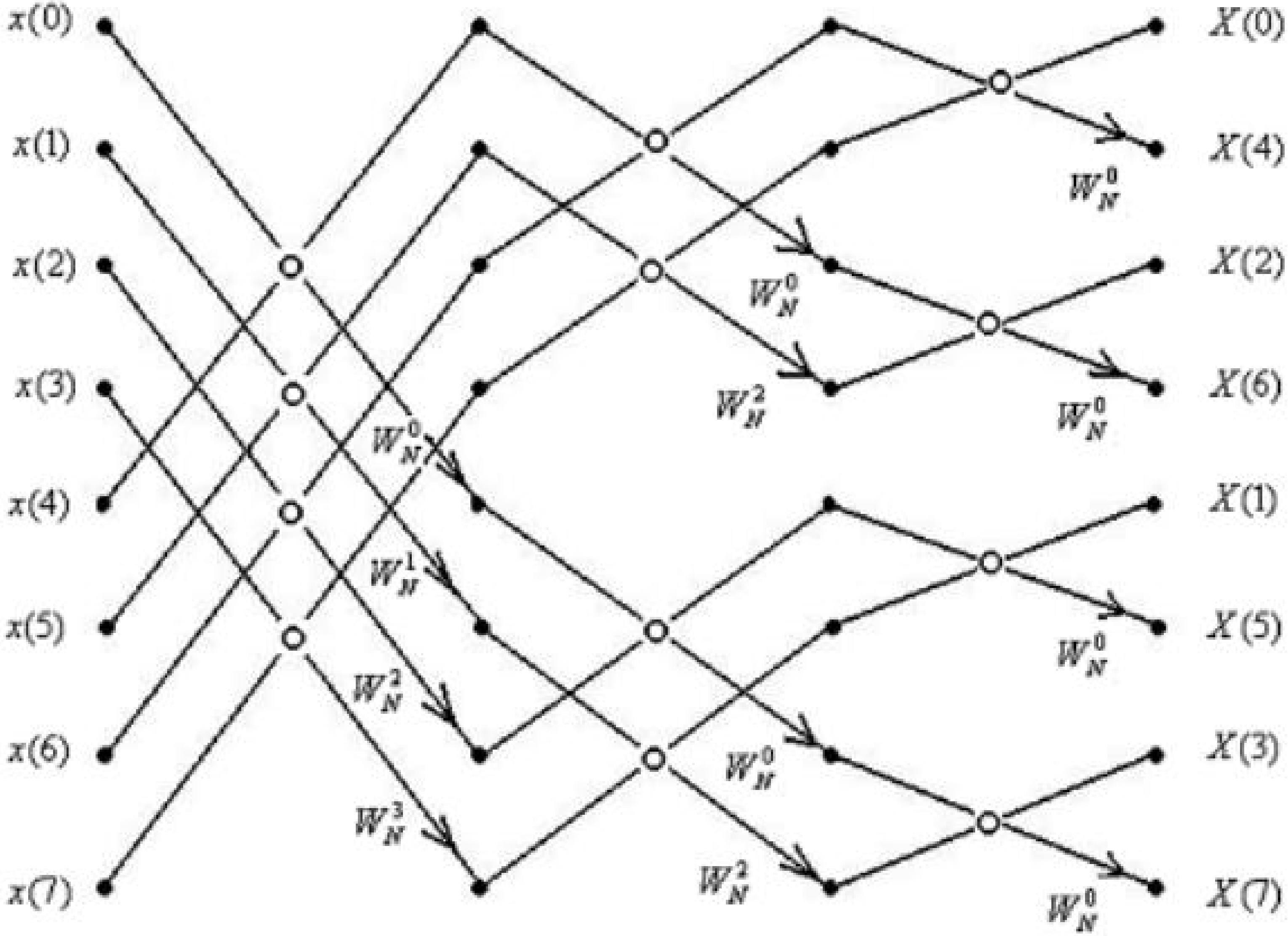


图4-18 N=8,DIF-FFT算法流图

五、统一的**FFT**方法与**DIT**、**DIF**

$N=2^v$

（2）$N= M \times L = 2 \times 2^{v-1}$

P134 图4-11

N=8,DIT-FFT算法流图

输入正序，输出逆序