第六讲：条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

Email: xzhangseu@seu.edu.cn

东南大学　数学学院

- 条件概率说明了如何以合乎逻辑且相一致的方式将证据纳入人们对世界的理解当中.
- 添加条件是一种非常有用的解决问题的策略.
- 条件既可以作为更新判断依据的方法，也是解决问题的策略.
- 条件是统计学的灵魂.

条件概率的定义

定义 0.1 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间. $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, 若 $P(B) > 0$, 则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为 "在已知 B 发生的情况下，A 发生的 条件概率", 简称条件概率.

注 0.1 条件概率的两种计算方法:

- 原则性方法: $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$
- 把 B 作为样本空间看待 (经常显得非常方便): $P(A|B) = \dfrac{|AB|}{|B|}$

条件概率的例子

例 0.1 (两张牌) 洗好一副标准扑克后。从中随机抽取两张牌，无放回地一次抽一张。设 A 事件表示第一张牌为红桃，事件 B 表示第二张牌为红色。求 $P(A|B)$ 和 $P(B|A)$.

解: 由题意易知

$$P(A \cap B) = \frac{13 \cdot 25}{52 \cdot 51} = \frac{25}{204}$$
$$P(B) = \frac{26 \cdot 51}{52 \cdot 51} = \frac{1}{2}$$
$$P(A) = \frac{1}{4}$$

从而，

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{25/204}{1/2} = \frac{25}{102}$$
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{25/204}{1/4} = \frac{25}{51}$$

条件概率的注

- 条件概率大小与原事件无条件概率并没有明确的大小关系，见教材例 6.5.
- 注意哪些事件放在竖线的哪一边是非常重要的，具体来说就是 $P(A|B) \neq P(B|A)$.
- 无论 $P(A|B)$ 还是 $P(B|A)$ 都是有意义的 (直观上或数学上):
  - 牌抽取的时间顺序并不能决定出现何种条件概率.
  - 在计算条件概率时，我们考虑的是一个事件给另一个事件带来的信息，而不是一个事件是否导致了另一个事件.
- 此外，也可以通过条件概率的直接解释得出 $P(B|A) = 25/51$:
  - 如果第一张抽的牌为红桃，那么剩下的牌就由 25 张红色牌和 26 张黑色牌组成 (所有牌被下一次抽中的可能性是相同的)
  - 所以抽取一张红牌的条件概率是 $25/(25+26) = 25/51$.

条件概率的性质

定理 0.1 条件概率是概率，即若设 $P(B) > 0$，则

- 非负性：$P(A|B) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$;
- 规范性：$P(\Omega|B) = 1$;
- 可列可加性：若 $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \cdots$，互不相容，则

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$$

证明： 由条件概率的定义易证非负性与规范性。下面说明可列可加性。假设 $A_n, n = 1, \cdots$，互不相容，则 $A_nB, n = 1, \cdots$，也互不相容。从而

$$\begin{aligned} P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|B) &= \frac{P((\cup_{n=1}^{\infty} A_n)B)}{P(B)} = \frac{P(\cup_{n=1}^{\infty}(A_nB))}{P(B)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_nB)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B). \end{aligned}$$

乘法公式

定理 0.2 (乘法公式)

- 若 $P(A)>0$, 则

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \tag{1}$$

- 若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{2}$$

证明: 由条件概率的定义，移项即得 (1) 式，下证 (2). 因为

$$P(A_1)\geq P(A_2)\geq\cdots\geq P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$$

故 (2) 式中条件概率均有意义。从而由两个事件的乘法公式可得

$$\begin{aligned}
P(A_1A_2\cdots A_n)&=P(A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\\
&=P(A_1\cdots A_{n-2})P(A_{n-1}|A_1\cdots A_{n-2})P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\\
&=\cdots=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})
\end{aligned}$$

例 0.2 有两个罐子

- 在第一个罐中放有 7 个红球、2 个白球和 3 个黑球
- 在第二个罐中放有 5 个红球、4 个白球和 3 个黑球
- 从第一个罐中随机取出 1 个球放入第二个罐中
- 再从第二个罐中随机取出 1 个球来
- 试求 $B=\{$从第二个罐中随机取出的球为红球$\}$ 的概率

问题简要分析:

- 从第二个罐中随机取出的球这一随机试验结果依赖于第一次从第一个罐中所取球的结果;
- 因此, 无论是计算 $|B|$ 还是直接计算 $P(B)$ 都不很容易
- 若已知第一次从第一个罐中所取球的结果后, 则从第二个罐中随机取出的球为红球的概率很容易计算.

解:

- 以 A_1, A_2, A_3 分别表示由第一个罐子取出的是红球, 白球和黑球;
- 显然 $A_k, k=1,2,3$ 两两互不相容且 $\bigcup_{k=1}^{3} A_k = \Omega$;
- $B = \bigcup_{k=1}^{3} A_k B$;
- $P(B) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k B) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k) P(B|A_k)$;
  - $P(A_1) = \dfrac{7}{12}, P(A_2) = \dfrac{1}{6}, P(A_3) = \dfrac{1}{4}$;
  - $P(B|A_1) = \dfrac{6}{13}, P(B|A_2) = \dfrac{5}{13}, P(B|A_3) = \dfrac{5}{13}$;
- 故 $P(B) = \dfrac{7}{12} \cdot \dfrac{6}{13} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{13} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{5}{13} = \dfrac{67}{156}$;

定理 0.3 (全概率公式) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个分割，即 $A_1, \cdots, A_n$ 互不相容，且 $\cup_{k=1}^n A_k = \Omega$，若 $P(A_k) > 0, k = 1, 2, \cdots, n$，则对任一事件 B 有

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B|A_k)$$

证明： 因为

$$B = B\Omega = B(\cup_{k=1}^n A_k) = \cup_{k=1}^n (BA_k)$$

且 $BA_1, BA_2, \cdots, BA_n$ 互不相容，所以由有限可加性得

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\cup_{k=1}^n (BA_k)) = \sum_{k=1}^{n} P(BA_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B|A_k) \end{aligned}$$

全概率公式图示

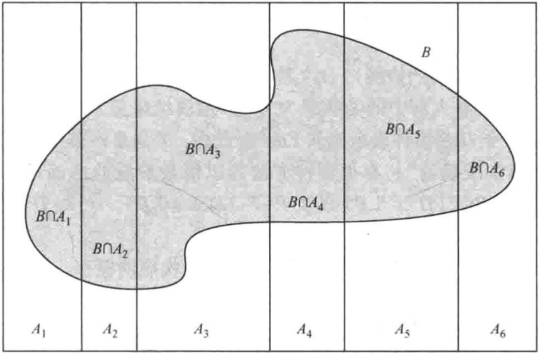


图 2.3　A_i 构成了样本空间的划分；$P(B)$ 等于 $\sum_i P(B\cap A_i)$。

全概率公式 (续)

对于全概率公式, 我们要注意以下几点

- 全概率公式的最简单形式: 如果 $0 < P(A) < 1$, 则

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

- 条件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个分割, 可改为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容, 且 $B \subset \cup_{k=1}^{n} A_k$
- 在必要时, 可把分割的概念推广到可列个事件 $(n = \infty)$ 的情形, 相应地有

$$P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k B) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)P(B|A_k).$$

贝叶斯公式

定理 0.4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个分割, 即 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容, 且 $\cup_{k=1}^n A_k = \Omega$, 若

$$P(B) > 0, P(A_k) > 0, k = 1, 2, \cdots, n$$

则

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)}.$$

特别的, 我们有

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

贝叶斯几率

定义 0.2 (几率) 一个事件的几率 (odds) 为

$$\text{odds}(A) = P(A)/P(\overline{A}) = \frac{P(A)}{1-P(A)}$$

概率的几率表示: $P(A) = \text{odds}(A)/(1+\text{odds}(\text{A}))$

定理 0.5 (贝叶斯公式的几率形式) 对于任意两个正概率事件 A 和 B, 给定以 B 为条件的情况下, A 的几率如下:

$$\frac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|\overline{A})P(\overline{A})}$$

- 后验几率 $\frac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}$ 等于先验几率 $\frac{P(A)}{P(\overline{A})}$ 乘以似然比因子 $\frac{P(B|A)}{P(B|\overline{A})}$.
- 有时候用上述形式的贝叶斯准则可以更方便地求出后验几率, 如果需要的话还可以将几率形式转换成概率形式形式.

全概率与贝叶斯内涵：由因到果，由果推因

- 在现实中把事件 B 看作结果，把事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 看作导致结果 B 的各种原因
- 全概率公式是由各种原因推理出结果事件发生的概率，是由因到果
- 在日常生活中常常是观察到某种现象，反推造成这种现象的各种原因的概率，即由果推因
- 条件概率 $P(A_k|B)$，就是在观察到结果事件 B 已经发生的情况下，推断结果事件 B 是由原因 A_k 造成的概率的大小
- $P(A_k)$：先验概率，在没有别的前提信息情况下的概率值，一般借助经验来估计，或赋予所有原因以相同的先验概率
- $P(A_k|B)$：后验概率，在获得"结果事件 B 发生"这个信息之后原因 A_k 出现的概率
- 后验概率可看作先验概率在获取了新信息之后的一种修正，贝叶斯公式恰恰提供了一种计算后验概率的工具
- 贝叶斯理论对于人工智能、深度学习等理论具有重要的指导意义，贝叶斯统计受到了从未有过的青睐，迎来了前所未有的发展机遇

定理 0.6 (条件全概率公式) 令 $A_1, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分. 设对于所有的 i 满足 $P(A_iE) > 0$, 则

$$P(B|E) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i, E)P(A_i|E)$$

定理 0.7 (条件贝叶斯公式) 设 $P(AE) > 0$ 且 $P(BE) > 0$, 则有

$$P(A|B, E) = \frac{P(B|A, E)P(A|E)}{P(B|E)}$$

条件性思维谬误：控方证人的错误

例 0.3 (控方证人的错误) 1988 年，Sally Clark 由于她的两个孩子在出生不久便死亡，因而被指控谋杀幼童。在审讯期间，控方的一个专家证人证实

- 新生儿因婴儿猝死综合症 (SIDS) 而死亡的概率为 $1/8500$
- 所以两个新生儿由于婴儿猝死综合症死亡的概率为 $(1/8500)^2$, 大约为 7300 万分之一
- 因此，他认为 Clark 清白的概率仅为 7300 万分之一.

解: 这个推理过程至少有两个问题

- 一个家庭内部成员之间死于 SIDS 是否相互独立?
  - 家庭内部成员之间死于 SIDS 相互独立时，“第一个孩子死于 SIDS” 且 “第二个孩子也死于 SIDS” 的概率是相应的两个事件概率相乘
  - 如果遗传因素或其他家庭特有的风险因素导致某些家庭内的所有新生儿面临 SIDS 的风险增加，这种独立性就不再成立了.

条件性思维谬误：控方证人的错误

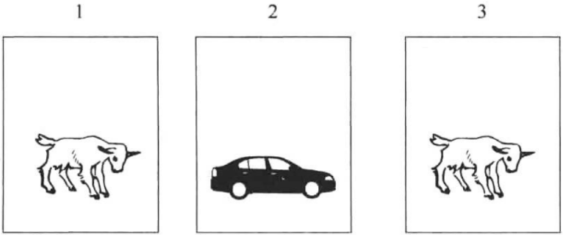
- 这个所谓的专家将两个不同的条件概率混淆了：$P(\text{清白} \mid \text{证据})$ 和 $P(\text{证据} \mid \text{清白})$ 是不一样的.
  - 专家 1 声称：如果在被告人是清白的情况下，两个孩子死亡的概率很低；那就是说 $P(\text{证据} \mid \text{清白})$ 非常小.
  - 但人们感兴趣的是，给定现在所有的证据 (孩子均死) 条件下，报告人仍清白的概率，即 $P(\text{清白} \mid \text{证据})$.
  - 由贝叶斯准则可知，

$$P(\text{清白} \mid \text{证据}) = \frac{P(\text{证据} \mid \text{清白})P(\text{清白})}{P(\text{证据})},$$

  - 所以为了计算 $P(\text{清白} \mid \text{证据})$, 这里需要考虑 $P(\text{清白})$, 也就是被告清白的先验概率。这个概率是很高的;
  - 虽然 SIDS 造成两个婴儿死亡是很罕见的，但是蓄意杀害两个婴儿的情况也很少见！
  - 基于现有证据的后验概率是对很低的 $P(\text{证据} \mid \text{清白})$ 和很高的 $P(\text{清白})$ 的一个平衡。专家的结果 $(1/8500)^2$ 是有问题的，它只是整个计算式中的一部分.

例 0.4 在 Monty Hall 主持的 “Let's Make a Deal” 节目中，有三扇门，其中有两扇门后面是一只山羊，一扇门后面是一辆车．选手将获得其所选中的那扇门后面的物品．

- 一位选手从三扇最近的门中选一扇
- Monty 知道车在哪扇门后面，并以不暴露车的位置打开剩下两扇门中的一扇，即他打开的门后面永远是山羊．
- 若剩下的两扇门后都是山羊的话，Monty 会等可能地随机选一扇门．
- 然后 Monty 会让对手选择，是换另一扇没打开的门还是不换．
- 如果对手的目标是得到车，她应该换吗?



Monty Hall 问题 (续)

解:

- 先将三扇门从 1 到 3 编号.
- 不失一般性, 可以假设选手选择的是 1 号门
- 令

$$\begin{aligned} A &= \{\text{换门得到车}\} \\ B &= \{\text{不换门得到车}\} \\ C_i &:= \{\text{车在第}i\text{扇门后面}\}, i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

- 显然, $P(B) = P(\text{不换门得到车}) = 1/3$
- 则由全概率公式

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|C_1) \cdot \frac{1}{3} + P(A|C_2) \cdot \frac{1}{3} + P(A|C_3) \cdot \frac{1}{3} \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Monty Hall 三门问题图示

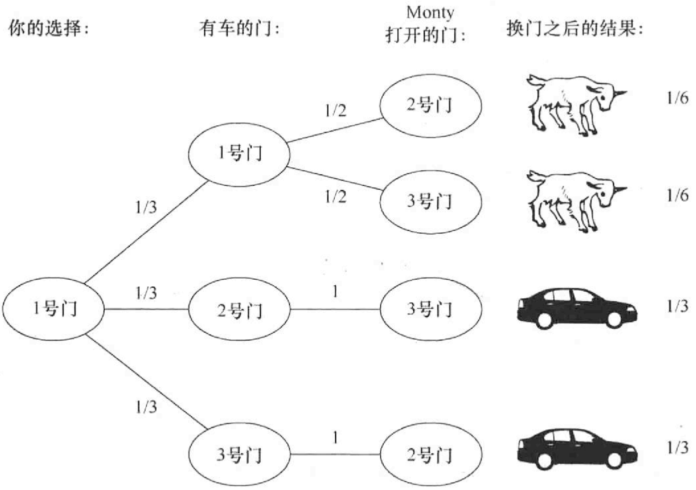


图 2.5　蒙提·霍尔（Monty Hall）问题的树状图，换门赢车的概率为 2/3。

例 0.5 质点在数轴上整数点运动, 若质点处在整数点 i 上, 则下一时刻

- 以概率 p 向右移动到 $i+1$
- 以概率 q 向左移动到 $i-1$, 其中 $p, q>0, p+q=1$
- 我们把质点的上述运动称之为随机徘徊或随机游动
- 考虑数轴上的两个吸收壁 0 与 $a(a>1)$: 质点运动到 0 或 a 之后就永远不再移动
- 现求自 $i(0<i<a)$ 出发的质点将被 0 或 a 吸收的概率

解: 令

$E_i=\{质点自i出发\}, F=\{质点在0被吸收\}, G=\{质点在a被吸收\}$.

下面对 $i=0,1,\cdots,a$ 计算

$$P_i=P(F|E_i),\quad Q_i=P(G|E_i)$$

记 $B=\{质点第一次向左移动\ 1\ 单位\}$ 并以第 1 次可能的运动情况为条件进行全概率展开可得

$$\begin{aligned} Q_i &= P(GB|E_i)+P(G\bar{B}|E_i) \\ &= P(B|E_i)P(G|BE_i)+P(\bar{B}|E_i)P(G|\bar{B}E_i) \\ &= pQ_{i+1}+qQ_{i-1},\quad i=1,2,\cdots a-1. \end{aligned}$$

将上述递推式重写为

$$Q_{i+1}-Q_i=\frac{q}{p}(Q_i-Q_{i-1}),\quad i=1,\cdots,a-1. \tag{3}$$

1. 当 $p=q=1/2$ 时, 由 $Q_0=0$ 及 $Q_a=1$ 可得

$$Q_i=\frac{i}{a},\quad i=0,\cdots,a.$$

2. 当 $p\neq q$ 时, 反复利用递推式(3)并注意到 $Q_0=0$ 可导出

$$Q_{i+1}-Q_i=\left(\frac{q}{p}\right)^i Q_1,\quad i=1,\cdots,a-1. \tag{4}$$

上式对 $i=1,\cdots,a-1$ 求和并利用 $Q_a=1$ 可得

$$Q_1=\left[\sum_{i=0}^{a-1}\left(\frac{q}{p}\right)^i\right]^{-1}=\frac{1-q/p}{1-(q/p)^a}$$

再将 (4) 式对 $i=1,\cdots,i-1$ 求和并将上述 Q_1 代入可得

$$Q_i=\frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^a},\quad i=0,\cdots,a.$$

综上可得

$$Q_i = \begin{cases} \dfrac{i}{a}, & p = q, \\ \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^a}, & p \neq q. \end{cases}$$

类似可得

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{a-i}{a}, & p = q, \\ \dfrac{(q/p)^i-(q/p)^a}{1-(q/p)^a}, & p \neq q. \end{cases}$$

例 0.6 有两种治疗肾结石的方案，其治疗效果如下：

- 方案 1: 小结石患者占 25%，大结石患者占 75%，小结石患者的治愈率是 93%，大结石患者的治愈率是 73%
- 方案 2: 小结石患者占 77%，大结石患者占 23%，小结石患者的治愈率是 87%，大结石患者的治愈率是 69%
- 不管是对小结石患者，还是大结石患者，方案 1 的治愈率都要高于方案 2
- 方案 1 优于方案 2 吗?

解: 计算两种方案的治愈率

- 记 A={患者是小结石患者}, B={患者被治愈}
- 根据全概率公式

$$P_1(B) = P_1(A)P_1(B|A) + P_1(\overline{A})P_1(B|\overline{A}) = 0.25{\cdot}0.93 + 0.75{\cdot}0.73 = 0.78$$
$$P_2(B) = P_2(A)P_2(B|A) + P_2(\overline{A})P_2(B|\overline{A}) = 0.77{\cdot}0.87 + 0.23{\cdot}0.69 = 0.8286$$

- 方案 2 的治愈率高于方案 1，可见方案 1 并不优于方案 2

敏感性问题调查方案的关键在于要使被调查者愿意作出真实的回答又能保守个人秘密, 如果调查方案有误, 被调查者就会拒绝配合, 所得调查数据将失去真实性.

调查方案: 被调查者只需要加答以下两个问题中的一个问题, 且只需要回答 “是” 或 “否” .
问题 A: 你的生日是否在 7 月 1 日之前?
问题 B: 所调查的敏感性问题.

调查方案的操作:
(1) 被调查者在没有旁人的情况下独自一人在房间内操作回答问题
(2) 被调查者从一个罐子中随机抽一球, 看过颜色后放回, 若抽到白球, 回答问题 A, 抽到红球, 回答问题 B.
(3) 被调查者无论回答问题 A 还是问题 B, 只需在仅有 “是” 与 “否” 选项的答卷上作答然后将答卷放入密封的投票箱内.

问题：假若我们有 n 张问卷，其中 k 张回答“是”，我们如何确定选定红球回答问题 B 为“是”的概率？

已知：

- 红白球的比例，即 $P(\text{红球}) := \pi, P(\text{白球}) = 1 - \pi$;
- $P(\text{是}|\text{白球}) = 0.5$;
- $P(\text{是}) \approx \frac{k}{n}$.

待求：$p := P(\text{是}|\text{红球})$.

解： 由全概率公式可得

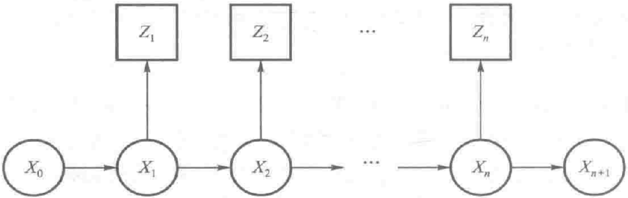
$$P(\text{是}) = P(\text{白球})P(\text{是}|\text{白球}) + P(\text{红球})P(\text{是}|\text{红球})$$

即

$$\frac{k}{n} \approx (1-\pi)\cdot 0.5 + \pi \cdot p \Rightarrow p = \frac{k/n - 0.5(1-\pi)}{\pi}$$

Bayesian 滤波

- 许多工程科学类问题都可以归结为如下图所示形式



- 系统自身的状态 X 是我们关注的随机事件，但是由于技术手段等方面的限制，无法直接对 X 进行观测，只能获取另一随机事件，即间接反映系统状态 X 的观测量 Z.
- 问题转化为已知观测量 Z 的条件下，如何对系统状态 X 进行推断. 用条件概率的语言讲，就是计算 $P(X \mid Z)$.
- 通常情况下，X 和 Z 随时间变化，分别记作 X_n 和 Z_n，其中 n 表示时间. 那么在实际应用中，到 n 时刻为止，我们掌握的实际观测数据为 $\{Z_1, \cdots, Z_n\}$,

Bayesian 滤波

- 如何实现 $P(X_n|Z_1,\cdots,Z_n) \longrightarrow P(X_{n+1}|Z_1,\cdots,Z_{n+1})$ 的递推计算?
- 注意到, 若已知 X_{n+1} 时,Z_{n+1} 与 $\{Z_1,\cdots,Z_n\}$ 独立, 则

$$
\begin{aligned}
P(X_{n+1}|Z_1,\cdots,Z_{n+1}) &= \frac{P(X_{n+1},Z_1,\cdots,Z_{n+1})}{P(Z_1,\cdots,Z_{n+1})} \\
&= \frac{P(Z_{n+1}|X_{n+1},Z_1,\cdots,Z_n)\,P(X_{n+1},Z_1,\cdots,Z_n)}{P(Z_1,\cdots,Z_{n+1})} \\
&= \frac{P(Z_{n+1}|X_{n+1})\,P(X_{n+1},Z_1,\cdots,Z_n)}{P(Z_{n+1}|Z_1,\cdots,Z_n)P(Z_1,\cdots,Z_{n+1})}
\end{aligned}
$$

- 再由

$$
\begin{aligned}
& P\left(X_{n+1}, Z_1, \cdots, Z_n\right) \\
= & \sum_{X_n} P\left(X_{n+1}, X_n, Z_1, \cdots, Z_n\right) \\
= & \sum_{X_n} P\left(X_{n+1} \mid X_n, Z_1, \cdots, Z_n\right) P\left(X_n \mid Z_1, \cdots, Z_n\right) P\left(Z_1, \cdots, Z_n\right) \\
= & \sum_{X_n} P\left(X_{n+1} \mid X_n\right) P\left(X_n \mid Z_1, \cdots, Z_n\right) P\left(Z_1, \cdots, Z_n\right)
\end{aligned}
$$

- 将上式代入前面一页表达式中可得

$$
P\left(X_{n+1} \mid Z_1, \cdots, Z_{n+1}\right)=\frac{P\left(Z_{n+1} \mid X_{n+1}\right)}{P\left(Z_{n+1} \mid Z_n, \cdots, Z_1\right)} \sum_{X_n} P\left(X_{n+1} \mid X_n\right) P\left(X_n \mid Z_1, \cdots, Z_n\right)
$$

- 上式便是对系统状态进行递推估计的 Bayesian 滤波公式，在雷达、声呐、通信、导航、机器学习等许多领域有广泛应用.

第七讲：条件概率、全概率与贝叶斯公式的应用

Email: xzhangseu@seu.edu.cn

东南大学　　数学学院

条件概率的例子：男孩女孩概率问题

例 0.7 (年长的是女孩 vs 至少一个女孩) 某家庭有两个孩子，已知至少有一个是女孩。两个孩子都是女孩的概率是多少？如果条件改为年长的孩子是女孩，那么两个都是女孩的概率又是多少？

解: 假设每个孩子都是女孩和男孩的可能性相同且不相关，那么

$$P(\text{都是女孩} \mid \text{至少有一个是女孩}) \tag{5}$$

$$= \frac{P(\text{都是女孩，至少有一个是女孩})}{P(\text{至少有一个是女孩})} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3 \tag{6}$$

$$P(\text{都是女孩} \mid \text{年长的是女孩}) \tag{7}$$

$$= \frac{P(\text{都是女孩，年长的是女孩})}{P(\text{年长的是女孩})} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2 \tag{8}$$

例 0.8 某家庭有两个孩子。随机遇到其中的一个，发现是女孩。给定这个信息后，两个孩子都是女孩的概率是多少？假设随机遇到两个孩子的可能性相同，且与性别无关.

解:

- 直观来看，结果应为 1/2.
- 令 G_1, G_2, G_3 分别表示年长、年幼、随机的孩子是女孩这三个事件。由对称性可得: $P(G_1) = P(G_2) = P(G_3) = 1/2$
- 根据朴素概率的定义，或者独立性，可得: $P(G_1 \cap G_2) = 1/4$
- 因此，$P(G_1 \cap G_2|G_3) = P(G_1 \cap G_2 \cap G_3)/P(G_3) = 1/2$
- 又因为 $G_1 \cap G_2 \cap G_3 = G_1 \cap G_2$, 所以概率为 1/2.

注 0.2 假设一个强制性法律规定：如果一个男孩有姐妹则禁止他走出家门。那么这时“随机遇到的孩子是女孩”就等价于“ 至少有一个孩子是女孩”

男孩女孩概率问题续：冬天出生的女孩

例 0.9 某家庭有两个孩子，给定条件至少一个是女孩且在冬天出生，求两个孩子都是女孩的概率。假设四个季节出生的可能性相同且性别和季节是相互独立的.

解: 由条件概率的定义，可得:

$$
\begin{aligned}
& P(\text{两个都是女孩} \mid \text{至少有一个是冬天出生的女孩}) \\
= & \frac{P(\text{两个都是女孩，至少有一个是冬天出生的女孩})}{P(\text{至少有一个是冬天出生的女孩})}
\end{aligned}
$$

由于指定的孩子是在冬天出生的女孩的概率为 $1/8$, 所以，

$$P(\text{至少有一个是在冬天出生的女孩}) = 1-(7/8)^2.$$

男孩女孩概率问题续：冬天出生的女孩

利用性别和季节是相互独立的假设，得到:

$$
\begin{aligned}
& P(\text{两个都是女孩，至少有一个是冬天出生的女孩}) \\
& = P(\text{两个都是女孩，至少有一个是冬天出生的}) \\
& = (1/4)P(\text{至少有一个是冬天出生的女孩}) \\
& = (1/4)(1 - P(\text{所有孩子都不是在冬天出生的})
\end{aligned}
$$

合在一起得到，

$$P(\text{两个都是女孩} \mid \text{至少有一个是冬天出生的女孩}) = 7/15$$

例 0.10 n 根绳 $2n$ 个头两两相接, 求 $A=\{恰好结成n个圈\}$ 的概率.

- 设想 $2n$ 个头排成一行，规定将第 $2k-1$ 个头与第 $2k$ 个端头相接;
- 令 B_i 表示第 i 根绳的头与尾恰好相接，则 $A=B_1B_2\cdots B_n$;
- 若以 $n(A)$ 表示事件 A 所包含的样本点个数，则易知

$$n(\Omega)=(2n)!,n(B_1)=2n(2n-2)!\Rightarrow P(B_1)=\frac{n(B_1)}{n(\Omega)}=\frac{1}{2n-1};$$

- $P(B_2|B_1)$ 可看作 $n-1$ 根绳某根绳头尾相接的概率，类比 n 根绳情形可得 $P(B_2|B_1)=\dfrac{1}{2(n-1)-1}=\dfrac{1}{2n-3}$;
- 同理可得$P(B_k|B_1B_2\cdots B_{k-1})=\dfrac{1}{2[n-(k-1)]-1}=\dfrac{1}{2n-2k+1},3\le k\le n$;
- 利用乘法公式可得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1B_2\cdots B_n)=P(B_1)P(B_2|B_1)\cdots P(B_n|B_1\cdots B_{n-1})\\&=\frac{1}{(2n-1)!!}\end{aligned}$$

例 0.11 在计算机中输入程序，让它自动完成如下操作：

- 在 $1-\frac{1}{2^n}$ 时刻，往盒中放入标号 $10(n-1)+1 \sim 10n$ 的 10 个球，同时取出标号为 $10(n-1)+1$ 的球，$n \geq 1$;
- 在 $1-\frac{1}{2^n}$ 时刻，往盒中放入标号 $10(n-1)+1 \sim 10n$ 的 10 个球，同时取出标号为 n 的球，$n \geq 1$;
- 在 $1-\frac{1}{2^n}$ 时刻，往盒中放入标号 $10(n-1)+1 \sim 10n$ 的 10 个球，同时随机地从盒中取出一个球，$n \geq 1$.

则在时刻 1, 盒中的球数结果如下

- 盒子中有无穷多个球;
- 盒子变为空的;
- 盒子变为空的概率等于 1?

解:

- 记 E={在时刻 1 时盒子变空 };
- $\overline{E}$={在时刻 1 时盒中有球未被取出 };
- 记 A_k={在时刻 1 时 k 号球仍在盒中未被取出 }，则 $\overline{E}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$;
- 由概率的次可加性知

$$P(\overline{E})=P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)\leq\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k);$$

- 为证 $P(\overline{E})=0$，只需证明 $P(A_k)=0,\ k\geq 1$;
- 由于证法类似，仅以证明 $P(A_1)=0$ 为例;

取球问题

- 记 B_n=\{在 $1-\dfrac{1}{2^n}$ 时刻 1 号球未被取出 \}，易知 $A_1=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$;
- 令 $C_m=\bigcap\limits_{n=1}^{m}B_n$, 则有

$$C_m=\bigcap_{n=1}^{m}B_n\supset\bigcap_{n=1}^{m+1}B_n=C_{m+1}, \text{且} \lim_{m\to\infty}C_m=A_1;$$

- 由概率的上连续性知

$$P(A_1)=P\left(\lim_{m\to\infty}C_m\right)=\lim_{m\to\infty}P\left(C_m\right);$$

- 下面求 $P(C_m)$, 即 $P\left(\bigcap_{n=1}^m B_n\right)=\prod_{n=1}^m\frac{9n}{9n+1}=\prod_{n=1}^m\left(1-\frac{1}{9n+1}\right)$;
  - B_1: 在 $1/2$ 时刻，盒中 10 个球，1 号球未被取出，故 $P(B_1)=\frac{9}{10}$;
  - B_2: 在 $3/4$ 时刻，盒中 19 个球，1 号球未被取出，故 $P(B_2|B_1)=\frac{18}{19}$;
  - B_n: $P(B_n|B_1B_2\cdots B_{n-1})=\frac{9n}{9n+1}$.
- $P(A_1)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{9n+1}\right)=0$. 同理可证 $P(A_k)=0,\ k=2,3,\cdots$.

例 0.12 设罐中有 b 个黑球，r 个红球，每次随机的取出一球，取出后将原球放回，还加进 c 个同色球和 d 个异色球。记 $B_i := \{第i次取出的是黑球\}, R_j := \{第j次取出的是红球\}$. 若连续从罐子中取出三个球，其中有两个红球，一个黑球，则由乘法公式可得

$$
\begin{aligned}
P(B_1R_2R_3) &= P(B_1)P(R_2|B_1)P(R_3|B_1R_2) \\
&= \frac{b}{b+r}\cdot\frac{r+d}{b+r+c+d}\cdot\frac{r+d+c}{b+r+2c+2d} \\
P(R_1B_2R_3) &= P(R_1)P(B_2|R_1)P(R_3|R_1B_2) \\
&= \frac{r}{b+r}\cdot\frac{b+d}{b+r+c+d}\cdot\frac{r+d+c}{b+r+2c+2d} \\
P(R_1R_2B_3) &= P(R_1)P(R_2|R_1)P(B_3|R_1R_2) \\
&= \frac{r}{b+r}\cdot\frac{r+c}{b+r+c+d}\cdot\frac{b+2d}{b+r+2c+2d}
\end{aligned}
$$

显然以上概率与黑球在第几次抽取有关.

罐子模型（波利亚模型）

- 当 $c=-1, d=0$ 时，即为不返回抽样。此时前次抽取结果会影响后次抽取结果，但只要抽取的黑球与红球个数确定，则概率不依赖其抽出球的次序，都是一样的.

$$P(B_1R_2R_3)=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)=\frac{br(r-1)}{(b+r)(b+r-1)(b+r-2)}.$$

- 当 $c=0, d=0$ 时，即为返回抽样。此时前次抽取结果不会影响后次抽取结果，故上述三个概率相等且都等于

$$P(B_1R_2R_3)=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)=\frac{br^2}{(b+r)^3}.$$

- 当 $c>0, d=0$ 时，称为传染病模型。此时每次取出球后会增加下一次取出同色球的概率，或换言之，每发现一个传染病患者，以后都会增加再传染的概率。与前两种情况一样，三个概率都等于

$$P(B_1R_2R_3)=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)=\frac{br(r+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)}.$$

罐子模型（波利亚模型）

- 从上面的结果可以看出，只要 $d=0$，以上三个概率都相等，即只要抽取的黑球与红球的个数确定，则概率不依赖于抽出黑红球的次序.
- 当 $c=0, d>0$ 时，称为安全模型。此模型可解释为：每当事故发生了 (当红球被取出)，安全工作就抓紧一些，下次再发生事故的概率就会减少，而当事故没有发生时 (黑球被取出)，安全工作就放松一些，下次再发生事故的概率就会增大，此时，上述三个概率分别为

$$
\begin{aligned}
P(B_1R_2R_3) &= \frac{b}{b+r}\cdot\frac{r+d}{b+r+d}\cdot\frac{r+d}{b+r+2d}\\
P(R_1B_2R_3) &= \frac{r}{b+r}\cdot\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{r+d}{b+r+2d}\\
P(R_1R_2B_3) &= \frac{r}{b+r}\cdot\frac{r}{b+r+d}\cdot\frac{b+2d}{b+r+2d}
\end{aligned}
$$

例 0.13 设罐中有 b 个黑球，r 个红球，每次随机取出一球后将原球放回并加进 c 个同色球，如此反复进行。试证明：在前 $n = n_1 + n_2$ 次取球中，取出了 n_1 个红球和 n_2 个黑球的概率为

$$C_n^{n_1}\frac{a(a+c)(a+2c)\cdots(a+n_1c-c)b(b+c)(b+2c)\cdots(b+n_2c-c)}{(a+b)(a+b+c)(a+b+2c)\cdots(a+b+nc-c)}.$$

例 0.14 有三个罐子, 各装有两个球, 分别为两个白球、一白一黑和两个黑球. 任意取出一个罐子, 摸出一球, 发现是白球. (1) 求该罐中另一个球也是白球的概率; (2) 把摸出的球放回罐中, 再从该罐中随机摸出一球, 求该球也是白球的概率.

解:

- $A_k, k = 1, 2$: 表示第 k 次取球取出的是白球的事件;
- $B_k, k = 1, 2, 3$: 表示取出的是装有两白、一白一黑和两黑球的罐子;
- 问题 (1) 要求的是该白球取自两白的罐子的概率, 即 $P(B_1|A_1)$;
- 由条件概率公式, 得 $P(B_1|A_1) = \frac{P(A_1B_1)}{P(A_1)} = \frac{P(B_1)P(A_1|B_1)}{P(A_1)}$;
  - $P(B_1) = 1/3$, $P(A_1|B_1) = 1$;
  - $P(A_1) = \sum_{k=1}^{3} P(B_k)P(A_1|B_k) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{2}$.
- $P(B_1|A_1) = \dfrac{1/3 \cdot 1}{1/2} = 2/3$.

- 问题 (2) 是在同一个罐子两次有放回的取球, 要求的是在第一次取出白球的条件下, 第二次取出的还是白球的条件概率, 即 $P(A_2|A_1)$
- 由条件概率的定义, 知$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$;
  - $P(A_1) = \sum_{k=1}^{3} P(B_k)P(A_1|B_k) = \dfrac{1}{3}\cdot 1 + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\cdot 0 = \dfrac{1}{2}.$
  - $P(A_1A_2) = \sum_{k=1}^{3} P(B_k)P(A_1A_2|B_k) = \dfrac{1}{3}\cdot 1 + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}\cdot 0 = \dfrac{5}{12}.$
- $P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \dfrac{5/12}{1/2} = \dfrac{5}{6}.$

摸球问题

例 0.15 甲盒中有球 5 红 1 黑，乙盒中有球 5 红 3 黑. 随机取出一个盒子，从中无放回地相继取出两个球，试求在第一个球是红球的条件下，第二个球也是红球的概率.

解:

- B :={第一个球是红球}, C :={第二个球是红球}
- $P(C|B) = \dfrac{P(BC)}{P(B)}$
  - A :={取出的是甲盒}
  - $P(BC) = P(A)P(BC|A) + P(\overline{A})P(BC|\overline{A}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{43}{84}$
  - $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8} = \frac{35}{48}$
- $P(C|B) = \dfrac{43}{84}\Big/\dfrac{35}{48} = \dfrac{172}{245}$

例 0.16 袋中有 r 个红球与 b 个黑球. 每次从袋中任摸出 1 球并连同 s 个同色球一起放回. 以 R_n 表示第 n 次摸出红球, 试证 $P(R_n)=\dfrac{r}{r+b}$.

证明: 利用归纳法来证明:$n=1$ 时, $P(R_1)=\dfrac{r}{r+b}$ 显然成立.

假设 $n-1$ 时命题成立. 为求 $P(R_n)$, 我们以第 1 次取球的可能结果 R_1 与 $\bar{R}_1$ 作为 Ω 的分割, 用全概率公式可得:

$$
\begin{aligned}
P(R_n) &= P(R_1)P(R_n|R_1)+P(\bar{R}_1)P(R_n|\bar{R}_1) \\
&= \frac{r}{r+b}\cdot\frac{r+s}{r+s+b}+\frac{b}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b+s} \\
&= \frac{r}{r+b}
\end{aligned}
$$

注 0.3 当 $s=0$ 时相当于放回摸球, 而 $s=-1$ 相当于不放回摸球.

掷硬币问题

例 0.17 甲、乙二人抛掷一枚均匀的硬币，甲抛了 100 次，乙抛了 101 次. 求事件 E :={乙抛出的正面次数比甲多} 的概率.

解:

- 如果甲和乙都抛掷这枚均匀的硬币 100 次，那么当然会有三种不同的可能结果
    - A_0:甲乙抛出的正面次数一样多
    - A_1:甲抛出的正面次数比乙多
    - A_2:乙抛出的正面次数比甲多
    - $P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)=1$且 $P(A_1)=P(A_2)$
- 以乙第一次抛出的硬币结果对样本空间进行分割:
    - 若 B ={乙第一次时抛出的是正面} 发生，则乙只要在接下来的 100 次抛掷中，抛出的正面次数不比甲少即可，即

$$P(E|B)=P(A_0)+P(A_1)$$

    - 若 $\overline{B}$:={乙第一次时抛出的是反面} 发生，则乙只要在接下来的 100 次抛掷中，抛出的正面次数比甲多即可，即 $P(E|\overline{B})=P(A_1)=P(A_2)$
- $P(E)=P(B)P(E|B)+P(\overline{B})P(E|\overline{B})=\frac{1}{2}\left(P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)\right)=\frac{1}{2}.$

对战获胜概率问题

例 0.18 甲、乙进行某项对战比赛，每回合胜者得 1 分，败者不得分. 比赛进行到有 1 人比另外 1 人多 2 分终止，多 2 分者获胜. 现知每回合甲胜的概率为 $p \in (0,1)$. 试求 $A :=\{$甲最终获胜$\}$ 的概率.

解: 法一 (经典解法)

- 显然甲只能在偶数个回合后获胜
- 记 $A_{2n}=\{$甲在 $2n$ 个回合后获胜$\}$，则 $A=\cup_{n=1}^{\infty} A_{2n}$
- $A_{2n}, n \geq 1$ 两两互不相容且$P(A_{2n})=(2p(1-p))^{n-1}p^2$
- 甲最终获胜的概率

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_{2n}) = p^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2p(1-p))^{n-1} \\
&= p^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2p(1-p))^{n} = \frac{p^2}{1-2p(1-p)}.
\end{aligned}
$$

解: 法二 (全概率公式)

- 以前两个回合的战绩对样本空间进行分割
- 分别以 B_1, B_2, B_3 表示甲二胜、一胜一败、二败事件
- $P(B_1) = p^2$, $P(B_2) = 2p(1-p)$, $P(B_3) = (1-p)^2$
- $P(A|B_1) = 1$, $P(A|B_2) = P(A)$, $P(A|B_3) = 0$
- 由全概率公式得 $P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i) = p^2 + 2p(1-p)P(A)$
- $P(A) = \dfrac{p^2}{1-2p(1-p)}$

解: 法三 (随机游动)

- 考察质点在数轴整数点上的随机游动: 在整数点 $x=n$
  - 以概率 p 向右移动到整数点 $x=n+1$,
  - 以概率 $1-p$ 向左移动到整数点 $x=n-1$
- 以 p_n 表示 “质点由 $x=n$ 出发, 未达 -2 前先到达 2 的概率”
- 显然, $p_{-2}=0, p_2=1$
- 甲获胜的概率即为: p_0
- 由全概率公式易得

$$\begin{cases} p_0 = pp_1 + (1-p)p_{-1}, \\ p_1 = pp_2 + (1-p)p_0 = p + (1-p)p_0, \\ p_{-1} = pp_0 + (1-p)p_{-2} = pp_0. \end{cases}$$

- $p_0 = p(p+(1-p)p_0) + (1-p)(pp_0) = p^2 + 2p(1-p)p_0$
- 故

$$p_0 = \frac{p^2}{1-2p(1-p)}.$$

例 0.19 (随机抛硬币) 假设有一枚均匀的硬币和一枚以概率 $3/4$ 正面朝上的不均匀硬币. 随机选取一枚硬币掷 3 次, 3 次都是正面朝上. 试问:

1. 给定上述信息后, 选取的硬币是均匀硬币的概率有多大?
2. 接下去掷第四次时, 仍是正面朝上的概率是多少?

解: 令

$$A := \{\text{选取的硬币掷 3 次均正面朝上}\}$$

$$F := \{\text{选取的硬币是均匀的}\}, \quad H := \{\text{第 4 次正面朝上}\}$$

则

$$\begin{aligned}
P(F|A) &= \frac{P(A|F)P(F)}{P(A)} = \frac{P(A|F)P(F)}{P(A|F)P(F) + P(A|F^c)P(F^c)} \\
&= \frac{(1/2)^3 \cdot 1/2}{(1/2)^3 \cdot 1/2 + (3/4)^3 \cdot 1/2} \approx 0.23 \\
P(H \mid A) &= P(H \mid F, A)\, P(F \mid A) + P(H \mid F^c, A)\, P(F^c \mid A) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 0.23 + \frac{3}{4} \cdot (1 - 0.23) \approx 0.69.
\end{aligned}$$

罕见病检测诊断问题

例 0.20 考虑以验血结果诊断某种罕见病的患病概率:

- 某罕见病的发病率为 1%
- 通过验血诊断该病的误诊率为 5%, 即非患者中有 5% 的人验血结果为阳性, 患者中有 5% 的人验血结果为阴性
- 现已知某人验血结果为阳性, 试求他患有此病的概率

解:

- 记 D :={患有此病}, T_1 :={第一次验血结果为阳性}.
- 要求的概率是: $P(D|T_1) = \dfrac{P(DT_1)}{P(T_1)} = \dfrac{P(D)P(T_1|D)}{P(T_1)}$
- 由题意可知

$$P(D) = 1\%,\ P(\overline{D}) = 99\%,\ P(T_1|D) = 95\%,\ P(T_1|\overline{D}) = 5\%$$

$$\begin{aligned} P(T_1) &= P(D)P(T_1|D) + P(\overline{D})P(T_1|\overline{D}) = 1\% \cdot 95\% + 99\% \cdot 5\% \\ &= 0.0685 \end{aligned}$$

罕见病检测诊断问题

- $P(D|T_1) = \dfrac{P(D)P(T_1|D)}{P(T_1)} = \dfrac{1\% \cdot 95\%}{0.0685} \approx 0.16.$
- 几率方法:

$$\frac{P(D|T_1)}{P(D^c|T_1)} = \frac{P(D)}{P(D^c)} \frac{P(T_1|D)}{P(T_1|D^c)} = \frac{1}{99} \cdot \frac{0.95}{0.05} \approx 0.19$$

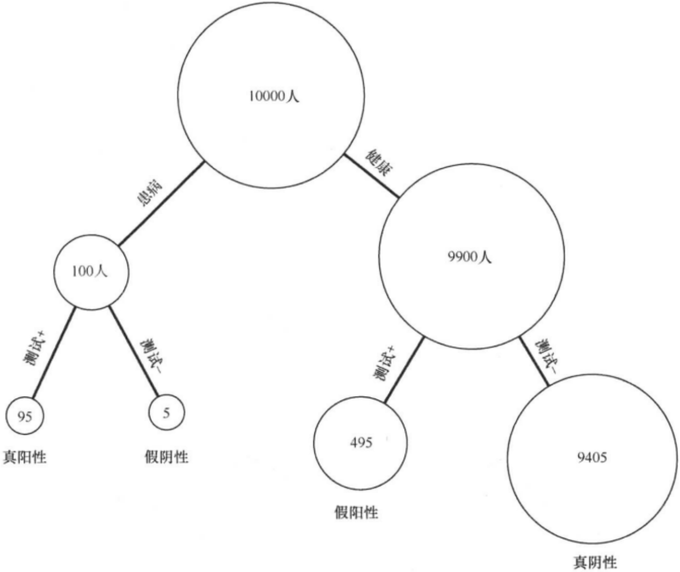
由几率与概率之间的关系可知

$$P(D|T_1) = 0.19/(1+0.19) \approx 0.16,$$

与上述结果一致.

- 用几率形式的贝叶斯准则计算更迅速的原因是此时不需要计算普通贝叶斯准则的分母.

罕见病检测诊断问题图示



罕见病检测诊断问题

例 0.21 接上例，检测结果为阳性的某人，决定进行第二次检测．假设新的检测结果与之前的结果相互独立，且有相同的敏感性和特异性．若第二次检测结果也为阳性，试求此人患有此病的概率．

解:

- 记 T_2 :={第二次验血结果为阳性}
- 要求的概率是: $P(D|T_1T_2)$
- 一步法: 将两个检测结果一次性都考虑在内以进行概率更新,
  - 计算几率

$$\frac{P(D|T_1\cap T_2)}{P(D^c|T_1\cap T_2)}=\frac{P(D)}{P(D^c)}\frac{P(T_1\cap T_2|D)}{P(T_1\cap T_2|D^c)}=\frac{1}{99}\cdot\frac{0.95^2}{0.05^2}=\frac{361}{99}\approx 3.646$$

  - $P(D|T_1T_2)=\frac{3.646}{1+3.646}\approx 0.78.$

罕见病检测诊断问题

- 两步法:
  - 在完成第一次检测后，某人患有此病的后验几率为

$$\frac{P(D|T_1)}{P(D^c|T_1)} = \frac{1}{99} \cdot \frac{0.95}{0.05} \approx 0.19$$

  - 将后验几率作为新的先验几率，然后基于第二次检测结果更新后验几率

$$\begin{aligned}\frac{P(D|T_1 \cap T_2)}{P(D^c|T_1 \cap T_2)} &= \frac{P(D|T_1)}{P(D^c|T_1)} \frac{P(T_2|D, T_1)}{P(T_2|D^c, T_1)} \\ &= (\frac{1}{99} \cdot \frac{0.95}{0.05}) \frac{0.95}{0.05} \\ &= \frac{361}{99} \approx 3.646\end{aligned}$$

  - $P(D|T_1T_2) = \dfrac{3.646}{1 + 3.646} \approx 0.78$

例 0.22 甲、乙二人之间经常用 E-mail 相互联系，他们约定在收到对方信件的当天即给 E-mail 回复. 由于线路问题，每 n 份 E-mail 中会有 1 份不能在当天送达收件人. 甲在某日发了 1 份 E-mail 给乙，但未在当天收到乙的回音. 试求乙在当天收到了甲发给他的 E-mail 的概率.

解:

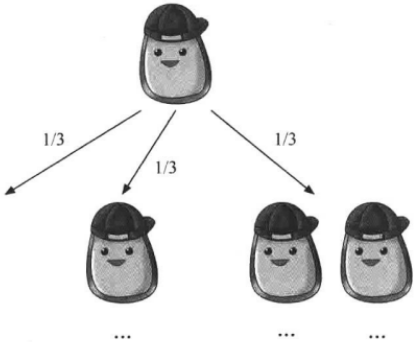
- 在这个问题中，包含了两个不确定的环节:
  - 甲发给乙的 E-mail 不一定在当天到达乙处
  - 乙回给甲的 E-mail 不一定在当天到达甲处
- A={乙在当天收到甲的 E-mail}, B={甲在当天收到乙回的 E-mail}
- $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(A)P(\overline{B}|A) + P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})}$
- 由题中条件知

$$P(A) = \frac{n-1}{n},\ P(\overline{A}) = \frac{1}{n},\ P(\overline{B}|A) = \frac{1}{n},\ P(\overline{B}|\overline{A}) = 1.$$

- $P(A|\overline{B}) = \dfrac{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot 1} = \dfrac{n-1}{2n-1} < 1/2$

例 0.23 (分支过程) 池塘里只有一只变形虫叫作 Bobo.

- 每过 1 分钟, Bobo 有三种结果：死去、分裂成两个或保持原状
- 三种结果出现的概率相同
- 此后所有活着的 Bobo 都将继续以这种方式相互独立地进行下去
- 那么这个变形虫种族最终灭亡的概率是多少?



解:

- 令 $D := \{\text{最终种族灭绝}\}$, 本题希望求出 $P(D)$.
- 我们在第一步结果的基础上即以 1 分钟后的结果进行分析:
  - 令 $B_i := \{1\text{分钟后Bobo变成的变形虫个数}\}(i = 0, 1, 2)$
  - 易知 $P(D|B_0) = 1$ 和 $P(D|B_1) = P(D)$, $P(D|B_2) = P(D)^2$.
- 利用全概率公式有

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(D|B_0) \cdot \frac{1}{3} + P(D|B_1) \cdot \frac{1}{3} + P(D|B_2) \cdot \frac{1}{3} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{3} + P(D) \cdot \frac{1}{3} + P(D)^2 \cdot \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

- 由上式可解得 $P(D) = 1$, 即变形虫种族最终会以概率 1 灭绝.

例 0.24 包括甲、乙二人在内的 2^n 名乒乓球运动员参加一场淘汰赛.

- 第一轮任意两两配对比赛，然后 2^{n-1} 名胜者再任意两两配对进行第二轮比赛，如此下去，直至第 n 轮决出一名冠军为止
- 假定每一名运动员在各轮比赛中胜负都是等可能的
- 求 $B :=\{$甲、乙二人在淘汰赛中相遇$\}$ 的概率

对战相遇概率问题

解: 记 $p_n := P(B)$, 即甲、乙二人在 2^n 人参赛的比赛中相遇的概率

- 以甲、乙二人是否在第一轮比赛相遇对样本空间进行分割
- $A :=${甲、乙二人在第一轮比赛中相遇}
- 由全概率公式

$$p_{n+1} = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = P(A) + (1 - P(A)) \cdot \frac{1}{4}p_n$$

- $P(A)$: 甲、乙二人在第一轮比赛中相遇的概率
  - 采用无编号分组模式考虑
  - 2^{n+1} 个人两两配对的方式一共有 $\dfrac{(2^{n+1})!}{2^{2^n}(2^n)!}$ 种
  - 甲、乙二人配为一对的配对方式有 $\dfrac{(2^{n+1}-2)!}{2^{2^n-1}(2^n-1)!}$ 种
  - 将上述两式相除, 即得 $P(A) = \dfrac{1}{2^{n+1}-1}$
- $p_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}-1} + \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2^{n+1}-1})p_n$
- $p_{n+1} = \frac{1}{2^n}$

例 0.25 甲乙轮流掷一均匀骰子. 甲先掷, 以后每当某人掷出 1 点后则交给对方掷, 否则此人继续掷. 试求事件 $A_n = \{第n次由甲掷\}$ 的概率.

解: 记 $p_n = P(A_n)$, 则以 A_{n-} 与 $\bar{A}_{n-1}$ 为分割用全概率公式可得:

$$\begin{aligned} p_n = P(A_n) &= P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1}) + P(\bar{A}_{n-1})P(A_n|\bar{A}_{n-1}) \\ &= p_{n-1}\frac{5}{6} + (1-p_{n-1})\frac{1}{6} = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

经过整理, 可将上式化为以下递推的形式

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\left(p_{n-1} - \frac{1}{2}\right), n = 2, 3, \cdots.$$

由 $p_1 = 1$ 可得 $p_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. 因此, 我们有

$$p_n = P(A_n) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right], n = 1, 2, \cdots,$$

结绳问题续

例 0.26 n 根绳 $2n$ 个头两两相接, 求 $A_n = \{$恰好结成n个圈$\}$ 的概率.

解: 此前曾用条件概率解过本题, 现利用全概率公式给出一个解答.

- 将 n 根短绳作编号并记 $p_n = P(A_n)$
- 记 B=$\{$1 号绳连成 1 个圈$\}$ 并用 B 和 $\overline{B}$ 作为对 Ω 的分划
- 由全概率公式可知

$$p_n = P(A_n) = P(B)P(A_n|B) + P(\overline{B})P(A_n|\overline{B})$$

- $P(B) = \dfrac{1}{2n-1}, P(A_n|\overline{B}) = 0, P(A_n|B) = P(A_{n-1}) = p_{n-1}$
- $p_n = P(A_n) = \frac{1}{2n-1}p_{n-1}, n = 2, 3, \cdots .$
- 反复利用上式, 并由 $p_1 = 1$ 可得

$$p_n = \frac{1}{(2n-1)!!}, n = 1, 2, \cdots .$$

例 0.27 某公司需招收秘书一名, 共有 n 个人报名应聘, 公司面试规则与录取策略如下:

- 面试规则: 逐个面试, 并在面试当时对应聘者表态是否录用, 一旦对应聘者表态不录用, 不可改变决定
- 录用策略:
  - 不录用前 $k(1 \leq k < n)$ 个面试者
  - 自第 $k+1$ 个开始, 只要发现某人比他前面的所有面试者都好, 就录用他, 否则就录用最后一个
- 试对该公司的策略作概率分析

秘书问题

- $A :=$ {最佳人选被录用}
- $B_j :=$ {最佳人选在面试顺序中排在第 j 位}
- 全概率公式: $P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)$
  - $P(B_j) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, j = 1, \cdots, n$
  - 当 $1 \le j \le k$ 时, $P(A|B_j) = 0$ (最佳人选位于前 k 个面试者, 不会被录用)
  - 当 $k+1 \le j \le n$ 时, $P(A|B_j) = \dfrac{k}{j-1}$ (最佳人选被录用当且仅当前 $j-1$ 个面试者中的最佳者在前 k 个人中)
- $P(A) = \dfrac{1}{n} \sum_{j=k+1}^{n} \dfrac{k}{j-1} = \dfrac{k}{n} \sum_{j=k}^{n-1} \dfrac{1}{j} \sim \dfrac{k}{n} \ln \dfrac{n}{k}$
- 令 $g(x) = \dfrac{x}{n} \ln \dfrac{n}{x}$, $x > 0$, 则 $g'(x) = \dfrac{1}{n} \ln \dfrac{n}{x} - \dfrac{1}{n} = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{n}{e}$
- 若要 $P(A)$ 达到最大, 只需 k 取最靠近 $\frac{n}{e}$ 的正整数
- 最大概率值为 $g\left(\frac{n}{e}\right) = \frac{1}{e} \approx 0.36788$ 与 n 无关

第八讲：事件的独立性

Email: xzhangseu@seu.edu.cn

东南大学　数学学院

两个事件的独立性

- 直观上来说，两个事件的独立性是指：一个事件的发生不影响另一个事件的发生。比如在掷两颗骰子的实验中，第一颗骰子的点数和第二颗骰子的点数是互不影响的.
- 从概率的角度看，$P(A|B)$ 与 $P(A)$ 的差别在于：事件 B 的发生改变了事件 A 发生的概率，也即事件 B 对事件 A 有某种影响。故如果 A 与 B 的发生是相互不影响的，则有

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B).$$

上面两式均等价于

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{9}$$

- 注意到 (9) 式对 $P(B) = 0$ 或 $P(A) = 0$ 仍然成立，为此，我们用 (9) 作为两个事件相互独立的定义.

两个事件独立性的定义

定义 0.3 如果对事件 A 与 B 有

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

成立，则称 **事件 A 与 B 相互独立**, 简称 **A 与 B 独立**. 否则称 A 与 B 不独立或相依.

注 0.4

- 零概率事件 E 与任何事件相互独立，特别的，不可能事件与任何事件相互独立
- 非零概率互不相容事件，一定不独立
- 非零概率相互独立事件，一定相容

如何确定事件的独立性:

- 实际问题中，两个事件的独立大多根据经验及相互有无影响的直观性来判断.
- 但对于较复杂事件，有无相互影响并不是很直观，则需要验证 (9) 式是否成立来说明独立性.

对立事件的独立性

定理 0.8 若 A 与 B 独立，则 A 与 $\overline{B}$ 独立，$\overline{A}$ 与 B 独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

证明: 我们仅证 $P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$, 其余类似可证.

$$\begin{aligned} P(A\overline{B}) &= P(A-B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1-P(B)) = P(A)P(\overline{B}) \end{aligned}$$

对于上面的定理直观上来理解也是很容易的：因 A, B 独立，故 A 的发生不影响 B 的发生，从而也不会影响 B 的不发生，$\cdots$

三个事件的独立性

定义 0.4 设 A,B,C 三个事件，如果有

$$\left.\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \tag{11}$$

则称 A,B,C 相互独立。如果仅有 (10) 式成立，则称 A,B,C 两两独立.

两两独立与相互独立的关系

- 由定义可知，三个事件相互独立必能推出两两独立.
- 但两两独立未必能推出相互独立，即 (10) 式成立，不一定能推出 (11) 成立
  - 考虑独立投掷两枚均匀硬币的随机试验，设事件 A 代表第一枚硬币正面朝上，事件 B 代表第二枚硬币正面朝上，事件 C 表示两枚硬币结果相同。易知: A B 和 C 是两两独立，但

$$P(A\cap B\cap C)=1/4\neq 1/8=P(A)P(B)P(C).$$

  - 考虑一个均匀的正四面体，第一二三面分别染上红 / 白 / 黑色，第四面同时染上红白黑色。现在以 A,B,C 分别记投一次四面体出现红，白，黑色朝下的事件。则易有

$$\begin{aligned} P(A)=P(B)=P(C)&=1/2\\ P(AB)=P(BC)=P(AC)&=1/4\\ P(ABC)&=1/4 \end{aligned}$$

- 反之，如果 (11) 成立，是否能推出 (10) 成立？
  - 考虑一个均匀的正八面体，第 1, 2, 3, 4 面染上红色，第 1, 2, 3, 5 面染上白色，第 1, 6, 7, 8 面染上黑色。现在以 A, B, C 分别记投一次八面体出现红，白，黑色朝下的事件，则

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(B) = P(C) = 4/8 = 1/2 \\
P(ABC) = 1/8 \\
P(AB) = 3/8 \neq 1/4 = P(A)P(B)
\end{aligned}
$$

三个以上事件的独立性

定义 0.5 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为一概率空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$, 对任意的 $1\le k\le n$ 及任意的 $1<j_1<j_2<\cdots<j_k\le n$ 均有:

$$P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k})=P(A_{j_1})P(A_{j_2})\cdots P(A_{j_k}) \tag{12}$$

成立，则称事件 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立.

- (12) 式共有多少个等式?

$$\left.\begin{aligned}
&P(A_{j_1}A_{j_2})=P(A_{j_1})P(A_{j_2})\\
&P(A_{j_1}A_{j_2}A_{j_3})=P(A_{j_1})P(A_{j_2})P(A_{j_3})\\
&\qquad\vdots\\
&P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)
\end{aligned}\right\} C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$$

- 从定义可以看出，n 个相互独立事件中的任取 $m(2\le m\le n)$ 个事件仍是相互独立的，而且任意一部分与另一部分也是独立的.
- 类似于前面的证明，将相互独立事件中的任一部分换为对立事件，所得诸事件仍是相互独立的.

任意多个事件相互独立

定义 0.6 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一概率空间，每个 $t \in T$ 有 $A_t \in \mathcal{F}$. 称 $\{A_t, t \in T\}$ 为独立事件族，如果对 T 的任意有限子集 $\{t_1, t_2, \cdots, t_s\}$，事件 $A_{t_1}, A_{t_2}, \cdots, A_{t_s}$ 相互独立.

例 0.28 $\mathcal{F}$ 中事件序列 $\{A_n\}$ 为相互独立的充分必要条件是，任意 $n \geq 1$，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 独立；等价的，任意有限个自然数 $k_1, \cdots, k_s$ 有

$$P(A_{k_1} A_{k_2} \cdots A_{k_s}) = P(A_{k_1}) P(A_{k_2}) \cdots P(A_{k_s})$$

条件独立

定义 0.7 称事件 A 和 B 是关于 E 条件独立的，如果

$$P(A \cap B|E) = P(A|E)P(B|E)$$

- 两个事件可以在给定事件 E 的条件下是条件独立的，但它们不是独立的.
- 两个事件可以是独立但却不是关于 E 条件独立的.
- 两个事件可以关于 E 条件独立但关于 E^c 不存在条件独立.

例 0.29 假设有两枚硬币，一枚是均匀的，一枚是不均匀的。从两枚硬币中随机的选一枚硬币并进行抛掷 2 次，若令

$$F := \{\text{选取的硬币是均匀的}\}$$
$$A_1 := \{\text{第一次投掷硬币正面朝上}\}$$
$$A_2 := \{\text{第二次投掷硬币正面朝上}\}$$

则给定 F 为条件，A_1 和 A_2, 是相互独立的，A_1 和 A_2 并不是无条件独立的，因为 A_1 会提供关于 A_2 的信息.

独立不意味着条件独立

例 0.30 假设只有我的朋友 Alice 和 Bob 给我打过电话。每天他俩都会相互独立地决定是否给我打电话。若令

$$A := \{\text{Alice 给我打电话}\}$$
$$B := \{\text{Bob 给我打电话}\}$$
$$R := \{\text{听到电话铃响}\}$$

- 显然，A 和 B 是无条件独立的.
- 但现在我听到一声电话铃响，那 A 和 B 就不再独立了：如果这个电话不是 Alice 打的，那就肯定是 Bob 打的。从而

$$P(B|R) < 1 = P(B|A^cR) = \frac{P(BA^cR)}{P(A^cR)} = \frac{P(BA^c|R)}{P(A^c|R)}.$$

  显然: $P(BA^c|R) > P(B|R)P(A^c|R)$
- B 与 A^c 关于 R 不条件独立，A, B 亦是如此.

例 0.31 假设有两种课程：好的课程和坏的课程。在好的课上，如果你努力，就很有可能得到 A. 在坏的课上，教授随机分配给学生分数，而不管他们是否努力。若令

$$G := \{\text{这个课程是好的}\}$$
$$W := \{\text{你学习努力}\}$$
$$A := \{\text{你的得分为}A\}$$

这时，给定 G^c, A 和 W 是条件独立的，但给定 G, A 和 W 却不是独立的！

随机试验的独立性

- 先考虑两个随机试验，假定 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i), i = 1, 2$ 为第 i 个随机试验对应的概率空间。按照之前独立性的理解，两个试验的独立性应当叙述为：

$$\text{对任何的} A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2, A_1 \text{与} A_2 \text{同时}$$
$$\text{发生的概率等于它们各自概率之乘积}$$

- 两个不妥：
  - “A_1 与 A_2 同时发生” 应当是这两个事件的交，但它们分别是两个样本空间 Ω_1, Ω_2 的子集，无法进行运算；
  - 两个概率空间有各自的概率 P_1, P_2，但涉及两个度验，命题中 “同时发生的概率” 既不能用 P_1 也不能用 P_2 来度量.
- 解决方法：构造可以同时描述两个试验的新概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- 样本乘积空间: $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1 且 \omega_2 \in \Omega_2\}$;
- 乘积 σ- 代数 $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$:
  - 可测矩形集类: $\mathcal{G} := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$;
  - $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 := \sigma(\mathcal{G})$
- 乘积概率测度:
  - 对于每个可测矩形 $A_1 \times A_2 \in \mathcal{G}$ 定义如下集函数:

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2), \quad A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2. \tag{14}$$

  - 理论上可以证明如上定义在 $\mathcal{G}$ 上的集函数 P 可唯一地扩张为 $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ 上的概率测度，称之为 P_1 与 P_2 的乘积 (概率) 测度.
- 在上述乘积测度下

$$P(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1), \quad P(\Omega_1 \times A_2) = P_2(A_2)$$

$$P\big((A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2)\big) = P(A_1 \times A_2)$$

$$= P_1(A_1)P_2(A_2) = P(A_1 \times \Omega_1)P(\Omega_1 \times A_2)$$

- $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ 的独立性取决于乘积样本空间 $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上的概率是否取作由 (14) 所确定的乘积测度

n 个试验相互独立的定义

定义 0.8 设有 n 个随机试验，第 i 个试验的概率空间为 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i = 1, \cdots, n$. 代表这 n 个试验的乘积样本空间 $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{G})$, 其中 $\mathcal{G}$ 为形如 $B_1 \times \cdots \times B_n (B_i \in \mathcal{F}_i)$ 的可测矩形的全体。如果 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度 P 是 $P_1, \cdots, P_n$ 的乘积测度，即对任何 $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{G}$ 满足

$$P(B_1 \times \cdots \times B_n) = P_1(B_1) \cdots P(B_n),$$

则称这 n 个度验独立. 如果现设

$$\Omega_i \equiv \Omega_0, \mathcal{F}_i \equiv \mathcal{F}_0, P_i \equiv P_0, i = 1, \cdots, n,$$

即 n 个试验有相同的概率空间，则称它们为 n 个 (重) 独立重复试验. 如果在 n 个独立重复实验中，每次试验的可能结果为两个:A 或 $\overline{A}$, 则称这种试验为 n 重伯努利试验.

彩票问题

例 0.32 某彩票每周开奖一次，每次提供十万分之一的中奖机会，且各周开奖是独立的。若你每周买一张彩票，坚持十年（每年按 52 周计算），试求未中奖的概率.

解: 依假设，每次中奖的概率为 10^{-5}, 于是每次不中奖的概率是 $1-10^{-5}$. 另外十年一共购买 520 次彩票，而每次开奖都是独立的，相当于进行了 520 次独立重复试验. 若记 A_i 为“第 i 次开奖不中奖”，则 $A_1, \cdots, A_{520}$ 相互独立，从而

$$P(A_1A_2\cdots A_{520}) = (1-10^{-5})^{520} = 0.9948$$