椭圆方程期末试题

June 2019

1

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f \quad x \in \Omega \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $f \in L^2(\Omega)$。给出这个方程弱解的定义并证明其存在唯一性。

2 $u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ 是方程 $-\Delta u + u^3 = 0$ 的弱解。证明:

(1)$u \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$

(2)$u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

3 $Tf = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\mathcal{N}f$. 证明 T 可以从 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 延拓到 $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$。

Hints: 见书 P38.

4 证明方程的弱解有界，存在唯一。

$$\begin{cases} -\Delta u - |\nabla u|^2 = 0 \quad x \in \Omega \\ u = 0 \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

5 $-D_i(a^{ij}(x)D_j u) = 0$, $\theta \in (0,1)$ 证明:

$$\text{ess } sup_{B_\theta} u \le C(⨍_{B_1} (u^+)^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

Hints: 见书 P50.

6 $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $f \in L^\infty$, a^{ij} 满足一致椭圆性条件。

$$\begin{cases} -a^{ij} D_{ij} u = f & x \in \Omega \\ u = \varphi & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

叙述 Aleksandrov 极值原理并证明:

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + C \sup_{\Omega}(f)$$

其中 C 只与 n, λ, Ω(空间维数，椭圆性条件参数，区域) 有关。

Hints: 见书 P81.