**2008年版博士资格考试大纲**

**考试时间：150分钟**

**分析学(100分， 三门中选二门)**

**复分析 (50分)**

1. Cauchy积分理论
2. Weierstrass级数理论
3. 解析延拓
4. Riemann的几何理论
   1. 正规族理论
   2. Riemann映射定理及边界对应原理

5 分式线性变换群和特殊区域的解析自同胚群

6 Schwarz引理

(a) Schwarz-Pick-Ahlfors定理

(b) Poincare度量

7 Riemann曲面的基本理论

(a) Riemann曲面的概念

(b) 亏格和Riemann-Roch定理

(c) 紧Riemann曲面的分类

**实分析 (50分)**

* 1. Fourier变换
     1. 函数的Fourier变换
     2. Schwartz函数与缓增分布
     3. Plancherel公式，函数的Fourier变换
     4. 收敛与求和，Poisson核、Gauss核
  2. Hardy-Littlewood极大函数
     1. 恒等逼近
     2. Marcinkiewicz插值定理
     3. Hardy-Littlewood极大函数
  3. 奇异积分
     1. Hilbert变换
     2. Riesz变换
     3. 卷积型奇异积分算子
     4. 一般（非卷积型）Calderon-Zygmund算子
  4. Hardy空间与BMO空间
     1. 原子Hardy空间
     2. BMO空间
  5. Littewood-Paley理论与乘子
     1. Littewood-Paley理论
     2. Hörmander乘子定理

**泛函分析 (50分)**

1. Banach空间和Hilbert空间的基本理论及典型例子
2. Banach空间和Hilbert空间上有界线性泛函和线性算子基本理论
3. 紧算子
   1. Riesz-Fredholm理论
   2. 紧算子的基本性质, 谱理论
   3. 对称紧算子
   4. 有界自伴算子的谱分解
   5. 闭算子的理论

（f）自伴扩张

(g) 无界自伴算子的扰动

1. 算子半群
   1. Hille-Yosida定理
   2. 单参数算子酉群的Stone定理

**参考书目：**

【1】 Ahlfors: Complex Analysis. McGraw-Hill Book Company

【2】 伍鸿熙等: 紧Riemann曲面引论 科学出版社

**【3】** J. Duoandikoetxea, Fourier analysis, Amer. Math. Soc.;

【4】程民德，邓东皋，龙瑞麟编著，实分析，高等教育出版社.

【5】张恭庆, 林源渠等: 泛函分析讲义上, 下册

【6】Yosida: Functional Analysis Springer-Verlag;)

**二. 代数学 （100分）**

**群**

1 群, 子群, 正规子群, 商群; 同态与同构, 同态定理与同构定理.

1. 群例: 循环群, 二面体群, 四元数群, 置换群, 线性群, $A\_n$, $S\_n$.
2. 自由群,生成元与定义关系.
3. 群在集合上的作用; Sylow定理和群.
4. Jordan-Holder 定理,直积分解定理.
5. 可解群.
6. 算子群.
7. 特殊射影线性群的单性.
8. 空间上的型与典型群.
9. 辛群.

**环**

1. 环, 子环, 理想, 商环; 同态与同构, 同态定理与同构定理.
2. 环的直和.
3. 素理想和极大理想, 幂零根和Jacobson根.
4. 环的整除性理论, 唯一分解环, 主理想整环, 欧几里得环.
5. 整环的分式域.
6. 交换环上的多项式环, Gauss引理.
7. 形式幂级数环.
8. 四元数体.

**域**

1. 有限扩张, 扩张次数乘积公式.
2. 多项式的分裂域, 正规扩张.
3. 可分扩张.
4. 单扩张定理.
5. Galois基本定理, 简单的Galois扩张.
6. 用根式解方程的判别准则.
7. 有限域.

**模**

1. 模, 子模, 商模; 模同态与同构, 模同态定理与同构定理.
2. 模的自同态环.
3. 模的直和与直积.
4. 自由模.
5. 主理想整环上的有限生成模的结构定理.
6. Nakayama引理.
7. 模的张量积.
8. 同态函子和张量函子
9. 整性相关.

**结合代数和有限群的表示论**

1. 代数和模.
2. 不可约模和完全可约模.
3. 半单代数的结构.
4. 群的表示、特征标、正交关系、特征标表.

**初等数论**

1. 算术基本定理  
2. 数论函数  
3. 孙子定理  
4. 二次互反律  
5. 连分数  
6. Pell方程

**参考书目**

【1】 聂灵沼，丁石孙，《代数学引论》，高等教育出版社，2000.

【2】 徐明曜，赵春来，《抽象代数（II）》，，北京大学出版社

【3】 N.Jacobson: Basic Algebra 1, 2nd Edition W.H. Freeman & Company 1974

【4】柯斯特利金： 代数学引论 （第一卷） 高等教育出版社

【5】潘承洞， 潘承彪： 初等数论， 第二版， 北京大学出版社， 2004

**三. 几何与拓扑（100分，其中几何与拓扑各50分）**

1. **代数拓扑**

a) 基本群与覆叠空间

b) 曲面的分类

c) 同调与上同调的理论、计算、常见例子和应用

d) 同伦群及其基本性质

1. **微分流形**
   1. 微分流形的概念
   2. 切丛与向量丛
   3. 横截性理论
   4. 微分形式，Stokes定理，de Rham上同调
2. **微分几何**
   1. 联络和曲率的基本概念
   2. Riemann几何的基本理论
   3. 紧曲面上的Gauss-Bonnet 公式

**参考书目：**

1. 尤承业著，《基础拓扑学讲义》。 北京大学出版社， 1997.
2. 姜伯驹著，《同调论》。 北京大学出版社，2006.
3. 陈省身、陈维桓著，《微分几何讲义》 (第二版)。北京大学出版社, 2001年。（第1章到第七章, 附录一）
4. Allen Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge Univ. Press, 2002.（略去占其 一半篇幅的Additional Topics部分）
5. Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology.* Prentice-Hall, 1974.
6. Theodor Brocker, Klaus Janich, *Introduction to Differential Topology.* Cambridge Univ. Press, 1982.
7. 陈维桓 李兴校 《黎曼几何引论》（上）（第一到第六章）。

**四. 微分方程 （100分，常微偏微各50分）**

**常微分方程定性理论：**

线性方程（组）的解法，首次积分， 幂级数解法，解的存在和唯一性定理， 解的延拓

和对参数及初值的依赖性，奇解与包络， 边值问题， 平面奇点分类与极限环，李雅普诺夫第二方法， Hopf 分支， 二维周期系统的调和解，拟线性系统， 耗散系统， Duffing方程， 环面上的常微系统， 旋转数， 极限点集， 各态历经

**偏微分方程：**

1. 数学物理方程

位势方程： 基本解和Green函数， 极值原理和最大模估计。

热方程： Fourier变换方法，分离变量法，极值原理和最大模估计。

波动方程：特征线法，分离变量法，能量不等式。

1. 二阶椭圆型方程

广义函数理论和Fourier 变换基本理论

Sobolev嵌入定理，理论（解的存在唯一性）。

Schauder 估计的结论及应用。

估计的结论及应用。

**参考书目:**

【1】丁同仁，李承治：《常微分方程》;

【2】张芷芬等，《微分方程定性理论》 第6、7章;

【3】姜礼尚等，《数学物理方程讲义》;

【4】陈亚浙，吴兰成，《二阶椭圆型方程与椭圆型方程组》

【5】D.Gilbarg, N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (Part 1 Linear equations), Springer 世界图书出版公司。

【6】Hormander: The analysis of linear partial differential operators （第一卷）， Springer-Verlag, 1983.

**概率论 （100分）**

该考试涵盖研究生课程《高等概率论》和《随机过程论》，以及先修的本科生课程《测度论》和《应用随机过程》。

1. 测度论

σ域，λ－π方法

积分的性质，Levy单调收敛定理，Fatou引理，Lebesgue控制收敛定理，积分的绝对连续性

条件期望，Radon-Nikodym导数，条件概率，正则条件概率

乘积空间，Kolmogorov延拓定理，Fubini定理

随机变量四种收敛的定义及其相互关系

1. 概率论

概率空间，随机变量的独立性

欧氏空间的测度性质， 弱收敛

弱大数定律，Chebyshev不等式

强大数定律，Borel-Cantelli引理

随机变量级数的收敛，Kolmogorov三级数定理

中心极限定理，Lindeberg-Feller定理

Fourier变换, 特征函数，逆转公式， Poisson收敛定理

条件独立，尾事件，Kolmogorov 0-1律，可交换序列

1. 应用随机过程

停时，Wald引理

马氏链（离散状态, 离散时间或连续时间），一些特例（如随机游动），常返与非常返，平稳分布，渐近行为与收敛速度，可逆性与可逆分布

布朗运动的定义，轨道性质，转移概率，热核，OU过程

1. 随机过程

σ域流， 鞅、上（下）鞅（离散时间），Doob不等式，一致可积，停时定理，Doob分解

宽平稳过程与严平稳过程, Birkhoff遍历定理，

布朗运动的构造，强马氏性，生成元与马氏半群初步，随机微分方程初步

**参考书目**：

1. Rick Durrett, Probability: Theory and Examples, Third Edition, 世界图书出版社，2007.
2. Kai Lai Chung, A Course in Probability Theory, 2nd edition, Academic Press， 1974.
3. 程士宏：《程度论与概率论基础》 北京大学出版社，2004.
4. 钱敏平龚光鲁：《随机过程论》第二版， 北京大学出版社，1997.
5. 《应用随机过程》， 钱敏平、龚光鲁、陈大岳、章复熹， 高等教育出版社，2011.

**六 计算方法 （100分）**

（三门中选二）

**数值代数 （50分）**

1. 基础知识

向量范数和矩阵范数，Schur分解定理，奇异值分解定理，非负矩阵的Perron-Frobenius定理，Hermite矩阵的极小、极大定理。

1. 线性方程组的直接解法

Gauss消去法，Cholesky分解法，对称不定线性方程组的直接解法，线性方程组的条件数，条件数的估计和迭代改进。

1. 线性方程组的古典迭代法

Jacobi迭代法，Gauss-Seidel迭代法，SOR迭代法，SSOR迭代法，收敛性分析（H矩阵和正定矩阵），多项式加速（Chebyshev加速）。

1. 求解线性方程组的Krylov子空间法

共轭梯度法的基本性质，共轭梯度法的收敛性分析，预优共轭梯度法，Lanczos方法，广义极小剩余法。

**参考书目:**

【1】．“数值线性代数”，徐树方，高立，张平文编；

【2】．“矩阵计算的理论与方法”，徐树方编著。

**差分方法 （50分）**

一．一般理论

1．差分格式的构造方法；

2．差分格式的局部截断误差及其相容性；

3．差分格式的收敛性；

4．差分格式的稳定性及von Neumann条件；

5．Lax等价定理；

二．一阶双曲型方程的差分方法

1. CFL条件；
2. 单个方程的迎风格式、Lax-Friedrichs格式、Lax-Wendroff格式；
3. 双曲型方程组的特征分解及其CIR迎风格式；
4. 间断解的计算；

(5)

三．非线性双曲型守恒律初值问题的差分方法

1. 守恒形格式及Lax-Wendroff定理；
2. 离散熵条件；
3. Godunov格式;
4. 单个方程差分格式的非线性稳定性;
5. 单调格式与TVD、TVB格式;
6. 半离散有限差分与有限体积格式；

**参考书目**

1. “Numerical Methods for Conservation Laws”, R. LeVeque;
2. “偏微分方程初值问题差分方法”，胡祖炽，雷功炎著

**有限元方法 （50分）**

1．椭圆边值问题的弱解；Lax-Milgram 引理；

2．Ritz 方法和 Galerkin 方法；有限元解的提法；

3．有限元方法的要素；

4．有限元和有限元空间的基本定义与基本例子；有限元仿射族；

5．有限元解的抽象误差估计；Céa 引理； Strang 引理（1，2）；

Bramble-Hilbert 引理；

6．插值函数的误差估计、Sobolev 空间的插值理论；

7．椭圆边值问题有限元解的收敛性与误差估计；

8．Aubin-Nitsche 引理，L2-模误差估计；

9．反估计不等式。

**参考书目:**

【1】．《有限元方法讲义》， 应隆安，北京大学出版社, 1988；

【2】．《The Finite Element Method for Elliptic Problems》, P. G. Ciarlet

(6)

**七 高等统计学（100分）**

1. 充分统计量

1．充分统计量的定义与判别法；

2. 完全性；

3. 指数族分布中统计量的完全性；

4. 统计判决问题和充分统计量的优良性；

1. 假设检验
2. 一般概验；
3. 简单假设检验问题、N－P引理；
4. 关于单调似然比族的检验问题；
5. 最不利的分布；
6. 一致最优无偏检验；
7. 带讨厌参数的指数分布族的参数的UMPU检验问题；
8. 不变检验；
9. 估计
10. 引言；
11. 无偏估计；
12. 信息不等式；
13. 同变估计(位置参数)；
14. 同变估计(一般情况)；
15. 风险无偏性；
16. 估计的大样本性质
17. 相合性；
18. 渐近正态性；
19. 估计序列的大样本比较；
20. 渐近有效性；
21. 局部渐近正态性；
22. 样本中位数；
23. L－估计；
24. M－估计和R－估计

**参考书目**：

1. 郑忠国，《高等统计学》，北京大学出版社，1998
2. 茆诗松，王静龙，濮晓龙, 《高等数理统计》第二版, 高等教育出版社, 2006
3. 陈希孺, 《数理统计引论》，科学出版社, 1997

**八、算法和数据结构**

本门考试内容包括算法设计与分析、数据结构基础。具体内容包括：

1. 算法基础
   1. 算法的复杂性类：
      1. O(1), O(log n), O(n), O(n log n), O(n2), O(n3), O(2n) 等等
      2. 复杂性的基本分析技术
      3. 复杂性的基本概念：渐进复杂性，平均复杂性，最坏情况复杂性，复杂性上界和下界，分期偿还型（amortized）复杂性
   2. 算法设计技术：
      1. 贪心算法（greedy algorithms）
      2. 分治法（divide and conquer）
      3. 动态规划（dynamic programming）
      4. 周游和回溯法（traversal and backtrack）
      5. 分支限界法（branch and bound）
   3. 经典算法
      1. 排序（sort）和检索（search）算法及其数据结构支持
      2. 重要图算法：图遍历，拓扑排序，最小生成树，最短路径（单出发点和任意点之间），强连通子图，关键路径，网络最大流等
      3. 线性规划（linear programming）
      4. 串匹配算法
   4. 其他算法的概念
      1. 并行算法
      2. 概率算法
2. 数据结构
   1. 数据结构和实现，抽象数据类型
   2. 基本操作的复杂性
   3. 线性表（顺序表和链接表）
   4. 栈与队列的抽象数据类型、实现、性质和应用
   5. 二叉树和树的实现，递归和非递归的遍历算法
   6. 堆和优先队列
   7. 字典的各种表示和实现技术，检索等操作的复杂性分析：线性结构，散列表[哈希表]，二叉排序树，AVL树，红黑树，B树和B+树等
   8. 图的矩阵与邻接表数据结构表示及算法实现
   9. 其他常用数据结构
   10. 数据结构设计和性质分析

考试中如要求用某种编程语言定义数据结构和写出算法实现，考生可以从C、C++、Java、Python语言中选择一种。请注明所用语言，回答中超出语言规定的内容必须给出清晰的说明。

**参考书目：**

1. 《计算机算法基础》（第3版），余祥宣，崔国华，邹海明，华中科技大学出版社，2006.
2. 《Introduction to Algorithm》(2nd Edition)，Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest and Clifford Stein，MIT Press，影印版，高等教育出版社，2002.
3. 《算法与数据结构 — C 语言描述（第3版）》，张乃孝，陈光，孙猛，高等教育出版社，2011.
4. 《Data Structures and Algorithms Using Python》，Rance D. Necaise, Wiley, 2011.
5. 《数据结构（C语言版）》，严蔚敏，吴伟民，清华大学出版社，2011.

**九、理论计算机科学基础**

本门考试内容包括数理逻辑、集合论与图论、可计算性与计算复杂性基础。

1. 数理逻辑
   1. 非形式命题演算、命题演算形式系统*L*、*L*的完全性定理
   2. 一阶谓词演算、一阶语言、形式系统*KL*、等价和替换、前束范式、*KL*的完全性
   3. 数学系统、一致性和模型
   4. 哥德尔不完全性定理

二、集合论与图论

1. 集合的基本运算、二元关系
2. 函数的性质、反函数
3. 自然数的运算和序关系
4. 集合的等势、基数的概念和运算
5. 序数与超限递归定理
6. 欧拉图与哈密顿图
7. 无向树、生成树、环路空间、断集空间与根树
8. 平面图、欧拉公式、对偶图、外平面图
9. 图的着色
10. 支配集、覆盖集、独立集与匹配
11. 图的最短路径、最小生成树、邮递员问题、货郎担问题
12. 可计算性与计算复杂性基础
    1. 算法可计算性
    2. 图灵机
    3. 不可判定性
    4. 正则语言与有穷自动机
    5. 计算复杂性
    6. 问题类（P和NP问题类）
    7. 多项式归约（polynomial-time reducibility）
    8. Cook定理
    9. NP完全性问题

**参考书目：**

1. 《Logic for Mathematicians》(Revised Edition), A. G. Hamilton, Cambridge University Press. 影印版，清华大学出版社，2003.
2. 《Discrete Mathematical Structures》(3rd Edition)， Bernard Kolman, Robert Busby and Sharon Ross, Prentice Hall, 1996. 影印版，清华大学出版社，1997.
3. 《离散数学教程》，耿素云，屈婉玲，王捍贫，北京大学出版社，2009.
4. 《Graph Theory》(4th Edition)，Reinhard Diestel, Springer-Verlag, 2010.中文版，于青林，王涛，王光辉译，高等教育出版社，2013.
5. 《Introduction to the Theory of Computation》(2nd Edition)，Michael Sipser，Thomson Learning. 影印版，机械工业出版社，2006.
6. 《Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation》(3rd Edition)，John E. Hopcroft, Rajeev Motwani and Jeffrey D. Ullman, Pearson Education. 影印版，机械工业出版社，2007.
7. 《可计算性与计算复杂性导引》，张立昂，北京大学出版社，1996.

**信号处理考试大纲**

内容提要：

一、信号频谱与傅氏变换

数字信号处理绪论，有限区间上信号的傅氏级数和离散频谱，傅氏变换，信号与频谱， 频谱性质，离散与连续频谱。

二、离散信号与抽样定理

连续信号离散化，带限信号与奈奎斯特频率，离散信号的频率，离散信号的频谱和抽样定理，离散信号恢复连续信号，抽样与假频，抽样与重抽样。

三、滤波与褶积、Z变换

连续、离散信号的滤波和褶积，信号的能谱、能量等式，功率谱与平均功率等式，离散信号与频谱的简化表示，离散信号的Z变换。

四、线性时不变滤波器与系统

线性时不变系统及其时间响应函数、因果性和稳定性，系统的组合---串联、并联和反馈，有理系统及其时间响应函数，差分方程的单向序列解法。

五、冲激函数------函数

冲激函数（函数）的定义和频谱，函数的微商，用函数求函数的微商和频谱。

六、希尔伯特变换与实信号的复表示

实连续信号的复信号表示，希尔伯特变换，希尔伯特变换的实列，连续和离散实信号的包络、瞬时相位和瞬时频率，物理可实现信号的希尔伯特变换。

七、有限离散傅氏变换

有限离散傅氏变换，有限离散傅氏变换所引起的假信号，快速傅氏变换，有限离散傅氏变换的循环褶积，应用快速傅氏变换进行频谱分析，有限离散哈特利变换、余弦变换和广义中值函数。

八、相关分析

相关的基本概念，相关与褶积的关系，相关函数的性质，循环相关和普通相关，多道相关。

九、 物理可实现信号、最小相位信号和最小能量延迟信号

物理可实现信号，能量有限的物理可实现信号、纯相位物理可实现信号和全通滤波器，相位延迟与群延迟的概念、最小相位信号，全通滤波器的能量延迟性质、最小相位信号，Z变换为多项式和有理分式时的最小相位性质，最小相位信号和柯氏谱。

教材与参考书：

1、程乾生：数字信号处理（第二版），北京大学出版社, 2010.

2、程乾生：信号数字处理的数学原理，石油工业出版社, 1993.

3、S. D. Stearns and D. R. Hush, Digital Signal Analysis, Prentice Hall, 1990.