数字信号处理

周治国

2023.9

第三章
离散傅里叶变换

§3-4 离散傅里叶变换(DFT)

DFS： $\tilde{x}(n) \longleftrightarrow \tilde{X}(k)$

实际情况： $x_a(t) \longrightarrow x_a(nT), \forall n$

$$\downarrow$$

$$x(n) \overset{\triangle}{=} x_a(nT), n = 0, 1, \cdots, N-1$$

那么，

$$x(n), 0 \le n \le N-1$$

$$\updownarrow \quad \longrightarrow \ ?$$

$$X(k), 0 \le k \le N-1$$

§3-4 离散傅里叶变换(DFT)

一、DFT的推导

$x(n)$周期延拓

令 $\tilde{x}(n+lN)=x(n),0\le n\le N-1,\forall l=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n),0\le n\le N-1\\ 0 \quad ,n<0,n\ge N\end{cases}=\tilde{x}(n)R_N(n) \qquad \tilde{x}(n)\text{主值序列}$$

由DFS变换[3-17式]

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn} \qquad \forall k\in I$$

显然 $\tilde{X}(k)=\tilde{X}(k+N)$

仅有N个独立值

§ 3-4 离散傅里叶变换(DFT)

令 $X(k) \overset{\triangle}{=} \widetilde{X}(k)R_N(n)$

则有 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \qquad 0 \le k \le N-1$

即 $x(n), 0 \le n \le N-1 \longrightarrow X(k), 0 \le k \le N-1$

问题: $X(k), 0 \le k \le N-1 \xrightarrow{?} x(n), 0 \le n \le N-1$

$\because x(n) = \widetilde{x}(n)R_N(n)$

$$= \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{X}(k)W_N^{-kn}\right)R_N(n)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}$$

$0 \le n \le N-1$

$$\therefore \underset{0 \le k \le N-1}{X(k)} \longrightarrow \underset{0 \le n \le N-1}{x(n)}$$

§ 3-4 离散傅里叶变换(DFT)

归纳起来：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn} \qquad 0\le k\le N-1$$

$$\overset{\triangle}{=} DFT\left[x(n)\right]$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn} \qquad 0\le n\le N-1$$

$$\overset{\triangle}{=} IDFT\left[X(k)\right]$$

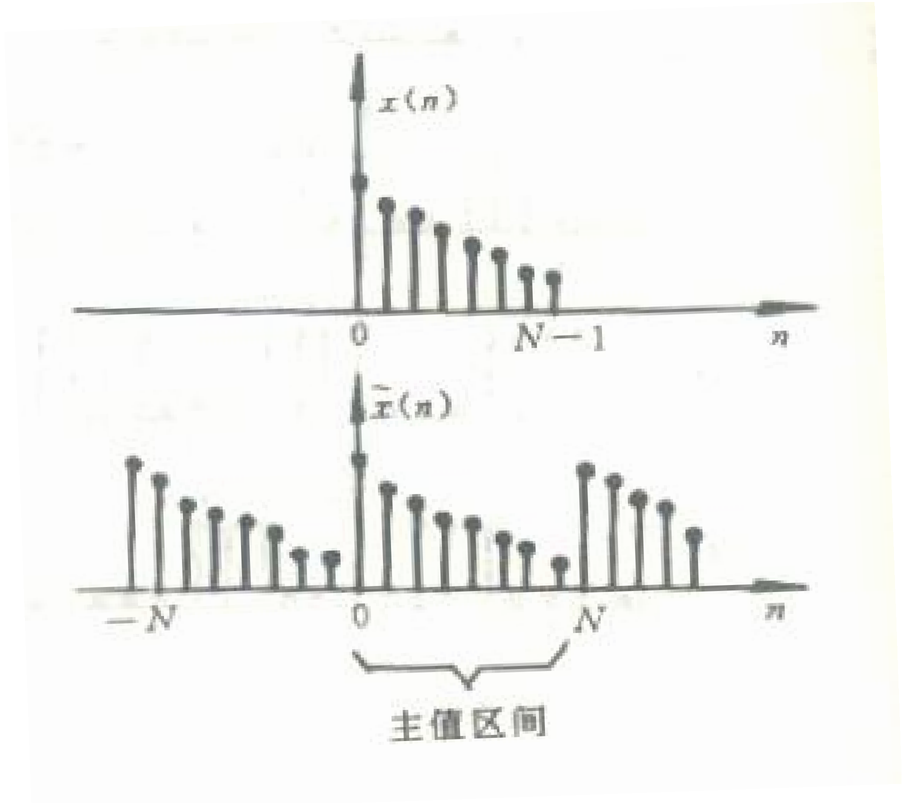
§3-4 离散傅里叶变换(DFT)

注意：

【1】DFT隐含周期性

【2】$x(n)$与$\tilde{x}(n)$ 的内在联系

$\tilde{x}(n)$是$x(n)$ 的周期延拓，
$x(n)$是$\tilde{x}(n)$的主值序列。



分别简记为：

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N$$

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$$

比如： $\forall n = mN + n_1$

$$((n))_N = n_1$$

$$x((n))_N = x(n_1)$$

$((n))_N$ 表示余数运算表达式，

注意x(n)有时表示一个序列，
有时表示序列中一个值

§3-4 离散傅里叶变换(DFT)

【3】$X(k)$与$\widetilde{X}(k)$的内在联系

$$X(k)=\widetilde{X}(k)R_N(k)$$

$$\widetilde{X}(k)=X\big((k)\big)_N$$

【4】

$$\begin{tikzcd}
x_a(t) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & x_a(nT) \arrow[r, "\text{近似}"] \arrow[d, leftrightarrow] & x(n),0\le n\le N-1 \arrow[d, leftrightarrow] \\
X_a(j\Omega) & X(e^{j\Omega T})=X(e^{j\omega}) \arrow[l] & X(k) \arrow[l, "\text{近似}"'] \arrow[ll, bend left, "\text{近似}"]
\end{tikzcd}$$

优点：便于PC机运算，可以广泛应用

求序列$x(n)=\{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\}$的$DFT$

求序列$x(n)=\{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\}$的$DFT$

解：

$$x(n)=\{1 \quad -1 \quad 1 \quad -1\}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_4^{kn}=x(0)+x(1)\,e^{-j\frac{2\pi}{4}k}+x(2)\,e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}+x(3)\,e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}$$

$$=1-e^{-j\frac{2\pi}{4}k}+(-1)^k-e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}$$

$$\Rightarrow$$

$$X(0)=0; X(1)=0$$

$$X(2)=4; X(3)=0$$

补充：可以用**DFT**性质五、六、十一加以校验。

历年考试真题

求序列$y(n)=\sin(2\pi n/N)+\cos(4\pi n/N), 0\le n\le N-1$的$DFT$

历年考试真题

求序列$y(n)=\sin(2\pi n/N)+\cos(4\pi n/N), 0\le n\le N-1$的$DFT$

解：

$$y(n)=\sin(2\pi n/N)+\cos(4\pi n/N)$$

$$=\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n}-e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{4\pi}{N}n}+e^{-j\frac{4\pi}{N}n}\right)$$

$$=\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n}-e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}2n}+e^{j\frac{2\pi}{N}(N-2)n}\right)$$

$$\sin(\theta)=\frac{1}{2j}\left(e^{j\theta}-e^{-j\theta}\right)$$

$$\cos(\theta)=\frac{1}{2}\left(e^{j\theta}+e^{-j\theta}\right)$$

$$e^{j\theta}=\cos(\theta)+j\sin(\theta)$$

$$e^{-j\theta}=\cos(\theta)-j\sin(\theta)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y(K)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y(K)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\frac{1}{N}\left(Y(1)e^{j\frac{2\pi}{N}n}+Y(N-1)e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n}+Y(2)e^{j\frac{2\pi}{N}2n}+Y(N-2)e^{j\frac{2\pi}{N}(N-2)n}\right)$$

由比较法可得：

$k=1$时，$Y(1)=\frac{N}{2j}$；$k=N-1$时，$Y(N-1)=-\frac{N}{2j}$

$k=2$时，$Y(2)=\frac{N}{2}$；$k=N-2$时，$Y(N-2)=\frac{N}{2}$

k取其他值时，$Y(k)=0$

已知4点序列$x(n)$的z变换$X(z)$在z平面上0. 25, 0. 25j,
-0. 25, -0. 25j四点处的值均是1

求：

$(1)\, x(n)$的4点DFT值$X(k)$；

(2)若想进一步通过DFT计算考察$x(n)$的$DTFT$谱在频率$5\pi/16$处的值，有什么可行的方法？

解：

(1)根据题意$X(z)\Big|_{z=0.25e^{j\frac{2\pi}{4}k}}(z)=\{1,1,1,1\},k=0,1,2,3$

$$=\sum_{n=0}^{3}x(n)\left[0.25e^{j\frac{2\pi}{4}k}\right]^{-n}=\sum_{n=0}^{3}\left[x(n)0.25^{-n}\right]e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}$$

$$=\mathrm{DFT}\left\{\left[x(n)0.25^{-n}\right]\right\}$$

$$=\{1,1,1,1\}=Z(k)$$

$$\therefore x(n)0.25^{-n}=\mathrm{IDFT}\{1,1,1,1\}=\{1,0,0,0\}$$

$$\Rightarrow x(n)=\{1,0,0,0\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{DFT}\{x(n)\}=\{1,1,1,1\}$$

(2)补零至32点序列，其DFT值在k=5时对应着 $w=\frac{2\pi}{32}5=\frac{5\pi}{16}$

历年考试真题

$$x(n)=1, n=0,1,\cdots,N-1;$$

求序列$x(n)$的DFT

求序列$x(n)=1, n=0,1,\cdots,N-1$的DFT

解：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{kn}=\frac{1-W_N^{kN}}{1-W_N^{k}}=\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$k=0\text{时}, X(0)=\left.\left(\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}\right)'\right|_{k=0}=N$$

$$k=\text{其他时}, X(k)=0$$

等比数列

历年考试真题

$$x(n)=\begin{cases}1, n=0,2,4,\cdots,N-2; \\ 0, n=1,3,5,\cdots,N-1;\end{cases}$$

N为偶数

求序列$x(n)$的DFT

求序列$x(n)=\begin{cases}1, n=0,2,4,\cdots,N-2;\\ 0, n=1,3,5,\cdots,N-1;\end{cases}$的$DFT$

解：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{m=0}^{N/2-1}W_{N/2}^{km}=\frac{1-W_{N/2}^{kN/2}}{1-W_{N/2}^{k}}=\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N/2}k}}$$

$$k=0\text{时}, X(0)=\left(\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N/2}k}}\right)'\Bigg|_{k=0}=\frac{N}{2}$$

$$k=\frac{N}{2}\text{时}, X\left(\frac{N}{2}\right)=\left(\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N/2}k}}\right)'\Bigg|_{k=\frac{N}{2}}=\frac{N}{2}$$

$$k=\text{其他时}, X(k)=0$$