

1. 求 $y(x)$ 满足 $y^{(4)} + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = 0$.

2. 已知 Riccati 方程 $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ 两个特解 $y_1(x)$, $y_2(x)$. 是否存在通解 ~~并~~ 表达式, 其中只要做一次积分.

3. 用 Lyapunov 第二方法讨论系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + x^2 y^2 \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x^3 y \end{cases}$$

零解的稳定性.

4. 证明 $x' = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$ 与 $x' = Bx$, $x \in \mathbb{R}^n$ 是微分同胚的 ~~当且仅当是线性~~ (即 \exists 线性可微映射 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, s.t. $\forall x' = Ax$ 的流 $\{f^t\}$, h 将 $\{f^t\}$ 映成 $x' = Bx$ 的流 $\{g^t\}$ 且 $h \circ f^t = g^t \circ h$) 当且仅当是线性同胚的 (即 \exists 线性映射 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, s.t. $\forall x' = Ax$ 的流 $\{f^t\}$, h 将 $\{f^t\}$ 映成 $x' = Bx$ 的流 $\{g^t\}$ 且 $h \circ f^t = g^t \circ h$).

5. 叙述 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上的嵌入和紧嵌入定理

6. ~~设 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\Omega)$ 求 Ω 上~~ 设 Ω 是有界区域, $p > 1$ 的常数, 求

$$\begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-2} u = f & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

求 u 的最大模估计

7. 设 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\Omega)$, 用 Fourier 变换求

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

并证明所得解为古典解.

8. 叙述 Ω 上的 Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

弱解的定义. 并证明弱解存在的充要条件是 $\int_{\Omega} f \, dx = 0$, 其中 n 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量.

10年3月博士资格考
回忆整理