HEURÍSTIVA Y OPTIMIZACIÓN

Práctica 1: Modelado de Problemas de Programación Lineal

Álvaro Gómez Ramos 100307009
Carlos Contreras Sanz 100303562

Contenido

En este documento se describen y modelan las soluciones dadas a la práctica de Heurística y Optimización, en la que se nos pide minimizar el gasto de una empresa de autobuses. Consta de dos partes, siendo la segunda igual que la primera, pero con más restricciones. El primer caso se ha resuelto usando hojas de Calc y GPLK, y en el segundo caso se ha resuelto tan sólo con GLPK. En ambos casos se presenta el modelado del problema y el análisis de resultados.

Parte 1:

Tras analizar el problema, concluimos que para modelarlo necesitábamos de unas variables binarias, que representasen si un autobús (conductor) realiza una ruta o no. Hemos usado por tanto 24 variables que hemos agrupado en una matriz de variables binarias de 4*6, ya que es fácil trabajar con ellas, representa el problema a la perfección y es bastante visual.

Todas las condiciones y limitaciones que nos impone el problema se harán en base a esta variable, esto es, basando los distintos cálculos en que autobús realizará cada ruta.

Modelando las variables del problema matemáticamente sería algo así:

$$var_1 = A \in M_{4x6}\ (\{0,1\}) \text{ donde } \forall\, A_{ij} \in \{0,1\}$$

Donde Aij representa la posición de la fila i-ésima (buses) de la columna j-ésima (columnas) de la matriz

Visualmente (en Calc) sería esto:

Variables						
	RUTA 1	RUTA 2	RUTA 3	RUTA 4	RUTA 5	RUTA 6
BUS 1	0	0	0	0	0	0
BUS 2	0	0	0	0	0	0
BUS 3	0	0	0	0	0	0
BUS 4	0	0	0	0	0	0

Donde cada 1 ó 0 representa si ese autobus (conductor) realiza esa ruta o no

Una vez establecida la variable, hemos centrado nuestra atención en los datos, modelándolos y escribiéndolos en Calc (ya que son necesrios para el cálculo de la función objetivo y para parte de las restricciones).

Modelando los datos matemáticamente:

$$Distancia = \{500, 700, 550, 200, 300, 100\}$$

$$Coste_{Km} = \{40, 50, 35, 45\}$$

$$Velocidad_{KmH} = \{100, 90, 80, 90\}$$

$$Coste_{H} = \{20, 20, 20, 20\}$$

$$Bus = \{BUS1, BUS2, BUS3, BUS4\}$$

$$Ruta = \{RUTA1, RUTA2, RUTA3, RUTA4, RUTA5, RUTA6\}$$

Donde Distancia j representa la longitud de la ruta j; CosteKm i representa el consumo del autobús i; Velocidad KmH i representa la velocidad del autobús i en kilometros por hora; CosteH i representa el sueldo por hora de cada conductor i (autobus i); Bus y Ruta representan los autobuses (conductores) y rutas que tenemos.

Visualmente (en Calc) sería esto:

RUTA	DISTANCIA
1	500
2	700
3	550
4	200
5	300
6	100

BUS	COSTE/km	VEL km/h
1	40	100
2	50	90
3	35	80
4	45	90

COSTE CONDUCTOR/H	20

Con esto y con la descripción del problema, ya podemos **modelar la función objetivo**:

$$\min Z = \sum_{i \in Bus} \sum_{j \in Ruta} A[i,j] * \left(\frac{\left(\left(\frac{Distancia[j]}{Velocidad_{KmH}[i]} \right) * Coste_H[i] \right) + }{\frac{Distancia[j] * Coste_{Km}[i]}{100}} \right)$$

De esta forma en función de las rutas que coja cada autobús, esa función objetivo calculará el coste, buscando la combinación de variables que minimice el resultado, cumpliendo las restricciones.

Dichas **restricciones** son:

- Cada autobús hará como máximo 2 rutas (basta con que cada fila de la matriz de variables como máximo sume 2):

$$\bigvee_{i \in Bus} \sum_{j \in Ruta} A[i,j] \leq 2$$

- Cada ruta sólo se hará 1 vez (basta con que cada columna de la matriz de variables sume 1):

$$\bigvee_{j \in Ruta} \sum_{i \in Bus} A[i,j] = 1$$

- Los empleados no podrán trabajar más de 8 horas al día (basta con calcular lo que tarda en hacer las rutas que hace e imponer que no sea mayor de 8):

$$\bigvee_{i \in Bus} \sum_{j \in Ruta} \left(\frac{Distancia[j]}{Velocidad_{KmH}[i]} \right) * A[i,j] \leq 8$$

- Los empleados no podrán cobrar más que el doble de cualquiera de los demás sueldos (basta con calcular el doble sueldo de todos, y comparar el sueldo de cada uno con el doble de los demás):

$$\bigvee_{i \in Bus} \bigvee_{i_2 \in Bus} \sum_{j \in Ruta} A[i,j] * \left(\left(\frac{Distancia[j]}{Velocidad_{KmH}} \right) * Coste_H[i] \right) \leq \sum_{j \in Ruta} A[i_2,j] * \left(\left(\frac{Distancia[j]}{Velocidad_{KmH}[i_2]} \right) * Coste_H[i_2] * 2 \right)$$

Esto en es Calc:

Salario no puede ser mayor que la mitad de cualquiera			
		Sueldo	Maximo
Bus 1	Bus 2	160	222,2222222222
Bus 1	Bus 3	160	275
Bus 1	Bus 4	160	222,2222222222
Bus 2	Bus 1	111,1111111111	320
Bus 2	Bus 3	111,1111111111	275
Bus 2	Bus 4	111,1111111111	222,2222222222
Bus 3	Bus 1	137,5	320
Bus 3	Bus 2	137,5	222,2222222222
Bus 3	Bus 4	137,5	222,2222222222
Bus 4	Bus 1	111,1111111111	320
Bus 4	Bus 2	111,1111111111	222,2222222222
Bus 4	Bus 3	111,1111111111	275

Número de veces que se hace la ruta		
	TOTAL	MINIMO
RUTA 1	1	1
RUTA 2	1	1
RUTA 3	1	1
RUTA 4	1	1
RUTA 5	1	1
RUTA 6	1	1

Número de rutas por Autobús		
	TOTAL	MAXIMO
BUS 1	2	2
BUS 2	2	2
BUS 3	1	2
BUS 4	1	2

Número de horas Empleados		
	FUNCION	MAXIMO
BUS 1	8	8
BUS 2	5,5555555556	8
BUS 3	6,875	8
BUS 4	5,5555555556	8

Si leemos el problema y lo comparamos con las restricciones, vemos que reflejamos todo lo que se nos pedía. A la hora de realizar los cálculos en Calc nos hemos valido de tablas auxiliares, que llamaríamos variables intermedias para evaluar más visualmente los resultados.

En cualquier caso**, la solución óptima** para el problema planteado en la parte 1 es la siguiente:

FUNCION OBJETIVO	1507,2222222222

Con las variables tal que así:

Variables						
	RUTA 1	RUTA 2	RUTA 3	RUTA 4	RUTA 5	RUTA 6
BUS 1	0	1	0	0	0	1
BUS 2	0	0	0	1	1	0
BUS 3	0	0	1	0	0	0
BUS 4	1	0	0	0	0	0

Lo primero que haremos con esta solución es comprobar que satisface todas las restricciones. Teniendo en cuenta que todas las tablas incluidas en este documento hasta este punto son las que corresponden a esta solución, podemos afirmar que sí que se cumplen las restricciones.

De modo que con nuestra solución óptima la empresa de autobuses se gastaría menos de 1508€ al día para cubrir todas sus rutas, con las limitaciones que se habían impuesto.

Mencionar que para el cálculo de la función objetivo en Calc, a pesar del modelo matemático, hemos optado por usar una tabla (matriz) con el coste total que supone que un autobús haga una ruta, siguiendo con el espíritu visual y de uso de matrices y variables intermedias:

Coste Total (Combustible más Empleado)						
	RUTA 1	RUTA 2	RUTA 3	RUTA 4	RUTA 5	RUTA 6
BUS 1	300	420	330	120	180	60
BUS 2	361,111111	505,55555556	397,22222222	144,44444444	216,66666667	72,22222222
BUS 3	300	420	330	120	180	60
BUS 4	336,111111	470,555556	369,7222222	134,4444444	201,6666667	67,22222222

De esta forma la función objetivo multiplicará las posiciones de esta matriz por las correspondientes de la matriz de variables, sumando los resultados. De esta forma solo tiene en cuenta los casos en que ese autobús realiza esa ruta.

Gracias al uso de esta y otras tablas/matrices como variables intermedias, somos capaces de analizar mejor la solución del problema y ver qué es **lo que nos limita**.

Vemos por ejemplo que un problema a la hora de repartir las rutas nos lo encontramos por la duración de algunas de ellas:

Número de horas empleadas en cada ruta dependiendo del autobus						
	RUTA 1	RUTA 2	RUTA 3	RUTA 4	RUTA 5	RUTA 6
BUS 1	5	7	5,5	2	3	1
BUS 2	5,5555556	7,777777778	6,111111111	2,222222222	3,333333333	1,111111111
BUS 3	6,25	8,75	6,875	2,5	3,75	1,25
BUS 4	5,5555556	7,777777778	6,111111111	2,222222222	3,333333333	1,111111111

Eso, sumado a la limitación de no poder hacer más de 8 horas al día, restringe bastante las posibles soluciones del problema (siendo imposible, por ejemplo, una asignación: bus3-ruta2).

Otro problema, de características similares es el sueldo que cobra cada conductor por cada ruta, que siguiendo la misma dinámica del número de horas, es notablemente más alto en las primeras rutas, quedando las soluciones limitadas por la restricción del sueldo máximo.

Coste de Empleados dependiendo del autobus y de la ruta						
	RUTA 1	RUTA 2	RUTA 3	RUTA 4	RUTA 5	RUTA 6
BUS 1	100	140	110	40	60	20
BUS 2	111,111111	155,55555556	122,22222222	44,44444444	66,66666667	22,22222222
BUS 3	125	175	137,5	50	75	25
BUS 4	111,111111	155,55555556	122,22222222	44,44444444	66,66666667	22,22222222

Analizando estas tablas, vemos además que la restricción del máximo de rutas por autobús afecta al número de posibles soluciones, ya que perfectamente podríamos asignar las cuatro últimas rutas al mismo conductor, de no tener esta restricción presente.

Si analizamos la **complejidad del problema**, diremos que con cuatro autobuses y seis rutas, al tener un total de 24 variables binarias, el número total de posibles combinaciones es de 2^{24} lo que nos da un total de más de 16 millones de posibles combinaciones.

Por cada nuevo bus, multiplicaremos el número de combinaciones con 2 elevado al número de rutas. De la misma forma, con cada nueva ruta, tendremos que multiplicar el número de combinaciones posibles por 2 elevado al número de buses. Es decir, dados 4 autobuses y 6 rutas, con 2^{24} posibles combinaciones, tendremos que con 5 autobuses y 6 rutas son 2^{30} posibilidades, en cambio con 4 autobuses y 7 rutas con 2^{28} posibilidades.

Afecta más negativamente el añadir aquello de lo que hay más, ya que incrementa más rápido el número de posibles combinaciones.

En cualquier caso el número de combinaciones posibles es $2^{\,nº\,rutas\,*\,nº\,autobuses}$, por lo que tiene complejidad exponencial.

Parte 2:

Esta parte es bastante similar a la anterior. En este caso se añade la obligatoriedad de realizar recados además de las rutas. Dichos recados y su asignación tienen ciertas restricciones, que llevan asociados nuevos datos. Por lo tanto, al ser un añadido respecto a la parte anterior, nos centraremos sólo en lo que varía, y no volveremos a modelar restricciones o datos que son comunes a los dos problemas.

Para reflejar el hacer recados o no, y quien los hace, hemos optado por, de la misma forma que antes, hacer uso de una matriz binaria, con los autobuses por filas y los recados por columnas.

Harán falta **nuevas variables**. La primera de ellas:

$$var_2 = B \in M_{4x5}\ (\{0,1\})\ \text{donde}\ \ \forall\ B_{ik}\ \in \{0,1\}$$

Donde Bij representa la posición de la fila i-ésima (buses) de la columna k-ésima (recados) de la matriz

Además, hemos hecho uso de otra variable para poder modelizar que solo se pagará un abono por conductor que realice recados. Esta será una variable como las otras, que aportara nuevas combinaciones potencialmente posibles a la solución, pero solo las que reflejen la realidad (quien necesita abono) serán permitidas, gracias a las restricciones que se añadirán. Es por tanto un vector vinario, con tantas posiciones como autobuses tenemos:

$$var_3 = C \in M_{4x1}\ (\{0,1\}) \text{ donde } \forall\, C_i \in \{0,1\}$$

Donde Ci representa la posición de la fila i-ésima (conductor necesita abono)

Los **nuevos datos** serán los recados a hacer, y el coste de las rutas (para una de las restricciones):

$$Recado = \{RECADO1, RECADO2, RECADO3, RECADO4, RECADO5, RECADO6\}$$

$$CosteRuta = \{2, 1, 1, 1,1,1\}$$

La **nueva función objetivo** debe tener en cuenta el cálculo de los sueldos de los conductores en función de las rutas (eso ya lo hacía), y en función de los recados y los abonos (esto de añade):

$$\min Z = \sum_{i \in Bus} \sum_{j \in Ruta} A[i,j] * \left(\left(\left(\frac{Distancia[j]}{Velocidad_{KmH}[i]} \right) * Coste_H[i] \right) + \frac{Distancia[j] * Coste_{Km}[i]}{100} \right) + \sum_{i \in Bus} \sum_{k \in Recado} B[i,k] * 20 + \sum_{i \in Bus} C[i] * 2$$

Estas **nuevas restricciones modeladas** son:

- El conductor que realice la ruta 1 no podrá realizar más rutas (basta con "asignar" coste a cada ruta, y de la misma forma que calculamos el límite de 2 rutas por conductor, comparar esta vez teniendo en cuenta que la ruta 1 tiene el coste de 2 rutas, y por tanto no se podrá combinar con ninguna otra)(nótese que esta engloba a la de la parte anterior que limitaba a 2 rutas a cada conductor, pero se mantienen las dos a modo informativo):

$$\bigvee_{i \in Bus} \sum_{j \in Ruta} A[i,j] * CosteRuta[j] \leq 2$$

- Debe de haber 5 recados en total (simplemente se sumarán todas las posiciones de la matriz de buses/recados y se compararán con el límite de 5):

$$\sum_{i \in Bus} \sum_{k \in Recado} B[i,k] = 5$$

- Cada recado se debe de hacer solo una vez (esta engloba a la anterior, por lo que aquella ya no sería necesaria, pero la mantenemos porque en un primer momento la usamos, y la hemos dejado a modo informativo):

$$\bigvee_{k \in Recado} \sum_{i \in Bus} B[i,k] = 1$$

- Se actualiza las horas que trabaja cada empleado (cada recado una hora):

$$\bigvee_{i \in Bus} \sum_{j \in Ruta} \left(\frac{Distancia[j]}{Velocidad_{KmH}[i]}\right) * A[i,j] + \sum_{k \in Recado} B[i,k] \leq 8$$

- Se actualiza el sueldo límite (con lo que se cobra por realizar recados):
-

$$\begin{aligned}\bigvee_{i \in Bus} \bigvee_{i_2 \in Bus} \sum_{j \in Ruta} A[i,j] * \left(\left(\frac{Distancia[j]}{Velocidad_{KmH}}\right) * Coste_H[i]\right) \\ + \sum_{k \in Recado} B[i,k] * 20 \\ \leq \sum_{j \in Ruta} A[i_2,j] * \left(\left(\frac{Distancia[j]}{Velocidad_{KmH}[i_2]}\right) * Coste_H[i_2] * 2\right) \\ + \sum_{k \in Recado} B[i,k] * 20 \ * 20\end{aligned}$$

- Se pagará un abono por cada conductor que haga algún recado (para esta restricción, se ha declarado una variable binaria C, a la que solo se le permitirá tener el valor que refleje si para un determinado conductor i necesita abono o no, para ello es necesario añadir dos restricciones):

$$\bigvee_{i \in Bus} \sum_{k \in Recado} B[i,k] \geq C[i]$$

$$\bigvee_{i \in Bus} \sum_{k \in Recado} B[i,k] \leq C[i] * 5$$

Con todo el problema modelado matemáticamente, se introduce con la sintaxis apropiada, usando MathProg. Con eso obtenemos un archivo de salida con la solución óptima y los valores de las distintas variables, con los que comprobaremos si efectivamente se cumplen las restricciones o no.

La solución óptima nos dice que a la empresa tendrá unos gastos cada día de trabajo de:

```
Problem:    model
Rows:       49
Columns:    48 (48 integer, 48 binary)
Non-zeros:  420
Status:     INTEGER OPTIMAL
Objective:  Coste = 1613.222222 (MINimum)
```

Es decir menos de 1614€ al día.

Si analizamos los valores de las variables para esta solución tenemos que:

Variables						
	RUTA 1	RUTA 2	RUTA 3	RUTA 4	RUTA 5	RUTA 6
BUS 1	0	1	0	0	0	1
BUS 2	0	0	0	1	1	0
BUS 3	0	0	1	0	0	0
BUS 4	1	0	0	0	0	0

Recados					
	RECADO 1	RECADO 2	RECADO 3	RECADO 4	RECADO 5
BUS 1	0	0	0	0	0
BUS 2	1	0	1	0	0
BUS 3	0	0	0	1	0
BUS 4	0	1	0	0	1

Recados	
	HaceRecado
BUS 1	0
BUS 2	1
BUS 3	1
BUS 4	1

Si analizamos la solución y la comparamos con el enunciado del problema, vemos que cumple todas las restricciones y especificaciones del problema.

En este caso el principal problema que tenemos a la hora del reparto de rutas y recados es la limitación de horas, llegando a tal punto, que por ejemplo la limitación del sueldo es indiferente si se actualiza incluyendo el sueldo por los recados o no.

```
22 Horas_empleados[BUS1]
                                    8
23 Horas_empleados[BUS2]
                              7.55556
24 Horas_empleados[BUS3]
                                7.875
25 Horas_empleados[BUS4]
                              7.55556
```

Esa es la principal limitación en este caso, ya que condiciona prácticamente el reparto por si sola.

En este caso la **complejidad** del problema es bastante mayor, por el hecho de tener que repartir recados a autobuses, además de rutas, y porque la inclusión de la tercera variable C incrementa un poco la complejidad de forma "artificial" no siendo algo que nos piden en el enunciado.

Tenemos la complejidad de la parte anterior $2^{\,n^{o}\,rutas\,*\,n^{o}\,autobuses}$ y además hemos de multiplicar todas las nuevas posibilidades que se nos añaden, por los recados $2^{\,n^{o}\,recados\,*\,n^{o}\,autobuses}$ y por la variable "artificial" que hemos añadido$2^{\,n^{o}\,autobuses}$.

Por lo que quedaría $2^{\,(n^{o}\,rutas+n^{o}\,recados)*\,n^{o}\,autobuses\,+n^{o}\,autobuses}$. Sigue siendo exponencial, pero de una magnitud mayor evidentemente (en este caso $2^{\,(6+5)*4+4} = 2^{48}$).

Conclusiones

Esta práctica nos ha servido para asentar los conocimientos de la asignatura. Además nos ha proporcionado unas herramientas con las que una vez modelizados los problemas es muy fácil evaluar los resultados, y ver los cambios que se producen con las distintas variaciones posibles sobre las condiciones o los datos.

La parte que nos ha resultado más difícil ha sido la de la modelización del cálculo del número de abonos necesarios, en la parte 2 de la práctica.