北京大学数学学院 2012-2013 学年第一学期 偏微分方程 期末试题

系别 ________ 姓名 ________ 学号 ________ 成绩 ________

注意：答案一律写在答题纸，否则不计分．试卷和答题纸一起上交．

1. (15 分) 假设 $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$. 证明 u 是 $\mathbf{R}^n$ 上的调和函数当且仅当平均值公式

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)\,dy, \quad \forall B(x,r) \subset \mathbf{R}^n$$

成立.

2. (15 分) 设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$ 是热方程混合问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t), & (x,t) \in Q_T = (0,l) \times (0,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,l], \\ u|_{x=0} = g_1(t), \quad (u_x + u)|_{x=l} = g_2(t), & t \in [0,T] \end{cases}$$

的解．证明

$$\max_{\bar{Q}_T} |u| \le C(F+B),$$

其中 C 是正常数， $F = \sup_{Q_T} |f|$, $B = \max\{\max_{[0,l]} |\varphi|, \max_{[0,T]} |g_1|, \max_{[0,T]} |g_2|\}$.

3. (15 分) 利用分离变量法求解热方程混合问题

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u|_{t=0} = 1 - \cos x + \sin^2 x, & 0 \le x \le \pi, \\ u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0, & t \ge 0, \end{cases}$$

并验证所得的表达式是上述问题的古典解.

4. (20 分) 设 a 是正常数， $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R})$, $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R})$. 利用特征线法求解下列问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

并验证得到的解是上述问题的古典解.

5. (15 分) 设 a 是正常数， $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R})$, $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R})$. 证明波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

的解 $u = u(x,t)$ 满足不等式

$$\int_{b-at}^{c+at} [u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t)]\,dx \ge \int_b^c [\psi^2(x) + a^2 |\varphi'(x)|^2]\,dx, \quad \forall t > 0,$$

其中 b, c 为任意固定的两个实数，且 $b < c$, 并解释不等式的物理意义.

6. (20 分) 设 $\phi(x) \in C^3(\mathbf{R}^3)$, $\psi(x) \in C^2(\mathbf{R}^3)$. 证明由 Kirchhoff 公式给出的表达式是波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \mathbf{R}^3, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

的古典解．如果还假设 $\phi(x), \psi(x)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上具有紧支集，证明

$$\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in \mathbf{R}^3} |u(x,t)| = 0.$$

1. (i) 设 u 在 $\mathbb{R}^n$ 上任意球 $B(x,r)$ 满足平均值公式，

$$u(x) = ⨍_{B(x,r)} u(y)\,dy. \qquad (1.1)$$

于是

$$\alpha(n) r^n u(x) = \int_{B(x,r)} u(y)\,dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,t)} u(y)\,dS(y)\right)dt$$

两边对 r 求导，则

(3分)

$$n\alpha(n) r^{n-1} u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y).$$

即

$$u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y). \quad (1.2)$$

令 $\varphi(r) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y)$，则

$$\varphi(r) = ⨍_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\,dS(z)$$

于是

(3分)

$$\varphi'(r) = ⨍_{\partial B(0,1)} Du(x+rz)\cdot z\,dS(z)$$

$$= ⨍_{\partial B(x,r)} Du(y)\cdot \vec{n}\,dS(y) \qquad \vec{n} = \frac{y-x}{r} \text{ 为 } \partial B(x,r) \text{ 的外法向量.}$$

$$= \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y)\,dS(y)$$

$$= \frac{r}{n} ⨍_{B(x,r)} \Delta u(y)\,dy \qquad (1.3)$$

由(1.2)和(1.3)知

(2分)

$$⨍_{B(x,r)} \Delta u(y)\,dy = 0.$$

由于 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$，则 $\Delta u \in C(\mathbb{R}^n)$. 令 $r \to 0$，则 $\Delta u(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

因此 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数.

(ii) 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数. 由(1.3)式知 $\varphi'(r)=0,\ \forall r>0$

3分

因此 $\varphi(r)$ 是常数, 从而有

$$\varphi(r) = \lim_{r\to 0+}\varphi(r) = u(x).$$

即(1.2)式成立. 因此

$$n\alpha(n) r^{n-1} u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y), \quad \forall r>0.$$

4分

对于上式在 $[0,r]$ 上积分, 则

$$\alpha(n) r^n u(x) = \int_{B(x,r)} u(y)\,dy.$$

从而有

$$u(x) = ⨍_{B(x,r)} u(y)\,dy, \quad \forall B(x,r)\subset\mathbb{R}^n.$$

因此平均值公式在所有球上成立. 即证.

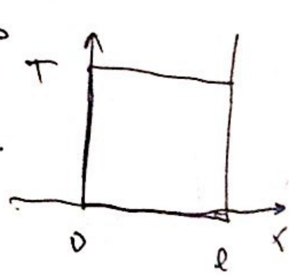
2. 证明: 我们先证如下结论: 设 $w\in C^{2,1}(Q_T)\cap C^{0,1}(\overline{Q}_T)$ 满足

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} \le 0, & (x,t)\in Q_T, \\ w(x,0)\le 0, & x\in[0,l], \\ w|_{x=0}\le 0, & (w_x+w)|_{x=l}\le 0,\ t\in[0,T] \end{cases}$$

则 在 $\overline{Q}_T$ 上 $w(x,t)\le 0$.

8分

由第一个条件知 w 在 $\overline{Q}_T$ 上的最大值一定在抛物边界 $\partial_p Q_T$ 上达到. 假设 w 有正的最大值, 则此最大值不可能在 $t=0$ 和 $x=0$ 这两条边界上达到. 因此只能在 $x=l$ 上达到.



设

$$w(l,t_0) = \max_{\overline{Q}_T} w > 0, \quad t_0\in[0,T].$$

于是

$$w_x(l,t_0)\ge 0.$$

从而

$$w_x(l,t_0) + w(l,t_0) > 0$$

-2.5 与边界条件 $(w_x+w)|_{x=l}\le 0,\ t\in[0,T]$ 矛盾.

因此 w 没有正的最大值. 从而

$$w(x,t) \le 0, \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}_T.$$

令

$$v(x,t) = Ft + B + \cancel{\frac{B}{2\ell}(\cdots)}.$$

则有

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = F, & (x,t) \in Q_T \\ v(x,0) \ge B, & x \in [0,\ell] \\ v|_{x=0} \ge B, \quad (v_x + v)|_{x=\ell} \ge B, & t \in [0,T]. \end{cases}$$

6分

令

$$w = u - v. \quad 则$$

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = f - F \le 0, & (x,t) \in Q_T, \\ w(x,0) \le \varphi(x) - B \le 0, & x \in [0,\ell]. \\ w|_{x=0} \le g_1(t) - B \le 0, \quad (w_x + w)|_{x=\ell} = g_2(t) - B \le 0, & t \in [0,T]. \end{cases}$$

由此则有 $w \le 0$ in $\overline{Q}_T$. 从而有

$$u(x,t) \le v(x,t) \le FT + B, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T$$

同理有

$$-u(x,t) \le v(x,t) \le FT + B, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T$$

2分

于是

$$|u(x,t)| \le C(F+B), \quad (x,t) \in \overline{Q}_T.$$

从而

$$\max_{\overline{Q}_T} |u| \le C(F+B).$$

3. 解：设 $u(x,t)=T(t)X(x)$，则

$$T'(t)X(x)-4T(t)X''(x)=0.$$

即

$$\frac{T'(t)}{4T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

5分

由边条件 $u_x|_{x=0}=0$，$u_x|_{x=\ell}=0$ 得到特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & x\in[0,\pi] \\ X_x(0)=X_x(\pi)=0. \end{cases}$$

此特征值问题的所有特征值为 $\lambda_n=n^2$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 对应的特征函数为 $\cos nx=X_n(x)$. 于是相对应的

$$T_n'(t)+4n^2T_n(t)=0.$$

3分

于是

$$T_n(t)=e^{-4n^2t}T_n(0).$$

令

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(0)e^{-4n^2t}\cos nx$$

由初值 $u(x,0)=1-\cos x+\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{3}{2}-\cos x-\frac{\cos 2x}{2}.$

则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n(0)\cos nx=\frac{3}{2}-\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

由展开式唯一性有

$$T_0(0)=\frac{3}{2},\quad T_1(0)=-1,\quad T_2(0)=-\frac{1}{2}.$$

1分 1分 1分

于是

$$u(x,t)=\frac{3}{2}-e^{-4t}\cos x-\frac{1}{2}e^{-16t}\cos 2x.$$

1分

验证 $u\in C^{\infty}([0,\pi]\times[0,+\infty))$ 且

1分

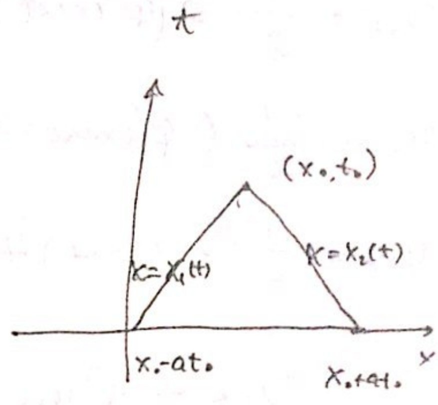
$$u_t-4u_{xx}=4e^{-4t}\cos x+8e^{-16t}\cos 2x-4\left(e^{-4t}\cos x+2e^{-16t}\cos 2x\right)$$
$$=0.$$

(1分) $u(x,0)=\frac{3}{2}-\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x=1-\cos x+\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=1-\cos x+\sin^2 x.$

$$u_x=e^{-4t}\sin x+e^{-16}\sin 2x.$$

(1分) 从而 $u_x\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=\pi}=0.$

所以 $u(x,t)$ 是原问题的古典解.



4. 解: 令 $v=u_t-au_x$, 则

(3分) $$v_t+av_x=0.$$

由 $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$, 则

(3分) $$\begin{cases} v(x,0)=u_t(x,0)-a\,u_x(x,0) \\ \quad\quad\;\; =\psi(x)-a\varphi'(x). \end{cases}$$

对于任意 $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, 过 (x_0,t_0) 的特征线 $x_1(t)=x_0-at_0+at$.

则

$$\frac{dv(x_1(t),t)}{dt}=0.$$

于是

$$v(x_0,t_0)=v(x_1(t_0),t_0)=v(x_0-at_0,0)=\psi(x_0-at_0)-a\varphi'(x_0-at_0).$$

(3分) 于是 $$v(x,t)=\psi(x-at)-a\varphi'(x-at).$$

过 (x_0,t_0) 的另一条特征线为 $x_2(t)=x_0+at_0-at$. 在此特征线上,

(3分) $$\frac{du(x_2(t),t)}{dt}=v(x_2(t),t)=\psi(x_2(t)-at)-a\varphi'(x_2(t)-at)$$
$$=\psi(x_0+at_0-2at)-a\varphi'(x_0+at_0-2at)$$

于是

(4分) $$\begin{aligned} u(x_0,t_0)=u(x_2(t_0),t_0)&=u(x_0+at_0,0)+\int_0^{t_0}\left[\psi(x_0+at_0-2at)-a\varphi'(x_0+at_0-2at)\right]dt \\ &=\varphi(x_0+at_0)+\frac{1}{2a}\int_{x_0-at_0}^{x_0+at_0}\psi(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int_{x_0-at_0}^{x_0+at_0}\varphi'(\xi)d\xi \\ &=\frac{\varphi(x_0+at_0)+\varphi(x_0-at_0)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x_0-at_0}^{x_0+at_0}\psi(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

于是 $u(x,t)=\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$, $\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$

2分

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}\left(a\varphi'(x+at)-a\varphi'(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\left(a\psi(x+at)+a\psi(x-at)\right) \\ u_{tt} = \frac{1}{2}a^2\left(\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)\right)+\frac{1}{2}\left(a\psi'(x+at)-a\psi'(x-at)\right) \\ u_x = \frac{1}{2}\left(\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\left(\psi(x+at)-\psi(x-at)\right) \\ u_{xx} = \frac{1}{2}\left(\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\left(\psi'(x+at)-\psi'(x-at)\right). \end{cases}$$

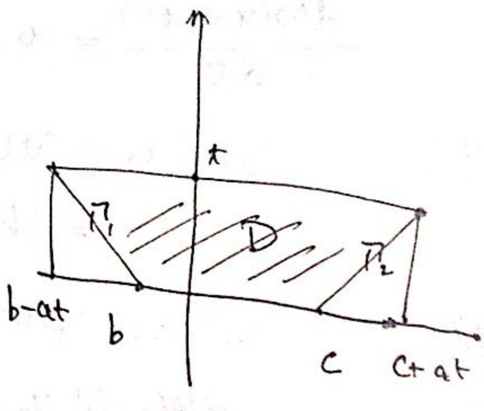
于是 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0.$

而 $u(x,0)=\dfrac{\varphi(x)+\varphi(x)}{2}+0=\varphi(x)$ 1分

$u_t(x,0)=\dfrac{a}{2}\left(\varphi'(x)-\varphi'(x)\right)+\dfrac{1}{2}\left(\psi(x)+\psi(x)\right)=\psi(x).$ 1分

于是 $u(x,t)$ 是古典解.

5. 证明. 方程两端乘以 u_t 得



2分

$$\begin{cases} u_t(u_{tt}-a^2u_{xx})=0. \\ \text{即}\quad \left[\frac{1}{2}(u_t^2+a^2u_x^2)\right]_t-a^2(u_xu_t)_x=0. \end{cases}$$

在方程两端在 D 上求积分，则

3分

$$\iint_D\left[\left[\frac{1}{2}(u_t^2+a^2u_x^2)\right]_t-a^2(u_xu_t)_x\right]dxdt=0.$$

由 Green 公式，则

$$\oint\left(-a^2u_xu_t\,dt-\frac{1}{2}(u_t^2+a^2u_x^2)dx\right)=0$$

其中 ∂D 取逆时针方向. 于是

$$\int_{l^-} \frac{1}{2}(u_t^2 + a u_x^2)\,dx + a^2 u_x u_t\,dt = 0 \qquad l = \partial D.$$

l^- 取顺时针方向. 即

(3'分)
$$\left\{\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int_{b-at}^{c+at} \left(u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t)\right) dx + \frac{1}{2}\int_{c}^{b} \left(\psi^2(x) + a^2|\varphi'(x)|^2\right) dx \\ & + \int_{\Gamma_1} \frac{1}{2}(u_t^2 + a u_x^2)\,dx + a^2 u_x u_t\,dt + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{2}(u_t^2 + a u_x^2) + a^2 u_x u_t\,dt = 0 \end{aligned}\right.$$

在 Γ_1 上 $dx = -a\,dt$. 在 Γ_2 上 $dx = a\,dt$. 于是

(2'分)
$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{2}(u_t^2 + a^2 u_x^2)\,dx + a^2 u_x u_t\,dt = \int_0^t \left[-\frac{a}{2}(u_t^2 + a^2 u_x^2) + a^2 u_x u_t\right] dt$$
$$= -\frac{a}{2}\int_0^t (u_t - a u_x)^2\,dt \le 0.$$

(2'分)
$$\int_{\Gamma_2} \frac{1}{2}(u_t^2 + a^2 u_x^2)\,dx + a^2 u_x u_t\,dx = \int_t^0 \left[\frac{a}{2}(u_t^2 + a^2 u_x^2) + a^2 u_x u_t\right] dt$$
$$= -\frac{a}{2}\int_0^t (u_t - a u_x)^2\,dt$$
$$\le 0.$$

于是
$$\frac{1}{2}\int_{b-at}^{c+at} \left[u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t)\right] dx + \frac{1}{2}\int_{c}^{b} \left(\psi^2(x) + a^2|\varphi'(x)|^2\right) dx \ge 0.$$

从而
$$\int_{b-at}^{c+at} \left(u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t)\right) dx \ge \int_{b}^{c} \left(\psi^2(x) + a^2|\varphi'(x)|^2\right) dx.$$

3分 其物理意义为：弦[b,c]段上的振动从0到t时刻只能传播到弦段[b-at, c+at]上。因此弦在[b,c]上的能量完全被弦段[b-at, c+at]吸收，因此在t时刻，弦段[b-at, c+at]上的能量比初始时刻弦段[b,c]上的能量大.

6. 证明：Kirchhoff公式

4分

$$u(x,t)=\fint_{\partial B(x,at)}\left[\varphi(y)+D\varphi(y)\cdot(y-x)+t\psi(y)\right]dS(y).$$

$$=\fint_{\partial B(0,1)}\left[\varphi(x+atz)+at\,\varphi_i(x+atz)\cdot z_i+t\psi(x+atz)\right]dS(z)$$

$$=\fint_{\partial B(0,1)}\left[\varphi(x+atz)+t\psi(x+atz)\right]dS(z)+\frac{1}{4\pi at}\int_{B(x,at)}\Delta\varphi(y)\,dy.$$

3分

则 $u\in C^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+)$

2分

$$u_t=\fint_{\partial B(0,1)}\left(a\varphi_i(x+atz)z_i+\psi(x+atz)+at\,\psi_i(x+atz)z_i\right)dS(z)-\frac{1}{4\pi at^2}\int_{B(x,at)}\Delta\varphi(y)\,dy$$

$$+\frac{a}{4\pi at}\int_{\partial B(x,at)}\Delta\varphi(y)\,dS(y)$$

$$=\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,at)}\Delta\varphi(y)\,dS(y)+\fint_{\partial B(0,1)}\psi(x+atz)\,dS(z)+\frac{1}{4\pi at}\int_{B(x,at)}\Delta\psi(y)\,dy$$

$$=\cancel{a^2t}\fint_{\partial B(0,1)}\Delta\varphi(x+atz)\,dS(z)+\fint_{\partial B(0,1)}\psi(x+atz)\,dS(z)+\frac{1}{4\pi at}\int_{B(x,at)}\Delta\psi(y)\,dy$$

3分

3分

$$u_{tt}=a^2\fint_{\partial B(0,1)}\Delta\varphi(x+atz)\,dS(z)+a^2t\fint_{\partial B(0,1)}a\,\Delta\varphi_i(x+atz)\cdot z_i\,dS(z)$$

$$+\fint_{\partial B(0,1)}a\,\psi_i(x+atz)\,z_i\,dS(z)-\frac{1}{4\pi at^2}\int_{B(x,at)}\Delta\psi(y)\,dy+\frac{a}{4\pi at}\int_{\partial B(x,at)}\Delta\psi(y)\,dS(y)$$

$$= a^2 \fint_{\partial B(0,1)} \left(\Delta \varphi(x+atz) + at \varphi_i(x+atz) z_i\right) dS(z)$$

$$+ \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x,at)} \Delta \psi(y) dS(y)$$

$$u_{xx} = \fint_{\partial B(0,1)} \left[\left(\Delta \varphi(x+atz) + at z_i \Delta \varphi_i(x+atz)\right) \cancel{dS(z)} + t \Delta \psi(x+atz)\right] dS(z)$$

3分

$$= \fint_{\partial B(0,1)} \left(\Delta \varphi(x+atz) + at z_i \Delta \varphi_i(x+atz)\right) dS(z) + \frac{1}{4\pi t a^2} \int_{\partial B(x,at)} \Delta \psi(y) dS(y)$$

于是 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = \fint_{\partial B(0,1)} \varphi(x) dS(z) = \varphi(x)$$

3分 $$\lim_{t \to 0^+} u_t(x,t) = \fint_{\partial B(0,1)} \psi(x) dS(z) = \psi(x).$$

$$u_t(x,0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{u(x,t) - \varphi(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left[\fint_{\partial B(0,1)} \psi(x+atz) dS(z) + \fint_{\partial B(0,1)} \frac{\varphi(x+atz) - \varphi(x)}{t} dS(z) + \frac{1}{4\pi a t^2} \int_{B(x,at)} \Delta \varphi(y) dy \right]$$

$$= \psi(x).$$

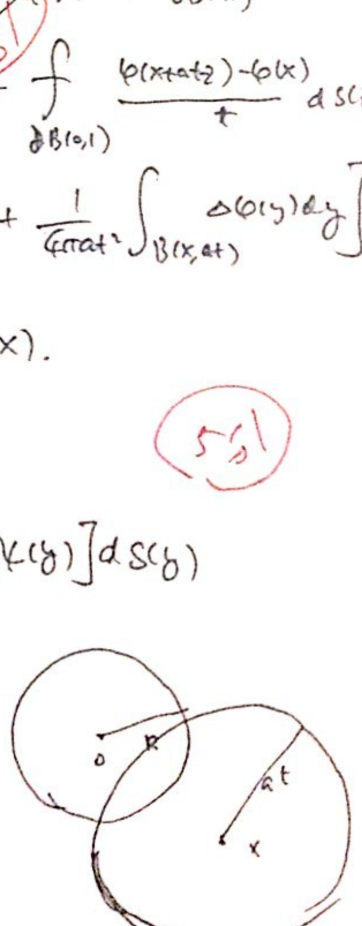
因此 $u(x,t)$ 是古典解.

5分

不妨设 $spt\, \varphi,\ spt\, \psi \subset B(0,R)$. 则

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{\partial B(x,at) \cap B(0,R)} \left[\varphi(y) + D\varphi(y) \cdot (y-x) + t\psi(y)\right] dS(y)$$

由于 $\max_{\mathbb{R}^3} |\varphi|,\ \max_{\mathbb{R}^3} |\psi|,\ \max_{\mathbb{R}^3} |D\varphi| \leq M.$



$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{\partial B(0,R) \cap B(0,R)} \left(M + M \cdot at + t M\right) dS(y)$$

$$\leq \frac{(1+a)M}{4\pi a^2 t^2} (1+t) \cdot |\partial B(0,R)|$$ 可以 $\lim_{t \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |u(x,t)| = 0.$