2019级《离散数学II》期末考试试题

一、 单项选择题（每小题2分，共20分）

1. 设(S, *)是代数系统，*是S上的二元代数运算，对于任意的$x,y\in S$，有$x*y=x$。以下描述正确的是（　　）
   (A) 代数系统(S, *)存在单位元。
   (B) 代数系统(S, *)每个元素都存在逆元素。
   (C) 运算*满足交换律。
   (D) 运算*满足结合律。

2. 关于群的同构，下列说法错误的是（　　）
   (A) 实数加法群（R,+）与非零实数乘法群（$R^*,\times$）同构；
   (B) 所有的无限循环群与整数加法群同构；
   (C) 正实数乘法群（$R^+,\times$）与实数加法群（R,+）同构；
   (D) 若G是交换群，映射$\sigma(a)=a^{-1}$是G上的自同构映射

3. 设群(G, *)是17元群，则下列说法错误的是（　　）
   (A) G一定是循环群
   (B) 对于任意的$a,b\in G$，$(a*b)^{-1}= a^{-1}*b^{-1}$
   (C) G只有两个子群
   (D) 对于任意的元素$a\in G$的周期都是17

4. 设σ是群G到G'上的同态映射，N为同态核，H为G的子群，$H'=\sigma(H)$，则下列说法正确的是（　　）
   (A) H与N不相交
   (B) H'与$\sigma(\sigma^{-1}(H'))$ 一定相等
   (C) H与$\sigma^{-1}(H')$一定相等
   (D) σ也是子群H到H'上的同态映射，其同态核也是N

5. 设R_1和R_2都是环(R, +, *)的理想，以下结论错误的是（　　）
   (A) $R_1+R_2=\{a+b|a\in R_1$且$b\in R_2\}$，则(R_1+R_2, +, *)为(R, +, *)的子环。
   (B) ($R_1\cup R_2$, +, *)为(R, +, *)的理想。

(C) 若 $R_1 \cap R_2=\{0\}$，则对任意 $a \in R_1, b \in R_2$，有 $a*b=0$。
(D) $(R_1 \cap R_2, +, *)$为$(R, +, *)$的理想。

6. 下列有理域 R_0 上的多项式不是质式的是（ ）

(A) $x^6-3x3+6x^2+6$

(B) $x^5-5x2+7$

(C) $x^4-x3+11x^2-3$

(D) x^4+x^2-12

7. 令 $G=(Z, +)$是整数加法群, 以下给出的商群错误的是（ ）

(A) $Z/4Z=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$

(B) $Z/12Z=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\bar{9},\overline{10},\overline{11}\}$

(C) $4Z/12Z=\{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\}$

(D) $3Z/12Z=\{\bar{0},\bar{3},\bar{6}\}$

8. 关于 GF(32)下列说话正确的是（ ）

(A) GF(32)有 5 个子域

(B) $\Phi_{31}(x)$在 GF(32)上是质式

(C) GF(32)中非零非壹的元素的乘法周期都相同

(D) GF(32)所有元素都是 $x^{32}-1$ 的根

9. 关于格下列说法正确的是（ ）

(A) 有界格中的元素一定存在余元素。

(B) 在分配格中，对于任意的 a、b，都有$(a\times b)'= a' \oplus b'$

(C) 一个格的任意子集都有上下确界

(D) 从同构的角度看，4 个元素的格仅有两个。

10. 下列集合 S 和运算 * ，能构成群的是（ ）

(A) $S=\{x|x=2n, n \in Z\}$，*是数的乘法

(B) S={1,3,5,6,9 } ，*是模 11 的乘法

(C) S=Q（有理数集），*是有理数乘法

(D) S={1,3,4,5,9 }，*是模 11 的乘法

二、简答题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 计算(2 5 4)(1 2 4)(3 6 5)，结果表示成不相杂的轮换乘积形式，并指出其奇偶性。

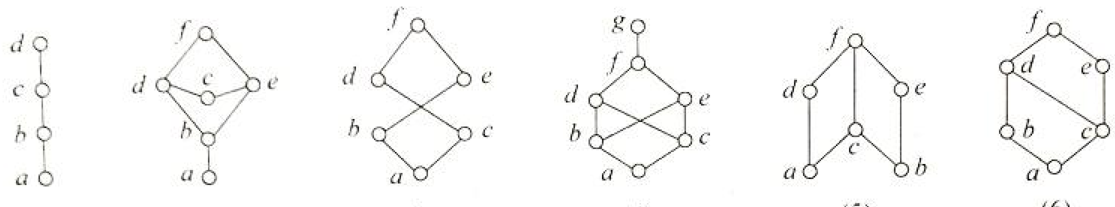
2. 设集合 S={a, b, c}, 代数系统（S，+，×）是域，请给出运算+ 、× 的运算表。

3. 写出有限域 GF(729)的所有真子域。

4. 在 R_3 上把多项式 x^9+1 分解为质因式乘积的形式。

5. 设（Q^*，×）是非零有理数的乘法群，（Q^+，×）是正有理数的乘法群，设映射 $\sigma(x)=|x^{-1}|$是同态映射，请给出σ的同态核。

6. 下面给出的 6 个偏序集的哈斯图中，写出是半序格的图的序号。



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

7. 计算$\Phi_8(x)\ \Phi_{24}(x)$。

8. 请给出 $R_2[x]$中的所有 3 次质式。

9. 设+，*为数的加法和乘法，其中 $S_1=\{x|x=2n, n\in Z\}$；$S_2=\{x|x=2n+1, n\in Z\}$，请问 $(S_1, +, *)$、$(S_2, +, *)$是整区吗？

10. 设 A={a, b, c}，请问代数系统({ϕ, A},∪,∩)和({{a, b}, A},∪,∩)是否同构？

三、解答题（共 30 分）

1. （10 分）在四次交代群中，

(1) 设$\sigma=(1\ 4\ 2)$，求σ生成的循环子群 H；

(2) 给出 H 的所有左陪集。

2. （10 分） $R_2=\{0，1\}$上的 4 个矩阵：

$$0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad 1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

作成的集合 F={0, 1, a, b}在矩阵加法、乘法下作成一个域。$f(x)=ax^5+bx^4-bx^2+ax-a$, $g(x)=bx^3-ax^2+b$, 利用长除法求 g (x)除 f(x)的商式和余式。

3. （10 分）任意复数可以表为 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$。在非零复数乘法群中，请给出周期为 12 的所有的复数，并证明你的结论。

四、证明题（共 30 分）

1. （15 分）设 G 是循环群，σ和τ都是 G 到 G'上的同态映射，

（1）证明：G'也是循环群；

（2）设 $H=\{x|x\in G$ 且$\sigma(x)=\tau(x)\}$，证明 H 是 G 的子群；

（3）对于 $a\in G$, 若$\sigma(a)$的周期有限，则 a 周期是否一定有限？请证明或反驳。

2. （10 分）对于任意的正整数 m，证明 $GF(P^n)$上一定存在 m 次质式。

3. （5 分）设(G, *)是群且|G| = 2n。证明：G 中至少有一个周期为 2 的元素。