1. 在最后一页的背面是资格考试中《常微分方程定性理论》方面的问题.

数值代数

?1. 设 $A=LU$ 是 $n\times n$ 实矩阵 A 的 LU 分解. 其中 $L=[l_{ij}]$ 是满足条件 $|l_{ij}|\le 1$ 的单位下三角矩阵, U 是上三角矩阵.
证明 $\|U\|_\infty \le 2^{n-1}\|A\|_\infty$

2. 假定用共轭梯度法求解系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

的线性方程组. 证明, 若初始向量 x_0 取得使剩余向量为 $r_0=(1,1,-2,-1)^T$, 则在没有舍入误差的情况下只需迭代一次就可求得方程组的精确解.

~~3.~~ 设非奇异矩阵 A 分裂为 $A=M-N$, 其中 M 非奇异, 并满足 $\mu=\|M^{-1}\|_\infty\|N\|_\infty<1$

(1) 证明对任意的初始向量 x_0 由迭代

$$Mx_{k+1}=Nx_k+b \qquad k=0,1,2\cdots$$

产生的向量序列 x_k 都收敛到线性方程组 $Ax=b$ 的解 x.

(2) 证明对任意的自然数 k 有

$$\|x_k-x\|_\infty \le \frac{\mu}{1-\mu}\|x_k-x_{k-1}\|_\infty$$

差分方法

一. 设 $f(u)$ 是一个充分光滑的函数

(1) 写出与双曲守恒律初值问题 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0$, $u(x,0)=u_0$ (其中 $-\infty<x<\infty$, $0\le t\le T$) 相容的守恒型郁民差分格式

(2) 写出并证明关于上述守恒型格式的 Lax-Wendroff 定

二．设 $f(u)$ 是一个充分光滑的函数

(1) 请问什么是双曲守恒律方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial t}=0$ (**) 的熵函数与熵通量？写出用熵函数表述的关于方程(**)的弱解的熵条件，请问为何要引进熵条件？

(2) 在上问的基础上，写出什么是方程(**)的数值解的离散熵条件？试证一个与(**)相容的守恒型有限差分格式既满足Lax-Wendroff定理的条件又满足离散熵条件，证明它必收敛到方程(**)的熵解。

三．(1) 推导单边初值问题(*)的Godunov有限体积格式

(2) 证明上述Godunov有限体积格式是一个单调格式。

(3) 证明上述————满足离散熵条件。

四．(1) 证明Harten引理：设一个显式格式可以写成

$$u_j^{n+1}=u_j^n-C_{j-1}^n(u_j^n-u_{j-1}^n)+D_j^n(u_{j+1}^n-u_j^n)$$

$$j\in\mathbb{Z}$$

则这个格式是TVD格式的充要条件是

$$C_j^n\geq 0,\ D_j^n\geq 0,\ C_j^n+D_j^n\leq 1 \text{ 对所有 } j \text{ 成立}.$$