三. $Ax=b$. $Ax^*=b^*$. $E_r(x^*)=\dfrac{\|x-x^*\|_\infty}{\|x\|_\infty}$. $E_r(b^*)=\dfrac{\|b-b^*\|_\infty}{\|b\|_\infty}$

(1) 给出 $\dfrac{E_r(x^*)}{E_r(b^*)}$ 的上界估计

(2) 用迭代法求解时 要使近似解 x^* 的相对误差 $E_r(x^*)<\varepsilon$. 残量 $b-Ax^*$ 应满足什么要求?

四. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 叙述矩阵A的δ数值秩的定义. 试给出A的δ数值秩与A的奇异值之间的关系. 实际计算(如做QR分解. 奇异值分解)时. 数值秩的概念有什么用?

一. $\Omega=(0,1)\times(0,1)$. $\partial\Omega_0=\{0\}\times[0,1]$ $\partial\Omega_1=\partial\Omega\setminus\partial\Omega_0$ 考虑问题: 找 $\lambda>0$. $u\neq0$ 满足

$$\begin{cases} -\nabla(a(x)\nabla u(x))=\lambda u(x) & x\in\Omega \\ u(x)=u_0(x) & x\in\partial\Omega_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x)+u(x)=g(x) & x\in\partial\Omega_1 \end{cases}$$

其中 $a\in C^1(\Omega)$. $a(x)\geq a_0>0$. $\forall x\in\bar\Omega$.

1. 推导出变分形式
2. 给出区域Ω的一族正则的有限元剖分. 并解释为什么是一族正则的有限元剖分
3. 在2的基础上给出一族协调的有限元函数空间. 并解释为什么协调
4. 给出问题的相应的有限元解的提法
5. 给出由有限元方法导出的代数问题.

二. 叙述并证明Cea引理 并说明该引理在有限元误差估计中的作用.

三. 证明: 存在与三角形T无关的常数c使得

$$\|v\|_{0,\partial T}\leq c\left(h_T^{-1/2}\|v\|_{0,T}+h_T^{1/2}|v|_{1,T}\right)\qquad \forall v\in H^1(T).$$

对任意满足 $h_T\leq\eta\rho_T$ 的三角形T成立. 这里η是大于零的常数, h_T 和 ρ_T 分别是T的外径和内径.

一. 构造逼近偏微分方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ (a为正常数) 的两层显式二阶(时空精度都为二阶) 迎风有限差分格式. 并给出其稳定性条件.

二. $f(u)$ 是充分光滑函数

(1). 写出与 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \\ u(x,0)=u_0(x)\end{cases}$ 相容的守恒型有限差分格式的定义

(2). Lax-Wendroff定理

(3). 什么是熵函数. 熵通量? 写出用熵函数表述的弱解的熵条件. 为何要引进熵条件?

(4). 什么是双曲守恒律方程的数值解的离散熵条件.

(5). 推导逼近- - - - - 初值问题的 Godunov 有限体积格式

(6). 证明 Godunov 格式是一个单调格式且满足离散熵条件.