1 2010年博士生资格考试偏微分方程

1. 叙述 $\Omega \subset R^3$上的嵌入定理和紧嵌入定理

2. 设Ω是有界区域，$p > 1$ 的常数

$$\begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-2}u = f, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

求u的最大模估计

3. 设$\phi \in L(R)^\infty \bigcap C(R)$，用Fourier变换求解

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0, x \in R, t > 0 \\ u|_{t=0} = \phi, x \in R \end{cases}$$

并证明所得解为古典解

4. 叙述Ω上的Neumann问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

弱解的定义，并证明弱解存在的充要条件为 $\int_\Omega f dx = 0$,$\vec{n}$为$\partial\Omega$上的单位外法向向量

2 2011年博士生资格考试偏微分方程

1. $x \in R^n$, $\Delta u = 0$,且存在 $C > 0$，对于$\forall x$，满足

$$|u| \le C|x|^2$$

则 $u(x) = \sum_{i,j}^n a_{i,j}x_ix_j$，且 $\sum_i^n a_{i,i} = 0$，

2. 求解方程

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, x \in R^n, t > 0 \\ u|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

3. 叙述如下方程的弱解定义，并证明弱解存在唯一

$$\begin{cases} -\sum_i^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}) = f, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

4.求解下面的方程

$$\begin{cases} u_t - \boxed{u^{\frac{1}{3}}} u_x = 0, x \in R, t > 0 \\ u|_{t=0} = x^3 \end{cases}$$

特征线：$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -u^{\frac{1}{3}} \\ x(0) = c \end{cases}$

$U(t) = u(x(t), t)$

$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = 0 \\ U(0) = u(x(0), 0) = c^3 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad U(t) = c^3$

$\frac{dx}{dt} = -c$

$x(0) = c$

$\Rightarrow \quad x = -ct + c$

$\Rightarrow \quad x = (1-t)c$

$\Rightarrow \quad c = \frac{1-t}{x}$

$$u(x,t) = \left(\frac{1-t}{x}\right)^3$$

考虑微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x+y\\ \frac{dy}{dt}=\ln(20+x)-y\end{cases}$$

$(x(t), y(t))$ 是定义在 $t\geq 0$ 的解，且满足 $x(0)>0, y(0)>0$.

证明 $(x(t), y(t))$ 是有界解.

Adams Sobolev space

考虑环面上的微分方程.

$\frac{d\theta}{d\phi}=A(\phi,\theta)$

其中 (1) $A(\phi+1,\theta)=A(\phi,\theta)=A(\phi,\theta+1)$

(2) $A(\phi,\theta)$ 连续

(3) 经过每一点 (ϕ_0,θ_0) 有唯一解.

Γ 表示环面的经圆 $\phi=0$，设 $\theta=u(\phi,\theta_0)$ 为满足初值条件

$\theta_0=u(0,\theta_0)$ 之解

$\psi:\Gamma\to\Gamma$，$\psi(\theta_0)=u(1,\theta_0)$ 确定 Γ 上的同胚.

证明：$\{\tau\in\mathbb{R}\mid\exists\theta\in\Gamma, s.t. \lim_{n\to\infty}\frac{\psi^n(\theta)-\theta}{n}=\tau\}\neq\phi$.

有阻力的数学摆的振动方程为

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\phi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\phi=0$$

其中摆长 l 和质量 m，重力加速度 g 均大于0.

设阻力系数 $\mu>0$，试证零解是渐近稳定的

判断零解稳定性. 线性近似法. 李雅普诺夫第二方法

令 $x(t)=\phi'(t)$. $y(t)=\phi(t)$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-\frac{\mu}{m}x-\frac{g}{l}\sin y\\ \frac{dy}{dt}=x\end{cases}$

$\sin y$ 在 $y=0$ 处 taylor 展开.

$\Rightarrow \sin y = y+N(y)$

其中 $\lim_{y\to0}\frac{N(y)}{y^2}=0$. $\boxed{N(y)=\sin y-y}$

$\lim_{x^2+y^2\to0}\frac{|N(y)|}{(x^2+y^2)^{\frac12}}=0$. 且 $N(0)=0$.

$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-\frac{\mu}{m}x-\frac{g}{l}y\\ \frac{dy}{dt}=x\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}-a & -b\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$a,b>0$

$\therefore\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$

$\lambda_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$

① $\Delta=a^2-4b\geq0$

② $\Delta\cdots\leq0$

无论①②. λ_1,λ_2 均具负实部

$\therefore$ 渐近稳定

研究方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y-x(x^2+y^2)\\ \frac{dy}{dt}=-x+y-y(x^2+y^2)\end{cases}$$

实部不为0. 可见局部结构稳定的.

奇点，极限环和轨道的全局结构

记 B_1 为 $\mathbb{R}^3$ 单位球. $u\in H^1(B_1)$ 满足初值问题 //

$$\begin{cases}\Delta u=u^3-u, & x\in B_1\\ u=\varphi, & x\in\partial B_1\end{cases}$$

$W^{1,2}\hookrightarrow L^{\frac{3\times2}{3-2}}$

$u\in H^1(B_1)\hookrightarrow L^6(B_1)$.

$\Rightarrow u^3-u\in L^2$

$\Delta u\in L^2$

$\|u\|_{L^{2k,p}}\leq C(\|\Delta u\|_{L^{k,p}}+\|u\|_{L^p})$

$u\in L^{4,2}\Leftarrow$ $k=2$. $u\in L^2\cdots$

$\Rightarrow u\in H^2$

$\Rightarrow u^3-u\in H^1$

$\Rightarrow u\in H^3\Rightarrow\cdots$

$\Rightarrow u\in C^\infty(B_1)$

Poisson 方程.

$\Rightarrow u\in C^\infty(\bar{B}_1)$

$\varphi(x)\in C^\infty(\partial B_1)$

(1) 证明：$u\in C^\infty(B_1)\cap C(\bar{B}_1)$

(2) 假设 $\max_{x\in\partial B_1}|\varphi(x)|\leq1$，证明 $\max_{x\in B_1}|u(x)|\leq1$

(2) 由于最大模原理

$u(x_0)=|u_0|=\max$. $\Delta u=u(u^2-1)$.

$x_0\in\partial B_1\Rightarrow\checkmark$

$x_0\in B_1$. $u_0>0$

$x_0\in B_1$，$u(x_0)=\max_{B_1}u.>1$.

最大值 $\Delta u(x_0)\leq0$

$\Rightarrow u_0(u_0+1)(u_0-1)\leq0$

$\because u_0>0\Rightarrow u_0\leq1$

$u_0=0\Rightarrow\checkmark\Rightarrow\Delta u(x_0)\leq0$，$u(x_0)(u^2(x_0)-1)>0$

$u_0<0$ 最小值 $\Delta u(x_0)\geq0\Rightarrow u_0(u_0+1)(u_0-1)\geq0\Rightarrow u_0+1\geq0$.

6. (1) 利用 Fourier 变换求解初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u|_{t=0} = \varphi, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

其中 $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

(2) 证明所得到的解满足上述初值问题.

7. 设 $u(x,t)$ 满足

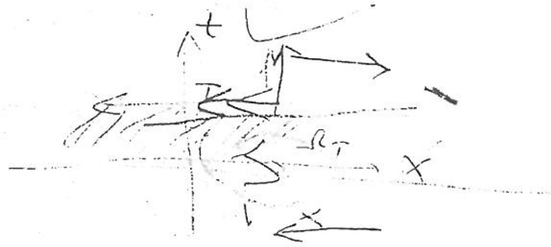
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

其中 $\varphi(x), \psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

证明：对于任意 $t \in (0,+\infty)$ 成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(|u_t(x,t)|^2 + |u_x(x,t)|^2 \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|\psi(x)|^2 + |\varphi'(x)|^2 \right) dx$$

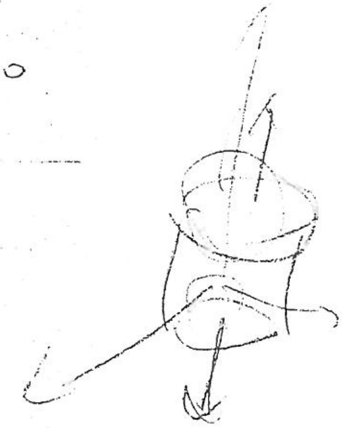
$$u_t u_{tt} - u_t u_{xx} = 0 \qquad \pm\ u_x u_{xt}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2}(u_t^2)_t + \frac{1}{2}(u_x^2)_t - u_x u_{xt} - u_t u_{xx}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2)_t - (u_x u_t)_x} = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{\Omega_T} \frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2)_t - (u_x u_t)_x \quad dx\,dt = 0$$



$$= \cancel{\int_{\partial\Omega_T} \left(\frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) \cdot n_t - u_x u_t \cdot n_x \right) d}$$

$$= \int_{\partial\Omega_T} + \frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2)\,dx + (u_x u_t)\,dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2 + u_x^2 \; dx = \int_{\infty}^{+\infty}$$

1.

摘几个学习

2. 证明：方程 $y=px+f(p)$，$y'=p$ 的奇解与每一个特解都恰有一个交点

《常微分方程教程》P100 例1.

3. $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=x^2-y^2, & |x+1|\le 1, |y|\le 1 \\ y(-1)=0 \end{cases}$，

《常微分方程习题解》庄万《山东科学技术出版社》P109

求解的存在区间，二次近似解，对解存在区间的误差估计。

4. $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=\sin(\lambda xy) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$

这题是《常微分方程教程》P105 例2.

$\phi(x;x_0,y_0,\lambda)$ 是方程的解。

试证明

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x_0}\right|_{x_0=y_0=0}=0,\quad \left.\frac{\partial\phi}{\partial y_0}\right|_{x_0=y_0=0}=e^{\frac{\lambda}{2}x^2},\quad \left.\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\right|_{x_0=y_0=0}=0$$

5. u 在 B_R 调和，$B_R=B_R(0)$.

《偏微分方程》P35.

证明：$D(r)=r^2\int_{B_r}|\nabla u(x)|^2dx$ 关于 r 的单调递增的

6. $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & x\in\mathbb{R}, y>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$，$\varphi\in L^\infty\cap C^1$

用 Fourier 变换 求方程的有界解。

并证明

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+}|u(x,y)|\le\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|$$

7. $B_1^+=B_1\cap\{x_1\ge 0\}$，$B_1^-=B_1\cap\{x_1\le 0\}$，$B_1\subset\mathbb{R}^n$，$f\in L^2$，$b(x)$ 非负有界.

Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+b(x)u=f, & a(x)=2\chi_{B_1^+}+\chi_{B_1^-} \\ u|_{\partial B_1}=0 \end{cases}$$

$a(x)\ge 1$

$$A(u,v)=\int(a(x)\nabla u\nabla v+b(x)uv)\,dx$$

证明：弱解存在唯一

对称，有界，~~较易~~ 正定性 ~~[illegible]~~

8. 求下列方程的能量不等式

Ω 有 $C\mathbb{R}^n$ 有界域

$\Omega_T=\Omega\times(0,T)$

$u\in C^2(\Omega_T)\cap C^1(\bar\Omega_T)$

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=f & \text{in } \Omega\times(0,T) \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ u_t(x,0)=\psi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial n}=0, & \partial\Omega\times(0,T),\ \vec{n} \text{ 为外法向量} \end{cases}$$

Poincaré 不等式。 在 H_0^1 上 范数等价

$$\|v\|_1\le C\int|\nabla v|^2dx$$

$$\le C\int a(x)|\nabla v|^2dx$$

去年方程资格考题：
ode 部分：
1、线性 ode 求解
2、线性 ode 证明（解对初值依赖性的相关问题，用 laplas？？什么的作）
3、dx/dt=Ax,dx/dt=Bx,AB 为常矩。求证：解微分共轭等价于 A，B 线性共轭
4、非线性 ode 某个临界点的稳定性。（用平方和证？？）
pde 部分：
1、求标准热传导方程在全空间的解 偏 u/偏 t=laplace u
2、laplace u=u 的三次幂 证明 若 u 的绝对值小于等于 1 则……
3、分离变量法解个什么
4、二阶椭圆有关。考的是调合函数什么的，属于姜尚礼书范围。

感觉……这个条件有点多余？

1. 求 $y(x)$ 满足 $y^{(4)}+y=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=0$

2. 已知 Riccati 方程 $y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$ 两个特解 $y_1(x)$，$y_2(x)$，是否存在通解的表达式，其中只要做一次积分。 《常微分方程教程》 $P_{42}\sim P_{43}$.

3. 用 Lyapunov 第二方法讨论系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x-2y+x^2y^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = x-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}x^3y \end{cases}$$

零解的稳定性

取 $V(x,y)=\frac{1}{2}x^2+y^2$ 渐近稳定

$$\frac{dV}{dt} = -x^2-2xy+x^3y^2+2yx-y^2-x^3y^2 = -(x^2+y^2)\le 0$$

4. 证明 $x'=Ax$，$x\in\mathbb{R}^n$ 与 $x'=Bx$，$x\in\mathbb{R}^n$ 是微分同胚的（即 $\exists$ 可微映射 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ s.t. $\forall$ $x'=Ax$ 的流 $\{f^t\}$，h 将 $\{f^t\}$ 映成为 $x'=Bx$ 的流 $\{g^t\}$ 且 $h\circ f^t=g^t\circ h$）当且仅当是线性同胚的（即 $\exists$ 线性映射 $h':\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ s.t. $\forall$ $x'=Ax$ 的流 $\{f^t\}$，h' 将 $\{f^t\}$ 映成 $x'=Bx$ 的流 $\{g^t\}$ 且 $h'\circ f^t=g^t\circ h'$）

$t\in\mathbb{R}$ $t\in\mathbb{R}$

5. 叙述 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 上的嵌入和紧嵌入定理

6. ~~设 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$ 求 Ω 上~~ 设 Ω 是有界区域，$p>1$ 的常数，而

$$\begin{cases} -\Delta u+|u|^{p-2}u=f & x\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega}=\varphi \end{cases}$$

求 u 的最大模估计

7. 设 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$ 用 Fourier 变换求解

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}+u=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi, & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

并证明所得解为古典解

8. 叙述 Ω 上的 Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta u=f & x\in\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

弱解的定义，并证明弱解存在的充要条件是 $\int_\Omega f\,dx=0$，其中 n 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量

10年3月博士资格考试

([illegible])考题