Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Dr. E.A. v. Hammerstein / Saskia Glaffig, M.Sc.

SoSe 2022

Klausur zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Informatik“

21. September 2022, 9:00 Uhr – 12:00 Uhr

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Unterschrift: ____________________

Formales

- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 180 Minuten.
- Für die Klausur ist als Hilfsmittel nur das von Ihnen handschriftlich erstellte Notizblatt im DIN A4-Format zugelassen. Insbesondere sind Bücher und technische Geräte nicht erlaubt und dürfen nicht auf den Tischen liegen. Jeder Täuschungsversuch wird mit der Note „nicht bestanden“ (5,0) geahndet.
- **Notieren und begründen Sie alle (Rechen)Wege zu Ihren Lösungen**, für das korrekte Endergebnis allein gibt es nicht die volle Punktzahl! Die Rechenwege und Beweisschritte müssen nachvollziehbar sein, insbesondere wenn Sie in der Vorlesung nicht behandelte Verfahren anwenden.
- Verwenden Sie dazu bitte Kugel- oder Tintenschreiber, aber **keinen Bleistift!** Alles mit Bleistift Geschriebene kann nicht korrigiert und gewertet werden, unabhängig davon, ob es richtig ist oder falsch sein sollte!
- Jede Aufgabe ist auf dem dafür vorgesehenen Blatt zu bearbeiten. Sollten Vorder- und Rückseite des Blattes für die Lösung nicht ausreichen, so verwenden Sie die leeren Blätter am Ende der Klausur und **vermerken Sie deutlich**, zu welcher Aufgabe das jeweilige Blatt gehört.
- Jedes Blatt, das in die Bewertung eingehen soll, ist mit Ihrem Namen zu versehen.

PRÜFUNGSFÄHIGKEIT
Durch den Antritt dieser Prüfung erklären Sie sich für prüfungsfähig. Ein Rücktritt ist dann nur noch gemäß den Bestimmungen §23 Absatz (2) und (2a) der Rahmenprüfungsordnung B.Sc. möglich.

1	2	3	4	5	6	Bonus	$\sum$
(10)	(14)	(12)	(9)	(11)	(14)	(13)	(70+13)

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (je 0.5 Punkte für die richtige Antwort und 1.5 Punkte für die korrekte Begründung)

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten (gegebenenfalls durch ein Gegenbeispiel)!

a) Die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ hat Rang 2.

b) Symmetrische $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{R}$ sind invertierbar.

c) Es gibt genau 5 verschiedene Automorphismen von $\mathbb{Z}_{14}$.

d) $\mathbb{Z}_{196} \times \mathbb{Z}_{343}$ ist zyklisch.

e) Sind $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $f : S \to \mathbb{R}$ konkav und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und konkav, so ist auch die Funktion $h := g \circ f : S \to \mathbb{R}$, $h(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x}))$, konkav.

Richtig

a) Zeilenstufenform bringen :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{① \times 2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{①-③} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[③ \times 6]{① \times 2} \begin{pmatrix} 4 & 12 & 12 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{①-②} \begin{pmatrix} 4 & 12 & 12 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-③} \begin{pmatrix} 4 & 12 & 12 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ somit hat A Rang 2. ✓

b) Falsch. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, det = 0, Es ist nicht invertierbar.

c) richtig. 1, 3, 5, 11, 13 sind die Erzeuger von $\mathbb{Z}_{12}$. Die Zahlen sind alle teilerfremd zu 14

d) falsch. Da ggT(196, 343) = 49.

(e) falsch $h(x) = g(f(x))$ Konkav.

A1. 21.09.2022 Klausur

(e) falsch.

Da f konkav ist, folgt:

$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ $\forall x, y \in S$ und $\lambda \in [0,1]$, sei S eine konvexe Menge

und g ~~konkav~~ ist, gilt:

$g(f(\lambda x + (1-\lambda) y)) \geq g(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$

und jetzt g ist auch konkav ist, gilt:

$g(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)) \geq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda) g(f(y))$

Damit erhalten wir $g(f(\lambda x + (1-\lambda) y)) \geq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda) g(f(y))$

$\Rightarrow h(x) = g(f(x))$ konkav

Name: ....

Aufgabe 2 (4+6+4 Punkte)

Betrachten Sie eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ mit

$$\phi\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-8\\5\\8\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \phi\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-8\\3\\12\\3\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi\left(\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-12\\6\\15\\3\\0\end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass ϕ durch die obigen Bedingungen eindeutig bestimmt ist.
   Wählen Sie eine Basis B_3 von $\mathbb{R}^3$ sowie eine Basis B_5 von $\mathbb{R}^5$ und geben Sie die Abbildungsmatrix ${}_{B_5}\phi_{B_3}$ an.
   Hinweis: Bei geschickter Wahl der Basen schreibt sich die Abbildungsmatrix fast von alleine hin.

b) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix von ϕ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^5$.

c) Bestimmen Sie den Kern von ϕ und geben Sie eine Basis von diesem an. Was sind die Dimensionen von Kern(ϕ) und Bild(ϕ)?

a) ZZ: ϕ ist durch die obigen Bedingungen eindeutig bestimmt.

Bw: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, bilden damit als maximale linear unabhängige Menge eine Basis. Nach Satz ist die lineare Abbildung hierdurch eindeutig bestimmt. Somit sind die Bedingungen $\phi\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $\phi\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$, $\phi\left(\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ konsistent mit der definierten linearen Abbildung ist.

eine Basis B_3 von $\mathbb{R}^3$ wäre $B_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$, eine Basis B_5 von $\mathbb{R}^5$ wäre $B_5 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$${}_{B_5}\phi_{B_3} = ({}_{B_3}id_{B_5})\, \phi_{B_5}\, ({}_{B_5}id_{B_3})$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-8&-8&-12\\5&3&6\\8&12&15\\1&3&3\\-1&1&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-8&-8&-12\\5&3&6\\8&12&15\\1&3&3\\-1&1&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-8&-8&12\\5&3&6\\8&12&15\\1&3&3\end{pmatrix}$$

A2. Klausur 2022SS

b) $e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$

$e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$

$e_4 = (0, 0, 0, 1, \dots, 0)$

$e_5 = (0, 0, 0, 0, 1, \dots 0)$

Spalte, Zeile

gesucht: $\phi(e_3)$, $\phi(e_5)$ $\quad \phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$

$$\phi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right) - \phi\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right) - \phi\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-12\\6\\15\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-8\\3\\12\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\4\\1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right) - \phi\left(\phi\left(\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right) - \phi\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix}-4\\2\\5\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \phi\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) - \phi\left(\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix}-8\\5\\8\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-12\\6\\15\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-16\\10\\16\\2\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-12\\6\\15\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Somit ist $\begin{pmatrix}0&-4&-4\\-1&2&4\\2&5&1\\1&1&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}$ die Abbildungsmatrix zu ϕ bzg der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^5$

Name: ....

Sind die beide Möglichkeiten richtig?

c) kern von (ϕ) bestimmen $A \cdot v = 0$

Möglichkeit 1:

Ursprüngliche Matrix.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{①-③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{①-②} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

$v_2 + v_3 = 0.$

$-v_2 = 0.$, $v_3 = 0$, $v_1 = 0$.

$\text{kern}(\phi) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Also eine Basis wäre $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

dim (kern) = 0. dim Bild = dim V − dim kern = 3 − 0 = 3.

$$\det(A) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 - 1 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{kern}(A) = \{0\} \text{ trivial.}$$

kern existiert nicht.

Möglichkeit 2:

die Abbildmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & -8 & -12 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 0 \\ 8 & 12 & 15 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[④-⑤]{①-③} \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & -8 & 12 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 8 & 12 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$\xrightarrow{③-①}$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} -2v_1 + 2v_2 = 0 \\ 5v_1 + 3v_2 + 6v_3 = 0 \\ 4v_2 + 3v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = -v_2 \\ -5v_2 + 3v_2 + 6v_3 = 0, \ -2v_2 - 3v_3 = 0, \ v_2 = 3v_3 \\ 4 \cdot 3 \cdot v_3 + 3v_3 = 0 \\ \Rightarrow 15 v_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ v_2 = 0. \\ v_1 = 0. \end{array}$$

$\Rightarrow \text{kern}(\phi) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 3 (3+9 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von M.

b) Begründen Sie, warum eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von M existiert, und berechnen Sie eine solche (vergessen Sie nicht, diese am Ende auch explizit anzugeben!).

vielfachheit der EW ob die gleich sind

a) Nach der Regel von Sarrus hat die Matrix A das charakteristische Polynom.

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) - 8\cdot(1-\lambda) - 8(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda)^2 - 16(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 16))$$

$$= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4^2) \qquad | \; a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda-4)(1-\lambda+4) = 0$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 5$ ✓

$\boxed{A\cdot v = \lambda\cdot v}$ b) Eigenvektor zum EW λ_1 erhält man durch lösen von $A\cdot v = \lambda\cdot v$.

$\lambda_1 = 1$

$$\left.\begin{cases} v_1 + 4v_2 = 1v_1, & v_2 = 0 \\ 2v_1 + v_2 + 4v_3 = 1v_2, & 2v_1 + 4v_3 = v_2 = 0, \quad 2v_1 = -2v_3 \\ 2v_2 + v_3 = 1\cdot v_3 & v_3 = v_3 \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{Eig}(A,1) = \left\{ v_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, v_3 \in \mathbb{R} \right\} \checkmark \; *$$

$\lambda_2 = -3$

$$\left.\begin{cases} v_1 + 4v_2 = -3v_1, & 4v_1 = -4v_2, \quad v_1 = -v_2 \\ 2v_1 + v_2 + 4v_3 = -3v_2, & \\ 2v_2 + v_3 = -3v_3, & 4v_3 = -2v_2, \quad v_3 = -\frac{1}{2}v_2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{Eig}(A,-3) = \left\{ v_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \middle| \, v_2 \in \mathbb{R} \right\} \checkmark \; **$$

$\lambda_3 = 5$

$$\left.\begin{cases} v_1 + 4v_2 = 5v_1, & v_1 = v_2 \\ 2v_1 + v_2 + 4v_3 = 5v_2, & \\ 2v_2 + v_3 = 5v_3, & -4v_3 = -2v_2, \quad v_3 = \frac{1}{2}v_2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \mathrm{Eig}(A,5) = \left\{ v_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \middle| \, v_2 \in \mathbb{R} \right\} \checkmark \; ***$$

Da der Eigenwert $\lambda_1 = 1$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, ist seine algebraische Vielfachheit gleich 1. Ebenso ist seine geometrische Vielfachheit gleich, $\dim \mathrm{Eig}(A,1) = 1$. Somit existiert eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A, A ist diagonalisierbar. Analog gilt das auch für $\lambda_2 = -3$ und $\lambda_3 = 5$.

* sei $v_3 = 1$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

** sei $v_2 = 1$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

*** sei $v_2 = 1$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

6

Name: ....

Aufgabe 4 (3+2.5+3.5 Punkte)

Wir betrachten den 3-ären linearen $[5,2]$-Code C (d. h. $C \subset (\mathbb{F}_3)^5$) mit Erzeugermatrix

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Prüfmatrix $\boldsymbol{H}$ für C.

b) Bestimmen Sie das Minimalgewicht von C. Wie viele Fehler korrigiert C?

c) Es wird der Vektor $\boldsymbol{v} = (1,2,2,0,0)$ empfangen. Zeigen Sie, dass bei der Codierung (oder der Übertragung) ein Fehler passiert ist, d. h. $\boldsymbol{v} \notin C$. Berechnen Sie das Syndrom von $\boldsymbol{v}$ und korrigieren Sie den Fehler.

a)

$G' = (I_k \mid A)$, um G in die Form G' gebracht werden kann, werden dritte und zweite Spalte vertauscht:

$$G' = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$I_2 \mid A$

$$k=2, \quad H' = (-A^T \mid I_{5-2}) = \left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{in } \mathbb{F}_3}{=} \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Um H zu bekommen, tauschen wir dritte und zweite Spalte wieder zurück.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

Das Minimalgewicht ist 4. Da $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Je drei Spalte der Prüfmatrix sind linear unabhängig.

NF: $V_1 + V_2 + V_4 + 2V_5 = 0$

$V_2 + V_3 + 2V_4 + V_5 = 0$

$2 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 2 = 8$

$2 \times 1 + 1 \times 2 = 4$

$1 \times 1 + 2 \times 2 = 5$

c) $H \cdot V^T = H \cdot f^T$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \overset{\text{in } \mathbb{F}_3}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = H \cdot f^T$$

welcher Vektor f multipliziert mit H ergibt sich $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow f = (0,0,1,0,0)$$

$c = V - f = (1,2,2,0,0) - (0,0,1,0,0) = (1,2,1,0,0)$

Name: ....

Aufgabe 5 (4+7 Punkte)

a) Bestimmen Sie *die kleinste positive* Lösung des Kongruenzsystems

$$a \equiv 3 \bmod 4$$
$$a \equiv 1 \bmod 5$$
$$a \equiv 2 \bmod 7$$

b) Berechnen Sie $2^{5235} \bmod 28$ mithilfe schneller Exponentiation modulo 28.

a) $m_1 = 4,\ m_2 = 5,\ m_3 = 7$
$r_1 = 3,\ r_2 = 1,\ r_3 = 2$

$m_2 = m_1 + 1 = 4+1,\ m_1 = r_1 + 1 = 3+1 = 4,\quad 1 = m_2 - m_1 = 5 - 4 = m_2 - (r_2+1) = 5-(3+1) = a_1 m_1 + a_2 m_2$

$= a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 5,\ \Rightarrow a_1 = -1;\ a_2 = 1.$

$b_2 = r_2 \cdot a_1 \cdot m_1 + r_1 \cdot a_2 \cdot m_2 = 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 5 = -4 + 15 = 11$

$m_1' = m_1 \cdot m_2 = 4 \cdot 5 = 20$

$a \equiv 11 \bmod 20$
$a \equiv 2 \bmod 7$

$1 = a_1' m_1' + a_2' m_3 = a_1' \cdot 20 + a_2' \cdot 7 \Rightarrow a_1' = -1,\ a_2' = 3$

$a = r_3 \cdot a_1' \cdot m_1' + b_2 \cdot a_2' \cdot m_3 = 2 \cdot (-1) \cdot 20 + 11 \cdot 3 \cdot 7 = 231 - 40 = 191$

Probe: $191 = 3 + (47) \cdot 4 \equiv 3 \bmod 4$ | NR: $47 \times 4 = 188$
$191 = 1 + (38) \cdot 5 \equiv 1 \bmod 5$ | $38 \times 5 = 190$
$191 = 2 + (27) \cdot 7 \equiv 2 \bmod 7$ | $27 \times 7 = 189$

b) $2^{5235} \bmod 28$, $ggT(2, 28) = 2 \neq 1$, hier darf Methode 3 nicht verwenden, sonde Methode 2

Binärdarstellung:

	Rest
$5235 : 2 = 2617$	1
$2617 : 2 = 1308$	1
$1308 : 2 = 654$	0
$654 : 2 = 327$	0
$327 : 2 = 163$	1
$163 : 2 = 81$	1
$81 : 2 = 40$	1
$40 : 2 = 20$	0
$20 : 2 = 10$	0
$10 : 2 = 5$	0
$5 : 2 = 2$	1
$2 : 2 = 1$	0
$1 : 2 = 0$	1

Rest

$2^2 = 4 \equiv 4 \bmod 28$
$4^2 = 16 \equiv 16 \bmod 28$
$16^2 = 256 \equiv 4 \bmod 28$

$2^{5235} \equiv 16^4 \cdot 4^2 \cdot 2 \bmod 28$
$\equiv \underbrace{16 \equiv 16}_{\equiv 4}$
$\equiv 4 \cdot 2 \bmod 28$
$= 8$

$\Rightarrow$

1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
16	4	16	4	16	4	16	4	16	4	16	4	2

Name: ....

Aufgabe 6 (14 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + x^2y + y^2z + z^2 - 4z.$$

Bestimmen Sie zunächst alle stationären Punkte von f und untersuchen Sie dann, ob es sich jeweils um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

Hinweis: Aus der partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ lassen sich mögliche Werte für die x- bzw. y-Koordinaten stationärer Punkte herleiten. Setzen Sie diese dann jeweils in die weiteren Gleichungen ein, um so sukzessive die Koordinaten aller stationären Punkte zu erhalten. Verwenden Sie bei der weiteren Bestimmung der Extrempunkte das Hurwitz-Kriterium.

1

6. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + x^2y + y^2z + z^2 - 4z$

use wolfram to check.

(1) Gradienten bild, null einsetzen und LGS lösen

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2xy = 0$ ✓ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz = 0$ ✓ $\quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2z - 4 = 0$ ✓

$2x + 2xy = 0 \Rightarrow 2x(1+y) = 0$, $x = 0$ oder $y = -1$, $z = 0$. $\Rightarrow$

(2) Hesse Matrix berechen

$d/dx(2x+2xy)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 2 + 2y$ ✓, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 2z$ ✓, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = 2$ ✓

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$ ✓, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2y$ ✓. $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$. ✓

$$\text{Hess } f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x & 0 \\ 2x & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{pmatrix} ✓$$

2

① Hess $f(0,0,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ✓, mit Hauptminore 2, $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 8$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 16 > 0$, somit ist die Hesse Matrix positiv definit nach Hurwitz. Es liegt ein Minimum von f vor. Der Min $f = 4 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$ ✓

Für $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$
- $y = 0$, $x = 0$, $z = 2$ ✓
- $x = 0$, $y = 2$, $z = 0$ ✓
- $x = 0$, $y = -2$, $z = 0$

Für $y = -1$
- $x = \sqrt{3}$, $y = -1$, $z = \frac{3}{2}$ ✓
- $x = -\sqrt{3}$, $y = -1$, $z = \frac{3}{2}$ ✓

Somit sind die folgende 5 Stationäre Punkte
- $(0, 0, 2)$ ✓ ①
- $(0, 2, 0)$ ✓ ②
- $(0, -2, 0)$ ③
- $(\sqrt{3}, -1, \frac{3}{2})$ ✓ ④
- $(-\sqrt{3}, -1, \frac{3}{2})$ ✓ ⑤

② Hess $f(0,2,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ✓, mit Hauptminore 6, $\det\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 6$

$\det\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 0 - 4 \cdot 4 \cdot 6 = -96 < 0$ ✓, Somit ist die Hesse Matrix indefinit ✓, da $-96 \neq 0$, es liegt ein Sattelpunkt vor. ✓

③ Hess $f(0,-2,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ ✓ mit Haupminore -2, ✓

$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -2$, ✓

$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = 16 \cdot (-2) = -32 < 0$. ✓

Somit ist die Hesse Matrix negativ definiert. Es liegt ein Maximum ✓ von f vor. Der Maximum wert von $f = \cancel{2} \cdot -4 \cdot 0 = 0$. ✓

3

④ Hess $f(\sqrt{3}, -1, \frac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 2\sqrt{3} & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ✓ mit Hauptminore 0 ✓

und $\det\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} = \overset{0}{\cancel{3}} - 4 \cdot 3 = \overset{-12}{\cancel{-9}} < 0$. ✓

$\det\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 2\sqrt{3} & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = -4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = -24 < 0$. ✓

Somit ist die Hesse Matrix negativ Semidefinit ✓. Es liegt ein Maximum oder ein Sattelpunkt von f vor. ~~Es ist jedoch nicht eindeutig bestimmt.~~

⑤ Hess $f(-\sqrt{3}, -1, \frac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} & 0 \\ -2\sqrt{3} & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

mit Hauptminore 0, $\det\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} = 0 - 4 \cdot 3 = -12 < 0$

$\det\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} & 0 \\ -2\sqrt{3} & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = -8 \cdot 3 = -24$.

Analog wie oben

Name: ....

Bonusaufgabe (4+3+6 Punkte)

a) Sei $U := \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist, und dass $\dim U = n - 1$.

b) Berechnen Sie das multiplikative Inverse 11^{-1} von 11 in $\mathbb{Z}_{141}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus.

c) Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_a(x, y) = -8x^2 + (2a + 4)xy - 2y^2 + 4ay$ konkav, für welche konvex? Begründen Sie Ihre Antwort!

welche konvex? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Gesucht: x sodass $\overset{b}{11} \cdot x \equiv \overset{g}{1}$ mod $\overset{a}{141}$

$\overset{a}{141} = \overset{b}{11} \cdot 12 + \overset{c}{9}$

$\overset{a}{11} = \overset{b}{9} \cdot 1 + \overset{c}{2}$

$\overset{a}{9} = \overset{b}{2} \cdot 4 + \overset{c}{1}$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$.

$1 = 9 - 2 \cdot 4$

$= 9 - (11 - 9) \cdot 4$

$= 9 - (11 \cdot 4 - 9 \cdot 4)$

$= 9 + 9 \cdot 4 - 11 \cdot 4$

$= 9 \cdot 5 - 11 \cdot 4$

$= (141 - 11 \cdot 12) \cdot 5 - 11 \cdot 4$

$= -11 \cdot (12 \cdot 5 + 4) + 141 \cdot 5$

$= -11 \cdot 64 + 141 \cdot 5$

$\Rightarrow -64 + 141\mathbb{Z} = (11 + 141\mathbb{Z})^{-1}$ bzw

NR:
$141 \cdot 5 - 11 \cdot 12 \cdot 5 - 11 \cdot 4$
$= -11(60+4) + 141 \cdot 5$
$= -11 \cdot 64 + 141 \times 5$
$\Rightarrow -64 + 141\mathbb{Z}$

$141 - 64 = 77$; Probe: $11 \cdot 77 = 847 \equiv 1$ mod 141

$847 \div 141 = 6$ Rest 1.

(a) ZZ: U ist ein UVR des $\mathbb{R}^n$ ist:

Bw: (1) Da $0 \in U$, ist $U \neq \emptyset$

(2) Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y \in \mathbb{R}^n$, $\in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig

Dann ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in U$

und $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \in U$

Somit ist U abgeschlossen bzg Addition und Skalarmultiplikation, also ein Vektorraum.

ZZ: $\dim U = n-1$.
$\Leftrightarrow$ ZZ: es gibt $n-1$ linear unabhängige Vektoren in U.

BW: Betrachte die folgenden $n-1$ Vektoren:

$X_1 = (1, -1, 0, 0, \ldots, 0)$
$X_2 = (1, 0, -1, 0, \ldots, 0)$
...
$X_{n-1} = (1, 0, 0, \ldots, -1)$

Da $x_1 + \cdots + x_{n-1} = 0$, (a) Bewiesen, alle Vektoren in U liegen

Nun nehmen wir an: $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_{n-1} = 0$

(1) Für die erste Komponente: $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = 0$

(2) Für zweite Komponente: $-a_1 = 0$, $\rightarrow a_1 = 0$

(3) Für dritte: $-a_2 = 0$, $\rightarrow a_2 = 0$.

(4) Für n-te Komponente: $-a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_{n-1} = 0$

Da alle $a_i = 0$, sind die Vektoren $x_1, \cdots x_{n-1}$ linear unabhängig.

Somit habe wir gezeigt, $\dim U = n-1$.