Examen partiel – 12 Novembre 2019

Durée 1h30

Téléphones, calculettes et ordinateurs interdits. Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la déduction naturelle. Inscrire votre nom et votre numéro de groupe de TD sur votre copie **et** sur le QCM à rendre.

Exercice 1 (7 points) $\boxed{\text{QCM à rendre avec votre copie}}$

Nom : **Prénom :** **Numéro de groupe :**

Pour chaque question, cocher toutes les réponses correctes. Un quart de point est attribué pour chaque réponse correcte et pour chaque réponse fausse un quart de point est retiré.

A partir des symboles s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 et s_7 on définit la formule $F_1 = s_1(s_2, s_3(s_4(s_5), s_6)) \Rightarrow s_7$ de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

1. s_1 peut être un élément de l'ensemble :
   ☐ X ☐ $\mathcal{F}_0$ ☐ $\mathcal{F}_1$ ☐ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☐ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☐ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☐ $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
2. s_2 peut être un élément de l'ensemble :
   ☐ X ☐ $\mathcal{F}_0$ ☐ $\mathcal{F}_1$ ☐ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☐ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☐ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☐ $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
3. s_3 peut être un élément de l'ensemble :
   ☐ X ☐ $\mathcal{F}_0$ ☐ $\mathcal{F}_1$ ☐ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☐ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☐ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☐ $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
4. s_4 peut être un élément de l'ensemble :
   ☐ X ☐ $\mathcal{F}_0$ ☐ $\mathcal{F}_1$ ☐ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☐ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☐ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☐ $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
5. s_5 peut être un élément de l'ensemble :
   ☐ X ☐ $\mathcal{F}_0$ ☐ $\mathcal{F}_1$ ☐ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☐ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☐ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☐ $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
6. s_6 peut être un élément de l'ensemble :
   ☐ X ☐ $\mathcal{F}_0$ ☐ $\mathcal{F}_1$ ☐ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☐ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☐ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☐ $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
7. s_7 peut être un élément de l'ensemble :
   ☐ X ☐ $\mathcal{F}_0$ ☐ $\mathcal{F}_1$ ☐ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☐ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☐ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☐ $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
8. cocher les termes qui apparaissent dans la formule F_1 :
   ☐ $s_1(s_2, s_3(s_4(s_5), s_6))$ ☐ s_2 ☐ $s_3(s_4(s_5), s_6)$ ☐ $s_4(s_5)$ ☐ s_5 ☐ s_6 ☐ s_7
9. cocher les formules atomiques qui apparaissent dans la formule F_1 :
   ☐ $s_1(s_2, s_3(s_4(s_5), s_6))$ ☐ s_2 ☐ $s_3(s_4(s_5), s_6)$ ☐ $s_4(s_5)$ ☐ s_5 ☐ s_6 ☐ s_7
10. $\forall s\ (s_1(s_2, s_3(s_4(s_5), s_6)) \Rightarrow s_7)$ peut être une formule de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ lorsque :
   ☐ $s = s_1$ ☐ $s = s_2$ ☐ $s = s_3$ ☐ $s = s_4$ ☐ $s = s_5$ ☐ $s = s_6$ ☐ $s = s_7$

On considère à présent la formule $F_2 = \exists y\ (((\forall y\, p(x, y)) \Rightarrow q(f(y))) \wedge \forall x\, p(x, z))$.

11. cocher les variables appartenant à $\mathrm{Free}(F_2)$: ☐ x ☐ y ☐ z
12. cocher les formules qui correspondent à une clôture universelle de F_2 :
   ☐ $\forall x\, \forall z\, \exists y\ (((\forall y\, p(x, y)) \Rightarrow q(f(y))) \wedge \forall x\, p(x, z))$ ☐ $\forall x\, \forall z\, \exists y\ (((\forall y\, p(x, y)) \Rightarrow \forall y\, q(f(y))) \wedge \forall x\, p(x, z))$
   ☐ $\forall z\, \exists y\ (((\forall y\, p(x, y)) \Rightarrow q(f(y))) \wedge \forall x\, p(x, z))$ ☐ $\forall z\, \forall x\, \exists y\ (((\forall y\, p(x, y)) \Rightarrow q(f(y))) \wedge \forall x\, p(x, z))$
13. cocher les formules ayant la même signification (i.e. logiquement équivalente) que F_2 :
   ☐ $\exists y\ (((\forall z\, p(x, z)) \Rightarrow q(f(y))) \wedge \forall x\, p(x, z))$ ☐ $\exists y\ ((\forall y\, p(z, y)) \Rightarrow q(f(y))) \wedge \forall x\, p(x, z))$
   ☐ $\exists y\ (((\forall y\, p(x, y)) \Rightarrow q(f(y))) \wedge \forall y\, p(y, z))$ ☐ $\exists x_1\ (((\forall x_2\, p(x, x_2)) \Rightarrow q(f(x_1))) \wedge \forall x_3\, p(x_3, z))$

Exercice 2 (8+12=20 points)
Avec les règles de la déduction naturelle prouver les deux formules ci-dessous (on pourra utiliser les règles dérivées du formulaire).

$$(B \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)) \qquad ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

Exercice 3 (1+2+5+2=10 points)

1. Soient F_1 et F_2 deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$. Donner la définition mathématique de $F_1 \models\!\mid F_2$.
2. Soit F la formule $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$.
   (a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I_M}(A)$ et $\mathbf{I_M}(B)$ (sans effectuer de simplification).
   (b) En utilisant un raisonnement équationnel, simplifier l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée). En déduire que $F \models\!\mid B \Rightarrow A$.
   (c) La formule F est-elle satisfiable ? est-elle valide ? (justifier)

Exercice 4 (1+2+(1+5)+(3+3)=15 points)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction avec $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{r, s\}$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \{a, b, r, s\}$.
2. Donner une définition inductive du nombre $\mathrm{nb}_a(t)$ d'occurrences du symbole a dans un terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
3. On définit une structure $\mathbf{M}_1$ dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs comme suit :

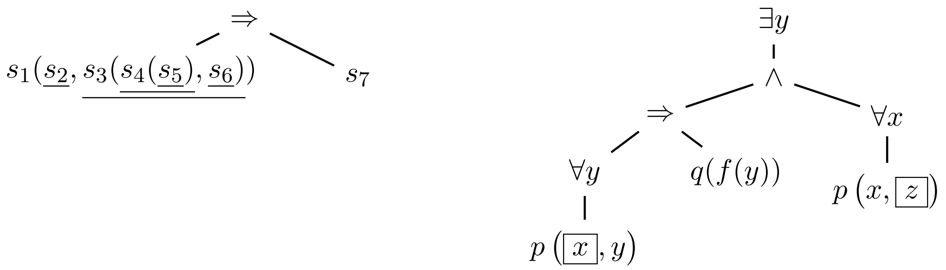
$$\begin{array}{lll} a^{\mathbf{M}_1} = 2 & r^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & s^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ b^{\mathbf{M}_1} = 0 & r^{\mathbf{M}_1}(n_1, n_2) = n_1 + n_2 & s^{\mathbf{M}_1}(n_1, n_2) = n_1 - n_2 \end{array}$$

   (a) Calculer $[s(s(b, a), r(a, b))]^{\mathbf{M}_1}$.
   (b) Montrer par induction que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe un entier $z \in \mathbb{Z}$ tel que $[t]^{\mathbf{M}_1} = 2 \times z$.
4. Soit p un symbole de prédicat d'arité 2 et F la formule $p(b, s(a, r(b, a))) \wedge p(s(b, b), a)$.
   (a) Définir une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 1$. (justifier)
   (b) Définir une structure $\mathbf{M}_3$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_3} = 0$. (justifier)

Corrigé de l'examen partiel du 12/11/2020

▶ Corrigé de l'exercice 1.

Les arbres de syntaxe abstraite des formules F_1 et F_2 sont (les occurrences de variable libre sont encadrées sur l'arbre représentant F_2, les autres occurrences sont liées) :



1. s_1 peut être un élément de l'ensemble :
   ☐ X ☐ $\mathcal{F}_0$ ☐ $\mathcal{F}_1$ ☐ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☐ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☒ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☐ $\mathbb{F}(X,\mathcal{F},\mathcal{P})$
2. s_2 peut être un élément de l'ensemble :
   ☒ X ☒ $\mathcal{F}_0$ ☐ $\mathcal{F}_1$ ☐ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☐ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☐ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☐ $\mathbb{F}(X,\mathcal{F},\mathcal{P})$
3. s_3 peut être un élément de l'ensemble :
   ☐ X ☐ $\mathcal{F}_0$ ☐ $\mathcal{F}_1$ ☒ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☐ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☐ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☐ $\mathbb{F}(X,\mathcal{F},\mathcal{P})$
4. s_4 peut être un élément de l'ensemble :
   ☐ X ☐ $\mathcal{F}_0$ ☒ $\mathcal{F}_1$ ☐ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☐ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☐ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☐ $\mathbb{F}(X,\mathcal{F},\mathcal{P})$
5. s_5 peut être un élément de l'ensemble :
   ☒ X ☒ $\mathcal{F}_0$ ☐ $\mathcal{F}_1$ ☐ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☐ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☐ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☐ $\mathbb{F}(X,\mathcal{F},\mathcal{P})$
6. s_6 peut être un élément de l'ensemble :
   ☒ X ☒ $\mathcal{F}_0$ ☐ $\mathcal{F}_1$ ☐ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☐ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☐ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☐ $\mathbb{F}(X,\mathcal{F},\mathcal{P})$
7. s_7 peut être un élément de l'ensemble :
   ☐ X ☐ $\mathcal{F}_0$ ☐ $\mathcal{F}_1$ ☐ $\mathcal{F}_2$ ☐ $\mathcal{F}_3$ ☒ $\mathcal{P}_0$ ☐ $\mathcal{P}_1$ ☐ $\mathcal{P}_2$ ☐ $\mathcal{P}_3$ ☒ $\mathbb{F}(X,\mathcal{F},\mathcal{P})$
8. cocher les termes qui apparaissent dans la formule F_1 :
   ☐ $s_1(s_2, s_3(s_4(s_5), s_6))$ ☒ s_2 ☒ $s_3(s_4(s_5), s_6)$ ☒ $s_4(s_5)$ ☒ s_5 ☒ s_6 ☐ s_7
9. cocher les formules atomiques qui apparaissent dans la formule F_1 :
   ☒ $s_1(s_2, s_3(s_4(s_5), s_6))$ ☐ s_2 ☐ $s_3(s_4(s_5), s_6)$ ☐ $s_4(s_5)$ ☐ s_5 ☐ s_6 ☒ s_7
10. $\forall s\ (s_1(s_2, s_3(s_4(s_5), s_6)) \Rightarrow s_7)$ peut être une formule de $\mathbb{F}(X,\mathcal{F},\mathcal{P})$ lorsque :
    ☐ $s = s_1$ ☒ $s = s_2$ ☐ $s = s_3$ ☐ $s = s_4$ ☒ $s = s_5$ ☒ $s = s_6$ ☐ $s = s_7$
11. cocher les variables appartenant à $\mathrm{Free}(F_2)$: ☒ x ☐ y ☒ z
12. cocher les formules qui correspondent à une clôture universelle de F_2 :
    ☒ $\forall x\,\forall z\,\exists y\ (((\forall y\, p(x,y)) \Rightarrow q(f(y))) \wedge \forall x\, p(x,z))$ ☐ $\forall x\,\forall z\,\exists y\ (((\forall y\, p(x,y)) \Rightarrow \forall y\, q(f(y))) \wedge \forall x\, p(x,z))$
    ☐ $\forall z\,\exists y\ (((\forall y\, p(x,y)) \Rightarrow q(f(y))) \wedge \forall x\, p(x,z))$ ☒ $\forall z\,\forall x\,\exists y\ (((\forall y\, p(x,y)) \Rightarrow q(f(y))) \wedge \forall x\, p(x,z))$

13. cocher les formules ayant la même signification (i.e. logiquement équivalente) que F_2 :
    - ☒ $\exists y\ (((\forall z\, p(x,z)) \Rightarrow q(f(y))) \wedge \forall x\, p(x,z))$
    - ☐ $\exists y\ (((\forall y\, p(z,y)) \Rightarrow q(f(y))) \wedge \forall x\, p(x,z))$
    - ☒ $\exists y\ (((\forall y\, p(x,y)) \Rightarrow q(f(y))) \wedge \forall y\, p(y,z))$
    - ☒ $\exists x_1\ (((\forall x_2\, p(x,x_2)) \Rightarrow q(f(x_1))) \wedge \forall x_3\, p(x_3,z))$

▶ Corrigé de l'exercice 2.

> $\langle 1 \rangle$ montrons $(B \Rightarrow A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B))$
>
> > $\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : B \Rightarrow A, h_2 : A \Rightarrow B, h_3 : \neg A$, montrons $\neg B$
> >
> > > $\langle 3 \rangle$ supposons $h_4 : B$, montrons false
> > >
> > > > $\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$
> > > > $\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax avec h_3)
> > >
> > > > $\langle 5 \rangle$ montrons A
> > > > $\langle 5 \rangle$ CQFD ($D_{\Rightarrow}$ avec h_1, h_4)
> > >
> > > $\langle 3 \rangle$ CQFD ($E_{\neg}$)
> >
> > $\langle 2 \rangle$ CQFD ($I_{\neg}$)
>
> $\langle 1 \rangle$ CQFD ($I^3_{\Rightarrow}$)

> $\langle 1 \rangle$ montrons $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
>
> > $\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B), h_2 : B$, montrons A
> >
> > > $\langle 3 \rangle$ supposons $h_3 : \neg A$, montrons false
> > >
> > > > $\langle 4 \rangle$ montrons B
> > > > $\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)
> > >
> > > > $\langle 5 \rangle$ montrons $\neg B$
> > > >
> > > > > $\langle 6 \rangle$ montrons $\neg A \Rightarrow \neg B$
> > > > >
> > > > > > $\langle 7 \rangle$ montrons $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$
> > > > > > $\langle 7 \rangle$ CQFD (Ax avec h_1)
> > > > >
> > > > > > $\langle 8 \rangle$ montrons $A \Rightarrow B$
> > > > > >
> > > > > > > $\langle 9 \rangle$ supposons $h_4 : A$, montrons B
> > > > > > > $\langle 9 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)
> > > > > >
> > > > > > $\langle 8 \rangle$ CQFD ($I_{\Rightarrow}$)
> > > > >
> > > > > $\langle 6 \rangle$ CQFD ($E_{\Rightarrow}$)
> > > >
> > > > > $\langle 7 \rangle$ montrons $\neg A$
> > > > > $\langle 7 \rangle$ CQFD (Ax avec h_3)
> > > >
> > > > $\langle 5 \rangle$ CQFD ($E_{\Rightarrow}$)
> > >
> > > $\langle 3 \rangle$ CQFD ($E_{\neg}$)
> >
> > $\langle 2 \rangle$ CQFD (Abs)
>
> $\langle 1 \rangle$ CQFD ($I^2_{\Rightarrow}$)

▶ Corrigé de l'exercice 3.

(1) $F_1 \mathrel{|\!\equiv\!|} F_2$ si et seulement si pour toute structure $\mathbf{M}$, $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$.

(2) $F = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$

(a)

$$\begin{aligned}
[F]^{\mathbf{M}} &= \overline{[A \Rightarrow B]^{\mathbf{M}}} + [\neg A \Rightarrow \neg B]^{\mathbf{M}} = \overline{\overline{[A]^{\mathbf{M}}} + [B]^{\mathbf{M}}} + \left(\overline{[\neg A]^{\mathbf{M}}} + [\neg B]^{\mathbf{M}}\right) \\
&= \overline{\overline{\mathbf{I_M}(A)} + \mathbf{I_M}(B)} + \left(\overline{\overline{[A]^{\mathbf{M}}}} + \overline{[B]^{\mathbf{M}}}\right) = \overline{\overline{\mathbf{I_M}(A)} + \mathbf{I_M}(B)} + \left(\overline{\overline{\mathbf{I_M}(A)}} + \overline{\mathbf{I_M}(B)}\right)
\end{aligned}$$

(b) En posant $x = \mathbf{I_M}(A)$ et $y = \mathbf{I_M}(B)$, on a :

$$\begin{aligned}
[F]^{\mathbf{M}} &= \overline{\overline{x} + y} + \left(\overline{\overline{x}} + \overline{y}\right) \overset{E1.2}{\equiv} \overline{\overline{x} + y} + (x + \overline{y}) \overset{E4.4}{\equiv} (\overline{\overline{x}} \cdot \overline{y}) + (x + \overline{y}) \overset{E1.2}{\equiv} (x \cdot \overline{y}) + (x + \overline{y}) \\
&\overset{E3.1}{\equiv} (x + \overline{y}) + (x \cdot \overline{y}) \overset{E4.2}{\equiv} ((x + \overline{y}) + x) \cdot ((x + \overline{y}) + \overline{y}) \overset{E3.1}{\equiv} ((\overline{y} + x) + x) \cdot ((x + \overline{y}) + \overline{y}) \\
&\overset{E3.4\times 2}{\equiv} (\overline{y} + (x + x)) \cdot (x + (\overline{y} + \overline{y})) \overset{E3.5\times 2}{\equiv} (\overline{y} + x) \cdot (x + \overline{y}) \overset{E3.1}{\equiv} (\overline{y} + x) \cdot (\overline{y} + x) \\
&\overset{E2.5}{\equiv} \overline{y} + x = \overline{\mathbf{I_M}(B)} + \mathbf{I_M}(A) = [B \Rightarrow A]^{\mathbf{M}}
\end{aligned}$$

On a donc bien $F \mathrel{|\!\equiv\!|} B \Rightarrow A$.

(c) F est satisfiable puisque pour toute structure $\mathbf{M}_1$ telle que $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(A) = 1$ on a $[F]^{\mathbf{M}_1} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(B)} + 1 \overset{E3.7}{\equiv} 1$ mais F n'est pas valide puisque pour une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(A) = 0$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(B) = 1$ on a $[F]^{\mathbf{M}_2} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(B)} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(A) = \overline{1} + 0 = 0 + 0 = 0$.

▶ Corrigé de l'exercice 4.

(1) Définition inductive de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$:
$a \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, $b \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
Si $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $r(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
Si $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $s(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

(2) Définition inductive du nombre $\mathrm{nb}_a(t)$ d'occurrences du symbole a dans un terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$:

$$\mathrm{nb}_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = b \\ 1 & \text{si } t = a \\ \mathrm{nb}_a(t_1) + \mathrm{nb}_a(t_2) & \text{si } t = r(t_1, t_2) \\ \mathrm{nb}_a(t_1) + \mathrm{nb}_a(t_2) & \text{si } t = s(t_1, t_2) \end{cases}$$

(3.a)
$$\begin{aligned} [s(s(b,a), r(a,b))]^{\mathbf{M}_1} &= s^{\mathbf{M}_1}(s^{\mathbf{M}_1}(b^{\mathbf{M}_1}, a^{\mathbf{M}_1}), r^{\mathbf{M}_1}(a^{\mathbf{M}_1}, b^{\mathbf{M}_1})) = s^{\mathbf{M}_1}(s^{\mathbf{M}_1}(0,2), r^{\mathbf{M}_1}(2,0)) \\ &= s^{\mathbf{M}_1}(-2, 2) = -4 \end{aligned}$$

(3.b) Raisonnement par induction sur t.
(B) Si $t = a$, alors $[a]^{\mathbf{M}_1} = 2 = 2 \times 1$.
Si $t = b$, alors $[b]^{\mathbf{M}_1} = 0 = 2 \times 0$.

(I) Si $t = r(t_1, t_2)$, alors :
$$\begin{array}{lll} & [r(t_1, t_2]^{\mathbf{M}_1} & \\ = & r^{\mathbf{M}_1}([t_1]^{\mathbf{M}_1}, [t_2]^{\mathbf{M}_1}) & \\ = & r^{\mathbf{M}_1}(2 \times z_1, 2 \times z_2) & \text{par hyp. d'induction} \\ = & (2 \times z_1) + (2 \times z_2) & \text{par définition} \\ = & 2 \times (z_1 + z_2) & z_1 + z_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$t = s(t_1, t_2)$, alors :
$$\begin{array}{lll} & [s(t_1, t_2]^{\mathbf{M}_1} & \\ = & s^{\mathbf{M}_1}([t_1]^{\mathbf{M}_1}, [t_2]^{\mathbf{M}_1}) & \\ = & s^{\mathbf{M}_1}(2 \times z_1, 2 \times z_2) & \text{par hyp. d'induction} \\ = & (2 \times z_1) - (2 \times z_2) & \text{par définition} \\ = & 2 \times (z_1 - z_2) & z_1 - z_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

(4.a) On définit la structure $\mathbf{M}_2$ dont le domaine est l'ensemble des entiers relatifs $|\mathbf{M}_2| = \mathbb{Z}$ et telle que :

$$\begin{array}{llll} a^{\mathbf{M}_2} = 2 & r^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & s^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & p^{\mathbf{M}_2} \subseteq \mathbb{Z} \\ b^{\mathbf{M}_2} = 1 & r^{\mathbf{M}_2}(n_1, n_2) = n_1 - n_2 & s^{\mathbf{M}_2}(n_1, n_2) = n_1 + n_2 & p^{\mathbf{M}_2} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 = n_2\} \end{array}$$

On a $[F]^{\mathbf{M}_2} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(p(b, s(a, r(b,a)))) \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(p(s(b,b), a)) = 1 \cdot 1 = 1$ car :

(*i*) $b^{\mathbf{M}_2} = 1$ et $[s(a, r(b,a))]^{\mathbf{M}_2} = s^{\mathbf{M}_2}(a^{\mathbf{M}_2}, r^{\mathbf{M}_2}(b^{\mathbf{M}_2}, a^{\mathbf{M}_2})) = s^{\mathbf{M}_2}(2, r^{\mathbf{M}_2}(1,2)) = s^{\mathbf{M}_2}(2, -1) = 1$ et donc $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(p(b, s(a, r(b,a)))) = 1$ puisque $(1,1) \in p^{\mathbf{M}_2}$.

(*ii*) $[s(b,b)]^{\mathbf{M}_2} = s^{\mathbf{M}_2}(b^{\mathbf{M}_2}, b^{\mathbf{M}_2}) = s^{\mathbf{M}_2}(1,1) = 2$ et $a^{\mathbf{M}_2} = 2$ et donc $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(p(s(b,b), a)) = 1$ puisque $(2,2) \in p^{\mathbf{M}_2}$.

(4.b) On définit la structure $\mathbf{M}_3$ dont le domaine est l'ensemble des entiers relatifs $|\mathbf{M}_3| = \mathbb{Z}$ et telle que :

$$\begin{array}{llll} a^{\mathbf{M}_3} = 2 & r^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & s^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & p^{\mathbf{M}_3} \subseteq \mathbb{Z} \\ b^{\mathbf{M}_3} = 0 & r^{\mathbf{M}_3}(n_1, n_2) = n_1 - n_2 & s^{\mathbf{M}_3}(n_1, n_2) = n_1 + n_2 & p^{\mathbf{M}_3} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 = n_2\} \end{array}$$

On a $[F]^{\mathbf{M}_3} = \mathbf{I}_{\mathbf{M}_3}(p(b, s(a, r(b,a)))) \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{M}_3}(p(s(b,b), a)) = 1 \cdot 0 = 0$ car :

(*i*) $b^{\mathbf{M}_3} = 0$ et $[s(a, r(b,a))]^{\mathbf{M}_3} = s^{\mathbf{M}_3}(a^{\mathbf{M}_3}, r^{\mathbf{M}_3}(b^{\mathbf{M}_3}, a^{\mathbf{M}_3})) = s^{\mathbf{M}_3}(2, r^{\mathbf{M}_3}(0,2)) = s^{\mathbf{M}_3}(2, -2) = 0$ et donc $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_3}(p(b, s(a, r(b,a)))) = 1$ puisque $(0,0) \in p^{\mathbf{M}_3}$.

(*ii*) $[s(b,b)]^{\mathbf{M}_3} = s^{\mathbf{M}_3}(b^{\mathbf{M}_3}, b^{\mathbf{M}_3}) = s^{\mathbf{M}_3}(0,0) = 0$ et $a^{\mathbf{M}_3} = 2$ et donc $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_3}(p(s(b,b), a)) = 0$ puisque $(0,2) \notin p^{\mathbf{M}_3}$.