2005

博士资格考试差分方法试题

（满分 50， 2005/02/14.）

一.（ 13 分）设 $f(u)$ 是一个充分光滑的函数.

(1) 写出与双曲守恒律初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0, \qquad u(x,0)=u_0(x) \tag{*}$$

（其中 $-\infty<x<\infty$， $0\le t\le T$ ）相容的守恒型有限差分格式的定义.

(2) 写出并证明关于上述守恒型格式的 Lax-Wendroff 定理.

二.（ 13 分）设 $f(u)$ 是一个充分光滑的函数.

(1) 请问什么是双曲守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{**}$$

的熵函数与熵通量？写出用熵函数表达的，关于方程 (**) 的弱解的熵条件. 请问为何要引进熵条件？

(2) 在上问的基础上，写出什么是方程 (**) 的数值解的离散熵条件？假设一个与 (**) 相容的守恒型有限差分格式既满足 Lax-Wendroff 定理的条件又满足离散熵条件，证明它必收敛到方程 (**) 的熵解.

三.（ 12 分）

(1) 推导逼近初值问题 (*) 的 Godunov 有限体积格式.

(2) 证明上述 Godunov 有限体积格式是一个单调格式.

(3) 证明上述 Godunov 有限体积格式满足离散熵条件.

四.（ 12 分）

证明 Harten 引理：设一个显式格式可以写成

$$U_j^{n+1}=U_j^n-C_{j-1}^n(U_j^n-U_{j-1}^n)+D_j^n(U_{j+1}^n-U_j^n), \qquad j\in\mathbb{Z}.$$

则这个格式是 TVD 格式的充分条件是

$$C_j^n\ge 0,\quad D_j^n\ge 0,\quad C_j^n+D_j^n\le 1$$

对所有 j 成立.