Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Dr. E.A. v. Hammerstein / Saskia Glaffig, M.Sc.

WiSe 2022/23

Nachklausur zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Informatik“ aus dem SS 2022

9. März 2023, 10:00 Uhr – 13:00 Uhr

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Unterschrift: ______________________

Formales

- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 180 Minuten.
- Für die Klausur ist als Hilfsmittel nur das von Ihnen handschriftlich erstellte Notizblatt im DIN A4-Format zugelassen. Insbesondere sind Bücher und technische Geräte nicht erlaubt und dürfen nicht auf den Tischen liegen. Jeder Täuschungsversuch wird mit der Note „nicht bestanden“ (5,0) geahndet.
- **Notieren und begründen Sie alle (Rechen)Wege zu Ihren Lösungen**, für das korrekte Endergebnis allein gibt es nicht die volle Punktzahl! Die Rechenwege und Beweisschritte müssen nachvollziehbar sein, insbesondere wenn Sie in der Vorlesung nicht behandelte Verfahren anwenden.
- Verwenden Sie dazu bitte Kugel- oder Tintenschreiber, aber **keinen Bleistift!** Alles mit Bleistift Geschriebene kann nicht korrigiert und gewertet werden, unabhängig davon, ob es richtig ist oder falsch sein sollte!
- Jede Aufgabe ist auf dem dafür vorgesehenen Blatt zu bearbeiten. Sollten Vorder- und Rückseite des Blattes für die Lösung nicht ausreichen, so verwenden Sie die leeren Blätter am Ende der Klausur und **vermerken Sie deutlich**, zu welcher Aufgabe das jeweilige Blatt gehört.
- Jedes Blatt, das in die Bewertung eingehen soll, ist mit Ihrem Namen zu versehen.

PRÜFUNGSFÄHIGKEIT
Durch den Antritt dieser Prüfung erklären Sie sich für prüfungsfähig. Ein Rücktritt ist dann nur noch gemäß den Bestimmungen §23 Absatz (2) und (2a) der Rahmenprüfungsordnung B.Sc. möglich.

1	2	3	4	5	6	7	Bonus	$\sum$
(10)	(11)	(8)	(8)	(12)	(7)	(14)	(13)	(70+13)

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (je 0.5 Punkte für die richtige Antwort und 1.5 Punkte für die korrekte Begründung)

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten (gegebenenfalls durch ein Gegenbeispiel)!

a) Für jede Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ gilt: $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$, wenn λ ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}^\top$ ist.

b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt $8^{n+2} \equiv 8^n \bmod 6$.

c) Die Gruppe $(\mathbb{Z}_{60}, +, 0)$ hat genau 10 verschiedene Untergruppen.

d) Es gibt eine natürliche Zahl $m > 4$, so dass das additive Inverse von 4 zugleich multiplikativ Inverses von 4 in $\mathbb{Z}_m$ ist, d. h. es gilt $(-4) = 4^{-1}$ in $\mathbb{Z}_m$ für ein passendes $m > 4$.

e) Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Eine konkave $\mathcal{C}^1$-Funktion $f : S \to \mathbb{R}$, die zwei stationäre Punkte $\boldsymbol{x_1} \neq \boldsymbol{x_2} \in \mathbb{R}^n$ besitzt, ist nicht strikt konkav.

a) Richtig. Da die det(A) durch ihre Transponierung unverändert bleibt, haben A und A^T dasselbe charakteristische Polynom. Das bedeut, dass sie dieselben Eigenwerte haben. Dem Satz 2.101 v) für die Determinante $\det : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \to K$ gilt $\det A^T = \det A$. Somit haben wir gezeigt, $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn λ ein Eigenwert von A^T ist

b) Richtig.

$8^n \cdot 8^2 \equiv 8^n \bmod 6$, $8^2 \bmod 6 \equiv 4 \Rightarrow 8^n \cdot 4 \equiv 8^n \bmod 6$. Für $n=1$, $8^1 \cdot 4 \equiv 8^1 \bmod 6$ $\equiv 2$

Da immer Potenz von 8 entsteht, ändert sich das Ergebnis nicht. Für $n=2$, $\underbrace{8^2 \cdot 4}_{\equiv 4} \equiv \underbrace{8^2 \bmod 6}_{\equiv 4}$ ✓

$16 \bmod 6 \equiv 4$ ✓

c) Falsch. Die Anzahl der Untergruppe einer zyklischen Gruppe der Ordnung n genau der Anzahl der positiven Teiler von n entspricht. Die Gruppe $(\mathbb{Z}_{60}, +, 0)$ ist eine zyklische Gruppe von Ordnung 60. Es gibt 12 positive Teiler von n:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Also Die Gruppe $(\mathbb{Z}_{60}, +, 0)$ hat 12 verschiedene Untergruppe.

d) richtig. $m=17$. Das additive Inverse von 4 in $\mathbb{Z}_m$ ist $m-4$. Wenn $m-4$ auch das multiplikativ Inverses von 4 in $\mathbb{Z}_m$ ist, dann gilt $4 \cdot (m-4) \equiv 1 \bmod m$, $m=17$.

Name: ....

Aufgabe 2 (3+6.5+1.5 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

und die zugehörige lineare Abbildung $\phi_{\boldsymbol{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$.

a) Begründen Sie zunächst, ohne die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ genau zu berechnen, warum $\lambda_1 = 0$ ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ sein muss.

b) Berechnen Sie nun alle Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ und zeigen Sie, dass $\boldsymbol{A}$ nicht diagonalisierbar ist.

c) Geben Sie eine Basis des Bildes von $\phi_{\boldsymbol{A}}$ explizit an.

a) Zeilenstufenform bring

$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+③} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, da die dritte Zeile verschwindet wird, und keine diagonalgestalt hat, ist die Matrix nicht invertierbar. Somit hat det = 0 und eigenwert $\lambda_1 = 0$.

b) Regeln von Sarrus verwenden, um Eigenwerte zu berechnen.

$\det(A) = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 10 & 7 \\ 0 & -3-\lambda & -3 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 5-\lambda & 10 \\ 0 & -3-\lambda \\ 0 & 3 \end{matrix} = (5-\lambda)(-3-\lambda)(3-\lambda) + 9(5-\lambda) = (5-\lambda)((-3-\lambda)(3-\lambda)+9) =$

$(5-\lambda)(-(3+\lambda)(3-\lambda)+9) = (5-\lambda)(-9+\lambda^2+9) = (5-\lambda)\cdot\lambda^2$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5$

zZ: A ist nicht diagonalisierbar.

Bew: Das Problem liegt beim Eigenwert 0 hat die algebraische Vielfachheit 2, aber dim Eig(A,0) = 1. Beim Eigenwert 5 hat die algebraische Vielfachheit 1 aber dim Eig(A,5) = 1, somit erfüllt die Bedingung für Diagonalisierbarkeit nicht. Beweis wie folgendes:

$\lambda_1 = 0$: $5v_1 + 10v_2 + 7v_3 = 0$, $5v_1 + 10\cdot(-v_3) + 7v_3 = 0$, $5v_1 - 3v_3 = 0$. $5v_1 = 3v_3$, $v_1 = \frac{3}{5}v_3$

$-3v_2 - 3v_3 = 0$, $v_2 = -v_3$, $\Rightarrow$ $\mathrm{Eig}(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot v_3 \mid v_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

$3v_2 + 3v_3 = 0$

$\Rightarrow$ somit dim Eig(A,0) = 1, aber die algebraische Vielfachheit der Eigenwert 0 hat 2.

$\lambda_2 = 5$: $5v_1 + 10v_2 + 7v_3 = 5v_1$ $\quad 10\cdot\frac{2}{3}v_3 + 7v_3 = 0$, $v_3 = 0$

$-3v_2 - 3v_3 = 5v_2$

$3v_2 + 3v_3 = 5v_3$ $\quad 3v_2 = 2v_3$

$v_2 = \frac{2}{3}v_3$, $v_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Daher ist $\mathrm{Eig}(A,5) = \{(v_1, 0), (v_3, 0) \mid v_1, v_3 \in \mathbb{R}\}$?v_1

$\Rightarrow$ somit dim Eig(A,5) = 1, der Eigenwert 5 hat die algebraische Vielfachheit 1.

c) Bei Wahl von $v_3 = 1$, ($\lambda_1 = 0$) ergibt sich beispielweise die Basis $B = (b_1)$ aus den Eigenvektoren $b_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

? Da $\mathrm{Eig}(A,5) = \{(v_1, 0) \mid v_1 \in \mathbb{R}\}$, somit existiert keine Basis von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A.

4

S.173.

Name: ....

Aufgabe 3 (5.5+2.5 Punkte)

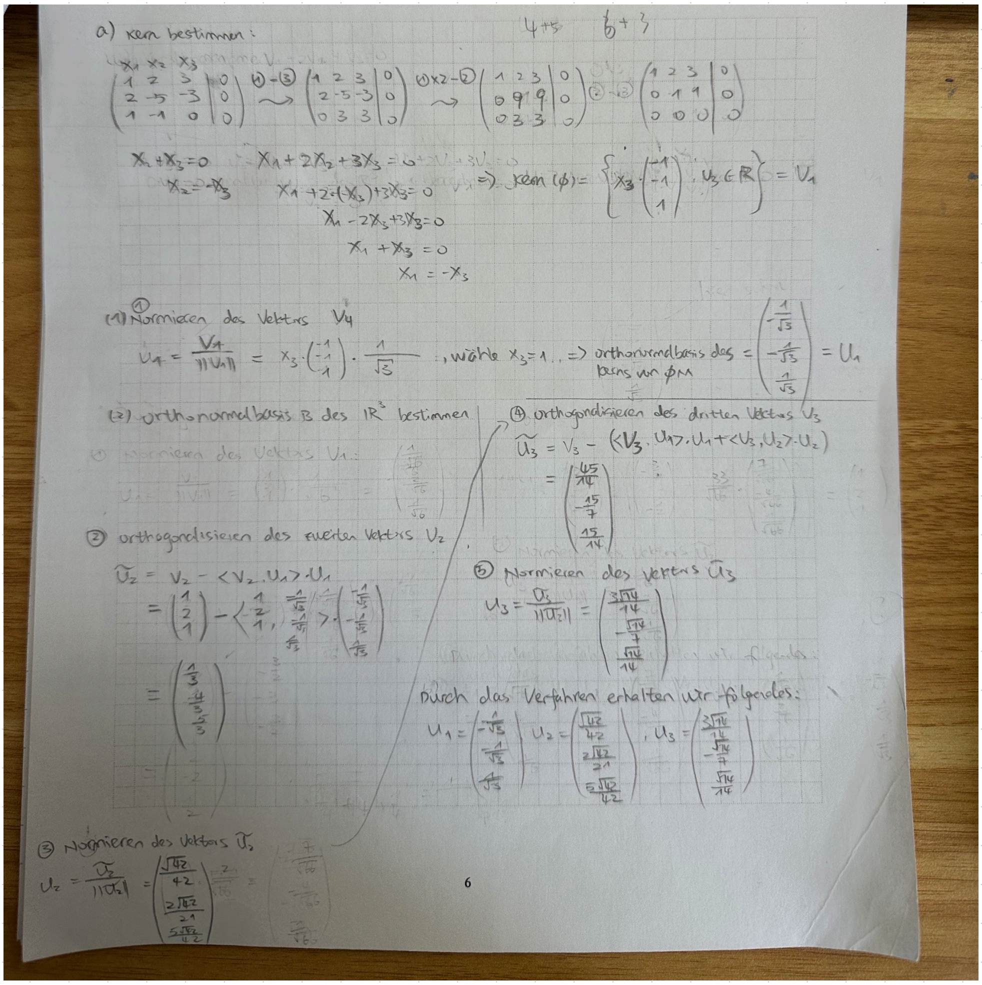
Betrachten Sie die Matrix

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

und die lineare Abbildung $\phi_{\boldsymbol{M}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{x}$.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Kerns von $\phi_{\boldsymbol{M}}$ und ergänzen Sie diese zu einer Orthonormalbasis B des $\mathbb{R}^3$.

b) Berechnen Sie die beiden Basiswechselmatrizen ${}_{B}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}{}_{E_3}$ und ${}_{E_3}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}{}_{B}$ zwischen der Standardbasis $E_3 = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ des $\mathbb{R}^3$ und der in a) berechneten Orthonormalbasis B.



a) Kern bestimmen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1-3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1\times 2-2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2-3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_2 + x_3 = 0$
$x_2 = -x_3$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$
$x_1 + 2\cdot(-x_3) + 3x_3 = 0$
$x_1 - 2x_3 + 3x_3 = 0$
$x_1 + x_3 = 0$
$x_1 = -x_3$

$\Rightarrow \text{Kern}(\phi) = \left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = V_1$

(1) Normieren des Vektors V_1

$U_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$, wähle $x_3 = 1$. $\Rightarrow$ Orthonormalbasis des Kerns von ϕ_M $= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = U_1$

(2) Orthonormalbasis B des $\mathbb{R}^3$ bestimmen

2. Orthogonalisieren des zweiten Vektors V_2

$\tilde{U}_2 = V_2 - \langle V_2, U_1 \rangle \cdot U_1$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

3. Normieren des Vektors $\tilde{U}_2$

$U_2 = \frac{\tilde{U}_2}{\|\tilde{U}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{42}}{42} \\ \frac{2\sqrt{42}}{21} \\ \frac{5\sqrt{42}}{42} \end{pmatrix}$

4. Orthogonalisieren des dritten Vektors V_3

$\tilde{U}_3 = V_3 - (\langle V_3, U_1 \rangle \cdot U_1 + \langle V_3, U_2 \rangle \cdot U_2)$

$= \begin{pmatrix} \frac{45}{14} \\ -\frac{15}{7} \\ \frac{15}{14} \end{pmatrix}$

5. Normieren des Vektors $\tilde{U}_3$

$U_3 = \frac{\tilde{U}_3}{\|\tilde{U}_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{14}}{14} \\ -\frac{\sqrt{14}}{7} \\ \frac{\sqrt{14}}{14} \end{pmatrix}$

Durch das Verfahren erhalten wir folgendes:

$U_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{42}}{42} \\ \frac{2\sqrt{42}}{21} \\ \frac{5\sqrt{42}}{42} \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{14}}{14} \\ -\frac{\sqrt{14}}{7} \\ \frac{\sqrt{14}}{14} \end{pmatrix}$

Name: ....

A3

b) die Basiswechseln bestimmen ${}_{B}id_{\mathbb{R}^3 E_3}$ und ${}_{E_3}id_{\mathbb{R}^3 B}$, $E_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$

$${}_{B}id_{\mathbb{R}^3 E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left({}_{B}id_{\mathbb{R}^3 E_3}\right)^{-1} = {}_{E_3}id_{\mathbb{R}^3 B} = \begin{pmatrix} \frac{22\sqrt{3}}{3} & \frac{28\sqrt{3}}{-3} & \frac{32\sqrt{3}}{3} \\ \frac{21}{\sqrt{42}} & \frac{42}{\sqrt{42}} & -\frac{21}{\sqrt{42}} \\ \frac{7}{3\sqrt{14}} & -\frac{28}{3\sqrt{14}} & \frac{35}{3\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{42}}{42} & \frac{3\sqrt{14}}{-14} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{42}}{21} & \frac{\sqrt{14}}{-7} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5\sqrt{42}}{42} & \frac{\sqrt{14}}{14} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} ①+② \\ ①-③ \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{42}}{42} & \frac{3\sqrt{14}}{14} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5\sqrt{42}}{42} & \frac{\sqrt{14}}{14} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-4\sqrt{42}}{42} & \frac{2\sqrt{14}}{14} & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} ③+①\cdot 4 \\ ②\times 4-③\times 5 \\ ③\times 2+3\cdot ② \\ ③+①\cdot\frac{-6}{14} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{3}{-7\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\frac{22}{7} & 4 & -\frac{32}{7} \\ 0 & \frac{10\sqrt{42}}{21} & 0 & 10 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{14}}{-7} & -1 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} ①\cdot\frac{7\sqrt{3}}{-3} \\ ②\cdot\frac{21}{10\sqrt{42}} \\ ③\cdot -\frac{7}{3\sqrt{14}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{22\sqrt{3}}{3} & \frac{28\sqrt{3}}{-3} & \frac{32\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{21}{\sqrt{42}} & \frac{42}{\sqrt{42}} & -\frac{21}{\sqrt{42}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3\sqrt{14}} & -\frac{28}{3\sqrt{14}} & \frac{35}{3\sqrt{14}} \end{array}\right)$$

Aufgabe 4 (2+4.5+1.5 Punkte)

a) Seien $\boldsymbol{G}$ eine Erzeugermatrix für einen q-ären linearen $[n, k]$-Code und $\boldsymbol{H}$ eine zu $\boldsymbol{G}$ passende Prüfmatrix. Die Matrix $\boldsymbol{G'}$ entstehe aus $\boldsymbol{G}$ durch das Vertauschen von Spalten und $\boldsymbol{H'}$ aus $\boldsymbol{H}$ durch das Vertauschen derselben Spalten wie bei $\boldsymbol{G}$ bzw. $\boldsymbol{G'}$. Begründen Sie, dass $\boldsymbol{H'}$ eine zu $\boldsymbol{G'}$ passende Prüfmatrix ist.

Bemerkung: $\boldsymbol{G'}$ erzeugt einen zu $\boldsymbol{G}$ äquivalenten Code.

b) Ein 5-ärer linearer $[7, 4]$-Code C (d. h. $C \subset (\mathbb{F}_5)^7$) habe die Prüfmatrix

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine zu $\boldsymbol{H}$ passende Erzeugermatrix $\boldsymbol{G}$ für C.

Hinweis: Verwenden Sie Teil a), um eine passende Erzeugermatrix zu finden.

c) Bestimmen Sie den Minimalabstand des in b) betrachteten Codes C. Wie viele Fehler korrigiert C?

b) $1 \to 5,\ 4 \to 7,\ 5 \to 1,\ 7 \to 4.$

| Nr: $G = (I_k | A)$

$H = (-A^T | I_{n-k})$

$7-4=3$

$$H' = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$G' = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Um G zu bekommen, werden die Spalten zurückgetauscht.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $(1, 2, 3, 0, 4, 0, 0)$ hat den Abstand zu $\overset{*}{(}0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

$d = 4$, $c = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor = 1$. Fehler.

Name: ....

Aufgabe 5 (5+7 Punkte)

a) Berechnen Sie ggT(1092, 268) mit Hilfe des euklidischen Algorithmus und bestimmen Sie Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ so, dass gilt ggT$(1092, 268) = m \cdot 1092 + n \cdot 268$.

b) Berechnen Sie 3^{2891} mod 15 mittels schneller Exponentiation modulo 15.

ggT(1092, 268)

a) $1092 = 268 \cdot 4 + 20$

$268 = 20 \cdot 13 + 8$

$20 = 8 \cdot 2 + 4$

$8 = 4 \cdot 2 + 0$

$4 = 20 - 8 \cdot 2$

$= 20 - (268 - 20 \cdot 13) \cdot 2$

$= 20 - (268 \cdot 2 - 20 \cdot 26))$

$= 20 + 20 \times 26 - 268 \times 2$

$= 20 \times 27 - 268 \cdot 2$

$= (1092 - 268 \cdot 4) \times 27 - 268 \times 2$

$= 1092 \times 27 - 268(4 \times 27 - 2)$

$= 1092 \times 27 - 268 \times 106$

Nr:
$1092 \times 27 - 268 \times 4 \times 27 - 268 \times 2$

$27 \times 4 = 108$
$108 - 2 = 106$

$\Rightarrow$ ggT$(1092, 268) = 27 \cdot 1092 + (-106) \times 268 = 4$

Somit $m = 27$, $n = -106$

b)

	Rest
2891 : 2 = 1445	1
1445 : 2 = 722	1
722 : 2 = 361	0
361 : 2 = 180	1
180 : 2 = 90	0
90 : 2 = 45	0
45 : 2 = 22	1
22 : 2 = 11	0
11 : 2 = 5	1
5 : 2 = 2	1
2 : 2 = 1	0
1 : 2 = 0	1

1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1
21 9 6 21 9 6 21 9 6 21 9 3

6已经[illegible],不再写6一次.

$3^2 = 9 \equiv 9 \mod 15$

$9^2 = 81 \equiv 21 \mod 15$

$21^2 = 441 \equiv 6 \mod 15$

$6^2 = 36 \equiv 6 \mod 15$

$3^{2891} \mod 15 \equiv \underbrace{21^2}_{\equiv 6} \cdot \underbrace{6^2}_{\equiv 6} \cdot 6 \cdot 9 \cdot 3 \mod 15$, $\equiv 6$, $\equiv 6$

$\equiv 6 \cdot 9 \cdot 3 \mod 15$

$= 162 \mod 15$

$\equiv 12$

Name: ....

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Zeigen Sie, dass f innerhalb eines Kreises $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r\}$ konkav ist, wobei $r \in (0, \infty)$ der größtmögliche „Konkavitätsradius“ ist, und bestimmen Sie r explizit.

Hinweis: Mit dem Hurwitz-Kriterium kann man auch Semidefinitheit überprüfen, wenn man die dortigen strikten Ungleichungen durch $\leq$ bzw. $\geq$ ersetzt.

BW: Nehmen wir nun an, dass f konkav ist. Dann ist Hess $f(x)$ negativ semidefinit, $\forall x \in S$, wenn wir zeigen können, dass die quadratische Form $q(h) := \langle h, \text{Hess} f(x,y) \cdot h \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x_i \partial y_j} h_i h_j \leq 0$ ist, $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

sei $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig,

Setze $g(t) := f(x + th)$ für $t \in (-c, c)$, dann gilt für $t_1, t_2 \in (-c, c)$ und $\lambda \in [0,1]$

$g(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) = f(x + (\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) h) = f(\lambda(x + t_1 h) + (1-\lambda)(x + t_2 h)) \geq$
$\lambda f(x + t_1 h) + (1-\lambda) f(x + t_2 h) = \lambda g(t_1) + (1-\lambda) g(t_2)$

Wegen der Konkavität von f, ist auch g konkav und somit $g''(t) \leq 0$

$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x+th)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$, mit $t = 0$ erhält man $0 \geq g''(0) = q(h)$

$\square$

Hess $f(x)$ bilden:

$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2-y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-y^2} \cdot (-2x) = -2x e^{-x^2-y^2}$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = -2e^{-x^2-y^2} + (-2x e^{-x^2-y^2} \cdot (-2x))$
$= -2e^{-x^2-y^2} + 4x^2 e^{-x^2-y^2}$
$= (4x^2 - 2) e^{-x^2-y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) = -2y e^{-x^2-y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = -2 e^{-x^2-y^2} + (-2y) \cdot e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y)$, $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y) = 4xy e^{-x^2-y^2}$
$= -2e^{-x^2-y^2} + 4y^2 \cdot e^{-x^2-y^2}$
$= (4y^2 - 2) e^{-x^2-y^2}$

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} (4x^2-2)e^{-x^2-y^2} & 4xy e^{-x^2-y^2} \\ 4xy e^{-x^2-y^2} & (4y^2-2)e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

Name: ....

Aufgabe 7 (9+2.5+2.5 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - x.$$

a) Bestimmen Sie zunächst alle stationären Punkte von f und untersuchen Sie dann, ob es sich jeweils um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1, -3)$ in Richtung des Vektors, der vom Punkt $(2, 5)$ zum Punkt $(3, 2)$ zeigt.

Hinweis: Beachten Sie, dass bei der Richtungsableitung für den Richtungsvektor $\boldsymbol{v}$ gelten muss $\|\boldsymbol{v}\| = 1$.

c) Sei $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 = f(x, y) + x$. Bestimmen Sie den stationären Punkt von $\tilde{f}$ und ferner, ob es sich um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

Hinweis: Hier helfen die zweiten partiellen Ableitungen nicht wirklich weiter; man muss etwas überlegen und anders argumentieren.

a)

WS Klausur 2023 A7

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - x = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - x$

a) (1) Gradienten bilden, Null einsetzen und LGS lösen.

$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2 - 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 & ① \\ 2xy = 0 & ② \end{cases} \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$

Fall 1: für $x = 0$ setzt in ①:

$y^2 = 1$, $y_1 = 1$ oder $y_2 = -1$ $\Rightarrow (0,1)$ und $(0,-1)$

Fall 2: für $y = 0$, setzt in ①:

$x^2 = 1$, $x_1 = 1$ oder $x_2 = -1$ $\Rightarrow (1,0)$ und $(-1,0)$

Somit sind die stationäre Punkte $(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$

(2) Hesse Matrix zu bestimmen

$\text{Hess} f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$

$\Rightarrow \text{Hess} f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{Hess} f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{Hess} f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\text{Hess} f(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(3) die Definitheit der Hesse-Matrix bestimmen

Bei Hess $f(0,1)$ mit Hauptminore 0 und $\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4$

Somit ist die Hesse Matrix negativ semidefinit. Es liegt ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vor. Es ist nicht eindeutig bestimmt.

Der Wert = 0

Bei der Hess $f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ mit Hauptminore 0 und $\det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -4$ auch negativ Semidefinit ist. Es könnte ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegen. Der Wert = 0

Bei der Hess $f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit $\Delta_1 = 2$ und $\Delta_2 = 4$.

Somit ist die Hess-Matrix positiv definit. Es liegt ein lokales Minimum.

Der Wert $= -\frac{1}{3} \times 1^3 + 1 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$

Bei der Hess $f(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ mit $\Delta_1 = -2$, $\Delta_2 = 4$

Somit ist die Hesse-Matrix indefinit. Da det $\neq 0$ ist, liegt es ein Sattelpunkt vor:

b)

b) gesucht: Richtungsableitung im Pkt $(1,-3)$ bestimmen

$f'_v(x,y) = \langle \nabla f(x,y), v \rangle$

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ 2xy \end{pmatrix}$, $\nabla f(1,-3) = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$

(1) bestimmen des Vektors AB

$\vec{v} = \frac{1}{|r|} \cdot |r|$

$\vec{AB} = OB - OA = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(2) Vektor normieren. Wir berechnen die Länge des Vektors $\vec{AB}$, um zu prüfen, ob es 1 hat.

$|\vec{AB}| = \sqrt{1 + (-3)^2} = \sqrt{10}$, Weil der Vektor nicht die Länge 1 hat, müssen wir ihn normieren. Das geschieht, indem wir jeden Eintrag durch die Länge $\sqrt{10}$ teilen

$v = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$, $f'_v(x,y) = \left\langle \nabla f(1,-3), \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \right\rangle$

$= \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \frac{27}{\sqrt{10}}$

c)

(c) Gesucht: Stationäre Pukt von $\tilde{f}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 = \frac{1}{3}x^3 + xy^2$

(1) Gradient bild, Null einsetzen und LGS lösen

$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Fall 1 für $x = 0$, $y = 0$

Fall 2 für $y = 0$, $x = 0$,

Somit ist $(0,0)$ der einzige stationäre Punkt

(2) Hesse Mat berechnen

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$

$\text{Hess} f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$

$\text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\Delta_1 = 0$. $\Delta_2 = 0$.

Da det A_{11} = det $A_{22} = 0$ somit liegt es keine Sattelpunkt vor, auch kein lokales Maximum oder Minimum. Die Hesse Matrix $f(0,0)$ ist weder positiv noch negativ definit ?

Name: ....

Bonusaufgabe (4+3+6 Punkte)

a) Seien $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, $\boldsymbol{u_0} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\phi(\boldsymbol{u_0}) \neq \mathbf{0}$, und U defniert durch

$$U := \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \phi(\boldsymbol{u}), \phi(\boldsymbol{u_0}) \rangle = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist, und bestimmen Sie die Dimension von U.

b) Berechnen Sie $2^{136} \bmod 17$ mit Hilfe des kleinen Satzes von Fermat.

c) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sei $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ die Euklidische Norm von $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, und die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\|\boldsymbol{x}\|^n}, & \text{falls } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \text{falls } \boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar, aber nicht stetig in $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ist.

HINWEIS: Betrachten Sie die partiellen Ableitungen für $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ getrennt.

b) ggT(2, 17) = 1

$\varphi(P) = P - 1 = 17 - 1 = 16.$

$8 \times 16 = 128$

$136 - 128 = 8$

$2^{136} = 2^{17} \cdot 2^{88} \bmod 17$

$= \underbrace{2^{16}}_{\text{Euler} \equiv 1} \cdot 2^8 \cdot 2 \bmod 17$

$\equiv \underbrace{2^8}_{\equiv 1} \cdot 2 \bmod 17$

$= 2$

ggT(2, 17)

$\varphi(P) = P - 1 = 16$

$16 \cdot \frac{1}{2} = 8$

a) ZZ: U ist ein Uvr von $\mathbb{R}^n$

BW: (1) da $0 \in U$ ist, ist $U \neq \emptyset$

(2) Sei $U_1, U_2 \in U$

$\langle \phi(U_1), \phi(U_0) \rangle = 0$, $\langle \phi(U_2), \phi(U_0) \rangle = 0$

Addieren wir nun die beide Vektoren:

$\phi(U_1) + \phi(U_2) = \phi(U_1 + U_2)$

$\langle \phi(U_1 + U_2), \phi(U_0) \rangle = \langle \phi(U_1), \phi(U_0) \rangle + \langle \phi(U_2), \phi(U_0) \rangle$

$= 0 + 0$

$= 0. \Rightarrow U_1 + U_2 \in U$

Nehmen wir nun einen Vektor u aus U und einen Skalar λ. Dann gilt:

$\langle \phi(U), \phi(U_0) \rangle = 0$

Multiplizieren wir den Vektor u mit λ:

$\phi(\lambda \cdot u) \Rightarrow \lambda \cdot \phi(u)$

Durch Linearität des Skalarprodukts:

$\langle \phi(\lambda u), \phi(U_0) \rangle = \lambda \underbrace{\langle \phi(u), \phi(U_0) \rangle}_{=0} = \lambda \cdot 0$

a) dim U bestimmen:

$\langle \varphi(u), \varphi(u_0) \rangle = 0$ heißt, dass das Bild von u unter φ orthogonal mit dem Bild von u_0 unter φ ist. Das bedeutet, dass der Bildraum von u in $(\varphi(U_0))^\perp$ des Bildraums von U_0 liegt.

$\text{Dim}(\varphi(U_0)^\perp) = m - 1$

Somit $\dim(U) \leq m - 1$

c) ZZ: $g \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ist partiell differenzierbar.

BW: (1) Partielle Ableitung berechnen:

$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{1 \cdot \|x\|^n - \prod_{i=1}^n x_i \cdot n\, x^{n-1}}{\|x\|^{2n}} = \frac{\|x\|^n - \prod_{i=1}^n x_i \cdot (n \cdot x^{n-1})}{\|x\|^{2n}}$ nicht sicher!

(2) Sei nun $e = (e_1, \ldots, e_n)$, $\|e\| = 1$ dann ist die Richtungsableitung in Pkt. $x = 0$ in Richtung e_j gegeben durch:

$g'_{e_j}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(0, \ldots, 0, 0 + h e_j, 0, \ldots, 0) - g(0)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\prod_{i=1}^n h_i}{\|h\|^n \cdot h} = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$?

Damit $g \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar.

ZZ: g nicht stetig in $x = 0$.

BW: wir wählen eine Folge $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$, $(k \geq 1, k \in \mathbb{N})$

$f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{\prod_{i=1}^n (\frac{1}{k})_i}{\|\frac{1}{k}\|^n} = \frac{1}{k^n} \cdot \|k\|^n \neq 0$, $(n \geq 1, n \in \mathbb{N})$

Daher nicht stetig in $x = 0$.

Name: ....