北京大学 2009-2010 年度博士生资格考试试题：有限元方法

参考考试时间：3 小时

本试题共五道大题，满分 50 分.

一、设 V 是一实希尔伯特空间，$a(u,v)$ 是 V 上的强制、连续双线性形，$g\in V^*$ 是一有界线性泛函. 试证明问题：求 $u\in V$ 使得

$$a(u,v)=<g,v> \qquad \forall v\in V$$

的解存在唯一性. (8 分)

二、设 $\Omega\subset R^2$ 为一中心在原点的圆，$\partial\Omega$ 为其边界. 证明：

$$\|u\|_{0,\partial\Omega}\le C\|u\|_0^{1/2}\|u\|_1^{1/2}, \qquad \forall u\in H^1(\Omega),$$

其中 C 为不依赖于 u 的正常数. (8 分)

三、设 T_h 是矩形区域 Ω 的一个正则矩形剖分. 对任意单元 $K\in T_h$，定义如下的形函数空间：

$$Q_K=span\{1,x_1,x_2,x_1^2,x_2^2\}.$$

(1) 证明任意 $v\in Q_K$ 能被 v 在四边上的积分平均和单元 K 上的积分平均唯一确定. (5 分)

(2) 定义如下有限元空间：

$$V_h=\{v\in L^2(\Omega),\ v|_K\in Q_K,\forall K\in T_h, v\text{在内边积分连续，在边界边积分为零}\}.$$

设剖分 T_h 的内边数为 NS，边界边数为 NBS，请计算空间 V_h 的维数. (5 分)

(3) 证明下面的离散 Poincare 不等式

$$\|v\|_0\le C\left(\sum_{K\in T_h}\|\nabla v\|_{0,K}^2\right)^{1/2}, \forall v\in V_h,$$

其中 C 为不依赖于 v 和网格尺寸 h 的正常数. (5 分)

(4) 设连续问题为：求 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega \nabla u:\nabla v dx=\int_\Omega g\cdot v dx \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

离散问题为：求 $u_h\in V_h$ 使得

$$\int_\Omega \nabla_h u_h:\nabla_h v dx=\int_\Omega g\cdot v dx \qquad \forall v\in V_h.$$

若 $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$，请给出并证明能量范数意义下的误差估计. (5 分)

四、设T_h是多边形区域Ω的一个正则三角形剖分，V_h为定义在T_h上的一个分片多项式空间. 证明：$V_h \subset H^1(\Omega)$ 的充分必要条件为$V_h \subset C(\Omega)$.（7 分）

五、设T_H是多边形区域Ω的一个正则三角形剖分，T_h是T_H的一个加密网格（将T_H中的每个三角形T，通过连接三边中点，加密成四个小的三角形），又设$V_H \subset H^1(\Omega)$和$V_h \subset H^1(\Omega)$为分别定义在T_H和T_h上的分片线性元空间. 定义限制算子$I_H : V_h \to V_H$如下：

$I_H v_h \in V_H, I_H v_h(P) = v_h(P)$, $\forall P$，其中P为粗网格T_H的节点，$v_h \in V_h$.

证明：

$$\|v_h - I_H v_h\|_0 \le Ch\|\nabla v_h\|_0, \forall v_h \in V_h,$$

其中C为不依赖于v_h和网格尺寸h的正常数.（7 分）

V_h 维数

$p(\ ) = 1$