2022 级《离散数学 II》期末考试试题(A 卷)

一、简答题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分，直接写答案，不必写解题过程）

1、 设 $G=(a)$是循环群，且$|G|=24$，H 是 G 的子群且$|H|\equiv 0 \pmod 4$，G/H 的元素个数可能为？

2、 设 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 25, 75, 600\}$，D 为整除关系，问：(S, D)是否为格？是否为分配格？

3、 有限整区除了加法单位元和乘法单位元之外的元素乘法周期一定相等，对吗？

4、 设$(S，\times_{13})$是群，$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$，$\times_{13}$是模 13 的乘法，H=(4)，求 H 的所有陪集。

5、 置换$\sigma=(1\ 2\ 6)(3\ 5\ 4)$，$\tau=(2\ 4)(6\ 7)$。请问置换σ，τ的周期分别为？

6、 设$(Q^+, *)$是正有理数乘法群，(Z, +)是整数加法群，对任意 $x\in Q^+$，$x=2^n(p/q)$，其中$(pq, 2)=1$，令$\sigma(x)=n$ 为$(Q^+, *)$到(Z, +)上的同态映射，求$\sigma(Q^+)$及σ的同态核。

7、 设 $G=(a)$是循环群，H 是 G 的子群，求 G/H 的生成元。

8、 设 g 是有限群(G, *)到(G’, ×)的满同态映射，其中群 G 的单位元为 e，群 G’的单位元为 e’，H 是 G 的子群，$|H|=m$，$|G'|=n$，且$(m, n)=1$，求 g(H)。

9、 设 L 是具有 4 个元素的格，则 L 一定是模格吗？一定是有余格吗？

10、 若$(L, \times, \oplus, 0, 1)$是一个有界格，对于 $x, y\in L$，若 $x\times y=1$，求 x。

二、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11、设 G={e, a, b, c}是群，e 是单位元，H={e, a}是 G 的子群，则下列说法正确的是（　　　）

A、a，b，c 的周期一定是 2

B、bH=Hc 且 aH$\neq$bH

C、ab 和 ba 不一定相等

D、G 中一定存在某个元素的周期等于 4

12、令 G={2x|x$\in$Z}，其中 Z 是整数集合，则 G 在数的加法和乘法下可构成哪个代数系统？（　　　）

A、体

B、环

C、整区

D、域

13、设 S 是非空集合，(ρ(S)，$\subseteq$)是一个格，对任意 A, B, C$\in\rho$(S)，下列说法正确的是（　　　）

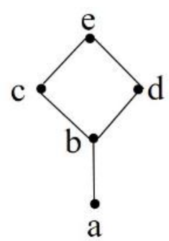
A、$A\cap (B\cup C) \le (A\cap B) \cup (A\cap C)$

B、ρ(S)中任意一个元素都存在余元素，且余元素未必唯一

C、若 A$\le$B$\le$C，有 $A\cup (B\cap C)=B$

D、对任意 A$\in\rho$(S)，规定映射 g：A$\to$S-A，则 g 一定是ρ(S)的自同态映射

14、格(L, $\le$)如下图所示，则 L 一共有多少个　　　　包含



3 个元素的偏序子格？（　　　）

A、 5 个

B、 6 个

C、 7 个

D、 8 个

15、设σ是有限群 G 到 G'上的同态映射，H 为同态核，下列说法错误的是（　　　）

A、|G/H|= |G'|

B、|G/H|整除|G|

C、设 a, b∈G，则 $aHb^{-1}H \in G/H$

D、H 在 G 中的周期为 1

16、设σ 是一个置换，下列说法正确的是（　　　）

A、σ与σ^{-1}具有不同的奇偶性

B、若σ是一个 n 元置换，则σ的周期为 n

C、若σ的周期为奇数，则σ为偶置换

D、若σ表为 r 个不相杂轮换之积，则σ的周期为此 r 个不相杂轮换周期之积

17、设σ=(1 4)(2 3), τ =(1 2 3), 下列说法正确的是（　　）

A、 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 可写成奇数个对换之积

B、 $\tau^{-1}\sigma\tau$ 为奇置换

C、 $\tau\sigma\tau^{-1} = (1\ 2)(3\ 4)$

D、 $\tau^{-1}\sigma\tau$的周期为 2

18、设$(L, \times, \oplus)$是分配格，其中 $a \in L$，令 $f(x)=x \times a$，$g(x)=x \oplus a$，$\forall x \in L$，下列说法正确的是（　　）

A、 f 是 L 到 L 的自同态映射，g 不是 L 到 L 的自同态映射

B、 g 是 L 到 L 的自同态映射，f 不是 L 到 L 的自同态映射

C、 f，g 都不是 L 到 L 的自同态映射

D、 f，g 都是 L 到 L 的自同态映射

19、设 G 是群，K 是 G 的正规子群，下列说法错误的是（　　）

A、设 N 是 G 的子群，则 KN 是 G 的子群

B、设 H 是 K 的正规子群，则 H 是 G 的正规子群

C、设 H 是 G 的正规子群，则 KH 是 G 的正规子群

D、设 H 是 G 的正规子群，则 $K \cap H$ 是 G 的正规子群

20、以下集合 S 关于所给运算⊕、⊙使得代数系统(S，⊕，⊙)构成环的是：（　　），其中 $r, s \in S$，+, ·为数的加法和乘法。

A、$r \oplus s=2(r+s)$, $r \odot s=r \cdot s$，S 为实数集合

B、$r \oplus s=2r \cdot s$, $r \odot s=r \cdot s$, S 为非零实数集合

C、$r \oplus s=r \cdot s$，$r \odot s=r \cdot s$，S 为正实数集合

D、$r \oplus s=r+s$，$r \odot s=0$，S 为实数集合

三、解答题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

21、设 $R=\{a, b, c, d\}$，$(R, +, \times)$是一个环，其中+，×定义见下表。问：

(1) R 是体吗？

(2) R 是否存在零因子？若存在，请写出所有零因子。

(3)请写出由 b+c 生成的(R, +)的循环子群 H 及 H 的所有陪集。

+	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	d	e	f	a
c	c	d	e	f	a	b
d	d	e	f	a	b	c
e	e	f	a	b	c	d
f	f	a	b	c	d	e

×	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e	f
c	a	c	e	a	c	e
d	a	d	a	d	a	d
e	a	e	c	a	e	c
f	a	f	e	d	c	b

22、设 R={0, 1, 2, 3, 4}，$a\oplus b=a+b \pmod 5$，$a\odot b=ab \pmod 5$，(R，$\oplus$，$\odot$)是域。

(1)请写出 R 的全部子环。

(2)(R，$\oplus$)是否为循环群？若是请写出全部生成元。

(3)令 $R^*=R-\{0\}$，关于群(R^*, $\odot$)，请写出 $R^*/(4)$。

四、证明题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

23、设 f 是群 G 到群 K 的同态映射，证明：f 是单射当且仅当同态核 N={e}，其中 e 是 G 的单位元。

24、设(G，*)是群，H 是 G 的子群，令 $A=\{x|x\in G，x*H*x^{-1}=H\}$，证明：A 是 G 的子群。

25、设 $G=\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}|a\in R$, R 是实数集合，$a\neq 0\}$。证明：G 关于矩阵的乘法构成群。

26、设 G 是循环群，且 G 与 G’同态。证明：G’是循环群。