北京大学 2004 年博士研究生入学考试试题

考试科目：计算方法　　　　　　考试时间：2004 年　月　日

1.(20 分) (i): 试分析用迭代法

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{1}{5}\cos x_n + \frac{1}{3}\sin y_n, \\
y_{n+1} &= \frac{1}{3}\sin x_n + \frac{1}{4}\cos y_n,
\end{aligned}
$$

求解非线性方程组

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{3}\sin y, \\
y &= \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{4}\cos y,
\end{aligned}
$$

的收敛性.

(ii): 试给出一个能保证以上迭代法的计算结果在 $\infty$ 范数下的相对误差不超过 $10^{-6}$ 的判别准则，并给出证明.

2.(15 分) (i): 试给出区间 $[a, b]$ 上的复化梯形积分公式及其截断误差公式.

(ii): 若要用复化梯形积分公式计算 $f(x) = 2x^4 + 12x - 9$ 在 $[-1, 1]$ 区间的积分，为使计算误差不超过 $10^{-5}$ 应该如何选取积分步长？

3.(20 分) (i): 试给出迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + b$ 收敛的充要条件.

(ii): 试给出求解线性代数方程组

$$
\begin{cases}
x_1 + \lambda x_2 = b_1 \\
\lambda x_1 + 2x_2 = b_2
\end{cases}
$$

的 Jacobi 迭代和 Gauss-Seigel 迭代的迭代公式，并分析相应迭代的收敛条件.

4.(15 分) 设 $x$ 是方程组 $Ax=b$ 的解，$x^*$ 是方程组 $Ax^*=b^*$ 的解. 记 $E_r(x^*)=\frac{\|x-x^*\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, $E_r(b^*)=\frac{\|b-b^*\|_\infty}{\|b\|_\infty}$.

(i) 试给出 $\frac{E_r(x^*)}{E_r(b^*)}$ 的上界估计？

(ii) 在用迭代法求解时，要使近似解 $x^*$ 的相对误差 $E_r(x^*)<\epsilon$, 问残量 $b-Ax^*$ 应满足什么要求？

5.(15 分) 考虑常微分方程边值问题

$$\begin{cases} -\frac{d^2y}{dx^2}(x)+y(x)=1, & 0<x<1, \\ y(0)=0, \\ \frac{dy}{dx}(1)+y(1)=g. \end{cases} \tag{1}$$

(i) 试给出问题 (1) 的变分形式.

(ii) 试给出用有限元方法求解问题 (1) 的基本步骤.

(iii) 试给出用有限元方法求解问题 (1) 的抽象误差估计.

6.(15 分) 试分析双曲型方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, & x\in(-\infty,\ \infty),\ t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in(-\infty,\ \infty) \end{cases}$$

差分格式

$$\frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\tau}+\frac{u_k^n-u_{k-1}^n}{h}=0$$

的截断误差、稳定性条件、收敛性和收敛阶，其中 $h$ 和 $\tau$ 分别为空间步长和时间步长.