Operations Research
运筹学

南开大学数学科学学院 胡威
E-mail: huweihappy@nankai.edu.cn

教材：《运筹学基础及运用》（第六版）胡运权等编著

参考书目：《运筹学教程》胡运权主编

《运筹学》（修订版）运筹学教材编写组

《运筹学基础》何坚勇（电子书）

《运筹学》杨民助（电子书）

平时分20%，期末80%

第一章 线性规划与单纯形法

Linear Programming and Simplex Method Dual simplex method

- ✓ 如果在规划问题的数学模型中，目标函数和约束条件都是线性的，这类模型称为**线性规划**问题的数学模型。
- ✓ 线性规划是运筹学的一个重要分支，也是运筹学最基本的一个部分，它是研究现有条件下，使目标达到最优的一种数学方法。
- ✓ 线性规划的教学理论是成熟的。求解线性规划的方法——单纯形法易于在计算机上实现。单纯形法的出现使线性规划得到了更广泛的应用，已成为现代科学管理的重要手段之一。

例题(有限资源利用问题):

某企业计划生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，这两种产品都要分别在A、B、C、D四种不同设备上加工，各种设备的生产能力和产品的利润如下表所示，试问企业如何安排生产，使得利润最大。

	I	II	资源限制
A	2	2	12
B	1	2	8
C	4	0	16
D	0	4	12
单位利润	2	3	

从上述例子可以看到，规划问题的数学模型包括三个组成要素：

a) **决策变量**：指决策者为实现规划目标的方案，措施，是问题中要确定的未知量

b) **目标函数**：指问题要达到的目的要求，表示为决策变量的函数

c) **约束条件**：指决策变量取值时受到的各种可用资源的限制，表示为含决策变量的等式或不等式

一般线性规划问题的数学模型可表示为以下几种形式，即：

$$\max(\text{或者}\min)\quad Z=c_1x_1+c_2x_2\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2\cdots+a_{1n}x_n\le(\text{或者}=,\ge)b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\cdots+a_{2n}x_n\le(\text{或者}=,\ge)b_2\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\cdots+a_{mn}x_n\le(\text{或者}=,\ge)b_2\\ x_1,x_2\cdots x_n\ge 0\end{cases}\qquad(1.1)$$

简写形式为：

$$\max(\text{或者}\min)\quad Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\leq(\text{或者}=,\geq)b_i\quad(i=1、2\cdots m)\\ x_j\geq 0,j=1、2\cdots n\end{cases}\qquad(1.2)$$

$$\max(\text{或者}\min)\quad Z = CX$$

向量形式为：
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j x_j \le (\text{或者}=,\ge) b \\ X \ge 0 \end{cases} \qquad (1.3)$$

$$C=(c_1, c_2 \cdots c_n),\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad P_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\max(\text{或者}\min)\quad Z = CX$$

矩阵形式为：

$$\begin{cases} AX \le (\text{或者} =, \ge) b \\ X \ge 0 \end{cases} \qquad (1.4)$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

A为约束方程组变量的系数矩阵，或者称为约束变量的系数矩阵

线性规划问题的目标函数和约束条件内容和形式上多种多样。

为便于讨论，规定线性问题的**标准形式**为：

$$\max \quad Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.5a)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i \left(i=1、2\cdots m\right) \left(1.5b\right) \\ x_j \geq 0, j=1、2\cdots n \qquad (1.5c) \end{cases}$$

$$b_i \geq 0$$

标准形式的线性规划模型中：

- ✓ 目标函数为**求极大值**（有些书上规定时间求极小值）；
- ✓ 约束条件为**等式**；
- ✓ 约束条件右端常数项b_i**为非负值**；

变量x_i的取值非负。

对不符合标准形式的线性规划问题，可分别通过下列方法化为标准形式：

1. 目标函数为求极小值，即为 $\min \ Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

因为求min Z等价于求max $(-Z)$,令 Z'=– Z

即化为：max $Z'=-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j=\sum_{j=1}^{n}(-c_j) x_j$

2. 约束条件为不等式

当约束条件为 ≤， 如 $2x_1 + 2x_2 \leq 12$

当约束条件为 ≥， 如 $10x_1 + 12x_2 \geq 18$

3. 取值无约束变量(自由变量)

如果变量x代表某产品当年计划数与上一年计划数之差，显然x的取值可能是正也可能是负

4. 变量为负数

2. 约束条件为不等式

当约束条件为≤，如$2x_1+2x_2\le 12$ 可令$x_3=12-2x_1-2x_2$ 或$2x_1+2x_2+x_3=12$

显然$x_3\ge 0$为松弛变量(未被充分利用的资源)

当约束条件为≥，如$10x_1+12x_2\ge 18$ 可令$x_4=10x_1+12x_2-18$ 或$10x_1+12x_2-x_4=18$

显然$x_4\ge 0$为剩余变量(超用的资源)

- $\mathbf{x_3}$和$\mathbf{x_4}$是新加上去的变量，取值均为非负，加到原约束条件中去的目的是使不等式转化为等式，其中**$\mathbf{x_3}$为松弛变量**，**$\mathbf{x_4}$一般称为剩余变量**，其实质与x_3相同，故也有**统称为松弛变量**的。
- 松弛变量和剩余变量在实际问题中分别表示未被充分利用的资源和超用的资源数，**均未转化为价值和利润，所以引进模型后它们在目标函数中的系数均为0**。

3. 取值无约束变量(自由变量)

如果变量x代表某产品当年计划数与上一年计划数之差，显然x的取值可能是正也可能是负，这时可**令$x=x'-x''$，其中$x'\geq 0$， $x''\geq 0$**将其代入线性规划模型即可。

4. 变量为负数

若$x_j\leq 0$，可**令$x_j'=-x_j$，显然$x_j'\geq 0$**

例：将下列线性规划模型化为标准形式

$$\min \quad Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \le 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \le 0，\ x_2 \ge 0，\ x_3\text{取值无约束} \end{cases}$$

例：将下列线性规划模型化为标准形式

$$\min \quad Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad ③$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \le 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \text{取值无约束} \end{cases}$$

① ②

1.1.3.线性规划与单纯形法——线性规划问题的标准形式

例：将下列线性规划模型化为标准形式

$$\min \quad Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad ③$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \le \boxed{9} \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge \boxed{4} \quad ① \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = \boxed{-6} \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3\text{取值无约束} \end{cases}$$

②

令$Z' = -Z$，$x_3 = x_3' - x_3''$，$x_1' = -x_1$，则有：

$$\max \quad Z' = x_1' - 2x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1' + x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 9 \\ 3x_1' + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' - x_5 = 4 \\ 3x_1' + 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' = 6 \\ x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

x_4：松弛变量

x_5：剩余变量

$$\max \quad Z = CX \left(1.6a\right)$$

线性规划问题
$$\begin{cases} AX=b & \left(1.6b\right) \\ X \geq 0 & \left(1.6c\right) \end{cases}$$

求解线性规划问题，就是从满足约束条件(1.6b)、(1.6c)的方程组中找出一个解，使目标函数(1.6a)达到最大值。

可行解：满足上述约束条件$(1.6b)(1.6c)$的解称线性规划问题的可行解

全部可行解的集合称为可行域

记为$\mathbb{S}=\left\{x\in\mathbb{R}^n \middle| Ax=b\ ，\ x\geq 0\right\}$

最优解：使目标函数$(1.6a)$达到最大值的可行解称为最优解

若$\exists x^*\in\mathbb{S}$，使得对$\forall x\in\mathbb{S}$，都有$cx^*\geq cx$

则称x^*为问题(1.6)的最优解

$$\max\quad Z=CX \quad (1.6a)$$

$$\begin{cases} AX=b & (1.6b) \\ X\geq 0 & (1.6c) \end{cases}$$

1.1.4.线性规划与单纯形法——线性规划问题的解

基：设 A 是约束方程组（1.6b）的 $m\times n$ 阶系数矩阵（$n>m$）秩为 m

B 是矩阵 A 中的一个 $m\times m$ 阶的满秩子矩阵

称 B 是线性规划问题的一个基，不失一般性，设：

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}=(P_1 \cdots P_m)$$

$$\begin{cases} \max \quad Z=CX \\ \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \\ X \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \max \quad Z=CX \\ AX=b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

已知 $A=(B,N)$

基向量：$B=(P_1 \cdots P_m)$

非基向量：$N=(P_{m+1} \cdots P_n)$

基变量：$x_B=(x_1 \cdots x_m)^T$

非基变量：$x_N=(x_{m+1} \cdots x_n)^T$ 故 $x=\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$

其中：$C=(C_B,C_N),A=(B,N),X=\begin{pmatrix}x_B\\x_N\end{pmatrix}$

$$\max \quad Z=CX$$

$$\begin{cases}AX=b\\X\geq 0\end{cases}$$

$$AX=(B,N)\begin{pmatrix}x_B\\x_N\end{pmatrix}=Bx_B+Nx_N=b$$

$x_B=B^{-1}b\text{-}B^{-1}Nx_N$

在上式中令$x_N=0$ 则得到$x_B=B^{-1}b$

即$x=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\0\end{bmatrix}$称之为相应于基$B$ 的基解

基可行解：满足变量非负约束条件(1.6c)的基解称为基可行解

可行基　：对应于基可行解的基称为可行基

有一个基，就可以求出一个基解，由于基的个数是有限的，最多只有 $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ 个，故基解最多只有 $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ 个，而基可行解的个数不会超过基解的个数。

例4：在下述线性规划问题中，举例说明什么是基、基变量、基解、基可行解和可行基

$$\max \quad Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例4：在下述线性规划问题中，举例说明什么是基、基变量、基解、基可行解和可行基

$$\max \quad Z = 2x_1 + 3x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + 0x_2 + x_5 = 16 \\ 0x_1 + 4x_2 + x_6 = 12 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, 6 \end{cases}$$

$$\max \quad Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解：

约束方程组的系数矩阵A (秩不大于4)

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4×4的满秩矩阵

$$\left(P_3,P_4,P_5,P_6\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 故(P_3,P_4,P_5,P_6)是上述线性规划问题的一个<u>基</u>;
- P_3,P_4,P_5,P_6个对应的变量x_3,x_4,x_5,x_6是<u>基变量</u>，x_1,x_2是<u>非基变量</u>;
- 在约束方程中如果令x_1=x_2=0，即可解得x_3=12,x_4=8,x_5=16,x_6=12,因此基解中所有变量取值为非负，故它是<u>基可行解</u>;
- 因而与这个基可行解对应的基(P_3,P_4,P_5,P_6)是一个<u>可行基</u>。

1.2.线性规划与单纯形法——图解法

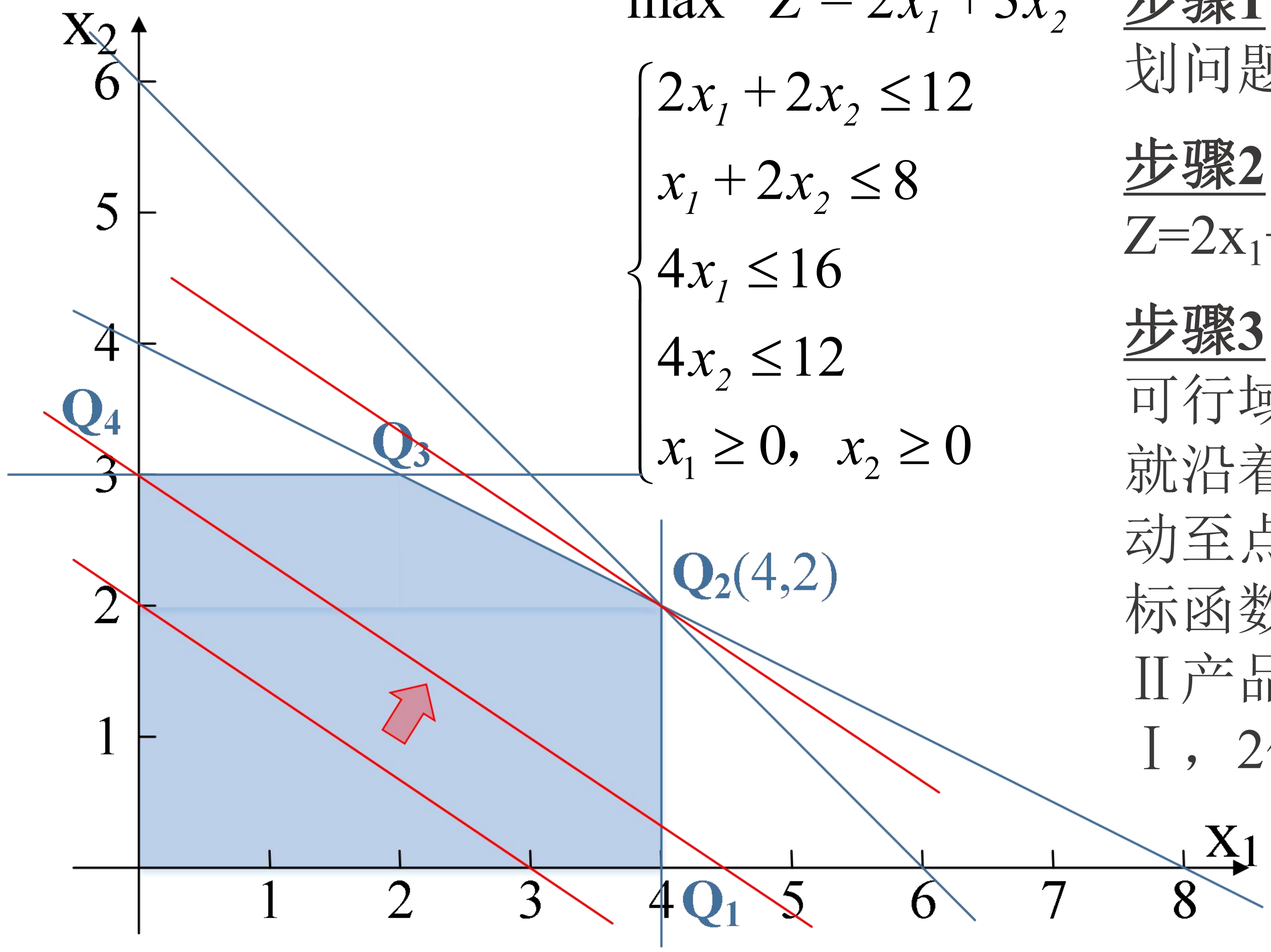
为便于建立n维空间中线性规划问题的概念以及便于理解求解一般线性规划问题的单纯形法的思路，先介绍图解法。

图解法**优点**是直观性强，计算方便，**缺点**是只适用于问题中有两个变量的情况，具体详见下面例2。

$$\max \quad Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0，\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.2.线性规划与单纯形法——图解法



$$\max \quad Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

步骤1：在直角坐标系中画出线性规划问题的可行域，如图：

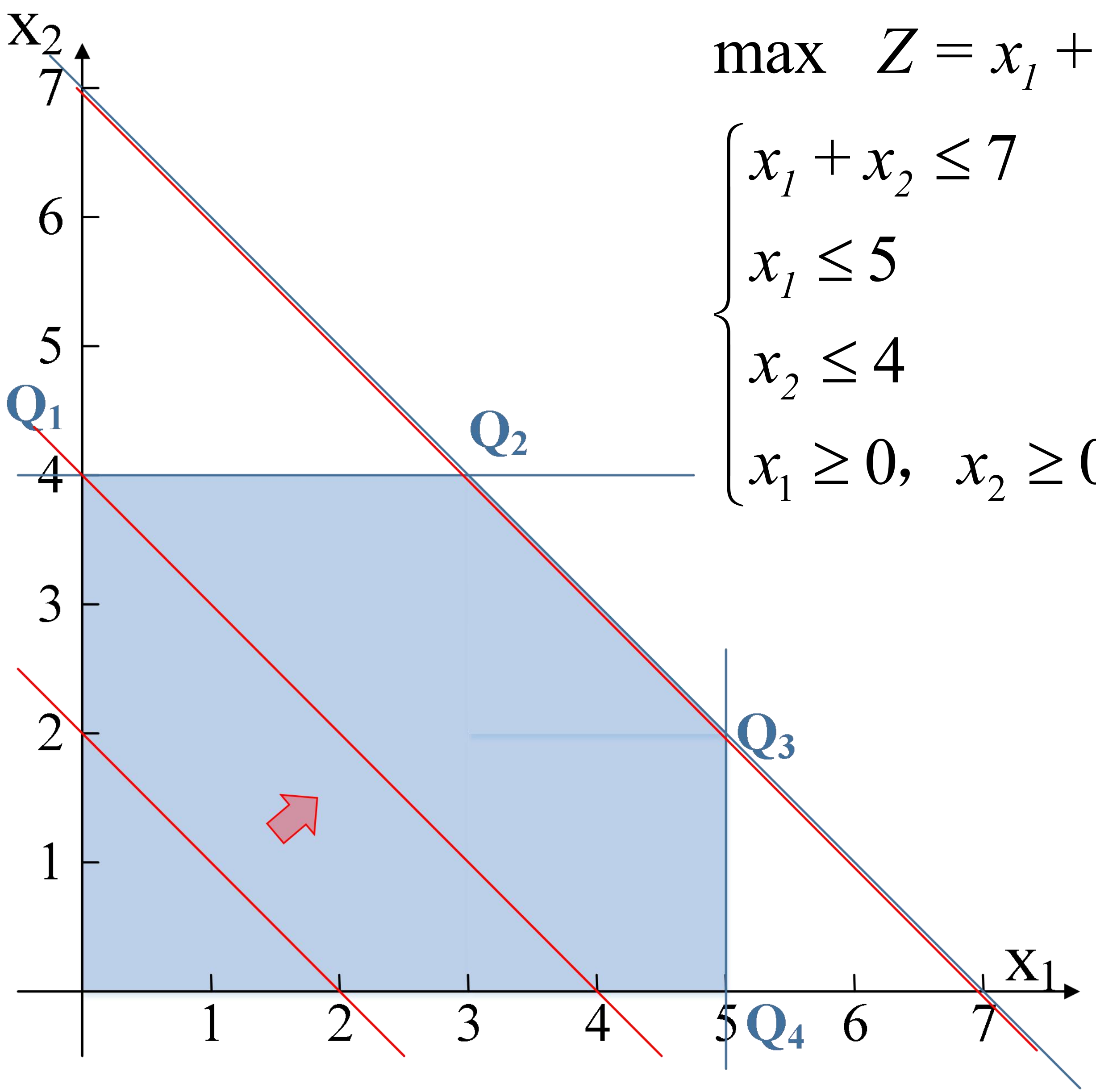
步骤2：做目标函数的等值线，由$Z=2x_1+3x_2$，得：$x_2=-2/3x_1+1/3Z$

步骤3：确定最优解。等值线覆盖于可行域上，当Z由小变大时，等值线就沿着其法线方向向上方移动，当移动至点$Q_2(4,2)$时，最优。将其代入目标函数得Z=14。即该企业生产Ⅰ、Ⅱ产品的最佳方案是：生产4件产品Ⅰ，2件产品Ⅱ，能获得利润14。

上例中最优解唯一，但在线性规划问题的计算中，解的情况还有可能会出现以下几种：

$$\max \quad Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$



$$\max \quad Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(1)有无穷多解

线性规划问题的可行域如图，则目标函数的最大值等值线与直线$x_1+x_2=7$重合，故线段Q_2Q_3上的点都是该问题的最优解，无穷多最优解。

$$\max \quad Z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

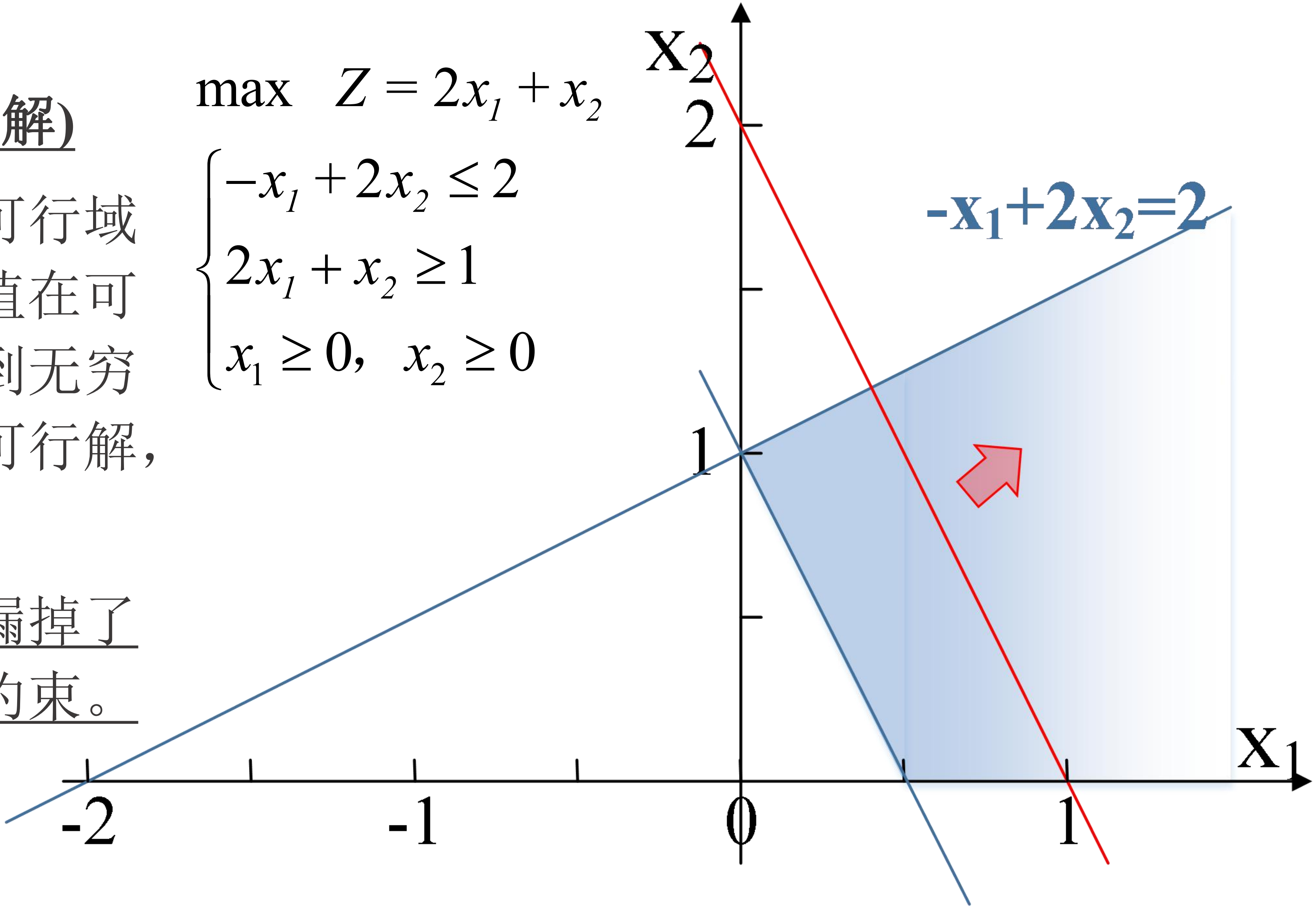
(2)无界解(无最优解)

线性规划问题的可行域如图，目标函数值在可行域中可以增加到无穷大。故本题虽有可行解，但无最优解。

其原因是建模时漏掉了某些必要的资源约束。

$$\max \quad Z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

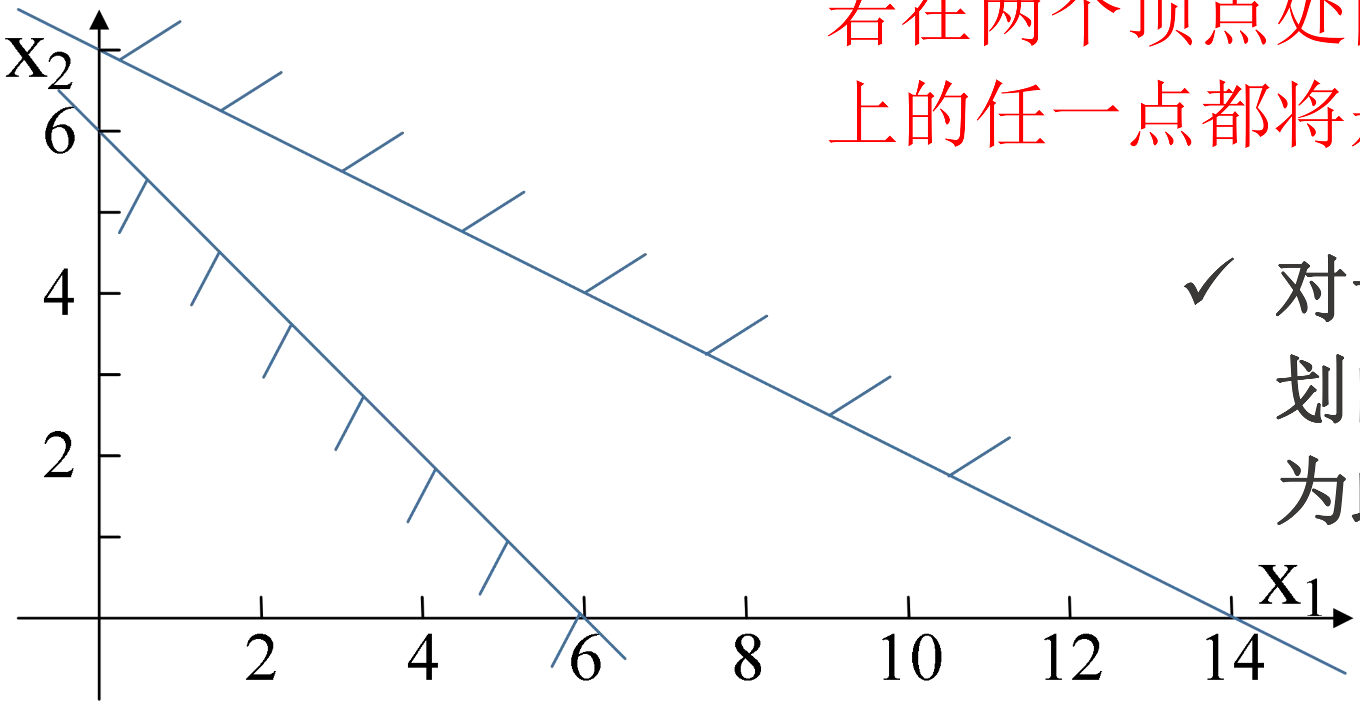


$$\max \quad Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max \quad Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \ge 14 \\ x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$



(3)无可行解

当可行域是空集时，自然不会有最优解

可行域一定是一个有界或者无界的凸多边形。若问题有最优解，则它一定位于可行域的顶点处。若在两个顶点处同时达到最优解，则它们的连线上的任一点都将是最优解，即有无穷多个最优解。

- ✓ 对于一般的含有**n**个变量的线性规划问题，上述结论是否也成立？为此，还需做进一步的理论分析。

1.3.线性规划与单纯形法——单纯形法原理

单纯形法是求解一般线性规划问题的基本方法。

在1947年由“线性规划之父”丹捷格(Dantzig)提出。

下面介绍这种方法的理论依据。

1.3.1.线性规划与单纯形法——预备知识：凸集和顶点

- **凸集**：对于一个给定的几何图形，通常可以直观上判断其凹凸性。但这样做一方面不严格，容易产生错误；另一方面，如果一个几何形体给出的只是解析表达式，则无法从直观上进行判断。
- **凸集的严格定义**：若集合C中任意两点X_1,X_2，其连线上的所有点，也都是集合C中的点，称C为凸集。由于X_1,X_2的连线可以表示为：

$$aX_1+(1-a)X_2 \quad (0<a<1)$$

- **凸集的定义用数学语言表示**：

对$\forall X_1\in C, X_2\in C$,有$aX_1+(1-a)X_2\in C \quad (0<a<1)$

1.3.1.线性规划与单纯形法——预备知识：凸集和顶点

✓ **顶点**：凸集C中满足下述条件的点X称为顶点：如果C中不存在任意两个不同的点X_1和X_2。使X称为这两个点连线上的一个点。即对任何$X_1 \in C$，$X_2 \in C$，不存在$X=aX_1+(1-a)X_2$（$0<a<1$），则称X是凸集C的顶点。

1.3.2.线性规划与单纯形法——几个基本定理的证明

定理一：若线性规划问题存在可行解，则问题的可行域是凸集

定理二：线性规划问题的基可行解，对应线性规划问题可行域顶点

引理：可行解是基可行解的充要条件：X正分量所对应的列向量是线性独立的（用于证明定理二）

定理三：可行域有界，则最优解必在可行域顶点达到

引理：若C为有界凸集，对C中任一点可表示为C顶点的凸组合（用于证明定理三）

定理四：若在多个顶点达到最优，则在这些顶点任意凸组合上达最优

<u>定理四</u>：若线性规划问题在可行域的多个顶点处达到最优，则线性规划问题在这些顶点的任意凸组合上也达到最优。

总结：线性规划问题最优解情况如下

- 可行域空集：没有可行解，不存在最优解
- 可行域非空：可行域是凸集
  - <u>可行域为有界凸集：一定存在最优解，一定在顶点取得</u>
    - 最优解唯一：最优解一定在可行域某一个顶点取得
    - 当无穷多个：最优解一定至少在两个顶点取得
  - <u>可行域是无界凸集合：可能有最优解，可能无最优解</u>
    - 有最优解：有唯一最优解(一个顶点)；有无穷多最优解(至少两个顶点)

由于可行域顶点有限，故可以枚举法逐个比较，找到最优解，但m，n较大时，做法不可取。

1.3.3.线性规划与单纯形法——单纯形法

<u>单纯形法</u>是求解线性规划问题最为有效的一个方法，它的基本思想是<u>从一个基可行解(即可行域的一个顶点)出发，经过基变换转换到另一个基可行解</u>，最后得到最优解

引例：

$$\max \quad Z = -2x_1 - 5x_2 - 8x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1.确定初始基可行解

2.最优性检验及解的判定

3.基变换

1.确定初始基可行解

线性规划问题如果存在最优解，一定可以在基可行解中找到，因此单纯形法的基本思路是，先找到一个初始基可行解，如果不是最优解，设法转换到另一个基可行解，不断进行一直到找到最优解为止。

线性规划约束条件全部为“≤”时，可按照下述方法出初始基可行解。

$$\max \quad Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \max \quad Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0\sum_{j=1}^{m} x_{si}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i \left(i=1、2\cdots m\right) \\ x_j \ge 0, j=1、2\cdots n\end{cases} \qquad \begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + x_{si} = b_i \left(i=1、2\cdots m\right) \\ x_j \ge 0, x_{si} \ge 0, j=1、2\cdots n\end{cases}$$

左式第i个约束条件上加上松弛变量x_{si}，化为标准形式，得到右式：

约束方程组的系数矩阵为：$\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n} & 1 & 0\cdots 0 \\ a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2n} & 0 & 1\cdots 0 \\ \cdots & & \\ a_{m1}\ a_{m2}\cdots a_{mn} & 0 & 0\cdots 1 \end{bmatrix}$

以上矩阵中含有单位矩阵$\left(P_{s1}\quad P_{s2}\cdots P_{sm}\right)$

以上单位矩阵为基，解出变量值$x_{si}=b_i\left(i=1\cdots m\right)$

$\because b_i\geq 0\ \therefore \mathrm{X}=\left(0\cdots 0,b_1\cdots b_m\right)^T$是一个基可行解

当线性规划中约束条件为=或≥时，化为标准形式后，一般约束条件的系数矩阵中不包含有单位矩阵。<u>为便于找出一个初始基可行解，可添加人工变量构造单位矩阵，称作人工基</u>。

1.3.3.线性规划与单纯形法——单纯形法

$$\max \quad Z = CX$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

基变量$x_B = (x_1 \cdots x_m)^T$,非基变量$x_N = (x_{m+1} \cdots x_n)^T \quad X = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$

B为基矩阵，位于A 前m 列, $A=(B,N)$,$C=(C_B,C_N)$

$$AX = (B,N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N = b \quad \Rightarrow \quad x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b,$$

$$Z = C_B\left(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N\right) + C_N x_N = C_B B^{-1}b + \left(C_N - C_B B^{-1}N\right)x_N$$

$$\max \quad Z = CX \qquad\qquad \max \quad Z=C_B B^{-1}b+\left(C_N - C_B B^{-1}N\right)x_N$$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \ge 0 \end{cases} \quad \text{等价} \quad \begin{cases} x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_B \ge 0,\ x_N \ge 0 \end{cases}$$

目标函数中非基变量的系数称为检验数

即$\left(\delta_{m+1} \cdots \delta_n\right) = C_N - C_B B^{-1}N$

令非基变量$x_N = 0$ 可得$x_B = B^{-1}N$,得到初始基可行解$x^{(0)}=\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$

2.最优性检验及解的判定

$X^{(0)}=\left(b_1',b_2',\cdots b_m',0\cdots 0\right)^T$ 为对应于基B 的一个基可行解

a^o所有$\delta_j \le 0\left(j=m+1,m+2\cdots n\right)$

$\Rightarrow$ <u>最优解</u>

b^o所有$\delta_j \le 0\left(j=m+1,m+2\cdots n\right)$且存在某个非基变量检验数$\delta_{m+k}=0$ 且按公式

$\theta=\min\limits_i\left\{\dfrac{x_i}{a_{i,m+k}}\middle| a_{i,m+k}>0\right\}$可以找到$\theta>0$,这表明可以找到另一顶点（基可行解）

目标函数值也达到最大。

$\Rightarrow$ <u>无穷多解</u>

c^o存在某$\delta_{m+k}>0$且对所有i,有$a_{i,m+k}\le 0\left(i=1,2\cdots m\right)$

$\Rightarrow$ <u>无界解/无最优解</u>

3.基变换

初始基可行解不是最优解及不能判别无界时，寻找新的基可行解，进行基变换：

(确定换入/进基变量)从原来的非基变量中选择一个变量作为基变量，

(确定换出/出基变量)从原来的基变量中确定一个变量作为非基变量。

3.1.确定进基/换入变量

- 当某些δ_j＞0时，x_j增加则目标函数值还可以增大，要将某个非基变量x_j换到基变量中去(称为换入/进基变量)。

$$Z = C_B B^{-1} b + \left(C_N - C_B B^{-1} N \right) x_N = C_B B^{-1} b + \sum_{j=m+1}^{n} \delta_j x_j$$

- 若两个以上δ_j＞0，一般选δ_j＞0中的最大者，即：

$$\delta_k = \max_{m+1 \le i \le n} \left\{ \delta_i \middle| \delta_i > 0 \right\}$$

3.2.确定换出/出基变量

$$\max \quad Z = CX \qquad\qquad \max \quad Z = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) x_N$$

$$\begin{cases} AX = b \quad \sum_{j=1}^{n} P_j X_j = b \\ X \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \\ x_B \geq 0, x_N \geq 0 \end{cases}$$

初始可行解$x^{(0)} = \begin{bmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix}$

3.2.确定换出/出基变量(补1)

- $P_1,P_2\cdots P_m$是一组线性独立向量组，对应的基可行解是$X^{(0)}$，则：

$$\sum_{i=1}^{m} P_i x_i^{(0)} = b \qquad (1)$$

- $P_{m+1},P_{m+2}\cdots P_{m+t}\cdots P_n$可用$P_1,P_2\cdots P_m$线性表示，若非基向量$P_{m+t}$为换入变量，有不全为0的一组β，使：

$$P_{m+t} - \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,m+t} P_i = 0 \qquad (2)$$

- 由(1) +θ(2) 得：(其中θ>0)

$$\sum_{i=1}^{m} P_i\left(x_i^{(0)} - \theta\beta_{i,m+t}\right) + P_{m+t}\theta = b \qquad (3)$$

3.2.确定换出/出基变量(补2)

由(3)可得满足(1)另一基可行解$x^{(1)}$，其中$\theta>0$是$x^{(1)}$第m+t个坐标值：

$$x^{(1)}=\left(x_1^{(0)}-\theta\beta_{1,m+t}\cdots x_m^{(0)}-\theta\beta_{m,m+t},0\cdots\theta\cdots0\right)^T$$

对所有i=1,2···m存在$x_i^{(1)}=x_i^{(0)}-\theta\beta_{i,m+t}\geq0$且这m个不等式中至少有一个取等号。当$\beta_{i,m+t}\leq0$时，$x_i^{(1)}=x_i^{(0)}-\theta\beta_{i,m+t}\geq0$显然成立，令：

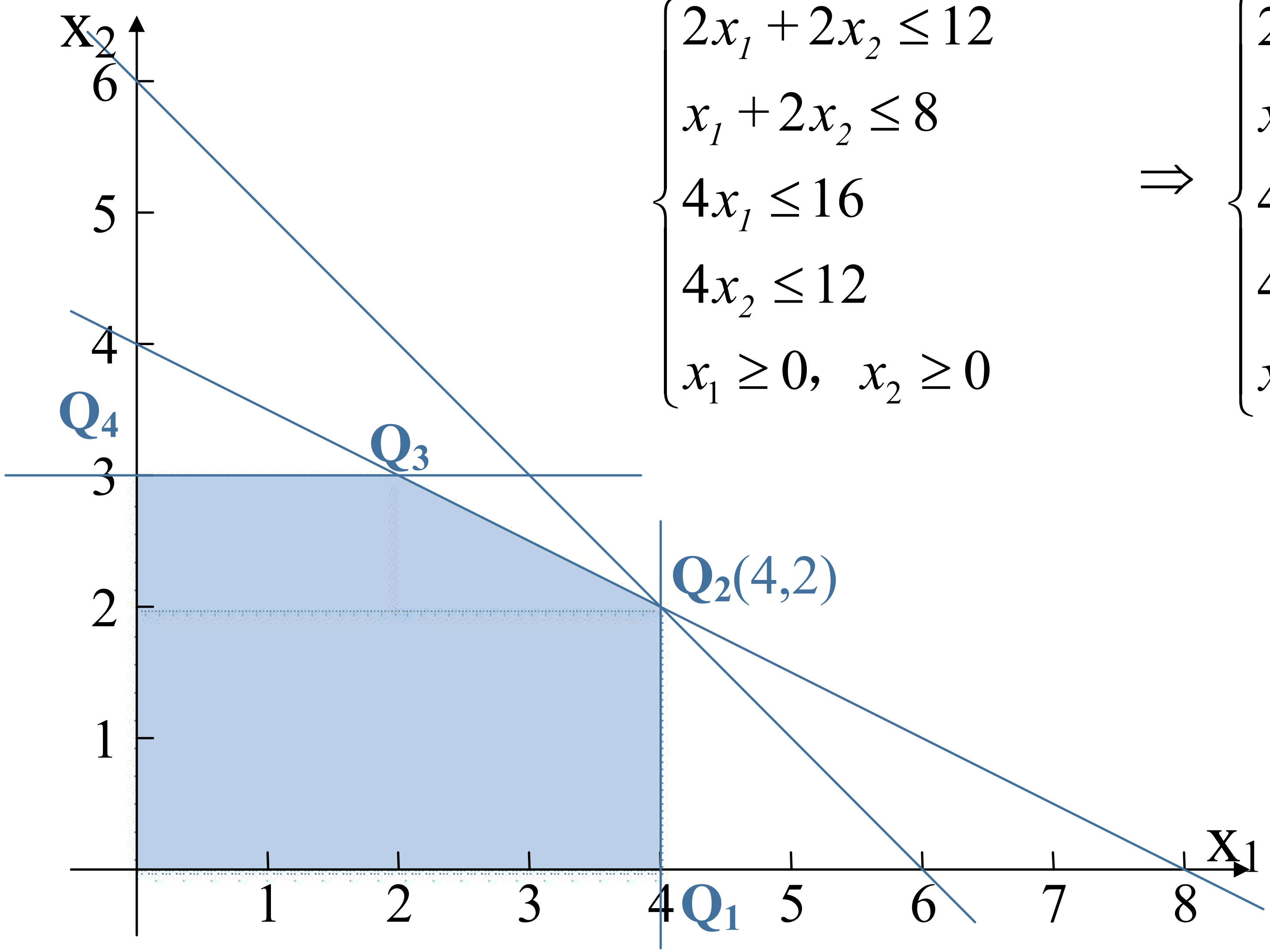
$$\theta=\min_i\left\{\frac{x_i^{(0)}}{\beta_{i,m+t}}\middle|\beta_{i,m+t}>0\right\}=\frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}}$$

x_l为出基变量，易证：非零分量P_j($j=1,2\cdots m$，$j\neq l$)与P_{m+t}线性独立，即：经基变换得到的解是基可行解。

3.基变换总结归纳

从一个基可行解到另一个基可行解的变换，就是进行一次基变换。从几何意义上讲，就是从可行域的一个顶点转向另一个顶点。

Ps：相邻的基可行解(从一个基可行解转换为相邻的基可行解)



$$\max \quad Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\max \quad Z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_5 = 16 \\ 4x_2 + x_6 = 12 \\ x_j \ge 0, \quad j = 1 \cdots 6 \end{cases}$$

C_j			2	3	0	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	12	2	2	1	0	0	0
0	x_4	8	1	2	0	1	0	0
0	x_5	16	4	0	0	0	1	0
0	x_6	12	0	[4]	0	0	0	1
①检验数			2	3	0	0	0	0
0	x_3	6	2	0	1	0	0	-1/2
0	x_4	2	[1]	0	0	1	0	-1/2
0	x_5	16	4	0	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	0	1/4
②检验数			2	0	0	0	0	-3/4

$Z=0$

$\max\{\delta_j\}=3$

故x_2为进基变量

$\theta=\min\left\{\frac{12}{2},\frac{8}{2},\frac{12}{4}\right\}=3$

故x_6为出基变量

$Z=9$

C_j			2	3	0	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	6	2	0	1	0	0	-1/2
0	x_4	2	[1]	0	0	1	0	-1/2
0	x_5	16	4	0	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	0	1/4
②检验数			2	0	0	0	0	-3/4
0	x_3	2	0	0	1	-2	0	1/2
2	x_1	2	1	0	0	1	0	-1/2
0	x_5	8	0	0	0	-4	1	[2]
3	x_2	3	0	1	0	0	0	1/4
③检验数			0	0	0	-2	0	1/4

$Z=9$

$\delta_1 > 0$

故x_1为进基变量

$$\theta=\min\left\{\frac{6}{2},\frac{2}{1},\frac{16}{4}\right\}=2$$

故x_4为出基变量

$Z=13$

	C_j		2	3	0	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	2	0	0	1	-2	0	1/2
2	x_1	2	1	0	0	1	0	-1/2
0	x_5	8	0	0	0	-4	1	[2]
3	x_2	3	0	1	0	0	0	1/4
③检验数			0	0	0	-2	0	1/4
0	x_3	0	0	0	1	-1	-1/4	0
2	x_1	4	1	0	0	0	1/4	0
0	x_6	4	0	0	0	-2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	0	1/2	-1/8	0
④①检验数			0	0	0	-3/2	-1/8	0

$Z=13$

$\delta_6 > 0$

故x_6为进基变量

$$\theta=\min\left\{\frac{2}{1/2},\frac{8}{2},\frac{3}{1/4}\right\}=4$$

故x_3　x_5均可为出基变量

取x_5为出基变量

$Z=14$

最优解$x_1=4$　$x_2=2$　$x_3=0$

$x_4=0$　$x_5=0$　$x_6=4$

	C_j		2	3	0	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	2	0	0	1	-2	0	[1/2]
2	x_1	2	1	0	0	1	0	-1/2
0	x_5	8	0	0	0	-4	1	2
3	x_2	3	0	1	0	0	0	1/4
③检验数			0	0	0	-2	0	1/4
0	x_6	4	0	0	2	-4	0	1
2	x_1	4	1	0	1	-1	0	0
0	x_5	0	0	0	-4	4	1	0
3	x_2	2	0	1	-1/2	1	0	0
④②检验数			0	0	-1/2	-1	0	0

$Z=13$

$\delta_6 > 0$

故x_6为进基变量

$$\theta=\min\left\{\frac{2}{1/2},\frac{8}{2},\frac{3}{1/4}\right\}=4$$

故x_3　x_5均可为出基变量

取x_3为出基变量

$Z=14$

最优解$x_1=4$　$x_2=2$　$x_3=0$

$x_4=0$　$x_5=0$　$x_6=4$

1.4.线性规划与单纯形法——单纯形表

- ✓ 当确定X_6为换入变量计算θ值时，有两个相同的最小值：2/0.5，8/2，当任选取其中一个基变量作为换出变量时，则下表中另一基变量的值将等于0，这种现象称为**退化**。含一个或者多个基变量为0的基可行解称为退化的基可行解。
- ✓ 当发生退化现象时，从理论上讲，有可能出现计算过程的循环，但在实际问题的线性规划模型，计算中未曾出现过循环现象。
- ✓ 因此，出现退化现象时可以任意决定哪一个变量作为换出变量，不必考虑理论上可能出现循环的后果。

1.5 单纯形法的进一步讨论

1.5.1 人工变量法（大M法）

前面讨论了线性规划问题的约束条件若为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i\,, \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

化成标准形式时在每个不等式的左端添加一个松弛变量，由此在约束方程的系数矩阵中包含一个单位矩阵，选这个单位矩阵作为初始基，使得求初始基可行解和建立初始单纯形表都十分方便。

当线性规划的约束条件都是等式，而系数矩阵中又不包含单位矩阵，往往采用添加人工变量的方法来人为构造一个单位基矩阵。

当约束条件是“≥”的情况下，可在左端减去一个大于等于0的剩余变量（松弛变量）化为等式，然后再添加一个人工变量。

例 用单纯形法求解线性规划问题

$$\max z = -3x_1 + x_3 \tag{1.28a}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 & (1.28b) \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 & (1.28c) \\ 3x_2 + x_3 = 9 & (1.28d) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & (1.28e) \end{cases}$$

解 将此问题化为标准形式，有

$$\max z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_j \geq 0\,, j = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

其约束系数矩阵为

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{1.29}$$

1.5 单纯形法的进一步讨论

式（1.29）中不存在单位矩阵，如果从中确定一个基，则需要求解联立方程组才能找出一个基解，还不一定是基可行解。此外，即使找出了基可行解，但由于基不是单位矩阵，建立初始单纯形表仍会有困难，为此在（1.29）中人为地添加两列单位向量P_6, P_7

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.30)$$

线性规划（1.28）的约束条件可相应表示为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_j \geq 0\,, j = 1,2,\ldots,7 \end{cases}$$

因P_6,P_7是人为添加的，其对应变量x_6,x_7被称为人工变量，在约束条件中加入人工变量后，要求人工变量不影响目标函数的取值，为了修正目标函数，假定人工变量在目标函数中的系数为足够大的一个值，用“$-M$”代表，只要人工变量取值不为0，目标函数就不可能极大化。对剩余变量，因实质上也是松弛变量，因此目标函数中的系数也是0，这样目标函数为

$$\max z=-3x_1+x_3+0x_4+0x_5-Mx_6-Mx_7$$

从约束条件的系数矩阵中看到，P_4,P_6,P_7都是单位向量，可以此作为基确定初始基可行解，在用单纯形法求解时，M可作为一个代数符号一起参与运算，用单纯形法求解过程如下：

$c_j \rightarrow$			-3	0	1	0	0	-M	$-M$
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0
$-M$	x_6	1	-2	[1]	-1	0	-1	1	0
$-M$	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1
σ_j			$-2M-3$	$4M$	1	0	$-M$	0	0
0	x_4	3	[3]	0	2	1	1	-1	0
0	x_2	1	-2	1	-1	0	-1	1	0
$-M$	x_7	6	[6]	0	4	0	3	-3	1
σ_j			$6M-3$	0	$4M+1$	0	$3M$	$-4M$	0
0	x_4	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
0	x_2	3	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
-3	x_1	1	1	0	$\left[\frac{2}{3}\right]$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
σ_j			0	0	3	0	3/2	$-M-\frac{3}{2}$	$-M+\frac{1}{2}$

0	x_4	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
0	x_2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
1	x_3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	
σ_j			$-\frac{9}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-M+\frac{3}{4}$	$-M-\frac{1}{4}$

由上例可看出运用大M法时，若是通过手工求解，其计算过程虽有些繁琐，但无太大困难。可是，若运用大M法在计算机上进行运算，必须对M给出具体的赋值，如何选择一个合适的充分大的正数作为M的取值是一个难点。

1.5.2 两阶段法

两阶段法的第一阶段是先求解一个目标函数中只包含人工变量的线性规划问题，即令目标函数中其他变量系数为0，人工变量的系数取某个正数（一般取1），在保持原问题的约束条件不变的情况下求这个目标函数的极小化时的解。

虽然在第一阶段中，当人工变量的取值为0时，目标函数也为0，这时候的最优解就是原线性规划问题的一个可行解。

如果第一阶段求解结果最优解的目标函数不为0，也即最优解的基变量中含有人工变量，表明原线性规划问题无可行解。

当第一阶段求解结果表明问题有可行解时，第二阶段是从第一阶段最终单纯形表出发，去掉人工变量，并按问题原来的目标函数，继续寻找问题的最优解。

1.5 单纯形法的进一步讨论

$$\max z = -3x_1 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,7 \end{cases}$$

利用两阶段法求解此线性规划问题，第一阶段的线性规划问题可写为：

$$\min w = x_6 + x_7 \qquad \max(-w) = -x_6 - x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,7 \end{cases}$$

1.5 单纯形法的进一步讨论

用单纯形法求解过程如下表

	c_j →		0	0	0	0	0	-1	-1
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0
-1	x_6	1	-2	[1]	-1	0	-1	-1	0
-1	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1
	σ_j		-2	4	0	0	-1	0	0
0	x_4	3	[3]	0	2	1	1	-1	0
0	x_2	1	-2	1	-1	0	-1	1	0
-1	x_7	6	[6]	0	4	0	3	-3	1
	σ_j		6	0	4	0	3	-4	0
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3
0	x_1	1	1	0	2/3	0	1/2	-1/2	1/6
	σ_j		0	0	0	0	0	-1	-1

1.5 单纯形法的进一步讨论

第二阶段是将上表中的人工变量x_6, x_7除去，目标函数改为

$$\max z = -3x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

再从上表中的最后一个表出发，继续用单纯形法计算，求解过程如下表

	c_j		-3	0	1	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0
-3	x_1	1	1	0	[2/3]	0	1/2
	σ_j		0	0	3	0	3/2
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2
0	x_2	5/2	-1/2	1	0	0	-1/4
1	x_3	3/2	3/2	0	1	0	3/4
	σ_j		-9/2	0	0	0	-3/4

两阶段法的第一阶段是先求解一个目标函数中只包含人工变量的线性规划问题，即令目标函数中其他变量系数为0，人工变量的系数取某个正数（一般取1），在保持原问题的约束条件不变的情况下求这个目标函数的极小化时的解。

（1）最优目标值w=0，且人工变量皆为非基变量。从第一阶段的最优解中去掉人工变量后，即为原线性规划的一个初始基可行解，再求原问题，从而进入第二阶段。

（2）最优目标值w=0，且存在人工变量为基变量，但取值为零。把某个非基变量与该人工变量进行调换，进入第二阶段。

（3）最优目标值w≠0，也即最优解的基变量中含有人工变量，且不为0。表明原线性规划问题无可行解。

1.5.3 关于解的判别

（1）$X^{(0)}=\left(b_1',b_2',\cdots b_m',0\cdots 0\right)^T$ 为对应于基B 的一个基可行解

a^o所有$\delta_j \le 0\left(j=m+1,m+2\cdots n\right)$

$\Rightarrow$ <u>最优解</u>

b^o所有$\delta_j \le 0\left(j=m+1,m+2\cdots n\right)$且存在某个非基变量检验数$\delta_{m+k}=0$ 且按公式

$\theta=\min\limits_i\left\{\dfrac{x_i}{a_{i,m+k}}\middle| a_{i,m+k}>0\right\}$可以找到$\theta>0$,这表明可以找到另一顶点（基可行解）

目标函数值也达到最大。

$\Rightarrow$ <u>无穷多解</u>

c^o存在某$\delta_{m+k}>0$且对所有i,有$a_{i,m+k}\le 0\left(i=1,2\cdots m\right)$

$\Rightarrow$ <u>无界解/无最优解</u>

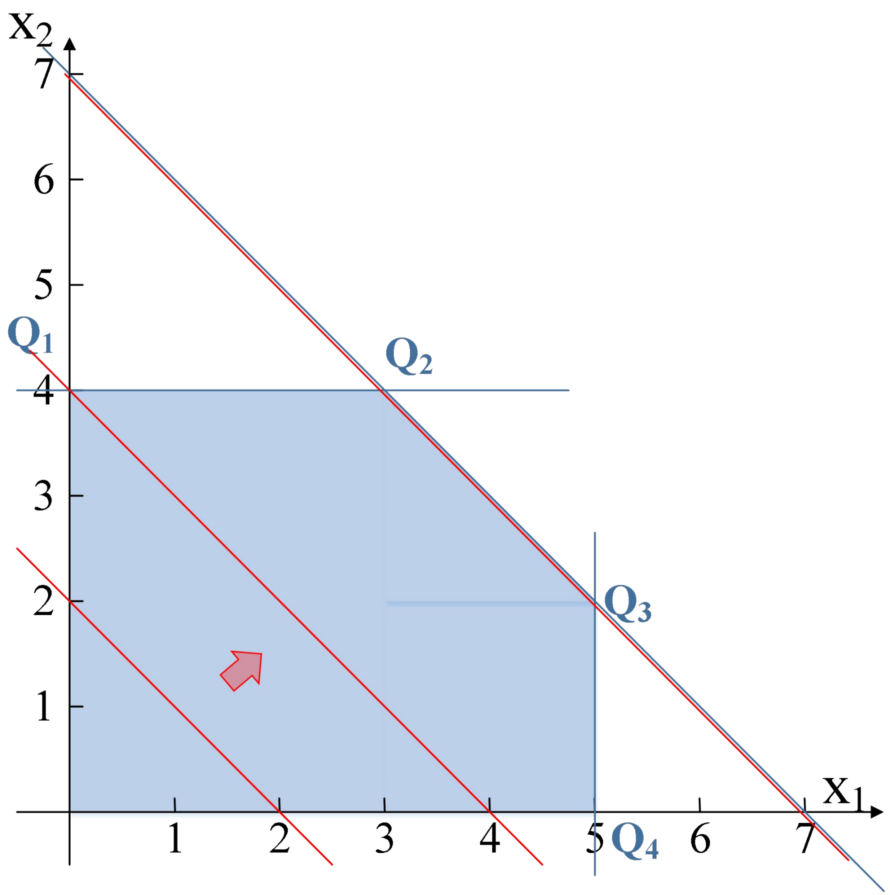
（2） 若引入人工变量后，问题满足最优性条件时基变量仍含有人工变量，且人工变量不为零时，问题无可行解。

下面对图解法中已求解过的几个例子，再用单纯形法计算，对比一下各种解在单纯形表中的出现形式。

（1）有无穷多最优解

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



1.5 单纯形法的进一步讨论

下面对图解法中已求解过的几个例子，再用单纯形法计算，对比一下各种解在单纯形表中的出现形式。

（1）有无穷多最优解

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

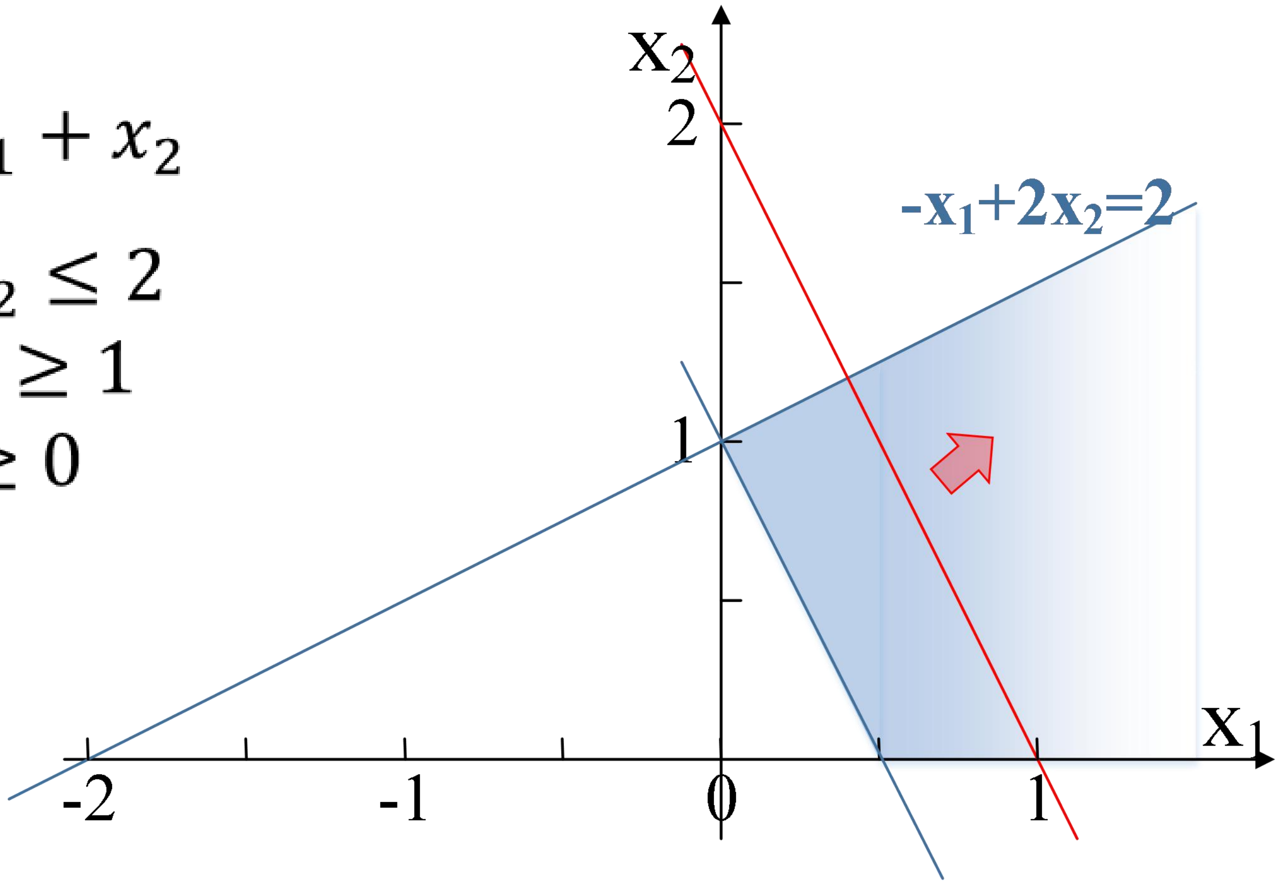
$$\max z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\dots,5 \end{cases}$$

（2）无界解（或无最优解）

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



（2）无界解（或无最优解）

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

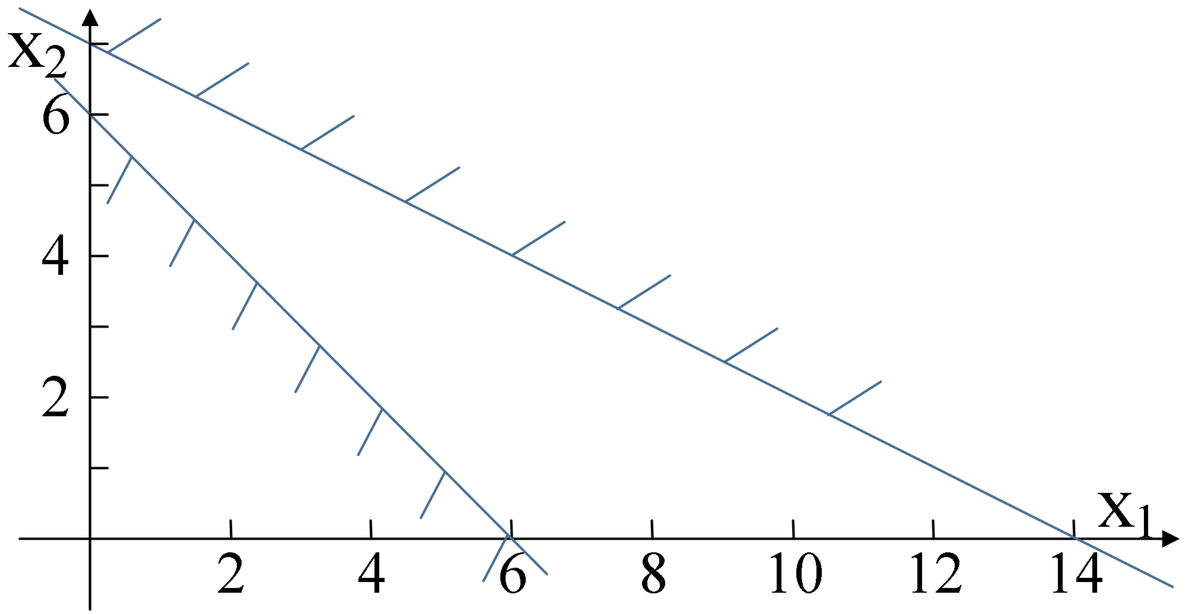
$$\max z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_j \ge 0\,, j = 1,2,\dots,5 \end{cases}$$

（3）无可行解

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



（3）无可行解

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 14 \\ x_j \geq 0\,, j = 1,2,\dots,5 \end{cases}$$

1.5 应用举例

例 1 工业原材料的合理利用

要制作100套钢筋架子，每套有长2.9m、2.1m和1.5m的钢筋各一根，已知原材料长7.4m，应如何切割使用原材料更节省？

1.5 应用举例

例2. 某昼夜服务的公交线路每天各时间段内所需司机和乘务人员数如下：

班次	时间	所需人数
1	6：00 —— 10：00	60
2	10：00 —— 14：00	70
3	14：00 —— 18：00	60
4	18：00 —— 22：00	50
5	22：00 —— 2：00	20
6	2：00 —— 6：00	30

设司机和乘务人员分别在各时间段一开始时上班，并连续工作八小时，问该公交线路怎样安排司机和乘务人员，既能满足工作需要，又配备最少司机和乘务人员?

1.5 应用举例

例3．福安商场是个中型的百货商场，它对售货员的需求经过统计分析如下表：

时间	所需售货员人数
星期日	28
星期一	15
星期二	24
星期三	25
星期四	19
星期五	31
星期六	28

为了保证售货人员充分休息，售货人员每周工作 5天，休息两天，并要求休息的两天是连续的。问应该如何安排售货人员的作息，既满足工作需要，又使配备的售货人员的人数最少？