软件 2022 级参考答案

一、简答题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1. 1,2,3,6

2. 是；否

3. 不对

4、{1,3,4,9,10,12}，{2,5,6,7,8,11}

5、3,2

6、Z，p/q（p，q 都是奇数）或（pq，2）=1

7、aH

8、{e’}

9、是；不一定

10、1

二、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11. B

12. B

13. C

14. C

15. D

16. C

17. D

18. D

19. B

20. D

三、**解答题**（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

21、（1）不是

（2）是；c, d, e

（3）H={a, d}；陪集：{a, d}；{b, e}, {c, f}

22、（1） R ，{0}

（2）是；1, 2, 3, 4

（3） {{1, 4}，{2, 3}}

四、证明题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

23、（10 分）证明：必要性：

任取 $x\in N$，则 $f(x)=f(e)$，因 f 是一一映射，故 $x=e$，即 $N=\{e\}$

充分性：

设 K 的单位元为 e’.

若 $N=\{e\}$，任取 $g_1, g_2 \in G$，如果 $f(g_1)=f(g_2)$，则

$f(g_1g_2^{-1})=f(g_1)f(g_2^{-1})= f(g_1)f(g_2)^{-1}= e'$，因此 $g_1g_2^{-1}\in N$，因 $N=\{e\}$，

知 $g_1g_2^{-1}=e$，因此 $g_1=g_2$。

24、（10 分）证明：（1）设 e 是 G 的单位元，则 $e*H*e^{-1}=H$，$e\in A$，故 A 非空。

（2）任取 a，b $\in A$，$a*b^{-1}H*(a*b^{-1})^{-1}=a*b^{-1}H*b*a^{-1}=a*H*a^{-1}=H$，因此 $a*b^{-1}\in A$。综上，A 是 G 的子群。

25、（10 分）证明：

（1）矩阵$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$，$a\in R$，如$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in R$，非空；

（2）设 A=$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix}\in G$，则 AB=$\begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{pmatrix}\in G$，所以矩阵的乘法是 G 的代数运算；

（3）因为矩阵的乘法满足结合律，所以 G 的乘法也满足结合律；

（4）因为$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\in G$，且对任意的 A=$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\in G$，有

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix},$$

所以单位元为$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$。

（5）对任意的 A=$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\in G$，有 B=$\begin{pmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{pmatrix}\in G$，且

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

即 B=$\begin{pmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{pmatrix}$为 A 的逆元，所以 G 的每个元素都有逆。

26、（10 分）设 G 是循环群，且 G 与 G’同态。

证明：G’也是循环群。

证明：设 G=(g)，σ：G~G’，则 G’=(σ(g)).

事实上，任意的 a’∈G’，有 a∈G，使得σ(a)=a’. 但是 a=g^m，则：

a’=σ(a)=σ(g^m)=(σ(g))^m，这表明 G’=(σ(g)).