

$$1. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 - y^2, & |x+1| < 1, |y| \leq 1 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

解的存在区间, 并求二次近似解.

$$2. \text{ 设 } y = \phi(x, x_0, y_0, \lambda) \text{ 是初值问题 } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sin(\lambda xy) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \text{ 的解.}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_0} \Big|_{x_0=y_0=0} = e^{\frac{\lambda}{2} x_0^2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \Big|_{x_0=y_0=0} = 0$$

4. 证明 $x' = Ax, x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ 与 $x' = Bx, x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ 是微分同胚的 (即 \exists 可微映射 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, s.t. $\forall x' = Ax$ 的流 $\{f^t\}$, h 将 $\{f^t\}$ 映成 $x' = Bx$ 的流 $\{g^t\}$ 且 $h \circ f^t = g^t \circ h$)
当且仅当是线性同构的 (即 \exists 线性映射 $h': \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, s.t. $\forall x' = Ax$ 的流 $\{f^t\}$, h' 将 $\{f^t\}$ 映成 $x' = Bx$ 的流 $\{g^t\}$ 且 $h' \circ f^t = g^t \circ h'$)

上次 PDE 的一个题:

$\varphi(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. 利用 Green 函数构造定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的有界解 $u(x, y)$. 证明唯一性.