

2022 级《离散数学 II》期末考试试题

一、简答题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分，直接写答案，不必写解题过程）

1. 设 N 为自然数(包括 0)，定义 N 上的运算“ \odot ”为： $a \odot b = a + b + a \cdot b$ （其中 $+$ ， \cdot 为自然数的加法和乘法运算，请问 (N, \odot) 是否是半群？是否存在单位元？
2. 在 $GF(25)$ 中是否一定存在乘法周期为 2 的元素？
3. 是否存在一个无限群，其存在有限的非平凡子群？若有，请举例；
4. 在 $GF(16)$ 中乘法群的生成元有多少个？
5. 在 R_{17} 中，请计算 $\frac{-7+2\sqrt{-1}}{5}$
6. 请把 R_2 上多项式 $f(x)=x^4-x^2+1$ 进行质因式分解；
7. 请给出 $I/15I$ 的一个极大理想；
8. 多项式 $x^{16}-x$ 在 $GF(27)$ 上有重根吗？若有，是几重根？
9. 设 (L, \times, \oplus) 是有余格， $L=\{0, 1, a, b\}$ ，0、1 分别为最小元和最大元，请给出 \oplus 的运算表。
10. 设 (L, \times, \oplus) 是有 5 个元素的模格，但不是分配格，请画出其哈斯图。

二、多项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

11. 下列说法正确的是（ ）
(A) 任意群 G 至少存在一个子群是循环群；
(B) 若子群 H 在有限群 G 中的指数是 2，则 H 一定是正规子群；
(C) 若群 G 中非单位元的元素周期都是 2，则 G 是交换群；
(D) 群 G 的任意子群 H 都可以作为同态核。
12. 下面一定是交换群的是（ ）
(A) 4 次交代群 (B) 6 元群 (C) 17 元群 (D) 2 次对称群

13. 设 N 是环 R 的理想, A, B 是两个不同的剩余类, 设 $S=\{ab|a\in A, b\in B\}$, 则下列说法正确是 ()

- (A) A 与 B 不相交 (B) $AB\subseteq S$ (C) $|A|=|B|=|N|$ (D) $S\in R/N$

14. 关于环, 下列说法正确的是 ()

- (A) 理想一定是子环, 子环未必是理想;
(B) 体一定是单纯环;
(C) 若 N 是环 R 的极大理想, 剩余环 R/N 是一个域;
(D) 环 R 若无零因子, 其非零元素的加法周期必相等;

15. 关于多项式, 下列说法正确的是 ()

- (A) 在 R_0 上的多项式 $3x^{12}+6x^8+26x^5+10x^3+18$ 是质式;
(B) 多项式 $x^5+2x^4-x^3+3x-2$ 存在有理根;
(C) 多项式有根就一定可约;
(D) 实数域上的任意非常数多项式都可写成一次因式或二次因式的乘积;

16. 设 F 是任意的域, I 是整数环, 设 I 到 F 内同态映射 $f(n)=ne$, 其中 e 是 F 中乘法单位元, 下列说法错误的是 ()

- (A) 若 f 为单射, 则 F 是无限域;
(B) I 与 F 同态;
(C) 同态核 N 是 I 的极大理想;
(D) 同态核 $N=pI$, 其中, p 为质数;

17. 在四次对称群 S_4 中, 设 H 是由 $(4\ 2\ 3)$ 生成的子群, 下列是 H 的右陪集的是 ()

- (A) $\{(4\ 2\ 3), (3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2)\}$
(B) $\{(3\ 4), (1\ 2), (2\ 4), (1\ 3)\}$
(C) $\{(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2), (1\ 2\ 4\ 3)\}$
(D) $\{(1\ 2\ 4), (1\ 2\ 3), (1\ 2)(3\ 4)\}$

18. 设 (L, \leq) 是格, 与其等价的代数格记为 (L, \times, \oplus) , 下列说法错误的是 ()

- (A) 若 L 有界, 则 L 一定是有限格;
- (B) L 的任意有限非空子集都有上界;
- (C) 若 L 是有限格, 则 L 一定存在最大元和最小元。
- (D) 若 (L', \leq) 是 L 的半序子格, 则 (L', \times, \oplus) 一定是 (L, \times, \oplus) 的代数子格;

19. 设 (L, \times, \oplus) 是余分配格, 与其等价的半序格为 (L, \leq) , 对 L 中任意的元素 a, b, c , 下列正确的是 ()

- (A) $a \leq a \oplus b \leq b$
- (B) $(a \times b) \oplus (a \times c) \oplus (b \times c) = (a \oplus b) \times (a \oplus c) \times (b \oplus c)$
- (C) $a \leq b$ 当且仅当 $\bar{b} \leq \bar{a}$
- (D) $\bar{a} \oplus \bar{b} \leq \bar{a} \times \bar{b}$

20. 设 S_{30} 是 30 的所有正因数的集合, \times 是求最大公因数, \oplus 是求最小公倍数, $(S_{30}, \times, \oplus, \bar{}, 1, 30)$ 是布尔代数, 下列表达式正确的是 ()

- (A) $3 = (1 \times 2) + (30 \times 3) + (1 \times 5)$
- (B) $6 = (30 \times 2) + (30 \times 3) + (10 \times 5)$
- (C) $10 = (30 \times 2) + (1 \times 3) + (30 \times 5)$
- (D) $2 = (1 \times 2) + (1 \times 3) + (2 \times 5)$

三、证明题 (每小题 15 分 共 30 分)

21. 设 $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ 且 } a \neq 0\}$, 定义 “ \cdot ” 为 G 上的乘法运算, 对于任意的 $(a, b), (c, d) \in G$, $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, cb + d)$, 证明:

- (1) (G, \cdot) 是群;
- (2) 设 $H = \{(1, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, 则 H 是 G 的子群。

22. 设 $S = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $+$ 、 \times 为复数的加法和乘法, 证明:

- (1) $(S, +, \times)$ 是环;
- (2) $(S, +, \times)$ 是整区。

四、证明或反驳 (每小题 10 分 共 30 分)

23. 多项式环 $R_3[X]$ 与 $GF(9)$ 同态。

24. 设 M 、 N 是群 G 的正规子群， e 为 G 的单位元， $M \cap N = \{e\}$ ，则 $\frac{MN}{N}$ 与 M 同构。

25. 只有有限个理想的整区是域。