北京大学 2003 年博士研究生入学考试试题

考试科目：计算方法　　　　　　　　考试时间：2003 年 3 月 22 日下午

考试专业：数学学院各专业　　　　　研究方向：各研究方向

---

1. (12 分) 设 x 和 y 是满足条件 $\|x\|_2 = \|y\|_2$ 的两个 n 维实向量.

(1) 证明存在一个形如 $H = I - 2ww^T$ 的正交矩阵使得 $Hx = y$, 其中 I 是 n 阶单位矩阵，w 是一个 n 维实向量;

(2) 现给定 $u = (1,\ 0,\ 1)^T$ 和 $v = (0,\ \sqrt{2},\ 0)^T$, 请计算一个 3×3 正交矩阵 Q 使得 $Qu = v$.

2. (13 分) 设

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \alpha_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{2\times 2}, \qquad \alpha_1 \neq \alpha_2, \qquad \varepsilon < 1,$$

并假定 $\widetilde{T}$ 是以 $\mu = \alpha_2$ 为位移进行了一次 QR 迭代所得到的矩阵. 证明 $\widetilde{T}(2,1) = O(\varepsilon^3)$.

3. (15 分) 设 A, B 是两个 $n\times n$ 实矩阵，其中 A 非奇异，并且满足

$$AB = I + E,$$

这里 I 是单位矩阵，$\|E\|_2 < 1$. 证明

$$\|A^{-1} - B\|_2 \le \frac{\|B\|_2\,\|E\|_2}{1 - \|E\|_2}.$$

4. (15 分) 设 $f(x) \in C^3[a,b]$. 求次数最低的多项式 p，使之满足插值条件

$$\begin{cases} p\,(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,2, \\ p\,'(x_1) = f'(x_1), \end{cases}$$

其中 $a \le x_0 < x_1 < x_2 \le b$. 并给出用 p 逼近 f 的截断误差表达式.

5. (15 分) 已知数值积分公式序列

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}), \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$_k|$ 对 n 一致有界. 试证明对任何连续函数 $f(x) \in C[a,b]$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

6. (15 分) 设 $f(t,u)$ 是 $[0,T]\times \mathrm{R}^1$ 上的连续函数. 将 $[0,T]$ 区间 n 等分, 步长 $h=T/n$. 常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t,u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

的一个差分格式为

$$\begin{cases} U_{k+1} = U_k + h\phi(t_k, U_k, h), \quad k = 0,1,2,\cdots,n-1 \\ U_0 = u_0 \end{cases}$$

其中增量函数 $\phi(t,u,h)$ 连续且关于 u 满足一致 Lipschitz 条件.

1. 写出此差分格式的相容性条件.
2. 写出此差分格式收敛性的定义.
3. 当相容性条件满足时证明差分格式的收敛性.

7. (15 分) 考虑边值问题:

$$\begin{cases} -u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad x \in (0,\ 1), \\ u(0) = 0, \\ u'(1) + \alpha u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $q(x), f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续, $p(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续可微, 而且

$$q(x) - p'(x)/2 \geq 0, \quad x \in [0,\ 1]$$

$$\alpha + p(1)/2 \geq 0.$$

试给出边值问题 (1) 的有限元解的提法, 并证明有限元解的存在唯一性.