

天津大学《数值计算方法与 Matlab》

2011-2012 学年第二学期考试试卷及答案 A 卷

一、填空题: (共 42 分, 每空 3 分)

1. 数值计算方法可以处理的误差是 舍入误差与截断误差。若 6.32 与 6.32000 都是经四舍五入得到的近似值, 则它们分别具有 3, 6 位有效数字。

2. $\sum_{k=0}^n k^2 l_k(x) = \underline{x^2}$, $\sum_{j=0}^n j^2 l_k(j) = \underline{k^2}$ 。

3. $f'(1.0) = \underline{3.52}$ 和 $f''(1.0) = \underline{11.000}$ (保留 3 位小数)。

4. 差商 $p[2^0, 2^1, 2^2] = \underline{49}$ 和 $p[2^0, 2^1, \dots, 2^5] = \underline{0}$ 。

5. 从几何角度上看, $S_n^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 Φ 中的 正交投影。

6. $\underline{g_0(x) = 1}$ 和 $\int_0^1 x \cdot g_k(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0; \\ \int_0^1 x \cdot (x - \frac{1}{2}) dx = \frac{1}{12}, & k = 1; \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$ 。

7. SOR 法迭代格式 $\underline{x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{\omega}{3} [5 - 3x_1^{(k)} - x_2^{(k)}]}$, ω 满足 $0 < \omega < 2$ 。
 $\underline{x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{\omega}{2} [5 - x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k)}]}$

8 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, 则 A 的条件数 $\text{Cond}_1(A) = \underline{20}$ 。

二、解下列各题: (共 36 分, 每小题 9 分)

1. 确定下列求积公式中的待定参数, 使其代数精度尽量高, 并指出所确定的求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx \approx A_1 f(-1) + A_2 f(0) + A_3 f(1)$$

解: 首先令 $f(x) = 1, x, x^2$, 分别代入求积公式中, 使其精确地成立, 得关于系数

A_1, A_2, A_3 的方程:

$$0 = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\frac{2}{3} = -A_1 + 0 + A_3 \quad (6 \text{ 分})$$

$$0 = A_1 + 0 + A_3$$

解得 $A_1 = -\frac{1}{3}$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{1}{3}$ 。将 A_1, A_2, A_3 的上述值代回积分公式, 得

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx \approx -\frac{1}{3}f(-1) + \frac{1}{3}f(1)。 \quad (8 \text{ 分})$$

再令 $f(x) = x^3$, 代入积分公式得: 左边 $= 2/5$, 右边 $= \frac{2}{3}$, 左边不等于右边, 所以求积公式的代数精度是 2。 (9 分)

2. 利用 Romberg 数值积分公式计算积分 $\int_0^1 (1+x)^{-1} dx$, 取初始步长为 1 (保留 5 位小数)。

解: 被积函数 $f(x) = (1+x)^{-1}$, 首先在区间 $[0, 1]$ 上使用梯形公式计算, 有

$$T_1 = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\right] = 0.75$$

将 $[0, 1]$ 对分, 它的中点函数值 $f(0.5) = \frac{2}{3}$, 则由变步长的梯形公式, 有

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}f(0.5) = \frac{0.75}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 0.708333。$$

因为 $|T_2 - T_1| > 10^{-5}$, 则利用外推公式, 得 $S_1 = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1 = 0.694444。$

因为 $|T_2 - S_1| > 10^{-5}$, 则步长折半, 取 $h = 1/2$, 再利用变步长的梯形公式计算

$$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{h}{2}[f(0.25) + f(0.75)] = 0.697024。$$

因为 $|T_2 - T_4| > 10^{-5}$, 则由外推公式, 得: $S_2 = \frac{4}{3}T_4 - \frac{1}{3}T_2 = 0.693254。$

因为 $|S_2 - T_4| > 10^{-5}$, 再由外推公式, 得 $C_1 = \frac{16}{15}S_2 - \frac{1}{15}S_1 = 0.693175。$

由于不满足终止条件, 再将步长折半, 取 $h = 1/4$, 继续利用变步长的梯形公式计算

$$T_8 = \frac{1}{2}T_4 + \frac{h}{2}\left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)\right] = 0.694122。 \quad (6 \text{ 分})$$

再由外推公式, 得: $S_4 = \frac{4}{3}T_8 - \frac{1}{3}T_4 = 0.693155$, $C_2 = \frac{16}{15}S_4 - \frac{1}{15}S_2 = 0.693148,$

$$R_1 = \frac{64}{63}C_2 - \frac{1}{63}C_1 = 0.693148。$$

因为 $|R_1 - C_2| < 10^{-5}$, 所以终止计算, 取 0.69315 为积分的近似值。 (9 分)

另解：求出 T_1, T_2, T_4, T_8 ，然后利用 Romberg 算法对其进行计算，计算结果列于下表：

| k | $T_{2^k}(R_{(k,1)})$ | $S_{2^{k-1}}(R_{(k,2)})$ | $C_{2^{k-2}}(R_{(k,3)})$ | $R_{2^{k-3}}(R_{(k,4)})$ |
|-----|----------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 0 | 0.75 | | | |
| 1 | 0.708333 | 0.694444 | | |
| 2 | 0.697024 | 0.693254 | 0.693175 | |
| 3 | 0.694122 | 0.693155 | 0.693148 | 0.693148 |

(9 分)

3. 已知函数 $f(x)$ 的函数值表

| x | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|--------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $f(x)$ | 0.564642 | 0.644218 | 0.717356 | 0.783327 | 0.841471 |

用适当的四阶 Newton 插值公式计算 $f(0.63)$ 的近似值（至少保留 6 位小数）。

解：因为数据点是等距的，所以使用等距节点的 Newton 插值公式。首先写出差分表

| | x | $f(x)$ | Δ | Δ^2 | Δ^3 | Δ^4 |
|---|-----|----------|----------|------------|------------|------------|
| 0 | 0.6 | 0.564642 | 0.079576 | -0.006438 | -0.000729 | 0.000069 |
| 1 | 0.7 | 0.644218 | 0.073138 | -0.007167 | -0.000666 | |
| 2 | 0.8 | 0.717356 | 0.065971 | -0.007827 | | |
| 3 | 0.9 | 0.783327 | 0.058144 | | | |
| 4 | 1.0 | 0.841471 | | | | |

因为插值点 $x = 0.63$ 在表前，故采用牛顿前插公式， $h = 0.1$ ， $x = 0.6 + th$ ， $t = 0.3$ 。利用四阶 Newton 前插公式得

$$N_4(1.0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 f_0$$

(6 分)

$$N_4(0.63) = 0.564642 + 0.3 \times 0.079576 - \frac{0.3 \times (0.3-1)}{2!} \times 0.006438 - \frac{0.3 \times (0.3-1) \times (0.3-2)}{3!} \times 0.000729 + \frac{0.3 \times (0.3-1) \times (0.3-2) \times (0.3-3)}{4!} \times 0.000069$$

(8 分)

$$f(0.63) \approx N_4(0.63) = 0.589145$$

(9 分)

4. 计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 2 & 10 \\ 4 & 8 & 3 & 6 \\ 12 & 6 & 11 & 20 \end{bmatrix}$ 的 LU 分解（要求写出详细分解过程）。

解：

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 2 & 10 \\ 4 & 8 & 3 & 6 \\ 12 & 6 & 11 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_{21}=2, l_{31}=1, l_{41}=3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_{32}=2, l_{42}=0} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_{43}=4} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{得到 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9 \text{ 分})$$

三、应用题：(共 22 分，每小题 11 分)

1. 已知一组实验数据

| | | | | | | | | |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|
| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| y | 4.00 | 6.40 | 8.00 | 8.80 | 9.22 | 9.50 | 9.70 | 9.86 |

试用最小二乘法求出经验公式 $y = \frac{t}{at + b}$ 中的 a, b 。(结果保留 3 位小数)

解：先将其线性化得 $y^{-1} = a + bt^{-1}$ ，令 $u = y^{-1}, x = t^{-1}$ ，则用 $u = a + bx$ 来拟合原始数据。

由 $u_k = 1/y_k, x_k = 1/t_k$ 得到新的数据关系表如下：

| | | | | | | | | |
|-------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x_k | 1 | 1/2 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 | 1/7 | 1/8 |
| u_k | 0.2500 | 0.15625 | 0.1250 | 0.1136 | 0.1085 | 0.1053 | 0.1031 | 0.1014 |

(3 分)

即在 $\Phi = \text{span} \{1, x\}$ 中求函数 u 。权函数 $\omega(x) \equiv 1, \varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x$ 。法方程形如：

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u, \varphi_0) \\ (u, \varphi_1) \end{pmatrix}$$

这里 $(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^7 1 = 8, (\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = \sum_{i=0}^7 x_i = 2.717857$ ，

$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=0}^7 x_i^2 = 1.527422, (u, \varphi_0) = \sum_{i=0}^7 u_i = 1.0631$ 和 $(u, \varphi_1) = \sum_{i=0}^7 u_i x_i = 0.4648$ 。

故有 $\begin{cases} 8a + 2.717857b = 1.0631 \\ 2.717857a + 1.527422b = 0.4648 \end{cases}$ ，(9 分)

解得 $a = 0.0746$, $b = 0.172$, 所以最小二乘解为 $y = \frac{t}{0.0746t + 0.172}$ 。 (11 分)

2. 一个捕食系统的模型为

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1 - ax_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = bx_2(x_1 - x_2),$$

其中 x_1 和 x_2 是个无量纲的量, 是时间 t 的函数, 分别与猎物和捕食者的数量成正比, a 和 b 是正常数。利用标准四阶 Runge-Kutta 法, 写出求解函数 x_1 和 x_2 数值解的计算公式。设初始值为 $x_1(0) = x_{1,0}$ 和 $x_2(0) = x_{2,0}$, 步长为 h 。

解: 记 $y_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix}$ 为精确解 $y(t_n) = \begin{pmatrix} x_1(t_n) \\ x_2(t_n) \end{pmatrix}$ 的数值近似, t_n 为节点。设

$$K_j = \begin{pmatrix} k_{1,j} \\ k_{2,j} \end{pmatrix}, j = 1, 2, 3, 4, \text{ 初值 } y_0 = y(0) = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix}。 \quad (3 \text{ 分})$$

由标准四阶 Runge-Kutta 公式, 得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \left(\begin{pmatrix} k_{1,1} \\ k_{2,1} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} k_{1,2} \\ k_{2,2} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} k_{1,3} \\ k_{2,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{1,4} \\ k_{2,4} \end{pmatrix} \right)$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} k_{1,1} \\ k_{2,1} \end{pmatrix} = f(t_n, y_n) = \begin{pmatrix} x_{1,n}(1 - x_{1,n} - ax_{2,n}) \\ bx_{2,n}(x_{1,n} - x_{2,n}) \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_{1,2} \\ k_{2,2} \end{pmatrix} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right) = \begin{pmatrix} \left(x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{1,1}\right)\left(1 - \left(x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{1,1}\right) - a\left(x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{2,1}\right)\right) \\ b\left(x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{2,1}\right)\left(\left(x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{1,1}\right) - \left(x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{2,1}\right)\right) \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} k_{1,3} \\ k_{2,3} \end{pmatrix} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\right) = \begin{pmatrix} \left(x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{1,2}\right)\left(1 - \left(x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{1,2}\right) - a\left(x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{2,2}\right)\right) \\ b\left(x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{2,2}\right)\left(\left(x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{1,2}\right) - \left(x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{2,2}\right)\right) \end{pmatrix},$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} k_{1,4} \\ k_{2,4} \end{pmatrix} = f(t_n + h, y_n + hK_3) = \begin{pmatrix} \left(x_{1,n} + hk_{1,3}\right)\left(1 - \left(x_{1,n} + hk_{1,3}\right) - a\left(x_{2,n} + hk_{2,3}\right)\right) \\ b\left(x_{2,n} + hk_{2,3}\right)\left(\left(x_{1,n} + hk_{1,3}\right) - \left(x_{2,n} + hk_{2,3}\right)\right) \end{pmatrix}.$$

由此得到分量计算格式为

$$x_{1,n+1} = x_{1,n} + \frac{h}{6}(k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}),$$

$$x_{2,n+1} = x_{2,n} + \frac{h}{6}(k_{2,1} + 2k_{2,2} + 2k_{2,3} + k_{2,4}),$$

$$k_{1,1} = x_{1,n}(1 - x_{1,n} - ax_{2,n}), k_{2,1} = bx_{2,n}(x_{1,n} - x_{2,n}),$$

$$k_{1,2} = (x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{1,1})\left(1 - x_{1,n} - ax_{2,n} - \frac{h}{2}(k_{1,1} + ak_{2,1})\right),$$

$$k_{2,2} = b(x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{2,1})\left(x_{1,n} - x_{2,n} + \frac{h}{2}(k_{1,1} - k_{2,1})\right),$$

$$k_{1,3} = (x_{1,n} + \frac{h}{2}k_{1,2})\left(1 - x_{1,n} - ax_{2,n} - \frac{h}{2}(k_{1,2} + ak_{2,2})\right),$$

$$k_{2,3} = b(x_{2,n} + \frac{h}{2}k_{2,2})\left(x_{1,n} - x_{2,n} + \frac{h}{2}(k_{1,2} - k_{2,2})\right),$$

$$k_{1,4} = (x_{1,n} + hk_{1,3})(1 - x_{1,n} - ax_{2,n} - h(k_{1,3} + ak_{2,3})),$$

$$k_{2,4} = b(x_{2,n} + hk_{2,3})(x_{1,n} - x_{2,n} + h(k_{1,3} - k_{2,3})).$$

(11 分)

将初值 y_0 , $n = 0$ 代入上面各式, 可依次计算出函数 x_1 和 x_2 的数值解 $x_{1,n}, x_{2,n}$,

$n = 1, 2, 3, \dots$ 。