

-2020学年第一学期

《高等数学A(一)》期末考试试卷

(闭卷 时间 12 分钟)

一、选择题 (每小题2分,共 10分)

1. 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在下列 ( ) 区间内有界。

- (A)  $(-1, 0)$  (B)  $(0, 1]$  (C)  $(1, 2)$  (D)  $(2, 3)$

2. 设函数  $f(x)$  具有二阶导数, 且  $f'(0) > 0, f''(0) > 0$ ,  $h$  为自变量  $x$  在点  $0$  处的增量,  $\Delta f$  与  $df$  分别为  $f(x)$  在点  $0$  处对应的增量与微分, 若  $h > 0$ , 则 ( )。

- (A)  $\Delta f < df$  (B)  $\Delta f > df$  (C)  $\Delta f = df$  (D)  $\Delta f$  与  $df$  的大小关系不能确定

3. 设  $f(x)$  有二阶连续导函数, 且  $f'(0) = f''(0) = 0$ ,  $f'''(0) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $x=0$  处 ( )。

- (A)  $f(x) > f(0)$  (B)  $f(x) < f(0)$  (C)  $f(x) = f(0)$  (D)  $f(x)$  与  $f(0)$  的大小关系不能确定

4. 曲线  $y = 1 + \ln x$  有 ( ) 条渐近线

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

5. 下列反常积分中收敛的是 ( )。

- (A)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  (B)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  (C)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$  (D)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$

二、填空题 (每小题2分,共 1 分)

6. 设  $y = y(x)$  由方程  $y^2 + xy = 1 + x$  所确定, 则曲线  $y = y(x)$  在  $x=0$  处的切线方程为 \_\_\_\_\_。

7. 曲线  $y = \sin x$  在  $x = \frac{\pi}{2}$  处的曲率半径为 \_\_\_\_\_。

8. 设  $f(x)$  有连续导函数且  $f'(x) > 0, h(x) = \sin x$ , 则  $\int_0^{\pi} f(x) h(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = \int_0^{\pi} f(x) dx$  \_\_\_\_\_。

半径为1的半圆周  $y = \sqrt{1-x^2}$  的质心坐标为

## 二、计算题 (每小题 9 分, 共 36 分)

设  $f(x)$  可导, 且  $f(0)=0$ ,  $f'(0)=1$ ,

与拐

## 计算

15. 已知  $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  ( $n$  为正整数), 求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

16. 设  $f(x), g(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上连续,  $g(x)$  为偶函数, 且  $f(x)$  满足条件  $f(x) + f(-x) = 1$  ( $f$  为常数).

(1) 证明:  $\int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{2}$ .

(2) 利用 (1) 的结果计算  $\int_0^{\pi} \arctan x dx$ .

## 四、应用题 (每小题 12 分, 共 24 分)

17. 设曲线  $y = 1 - x^2$  在点  $(1, 0)$  和点  $(-1, 0)$  处的法线与曲线所围成封闭图形为  $D$ .

(1) 当  $D$  的面积最小时, 求  $a$  的值和最小面积.

(2) 当  $D$  的面积最小时, 求  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

## 五、证明题 (每小题 7 分, 共 14 分)

18. 设  $f(x)$  可导,  $f(0)=0$ ,  $f'(x)$  单调递减. 证明  $f(x)$  对  $x > 0$  有

$f(x) < 0$ .

19. 已知  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  上二阶可导,  $f(0)=0$ ,  $f(2)=1$ .

试证: 存在  $\xi \in (0, 2)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .