1. 设A是Hilbert空间H上的紧自伴算子. 若$\varphi\in C(\sigma(A))$. $\varphi(0)=0$. 证明$\varphi(A)$也是紧算子

2. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^4$为光滑有界区域. $f(x)$为Ω上有界函数. 令$F(u)=\int_\Omega |\nabla u|^2+|u|^3+f(x)u$.

证明存在$u_0\in W_0^{1,2}(\Omega)$使得$F(u_0)=\inf\limits_{\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)}F(\varphi)$

3. 设T是Banach空间X到Y上的线性算子而且是一一的. 如果T是闭算子且满足如下

条件: $\exists C\geq 0$. s.t. $\|Tx\|\geq C\|x\|$. $\forall x\in D(T)$.

证明值域$R(T)$是闭的. 举例说明单独T是闭算子的条件不能导出$R(T)$闭.

4. 证明 $Lu:=-\Delta u-\frac{1}{|x|}u$. $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$是本质自伴算子.

5. 令 $Lu:=i\frac{du}{dx}+xu$为定义在$C_0^\infty[0,1]$上的算子. 证明L不是本质自伴算子但存在

自伴扩张. 并求其所有的自伴扩张.

---

1. 叙述$\Omega\subset\mathbb{R}^3$上的嵌入定理和紧嵌入定理

2. 设Ω是有界区域. $p>1$的常数

$$\begin{cases}-\Delta u+|u|^{p-2}u=f & x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=g\end{cases}$$

求u的最大模估计

3. 设$\phi\in L(\mathbb{R})^\infty\cap C(\mathbb{R})$ 用Fourier变换求解

$$\begin{cases}u_t-u_{xx}+u=0 & x\in\mathbb{R}.\ t>0\\ u|_{t=0}=\phi & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

并证明所得解为古典解

4. 叙述Ω上的Neumann问题 $\begin{cases}-\Delta u=f. & x\in\Omega\\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$

弱解的定义. 并证明弱解存在的充要条件为$\int_\Omega f\,dx=0$. $\vec{n}$为$\partial\Omega$上单位外法向

1. $u\in\mathbb{R}^n$. $\Delta u=0$. 且存在 $C>0$. 对于 $\forall x$. 满足 $|u|\le C|x|^2$.

则 $u(x)=\sum_{i,j}^{n} a_{ij}x_ix_j$. 且 $\sum_i^n a_{ii}=0$

2. 求解方程 $\begin{cases} u_t-\Delta u=0 \\ u|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$

3. 叙述如下方程的弱解定义，并证明弱解存在唯一

$$\begin{cases} -\sum_i^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ii}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f \qquad x\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

4. 求解下面的方程

$$\begin{cases} u_t-u^{\frac{1}{3}}u_x=0 \qquad x\in R.\ t>0 \\ u|_{t=0}=x^3 \end{cases}$$

Gauss – Green 公式: $\int_\Omega \operatorname{div} F\,dx=\int_{\partial\Omega} F\cdot n\,ds(x)$

$$\int_\Omega \Delta u\,dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}ds(x)$$

$$\int_\Omega Du\cdot Dv\,dx=-\int_\Omega u\Delta v\,dx+\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}ds(x)$$

$$\int_\Omega (u\Delta v-v\Delta u)\,dx=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds(x)$$