

1. 常微分方程定性理论 (50 分)

a) 常微分方程

线性微分方程组，解的存在和唯一性定理，比较定理与最小解最大解，解的延拓，解对参数及初值的连续依赖性，解对参数及初值的连续可微性，Gronwall 不等式，变分方程，Sturm 比较定理、Sturm-Liouville 边值问题。

b) 定性理论

向量场与动力系统，平面线性系统相图，双曲奇点的拓扑共轭分类，Poincaré-Bendixson 环域定理，Hopf 分支，平面向量场的旋转数与奇点指数，李雅普诺夫稳定性与李雅普诺夫第二方法，线性系统的 Floquet 理论，周期轨的 Poincaré 映射，环面上的常微系统，旋转数，极限集与极小集。

2. 椭圆方程 (50 分)

a) 数学物理方程

(i) 位势方程：基本解和 Green 函数，极值原理和最大模估计。

(ii) 热方程：Fourier 变换方法，分离变量法，极值原理和最大模估计。

b) 二阶椭圆型方程

(i) Sobolev 空间， L^2 理论（解的存在唯一性）。

(ii) Schauder 估计的结论及应用。

(iii) L^p 估计(Calderon-Zygmund 理论)的结论及应用

数值代数 (50 分)

1. 基础知识

向量范数和矩阵范数，Schur 分解定理，奇异值分解定理，Hermite 矩阵的极小、极大定理。

2. 线性方程组的直接解法

Gauss 消去法，Cholesky 分解法，对称不定线性方程组的直接解法，线性方程组的条件数，条件数的估计和迭代改进。

3. 线性方程组的古典迭代法

Jacobi 迭代法，Gauss-Seidel 迭代法，SOR 迭代法，SSOR 迭代法，收敛性分析。

4. 求解线性方程组的 Krylov 子空间法

共轭梯度法的基本性质，共轭梯度法的收敛性分析，预优共轭梯度法，广义极小剩余法。

5. 矩阵特征值问题数值方法

幂法，反幂法，QR 方法，二分法

参考书目：

- 【1】.“数值线性代数”，徐树方，高立，张平文编；
- 【2】.“矩阵计算的理论与方法”，徐树方编著。

最优化理论与算法 （50 分）

1. 基础知识

- 1) 无约束问题的最优性条件，约束问题的最优性理论，对偶理论；
- 2) 方法的收敛性与收敛速度；
- 3) 线搜索方法的准则及步长的计算，采用不同线搜索准则的方法的收敛性。

2. 牛顿型方法

- 1) 牛顿法及非精确牛顿法；
- 2) 修正牛顿法；
- 3) 拟牛顿法及其性质；
- 4) 有限内存拟牛顿法。

3. 梯度型方法

- 1) 最速下降方法及其收敛性；
- 2) 共轭梯度方法及其性质。

4. 信赖域型方法

- 1) 信赖域方法及其性质；
- 2) 解信赖域子问题的方法：信赖域子问题最优性条件，Levenberg-Marquardt 方法，Dogleg 方法。

5. 解约束问题的方法

- 1) 变量消去法；
- 2) 解 KKT 方程组方法；
- 3) 投影梯度法；
- 4) 外点罚函数方法；
- 5) 障碍函数方法；
- 6) 增广拉格朗日函数方法；
- 7) 序列二次规划方法。

参考书目：

- 【1】“Numerical Optimization”，J. Nocedal, S. J. Wright, second edition; 相关章节：第二、三、四、五、六、七、十、十二、十五、十六、十七、十八章。
- 【2】“最优化理论与方法”，袁亚湘，孙文瑜，科学出版社；相关章节：第一、二、三、四、五、七、八、九、十、十二、十三章。
- 【3】“数值最优化方法”，高立。