

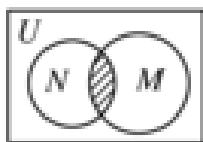
1.1 集合

一、选择题

1. 下列四个集合中，是空集的是_____

- A. $\{x \mid x+3=3\}$ B. $\{(x,y) \mid y^2=-x^2, x,y \in \mathbf{R}\}$
C. $\{x \mid x^2 < x\}$ D. $\{x \mid x^2 - x + 1 = 0\}$

2. 已知全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $M = \{x \mid -2 \leq x-1 \leq 2\}$ 和 $N = \{x \mid x = 2k-1, k = 1, 2, \dots\}$ 的关系的韦恩(Venn)图如右图所示，则阴影部分所示的集合的元素共有_____.



- A. 3 个 B. 2 个 C. 1 个 D. 无穷多个

3. 集合 $A = \{1, 0, 3\}$ 的真子集个数是_____

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

4. 已知集合 $P = \{x \mid x^2 = 1\}$, $Q = \{x \mid mx = 1\}$ ，若 $Q \subseteq P$ ，则实数 m 为_____

- A. 1 B. -1 C. 1 或 -1 D. 0, 1 或 -1

5. 设集合 $A = \{x \mid x^2 - x = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + x = 0\}$ ，则集合 $A \cap B =$ _____

- A. 0 B. $\{0\}$ C. \emptyset D. $\{-1, 0, 1\}$

6. 设集合 $A = \{k^2 - k, 2k\}$ ，则实数 k 的取值范围是_____

- A. $\{k \mid k \neq 0\}$ B. $\{k \mid k \neq 3\}$
C. $\{k \mid k \neq 0 \text{ 且 } k \neq 3\}$ D. $\{k \mid k \neq 0 \text{ 或 } k \neq 3\}$

7. 集合 $P = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ ，若 $a \in P$, $b \in P$ ，有 $a \odot b \in P$ ，则运算 \odot 可能是_____

- A. 加法 B. 减法 C. 除法 D. 乘法

8. 下列命题正确的有_____

- ①很小的实数可以构成集合；
②集合 $\{y \mid y = x^2 - 1\}$ 与集合 $\{(x,y) \mid y = x^2 - 1\}$ 是同一个集合；
③由 $1, \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, |-\frac{1}{2}|, 0.5$ 这些数组成的集合有 5 个元素；
④集合 $\{(x,y) \mid xy \leq 0, x,y \in \mathbf{R}\}$ 是指第二和第四象限内的点集.

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

9. 含有三个实数的集合可表示为 $\{a, \frac{b}{a}, 1\}$, 也可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$, 则 $a^{2006} + b^{2006}$ 的值为_____

- A. 0 B. 1 C. -1 D. ± 1

10. 若集合 $M = \{(x, y) | x + y = 0\}$, $N = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 0\}$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, 则有_____

- A. $M \cup N = M$ B. $M \cup N = N$ C. $M \cap N = M$ D. $M \cap N = \emptyset$

11. 下面有四个命题:

- ①集合 \mathbf{N} 中最小的数是 0;
②若 $-a$ 不属于 \mathbf{N} , 则 a 属于 \mathbf{N} ;
③若 $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, 则 $a+b$ 的最小值为 2;
④ $x^2 + 1 - 2x = 0$ 的解可表示为 $\{1, 1\}$.

其中正确命题的个数为_____

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

12. 方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$ 的解集是_____

- A. (5,4) B. (5,-4) C. $\{(-5,4)\}$ D. $\{(5,4)\}$

二、填空题

13. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{2\}$, $(C_U A) \cap (C_U B) = \{1, 9\}$, $(C_U A) \cap B = \{4, 6, 8\}$, 则集合 $A =$ _____, $B =$ _____.

14. 方程组 $\begin{cases} x+y=3, \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ 的解集为_____.

15. 若 $\{1, a, \frac{b}{a}\} = \{0, a^2, a+b\}$, 则 $a^{2008} + b^{2008}$ 的值为_____.

16. 某班有 36 名同学参加数学、物理、化学课外探究小组, 每名同学至多参加两个小组. 已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26, 16, 13, 同时参加数学和物理小组的有 6 人, 同时参加物理和化学小组的有 4 人, 则同时参加数学和化学小组的有_____人.

17. 集合 $M = \{m | m = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*, m < 60\}$ 的元素个数是_____, 这些元素的和为_____.

18. 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$ 只有一个元素, 则 a 的值为_____.

19. 已知集合 $A = \{x | |x| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | x \geq a\}$, 且 $A \not\subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.

20. 设集合 $A \subseteq \{2,3,5\}$, 则集合 A 的个数为_____；如果集合 A 中至多有一个奇数, 则这样的集合 A 共有_____个.

21. 集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| \leq 5\}$ 中的最小整数为_____.

22. 设集合 $\{x \mid |x - 3| + |x - 4| < m\} \neq \emptyset$, 则 m 的取值范围是_____.

三、解答题

23. 关于 x 的不等式 $kx^2 - 6kx + k + 8 < 0$ 的解集为空集, 求实数 k 的取值范围.

24. 若集合 $M = \{x \mid x^2 - x - 2 > 0\}$, $T = \{x \mid mx + 1 < 0\}$, 且 $M \supseteq T$. 求实数 m 的取值范围.

25. 已知集合 $A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\}$, $B = \{-4, a + 3, a^2 - 2a + 2, a^3 + a^2 + 3a + 7\}$, 若 $A \cap B = \{2, 5\}$, 求实数 a 的值, 并求 $A \cup B$.

26. 已知集合 $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 中只有一个元素, 试求 a 的值, 并写出这个元素;

(2) 若 A 中至少有一个元素, 试求 a 的取值范围.

27. 求满足条件 $\{1, 2\} \subseteq A \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合 A 的个数.

28. 已知集合 $A = \{a^2, a + 1, -3\}$, $B = \{a - 3, 2a - 1, a^2 + 1\}$, 若 $A \cap B = \{-3\}$, 求实数 a 的值.

答案

第一部分

1. D 2. B 3. B 4. D 5. B
6. C 7. D 8. A 9. B 10. A
11. B 12. D

第二部分

13. $\{2, 3, 5, 7\}; \{2, 4, 6, 8\}$.
14. $\{(2, 1)\}$
15. 1
16. 8
17. 30; 900
18. 0 或 1
19. $a \leq -2$
20. 8; 6
21. -3
22. $m > 1$

第三部分

23. (1) (1) 当 $k = 0$ 时, 原不等式化为 $8 < 0$, 显然符合题意.
(2) 当 $k \neq 0$ 时, 要使二次不等式的解集为空集, 则必须满足:

$\begin{cases} k > 0 \\ \Delta = (6k)^2 - 4 \times k(8+k) \leq 0 \end{cases}$, 解得 $0 < k \leq 1$, 综合 (1) (2) 得 k 的取值范围为 $\{k \mid 0 \leq k \leq 1\}$.

24. (1)

$$M = \{x \mid x^2 - x - 2 > 0\} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

对 $mx + 1 < 0$ 有 $mx < -1$

① 当 $m > 0$ 时, $x < -\frac{1}{m}$, 此时

$$T = \left\{x \mid x < -\frac{1}{m}\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{m}\right).$$

由 $T \subseteq M$ 知 $-\frac{1}{m} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{m} \geq 1$, 所以 $0 < m \leq 1$.

② 当 $m < 0$ 时, $x > -\frac{1}{m}$, 此时

$$T = \left(-\frac{1}{m}, +\infty\right),$$

由 $T \subseteq M$ 知 $-\frac{1}{m} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{m} \leq -2$, 所以 $-\frac{1}{2} \leq m < 0$

③ 当 $m = 0$ 时,

$$T = \emptyset,$$

显然 $\emptyset \subseteq M$.

由①②③可得: $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

25. (1) 因为 $A \cap B = \{2, 5\}$, 所以 $5 \in A$.

所以 $a^3 - 2a^2 - a + 7 = 5$. 所以 $a = 2$ 或 $a = \pm 1$.

当 $a = 2$ 时, $B = \{-4, 5, 2, 25\}$, $A \cap B = \{2, 5\}$, 与题设相符;

当 $a = 1$ 时, $B = \{-4, 4, 1, 12\}$, $A \cap B = \{4\}$, 与题设不符;

当 $a = -1$ 时, $B = \{-4, 2, 5, 4\}$, $A \cap B = \{2, 4, 5\}$, 与题设不符.

综上所述, $a = 2$, 且 $A \cup B = \{2, 4, 5\} \cup \{-4, 5, 2, 25\} = \{-4, 2, 4, 5, 25\}$.

26. (1) 当 $a = 0$ 时, $x = -\frac{1}{2}$, 适合, 所以 $A = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$;

当 $a \neq 0$ 时, 则 $\Delta = 0$, 解得 $a = 1$, 所以 $A = \{-1\}$.

26. (2) 当 A 中有一个元素时, 由 (1), 得 $a = 0$ 或 $a = 1$;

当 A 中有两个元素时, $\Delta > 0$, 得 $a < 1$.

综上, 得 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

27. (1) $\{1, 2\}; \{1, 2, 3\}; \{1, 2, 4\}; \{1, 2, 5\}; \{1, 2, 3, 4\}; \{1, 2, 3, 5\}; \{1, 2, 4, 5\};$

28. (1) $\because A \cap B = \{-3\}$,

$\therefore -3 \in B$, 而 $a^2 + 1 \neq -3$,

1、当 $a - 3 = -3$ 即 $a = 0$ 时, $A = \{0, 1, -3\}$, $B = \{-3, -1, 1\}$,

这样 $A \cap B = \{-3, 1\}$ 与 $A \cap B = \{-3\}$ 矛盾;

2、当 $2a - 1 = -3$, $a = -1$, 符合 $A \cap B = \{-3\}$

综上可知: $a = 2$.