一、 单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 置换的乘法在以下集合 A 中运算封闭的是（　　）

(A) A={I，(1 2 4)，(1 3)(4 2)}

(B) A={$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$}

(C) A={$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$}

(D) A={$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$}

2. 含有单位元的半群称为独异点，下列选项中的集合 S 及 S 上的运算*构成独异点的是（　　）

(A) S 是自然数集合，x*y=x^y

(B) S 是实数集合，x*y=$(x+y)^2$

(C) S 是正整数集合，x*y=max{x,y}

(D) S 是非零有理数集合，x*y=(x+y)/xy

3. 设(L，≤)是格，与其等价的代数格记为(L，×，⊕)，下列表达式成立的是（　　）

(A) a≤a×b≤b　　**(B) a×(b⊕c) ≤(a×b)⊕(a×c)**

(C) a×b≤a⊕b　　**(D) a⊕b=b 且 a×b=a**

4. 每一个子群都是正规子群的群称为 Hamilton 群。下面选项中不是 Hamilton 群的是（　　）

(A) 4 次对称群　　**(B) 整数加法群**　　**(C) 13 元群**　　**(D) 3 次交代群**

5. 以下代数系统不同构的是（　　）

(A) (Z, +)和(Z_0**, +)，Z 为整数集，**Z_0**为偶数集，+为数的加法**

(B) (A, ⊕, ⊙)和(R, +,　)，A={$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$**|**$a$**∈R，R 为实数集}，⊕, ⊙为矩阵的加法和乘法；+,　为数的加法和乘法**

(C) (R^+**,　)和(R, +)，**R^+**为正实数集合，R 为实数集合，+,　为数的加法和乘**

法

(D) $(R^*,\ \ )$和$(R, +)$，R^*为非零实数集合，R 为实数集合，+, 为数的加法和乘法

6. 域 F 上的分圆多项式，下列说法错误的是（　　）

(A) 若$\Phi_n(x)$在域 F 中有根，则 F 中恰有 n 个 n 次单位根

(B) $\Phi_n(x)$的根一定是 n 次单位根

(C) $\Phi_4(x)$在 16 元域 F 上是可约的

(D) $\Phi_7(x)= x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

7. 关于环下列说法正确的是（　　）

(A) 若 R 有两个极大理想 M 和 N，则 M 和 N 一定不相交

(B) 有限整区中的所有元素加法周期都是质数

(C) R 为偶数环，$N=\{6k|k\in Z$，Z 是整数集合$\}$，则 N 是 R 的理想，剩余环 R/N 是一个域

(D) 设 R 是交换环，$R\neq\{0\}$。则 R 是域当且仅当 R 只有平凡理想

8. 设 H，K 是群(G，*)的子群，下面选项中一定是 G 的子群的是（　　）

(A) (HK, *)　　(B) $(H\cap K,*)$　　(C) (K-H,*)　　(D) $(H\cup K,*)$

9. 设 L 是有限非空集合，在有余分配格$(L，\times，\oplus)$中，下列说法正确的是（　　）

(A) 每个元素的都存在唯一的余元素

(B) 有些元素没有余元素

(C) L 中未必存在最大元素

(D) 有些元素可能存在多个余元素

10. 请判断①~⑤是否正确，其中正确的个数是（　　）

(A) 2 个　(B) 3 个　(C) 4 个　(D) 5 个

①48 元有限域是存在的并且从同构的角度看是唯一的

②体 R 上的同态映射, 其同态核一定是 R 的平凡子环

③若多项式 f(x)在域 F 的子域上有根，则 f(x)在域 F 上可约

④R_2是 GF(8)的子域，GF(8)是 GF(128)的子域

⑤对于 q 元域中任何元素 x，则 qx=0

二、简答题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 计算$\Phi_2(x)\ \Phi_6(x)\ \Phi_{14}(x)\ \Phi_{42}(x)$。

2. 在 GF(121)中，请计算$\frac{-5+2\sqrt{-2}}{3}$

3. 在 GF(25)上把多项式 $x^{10}+1$ 分解为质因式乘积的形式。

4. 设 H 是复数域上非零复数乘法群的有限子群，则 H 一定是循环群吗？

5. 设(R*，　)是非零实数乘法群，下面映射哪些是 R*到 R*内的同态映射，并写出

   其同态核。 $f_1(x)=|x|$ $f_2(x)=-\frac{1}{x}$ $f_3(x)=2^x$

6. 设 H 是群 G 的子群，a,b∈G。请指出以下哪些条件与 aH=bH 等价。

   （A） $b^{-1}a\in H$ （B）$aH\cup bH\neq\phi$ （C）$b\in aH$

7. 设群 G=(a)，a 的周期为 15。求子群 $H=(a^6)$的所有左陪集。

8. 请画出所有 4 元格的哈斯图。

9. 设(L，×，⊕)是分配格，对于 L 中任意的元素 a、b、c，有 a×c＝b×c 且 a⊕c＝b⊕c，则 b____a（选择填写：≥、=、≤）

10. 设集合 L={1, 2, 3, 12, 18, 36, 72}，“|”为整数的整除关系，(L, |)是格吗？

三、证明题（每小题 10 分 共 30 分）

1. 证明：多项式 $f(x)=3x^4-x^3+7x^2-5$ 在 R_0 上不可约。

2. 证明：$\frac{R_3[X]}{\Phi_4(x)R_3[X]}$是 9 元域。

3. 定义：群中每个元素的周期都有限，则该群称为周期群。证明：若群 G 的正规子群 N 及商群 G/N 都是周期群，则 G 是周期群。

四、证明或反驳（每小题 10 分 共 30 分）

1. 证明或反驳：任何群都等于其两个真子群的并集。

2. 证明或反驳：15 元交换群必为循环群。

3. 设 S 是环 R 的一个子环，R 与 S 都有单位元，分别是 e 和 e’，但 e≠e’。

证明或反驳：R 是消去环。