20参考答案

一、单项选择题（

1. C　2. C　3. C　4. A　5. D

6. A　7. C　8. B　9. A　10. A

二、 简答题

1. $x^{21}+1$

2. 0、4

3. $(x-2)^5(x+3)^5$

4. 是

5. $f_1(x)$，同态核是$\{1, -1\}$

6. A C

7. $H=\{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}\}$

$aH=\{a, a^4, a^7, a^{10}, a^{13}\}$

$a^2H=\{a^2, a^5, a^8, a^{11}, a^{14}\}$

8. 共两个，一个菱形，一个线段。

9. b=a

10. 不是

三、 证明题

1. 证明：

在 R_2 上看，$3x^4-x^3+7x^2-5=(x+1)(x^3+x+1)$；

而 x^3+x+1 在 R_2 上是质式，因为 0，1 都不是它的根，因此无一次质式，即三次式为质式；

又因为：R_0 上最高质因式次数大于等于 R_2 上最高质因式次数，所以，R_0 上最高质因式次数为 3 或 4。

若 R_0 上最高质因式次数为 4，则 f(x) 在 R_0 上不可约；若在 R_0 上最高质因式次数为 3，则必有一次质因式。

但 ±5/3 与 ±1 均不是上式的根。故上式无一次质因式，故在 R_0 上不可约。

2. 证明：$\Phi_4(x)= x^2+1$，在 R_3 上，$\Phi_4(0)=1$，$\Phi_4(1)=2$，$\Phi_4(2)=2$，所以 $\Phi_4(x)$ 在 $R_3[X]$ 中是质式。$\Phi_4(x)R_3[X]$ 是 $R_3[X]$ 的极大理想，$R_3[X]/\Phi_4(x)R_3[X]$ 是有单位元交换的单纯环，因此是域。$R_3[X]/\Phi_4(x)R_3[X]$ 的元素为 $R_3[X]$ 的多项式除以 $\Phi_4(x)$ 的所有余式，这些余式分别为 0,、1、2、x、x+1、x+2、2x、2x+1、2x+2 共 9 个，因此为 9 元域

3. 证明：

任取 a∈G，则 aN∈G/N。但由于 G/N 是周期群，故有正整数 m，使得：

$$(aN)^m=a^mN=N，即\ a^m\in N$$

又由于 N 也是周期群，故又有正整数 n，使得：

$$(a^m)^n=a^{mn}=e$$

从而 a 的周期有限，即 G 是一个周期群。

四、 证明或反驳

1. 反驳：结论：任何群都不能等于其两个真子群的并集

证 1)反证法. 假设群 G 是两个真子群 H,K 的并集，即 $G=H\cup K$.

由于 H,K 是 G 的真子群，故有 $a,b\in G$ 使

$$b\notin H,\qquad a\notin K.$$

但由于 $G=H\cup K$，从而 $a\in H$，$b\in K$. 又由于 $ab\in G=H\cup K$，故必

$$ab\in H\quad 或\quad ab\in K.$$

若 $ab=h\in H$，则 $b=a^{-1}h\in H$ 矛盾；若 $ab=k\in K$，则 $a=kb^{-1}\in K$ 也矛盾. 因此，原假设不成立，即 G 不能是二真于群的并集.

2. 结论：15 元群一定是循环群

证明： 设 G 是 15 元交换群，根据拉格朗日定理，除单位元外，其它元素的周期可能为 3、5、15，

（1）若存在元素 a 的周期为 15，则 G=(a)即为循环群；

（2）否则，假设存在 a 的周期为 3，b 的周期为 5，则显然 ab 的周期为 15，ab 即为生成元；

（3)如果所有非单位元的元素周期都是 3,不存在周期为 5 的元素，那么对于任意的非单位元素 a、b，则 ab 的周期为 9，而 9 不能整除 15，因此不可能，同理不可能所有的元素周期都是 5.

因此，群 G 中必存在周期为 15 的元素，即 G 为循环群。

3. 反驳：因为 e’e=e’，e’e’=e’，所以：

$$e'(e-e')=e'e-e'e'=e'-e'=0$$

而 e-e’≠0，故 e’是 R 的一个零因子。

所以 R 不是消去环。