

2021 级《离散数学 II》期末考试试题

一、简答题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分, 提示: 直接写出答案即可, 不需写解题过程)

- 1、对于至少含有 2 个数的有限集和, 在数的加法和乘法下是否构成环?
- 2、设 a, b 是群 $(G, *)$ 中的元素, 则 $b*(a*b)^{-1}*a=?$
- 3、若半群有左单位元, 则左单位元是否一定唯一?
- 4、设 G 是循环群, $G \sim G'$, 则 G' 是否是循环群?
- 5、设 N 是有限群 G 的正规子群, 且 $G:N=m$, 则对 $\forall a \in G$, 在 G/N 中, $a^m N = N$ 是否成立?
- 6、含单位元环至少有几个元素?
- 7、在有界分配格中, 一个元素 a 有余元, 则 a 的余元是否一定唯一?
- 8、在布尔代数中, $a \oplus (a' \times b) = a \oplus b$, $a \times (a' \oplus b) = a \times b$, 这两式是否都成立?
(其中 a' 是 a 的余元)
- 9、若 (L, \times, \oplus) 是一个有界格, 对于任意的 $x, y \in L$, 若 $x \oplus y = 0$, 则 $x = y$ 是否成立?
- 10、 S_5 是五次对称群, 设 σ 是 S_5 到群 G 上的同态映射, $G = \{a, b, c, d\}$, 则 $\sigma^{-1}(a)$ 中有多少个元素?

二、单项选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分)

- 11、设群 $(G, *)$ 是 4 元群, 则下列说法正确的是 ()
(A) G 一定是循环群
(B) G 一定与四次交代群同构
(C) 对于任意的 $a, b \in G$, $(a*b)^{-1} = a^{-1}*b^{-1}$
(D) 对于任意的元素 $a \in G$ 的周期都是 2
- 12、设 σ 是有限群 G 到 G' 上的同态映射, N 为同态核, $|G|=n$, 则下列说法正确的是 ()
(A) G' 可能有限, 也可能无限
(B) 设 $a, b \in G$, 则 $|\sigma(aN)| = |\sigma(bN)|$
(C) 若 $a \in N$, 则 $|aN|$ 一定不等于 n

(D) 设 G' 的元素数不可能为 n

13、设 $S=\{2^n | n \in \mathbb{Z}\}$, $*$ 是数的乘法运算, 以下描述不正确的是 ()

- (A) 运算 $*$ 满足结合律。 (B) 代数系统 $(S, *)$ 中存在单位元。
(C) 代数系统 $(S, *)$ 交换群。 (D) 运算 $*$ 满足等幂律。

14、设 (\mathbb{R}^*, \times) 是非零实数乘法群, 下列映射 σ 是 \mathbb{R}^* 到 \mathbb{R}^* 内的同态映射的是 ()

- (A) $f(x)=1/x$ (B) $f(x)=4x^2$ (C) $f(x)=3-x$ (D) $f(x)=x+2$

15、关于环 $(R, +, *)$ 下列说法错误的是 ()

- (A) 若 R 是体, 则 $(R, *)$ 是群
(B) 若 $|R|=n$, 则对于任意的 $a \in R$, $na=0$
(C) $(R, +)$ 是 Abel 群
(D) 若 R 是不止一个元素的有限消去环, 则 R 是体

16、设 H 是循环群 G 的子群, 则下面描述错误的是 ()

- (A) 对于任意 $a \in G$, 都有 $aH=Ha$ (B) 若 $aH=Hb$, 则 $b \in Ha$
(C) 设 $a \in G$, 则 $aH \cap H$ 一定是 \emptyset (D) H 一定是循环群。

17、设 $\sigma = (2\ 3\ 7)(1\ 2)(3\ 5\ 7\ 6\ 4)(1\ 4)$, σ 的周期为 ()

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7

18、设 H 是整数加法群 $(\mathbb{Z}, +)$ 的子群, 若 $32, 40 \in H$, 则下列元素一定属于 H 的是 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

19、设 (L, \times, \oplus) 是 3 个元素的格, 则下列说法错误的是 ()

- (A) L 是分配格 (B) L 是有界格
(C) L 是模格 (D) L 是余格

20、设 (L, \leq) 是偏序格, 与其等价的代数格为 (L, \times, \oplus) , 则下面选项正确的是 ()

- (A) 若 L 有界, 则 L 一定有限
(B) 对于 L 中任意的元素 a, b , 有 $a \leq a \times b$
(C) 若 L 是链, 则对于任意的 a, b , 有 $a = a \times b$ 或 $a = a \oplus b$
(D) 若 (L', \leq) 是 (L, \leq) 的子格, 则 (L', \times, \oplus) 是 (L, \times, \oplus) 的代数子格

三、解答题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

- 21、设 G 是由 a 生成的 12 元循环群， 1 是其单位元，求
- 1) G 的所有子群
 - 2) G 共有几个正规子群
 - 3) $(a^2) \cap (a^3)$ 的生成元
- 22、请写出三次对称群 S_3 中的所有元素，并找到一个周期为 3 的元素生成一个子群 H ，并求 H 的所有陪集。
- 23、设 (A_6, \oplus_6) 是模 6 整数加法群， $H = \{0, 3\}$ 是 A_6 的子群，
- 1) 求商群 A_6/H 中 $\{1, 4\}$ 的逆元素；
 - 2) 设 (A_3, \oplus_3) 是模 3 整数加法群， $\sigma: x \rightarrow 2x \pmod{3}$ ，是 A_6 到 A_3 上的映射，问 σ 是否为同态映射？若是，请写出同态核 N 。

四、证明题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

- 24、设 $R = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ，其中 \mathbb{Q} 是有理数集合。证明： $(R, +, \times)$ 是环；其中， $+$ 和 \times 分别是数的加法和乘法。
- 25、设 σ, τ 是群 G 到 G' 上的同态映射，令 $H = \{x \mid x \in G \text{ 且 } \sigma(x) = \tau(x)\}$ ，证明： H 是 G 的子群。
- 26、设 (G, \cdot) 是 Abel 群， $a, b \in G$ ， a 的周期为 2， b 的周期为 5，证明： ab 的周期为 10。