

1. 常微分方程定性理论 (50 分)

a) 常微分方程

线性微分方程组, 解的存在和唯一性定理, 比较定理与最小解最大解, 解的延拓, 解对参数及初值的连续依赖性, 解对参数及初值的连续可微性, Gronwall 不等式, 变分方程, Sturm 比较定理、Sturm-Liouville 边值问题。

b) 定性理论

向量场与动力系统, 平面线性系统相图, 双曲奇点的拓扑共轭分类, Poincaré-Bendixson 环域定理, Hopf 分支, 平面向量场的旋转数与奇点指数, 李雅普诺夫稳定性与李雅普诺夫第二方法, 线性系统的 Floquet 理论, 周期轨的 Poincaré 映射, 环面上的常微系统, 旋转数, 极限集与极小集。

2. 椭圆方程 (50 分)

a) 数学物理方程

- (i) 位势方程: 基本解和 Green 函数, 极值原理和最大模估计。
- (ii) 热方程: Fourier 变换方法, 分离变量法, 极值原理和最大模估计。

b) 二阶椭圆型方程

- (i) Sobolev 空间, L^2 理论 (解的存在唯一性)。
- (ii) Schauder 估计的结论及应用。
- (iii) L^p 估计(Calderon-Zygmund 理论)的结论及应用

数值代数 (50 分)

1. 基础知识

向量范数和矩阵范数, Schur 分解定理, 奇异值分解定理, Hermite 矩阵的极小、极大定理。

2. 线性方程组的直接解法

Gauss 消去法, Cholesky 分解法, 对称不定线性方程组的直接解法, 线性方程组的条件数, 条件数的估计和迭代改进。

3. 线性方程组的古典迭代法

Jacobi 迭代法, Gauss-Seidel 迭代法, SOR 迭代法, SSOR 迭代法, 收敛性分析。

4. 求解线性方程组的 Krylov 子空间法

共轭梯度法的基本性质, 共轭梯度法的收敛性分析, 预优共轭梯度法, 广义极小剩余法。

5. 矩阵特征值问题数值方法

幂法, 反幂法, QR 方法, 二分法

参考书目:

- 【1】.“数值线性代数”, 徐树方, 高立, 张平文编;
- 【2】.“矩阵计算的理论与方法”, 徐树方编著。

最优化理论与算法 (50 分)

1. 基础知识

- 1) 无约束问题的最优性条件, 约束问题的最优性理论, 对偶理论;
- 2) 方法的收敛性与收敛速度;
- 3) 线搜索方法的准则及步长的计算, 采用不同线搜索准则的方法的收敛性。

2. 牛顿型方法

- 1) 牛顿法及非精确牛顿法;
- 2) 修正牛顿法;
- 3) 拟牛顿法及其性质;
- 4) 有限内存拟牛顿法。

3. 梯度型方法

- 1) 最速下降方法及其收敛性;
- 2) 共轭梯度方法及其性质。

4. 信赖域型方法

- 1) 信赖域方法及其性质;
- 2) 解信赖域子问题的方法: 信赖域子问题最优性条件, Levenberg-Marquardt 方法, Dogleg 方法。

5. 解约束问题的方法

- 1) 变量消去法;
- 2) 解 KKT 方程组方法;
- 3) 投影梯度法;
- 4) 外点罚函数方法;
- 5) 障碍函数方法;
- 6) 增广拉格朗日函数方法;
- 7) 序列二次规划方法。

参考书目:

- 【1】“Numerical Optimization”, J. Nocedal, S. J. Wright, second edition; 相关章节: 第二、三、四、五、六、七、十、十二、十五、十六、十七、十八章。
- 【2】“最优化理论与方法”, 袁亚湘, 孙文瑜, 科学出版社; 相关章节: 第一、二、三、四、五、七、八、九、十、十二、十三章。
- 【3】“数值最优化方法”, 高立。