

## 2021 级参考答案

### 一、简答题

- 1、否； 2、1； 3、否； 4、是； 5、是  
6、2； 7、不一定； 8、是； 9、是； 10、  
30

### 二、单项选择题

- 11、C 12、B 13、D 14、A 15、A  
16、C 17、D 18、D 19、D 20、C

### 三、解答题

21、解：

1)  $\{1\}$ ;  $\{1, a^6\}$ ;  $\{1, a^4, a^8\}$ ;  $\{1, a^3, a^6, a^9\}$ ;  $\{1, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}\}$ ;  $G$

2) 6 个

3)  $a^6$

22、解：  $S_3 = \{I, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ ,

周期为 3 的元素为  $(1\ 2\ 3)$  [或  $(1\ 3\ 2)$ ],  $H$  为  $\{I,$

$(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ , 所有的陪集为  $H$  和  $\{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$

23、解：

1)  $\{2, 5\}$  [或  $2+H$ ]

2) 是 ,  $N=\{0, 3\}$

## 四、证明题

24、证明：

(1)  $R$  非空，因为  $0=0+0\sqrt{7} \in R$

(2)  $+$  运算封闭

(3)  $\times$  运算封闭

(4)  $+$  运算满足交换律

(5)  $+$  运算满足结合律

(6) 对于  $R$  中任意元素  $a+b\sqrt{7}$ ， $0=a+b\sqrt{7}$ ， $0$  是  $R$  的零元

(7) 对于  $R$  中任意元素  $a+b\sqrt{7}$ ，存在  $-a-b\sqrt{7}$ ，满足  
 $a+b\sqrt{7} + (-a-b\sqrt{7}) = 0$

(8)  $\times$  运算满足结合律

(9)  $\times$  对  $+$  满足分配律

25、证明：

(1)  $H$  非空，因为  $\sigma(1)=\tau(1)=1'$ ，所以  $1 \in H$ ；

(2) 对于  $H$  中任意的  $a, b$ ，有  $\sigma(a)=\tau(a)$ ， $\sigma(b)=\tau(b)$ ，  
则

$$\begin{aligned}\sigma(ab^{-1}) &= \sigma(a)\sigma(b^{-1}) = \sigma(a)\sigma(b)^{-1} = \tau(a)\tau(b)^{-1} = \tau(a)\tau(b^{-1}) \\ &= \tau(ab^{-1})\end{aligned}$$

所以  $ab^{-1} \in H$

因此,  $H$  是  $G$  的子群。

26、证明：设  $ab$  的周期为  $n$ ，由于  $(ab)^{10} = a^{10}b^{10} = 1$ ，

故  $n \mid 10$ 。于是  $n$  只有四种可能性： $n=1, 2, 5, 10$ 。

若  $n=1$  或  $2$ ，则  $(ab)^2 = 1$ ，因  $G$  是 Abel 群， $(ab)^2 = a^2b^2 = b^2$ ，即  $b^2 = 1$ ，与  $b$  的周期为  $5$  矛盾。

若  $n=5$ ，则  $(ab)^5 = 1$ ，因  $G$  是 Abel 群， $(ab)^5 = a^5b^5 = a^5 = a^4a^1 = a$ ，即  $a=1$ ，而  $a$  的周期为  $2$ ，矛盾。

因此， $n$  只能等于  $10$ ，即  $ab$  的周期为  $10$ 。