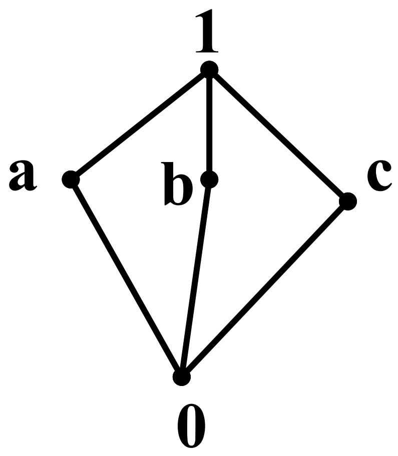
2022 级参考答案

一、 简答题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 是，是
2. 是
3. 是，例如：非零复数乘法群有子群{-1，1，i，-i}【举例不唯一】
4. 8 个
5. 7、14
6. $f(x)=(x^2+x+1)^2$
7. $\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9},\overline{12}\}$【或$\{\overline{0},\overline{5},\overline{10}\}$】
8. 有，3 重根
9. 运算表如图：

⊕	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	1	1	1
a	a	1	a	1
b	b	1	1	b

10. 哈斯图如图所示：



二、 多项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

11. ABC12.CD　13.AC　14.ABD　15.ABD

16. BCD17.CD　18.AD　19.BC　20.AC

三、 证明题（每小题 15 分 共 30 分）

21. ⑴证明$(G,\cdot)$是群

①因为$(1,1)\in G$, 所以 G 非空；

②对于任意的(a,b)、(c,d)∈G，因 $a\neq 0, c\neq 0$，则 $ac\neq 0$，$ac\in R$, $cb+d\in R$, 所以 $(a,b)\cdot(c,d)=(ac, cb+d)\in G$，即运算·封闭；

③运算·满足结合律

对于任意的(a,b)、(c,d)、(e,f)∈G，

$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)=(ac, cb+d)\cdot(e,f)=(ace, e(cb+d)+f)=(ace, bce+de+f)$

$(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))=(a,b)\cdot(ce, de+f)=(ace, bce+de+f)$

所以 $((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)=(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$

因此运算·满足结合律；

④(1,0)是左单位元

对于任意的(a,b)∈G, $(1,0)\cdot(a,b)=(1a,0c+b)=(a,b)$，所以(1,0)是左单位元；

⑤对于任意的(a,b)，$(1/a，-b/a)\cdot(a,b)=(1,(-b/a)a+b)=(1,0)$，所以(1/a，-b/a)是(a,b)左逆元；

综上，(G, ·)是群。

⑵证明 H 是 G 的子群

①因为(1,0)∈H，所以 H 非空；

②对于任意的(1,a)(1,b)∈H,

$(1,a)\cdot (1,b)^{-1}=(1,a)\cdot (1,-b)=(1,a-b)\in H$

所以 H 是 G 的子群

22. ⑴证明(S, ＋, ×)是环

①因为 $0+0i=0\in S$，所以 S 非空；

②对于任意的 a+bi、c+di∈S，$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\in S$，即运算＋封闭；

③对于任意的 a+bi、c+di∈S，$(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i\in S$，即运算×封闭；

④复数运算+满足结合律，因此 S 是复数的子集，S 上的+也满足结合律；

⑤复数运算+满足交换律，因此 S 是复数的子集，S 上的+也满足交换律；

⑥对于任意的 a+bi∈S，$(0+0i)+(a+bi)=(a+bi)$，所以(0+0i)即 0 是零元；

⑦对于任意的 a+bi∈S，$(-a-bi)+(a+bi)=(0+0i)=0$，所以-a-bi 是 a+bi 的负元；

⑧复数运算×满足结合律，因此 S 是复数的子集，S 上的×也满足结合律；

⑨根据复数的乘法对加法满足分配律；

综上，证明(S, ＋, ×)是环

⑵证明(S, ＋, ×)是整区

①复数运算×满足交换律，因此 S 是复数的子集，S 上的×也满足交换律，因此(S, ＋, ×)交换环；

②对于任意的 $a+bi\in S$，$(1+0i)\times(a+bi)=(a+bi)\times(1+0i)=a+bi$, $(1+0i)$即 1 是单位元，因此 S 是含单位元环；

③复数运算×满足消去律，因此 S 是复数的子集，S 上的×也满足消去律，因此(S, ＋, ×)消去环；

综上，(S, ＋, ×)是整区。

四、 证明或反驳（每小题 10 分 共 30 分）

23. 证明：多项式环 $R_3[X]$与 GF(9)同态。

证明：GF(9)为 9 元有限域，特征 p=3，x^8-1 在 GF(9)上存在 8 个 8 次单位根，包括$\Phi_8(x)$所有的根，将$\Phi_8(x)$在 $R_3[X]$进行质因式分解，取其中一个质因式$\psi(x)$，则$\psi(x)$在 GF(9)中有根，设其中一个根为ξ，于是$\psi(\xi)=0$；设 $R_3[x]$到 GF(9)内的一个映射σ：$\sigma(f(x))=f(\xi)$ 【4 分】

(1)证明：σ是满射【3 分】

显然, $\sigma(0)=0$。

任取$\alpha\in GF(9)$, $\alpha\neq 0$，于是α是 8 次单位根，

因为ξ是$\psi(x)$的根而$\psi(x)\mid\Phi_8(x)$，所以ξ是本原 8 次单位根，因而$\alpha=\xi^k$，从而 $x^k\in R_3[x]$，使 $\sigma(x^k)=\xi^k=\alpha$.

所以σ是 $R_3[x]$到 GF(9)上的满射。

(2)证明：σ是同态映射【3 分】

对于$f(x)$、$g(x)\in R_3x]$，

$$\sigma(f(x)+g(x))=f(\xi)+g(\xi)=\sigma(f(x))+\sigma(g(x)),$$

$$\sigma(f(x)g(x))=f(\xi)g(\xi)=\sigma(f(x))\sigma(g(x))$$

所以σ是同态映射

综上，多项式环 $R_3[X]$与 GF(9)同态

24. 证明：$\dfrac{MN}{N}$与 M 同构。

（1）证明：MN 是群【5 分】

只需证明 MN 是 G 的子群即可。
①因 M、N 都是 G 的正规子群，$1\in M$、$1\in N$，因此 $1=1\cdot 1\in MN$，MN 非空；
②对于任意的 mn、$m_1n_1\in MN$, $mn\cdot(m_1n_1)^{-1}=mn\cdot(n_1^{-1}m_1^{-1})=m\cdot(n\cdot n_1^{-1})\cdot m_1^{-1}$
因 $n\cdot n_1^{-1}\in N$，不妨设 $n_2=n\cdot n_1^{-1}$，则 $m\cdot(n\cdot n_1^{-1})\cdot m_1^{-1}=m\cdot n_2\cdot m_1^{-1}=m\cdot(n_2\cdot m_1^{-1})$
因 N 为正规子群，$n_2\cdot m_1^{-1}=m_1^{-1}n_3$（其中 $n_3\in N$）
因此 $mn\cdot(m_1n_1)^{-1}=m\cdot(n_2\cdot m_1^{-1})=m\cdot(m_1^{-1}n_3)=(m\cdot m_1^{-1})\cdot n_3\in MN$
综上，MN 是 G 的子群

（2）证明：MN 与 M 同态【5 分】
设σ是 MN 到 M 内的映射，对于任意的 $mn\in MN$，令$\sigma(mn)=m$
对于任意的 $m\in M$，一定存在 $m\cdot 1\in MN$，$\sigma(m\cdot 1)=m$，因此σ是满射
对于 mn、$m_1n_1\in MN$，
$\sigma((mn)\cdot(m_1n_1))=\sigma(m(n\cdot m_1)n_1)=\sigma(m(m_1n_2)n_1)=\sigma((mm_1)\cdot(n_2n_1))=mm_1=\sigma(mn)\sigma(m_1n_1)$
因此σ是 MN 到 M 上的同态射，MN 与 M 同态，M 中单位元 1 的原像集
$\sigma^{-1}(1)=\{1\cdot n|n\in N\}=N$
故根据群的第三同态定理得，$\dfrac{MN}{N}$与 M 同构。

25. 证明：只有有限个理想的整区是域。
证明：设 R 是只有有限个理想的整区，则 R 中乘法满足交换律、并且含有单位元 1，因此，要证明 R 是域，只需证明 R 是体即可。即只要证明 $R^*=R-\{0\}$上任意元素存在逆元即可。
因 R 含有单位元又是交换环，任取 $a\in R^*$，则 $aR, a^2R, a^3R, \ldots$都是其主理想，因 R 只有有限个理想，必定存在 m、n(不妨设 $n>m$)，使得 $a^nR=a^mR$，因 R 中有单位元 1，因此必定存在元素 $r\in R$，使得 $a^nr=a^m\cdot 1$，又因 R 是消去环，R 中乘法满足消去律，因 $a\neq 0$，$a^m\neq 0$，所以有 $a^{n-m}r=1$，若 $n-m=1$，$ar=1$ 则 r 即是 a 的右逆元，否则 $a\cdot a^{n-m-1}r=1$，即 $a^{n-m-1}r$ 为 a 的右逆元。因 R 中乘法满足交换律，因此右逆元就是左逆元，即是 a 的逆元。
综上，R 中非零元素乘法构成乘法群，即 R 是体，又是交换体，故 R 是域。
得证。
【也可通过证明可除条件 $ax=b$ 和 $ya=b$ 有解进行证明】