高代习题课答案(第一次)

1. (i) $f(x)=x^4-4x^3-1$, $g(x)=x^2-3x+2$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-4x^3+0+0-1 & x^2-3x+2 \\
\cline{2-2}
x^4-3x^3+2x^2 & x^2-x-5 \\
\hline
-x^3-2x^2+0-1 & \\
-x^3+3x^2-2x & \\
\cline{1-1}
-5x^2+2x-1 & \\
-5x^2+15x-10 & \\
\cline{1-1}
-13x+9 &
\end{array}
$$

商 $q(x)=x^2-x-5$ 余式 $=-13x+9$

(ii) $q(x)=x^2+2$ $r(x)=x^2+6x-5$

2、

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+0+0+px+q & x^2+mx+1 \\ \cline{2-2}
x^4+mx^3+x^2 & x^2-mx+(m^2-1) \\ \hline
\quad -mx^3-x^2+px+q & \\
\quad -mx^3-m^2x^2-mx & \\ \hline
\qquad (m^2-1)x^2+(m+p)x+q & \\
\qquad (m^2-1)x^2+m(m^2-1)x+m^2-1 & \\ \hline
\qquad\qquad [m+p-m(m^2-1)]x+(q-m^2+1) &
\end{array}
$$

由 $x^2+mx+1 \mid x^4+mx^3+x^2$

$\Longleftrightarrow \quad r(x)=[m+p-m(m^2-1)]x+(q-m^2+1)=0$

$m+p-m(m^2-1)=0$ 且 $q-m^2+1=0$

$p=m^3-2m \ , \ q=m^2-1$

3、计算 $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$ 与 $g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$ 的最大公因式.

解：使用辗转相除法，为避免分数系数，$f(x)\times 3$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4+9x^3-3x^2-12x-9 & 3x^3+10x^2+2x-3 \\
\cline{2-2}
3x^4+10x^3+2x^2-3x & x-1 \\
\cline{1-1}
-x^3-5x^2-9x &
\end{array}
$$

$(\times 3)$

$$
\begin{array}{r}
-3x^3-15x^2-27x-27 \\
-3x^3-10x^2-2x+3 \\
\hline
-5x^2-25x-30 = r_1(x)
\end{array}
$$

然后用 $r_1(x)$ 除 $g(x)$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3+10x^2+2x-3 & x^2+5x+6 \\
\cline{2-2}
3x^3+15x^2+18x & 3x-5 \\
\cline{1-1}
-5x^2-16x-3 & \\
-5x^2-25x-30 & \\
\cline{1-1}
9x+27 = r_2(x) &
\end{array}
$$

$x^2+5x+6=(x+2)(x-3)$ $r_1(x)$ 被 $r_2(x)$ 整除

$(f(x), g(x))=x+3$

5、使用辗转相除法 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$

$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$

$f(x)=g(x)\cdot 1+(x^3-2x)$

$g(x)=(x^3-2x)(x+1)+(x^2-2)$

$x^3-2x=(x^2-2)\cdot x$

由此知 x^2-2 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式

$x^2-2=g(x)-(x^3-2x)(x+1)$

$=g(x)-[f(x)-g(x)\cdot 1](x+1)$

$=f(x)[-(x+1)]+g(x)(x+2)$

$\therefore\ u(x)=-(x+1)\qquad v(x)=x+2$

5. 解 $f(x)=2x^3-x^2+3x-5$

$$=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$$

$$=\{[a(x-2)+b](x-2)+c\}(x-2)+d$$

以 $x-2$ 除 $f(x)$ 得 $d=13$

以 $x-2$ 除商 q_1 得 $c=23$

以 $x-2$ 除第二次商 $q_2(x)$ 得 $b=11$　$a=2$

6. 证明

充分性 设 $f(x)=a(x-b)^n$ ∴ $f'(x)=an(x-b)^{n-1}$

∴ $f'(x) \mid f(x)$

必要性 对 $f(x)$ 作典型分解

$$f(x)=aP_1^{m_1}(x)P_2^{m_2}(x)\cdots P_t^{m_t}(x)$$

其中 $P_i(x)$ 都是不可约因式，则

$$f'(x)=P_1^{m_1-1}(x)P_2^{m_2-1}(x)\cdots P_t^{m_t-1}(x)\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ 与 $P_i(x)$ 互素 $(i=1,\cdots t)$ 由 $f'(x) \mid f(x)$

有 $\varphi(x)=C$ 但 $\deg(f(x))=\deg(f'(x))+1$，∴ $t=1$，$m_1=n$

即 $f(x)=a(x-b)^n$

7. 因 $f'(x)=1+x+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$$f(x)=f'(x)+\frac{x^n}{n!}$$

设 $h(x)\mid f(x)$ 且 $h(x)\mid f'(x)$，则

$$h(x)\mid (f(x)-f'(x))$$

即 $h(x)\mid \dfrac{x^n}{n!}$

故 $h(x)=cx^k\ (c\neq 0,\ k=0,1,2,\cdots n)$

显然 $cx^k\ (1\leq 1\leq n)$ 都不是 $f(x)$ 的因式.

只能 $k=0$，于是 $(f(x),f'(x))=1$

8、设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$ $\quad g_1(x)=cf(x)+dg(x)$

$$d(x)=(f(x),g(x))$$

$\because$ $d(x)\mid f(x)$， $d(x)\mid g(x)$

$\therefore$ $d(x)\mid f_1(x)$， $d(x)\mid g_1(x)$

即 $d(x)$ 是 $f_1(x)$，$g_1(x)$ 的一个公因式

再设 $\varphi(x)$ 是 $f_1(x)$，$g_1(x)$ 的任一公因式. 则

$$\varphi(x)\mid f_1(x)，\ \varphi(x)\mid g_1(x)$$

再由 $\begin{cases} f_1(x)=af(x)+bg(x) \\ g_1(x)=cf(x)+dg(x) \end{cases}$ $\quad ad-bc\neq 0$

$$\Rightarrow \quad f(x)=\frac{d}{ad-bc}f_1(x)-\frac{b}{ad-bc}g_1(x)$$

$$g(x)=\frac{-c}{ad-bc}f_1(x)+\frac{a}{ad-bc}g_1(x)$$

可知 $\varphi(x)\mid f(x)$， $\varphi(x)\mid g(x)$

即 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个公因式

$\therefore$ $\varphi(x)\mid d(x)$ $\quad\therefore$ $d(x)=(f_1(x),g_1(x))$

9. $f(x)=x^3+x+1 \quad g(x)=x^2+x+1$

证明：经计算

$$3=(1+(x-1)^2)g(x)+(1-x)f(x)$$

$\therefore$ $g(x)$ 与 $f(x)$ 互素

令 $u(x)=\frac{1}{3}(1-x) \quad v(x)=\frac{1}{3}(1+(x-1)^2)$

即 $u(x)f(x)+g(x)v(x)=1$

代入 $x=A$

$$u(A)f(A)+g(A)v(A)=I$$

而 $f(A)=0$

可知 $g(A)v(A)=I$

从而 $g(A)$ 可逆 且 $g(A)^{-1}=v(A)$

$v(x)=x^2-2x+2 \quad v(A)=A^2-2A+2I$.

10. 证明：令 $J=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

由白皮书例2.1（或自己证明）可知

$$J^k=\begin{bmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{bmatrix} \quad (1\leq k\leq n)$$

令 $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}$

令 $g(x)=x^n-1$　由白皮书2.56知

$1=(f(x),g(x))$　则有在 $u(x)$、$v(x)$

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

$$f(J)u(J)+g(J)v(J)=I$$

而 $g(J)=0$

$\therefore f(J)u(J)=I$

$f(J)=A$　$\underline{A^{-1}=u(J)}$

$\therefore A^{-1}$ 是循环矩阵.